نام و نام خانوادگی: مهندس سهیل حاج کرم

نام آزمون: ۱۰۰ تست ریاضی معادله و تابع درجه دو

آموزشگاه پرسا

ریاضی 2

فصل اول : هندسه تحلیلی و جبر

درس دوم : معادله ی درجه ی دوم و تابع درجه ی دوم

معادله ی درجه ی دوم

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) معادلهٔ $\dfrac{x^{2}+ax+4}{x^{2}-2x-3}=0$ فقط یک ریشه دارد. چند مقدار برای a ممکن است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

متوسط- سراسری- ۱۳۸۱

۲) به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^{2}+ax+a-\dfrac{3}{2}=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

(۱) $a<2$ یا $a>6$ (۲) $a<3$ یا $a>4$ (۳) $2<a<6$ (۴) $3<a<4$

۳) پنج عدد طبیعی متوالی مفروضند. مجموع مربعات سه تای اول برابر است با مجموع مربعات دوتای آخر، کوچک ترین آن ها کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۸

۴ معادله‌ی $۲+ = \frac{۴}{x} + ۳x$ چه وضعی دارد؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) دو ریشه‌ی متمایز دارد (۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد (۳) دو ریشه‌ی مختلف العلامه دارد (۴) ریشه‌ی مضاعف دارد

۵ به ازای کدام مقادیر a، عبارت $y = x^۲ - (a+۲)x + ۲a$ به صورت مربع کامل یک دوجمله‌ای در می آید؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) -۱

۶ به ازای کدام مقدار m فقط یکی ار ریشه های معادله ی $۲x^۲ + (m^۲ - ۱)x + m^۲ - ۳m + ۲ = ۰$ برابر صفر است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) فقط ۲ (۲) فقط ۱ (۳) ۲ و ۱ (۴) ±۱

۷ مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است. مجموع این دو عدد کدام است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۵ (۴) ۴۷

۸ معادله‌ی $(x^۲ + ۲)^۲ - ۴(x^۲ + ۲) + ۳ = ۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

۹ اگر $x^{۲} + ۴x + ۱ = ۰$ باشد. حاصل $۱ + (x + ۲)^{۴}$ کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۰ صفرهای تابع $y = ۲x^{۲} - (m + ۲)x + m$ و نقطهٔ تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^{۲} - mx + ۱$ باشد؟

سخت- سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۱ در بازهٔ (a, b) عبارت $۱۵x^{۲} + ۷۳x + ۱۴$ منفی و عبارت $|۱ - \frac{x - ۱}{۲}|$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

متوسط- سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۶۷}{۱۵}$

۱۲ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلعش روی محورهای مختصات قرار دارد و یک رأسش در ربع اول دستگاه مختصات روی خط $y + x = ۸$ قرار دارد، کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۳ به ازای چند مقدار طبیعی معادلهٔ $(m + ۶)x^{۲} - ۲mx + m - ۳ = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت است؟

متوسط- منتا- ۱۴۰۰

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱۴ مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $(x-۱)^۴ + ۲x = x^۲ + ۷$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱۵ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۷(x+\frac{۱}{x}) = ۹ + ۲x^۲ + \frac{۲}{x^۲}$ باشد، حاصلضرب آنها کدام است؟

(۱) $\frac{۵}{۲}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{۵}{۲}$ (۴) -۱

سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱۶ کدام معادله، تعداد جواب‌های کمتری نسبت به معادلهٔ بقیهٔ گزینه‌ها دارد؟

(۱) $x^۴ - ۷x^۲ + ۱۲ = ۰$ (۲) $x^۴ + ۸x^۲ + ۷ = ۰$

(۳) $(x^۲+x)^۲ - ۱۴(x^۲+x) + ۲۴ = ۰$ (۴) $۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳$

۱۷ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(x^۲-۱)^۲-۴x^۲+۷=۰$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۷

۱) صفر ۲) ریشه ندارد ۳) $۴+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲+\sqrt{۲}$

۱۸ حاصل‌ضرب جواب‌های مثبت معادلهٔ $(x^۲-x)^۲-۲۶(x^۲-x)+۱۲۰=۰$ کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۹ -smart

۱) ۱۵ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۹ مجموع ریشه‌های متمایز معادلهٔ $(x^۲-۴x)^۲+۱۲=۷x(۴-x)$ کدام است؟ متوسط- منتاآزمون- ۱۴۰۲

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۲۰ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x(ax^{۲} - x - ۵) = ۲$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشهٔ دیگر آن کدام است؟ سخت- خارج از کشور- ۱۳۸۷

(۱) -۲ (۲) $-\frac{۳}{۲}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۱ به‌ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^{۲} - (m+۳)x + ۵ = ۰$، برابر ۶ می‌باشد؟ متوسط- سراسری- ۱۳۹۳

(۱) $-\frac{۹}{۵}$ (۲) ۱ (۳) $-\frac{۹}{۵}, ۱$ (۴) $-۱, \frac{۹}{۵}$

۲۲ در معادلهٔ درجه دوم $x^{۲} + ۲x - ۴ = ۰$ حاصل $x_۱^{۳} - ۲x_۲^{۲} + ۴x_۲$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم هستند.) سخت- آزاد صبح- ۱۳۸۱

(۱) -۱۶ (۲) ۰ (۳) ۱۶ (۴) -۳۲

۲۳) اگر مجموع مجذورات سه ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(x-۲)(x^۲+mx+m+۳)=۰$ برابر ۱۳ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m چند عضو دارد؟

سخت- ۱۳۹۶ -smart

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۲۴) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲-۲x-۴=۰$ اگر β, α ریشه‌های معادله باشند، حاصل $(\alpha^۲-۴)^۲+۴\beta^۲$ چقدر است؟

سخت- آزاد عصر- ۱۳۸۸

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۲۵) به ازای کدام مقدار m، ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^۲+۳x+m^۲=۲$ ، معکوس یک‌دیگرند؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۰

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۲۶) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲+۵x-۱=۰$ باشند، حاصل عبارت $\dfrac{\alpha^۳\beta+\alpha\beta^۳}{(\alpha^۲+۵\alpha+۴)(\beta^۲+۵\beta+۷)}$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) $-\dfrac{۲۷}{۴۰}$ ۲) $-\dfrac{۹}{۴۰}$ ۳) $\dfrac{۲۷}{۴۰}$ ۴) $\dfrac{۹}{۴۰}$

۲۷) به ازای کدام مقدار m، رابطه‌ی $x_1x_2+x_1+x_2=۴$ بین ریشه های حقیقی معادله‌ی $mx^۲+(۲m-۱)x=۵$ برقرار است؟

متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) هیچ مقدار m

متوسط- آزاد صبح- ۱۳۸۵

۲۸) در معادله‌ی $x^۲-(\sqrt{۲}+۱)x+\sqrt{۲}=۰$ حاصل $x_1^۶+x_2^۶$ چقدر است؟ (x_2, x_1 ریشه های معادله هستند)

۱) ۵ ۲) ۶۵ ۳) ۱۷ ۴) ۹

متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

۲۹) به‌ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(۲-m)x^۲+۳x+m^۲=۰$ معکوس یکدیگرند؟

۱) فقط ۱ ۲) ۲ و ۱- ۳) فقط ۲- ۴) ۱ و ۲-

۳۰) اگر جواب‌های معادلهٔ $x^۲+mx+m=۰$ برابر باشند، مجموع جواب‌های حقیقی معادلهٔ $(m-۳)x^۲-(m+۲)x+۲=۰$ کدام می‌تواند باشد؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

متوسط- منتا- ۱۳۹۸

۳۱) اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x(x-۴)=۶$، α و β باشد، حاصل عبارت $\frac{\beta}{\beta^۲-۶}+\frac{\alpha}{\alpha^۲-۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۳۲) تابع $f(x)=(x-۱)(x^۲-۲mx-m-۱)$ محور طول‌ها را در سه نقطه قطع می‌کند. اگر مجموع مربعات طول نقاط تلاقی تابع $f(x)$ با محور xها برابر ۹ باشد، قدرمطلق تفاضل مقادیر ممکن برای m کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۳۳) معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲+mx+m+۶=۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟ متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) $(-۴,۰)$ ۲) $(-۴,-۲)$ ۳) $(-۶,۰)$ ۴) $(-۶,-۴)$

۳۴) در معادله‌ی درجه دوم $x^۲+۲x-۱=۰$ حاصل $x_۱^۴+۴x_۲^۲-۴x_۲$ چقدر است؟ سخت- آزاد عصر- ۱۳۸۴

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۱ ۴) ۳۴

۳۵) اگر α و β ریشه‌های $۲x^۲-x-۱=۰$ و $\frac{۱}{\beta^۳}$ و $\frac{۱}{\alpha^۳}$ ریشه‌های $x^۲+kx-۸=۰$ باشند، مقدار k کدام عدد است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) ۷ ۲) -۷ ۳) ۹ ۴) -۹

۳۶ معادله‌ی $(k^{۲}+۱)^{۲}x^{۲}-(k+۱)x-۱=۰$ به ازای جمیع مقادیر k : — متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) دو ریشه ی مثبت دارد. (۲) دو ریشه ی منفی دارد. (۳) دو ریشه ی مختلف العلامت دارد. (۴) دو ریشه ی مضاعف دارد.

۳۷ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^{۲}-(۲m+۱)x+m^{۲}+۳=۰$، دو عدد طبیعی متوالی است، مقدار m کدام است؟ — متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۸ اگر عبارت $ax^{۲}-bx+b$ همواره منفی باشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای $\frac{b}{a}$ کدام است؟ — سخت- ۱۴۰۰ -smart

(۱) $(۰,۴)$ (۲) $(-۴,۰)$ (۳) $(۰,۱)$ (۴) $(-۱,۰)$

۳۹ نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}-۲\sqrt{۵}x+a-۴$ محور طول‌ها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند. مجموعهٔ مقادیر ممکن برای $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟ — سخت- ۱۴۰۰ -smart

(۱) $(۱۰,۱۶)$ (۲) $(۱۶,+\infty)$ (۳) $(۰,۱۰)$ (۴) $(۱۰,+\infty)$

۴۰ به ازای کدام مقدار m بین ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۵mx+۱۶=۰$ رابطه ی $x_۱{}^{۳}=x_۲>۰$ برقرار است؟ — متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) $m=۲$ و $m=-۲$ (۲) $m=-۲$ (۳) $m=۲$ (۴) $m=۸$

(۴۱) در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ بین ضرایب، رابطه‌ی $۹a+۳b+c=۰$ برقرار است، یکی از ریشه‌های معادله در کدام گزینه است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) $\frac{۳c}{a}$
(۲) -۳
(۳) $-\frac{b+۳a}{a}$
(۴) $\frac{۲c}{۳a}$

(۴۲) به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲+(m-۱)x=۱$ برابر $\frac{۱۳}{۴}$ است؟

متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

(۱) $۲,-۴$
(۲) $-۳,۴$
(۳) $-۲,۴$
(۴) فقط -۲

(۴۳) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲+۳x-۱=۰$ حاصل ${x_۱}^۳-۳{x_۱}^۲x_۲+۳x_۱{x_۲}^۲-{x_۲}^۳$ کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) $۱۳\sqrt{۱۳}$
(۲) ۱۳
(۳) ۱۶۹
(۴) $۱۶۹\sqrt{۱۳}$

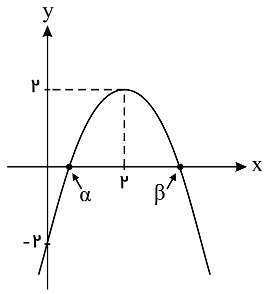
(۴۴) در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$، رابطه‌ی $x_۱+x_۲={x_۱}^۲\cdot{x_۲}^۲$ بین ریشه‌های معادله برقرار است. کدام گزینه درست است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) $b^۲-ac=۰$
(۲) $c^۲+ab=۰$
(۳) $c^۲-ab=۰$
(۴) $ac=۰$

(۴۵) با توجه به نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$، حاصل عبارت $\alpha\beta^۳+۲\alpha^۲$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸



(۱) ۲۴
(۲) ۴۲
(۳) ۱۲
(۴) ۴۰

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۴۶ به ازای کدام مقدار k در معادله‌ی درجه‌ی دوم $۲x^۲ - x + k = ۰$ بین ریشه‌ها رابطه‌ی $x_۱ + ۲x_۲ = \frac{۷}{۲}$ برقرار است؟

(۱) ۱۵ (۲) -۱۲ (۳) ۱۴ (۴) -۱۵

متوسط- منتا- ۱۳۹۶

۴۷ اگر مجموع مربعات جواب‌های معادله‌ی $x^۳ + m(x^۲ + ۱) + ۲x = m$ برابر ۱۲ باشد، m کدام است؟

(۱) ± ۲ (۲) $\pm\sqrt{۵}$ (۳) ± ۴ (۴) $\pm\sqrt{۳}$

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۴۸ در معادله‌ی $۳x^۲ - ۱۷x + m = ۰$ یک ریشه از ۳ برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیش تر است. حاصل $۲m + ۱$ کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۲۱ (۳) ۱۱ (۴) ۲۳

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۴۹ در معادلهٔ $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ حاصل ${x_۱}^۴ + {x_۲}^۴ + ۲{x_۱}^۲{x_۲}^۲$ کدام است؟

(۱) ۴۹ (۲) ۱۲۱ (۳) ۹ (۴) ۲۵

۵۰) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} - ۲x - ۵ = ۰$ باشند، حاصل $\alpha^{۴} + ۲۸\beta$ کدام است؟ سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۱) ۹۹ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۱ ۴) ۱۰۲

۵۱) اگر α و β ریشه های معادله ی $x^{۲} - ۳x + ۱ = ۰$ باشند. حاصل $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ کدام است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۵۲) در معادله ی $x^{۲} - ۸x + ۴ = ۰$ حاصل $\sqrt{x_{۲}} + \sqrt{x_{۱}}$ کدام است؟ ($x_{۲}, x_{۱}$ ریشه های معادله هستند) متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۵۳) معادلهٔ $mx^{۲} + (m-۴)x - \frac{۴}{m} = ۰$ با ریشه‌های α و β مفروض است. اگر $\alpha^{۲} + \beta^{۲}$ برابر ۱ باشد، آن گاه حاصل $۳\alpha^{۲} - ۲\alpha - \beta$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) -۵ ۴) -۳

۵۴ معادله‌ی $(-x-۱)(x-۳)+۲+k^{۲}=۰$ چه وضعی دارد؟ — متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) دو ریشه ی مثبت دارد　۲) دو ریشه ی منفی دارد　۳) دو ریشه ی مختلف العلامت دارد　۴) ریشه ی حقیقی ندارد

۵۵ اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-bx+۱=۰$ برابر $۲-\sqrt{۷}$ باشد ریشه‌ی دیگر کدام است؟ — متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) $\frac{\sqrt{۷}-۳}{۳}$　۲) $\frac{۲-\sqrt{۷}}{۳}$　۳) $\frac{\sqrt{۷}+۲}{۳}$　۴) $\frac{۳-\sqrt{۷}}{۳}$

۵۶ در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^{۲}-ax+a+۲=۰$ تفاضل دو ریشه برابر ۲ است. a کدام است؟ — متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) $-۶\,,\ -۲$　۲) $-۶\,,\ ۲$　۳) $۶\,,\ -۲$　۴) $۶\,,\ ۲$

۵۷ در مورد معادله‌ی درجه‌ی دوم $(\sqrt{۲}+۱)x^{۲}-۲\sqrt{۲}x+\sqrt{۲}-۱=۰$ کدام گزینه درست است؟ — متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) دو ریشه از $\frac{۱}{۲}$ کوچک ترند　۲) دو ریشه از $\frac{۱}{۲}$ بزرگ ترند　۳) دو ریشه از ۱ کوچک ترند　۴) دو ریشه‌ی مثبت دارد

۵۸ معادلهٔ $۴=\frac{a}{x+۳}+x$ دارای دو ریشهٔ α و β است که در رابطهٔ $\alpha=۲\beta+۷$ صدق می‌کنند، مقدار a کدام است؟ — سخت- منتا- ۱۳۹۹

۱) -۶　۲) ۶　۳) ۴　۴) -۴

۵۹) اگر $x = k$ جواب معادلهٔ $\frac{x}{x+2} = \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{x}{x-2}$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $2x^2 - 15kx - 1 = 0$ کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۸

۱) $-\frac{3}{2}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\frac{5}{2}$
۴) $-\frac{5}{2}$

۶۰) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 2x - 6 = 0$ باشند، آن‌گاه حاصل عبارت $(\alpha^2 - 6)^3 + 8\beta^3$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) ۸۸
۲) ۲۶۴
۳) ۴۴
۴) ۳۵۲

۶۱) اگر $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند، در این صورت α و β ریشه‌های کدام معادله می‌باشند؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) $5x^2 - 8x - 7 = 0$
۲) $5x^2 + 9x + 7 = 0$
۳) $5x^2 + 8x + 2 = 0$
۴) $5x^2 + 8x + 7 = 0$

۶۲) اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - bx + c = 0$ برابر $1 \pm \sqrt{3}$ باشند، آن‌گاه حاصل $b^2 - c^2$ کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۹

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۴
۴) ۸

۶۳) به ازای چه مقدار m یکی از ریشه های معادله ی $x^{۲} - ۶x + ۵ + m = ۰$ مجذور دیگری است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) ۳۲
۲) ۲
۳) -۳۲
۴) -۳

۶۴) اگر α و β ریشه های معادله ی $x^{۲} + x - ۳ = ۰$ باشند. حاصل $\alpha^{۳} + \beta^{۳} + \alpha^{۲} + \beta^{۲}$ برابر است با:

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) -۳
۲) -۶
۳) ۳
۴) ۶

۶۵) کدام یک از معادلات زیر به ازای جمیع مقادیر k دو ریشه‌ی حقیقی منفی دارد؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) $x^{۲} + kx + k^{۲} + ۱ = ۰$
۲) $x^{۲} + (k+۱)x + k - ۲ = ۰$
۳) $x^{۲} - (k^{۲}+۱)x + k^{۲} = ۰$
۴) $x^{۲} + (k^{۲}+۳)x + k^{۲} + ۲ = ۰$

۶۶) اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $۲mx^{۲} + ۷x + m^{۲} + ۳ = ۰$ برابر ۲ باشد. در این صورت مقدار (یا مقادیر) m کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۳ و ۱
۴) مقداری برای m وجود ندارد.

سخت- ۱۳۹۷ -smart

۶۷ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x = a(x-۲)^۲$ از ۱۰ برابر ریشهٔ دیگر سه واحد کمتر است. مقدار مثبت a کدام است؟

(۱) $\frac{۹}{۵}$ (۲) $\frac{۴}{۵}$ (۳) $\frac{۵}{۹}$ (۴) $\frac{۴}{۵}$

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۶۸ به ازای کدام مقدار a یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲ - ax + ۱ = ۰$ ربع ریشه‌ی دیگر است؟

(۱) ± ۵ (۲) $\pm\frac{۵}{۲}$ (۳) $\pm\frac{۵}{۳}$ (۴) $\pm\frac{۵}{۴}$

متوسط- منتا- ۱۳۹۷

۶۹ به‌ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲ + kx - ۵ = ۰$ معکوس ریشه‌های معادلهٔ $x(۵x+۳) = ۴$ است؟

(۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۵ (۴) ۵

۷۰ در معادله‌ی $۴x^۲ - ۸x + c = ۰$ یکی از ریشه‌ها ۳ واحد بزرگتر از ریشه‌ی دیگر است. در معادله‌ی $۲x^۲ - x + c = ۰$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟

متوسط- ۱۳۹۷ -smart

(۱) $-\frac{۵}{۲}$ (۲) $\frac{۵}{۲}$ (۳) -۵ (۴) ۵

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۷۱) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $۴x^۲ + kx = ۲۱$ اگر مجموع ریشه ها برابر -۲ باشد. ریشه‌ی کوچک تر کدام است؟

(۱) $\frac{-۷}{۲}$ (۲) $\frac{۷}{۲}$ (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) $\frac{-۳}{۲}$

متوسط- منتاآزمون- ۱۴۰۲

(۷۲) در معادلهٔ درجه دوم $(m-۱)x^۲ - ۳x + m = ۰$، مجموع ریشه‌ها، یک واحد از حاصل‌ضرب ریشه‌ها بیشتر است. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴ = mx^۲ + (m+۲)x$ باشند، حاصل $\alpha^۳\beta + \alpha\beta^۳$ کدام است؟ $(m \neq ۱)$

(۱) -۱۶ (۲) ۱۶ (۳) -۸ (۴) ۸

سخت- منتا- ۱۴۰۰

(۷۳) در معادلهٔ درجهٔ دوم $۴x^۲ + bx + ۱ = ۰$، مجموع جذر ریشه‌ها برابر با معکوس حاصل ضربشان است. b کدام است؟

(۱) -۳۰ (۲) ۳۰ (۳) -۶۰ (۴) ۶۰

متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

(۷۴) ریشه‌های کدام معادله از ریشه‌های معادله‌ی $\frac{۱}{۴} = ۳x^۲ + ۵x$ به مقدار $\frac{۱}{۲}$ بیشتر است؟

(۱) $۳x^۲ - x + ۲ = ۰$ (۲) $۳x^۲ + ۲x - ۲ = ۰$ (۳) $۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$ (۴) $۳x^۲ + x - ۴ = ۰$

۷۵ اگر β, α ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ + kx + ۱ = ۰$ باشند، به ازای کدام مقدار k، ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ به صورت $(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۴

(۱) -۱۲ (۲) -۱۴ (۳) -۱۰ (۴) -۸

۷۶ اگر ریشه‌های معادله‌ی $۹x^۲ + ax + b = ۰$، از مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۳x - ۹ = ۰$، دو واحد کم‌تر باشد، a کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۵

(۱) ۲۰ (۲) ۳۱ (۳) ۴۲ (۴) ۱۷

۷۷ ریشه‌های کدام معادله از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ یک واحد کمتر است؟

متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

(۱) $x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ (۲) $x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$ (۳) $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ (۴) $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$

۷۸ اگر α, β جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ بوده و داشته باشیم $P = \alpha\beta$ و $S = \alpha + \beta$. به ازای کدام مقدار k جواب‌های معادلهٔ $۲۵x^۲ - ۵kx - ۱ = ۰$ برابر $\dfrac{\beta}{۳S + ۴P}$, $\dfrac{\alpha}{۲S + P}$ است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۴

(۱) -۱ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) ۱

۷۹) جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲ + mx - n = ۰$ از مربع جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۳ = ۰$ یک واحد بیشتر است. حاصل $m - n$ کدام است؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۱۴

۸۰) معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$ باشند، کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۶

۱) $x^۲ - ۵۸x + ۱۶ = ۰$ ۲) $x^۲ - ۵۸x + ۴ = ۰$ ۳) $x^۲ - ۲۹x + ۱۶ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۲۹x + ۴ = ۰$

۸۱) اگر α, β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲ + (c + ۲)x + ۸ = ۰$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + bx + c = ۰$ به صورت $\sqrt{\alpha\beta}$ و $۲\sqrt{\alpha\beta}$ خواهد بود. حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۷

۱) -۵ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) -۴

۸۲) یکی از جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۳mx + m + ۳ = ۰$ دو برابر دیگری است. مجموع مقادیر m برای کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۸۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - px - ۱ = ۰$ ثلث ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۱۲x - ۹q = ۰$ باشد. حاصل pq کدام است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۸۴ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ۲x - ۸ = ۰$ باشند، معادلهٔ درجه دومی که جواب‌های آن $\frac{۱}{\alpha^۲ - \frac{۸}{۳}}$ و $\frac{۱}{\beta^۲ - \frac{۸}{۳}}$ باشند کدام است؟

سخت- منتاآزمون- ۱۴۰۱

(۱) $۳۲x^۲ + ۱۲x - ۲۷ = ۰$ (۲) $۲۷x^۲ + ۱۲x - ۳۲ = ۰$ (۳) $۳۲x^۲ + ۲۷x - ۱۲ = ۰$ (۴) $۲۷x^۲ + ۳۲x - ۱۲ = ۰$

۸۵ اگر α, β ریشه‌های معادلهٔ $-۳x^۲ - ۴x + ۶ = ۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\{۳\alpha - ۱, ۳\beta - ۱\}$ است؟

سخت- ۱۳۹۷ -smart

(۱) $x^۲ - ۲x - ۴ = ۰$ (۲) $x^۲ - ۶x - ۱۳ = ۰$ (۳) $x^۲ + ۶x - ۱۳ = ۰$ (۴) $x^۲ + ۲x - ۴ = ۰$

۸۶ ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ + ax + b = ۰$ از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ یک واحد بیشتر است. b کدام است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۶

(۱) -۵ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

(۸۷) ریشه‌های معادله $x^{۲} - ax + b = ۰$ نیم واحد از ریشه‌های معادلهٔ $۲ax^{۲} + ax - ۶ = ۰$ بیشتر است. مقدار $[\frac{ab}{۴}]$ کدام است؟

متوسط- سراسری- ۱۴۰۲

(۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

(۸۸) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^{۲} - ۲x - ۴ = ۰$ باشند، ریشه‌های کدام معادله به‌صورت $\{\frac{\alpha}{(\beta+۱)^{۲}}, \frac{\beta}{(\alpha+۱)^{۲}}\}$ است؟

سخت- منتاآزمون- ۱۴۰۱

(۱) $x^{۲} - ۵۸x - ۴ = ۰$ (۲) $x^{۲} - ۴۶x + ۴ = ۰$ (۳) $x^{۲} - ۴۶x - ۴ = ۰$ (۴) $x^{۲} - ۵۸x + ۴ = ۰$

(۸۹) اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $(m-۱)x^{۲} + ۶x + ۴ = m$ برابر ۲ باشد، آن‌گاه مجموع مربعات این ریشه‌ها، کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۹

(۱) ۲۴ (۲) ۶ (۳) ۳۲ (۴) ۱۶

(۹۰) ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} - ax + b = ۰$ از دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲} - ۳x - ۷ = ۰$ سه واحد کمتر است، حاصل $a+b$ کدام است؟

سخت- منتاآزمون- ۱۴۰۲

(۱) -۳۸ (۲) -۳۷ (۳) -۲۸ (۴) -۲۷

۹۱ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، از معادلهٔ $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰$، دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟ سخت- خارج از کشور- ۱۳۸۸

(۱) $m \geq ۱$ (۲) $m < ۲$ (۳) $۱ \leq m < ۲$ (۴) هیچ مقدار m

۹۲ اگر معادله‌ی $x^۴ - (m+۲)x^۲ + m + ۵ = ۰$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ سخت- سراسری- ۱۳۸۵

(۱) $m < -۴$ (۲) $m > ۴$ (۳) $-۴ < m < ۴$ (۴) $۴ < m < ۹$

۹۳ کدام یک از معادلات زیر فقط دارای دو ریشه‌ی قرینه می باشند؟ سخت- منتا- ۱۳۹۲

(۱) $x^۴ - ۴x^۲ + ۱ = ۰$ (۲) $x^۴ + ۳x^۲ + ۱ = ۰$ (۳) $x^۴ - x^۲ - ۱ = ۰$ (۴) $x^۴ - ۲x^۲ + ۵ = ۰$

۹۴ معادله‌ی $۲ + \sqrt{m - ۱} = x^۴ + ۳x^۲$ دارای چند ریشه‌ی حقیقی است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد

۹۵ شرط آن‌که معادلهٔ $۲x^۴ - kx^۲ + k^۲ - ۱ = ۰$ دارای ۳ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، کدام است؟ سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

(۱) $k = -۱$ (۲) $k = ۱$ (۳) $k = \pm۱$ (۴) $k = ۰$

۹۶ m را طوری تعیین نمائید که معادله‌ی $x^۴ - ۵x^۲ - m + ۵ = ۰$ فاقد ریشه باشد؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

(۱) $m < \frac{۵}{۴}$ (۲) $m > \frac{۵}{۴}$ (۳) $m < -\frac{۵}{۴}$ (۴) $m > -\frac{۵}{۴}$

۹۷ به ازای چند مقدار مختلف k معادله‌ی $x^۴ + ۸x^۲ + k^۲ + ۷ = ۰$ دارای دو ریشه است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

۹۸ مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^۴ - ۱۰x^۲ + ۹ = ۰$ کدام گزینه است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۶

(۱) صفر (۲) ۶ (۳) ۲ (۴) -۲

۹۹ معادلهٔ $x^۴ - ۵x^۲ + a = ۰$ به ازای چند عدد طبیعی a، دارای ۴ ریشهٔ حقیقی می‌باشد؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۶

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۰۰ معادلهٔ $2x^4 - x^2 - 7 = 0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟ متوسط- منتآزمون- ۱۴۰۲

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{x^۲+ax+۴}{x^۲-۲x-۳}=۰ \to x^۲+ax+۴=۰\ , \to x^۲-۲x-۳\neq ۰ \to (x-۳)(x+۱)\neq ۰$$
$$\to x\neq ۳\ ,\ x\neq -۱$$

برای این‌که معادله یک ریشه داشته باشد، حالت‌های زیر را درنظر می‌گیریم:

۱- معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ یک ریشه داشته باشد، پس باید $\Delta=۰$ باشد و داریم:

$$a^۲-۴(۱)(۴)=۰ \to a^۲-۱۶=۰ \to a=\pm ۴$$
$$\begin{cases} a=۴ \to x^۲+۴x+۴=۰ \to (x+۲)^۲=۰ \to x=-۲ \checkmark \\ a=-۴ \to x^۲-۴x+۴=۰ \to (x-۲)^۲=۰ \to x=۲ \checkmark \end{cases}$$

۲- معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=۳$ باشد و داریم:

$$۳^۲+a(۳)+۴=۰ \to ۳a=-۱۳ \to a=-\frac{۱۳}{۳} \to x^۲-\frac{۱۳}{۳}x+۴=۰$$
$$\to (x-۳)(x-\frac{۴}{۳})=۰ \to x=۳\ ,\ x=\frac{۴}{۳} \to$$ $a=-\frac{۱۳}{۳}$ قابل قبول است.

۳- معادلهٔ $x^۲+ax+۴=۰$ دو ریشه داشته باشد و یکی از آن‌ها $x=-۱$ باشد و داریم:

$$(-۱)^۲+a(-۱)+۴=۰ \to -a+۵=۰ \to a=۵ \to x^۲+۵x+۴=۰$$
$$\to (x+۱)(x+۴)=۰ \to x=-۱\ ,\ x=-۴ \to$$ $a=۵$ قابل قبول است.

۴ مقدار برای a داریم یعنی $\{\pm ۴, -\frac{۱۳}{۳}, ۵\}$

۲ **۱** ۲ ۳ ۴

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$۲x^۲+ax+a-\frac{۳}{۲}=۰$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=a^۲-۸a+۱۲>۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۶)>۰$$

$\Longrightarrow$

a	$-\infty$		۲		۶		$+\infty$
عبارت >۰		+	۰	−	۰	+	

$\Longrightarrow \begin{cases} a>۶ \\ a<۲ \end{cases}$

۳ ۱ ۲ **۳** ۴ کافی است اعداد x، $x+۱$، $x+۲$، $x+۳$ و $x+۴$ را در نظر بگیریم:

$$x^۲+(x+۱)^۲+(x+۲)^۲=(x+۳)^۲+(x+۴)^۲$$
$$\Rightarrow x^۲+x^۲+۲x+۱+x^۲+۴x+۴=x^۲+۶x+۹+x^۲+۸x+۱۶$$
$$\Rightarrow x^۲-۸x-۲۰=۰ \Rightarrow (x-۱۰)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱۰ & \text{ق ق} \\ x=-۲ & \text{غ ق ق (طبیعی نمی‌باشد)} \end{cases}$$

۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$۳x+\frac{۴}{x}=۲ \xrightarrow{\times x} ۳x^۲+۴=۲x \to ۳x^۲-۲x+۴=۰$$
$\Delta=b^۲-۴ac=۴-۴۸=-۴۴<۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۵ ۱ **۲** ۳ ۴ شرط آن‌که یک عبارت درجه دوم مربع کامل باشد آن است که $\Delta=۰$ باشد.

$$\Delta=۰ \Rightarrow b^۲-۴ac=۰ \Rightarrow (a+۲)^۲-۴(۱)(۲a)=۰ \Rightarrow a^۲+۴a+۴-۸a=۰$$
$$\Rightarrow a^۲-۴a+۴=۰ \Rightarrow (a-۲)^۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

۶ **۱** ۲ ۳ ۴ اگر فقط یکی از ریشه ها برابر صفر باشد باید $c=۰$ باشد.

$$c=۰ \Rightarrow m^۲-۳m+۲=۰ \Rightarrow (m-۱)(m-۲)=۰ \Rightarrow m=۱\ ,\ m=۲$$
$$\begin{cases} m=۱ \xrightarrow{\text{معادله}} ۲x^۲=۰ \Rightarrow x^۲=۰ \Rightarrow x=۰ \quad \text{هر دو ریشه صفر است:} \\ m=۲ \xrightarrow{\text{معادله}} ۲x^۲+۳x=۰ \Rightarrow x(۲x+۳)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=\frac{-۳}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

پس به ازای $m = ۲$ فقط یکی از ریشه ها برابر صفر است.

۷) ۴ ۳ **۲** ۱

دو عدد متوالی را x و $x + ۱$ در نظر می گیریم.

$$x^۲ + (x + ۱)^۲ = ۹۲۵ \Rightarrow x^۲ + x^۲ + ۲x + ۱ = ۹۲۵ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲x - ۹۲۴ = ۰$$

$$x^۲ + x - ۴۶۲ = ۰ \Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۸۴۹}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۲۱ \\ x_۲ = -۲۲ \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها عدد صحیح مثبت قابل قبول است. بنابراین داریم:

$$۲۱ + (۲۱ + ۱) = ۴۳$$

۸) ۴ ۳ **۲** ۱

$$(x^۲ + ۲)^۲ - ۴(x^۲ + ۲) + ۳ = ۰ \xrightarrow{x^۲ + ۲ = A} A^۲ - ۴A + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (A - ۱)(A - ۳) = ۰ \begin{cases} A = ۱ \Rightarrow x^۲ + ۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = -۱ : \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\ A = ۳ \Rightarrow x^۲ + ۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases}$$

۹) **۴** ۳ ۲ ۱

$$x^۲ + ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ - ۳ = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۲ = ۳ \Rightarrow (x + ۲)^۴ = ۹$$
$$\Rightarrow (x + ۲)^۴ + ۱ = ۹ + ۱ = ۱۰$$

۱۰) **۴** ۳ ۲ ۱ $\begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = \frac{m}{۲} \end{cases} \Leftarrow$ مجموع ضرایب معادلهٔ روبه‌رو صفر است. $\Leftarrow y = ۲x^۲ - (m + ۲)x + m$

$$x = ۰ \Rightarrow y = m \qquad S = \frac{۱}{۲}|m(\frac{m}{۲} - ۱)| = \frac{۳}{۴} \Rightarrow |m(\frac{m}{۲} - ۱)| = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow |m(m - ۲)| = ۳ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۳ \end{cases} \qquad \text{رأس سهمی } y = x^۲ - mx + ۱ \begin{cases} \frac{m}{۲} = -\frac{۱}{۲} \\ \frac{m}{۲} = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۱۱) ۴ ۳ ۲ **۱** طبق فرض داریم:

$$۱۵x^۲ + ۷۳x + ۱۴ < ۰ \Rightarrow \underbrace{(۵x + ۱)}_{x = -\frac{۱}{۵}} \underbrace{(۳x + ۱۴)}_{x = -\frac{۱۴}{۳}} < ۰ \Rightarrow \frac{-۱۴}{۳} < x < \frac{-۱}{۵} \quad (I)$$

$$|\frac{x - ۱}{۲} - ۱| > ۳ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} &\frac{x - ۱}{۲} - ۱ > ۳ \Rightarrow \frac{x - ۱}{۲} > ۴ \Rightarrow x > ۹ \\ &\frac{x - ۱}{۲} - ۱ < -۳ \Rightarrow \frac{x - ۱}{۲} < -۲ \Rightarrow x < -۳ \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک } (II),(I)} -\frac{۱۴}{۳} < x < -۳ \Rightarrow max(b - a) = -۳ - (-\frac{۱۴}{۳}) = \frac{۵}{۳}$$

۱۲) ۴ **۳** ۲ ۱

$$y + x = ۸ \Rightarrow y = ۸ - x$$

طول و عرض نقطهٔ واقع بر خط، همان طول و عرض مستطیل خواهد بود. بنابراین:

$$\text{مساحت} : S = x(۸ - x) = -x^۲ + ۸x \Rightarrow x_{max} = \frac{-۸}{۲ \times (-۱)} = ۴$$

$$S_{max} = -۴^۲ + ۸ \times ۴ = ۱۶$$

۱۳) ۴ ۳ **۲** ۱ شرط این‌که تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی باشد این است که $\Delta > ۰$ باشد، همچنین شرط اینکه تابع درجه ۲ دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد، این است که $P > ۰$ و $S > ۰$ و باید بین نتایج حاصل از این سه شرط اشتراک بگیریم:

$$\Delta > ۰ \Rightarrow \Delta = ۴m^۲ - ۴(m + ۶)(m - ۳) = ۴m^۲ - ۴m^۲ - ۱۲m + ۷۲ = -۱۲m + ۷۲ > ۰ \Rightarrow m < ۶$$

$$P > ۰ \Rightarrow P = \frac{m - ۳}{m + ۶} > ۰ \Rightarrow (m < -۶) \cup (۳ < m)$$

$$S > ۰ \Rightarrow S = \frac{۲m}{m + ۶} > ۰ \Rightarrow (m < -۶) \cup (۰ < m)$$

$$\xrightarrow{m \in N} ۳ < m < ۶ \Rightarrow m = ۴, ۵$$

۱۴) ۴ ۳ **۲** ۱

$$(x - ۱)^۴ + ۲x = x^۲ + ۷ \to (x - ۱)^۴ = x^۲ - ۲x + ۱ + ۶ \to (x - ۱)^۴ = (x - ۱)^۲ + ۶$$

$$(x - ۱)^۲ = A \to A^۲ = A + ۶ \to A^۲ - A - ۶ = ۰ \to (A - ۳)(A + ۲) = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=۳ \rightarrow (x-۱)^۲=۳ \rightarrow x-۱=\pm\sqrt{۳} \rightarrow \begin{cases} x=۱+\sqrt{۳} \\ x=۱-\sqrt{۳} \end{cases} \\ A=-۲ \rightarrow (x-۱)^۲=-۲ \rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها} = (\sqrt{۳}+۱)^۲+(-\sqrt{۳}+۱)^۲=۳+۱+۲\sqrt{۳}+۳+۱-۲\sqrt{۳}=۸$$

۱۵ ۴ ۳ **۲** ۱

برای حل ابتدا از اتحاد فرعی استفاده می‌نماییم: $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$

$$۷(x+\frac{۱}{x})=۹+۲(x^۲+\frac{۱}{x^۲}) \rightarrow ۷(x+\frac{۱}{x})=۹+۲\left((x+\frac{۱}{x})^۲-۲\right)$$

حال تغییر متغیر زیر را اعمال می‌نمائیم:

$$x+\frac{۱}{x}=t$$

$$۷t=۹+۲(t^۲-۲) \rightarrow ۷t=۹+۲t^۲-۴ \rightarrow ۲t^۲-۷t+۵=۰$$

مجموع ضرایب معادلهٔ درجه دو صفر است، پس: $t_۱=۱\ ,\ t_۲=\frac{c}{a}=\frac{۵}{۲}$

حال عبارت $x+\frac{۱}{x}$ را به جای t قرار می‌دهیم:

$$t_۱=۱ \rightarrow x+\frac{۱}{x}=۱ \xrightarrow{\times x} x^۲-x+۱=۰ \rightarrow \Delta=-۳<۰ \rightarrow \text{فاقد ریشه}$$

$$t_۲=\frac{۵}{۲} \rightarrow x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\times ۲x} ۲x^۲-۵x+۲=۰ \rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ x=\beta \end{cases} \rightarrow P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$$

۱۶ ۴ ۳ **۲** ۱ برای یافتن گزینه‌ی صحیح ابتدا با استفاده از تغییر متغیر هر چهار معادله را حل می‌نماییم.

گزینهٔ «۱»: با فرض $x^۲=t$ داریم:

$$x^۴-۷x^۲+۱۲=۰$$

$$\Rightarrow t^۲-۷t+۱۲=۰ \Rightarrow (t-۴)(t-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۳ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \\ t=۴ \Rightarrow x=\pm۲ \end{cases}$$

چهار جواب دارد.

گزینهٔ «۲»: با فرض $x^۲=t$ داریم:

$$t^۲+۸t+۷=۰ \Rightarrow (t+۱)(t+۷)=۰ \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} t=-۷ \Rightarrow x^۲=-۷ \\ t=-۱ \Rightarrow x^۲=-۱ \end{matrix} \right\} \text{جواب ندارد.}$$

گزینهٔ «۳»: با فرض $x^۲+x=t$ داریم:

$$t^۲-۱۴t+۲۴=۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۱۲)=۰ \left\{ \begin{matrix} t=۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow x=۱ \ \text{یا} -۲ \\ t=۱۲ \Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰ \Rightarrow x=۳ \ \text{یا} -۴ \end{matrix} \right\} \text{۴ جواب دارد.}$$

گزینهٔ «۴»: با فرض $x^۳=t$ داریم:

$$۴x^۶+۱=۵x^۳ \Rightarrow ۴t^۲-۵t+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \Rightarrow x=۱ \\ t=\frac{۱}{۴} \Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}} \end{cases}$$

دو جواب دارد.

۱۷ ۴ ۳ ۲ **۱** راه اول:

$$(x^۲-۱)^۲-۴x^۲+۷=۰$$

$$\Rightarrow (x^۴+۱-۲x^۲)-۴x^۲+۷=۰ \Rightarrow x^۴-۶x^۲+۸=۰$$

$$\xrightarrow{x^۲=t} t^۲-۶t+۸=۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۴)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=۲ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ t=۴ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm۲ \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۲}-\sqrt{۲}+۲-۲=۰ \rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=۰$$

نکته: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $ax^۴+bx^۲+c=۰$ در صورت وجود صفر است.

راه دوم: می‌توان با تغییر متغیر معادله را به فرم ساده‌تری تبدیل کرد.

$$(x^۲-۱)^۲-۴x^۲+۷=۰ \rightarrow (x^۲-۱)^۲-۴x^۲+۴+۳=۰$$

$$\rightarrow (x^۲-۱)^۲-۴(x^۲-۱)+۳=۰$$

$$\xrightarrow{x^2-1=t} t^2-4t+3=0 \to (t-1)(t-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases}$$

$$x^2-1=1 \to x^2=2 \to x=\pm\sqrt{2}$$

$$x^2-1=3 \to x^2=4 \to x=\pm 2$$

مجموع ریشه‌های حاصل صفر می‌باشد.

۱۸ (۴) (۳) (۲) **(۱)**

$$x^2-x=t \to t^2-26t+120=0 \to (t-6)(t-20)=0$$

$$\begin{cases} t-6=0 \to x^2-x-6=0 \to (x-3)(x+2)=0 \to \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases} \\ t-20=0 \to x^2-x-20=0 \to (x-5)(x+4)=0 \to \begin{cases} x=5 \\ x=-4 \end{cases} \end{cases}$$

حاصلضرب جواب‌های مثبت $= 3\times 5 = 15$

۱۹ (۴) **(۳)** (۲) (۱) با تغییر متغیر $x^2-4x=t$ معادله را حل می‌کنیم:

$$(x^2-4x)^2+12=7(4x-x^2) \Rightarrow (x^2-4x)^2+12=-7(x^2-4x) \Rightarrow t^2+12=-7t$$
$$\Rightarrow t^2+7t+12=0 \Rightarrow (t+4)(t+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=-3 \end{cases}$$

حالا مقادیر x را به دست می‌آوریم:

$$x^2-4x=-4 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x^2-4x=-3 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=1, x=3$$

بنابراین جمع ریشه‌های متمایز معادله برابر ۶ است.

۲۰ (۴) (۳) **(۲)** (۱) ابتدا با قرار دادن $x=2$ در معادلهٔ داده‌شده، a را می‌یابیم:

$$x(ax^2-x-5)=2 \xrightarrow{x=2} 2(4a-2-5)=2 \Rightarrow 4a-7=1 \Rightarrow a=2$$

پس معادله به‌صورت $2x^3-x^2-5x-2=0$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x-2$ آن را به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^3-x^2-5x-2=0 \Rightarrow (x-2)(2x^2+3x+1)=0$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2-5x-2 & x-2 \\ \underline{-(2x^3-4x^2)} & 2x^2+3x+1 \\ 3x^2-5x-2 & \\ \underline{-(3x^2-6x)} & \\ x-2 & \\ \underline{-(x-2)} & \\ 0 & \end{array}$$

می‌دانیم مجموع دو ریشهٔ دیگر که ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم داخل پرانتز است، برابر با $-\frac{3}{2}=-\frac{b}{a}$ می‌شود.

۲۱ (۴) (۳) (۲) **(۱)** اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{m+3}{m} \;,\; x'x''=\frac{c}{a}=\frac{5}{m}$$

فرض مسأله: $x'^2+x''^2=6 \Rightarrow (x'+x'')^2-2x'x''=6 \Rightarrow (\frac{m+3}{m})^2-\frac{10}{m}-6=0$

$$\Rightarrow \frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}-6=0 \xrightarrow{\times m^2} m^2+6m+9-10m-6m^2=0$$

$$\Rightarrow 5m^2+4m-9=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m=1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2-4x+5=0 \;:\quad \Delta=16-20<0 \quad \text{غ ق ق} \\ m=-\frac{9}{5} \to \text{با توجه به گزینه ها } \Delta>0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

۲۲ **(۴)** (۳) (۲) (۱)

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-2 \;,\; x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=-4$$

x_1 ریشهٔ معادله است در معادله صدق می‌کند $\Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1^2 = -2x_1 + 4$

$\Rightarrow x_1^3 = -2x_1^2 + 4x_1$

در عبارت خواسته‌شده به جای x_1^3 عبارت معادل را قرار می‌دهیم:

$$x_1^3 - 2x_2^2 + 4x_2 = -2x_1^2 + 4x_1 - 2x_2^2 + 4x_2 = -2(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2)$$
$$= -2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 4(x_1 + x_2) = -2(4 + 8) + 4(-2) = -32$$

۲۳ ۴ ۳ **۲** ۱

$$(x-2)(x^2 + mx + m + 3) = 0 \to \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + mx + m + 3 = 0 \end{cases}$$

یک ریشه‌ی معادله $x = 2$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + mx + m + 3 = 0$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت مسأله $\underbrace{\alpha^2 + \beta^2 + 2^2}_{\text{مجموع مجذورات ریشه‌ها}} = 13$ است.

$$\alpha^2 + \beta^2 + 4 = 13 \to \alpha^2 + \beta^2 = 9 \to (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 \xrightarrow[\alpha\beta = \frac{c}{a} = m+3]{\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -m}$$

$$m^2 - 2(m+3) = 9 \to m^2 - 2m - 15 = 0 \to (m-5)(m+3) = 0$$

$$\to \begin{cases} m = 5 \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^2 + 5x + 8 = 0 \to \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 32 < 0 \to \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\ m = -3 \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^2 - 3x = 0 \to x(x-3) = 0 \to x = 0, x = 3 \end{cases}$$

بنابراین فقط $m = -3$ قابل قبول است.

۲۴ ۴ ۳ ۲ **۱**

می‌دانیم که $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -4$ است.

α ریشه‌ی معادله است پس در معادله، صدق می‌کند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق}} \alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha$$

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 = (2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) = 4((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = 4(4 + 8) = 48$$

۲۵ ۴ ۳ **۲** ۱ معادله را به صورت $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ مرتب می‌کنیم.

$$x' = \frac{1}{x''} \Rightarrow x'x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2 \ , \ m = -1$$

$$m = 2 \xrightarrow{\text{معادله}} 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0 \ \text{غیر قابل قبول}$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0 \ \text{قابل قبول}$$

۲۶ ۴ ۳ ۲ **۱** از عبارت‌های $\alpha^2 + 5\alpha$ و $\beta^2 + 5\beta$ و $x^2 + 5x$ متوجه می‌شویم که باید ریشه‌های معادله را در معادله صدق دهیم.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \alpha^2 + 5\alpha - 1 = 0 \to \alpha^2 + 5\alpha = 1$$
$$\beta \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \beta^2 + 5\beta - 1 = 0 \to \beta^2 + 5\beta = 1$$

در ضمن $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -5$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$ می‌باشد.

$$\frac{\alpha^3\beta + \alpha\beta^3}{(\alpha^2 + 5\alpha + 4)(\beta^2 + 5\beta + 7)} = \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}{(1+4)(1+7)}$$

$$= \frac{\alpha\beta((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)}{(5)(8)} = \frac{-1(25 + 2)}{40} = \frac{-27}{40}$$

۲۷ **۴** ۳ ۲ ۱ معادله‌ی درجه‌ی دوم را مرتب می کنیم: $mx^2 + (2m - 1)x - 5 = 0$

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 = 4 \to -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 4 \to \frac{1 - 2m}{m} - \frac{5}{m} = 4$$

$$\xrightarrow{\times m} 1 - 2m - 5 = 4m \to 6m = -4 \to m = -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} -\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x - 5 = 0 \to \Delta < 0 \ : \ \text{غ ق ق}$$

(۲۸) ۱ ۲ ۳ **۴**

مجموع ضرایب برابر صفر است پس $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ است.

$$x_1^6 + x_2^6 = (1)^6 + (\sqrt{2})^6 = 1 + 8 = 9$$

(۲۹) ۱ ۲ ۳ ۴ **۱** اگر دو ریشه، معکوس یکدیگر باشند، حاصل‌ضربشان یک است.

$$x'x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{2-m} = 1 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

$$m = 1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2 + 3x + 1 = 0 \quad : \quad \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 > 0 \quad : \quad \text{ق ق}$$

$$m = -2 \xrightarrow{\text{معادله}} 4x^2 + 3x + 4 = 0 \quad : \quad \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 64 < 0 \quad : \quad \text{غ ق ق}$$

(۳۰) ۱ ۲ ۳ **۴** جواب‌های معادله برابرند یعنی معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس:

$$x^2 + mx + m = 0 \to \Delta = 0 \to m^2 - 4m = 0 \to m(m-4) = 0 \to m = 0\ ,\ m = 4$$

حال معادلهٔ $(m-3)x^2 - (m+2)x + 2 = 0$ را به ازای $m = 0\ ,\ m = 4$ بررسی می‌کنیم

$$m = 0 \to -3x^2 - 2x + 2 = 0 \to \Delta = 4 - 4(-3) \times 2 = 4 + 24 > 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$m = 4 \to x^2 - 6x + 2 = 0 \to \Delta = 36 - 8 > 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{1} = 6$$

(۳۱) ۱ ۲ **۳** ۴

از آن‌جایی که α و β ریشه‌های معادله هستند، در معادله صدق می‌کنند؛ داریم:

$$\begin{cases} \alpha^2 - 4\alpha - 6 = 0 \to \alpha^2 - 6 = 4\alpha \\ \beta^2 - 4\beta - 6 = 0 \to \beta^2 - 6 = 4\beta \end{cases}$$

پس: $\frac{\alpha}{\alpha^2 - 6} + \frac{\beta}{\beta^2 - 6} = \frac{\alpha}{4\alpha} + \frac{\beta}{4\beta} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

(۳۲) ۱ **۲** ۳ ۴ برای به‌دست آوردن طول نقاط تلاقی باید معادلهٔ $f(x) = 0$ را حل کنیم:

$$(x-1)(x^2 - 2mx - m - 1) = 0 \to \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2mx - m - 1 = 0 \end{cases}$$

یک ریشهٔ معادله $x = 1$ است و اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$ را α و β بنامیم، با توجه به صورت مسئله داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1^2 = 9 \to \alpha^2 + \beta^2 = 8 \to S^2 - 2p = 8$$

$$\xrightarrow[P=-m-1]{S=2m} (2m)^2 - 2(-m-1) = 8 \to 4m^2 + 2m + 2 = 8$$

$$\to 2m^2 + m - 3 = 0 \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \to |m_1 - m_2| = \frac{5}{2}$$

(۳۳) ۱ ۲ ۳ **۴** برای این منظور باید $P > 0, S > 0, \Delta > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \to b^2 - 4ac > 0 \to m^2 - 8(m+6) > 0 \to m^2 - 8m - 48 > 0 \to (m-12)(m+4) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -4 \text{ یا } m > 12 \quad (I)$$

$$S > 0 \to -\frac{b}{a} > 0 \to -\frac{m}{2} > 0 \to -m > 0 \to m < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \to \frac{c}{a} > 0 \to \frac{m+6}{2} > 0 \to m + 6 > 0\ m > -6 \quad (III)$$

از اشتراک I, II, III به جواب $-6 < m < -4$ می‌رسیم.

(۳۴) ۱ **۲** ۳ ۴ دقت کنید که $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2$ و $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -1$ می‌باشد.

$$x_1 \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0 \to x_1^2 = -2x_1 + 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} x_1^4 = 4x_1^2 + 1 - 4x_1$$

پس: $x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_2 = 4x_1^2 + 1 - 4x_1 + 4x_2^2 - 4x_2 = 4(x_1^2 + x_2^2) - 4(x_1 + x_2) + 1$

$$= 4((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2) - 4(x_1 + x_2) + 1 = 4(4 + 2) - 4(-2) + 1 = 33$$

(۳۵) **۱** ۲ ۳ ۴

روش اول:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}\ ,\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^3 \cdot \beta^3} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}-(3)(\frac{-1}{2})(\frac{1}{2})}{(\frac{-1}{2})^3}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{3}{4}}{\frac{-1}{8}}=-(1+6)=-7\Rightarrow -\frac{b}{a}=-7\Rightarrow -k=-7\Rightarrow k=7$$

روش دوم:

$$2x^2-x-1=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{\alpha^3}=1\ ,\ \frac{1}{\beta^3}=-8\Rightarrow \frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=-\frac{b}{a}\Rightarrow 1-8=-k\Rightarrow k=7$$

۳۶) ۱ ۲ **۳** ۴

$$P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{(k^2+1)^2}<0$$

چون $\frac{c}{a}<0$ ، بنابراین معادله‌ی فوق دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت است.

۳۷) ۱ ۲ **۳** ۴ قدر مطلق تفاضل دو عدد طبیعی برابر یک می باشد.

$$|x'-x''|=1\Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=1\Rightarrow \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|1|}=1\Rightarrow \sqrt{(2m+1)^2-4(m^2+3)}=1$$
$$\Rightarrow \sqrt{4m^2+1+4m-4m^2-12}=1\Rightarrow \sqrt{4m-11}=1$$
$$\Rightarrow 4m-11=1\Rightarrow 4m=12\Rightarrow m=3$$

۳۸) **۱** ۲ ۳ ۴ باید ضریب x^2 و Δ هر دو منفی باشند تا عبارت درجهٔ دوم همواره منفی باشد. بنابراین $a<0$ و

$$\Delta=b^2-4ab<0\Rightarrow b(b-4a)<0$$

x		4a		0	
b(b−4a)	+	0	−	0	+

با توجه به جدول تعیین علامت بالا باید $4a<b<0$ پس با توجه به منفی بودن a داریم:

$$\frac{4a}{a}>\frac{b}{a}>\frac{0}{a}$$
$$4>\frac{b}{a}>0$$

یعنی $\frac{b}{a}\in(0,4)$.

۳۹) **۱** ۲ ۳ ۴ معادلهٔ $f(x)=0$ باید دو جواب داشته باشد که مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت است. بنابراین:

$$\Delta=20-4a(a-4)>0\Rightarrow 4a^2-16a-20<0\Rightarrow -1<a<5$$

مجموع جواب‌ها $=\frac{2\sqrt{5}}{a}>0\Rightarrow a>0 \qquad (2)$

حاصل‌ضرب جواب‌ها $=\frac{a-4}{a}>0\Rightarrow a>4$ یا $a<0 \qquad (3)$

$$(1)\cap(2)\cap(3)\Rightarrow 4<a<5$$

از طرف دیگر $f(\sqrt{5})=5a-10+a-4=6a-14$ بنابراین:

$$4<a<5\Rightarrow 24<6a<30$$
$$10<6a-14<16$$
$$10<f(\sqrt{5})<16$$

۴۰) ۱ ۲ **۳** ۴

$$x_1^3=x_2\xrightarrow{\text{طرفین را در } x_1 \text{ ضرب می کنیم}}x_1^4=x_1x_2\Rightarrow x_1^4=\frac{c}{a}\Rightarrow x_1^4=16\Rightarrow x_1=2\ ,\ x_1=-2$$

که چون ریشه ها مثبت هستند $x_1=2$ قابل قبول است، ریشه‌ی معادله در معادله صدق می کند.

$$x_1=2\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}4-10m+16=0\Rightarrow m=2$$

۴۱) ۱ ۲ **۳** ۴ با کمی دقت متوجه می شویم یک ریشه‌ی معادله $x_1=3$ است (اگر $x_1=3$ را در معادله صدق دهیم به رابطه‌ی $9a+3b+c=0$ می رسیم)، اما حاصل ضرب ریشه ها $\frac{c}{a}$ است، لذا:

$$x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow 3x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow x_2=\frac{c}{3a}$$

اما $9a+3b=-c$ پس $c=-3(3a+b)$ بنابراین:

$$x_2=\frac{c}{3a}=\frac{-3(3a+b)}{3a}=-\frac{b+3a}{a}$$

۴۲) ۱ ۲ **۳** ۴ معادله را به صورت $2x^2+(m-1)x-1=0$ مرتب می‌کنیم.

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=\frac{۱-m}{۲}\quad,\quad x'x''=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۲}$$

$$x'^{۲}+x''^{۲}=\frac{۱۳}{۴}\rightarrow (x'+x'')^{۲}-۲x'x''=\frac{۱۳}{۴}\rightarrow\frac{(۱-m)^{۲}}{۴}+۱=\frac{۱۳}{۴}$$

$$\rightarrow\frac{(۱-m)^{۲}}{۴}=\frac{۹}{۴}\rightarrow(۱-m)^{۲}=۹\rightarrow\begin{cases}۱-m=۳\rightarrow m=-۲\\ ۱-m=-۳\rightarrow m=۴\end{cases}$$

چون $\frac{c}{a}$ منفی است دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم همواره مثبت است و هر دو جواب قابل قبول هستند.

۴۳) ۱ ۲ ۳ ۴

می دانیم: $\boxed{(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳}}$

پس: $x_۱^{۳}-۳x_۱^{۲}x_۲+۳x_۱x_۲^{۲}-x_۲^{۳}=(x_۱-x_۲)^{۳}=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)^{۳}$

$$=\left(\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{|۱|}\right)^{۳}=\left(\frac{\sqrt{۹+۴}}{۱}\right)^{۳}=\left(\sqrt{۱۳}\right)^{۳}=۱۳\sqrt{۱۳}$$

۴۴) ۱ ۲ ۳ ۴

$$x_۱+x_۲={x_۱}^{۲}\cdot{x_۲}^{۲}\Rightarrow\frac{-b}{a}=\left(\frac{c}{a}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{-b}{a}=\frac{c^{۲}}{a^{۲}}\Rightarrow -b=\frac{c^{۲}}{a}\Rightarrow c^{۲}+ab=۰$$

۴۵) ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c$$

$$f(۰)=-۲\rightarrow a(۰)^{۲}+b(۰)+c=-۲\rightarrow\boxed{c=-۲}$$

$$f(۲)=۲\rightarrow a(۲)^{۲}+b(۲)+c=۲\rightarrow ۴a+۲b=۴$$

رأس سهمی $x_S=۲\rightarrow-\frac{b}{۲a}=۲\rightarrow -b=۴a$

$$\begin{cases}۴a+۲b=۴\\ ۴a=-b\end{cases}\rightarrow -b+۲b=۴\rightarrow\boxed{b=۴}\ ,\ \boxed{a=-۱}$$

$\rightarrow f(x)=-x^{۲}+۴x-۲=۰\rightarrow$ ریشه‌های سهمی $f(x)$ است. $\alpha,\beta\rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{۴}{-۱}=۴\\ P=\alpha\beta=\frac{-۲}{-۱}=۲\end{cases}$

$$\alpha\beta^{۳}+۲\alpha^{۲}=\alpha\beta(\beta^{۲})+۲\alpha^{۲}=۲\beta^{۲}+۲\alpha^{۲}=۲(\alpha^{۲}+\beta^{۲})$$

$$=۲(S^{۲}-۲P)=۲(۴^{۲}-۲(۲))=۲(۱۶-۴)=۲۴$$

۴۶) ۱ ۲ ۳ ۴

کافی است یک رابطه‌ی دیگر، بین ریشه‌ها بنویسیم و با رابطه‌ی داده شده تشکیل دستگاه دهیم.

می‌دانیم: $x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲}$

$$\begin{cases}x_۱+x_۲=\frac{۱}{۲}\\ x_۱+۲x_۲=\frac{۷}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{دستگاه}}x_۲=۳\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}۱۸-۳+k=۰\Rightarrow k=-۱۵$$

۴۷) ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا معادله‌ی داده شده را مرتب می کنیم.

$$x^{۳}+mx^{۲}+m+۲x-m=۰\rightarrow x^{۳}+mx^{۲}+۲x=۰$$

$$\rightarrow x(x^{۲}+mx+۲)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^{۲}+mx+۲=۰\end{cases}$$

چون یک ریشه‌ی معادله برابر صفر است، بنابراین مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}+mx+۲=۰$ برابر ۱۲ است پس اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق باشند. داریم:

$$x'+x''=\frac{-b}{a}=-m\ ,\ x'x''=\frac{c}{a}=۲$$

مجموع مربعات ریشه‌ها $=۱۲\rightarrow x'^{۲}+x''^{۲}=۱۲\rightarrow(x'+x'')^{۲}-۲x'x''=۱۲$

$$\rightarrow m^{۲}-۴=۱۲\rightarrow m^{۲}=۱۶\rightarrow m=\pm۴$$

هر دو جواب بدست آمده قابل قبول هستند زیرا دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم را منفی نمی کنند.

۴۸) ۱ ۲ ۳ ۴

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی داده شده‌باشند داریم:

$$\begin{cases} x_1 = ۳x_۲ + ۳ \\ x_1 + x_۲ = -\frac{b}{a} = \frac{۱۷}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - ۳x_۲ = ۳ \\ x_1 + x_۲ = \frac{۱۷}{۳} \end{cases} \rightarrow ۴x_1 = ۲۰ \rightarrow x_1 = ۵ \ , \ x_۲ = \frac{۲}{۳}$$

می‌دانیم: $x_1 x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{۱۰}{۳} = \frac{m}{۳} \Rightarrow m = ۱۰ \Rightarrow ۲m + ۱ = (۲ \times ۱۰) + ۱ = ۲۱$

(۴۹) (۴) (۳) (۲) (۱)

$$x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \rightarrow x_1 + x_۲ = -\frac{b}{a} = ۳ \quad , \quad x_1 x_۲ = \frac{c}{a} = ۱$$

$$x_1{}^۴ + x_۲{}^۴ + ۲x_1{}^۲ x_۲{}^۲ = (x_1{}^۲ + x_۲{}^۲)^۲ = ((x_1 + x_۲)^۲ - ۲x_1 x_۲)^۲ = (۹ - ۲)^۲ = ۴۹$$

(۵۰) (۴) (۳) (۲) (۱) راهنمایی: α ریشهٔ معادله است. پس در آن صدق می‌کند.

اول: طبق راهنمایی α را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\alpha^۲ - ۲\alpha - ۵ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ = ۲\alpha + ۵ \Rightarrow \alpha^۴ = (۲\alpha + ۵)^۲ = ۴\alpha^۲ + ۲۰\alpha + ۲۵$$

دوباره جای $\alpha^۲$ مقدار $۲\alpha + ۵$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$۴\alpha^۲ + ۲۰\alpha + ۲۵ = ۴(۲\alpha + ۵) + ۲۰\alpha + ۲۵ = ۲۸\alpha + ۴۵$$

دوم: محاسبهٔ مقدار خواسته شده:

$$\alpha^۴ + ۲۸\beta = ۲۸\alpha + ۲۸\beta + ۴۵ = ۲۸(\alpha + \beta) + ۴۵$$

مقدار $\alpha + \beta = ۲$ است. پس:

$$۲۸(۲) + ۴۵ = ۵۶ + ۴۵ = ۱۰۱$$

(۵۱) (۴) (۳) (۲) (۱)

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-۳)}{۱} = ۳ \ , \ \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

چون هر دو ریشه، مثبت هستند می توانیم تفکیک کنیم.

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \xrightarrow{\alpha \, , \, \beta > ۰} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha \cdot \beta}} = \frac{۳}{\sqrt{۱}} = ۳$$

(۵۲) (۴) (۳) (۲) (۱) اگر x_1 و $x'_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند $(x_1 , x_۲ > ۰)$ حاصل $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_۲}$ از رابطه‌ی $\sqrt{S + ۲\sqrt{P}}$ به دست می آید.

$$S = x_1 + x_۲ = -\frac{b}{a} = ۸ \ , \ P = x_1 \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = ۴$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_۲} = \sqrt{S + ۲\sqrt{P}} = \sqrt{۸ + ۲\sqrt{۴}} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

(۵۳) (۴) (۳) (۲) (۱)

فرض می کنیم α و β ریشه‌های این معادله هستند. $mx^۲ + (m - ۴)x - \frac{۴}{m} = ۰ \rightarrow$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۴ - m}{m} \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۴}{m^۲}$$

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = ۱ \rightarrow S^۲ - ۲P = ۱ \rightarrow (\frac{۴ - m}{m})^۲ - ۲(\frac{-۴}{m^۲}) = ۱$$

$$\rightarrow \frac{m^۲ - ۸m + ۱۶}{m^۲} + \frac{۸}{m^۲} = ۱ \rightarrow m^۲ - ۸m + ۲۴ = m^۲ \rightarrow -۸m + ۲۴ = ۰$$

$\rightarrow \boxed{m = ۳} \rightarrow ۳x^۲ - x - \frac{۴}{۳} = ۰ \rightarrow$ ریشه‌های معادله هستند. $\alpha, \beta \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۱}{۳} \\ \alpha\beta = \frac{-۴}{۹} \end{cases}$

معادله : $۳x^۲ - x - \frac{۴}{۳} = ۰ \xrightarrow{x = \alpha} ۳\alpha^۲ - \alpha - \frac{۴}{۳} = ۰ \rightarrow \boxed{۳\alpha^۲ - \alpha = \frac{۴}{۳}}$

$$۳\alpha^۲ - ۲\alpha - \beta = ۳\alpha^۲ - \alpha - \alpha - \beta = (۳\alpha^۲ - \alpha) - (\alpha + \beta) = \frac{۴}{۳} - \frac{۱}{۳} = \frac{۳}{۳} = ۱$$

(۵۴) (۴) (۳) (۲) (۱)

$$-x^۲ + ۳x - x + ۳ + ۲ + k^۲ = ۰ \Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۵ + k^۲ = ۰ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۵ + k^۲}{-۱} < ۰$$

وقتی $\frac{c}{a} < ۰$ است معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف العلامت است.

(۵۵) (۴) (۳) (۲) (۱)

$$x_1 x_۲ = \frac{c}{a} \Rightarrow (\sqrt{۷} - ۲)x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۷} - ۲}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا می کنیم}} x_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۷}-۲} \times \frac{\sqrt{۷}+۲}{\sqrt{۷}+۲} = \frac{\sqrt{۷}+۲}{۳}$$

۵۶ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$|x_۱ - x_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{b^۲ - ۴ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^۲ - ۴a - ۸}}{۱} = ۲$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۴a - ۸ = ۴ \Rightarrow a^۲ - ۴a - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (a-۶)(a+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۶ \\ a = -۲ \end{cases}$$

هر دو جواب Δ را مثبت می کنند پس قابل قبول اند.

۵۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)** چون مجموع ضرایب معادله صفر است. پس یک ریشه‌ی معادله (۱) و ریشه ی دیگر $\frac{c}{a}$ است. یعنی $\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}+۱}$.

همانطور که مشاهده می‌کنید هر دو ریشه‌ی معادله، مثبت هستند.

۵۸ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$x + \frac{a}{x+۳} = ۴ \xrightarrow[x \neq -۳]{\times(x+۳)} x(x+۳) + a = ۴(x+۳)$$

$$x^۲ + ۳x + a = ۴x + ۱۲ \Rightarrow x^۲ - x + (a - ۱۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = ۱ \\ \alpha\beta = a - ۱۲ \end{cases}$$

$$\alpha = ۲\beta + ۷ \xrightarrow{+\beta} \alpha + \beta = ۳\beta + ۷ \Rightarrow ۱ = ۳\beta + ۷$$

$$\Rightarrow ۳\beta = -۶ \Rightarrow \beta = -۲ \xrightarrow{\text{در معادله اصلی صدق می‌کند}} -۲ + \frac{a}{-۲+۳} = ۴ \Rightarrow -۲ + a = ۴ \Rightarrow a = ۶$$

۵۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$\frac{x}{x-۲} - \frac{x+۱}{(x+۲)(x-۲)} = \frac{x}{x+۲}$$

دو طرف معادله را در $(x+۲)(x-۲)$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\to x(x+۲) - (x+۱) = x(x-۲) \to x^۲ + ۲x - x - ۱ = x^۲ - ۲x \to ۳x = ۱ \to x = \frac{۱}{۳} \to k = \frac{۱}{۳}$$

معادله: $۲x^۲ - ۱۵(\frac{۱}{۳})x - ۱ = ۰ \to ۲x^۲ - ۵x - ۱ = ۰ \to$ مجموع جواب‌ها : $S = -\frac{b}{a} = \frac{۵}{۲}$

۶۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$x^۲ - ۲x - ۶ = ۰ \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^۲ - ۲\alpha - ۶ = ۰ \longrightarrow \alpha^۲ - ۶ = ۲\alpha$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-۲}{۱} = ۲ \quad , \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۶}{۱} = -۶$$

$$(\alpha^۲ - ۶)^۳ + ۸\beta^۳ = (۲\alpha)^۳ + ۸\beta^۳ = ۸\alpha^۳ + ۸\beta^۳ = ۸(\alpha^۳ + \beta^۳)$$

$$= ۸(S^۳ - ۳PS) = ۸(۲^۳ - ۳(-۶)(۲)) = ۸(۸ + ۳۶) = ۸ \times ۴۴ = ۳۵۲$$

۶۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$x^۲ + ۲x - ۵ = ۰ \to \begin{cases} S = -\frac{b}{a} = -\frac{۲}{۱} = -۲ \\ P = \frac{c}{a} = -\frac{۵}{۱} = -۵ \end{cases}$$

$$P = \frac{۱}{\alpha+۱} \times \frac{۱}{\beta+۱} = -۵ \to (\alpha+۱)(\beta+۱) = -\frac{۱}{۵} \quad (۱)$$

$$S = \frac{۱}{\alpha+۱} + \frac{۱}{\beta+۱} = \frac{\beta+۱+\alpha+۱}{(\alpha+۱)(\beta+۱)} = -۲ \to \frac{\alpha+\beta+۲}{-\frac{۱}{۵}} = -۲$$

$$\to \alpha + \beta + ۲ = \frac{۲}{۵} \to \boxed{\alpha + \beta = -\frac{۸}{۵}} \quad (۲)$$

طبق رابطهٔ (۱) داریم:

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-\frac{1}{5}\xrightarrow{(2)}\alpha\beta-\frac{8}{5}+1=-\frac{1}{5}$$

معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌هایش برابر $-\frac{8}{5}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌هایش $\frac{2}{5}$ باشد را می‌نویسیم:

$$\rightarrow \boxed{\alpha\beta=\frac{2}{5}}$$

$$\rightarrow x^2-(-\frac{8}{5})x+\frac{2}{5}=0\xrightarrow{\times 5}5x^2+8x+2=0$$

۶۲) ۱ ۲ ۳ **۴** ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم را α و β در نظر می‌گیریم؛ داریم:

$$\alpha=\sqrt{3}+1\,,\beta=\sqrt{3}-1$$

مجموع ریشه‌ها : $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\rightarrow\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=-\frac{-b}{1}\rightarrow b=2\sqrt{3}$

ضرب ریشه‌ها : $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}\rightarrow(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=\frac{c}{1}\rightarrow 3-1=c\rightarrow c=2$

$$\rightarrow b^2-c^2=(2\sqrt{3})^2-2^2=12-4\rightarrow b^2-c^2=8$$

۶۳) ۱ ۲ **۳** ۴ طبق فرض مساله $\alpha=\beta^2$ می‌باشد.

می دانیم: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\Rightarrow\beta^2+\beta=6$

$$\Rightarrow\beta^2+\beta-6=0\Rightarrow(\beta+3)(\beta-2)=0\Rightarrow\beta=-3\,,\ \beta=2$$

می دانیم ریشه‌ی معادله، در معادله صدق می کند.

$$\beta=2\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}4-12+5+m=0\Rightarrow m=3$$

$$\beta=-3\xrightarrow{\text{صدق در معادله}}9+18+5+m=0\Rightarrow m=-32$$

۶۴) **۱** ۲ ۳ ۴

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-1\quad,P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-3$$

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P\,,\ \alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-1+9(-1)=-10$$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2(-3)=7$$

$$\alpha^3+\beta^3+\alpha^2+\beta^2=-10+7=-3$$

۶۵) ۱ ۲ ۳ **۴** شرط آنکه معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی باشد آن است که $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $\frac{-b}{a}<0$ باشد (ضرب دو ریشه مثبت و جمع دو ریشه باید منفی باشد) که فقط در گزینه‌ی چهارم صدق می کند.

گزینه‌ی چهارم: $\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=(k^2+3)^2-4(k^2+2)=k^4+2k^2+1>0\\ \frac{c}{a}=k^2+2>0\\ -\frac{b}{a}=-k^2-3<0\end{cases}$

۶۶) **۱** ۲ ۳ ۴ می‌دانیم ضرب ریشه‌های معادلهٔ $2mx^2+7x+m^2+3=0$ برابر ۲ است. بنابراین:

$$\frac{m^2+3}{2m}=2\rightarrow m^2+3=4m\rightarrow m^2-4m+3=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}m=1\\ m=3\end{cases}\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}}\begin{array}{l}2x^2+7x+4=0\rightarrow\Delta=49-32>0\ \checkmark\\ 6x^2+7x+12=0\rightarrow\Delta=49-288<0\ \times\end{array}$$

پس $m=1$ قابل قبول است.

۶۷) ۱ ۲ **۳** ۴

$$a(x^2-4x+4)=x\Rightarrow ax^2-(4a+1)x+4a=0$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{4a+1}{a}\\ \alpha\beta=4\end{cases}$$

$$\alpha=10\beta-3\xrightarrow{\times\alpha}\alpha^2=10\alpha\beta-3\alpha\xrightarrow{\alpha\beta=4}\alpha^2=40-3\alpha$$

$$\Rightarrow\alpha^2+3\alpha-40=0\Rightarrow(\alpha+8)(\alpha-5)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-8\\ \alpha=5\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=-۸\Rightarrow a(-۸-۲)^۲=-۸\Rightarrow ۱۰۰a=-۸\Rightarrow a=-\frac{۲}{۲۵}\\ \alpha=۵\Rightarrow a(۵-۲)^۲=۵\Rightarrow ۹a=۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۹}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{مقدار مثبت}\ a} a=\frac{۵}{۹}$$

۶۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x'=\frac{۱}{۴}x''\Rightarrow x'=۴x''$$

شرط آن‌که در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم یک ریشه، k برابر ریشه‌ی دیگر باشد (یعنی $x'=kx''$) آن است‌که داشته باشیم:

$$\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}\Rightarrow\frac{a^۲}{۱}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow a=\pm\frac{۵}{۲}$$

۶۹ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول: اگر ریشه های معادلهٔ $x(۵x+۳)=۴$ را با α و β نمایش دهیم، ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲+kx-۵=۰$ برابر با $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ هستند. بنابراین:

$$x(۵x+۳)=۴\Rightarrow ۵x^۲+۳x-۴=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-\frac{۳}{۵}\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

$$\begin{cases}S'=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=+\frac{۳}{۴}\\ P'=\frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۱}{P}=-\frac{۵}{۴}\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{تشکیل}} x^۲-S'x+P'=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۴}x-\frac{۵}{۴}=۰\Rightarrow ۴x^۲-۳x-۵=۰\Rightarrow k=-۳$$

روش دوم: اگر ریشه‌های معادله $۴x^۲+kx-۵=۰$ را به صورت X نشان دهیم داریم:

$$x\,(۵x+۳)=۴\to ۵x^۲+۳x-۴=۰\to X=\frac{۱}{x}\ \text{یا}\ x=\frac{۱}{X}$$

$$\to ۵\left(\frac{۱}{x}\right)^۲+۳\left(\frac{۱}{x}\right)-۴=۰\to\frac{۵}{X^۲}+\frac{۳}{X}-۴=۰$$

$$\xrightarrow{\times X^۲} ۵+۳X-۴X^۲=۰\to ۴X^۲-۳X-۵=۰$$

$$\to\boxed{k=-۳}$$

۷۰ ۱ ۲ ۳ ۴ باتوجه به متن سؤال می‌توان نوشت: $۴x^۲-۸x+c=۰$

حاصل جمع ریشه‌ها $S=\frac{-b}{a}=-\frac{-۸}{۴}=۲$

$$\alpha=\beta+۳$$

$$S=\alpha+\beta=\beta+۳+\beta=۲\beta+۳=۲\to ۲\beta=-۱\to\boxed{\beta=-\frac{۱}{۲}}$$

$$\alpha=\beta+۳=-\frac{۱}{۲}+۳=\frac{۵}{۲}\to\boxed{\alpha=\frac{۵}{۲}}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها $P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}\to\frac{۵}{۲}\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{c}{۴}\to\frac{c}{۴}=-\frac{۵}{۴}\to\boxed{c=-۵}$

$$۲x^۲-x+c=۰\xrightarrow{c=-۵}۲x^۲-x-۵=۰\to P=x_۱\cdot x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۵}{۲}$$

۷۱ ۱ ۲ ۳ ۴

$$x_۱+x_۲=-۲\to\frac{-b}{a}=-۲\Rightarrow\frac{-k}{۴}=-۲\Rightarrow k=۸\Rightarrow ۴x^۲+۸x-۲۱=۰$$

$$\Rightarrow(۲x-۳)(۲x+۷)=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\ ,\ x=-\frac{۷}{۲}$$

البته برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم $۴x^۲+۸x-۲۱=۰$ می‌توانید از روش دلتا هم استفاده کنید.

۷۲ ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا جمع و ضرب ریشه‌ها را در معادلهٔ اول پیدا می‌کنیم:

$$(m-۱)x^۲-۳x+m=۰\Rightarrow\begin{cases}S=-\frac{b}{a}=\frac{۳}{m-۱}\\ P=\frac{c}{a}=\frac{m}{m-۱}\end{cases}$$

اکنون داریم:

$$S=P+۱\Rightarrow \frac{۳}{m-۱}=\frac{m}{m-۱}+۱\Rightarrow \frac{۳}{m-۱}-\frac{m}{m-۱}=۱$$
$$\Rightarrow \frac{۳-m}{m-۱}=۱\Rightarrow ۳-m=m-۱\Rightarrow ۲m=۴\Rightarrow m=۲$$

به‌ازای $m=۲$، معادلهٔ داده‌شده ۲ ریشه دارد، پس $m=۲$ قابل‌قبول است.

اکنون حاصل عبارت خواسته‌شده را در معادلهٔ دوم به دست می‌آوریم:

$$m=۲\Rightarrow ۲x^۲+۴x=۴\Rightarrow x^۲+۲x-۲=۰\Rightarrow \begin{cases}S=\alpha+\beta=-۲\\ P=\alpha\cdot\beta=-۲\end{cases}$$
$$\alpha^۳\beta+\beta^۳\alpha=\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)=P(S^۲-۲P)=(-۲)(۴-۲(-۲))=-۱۶$$

۷۳) ۱ ۲ **۳** ۴

$$\text{جمع ریشه‌ها}=\alpha+\beta=S=\frac{-b}{۴}$$
$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}=\alpha\beta=P=\frac{۱}{۴}$$
$$\underbrace{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}_{\text{مجموع جذر ریشه‌ها}}=\frac{۱}{\underbrace{\alpha\beta}_{\text{معکوس حاصل ضرب ریشه‌ها}}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=\frac{۱}{(\alpha\beta)^۲}\Rightarrow S+۲\sqrt{P}=\frac{۱}{P^۲}\Rightarrow\frac{-b}{۴}+۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۴})^۲}\Rightarrow\frac{-b}{۴}+۱=۱۶\Rightarrow b=-۶۰$$

۷۴) ۱ **۲** ۳ ۴ معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^۲+b(x-k)+c=۰$$

کافی است در معادله‌ی $۳x^۲+۵x-\frac{۱}{۴}=۰$، x را به $x-\frac{۱}{۲}$ تبدیل کنیم.

$$۳(x-\frac{۱}{۲})^۲+۵(x-\frac{۱}{۲})-\frac{۱}{۴}=۰\to ۳x^۲-۳x+\frac{۳}{۴}+۵x-\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۴}=۰\to ۳x^۲+۲x-۲=۰$$

۷۵) ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به معادله‌ی $x^۲+kx+۱=۰$ داریم:

حاصل‌ضرب ریشه‌ها : $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=۱$ و حاصل‌جمع ریشه‌ها : $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-k$

چون ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x+۱=۰$، به صورت $\{\sqrt{\alpha},\sqrt{\beta}\}$ است.

بنابراین:
$$S'=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\frac{-b}{a}=۴\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}=۱۶$$
$$\to -k+۲\sqrt{۱}=۱۶\Rightarrow -k=۱۴\Rightarrow k=-۱۴$$

۷۶) ۱ **۲** ۳ ۴

کافی است ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۳x-۹=۰$ را به دست آوریم.

$$\Delta=b^۲-۴ac=۹-۴(۲)(-۹)=۹+۷۲=۸۱\to x_۱,x_۲=\frac{۳\pm۹}{۴}=۳,-\frac{۳}{۲}$$
$$x'_۱=\frac{۱}{x_۱^۲}-۲=\frac{۱}{۹}-۲=-\frac{۱۷}{۹}\quad\text{و}\quad x'_۲=\frac{۱}{x_۲^۲}-۲=\frac{۱}{\frac{۹}{۴}}-۲=\frac{۴}{۹}-۲=-\frac{۱۴}{۹}$$
$$x^۲-Sx+P=۰\to x^۲-(-\frac{۱۷}{۹}-\frac{۱۴}{۹})x+\underbrace{(-\frac{۱۷}{۹})(-\frac{۱۴}{۹})}_{P}=۰\to x^۲+\frac{۳۱}{۹}x+P=۰$$
$$\xrightarrow{\times۹}۹x^۲+۳۱x+۹P=۰\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۹x^۲+ax+b=۰}a=۳۱$$

۷۷) ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی را می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادله داده شده باشد و سپس معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌هایش یک واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی نوشته شده باشد. برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادله‌ی داده شده‌ای باشد باید b را در k و c را در $k^۲$ ضرب کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$۲x^۲-۵x+۱=۰\xrightarrow[\text{۲}^۲\text{ در } c]{\text{۲ در } b}۲x^۲-۱۰x+۴=۰\xrightarrow{x\to x+۱}۲(x+۱)^۲-۱۰(x+۱)+۴=۰$$
$$\to ۲x^۲+۴x+۲-۱۰x-۱۰+۴=۰\to ۲x^۲-۶x-۴=۰\to x^۲-۳x-۲=۰$$

۷۸) ۱ **۲** ۳ ۴ برای تشکیل معادلهٔ جدید به حاصل جمع (S') و حاصل ضرب (P') نیاز داریم؛ بنابراین:

$$S'=\frac{\alpha}{۲S+P}+\frac{\beta}{۳S+۴P}\xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-۱]{S=-\frac{b}{a}=۳}\frac{\alpha}{۲(۳)-۱}+\frac{\beta}{۳(۳)+۴(-۱)}=\frac{\alpha}{۵}+\frac{\beta}{۵}=\frac{\alpha+\beta}{۵}=\frac{S}{۵}=\frac{۳}{۵}$$
$$P'=\frac{\alpha}{۲S+P}\times\frac{\beta}{۳S+۴P}=\frac{\alpha}{۵}\times\frac{\beta}{۵}=\frac{\alpha\beta}{۲۵}=\frac{P}{۲۵}=\frac{-۱}{۲۵}$$

حال با داشتن (S') و (P') معادلهٔ جدید را می‌نویسیم:

$$x^۲-S'x+P'=۰\to x^۲-\frac{۳}{۵}x-\frac{۱}{۲۵}=۰\xrightarrow{\times۲۵}۲۵x^۲-۱۵x-۱=۰$$

با مقایسهٔ معادلهٔ حاصل با معادلهٔ $۲۵x^۲ - ۵kx - ۱ = ۰$ داریم:

$$-۵k = -۱۵ \to k = ۳$$

۷۹ (۴) (۳) (۲) (۱) ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۳ = ۰$ را α و β فرض می‌کنیم.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{-۱}{۱} = ۱ \ , \ P = \alpha \cdot \beta = \frac{-۳}{۱} = -۳$$

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + mx - n = ۰$ عبارت‌اند از: $\alpha^۲ + ۱$ و $\beta^۲ + ۱$ که داریم:

$$\text{جمع ریشه‌ها} = \alpha^۲ + ۱ + \beta^۲ + ۱ = -\frac{m}{۲} \Rightarrow -\frac{m}{۲} = \alpha^۲ + \beta^۲ + ۲ \Rightarrow -\frac{m}{۲} = S^۲ - ۲P + ۲ = ۱ - ۲(-۳) + ۲ = ۱ + ۶ + ۲ = ۹ \Rightarrow m = -۱۸$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = (\alpha^۲ + ۱)(\beta^۲ + ۱) = -\frac{n}{۲} \Rightarrow -\frac{n}{۲} = \alpha^۲\beta^۲ + \alpha^۲ + \beta^۲ + ۱ \Rightarrow -\frac{n}{۲} = P^۲ + S^۲ - ۲P + ۱ = ۹ + ۱ - ۲(-۳) + ۱ = ۱۷ \Rightarrow n = -۳۴$$

$$\Rightarrow m - n = -۱۸ - (-۳۴) = ۳۴ - ۱۸ = ۱۶$$

۸۰ (۴) (۳) (۲) (۱) اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده را α و β بنامیم باید معادله‌ی درجه‌ی دوم جدیدی بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha^۲$ و $\beta^۲$ باشند.

$$S_{\text{قدیم}} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۵ \ , \ P_{\text{قدیم}} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -۲$$

$$S_{\text{جدید}} = \alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = ۲۵ - ۲(-۲) = ۲۹$$

$$P_{\text{جدید}} = \alpha^۲ \cdot \beta^۲ = (\alpha \cdot \beta)^۲ = (-۲)^۲ = ۴$$

می‌دانیم که اگر مجموع (S) و حاصل‌ضرب دو ریشه (P) را داشته باشیم معادلهٔ درجهٔ دوم مطلوب به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ است پس معادله‌ی مطلوب به صورت $x^۲ - ۲۹x + ۴ = ۰$ است.

۸۱ (۴) (۳) (۲) (۱) برای حل مسئله ابتدا مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ اول را محاسبه می‌نماییم.

$$۲x^۲ + (c + ۲)x + ۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(c + ۲)}{۲} \quad (I) \\ P = \alpha \cdot \beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{۸}{۲} = ۴ \end{cases}$$

حال سراغ معادلهٔ دوم برویم: $\begin{cases} x_۱ = \sqrt{\alpha\beta} \\ x_۲ = ۲\sqrt{\alpha\beta} \end{cases}$, $x^۲ + bx + c = ۰$

$$\text{جدید } S = x_۱ + x_۲ = \sqrt{\alpha\beta} + ۲\sqrt{\alpha\beta} = ۳\sqrt{\alpha\beta} = ۳\sqrt{P} = ۳\sqrt{۴} = ۶$$

$$\text{جدید } P = x_۱ \cdot x_۲ = \sqrt{\alpha\beta} \times ۲\sqrt{\alpha\beta} = ۲\alpha\beta = ۲(۴) = ۸$$

حال می‌توان با فرمول زیر معادله را بازنویسی کرد: $x^۲ - Sx + P = ۰$.

$$\left.\begin{matrix} x^۲ - ۶x + ۸ = ۰ \\ x^۲ + bx + c = ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow c = ۸ \xrightarrow{(I)} \alpha + \beta = \frac{-(c + ۲)}{۲} = \frac{-۱۰}{۲} = -۵$$

۸۲ (۴) (۳) (۲) (۱) اگر α و β جواب‌های معادله باشند و $\alpha = ۲\beta$ آنگاه

$$\alpha + \beta = ۳m \to ۲\beta + \beta = ۳m \to \beta = m \to \alpha = ۲m$$

$$\alpha \cdot \beta = m + ۳ \to (۲m)(m) = m + ۳ \to ۲m^۲ - m - ۳ = ۰ \to (m + ۱)(۲m - ۳) = ۰ \to \begin{cases} m = -۱ \\ m = \dfrac{۳}{۲} \end{cases}$$

به ازای هر دو مقدار به دست آمده معادله دو جواب دارد، پس هر دو قابل قبول هستند و در نتیجه مجموع مقدارهای ممکن برای m برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۸۳ (۴) (۳) (۲) (۱) معادله‌ی $۲x^۲ - ۱۲x - ۹q = ۰$ مفروض است، می خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسیم که ریشه‌هایش ثلث ریشه‌های این معادله باشند. اگر y ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی قدیم باشد داریم:

$$y = \frac{x}{۳} \Rightarrow x = ۳y \xrightarrow{\text{معادله}} ۲(۳y)^۲ - ۱۲(۳y) - ۹q = ۰ \Rightarrow ۱۸y^۲ - ۳۶y - ۹q = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۱۸} \ y^۲ - ۲y - \frac{۱}{۲}q = ۰ \ \Rightarrow \ x^۲ - ۲x - \frac{۱}{۲}q = ۰$$

این معادله را با $x^۲ - px - ۱ = ۰$ مقایسه کرده و داریم:

$$p = ۲ \ , \ q = ۲ \Rightarrow pq = ۴$$

۸۴ (۴) (۳) (۲) (۱) چون α جواب معادله می‌باشد پس $۳\alpha^۲ - ۲\alpha - ۸ = ۰$ و در نتیجه $۳\alpha^۲ - ۸ = ۲\alpha$ است.

پس جواب‌های معادلهٔ جدید به‌صورت زیر هستند.

$$\to \alpha' = \frac{۱}{\alpha^۲ - \dfrac{۸}{۳}} = \frac{۳}{۳\alpha^۲ - ۸} = \frac{۳}{۲\alpha}, \beta' = \frac{۳}{۲\beta}$$

$$\begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = \frac{۳}{۲}(\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}) = \frac{۳}{۲}(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}) = \frac{۳}{۲}(\frac{\frac{۲}{۳}}{-\frac{۸}{۳}}) = -\frac{۳}{۸} \\ P' = \alpha'\beta' = \frac{۹}{۴\alpha\beta} = \frac{۹}{۴} \times (-\frac{۳}{۸}) = -\frac{۲۷}{۳۲} \end{cases}$$

معادلهٔ جدید به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x^۲ - S'x + P' \Rightarrow x^۲ + \frac{۳}{۸}x - \frac{۲۷}{۳۲} = ۰ \Rightarrow ۳۲x^۲ + ۱۲x - ۲۷ = ۰$$

۸۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴) برای محاسبه معادلهٔ جدید ابتدا S و P معادلهٔ اولیه را محاسبه می‌کنیم.

$$-۳x^۲ - ۴x + ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-۴)}{-۳} = -\frac{۴}{۳} \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{۶}{-۳} = -۲ \end{cases}$$

حال S و P معادلهٔ مجهول را بررسی می‌نماییم.

$$S_{\text{جدید}} = (۳\alpha - ۱) + (۳\beta - ۱) = ۳(\alpha + \beta) - ۲ = ۳(-\frac{۴}{۳}) - ۲ = -۶$$

$$P_{\text{جدید}} = (۳\alpha - ۱)(۳\beta - ۱) = ۹\alpha\beta - ۳(\alpha + \beta) + ۱ = ۹(-۲) - ۳(-\frac{۴}{۳}) + ۱ = -۱۳$$

حال با رابطهٔ $x^۲ - Sx + P = ۰$ معادله را می‌نویسیم:

$$x^۲ - (-۶)x + (-۱۳) = ۰ \rightarrow x^۲ + ۶x - ۱۳ = ۰$$

۸۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \xrightarrow{x \to x-۱} ۳(x-۱)^۲ - ۴(x-۱) - ۱ = ۰$$

$$\rightarrow ۳(x^۲ + ۱ - ۲x) - ۴x + ۴ - ۱ = ۰ \rightarrow ۳x^۲ + ۳ - ۶x - ۴x + ۴ - ۱ = ۰$$

$$\rightarrow ۳x^۲ - ۱۰x + ۶ = ۰ \xrightarrow{\text{مقایسه با } ۳x^۲+ax+b=۰} a = -۱۰ \ , \ b = ۶$$

دقت کنید که ریشه‌های معادلهٔ $a(x-k)^۲ + b(x-k) + c = ۰$، k واحد بیشتر از ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ است.

۸۷ (۱) (۲) **(۳)** (۴) با توجه به اینکه ریشه‌های معادلهٔ اولی، نیم واحد از ریشه‌های معادلهٔ دومی بیشتر است بنابراین مجموع ریشه‌های معادلهٔ اولی، یک واحد از مجموع ریشه‌های معادلهٔ دومی بیشتر است.

$$\alpha + \beta = \frac{a}{۲} \ , \ \alpha' + \beta' = \frac{-a}{۲a} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۲} = -\frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۱$$

$$\alpha\beta = \frac{b}{۲} \ , \ \alpha'\beta' = (\alpha - ۰٫۵)(\beta - ۰٫۵) = \alpha\beta - ۰٫۵(\underbrace{\cancel{\alpha + \beta}}_{۰٫۵}) + ۰٫۲۵ = -\frac{۶}{۲\alpha} = -۳$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{b}{۲} = -۳ \Rightarrow b = -۶ \Rightarrow [\frac{ab}{۴}] = [-\frac{۶}{۴}] = -۲$$

۸۸ **(۱)** (۲) (۳) (۴) نکته: اگر جمع دو عدد S و ضرب آن‌ها P باشد، آن دو عدد ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - Sx + P = ۰$ می‌باشند.

نکته: اگر $\alpha + \beta = S$ و $\alpha \cdot \beta = P$ آنگاه: $\alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳PS$ و $\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P$

$$x^۲ - ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = ۲ \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = -۴ \end{cases}$$

$$S_{\text{جدید}} = \frac{\beta}{(\alpha+۱)^۲} + \frac{\alpha}{(\beta+۱)^۲} = \frac{\beta(\beta+۱)^۲ + \alpha(\alpha+۱)^۲}{(\alpha+۱)^۲(\beta+۱)^۲} = \frac{\beta^۳ + ۲\beta^۲ + \beta + \alpha^۳ + ۲\alpha^۲ + \alpha}{(\alpha\beta + \alpha + \beta + ۱)^۲}$$

می‌دانیم: $\alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳PS = ۸ + ۲۴ = ۳۲$ و $\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P = ۴ + ۸ = ۱۲$ است.

$$\begin{cases} S_{\text{جدید}} = \frac{(\alpha^۳ + \beta^۳) + ۲(\alpha^۲ + \beta^۲) + (\alpha + \beta)}{(\alpha\beta + \alpha + \beta + ۱)^۲} = \frac{۳۲ + ۲۴ + ۲}{(-۴ + ۲ + ۱)^۲} = ۵۸ \\ P_{\text{جدید}} = \frac{\beta}{(\alpha+۱)^۲} \times \frac{\alpha}{(\beta+۱)^۲} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha\beta + \alpha + \beta + ۱)^۲} = -۴ \end{cases}$$

پس معادلهٔ جدید به‌صورت $x^۲ - ۵۸x - ۴ = ۰$ می‌باشد.

۸۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$(m-۱)x^۲ + ۶x + ۴ - m = ۰ \rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها } P = \frac{۴-m}{m-۱} = ۲$$

$$\rightarrow ۴ - m = ۲m - ۲ \rightarrow ۶ = ۳m \rightarrow \boxed{m = ۲}$$

$$\rightarrow x^2+6x+2=0 \rightarrow \text{ریشه‌ها}=\alpha,\beta \rightarrow \begin{cases} \text{ضرب ریشه‌ها}: S=-6 \\ \text{جمع ریشه‌ها}: P=2 \end{cases}$$

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}=\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=(-6)^2-2(2)=36-4 \rightarrow \boxed{\alpha^2+\beta^2=32}$$

۹۰ ۱ **۲** ۳ ۴ فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله $x^2-3x-7=0$ باشند، داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{-3}{1}=3 \ , \quad \alpha\beta=\frac{-7}{1}=-7$$

ریشه‌های معادلهٔ $x^2-ax+b=0$ برابر $2\alpha-3$ و $2\beta-3$ هستند و داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=2\alpha-3+2\beta-3=2(\alpha+\beta)-6=-\frac{-a}{1} \Rightarrow 2\times 3-6=a \Rightarrow a=0$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها}=(2\alpha-3)(2\beta-3)=\frac{b}{1} \Rightarrow 4\alpha\beta-6\alpha-6\beta+9=b$$

$$\Rightarrow b=4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+9=4(-7)-6\times 3+9$$

$$\Rightarrow b=-28-18+9=-46+9=-37$$

$$\Rightarrow a+b=0-37=-37$$

۹۱ ۱ ۲ **۳** ۴

برای حل معادلهٔ $x-2\sqrt{x}+m-1=0$ از روش تغییر متغیر بهره می‌گیریم. اگر به‌جای عبارت $\sqrt{x}$ ، t قرار دهیم، داریم:

$$(\sqrt{x})^2-2(\sqrt{x})+m-1=0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2-2t+m-1=0$$

برای اینکه معادلهٔ داده‌شده در تست، دو جواب متمایز برای x داشته باشد، باید در معادلهٔ $t^2-2t+m-1=0$ یکی از حالات زیر اتفاق بیفتد:

۱ــ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثبت باشد، برای این منظور داریم:

$$\text{شرط وجود دو ریشهٔ مثبت} \Rightarrow \begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow 4-4(m-1)>0 \Rightarrow 8-4m>0 \Rightarrow m<2 \\ \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m-1}{1}>0 \Rightarrow m-1>0 \Rightarrow m>1 \\ -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow -\frac{-2}{1}>0 \Rightarrow 2>0 \ \text{برقرار است} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1<m<2$$

۲ــ دارای یک ریشهٔ صفر و یک ریشهٔ مثبت باشد. برای این منظور باید $c=0$ و $-\frac{b}{a}>0$ باشد. داریم:

$$m-1=0 \Rightarrow m=1$$

حال از اجتماع مقادیر به‌دست‌آمده در (۱) و (۲)، حدود m برابر است با: $1 \le m<2$

۹۲ ۱ **۲** ۳ ۴

این معادله باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد. $\quad x^2=t \Rightarrow t^2-(m+2)t+m+5=0$

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ \frac{c}{a}>0 \\ -\frac{b}{a}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2+4+4m-4m-20>0 \\ m+5>0 \\ m+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2>16 \\ m>-5 \\ m>-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m>4 \ , \ m<-4 \\ m>-5 \\ m>-2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m>4$$

۹۳ ۱ ۲ **۳** ۴

$$ax^4+bx^2+c=0 \xrightarrow{x^2=t} at^2+bt+c=0$$

اگر Δ معادله‌ی فوق مثبت باشد. معادله دو ریشه دارد. اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد. دو ریشه‌ی مختلف العلامت دارد. لذا با توجه به این که $x^2=t$، فقط جواب مثبت آن قابل قبول است که دو ریشه‌ی قرینه برای x حاصل می شود. پس اگر در معادله‌ی فوق $\frac{c}{a}<0$ باشد فقط دو ریشه‌ی قرینه دارد. که این شرط فقط در گزینه ی (۳) وجود دارد.

۹۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$x^4+3x^2-\sqrt{m-1}-2=0$$

در معادله‌ی دو مجذوری فوق چون a و c یعنی ۱ و $-(\sqrt{m-1}+2)$ مختلف‌العلامت‌اند، در نتیجه $\frac{c}{a}<0$ بوده و معادله‌ی دو مجذوری دو ریشه‌ی حقیقی قرینه هم خواهد داشت.

۹۵ ۱ **۲** ۳ ۴ می‌دانیم معادلهٔ دو مجذوری فقط در حالتی دارای ۳ ریشهٔ حقیقی متمایز است که یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم تولید شده با تغییر متغیر $x^2=t$، برابر صفر و دیگری عددی مثبت باشد.

اول: صفر ریشهٔ معادله است:

$$2x^4-kx^2+k^2-1=0 \xrightarrow{x=0} k^2=1 \Rightarrow k=\pm 1$$

دوم: مقادیر k را امتحان می‌کنیم:

$$k=1 \Rightarrow 2x^4-x^2=0 \Rightarrow x^2(2x^2-1)=0 \Rightarrow x=0, x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k=-1 \Rightarrow 2x^4+x^2=0 \Rightarrow x^2(2x^2+1)=0 \Rightarrow x=0$$

پس $k = ۱$ صحیح است.

۹۶ ۴ ۳ ۲ ۱ ابتدا با فرض $x^۲ = t$ معادله به یک عبارت درجه‌ی دو تبدیل می‌شود.

$$x^۲ = t \to t^۲ - ۵t - m + ۵ = ۰$$

برای اینکه معادله فاقد ریشه باشد می‌توان دو حالت در نظر گرفت.

حالت اول: $\Delta < ۰ \to \Delta = ۲۵ - ۴(۱)(-m+۵) = ۲۵ + ۴m - ۲۰ = ۵ + ۴m$

$$\Delta < ۰ \to ۵ + ۴m < ۰ \to m < -\frac{۵}{۴}$$

حالت دوم؛ دو ریشه‌ی منفی داشته باشیم:

$$(I)\ \ \Delta \geq ۰ \to$$

$$(II)\ \ S < ۰ \to S = \frac{-b}{a} \to S = \frac{۵}{۱} < ۰ \text{ غیر ممکن}$$

۹۷ ۴ ۳ ۲ ۱ ابتدا $x^۲ = t$ فرض می‌نمائیم تا به یک معادله‌ی درجه‌ی دو برسیم

$$x^۲ = t \to \ \ t^۲ + ۸t + k^۲ + ۷ = ۰$$

حال برای تولید دو ریشه دو حالت وجود دارد:

حالت اول: یک ریشه‌ی مضاعف مثبت داشته باشیم

$$(I)\ \Delta = ۰ \quad (II)\ \ S > ۰ \to S = -\frac{۸}{۲} < ۰ \text{ غیر ممکن}$$

حالت دوم، دو ریشه‌ی مختلف العلامت داشته

$$(I)\ \Delta > ۰ \to \Delta = ۶۴ - ۴(۱)(k^۲ + ۷) \to -۴k^۲ - ۲۸$$

$$(II)\ p < ۰ \to \frac{k^۲ + ۷}{۱} < ۰ \to k^۲ + ۷ < ۰ \text{ غیر ممکن}$$

۹۸ ۴ ۳ ۲ ۱ ابتدا $x^۲ = t$ فرض می‌نمائیم تا به یک معادله‌ی درجه‌ی دو برسیم

$$t^۲ - ۱۰t + ۹ = ۰ \to (t-۱)(t-۹) = ۰ \begin{cases} t = ۱ \to x^۲ = ۱ \to x = \pm ۱ \\ t = ۹ \to x^۲ = ۹ \to x = \pm ۳ \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله صفر است.

۹۹ ۴ ۳ ۲ ۱

ابتدا $x^۲ = t$ فرض می‌نمائیم تا معادله به فرم درجهٔ ۲ تبدیل شود.

$$x^۴ - ۵x^۲ + a = ۰ \xrightarrow{x^۲ = t} t^۲ - ۵t + a = ۰$$

معادله باید دو ریشهٔ مثبت داشته باشد تا نهایتاً چهار ریشه تولید شود، پس:

$$(I)\ \ \Delta > ۰ \to ۲۵ - ۴a > ۰ \to a < \frac{۲۵}{۴}$$

$$(II)\ S > ۰ \to \frac{-(-۵)}{۱} > ۰ \text{ همواره برقرار}$$

$$(III)\ \ P > ۰ \to \frac{a}{۱} > ۰ \to a > ۰$$

با اشتراک گرفتن بین سه شرط داریم:

$$۰ < a < \frac{۲۵}{۴} \to \ \ \text{اعداد طبیعی} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

۱۰۰ ۴ ۳ ۲ ۱ با فرض $x^۲ = t$ داریم:

$$۲x^۴ - x^۲ - ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲t^۲ - t - ۷ = ۰ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-۷}{۲} < ۰$$

معادلهٔ $۲t^۲ - t - ۷ = ۰$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد. اگر $t_۱$ ریشهٔ منفی و $t_۲$ ریشهٔ مثبت باشد، داریم:

$$x^۲ = t_۱ < ۰ \Rightarrow \text{غیرقابل قبول}$$

$$x^۲ = t_۲ > ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_۲}$$

بنابراین معادله ۲ ریشهٔ حقیقی دارد.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	**۴**
۲	**۱**	۲	۳	۴
۳	۱	۲	**۳**	۴
۴	۱	**۲**	۳	۴
۵	۱	**۲**	۳	۴
۶	**۱**	۲	۳	۴
۷	۱	**۲**	۳	۴
۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰	۱	۲	۳	**۴**
۱۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۴	۱	**۲**	۳	۴
۱۵	۱	**۲**	۳	۴
۱۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۷	**۱**	۲	۳	۴
۱۸	**۱**	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	**۳**	۴
۲۰	۱	**۲**	۳	۴
۲۱	**۱**	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	**۴**
۲۳	۱	**۲**	۳	۴
۲۴	**۱**	۲	۳	۴
۲۵	۱	**۲**	۳	۴
۲۶	**۱**	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	**۴**
۲۸	۱	۲	۳	**۴**
۲۹	**۱**	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	**۴**
۳۱	۱	۲	**۳**	۴
۳۲	۱	**۲**	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	**۴**
۳۴	۱	**۲**	۳	۴
۳۵	**۱**	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	**۳**	۴
۳۷	۱	۲	**۳**	۴
۳۸	**۱**	۲	۳	۴
۳۹	**۱**	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	**۳**	۴
۴۱	۱	۲	**۳**	۴
۴۲	۱	۲	**۳**	۴
۴۳	**۱**	۲	۳	۴
۴۴	۱	**۲**	۳	۴
۴۵	**۱**	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	**۴**
۴۷	۱	۲	**۳**	۴
۴۸	۱	**۲**	۳	۴
۴۹	**۱**	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	**۳**	۴
۵۱	۱	۲	**۳**	۴
۵۲	**۱**	۲	۳	۴
۵۳	۱	**۲**	۳	۴
۵۴	۱	۲	**۳**	۴
۵۵	۱	۲	**۳**	۴
۵۶	۱	۲	**۳**	۴
۵۷	۱	۲	۳	**۴**
۵۸	۱	**۲**	۳	۴
۵۹	۱	۲	**۳**	۴
۶۰	۱	۲	۳	**۴**
۶۱	۱	۲	**۳**	۴
۶۲	۱	۲	۳	**۴**
۶۳	۱	۲	**۳**	۴
۶۴	**۱**	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	**۴**
۶۶	**۱**	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	**۳**	۴
۶۸	۱	**۲**	۳	۴
۶۹	**۱**	۲	۳	۴
۷۰	**۱**	۲	۳	۴
۷۱	**۱**	۲	۳	۴
۷۲	**۱**	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	**۳**	۴
۷۴	۱	**۲**	۳	۴
۷۵	۱	**۲**	۳	۴
۷۶	۱	**۲**	۳	۴
۷۷	۱	**۲**	۳	۴
۷۸	۱	**۲**	۳	۴
۷۹	**۱**	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	**۴**
۸۱	**۱**	۲	۳	۴
۸۲	**۱**	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	**۳**	۴
۸۴	**۱**	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	**۳**	۴
۸۶	۱	۲	۳	**۴**
۸۷	۱	۲	**۳**	۴
۸۸	**۱**	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	**۳**	۴
۹۰	۱	**۲**	۳	۴
۹۱	۱	۲	**۳**	۴
۹۲	۱	**۲**	۳	۴
۹۳	۱	۲	**۳**	۴
۹۴	۱	**۲**	۳	۴
۹۵	۱	**۲**	۳	۴
۹۶	۱	۲	**۳**	۴
۹۷	**۱**	۲	۳	۴
۹۸	**۱**	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰۰	۱	**۲**	۳	۴