

### فصل 3 : توان های گویا و عبارت های جبری

درس اول: ریشه و توان

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱ اگر  $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}(12)^{-1,5}}$  باشد، حاصل عبارت  $(1 + A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ، کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۲ در نامعادله  $\sqrt[4]{x} \leq 3 \leq -2$ ، چند مقدار صحیح برای  $x$  می توان یافت؟

- ۱) ۸۰      ۲) ۸۲      ۳) ۶۵      ۴) ۶۶

سخت - ۱۳۹۷ - smart

۳ حاصل عبارت  $(3\sqrt{2} - \sqrt{1})(3\sqrt{2} - \sqrt{2})(3\sqrt{2} - \sqrt{3}) \dots (3\sqrt{2} - \sqrt{20})$  کدام است؟

- ۱)  $(3\sqrt{2})^{20} - 20$       ۲)  $(3\sqrt{2})^{20} + 20$       ۳)  $(3\sqrt{2})^{20} - 20\sqrt{20}$       ۴) صفر

سخت - ۱۴۰۰ - smart

۴ عدد  $\sqrt{\sqrt{28} + 2\sqrt{18}}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

- ۱) ۴,۳      ۲) ۵,۴      ۳) ۶,۵      ۴) ۷,۶

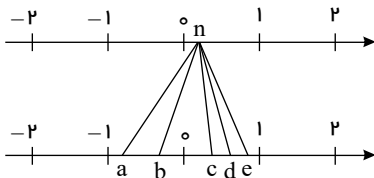
متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۵ اگر  $a$  عددی مثبت باشد، کدام عبارت درست است؟

- ۱) اگر  $\sqrt[3]{a} < a$ ، آن گاه  $a$  قطعاً عددی بین صفر و ۱ است.  
 ۲) اگر  $\sqrt[3]{a} = a$ ، آن گاه  $a$  دو مقدار مختلف می تواند باشد.  
 ۳) اگر  $\sqrt[3]{a} < a$ ، آن گاه  $a$  هر عدد دلخواه مثبتی می تواند باشد.  
 ۴) اگر  $\sqrt[3]{a} > a$ ، آن گاه  $a$  قطعاً عددی بین صفر و ۱ است.

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۶ در شکل زیر نقطه  $n$  از محور بالا به ریشه های دوم، سوم و چهارم خود وصل شده است. ریشه سوم عدد  $n$  کدام است؟

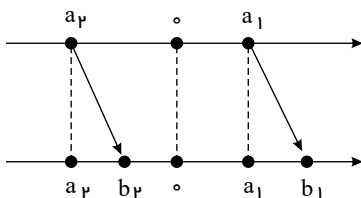


- ۱) a  
 ۲) b  
 ۳) c  
 ۴) d

۷ در شکل زیر، هریک از نقاط مشخص شده روی محور بالا به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه سوم آن است، متصل شده است. چه تعداد از موارد زیر صحیح هستند؟

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

الف)  $0 < a_1 < 1$       ب)  $-1 < a_2 < 0$       پ)  $0 < b_1 < 1$       ت)  $-1 < b_2 < 0$



- ۱) صفر  
 ۲) ۱  
 ۳) ۲  
 ۴) ۳

smart- ۱۴۰۰ - متوسط

۸ اگر  $a^{25} > a^{37}$  باشد، آنگاه کدام گزینه، همواره درست است؟

- ۱  $-1 < a < 0$       ۲  $a^3 > a^6$       ۳  $0 < a < 1$       ۴  $a^4 > a$

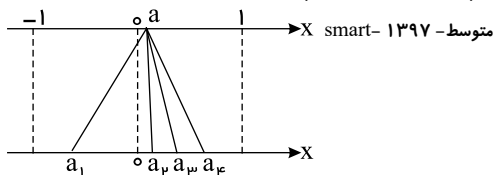
smart- ۱۳۹۹ - متوسط

۹ اگر  $a^2 > a^3$  و  $b^3 > b^5$  باشند، چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟

- الف)  $a^2 < 1$       ب)  $b^4 < b^2$       ج)  $ab < 1$       د)  $a + b < 1$
- ۱ صفر      ۲ یک      ۳ دو      ۴ سه

درس دوم: ریشه n ام

۱۰ در شکل زیر، نقطه a از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. کدام نقطه ریشه چهارم نقطه a است؟



۱ فقط  $a_1$

۲  $a_1, a_2$

۳ فقط  $a_3$

۴  $a_1, a_3$

smart- ۱۳۹۸ - سخت

۱۱ اگر  $-1 < a < 0$  باشد، چند مورد از موارد زیر درست است؟

- الف)  $\sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$       ب)  $a^2 > a^4$       ت)  $\sqrt{-a} < \sqrt[3]{-a}$       پ)  $\sqrt[3]{a^2} < \sqrt[6]{a^2}$
- ۱ ۴      ۲ ۳      ۳ ۲      ۴ ۱

smart- ۱۳۹۹ - متوسط

۱۲ ریشه ششم مثبت  $8^{2(x+1)}$  با ریشه دوم مثبت  $(\frac{1}{p})^{2x}$  برابر است. مقدار x کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{4}$       ۲  $\frac{1}{2}$       ۳ ۲      ۴ -۲

smart- ۱۳۹۸ - سخت

۱۳ در کدام گزینه، اعداد به درستی مرتب شده‌اند؟

- ۱  $\sqrt[3]{31} < \sqrt[4]{80} < \sqrt[6]{972} < \sqrt{10}$       ۲  $\sqrt[3]{31} < \sqrt[4]{80} < \sqrt{10} < \sqrt[6]{972}$
- ۳  $\sqrt[4]{80} < \sqrt[3]{31} < \sqrt{10} < \sqrt[6]{972}$       ۴  $\sqrt[4]{80} < \sqrt[3]{31} < \sqrt[6]{972} < \sqrt{10}$

smart- ۱۳۹۸ - متوسط

۱۴ کدام یک از عبارات‌های زیر همواره درست است؟ ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

- ۱ برای هر دو عدد a و b رابطه  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  برقرار است.
- ۲ برای  $a > 0$  و  $m$  نمایش ریشه‌های دوم عدد m به کار می‌رود.
- ۳  $b^n = a$  اگر  $a$  عدد n ام عدد a است ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ )
- ۴ برای هر a داریم:  $(\sqrt[k]{a})^m = \sqrt[k]{a^m}$  (m عدد صحیح و k عدد طبیعی است).

smart- ۱۳۹۶ - متوسط

۱۵ ریشه سوم ۶۴ چند برابر ریشه دوم ۳۲ است؟

- ۱ فقط  $\sqrt{2}$       ۲ فقط  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۳  $\pm\sqrt{2}$       ۴  $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

smart- ۱۴۰۰ - متوسط

۱۶ ریشه هفتم کدام عدد با ریشه سوم عدد  $2\sqrt{2}$  برابر است؟

- ۱  $4\sqrt{2}$       ۲  $8\sqrt{2}$       ۳  $16\sqrt{2}$       ۴  $\sqrt{2}$

۱۷ اگر a و b دو عدد طبیعی متوالی و c و d دو عدد صحیح متوالی باشد و  $a < \sqrt{31} < b$  و  $c < \sqrt{-15} < d$ ، آنگاه حاصل

smart- ۱۴۰۰ - سخت

$\sqrt[3]{2a + 2b + c + d}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرد؟

- ۱ ۲ و ۱      ۲ ۳ و ۲      ۳ ۴ و ۳      ۴ ۵ و ۴

smart- ۱۳۹۶ - متوسط

۱۸ کدام یک از گزینه‌های زیر ریشه‌ی دوم عدد  $11 - 4\sqrt{7}$  است؟

- ۱  $4 - 2\sqrt{7}$       ۲  $1 - \sqrt{7}$       ۳  $\sqrt{7} - 4$       ۴  $2 - \sqrt{7}$

متوسط - ۱۴۰۰ smart-

۱۹ اگر ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر  $\alpha$  و ریشه چهارم منفی عدد  $\frac{1}{\alpha}$  برابر  $\beta$  باشد آنگاه  $\frac{\alpha^2}{\beta}$  کدام است؟

- ۱) ۲۴      ۲) ۱۲      ۳) -۱۲      ۴) -۲۴

متوسط - ۱۳۹۷ smart-

۲۰ اگر  $0 < a < 1$  باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- ۱)  $0 < a^2 < a < \sqrt[3]{a} < 1$       ۲)  $0 < \sqrt[3]{a} < a < a^2 < 1$       ۳)  $0 < a < \sqrt[3]{a} < a^2 < 1$       ۴)  $0 < a^2 < \sqrt[3]{a} < a < 1$

۲۱ دو کره توخالی هم مرکز، در داخل هم قرار گرفته‌اند که حجم کره بیرونی  $64\pi$  و حجم کره درونی  $16\pi$  می‌باشد. کدام گزینه به عنوان شعاع

متوسط - ۱۴۰۰ smart-

کره‌ای که بین این دو کره و هم مرکز با آن‌ها قرار می‌گیرد. قابل قبول است؟

- ۱) ۱۴      ۲)  $\sqrt[3]{14}$       ۳)  $\sqrt[3]{10}$       ۴) ۱۰

متوسط - ۱۳۹۸ smart-

۲۲ چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) اگر  $0 < a < -1$  باشد، آنگاه  $a^{21} > a^{17}$

ب) ریشه چهارم مثبت اعداد مثبت از ریشه دوم مثبت شان کوچک تر است.

ج)  $\sqrt[3]{-0.1} < -\sqrt[4]{0.1}$

د) اگر  $a^6 > a^{10}$  باشد، آنگاه  $a^5 > a^{11}$  است.

- ۱) ۰      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) ۳

متوسط - ۱۳۹۸ smart-

۲۳ اگر  $0 < a < 1 < b$  باشد، آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

- ۱)  $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$       ۲)  $\sqrt[3]{b} < \sqrt{b}$       ۳)  $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$       ۴)  $b^2 < a^4$

متوسط - ۱۳۹۸ smart-

۲۴ اگر  $A = \sqrt[3]{-7}$ ،  $B = \sqrt[3]{13}$ ،  $C = \sqrt[4]{13}$  و  $D = \sqrt[4]{0.0014}$  باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

- ۱)  $-2 < A < -1$       ۲)  $2 < B < 3$       ۳)  $3 < C < 4$       ۴)  $0.2 < D < 0.3$

متوسط - ۱۳۹۸ smart-

۲۵ چه تعداد از عبارات زیر نادرست است؟

الف) هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه چهارم است که با هم قرینه‌اند.

ب) ریشه سوم هر عدد از خود آن عدد کم تر است.

پ) ریشه چهارم اعداد مثبت از ریشه سوم شان کم تر است.

- ۱) ۳      ۲) ۲      ۳) ۱      ۴) صفر

متوسط - ۱۳۹۷ smart-

۲۶ اگر  $0 < a < 1$  باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$$

- ۱)  $2\sqrt[3]{a}$       ۲)  $\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$       ۳)  $2a$       ۴) صفر

متوسط - ۱۳۹۷ smart-

۲۷ اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، به طوری که  $n < \sqrt[4]{357} < n+1$ ، آنگاه  $n$  کدام است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

متوسط - ۱۴۰۰ smart-

۲۸ اگر مجموع مربعات ریشه‌های چهارم عددی برابر ۴ باشد، این عدد برابر کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۸      ۳) ۴      ۴) ۱

متوسط - ۱۳۹۹ smart-

الف - اگر  $0 < a < -1$ ، آن گاه  $a^7 > a^2$  است.

ج - اگر  $a < -1$ ، آن گاه  $a^{21} > a^7$  است.

ب - اگر  $a < -1$ ، آن گاه  $a^{20} > a^8$  است.

د - اگر  $a < -1$ ، آن گاه  $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a}$  است.

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) صفر

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۳۰) برای عدد طبیعی  $n$  و اعداد حقیقی  $a$  و  $b$  چند تا از تساوی‌های زیر همواره درست است؟

(الف)  $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$  (به شرط  $a > 0$  و  $b > 0$ )

(ب)  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  (به شرط با معنا بودن  $\sqrt[n]{a}$ )

(پ)  $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt{a}$  (به شرط زوج بودن  $n$ )

(ت)  $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$  (به شرط فرد بودن  $n$ )

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۳۱) کدام گزینه همواره درست است؟ ( $n$  عدد طبیعی و  $n \geq 2$ )

۱)  $b$  ریشه  $n$ ام عدد  $a$  است، هرگاه  $a^n = b$ .

۲) تساوی  $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$  همواره برقرار است.

۳) اگر  $n$  زوج باشد،  $\sqrt[n]{a^n} = \pm a$ .

۴) اگر  $n$  فرد باشد، ریشه  $n$ ام عدد  $a$  همواره وجود دارد.

درس سوم: توان‌های گویا

سخت - ۱۳۹۷ - smart

۳۲) ریشه بیست و سوم عبارت  $\frac{24^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{5}{2}}}{32^{\frac{2}{3}} \times 27^{-\frac{1}{3}} \times 48^{-\frac{1}{4}}}$  کدام است؟

۴ (۴)  $\sqrt[6]{3}$

۳ (۳)  $\sqrt[12]{3}$

۲ (۲)  $\sqrt{12}$

۱ (۱)  $\sqrt[12]{6}$

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۹

۳۳) حاصل عبارت  $(2 - \sqrt{3})^{-1} + \frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}}$ ، کدام است؟

۴ (۴) ۱

۳ (۳)  $1 + \sqrt{3}$

۲ (۲)  $2\sqrt{3}$

۱ (۱)  $1 + 2\sqrt{3}$

سخت - سراسری - ۱۳۹۹

۳۴) حاصل عبارت  $2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} - \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}}$ ، کدام است؟

۴ (۴)  $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

۳ (۳)  $1 - \sqrt{2}$

۲ (۲)  $-1 + \sqrt{2}$

۱ (۱)  $1 + \sqrt{3}$

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۳۵) اگر ریشه هفتم عدد  $ab$  برابر  $2^{1/4}$ ،  $a = \sqrt{2\sqrt{2}}$  و  $b = \sqrt[4]{4\sqrt{2}}$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

۴ (۴) ۲

۳ (۳) ۳

۲ (۲) ۶

۱ (۱) ۹

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۳۶) اگر  $2^a = \sqrt[4]{3}$  و  $2^b = \sqrt[3]{\sqrt{b}} = \sqrt[4]{2\sqrt{4}}$  باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{(2^{a+1})^b}{b^a}$  کدام است؟

۴ (۴)  $\frac{19}{3}$

۳ (۳)  $\frac{48}{\sqrt{3}}$

۲ (۲)  $\frac{19}{\sqrt{3}}$

۱ (۱)  $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

سخت - ۱۳۹۸ - smart

۳۷) در معادله  $(\sqrt[4]{\frac{1}{3}})^{n-9} = \sqrt[5]{\sqrt[n]{3^{10}}}$ ،  $n$  کدام است؟ ( $n > 1$ )

۴ (۴) ۳

۳ (۳) ۲

۲ (۲) ۸

۱ (۱) ۴

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۳۸) حاصل  $A = (\sqrt[3]{7\sqrt{7}} + \sqrt[3]{5\sqrt{5}}) (\sqrt[4]{49} - \sqrt[5]{5\sqrt{125}})$  کدام است؟

۴ (۴) ۲

۳ (۳)  $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5}$

۲ (۲)  $\sqrt{7} + \sqrt{5}$

۱ (۱)  $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{5}$

سخت - ۱۳۹۸ - smart

۳۹) حاصل عبارت  $(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{\sqrt{5}+2} (\sqrt{7} - \sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}$  کدام است؟

۴ (۴)  $\sqrt{5} - 2$

۳ (۳)  $\sqrt{5} + 2$

۲ (۲) -۱

۱ (۱) ۱

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۴۰ حاصل عبارت تعریف شده  $n\sqrt[n-3]{\frac{m}{n-2\sqrt{m}}}$  کدام است؟

- ۱  $\sqrt[n]{m}$       ۲  $m$       ۳  $n\sqrt[n-2]{m}$       ۴  $m^{n-3}$

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۴۱ اگر  $a = 32$ ،  $r = \frac{1}{2}$  و  $s = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار عددی کدام یک از گزینه های زیر از سایر گزینه ها بزرگ تر است؟

- ۱  $\frac{a^r}{a^{s-r}}$       ۲  $a^{r-s}$       ۳  $(\frac{1}{a})^{\frac{1}{r}}$       ۴  $((\sqrt{a})^r)^s$

۴۲ در دنباله با جمله عمومی  $a_n = 2^{an+b}$ ، اگر جمله سوم  $1024$  و قدر نسبت  $8$  باشد، جمله بیستم دنباله  $b_n = bn + a$  کدام است؟

سخت - ۱۳۹۸ - smart

- ۱  $13$       ۲  $23$       ۳  $63$       ۴  $36$

سخت - ۱۴۰۰ - smart

۴۳ اگر  $a = 2^{\frac{2}{3}}$  و  $b = (\frac{1}{9})^{\frac{2}{5}}$  به آنگاه حاصل  $12^{\frac{2}{3}}$  بر حسب  $a$  و  $b$  کدام است؟

- ۱  $\frac{a}{\sqrt[6]{b^5}}$       ۲  $\frac{a^2}{\sqrt[6]{b^5}}$       ۳  $ab^{\frac{5}{6}}$       ۴  $a^2 b^{\frac{5}{6}}$

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۴۴ عبارت  $\sqrt[15]{6^{\frac{1}{5}}}$  با کدام یک از گزینه های زیر برابر است؟

- ۱  $\sqrt[5]{\sqrt[6]{\sqrt[3]{36}}}$       ۲  $\sqrt[10]{\sqrt[6]{6}}$       ۳  $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{6^{\frac{1}{3}}}}}$       ۴  $\sqrt[12]{\sqrt[10]{\sqrt[3]{36}}}$

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۴۵ اگر  $\sqrt[3]{3^{m+5}} \times \sqrt[3]{2^{n+2}} = 6^{m+1}$  باشد، حاصل  $m + n$  کدام است؟  $(m, n \in \mathbb{Z})$

- ۱  $5$       ۲  $4$       ۳  $3$       ۴  $2$

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۴۶ اگر  $x = 1 + \sqrt{3}$  و  $y = 2 - \sqrt{3}$  باشد، حاصل  $x^{-2} + \frac{y^{-1}}{2}$  کدام است؟

- ۱  $-2$       ۲  $0$       ۳  $2$       ۴  $4$

متوسط - ۱۴۰۰ - smart

۴۷ اگر  $\frac{\sqrt[4]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}} = -c$  باشد آن  $\alpha$  و  $\beta$  کدام می تواند باشد؟  $(c > 0, a > b > 0)$

- ۱  $\beta = (b-a)^5, \alpha = (a+b)^5$       ۲  $\beta = (b-a)^5, \alpha = (b-a)^5$       ۳  $\beta = (a+b)^5, \alpha = (a+b)^5$       ۴  $\beta = (a+b)^5, \alpha = (a-b)^5$

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۴۸ حاصل ساده شده  $(\sqrt{3} + 1)^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{2(2 - \sqrt{3})})$  عبارت کدام است؟

- ۱  $\frac{1}{3}$       ۲  $\frac{2}{3}$       ۳  $\frac{1}{6}$       ۴  $\frac{3}{2}$

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۴۹ حاصل عبارت  $\frac{(16^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}}{\sqrt{\sqrt[5]{64^{\frac{1}{5}}}}}$  کدام است؟

- ۱  $\sqrt{2}$       ۲  $\sqrt[3]{2}$       ۳  $\sqrt[4]{2}$       ۴  $\sqrt[5]{2}$

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۵۰ اگر  $\sqrt[5]{\sqrt{a}\sqrt{a}} = a^{2t - \frac{13}{20}}$  و  $16^{1 - \frac{1}{x}} = 2^{4t}$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

- ۱  $\frac{3}{4}$       ۲  $2$       ۳  $\frac{1}{2}$       ۴  $-\frac{1}{2}$

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۵۱) اگر  $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \left( \left( (4)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{6}} \right)^x$  باشد، حاصل  $\sqrt[5]{4(x+1)^3}$  کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{2}$       ۲) ۲      ۳)  $\sqrt[5]{4}$       ۴)  $\sqrt[5]{108}$

۵۲) اگر عدد مثبت  $A$  را به توان  $\frac{1+2n}{n}$  برسانیم و سپس ۳۲ برابر کنیم، حاصل آن برابر با ریشه  $n$  ام  $A$  می شود. عدد  $A$  کدام است؟

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

- ۱)  $2\sqrt{2}$       ۲)  $6\sqrt{2}$       ۳)  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$       ۴)  $\frac{1}{8\sqrt{2}}$

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۵۳) اگر  $a^x = \sqrt{b}$  و  $b^y = \sqrt{a}$  باشد، حاصل  $xy$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳)  $\frac{1}{3}$       ۴)  $\frac{1}{4}$

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۵۴) حاصل عبارت تعریف شده  $\frac{\sqrt{x^3x}}{\sqrt[3]{x\sqrt{-x}}}$  همواره کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{-x}$       ۲)  $-\sqrt{-x}$       ۳)  $\frac{1}{\sqrt{-x}}$       ۴)  $\frac{-1}{\sqrt{-x}}$

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۵۵) حاصل  $(4^{-0.25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}})(4^{-\frac{1}{4}} + (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}})$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{7}{16}$       ۲)  $\frac{31}{16}$       ۳)  $\frac{1}{8}$       ۴)  $\frac{9}{16}$

متوسط - ۱۴۰۰ - smart

۵۶) مقدار کدام عدد با بقیه متفاوت است؟

- ۱)  $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{9}}$       ۲)  $\frac{\sqrt{8}}{3}$       ۳)  $\frac{-\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{-27}}$       ۴)  $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

متوسط - ۱۴۰۰ - smart

۵۷) چند مورد از عبارت های زیر همواره برقرار است؟

$$\sqrt{\frac{x}{x^5}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^5}} \quad (2)$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{x}} = \sqrt[10]{x} \quad (4)$$

$$\sqrt{x^2+9} = x+3 \quad (1)$$

$$\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{x}\sqrt{x-1} \quad (3)$$

- ۱) ۴      ۲) ۳      ۳) ۲      ۴) ۱

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۵۸) مقدار عبارت  $\sqrt{2\sqrt{2}+1} \times \sqrt[4]{9-4\sqrt{2}}$  کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{7}$       ۲)  $3-2\sqrt{2}$       ۳)  $2\sqrt{15}$       ۴) ۷

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۵۹) حاصل عبارت  $(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}}(9+4\sqrt{5})^{\frac{1}{6}}$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۲)  $2\sqrt{2}$       ۳)  $\sqrt{2}$       ۴)  $\sqrt[3]{2}$

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

۶۰) اگر  $\sqrt[4]{a^3} < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$  باشد، آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

- ۱)  $\sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a}$       ۲)  $a^3 < a^4$       ۳)  $\sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$       ۴)  $\sqrt[6]{a^5} < \sqrt[4]{a}$

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

 ۶۱ حاصل عبارت  $A = \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} \times \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}}$  کدام است؟

- ① -۴      ② -۲      ③ -۱      ④ ۲

 ۶۲ اگر  $\sqrt[3]{1-a} \times \sqrt[3]{b-1} = \sqrt[3]{(1-a)(b-1)}$  و  $\sqrt{(2-b)^2} = 2-b$ ، آن گاه کدام گزینه در خصوص حدود  $a$  یا  $b$  صحیح است؟

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

- ①  $0 \leq b \leq 1$       ②  $1 \leq b \leq 2$       ③  $1 \leq a \leq 2$       ④  $-1 \leq a \leq 0$

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

 ۶۳ در صورتی که  $0 < a < 1$  باشد، کدام یک از نامساوی های زیر همواره نادرست است؟

- ①  $\sqrt[3]{a} > a$       ②  $\sqrt[3]{a} > \sqrt{a}$       ③  $\sqrt[3]{-a} < \sqrt{a}$       ④  $-a < \sqrt[3]{-a}$

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

 ۶۴ حاصل عبارت  $A = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[5]{-128}} + \frac{3\sqrt[3]{-27}}{4\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}} + \sqrt[3]{64}$  کدام است؟

- ① -۲      ② ۲      ③ -۳      ④ ۶

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

 ۶۵ اگر  $0 < a < 1$  باشد، فاصله کدام عدد از صفر کوچک تر است؟

- ①  $a^2\sqrt{a}$       ②  $\frac{1}{a}$       ③  $a\sqrt[3]{a}$       ④  $\sqrt[3]{a}$

متوسط - ۱۳۹۶ - smart

 ۶۶ اگر  $x$  عددی مثبت باشد، مقدار  $x$  در معادله  $\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{16}$  کدام است؟

- ①  $\sqrt[3]{32}$       ②  $\sqrt[3]{32}$       ③  $\sqrt[3]{64}$       ④  $\sqrt[3]{64}$

### درس چهارم: عبارت های جبری

سخت - سراسری - ۱۳۹۴

 ۶۷ اگر  $x = 7 - 2\sqrt{6}$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{\frac{x+2}{25}} + \frac{1}{x}$ ، کدام است؟

- ① ۰٫۶      ② ۰٫۸      ③ ۱٫۲      ④ ۱٫۴

سخت - سراسری - ۱۳۹۷

 ۶۸ در تجزیه عبارت  $1 - (x^2 - 4x + 4)(x - 2)$ ، کدام عامل ضرب، موجود است؟

- ①  $x - 3$       ②  $x - 2$       ③  $x - 1$       ④  $x + 3$

سخت - ۱۳۹۷ - smart

 ۶۹ اگر  $1 = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-2}$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt[3]{x^2 - x - 2}$  کدام است؟

- ① ۲      ②  $\frac{4}{3}$       ③ ۱      ④  $\frac{2}{3}$

 ۷۰ برای اعداد حقیقی  $a$  و  $b$ ، اگر تساوی  $0 = 13 - 2a + 4b - 2ab + b^2 + 2a^2$  برقرار باشد، حاصل  $3a + 2b$  کدام است؟

سخت - ۱۳۹۷ - smart

- ① ۱      ② ۱۹      ③ -۱      ④ -۱۹

متوسط - ۱۳۹۶ - smart

 ۷۱ حاصل  $\sqrt[5]{(\sqrt{2}+1)^4} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^2}$  کدام است؟

- ① ۲      ② ۱      ③  $\sqrt{2}$       ④  $\sqrt[5]{2}$

سخت - ۱۳۹۹ - smart

 ۷۲ مقدار عبارت  $\frac{4}{1+\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{4}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$  کدام است؟

- ①  $2\sqrt{n+2} - 1$       ②  $2\sqrt{n+2} - 2$       ③  $\sqrt{n+2} - 1$       ④  $4\sqrt{n+2} - 4$

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

 ۷۳ مقدار  $\sqrt{7-4\sqrt{3}} - 2\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{27}$  کدام است؟

- ① ۲      ②  $-2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$       ③  $4\sqrt{3}+6$       ④ -۲

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

 ۷۴ اگر  $a = \sqrt{4 - \sqrt{15}}$  و  $b = \sqrt{4 + \sqrt{15}}$  باشد، حاصل  $\frac{a-b}{a+b}$  کدام است؟

- ۱  $-\frac{1}{\sqrt{15}}$       ۲  $-\frac{\sqrt{15}}{3}$       ۳  $-\frac{\sqrt{15}}{5}$       ۴  $-\frac{2\sqrt{15}}{5}$

متوسط - سراسری - ۱۴۰۰

 ۷۵ فرض کنید  $a = \sqrt[4]{\sqrt{6} - 2}$  و  $b = \sqrt[4]{\sqrt{6} + 2}$  مقدار  $(a^2 + b^2 - 2ab)^2(a^2 + b^2 + 2ab)^2$  کدام است؟

- ۱  $4(2 + \sqrt{3})$       ۲  $4(2 - \sqrt{3})$       ۳  $16(2 + \sqrt{3})$       ۴  $16(2 - \sqrt{3})$

 ۷۶ فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله  $2\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2} - 1) = (\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1)$  باشند مقدار  $x_1 + x_2$  کدام است؟

سخت - سراسری - ۱۴۰۰

- ۱  $-1$       ۲ صفر      ۳  $1$       ۴  $2$

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

 ۷۷ حاصل  $\sqrt{14 - \sqrt{52}} - \sqrt{14 + \sqrt{52}}$  کدام است؟

- ۱  $2$       ۲  $-2$       ۳  $3$       ۴  $-3$

۷۸ مجموع مربع عددی با چهار برابر مربع عددی دیگر مساوی ۴ برابر حاصل ضرب آن دو عدد است. نسبت عدد اولی به دومی کدام است؟

متوسط - ۱۳۹۶ - smart

- ۱  $1$       ۲  $2$       ۳  $\frac{1}{2}$       ۴  $\frac{2}{3}$

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

 ۷۹ عبارت  $x^6 - 1$  همواره با کدام عبارت زیر برابر است؟

- ۱  $(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$       ۲  $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)^2$   
 ۳  $(x+1)(x^2+x-1)(x-1)(x^2-x-1)$       ۴  $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

سخت - ۱۳۹۸ - smart

 ۸۰ اگر  $a - b = 3$ ،  $ab = \frac{3}{4}$  و  $a$  و  $b$  هر دو مثبت باشند، آنگاه مقدار  $(a+b)^{-3}$  کدام است؟

- ۱  $1$       ۲  $24\sqrt{3}$       ۳  $72$       ۴  $\frac{\sqrt{3}}{72}$

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

 ۸۱ حاصل عبارت  $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$  به ازای  $x = 2 + \sqrt{3}$  کدام است؟

- ۱  $8$       ۲  $8 + \sqrt{3}$       ۳  $8 + 3\sqrt{3}$       ۴  $11$

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

 ۸۲ اگر  $x^2 + x = 1$  باشد، حاصل عبارت  $x^6 + 4x^3$  کدام است؟

- ۱  $1$       ۲  $3$       ۳  $4$       ۴  $6$

سخت - ۱۳۹۹ - smart

 ۸۳ حاصل عبارت  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{63}+8}$  کدام است؟

- ۱  $\frac{7}{8}$       ۲  $7$       ۳  $8$       ۴  $\sqrt{63} - 1$

سخت - ۱۳۹۸ - smart

 ۸۴ حاصل عبارت  $A = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 1$  به ازای  $x = \sqrt[12]{2}$  کدام است؟

- ۱  $1$       ۲  $2$       ۳  $\sqrt{2}$       ۴  $\sqrt[4]{2}$

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

 ۸۵ حاصل ساده شده ی عبارت  $(\sqrt{3} + 1)^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{2(2 - \sqrt{3})})$  کدام است؟

- ۱  $2^{\frac{1}{3}}$       ۲  $2^{\frac{2}{3}}$       ۳  $\frac{1}{2^6}$       ۴  $2^{\frac{2}{3}}$

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

 ۸۶ حاصل عبارت  $x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt{3}$  به ازای  $x = \sqrt{3} + 1$  کدام است؟

- ۱  $1 + 3\sqrt{3}$       ۲  $1 + \sqrt{3}$       ۳  $1$       ۴  $3\sqrt{2} - 1$



متوسط - ۱۳۹۷ - smart

۸۷ حاصل عبارت  $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$  کدام است؟

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$  (۴)

$\sqrt{6} + 1$  (۳)

$\sqrt{6} - 1$  (۲)

$\sqrt{3} - \sqrt{2}$  (۱)

۸۸ ساده شده عبارت مقابل کدام است؟

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

$$A = \frac{xy^3 + y^2 + y + 1 - x}{y^2 + y + 1}$$

$y - x$  (۴)

$xy - x + 1$  (۳)

$y^2 - x$  (۲)

$xy^2 - 1$  (۱)

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

 ۸۹ اگر  $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 = 9$  و  $A = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  باشد، حاصل  $A^2$  کدام است؟

$11 + 3A$  (۴)

$+3 + 3A$  (۳)

$3 + A^3$  (۲)

$7 + 3A$  (۱)

متوسط - ۱۳۹۸ - smart

 ۹۰ حاصل عبارت  $(\sqrt[6]{5} - 1)(\sqrt[6]{5^2} - \sqrt[6]{5} + 1)(\sqrt[6]{5^2} + \sqrt[6]{5} + 1)(\sqrt[6]{5} + 1)$  کدام است؟

$6$  (۴)

$5$  (۳)

$4$  (۲)

$3$  (۱)

 ۹۱ در تساوی  $\frac{5}{x-1} + \frac{3}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + A}{x-1}$  عبارت  $A$  کدام است؟ (عبارت ها تعریف شده هستند).

سخت - ۱۳۹۸ - smart

$2\sqrt{x} + 8$  (۴)

$2\sqrt{x} + 9$  (۳)

$4\sqrt{x} + 9$  (۲)

$3\sqrt{x} + 8$  (۱)

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

 ۹۲ حاصل عبارت  $A = \frac{4\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 2}$  کدام است؟

$5 + 5\sqrt[3]{4}$  (۴)

$3 + 3\sqrt[3]{4}$  (۳)

$10 + 5\sqrt[3]{2}$  (۲)

$6 + 3\sqrt[3]{2}$  (۱)

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

 ۹۳ با فرض  $x = 2 + \sqrt{3}$  ، حاصل  $x + \frac{1}{x}$  کدام است؟

$4\sqrt{3}$  (۴)

$4$  (۳)

$2$  (۲)

$2 - \sqrt{3}$  (۱)

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

 ۹۴ اگر  $a^3 + b^3 = 2$  باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{a^2 + a + 1}{b^2 + b + 1}$  همواره کدام است؟ ( $a \neq 1$ )

$\frac{1-a}{b-1}$  (۴)

$\frac{1-a}{1-b}$  (۳)

$\frac{1-b}{a-1}$  (۲)

$\frac{1-b}{1-a}$  (۱)

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

 ۹۵ حاصل عبارت  $A = \sqrt{7 + 6\sqrt{10} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$  کدام است؟

$\sqrt{18} + 1$  (۴)

$\sqrt{18} - 1$  (۳)

$5\sqrt{3}$  (۲)

$3\sqrt{2}$  (۱)

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

 ۹۶ حاصل عبارت  $A = \frac{\sqrt{\frac{2}{16}} \times \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + 8}}}}{5\sqrt{8} + 3\sqrt{50} - \sqrt{18}}$  کدام است؟

$\frac{1}{22}$  (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{44}$  (۳)

$22\sqrt{2}$  (۲)

$22$  (۱)

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

 ۹۷ ساده شده عبارت  $\left| \frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \right| - \left| \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right|$  کدام است؟

$-2\sqrt{5}$  (۴)

$2\sqrt{5}$  (۳)

$\sqrt{5}$  (۲)

$-\sqrt{5}$  (۱)

متوسط - ۱۳۹۷ - smart

 ۹۸ در تجزیه عبارت  $8a^9 - a^6b^3 + 8a^3b^3 - b^6$  کدام عامل وجود ندارد؟

$2a + b$  (۴)

$2a - b$  (۳)

$4a^2 + 2ab + b^2$  (۲)

$a^6 + b^3$  (۱)

smart- ۱۳۹۹ - سخت

۹۹ در تساوی  $\frac{6 + 3\sqrt{x} + A}{x-1} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}$  عبارت A کدام است؟

$$\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt[4]{x} \quad \text{④}$$

$$\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} \quad \text{③}$$

$$\sqrt[4]{x^3 + x} \quad \text{②}$$

$$\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} \quad \text{①}$$

smart- ۱۳۹۹ - متوسط

۱۰۰ اگر مخرج کسر  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$  را گویا کنیم، حاصل کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{④}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{③}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{②}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6} \quad \text{①}$$

smart- ۱۳۹۹ - متوسط

۱۰۱ اگر  $4a^2 - b^2 = 91$  و  $2a + b = 7$  باشند، حاصل  $a + b$  کدام است؟

$$5 \quad \text{④}$$

$$4 \quad \text{③}$$

$$3 \quad \text{②}$$

$$2 \quad \text{①}$$

smart- ۱۳۹۷ - متوسط

۱۰۲ در تجزیه عبارت  $(\sqrt[5]{x^4})^3 - 1$  کدام عبارت وجود ندارد؟

$$\sqrt[5]{x^7} + \sqrt[5]{x^2} + 1 \quad \text{④}$$

$$\sqrt[5]{x^2} + 1 \quad \text{③}$$

$$\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{x^2} + 1 \quad \text{②}$$

$$\sqrt[5]{x^2} - 1 \quad \text{①}$$

smart- ۱۳۹۷ - متوسط

۱۰۳ مجموع مربعات سه مضرب طبیعی و متوالی ۵، ۱۹۲۵ است. مجموع آن‌ها کدام است؟

$$90 \quad \text{④}$$

$$75 \quad \text{③}$$

$$105 \quad \text{②}$$

$$60 \quad \text{①}$$

۱۰۴ نردبانی به طول ۱۳ متر را طوری به دیوار یک ساختمان تکیه داده‌ایم که فاصله پای نردبان تا دیوار ۷ متر کمتر از سر نردبان تا زمین است.

smart- ۱۳۹۷ - متوسط

فاصله سر نردبان تا زمین چقدر است؟

$$15 \quad \text{④}$$

$$8 \quad \text{③}$$

$$12 \quad \text{②}$$

$$5 \quad \text{①}$$

smart- ۱۴۰۰ - متوسط

۱۰۵ اگر  $x = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$  باشد آنگاه حاصل عبارت  $\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$  کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{④}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{③}$$

$$2\sqrt{2} \quad \text{②}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{①}$$

smart- ۱۳۹۹ - متوسط

۱۰۶ حاصل عبارت  $(3 + \sqrt{2})^3 + (3 - \sqrt{2})^3 - (2\sqrt{2})^3 \sqrt{8}$  کدام است؟

$$-26 \quad \text{④}$$

$$64 - 58\sqrt{2} \quad \text{③}$$

$$26 \quad \text{②}$$

$$154 \quad \text{①}$$

smart- ۱۳۹۹ - متوسط

۱۰۷ اگر  $x + y = 3$  و  $xy = -1$  باشد، حاصل  $\sqrt{x^3 + y^3}$  کدام است؟

$$2\sqrt{6} \quad \text{④}$$

$$2\sqrt{3} \quad \text{③}$$

$$3\sqrt{2} \quad \text{②}$$

$$6 \quad \text{①}$$

smart- ۱۳۹۸ - متوسط

۱۰۸ حاصل عبارت  $A = (1 + \sqrt{3})^3 + (1 - \sqrt{3})^3$  در کدام گزینه آمده است؟

$$8\sqrt{3} \quad \text{④}$$

$$24 \quad \text{③}$$

$$4\sqrt{3} \quad \text{②}$$

$$20 \quad \text{①}$$

smart- ۱۳۹۸ - سخت

۱۰۹ اگر  $a(a^2 + 3ab) = 7$  و  $b(b^2 + 3ab) = 20$  باشد،  $a + b$  کدام است؟

$$5 \quad \text{④}$$

$$4 \quad \text{③}$$

$$3 \quad \text{②}$$

$$2 \quad \text{①}$$

smart- ۱۳۹۶ - متوسط

۱۱۰ حاصل عبارت  $A = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} \times \frac{x^3 - 1}{4x^2 + 4x + 1}$  کدام است؟ (عبارت تعریف شده است).

$$\frac{x+1}{2} \quad \text{④}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{2x - 1} \quad \text{③}$$

$$\frac{x^2}{x+1} \quad \text{②}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{2x + 1} \quad \text{①}$$

smart- ۱۴۰۰ - سخت

۱۱۱ اگر مخرج عبارت  $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x}}$  را گویا کنیم حاصل به صورت  $\frac{A}{x-1}$  است. A کدام است؟

$$\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) \quad \text{④}$$

$$\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 1) \quad \text{③}$$

$$\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1) \quad \text{②}$$

$$\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 1) \quad \text{①}$$

متوسط - ۱۴۰۰ - smart

۱۱۲ اگر  $x = \frac{\sqrt{3}\sqrt{48} - \sqrt{27}}{\sqrt[4]{27}}$  آنگاه حاصل  $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$  کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

√۳ (۱)

متوسط - ۱۳۹۹ - smart

۱۱۳ اگر  $x^2 + 4y^2 = 4xy$  باشد، حاصل  $x^2 - 4y^2$  کدام است؟

۳ (۴)

صفر (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

## پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

مقدار  $A$  را به ساده‌ترین حالت ممکن درمی‌آوریم:

$$A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}(12)^{-1,5}} = \sqrt[5]{3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} (2^2 \times 3)^{-\frac{3}{2}}} = \sqrt[5]{3^{\frac{5}{2}} (2^{-3} \times 3^{-\frac{3}{2}})}$$

$$= (3^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}} \times 2^{-3} \times 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}} \times 2^{-3} = 3^{-1} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

پس:  $(1 + A^{-1})^{\frac{1}{2}} = (1 + 24)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

به توان ۴  $-2 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 3^4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 81$

تعداد اعداد صحیح در این بازه:  $81 - 0 + 1 = 82$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

می‌دانیم:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{x^r} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$$

زوج  $a = b \leftarrow$  مثبت

داریم:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \sqrt{2} = \sqrt{9} \sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$$

بنابراین:

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{1})(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) \dots \underbrace{(3\sqrt{2} - \sqrt{18})}_{\text{صفر}} (3\sqrt{2} - \sqrt{19})(3\sqrt{2} - \sqrt{20}) = 0$$

ابتدا اعداد  $\sqrt{18}$  و  $\sqrt{28}$  را بین دو عدد متوالی مربع کامل قرار می‌دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$\sqrt{25} < \sqrt{28} < \sqrt{36} \Rightarrow 5 < \sqrt{28} < 6 \quad (1)$$

$$\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < \sqrt{18} < 5 \xrightarrow{\times(2)} 8 < 2\sqrt{18} < 10 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1+2)} 13 < \sqrt{28} + 2\sqrt{18} < 16 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{13} < \sqrt{\sqrt{28} + 2\sqrt{18}} < 4$$

$$\xrightarrow{\sqrt{13} \approx 3, \dots} 3, \dots < \sqrt{\sqrt{28} + 2\sqrt{18}} < 4$$

بین دو عدد متوالی ۳ و ۴ قرار دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\sqrt[3]{a} < a, a > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$\sqrt[3]{a} = a, a > 0 \Rightarrow a = 1 \quad a \text{ یک مقدار دارد.}$$

$$\sqrt[3]{a} > a, a > 0 \Rightarrow 0 < a < 1 \quad \text{بنابراین گزینه «۴» صحیح است.}$$

تعداد ریشه‌های مرتبه زوج هر عدد مثبت دوتا است که قرینه یکدیگرند، اما تعداد ریشه‌های مرتبه فرد تنها یکی است. اگر عدد  $n$  بین صفر و یک باشد، خواهد داشت: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$\sqrt[4]{n} > \sqrt[3]{n} > \sqrt[2]{n} > n \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه سوم: } d \\ \text{ریشه‌های دوم: } b, c \\ \text{ریشه‌های چهارم: } a, e \end{cases}$$

از آنجا که  $a_1 > 0$  است و ریشه سوم آن بزرگ‌تر از خودش شده است، پس  $0 < a_1 < 1$ . از طرف دیگر  $a_p < 0$  و ریشه سومش بزرگ‌تر از خودش شده است در نتیجه  $-1 < a_p < 0$  و به همین ترتیب  $1 < b_1 < 0$  است. در نتیجه فقط موارد «الف» و «پ» صحیح هستند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

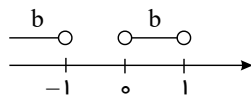
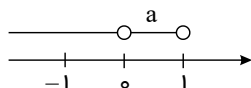
۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$a^{25} > a^{37} \Rightarrow \begin{cases} \text{حالت (۱): } 0 < a < 1 \\ \text{حالت (۲): } a < -1 \end{cases}$$

اگر  $0 < a < 1$  باشد  $a^3 > a^6$  درست است ولی اگر  $a < -1$  باشد  $a^3 > a^6$  نادرست است.  
اگر  $0 < a < 1$  باشد  $a^4 > a$  نادرست است ولی اگر  $a < -1$  باشد  $a^4 > a$  درست است.  
پس گزینه ۲ و ۴ در حالت کلی درست نیستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

ابتدا  $a$  را بررسی می‌کنیم:  $a^2 > a^3$   
اگر  $a < 0$  باشد  $a^2 > 0$  و  $a^3 < 0$  خواهد بود و  $a^2 > a^3$  می‌شود.  
اگر  $0 < a < 1$  باشد نیز  $a^2 > a^3$  می‌شود.  
پس  $a < 1$  و غیر صفر است.



$b^3 > b^5$  را بررسی می‌کنیم:

می‌دانیم اگر  $0 < b < 1$  یا  $b < -1$  باشد  $b^3 > b^5$  خواهد شد.

حال موارد داده شده را بررسی می‌کنیم:

(الف)  $a^2 < 1$ : اگر  $a < -1$  باشد  $a^2 > 1$  می‌شود. پس این مورد همواره درست نیست.

(ب)  $b^4 < b^2$ : اگر  $b < -1$  باشد  $b^4 > b^2$  می‌شود. این مورد نیز همواره درست نیست.

(ج)  $ab < 1$ : اگر  $a < -1$  و  $b < -1$  باشد  $ab > 1$  می‌شود. این مورد نیز همواره درست نیست.

(د)  $a + b < 1$ : اگر  $a = 0.9$  و  $b = 0.9$  باشد،  $a + b > 1$  می‌شود. این مورد نیز همواره درست نیست.

اعداد بین صفر و یک، هر چه رادیکال با فرجه بزرگتری از آن‌ها بگیریم، حاصلشان بزرگتر می‌شود.  
همچنین هر عدد مثبت دو ریشه زوج مختلف علامه دارد

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

داریم:

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[5]{a}$$

$$a_3 < a_4 < a_5$$

ریشه سوم  $a$ :  $a_3$

ریشه چهارم مثبت  $a$ :  $a_4$

ریشه پنجم  $a$ :  $a_5$

ریشه چهارم منفی  $a$ :  $a_1$

بنابراین:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\sqrt{a} < \sqrt[5]{a} < \sqrt[3]{a} < \dots < a < a^3 < \dots < a^{2m+1}$$

نکته: اگر  $0 < a < -1$  باشد:

بررسی گزینه‌ها:

(الف) درست:  $-1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$

(ب) درست:  $-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a^4 < a^2 < 1$

(پ) درست:  $-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a^2 < 1 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} < \sqrt[6]{a^2}$

(ت) درست:  $-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < -a < 1 \Rightarrow \sqrt{-a} < \sqrt[3]{-a}$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$\begin{cases} \sqrt[6]{8^{2(x+1)}} = \sqrt[6]{2^{6(x+1)}} = 2^{x+1} \\ \sqrt[2]{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} \end{cases} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{x+1}$$

$$\Rightarrow -x = x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\left. \begin{array}{l} 2 < \sqrt[4]{80} < 3 \\ 3 < \sqrt[3]{31} < 4 \\ 3 < \sqrt[6]{972} < 4 \\ 3 < \sqrt{10} < 4 \end{array} \right\} \Rightarrow (\sqrt[3]{31})^6 = 961 \\ (\sqrt[6]{972})^6 = 972 \\ (\sqrt{10})^6 = 1000 \Rightarrow \sqrt{10} > \sqrt[6]{972} > \sqrt[3]{31} > \sqrt[4]{80}$$

۱۴ بررسی عبارت‌ها: ۱ ۲ ۳ ۴

الف) نادرست: برای  $a, b > 0$  رابطه  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  برقرار است.

ب) نادرست:  $\sqrt[m]{m}$  برای نمایش ریشه دوم مثبت  $m$  به کار می‌رود.

ج) درست

د) نادرست: برای هر عدد  $a$  داریم:  $(\sqrt[k]{a})^m = \sqrt[k]{a^m}$  ( $m$  عدد صحیح،  $k$  عدد طبیعی و اگر  $k$  زوج باشد،  $a$  باید مثبت باشد).

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

هر عدد مثبت، دو ریشه دوم قرینه هم دارد.

$$\frac{\sqrt[3]{64}}{\pm\sqrt{32}} = \frac{\sqrt[3]{4^3}}{\pm\sqrt{16 \times 2}} = \frac{4}{\pm 4\sqrt{2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\sqrt[3]{2}\sqrt{2} = \sqrt[3]{2^2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

عدد مورد نظر را  $x$  در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} \Rightarrow x = (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$\left. \begin{array}{l} a < \sqrt{31} < b \Rightarrow a^2 < 31 < b^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases} \\ c < \sqrt{-15} < d \Rightarrow c^2 < -15 < d^2 \Rightarrow \begin{cases} c = -3 \\ d = -2 \end{cases} \end{array} \right\}$$

در نتیجه:

$$\sqrt[6]{2a + 2b + c + d} = \sqrt[6]{2 \times (5) + 2 \times (6) - 3 - 2} = \sqrt[6]{17}$$

پس داریم:

$$1 < 17 < 2^6 \rightarrow 1 < \sqrt[6]{17} < 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

پس ریشه‌های دوم این عبارت، برابرند با:

$$11 - 4\sqrt{7} = 4 - 4\sqrt{7} + 7 = (2 - \sqrt{7})^2$$

$$\pm\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} = \pm|2 - \sqrt{7}| \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ریشه‌ی مثبت: } \sqrt{7} - 2 \\ \text{ریشه‌ی منفی: } -(\sqrt{7} - 2) = 2 - \sqrt{7} \end{array} \right.$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$\sqrt[5]{32} = \alpha \Rightarrow \alpha = 2 \quad \text{ریشه پنجم عدد } 32$$

$$\frac{1}{81} = \beta \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3} \quad \text{ریشه چهارم منفی عدد } \frac{1}{81}$$

در نتیجه:

$$\alpha^2 \times \frac{2}{\beta} = \frac{2}{-1/3} (2)^2 \times 2 \times (-3) = -24$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

می‌دانیم: اعداد بین صفر و یک هرچه به یک بزرگتری برسند، کوچکتر می‌شوند

و هرچه ریشه بزرگ‌تری از آنها بگیریم، بزرگتر می‌شوند.

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < \dots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots < 1$$

۲۱ شعاع کره‌ای که بین دو کره قرار دارد را  $r$  در نظر می‌گیریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$16\pi < \frac{4}{3}\pi r^3 < 64\pi \xrightarrow{\times \frac{3}{4\pi}} 12 < r^3 < 48$$

با توجه به گزینه‌ها گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
بررسی گزینه‌ها:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۲۲

الف) درست

ب) نادرست: مثال نقض:  $\sqrt[3]{a} > \sqrt[2]{a} \Rightarrow 0 < a < 1$

ج) نادرست:  $\sqrt[3]{-0.1} > -\sqrt[4]{0.1}$

د) نادرست: مثال نقض:  $a^6 > a^{10} \Rightarrow a^5 < a^{11} \Rightarrow -1 < a < 0$

بررسی گزینه‌ها:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۲۳

۱) درست:  $0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$

۲) درست:  $b > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{b} < \sqrt{b}$

۳) درست:  $\begin{cases} 0 < a < 1 \rightarrow \sqrt[3]{a} < 1 \\ b > 1 \rightarrow \sqrt[4]{b} > 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{b}$

۴) نادرست:  $\begin{cases} 0 < a < 1 \Rightarrow a^f < 1 \\ b > 1 \Rightarrow b^r > 1 \end{cases} \Rightarrow a^f < b^r$

بررسی گزینه‌ها:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۲۴

۱) درست:  $-8 < -7 < -1 \Rightarrow \sqrt[3]{-8} < \sqrt[3]{-7} < \sqrt[3]{-1} \Rightarrow -2 < A < -1$

۲) درست:  $8 < 13 < 27 \Rightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{13} < \sqrt[3]{27} \Rightarrow 2 < B < 3$

۳) درست:  $81 < 83 < 256 \Rightarrow \sqrt[4]{81} < \sqrt[4]{83} < \sqrt[4]{256} \Rightarrow 3 < C < 4$

۴) نادرست:  $0.0001 < 0.0014 < 0.0016 \Rightarrow \sqrt[4]{0.0001} < \sqrt[4]{0.0014} < \sqrt[4]{0.0016} \Rightarrow 0.1 < D < 0.2$

الف) درست  ۱  ۲  ۳  ۴  ۲۵

ب) نادرست: مثال نقض:  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$

پ) نادرست: مثال نقض:  $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} > \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

۲۶) می‌دانیم: اعداد بین صفر و یک، هرچه رادیکال با فرجه بزرگتری از آن‌ها بگیریم، حاصلشان بزرگتر می‌شود.

داریم:

$0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$

$|a - \sqrt{a}| \stackrel{a < \sqrt{a}}{=} \sqrt{a} - a$

$|a - \sqrt[3]{a}| \stackrel{a < \sqrt[3]{a}}{=} \sqrt[3]{a} - a$

$|\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}| \stackrel{\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}}{=} \sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$

$\Rightarrow A = (\sqrt{a} - a) - (\sqrt[3]{a} - a) + (\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}) = \sqrt{a} - a - \sqrt[3]{a} + a + \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} = 0$

۱  ۲  ۳  ۴  ۲۷

$256 < 357 < 625 \Rightarrow 4^f < 357 < 5^f \rightarrow 4 < \sqrt[4]{357} < 5 \Rightarrow 4 < \sqrt[4]{357} < 4 + 1 \Rightarrow n = 4$

۲۸) عدد مورد نظر را  $x$  در نظر می‌گیریم؛ ریشه‌های چهارم عدد  $x$  برابر  $\sqrt[4]{x}$  و  $-\sqrt[4]{x}$  است؛ داریم:

$(\sqrt[4]{x})^2 + (-\sqrt[4]{x})^2 = 4 \Rightarrow 2(\sqrt{x}) = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

۲۹) بررسی موارد:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۳۰

مورد «الف»: نادرست است.

مورد «ب»: درست است زیرا با افزایش توان، عبارت بزرگ‌تر می‌شود؛ چون هر دو طرف توان زوج دارند.

$a < -1 \rightarrow \underbrace{a^{20}}_{+} > \underbrace{a^8}_{+}$

مورد «ج»: نادرست است زیرا با افزایش توان عدد کوچک‌تر می‌شود. (دقت کنید توان فرد است.)

$a < -1 \rightarrow \underbrace{a^{21}}_{-} < \underbrace{a^9}_{-}$

مورد «د»: درست است زیرا اگر  $a < -1$  هر چه فرجه بزرگ‌تر شود (فرجه باید عددی فرد باشد)، حاصل رادیکال بزرگ‌تر می‌شود.

$$a < -1 \rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

۳۰ الف) به ازای  $a = 4$ ،  $b = 9$  و  $n = 2$  داریم:

بنابراین تساوی «الف» نادرست است.

ب) به شرط مامعنا بودن  $\sqrt[n]{a}$  تساوی همواره درست است.

پ) اگر  $a$  منفی باشد و  $n$  زوج باشد، عبارت  $\sqrt[n]{a^n}$  مامعناست ولی  $\sqrt[n]{a}$  تعریف نشده است پس تساوی همواره درست نیست.

ت) به شرط فرد بودن  $n$  تساوی همواره درست است.

۳۱ بررسی گزینه‌ها:

۱) نادرست:  $b$  ریشه  $n$ ام عدد  $a$  است، هرگاه  $b^n = a$

۲) نادرست: مثال نقض:

$$\begin{cases} \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{تعریف نشده } (\sqrt{-2})^2 \end{cases}$$

۳) نادرست:  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

۴) درست

۳۲ کل عبارت را  $A$  می‌نامیم و داریم:

$$\begin{cases} (24)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 8)^{\frac{2}{3}} = (3 \times 2^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 2^2 \\ 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 \\ (32)^2 = (2^5)^2 = 2^{10} \\ (27)^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{-1} \\ 48^{-\frac{1}{4}} = (3 \times 16)^{-\frac{1}{4}} = (3 \times 2^4)^{-\frac{1}{4}} = 3^{-\frac{1}{4}} \times 2^{-1} \end{cases}$$

$$A = \frac{2^2 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 2^5}{2^{10} \times 3^{-1} \times 2^{-1} \times 3^{-\frac{1}{4}}} = \frac{2^9 \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^9 \times 3^{-\frac{5}{4}}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{5}{4}} = 3^{\frac{8+15}{12}} = 3^{\frac{23}{12}}$$

$$A = \sqrt[12]{3^{23}} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3^{\frac{23}{12}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

۳۳ ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \frac{13(\sqrt{3}-1)}{13} = \sqrt{3}-1$$

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$\text{پس: } \frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-1 + 2+\sqrt{3} = 1+2\sqrt{3}$$

۳۴

ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}} \times \frac{5+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{2}+2\sqrt{12}+15\sqrt{3}+3\sqrt{18}}{25-6} = \frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{19} = \frac{19\sqrt{2}+19\sqrt{3}}{19} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$2(\sqrt{9}-1)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{4}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$



$$\text{پس : } \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

روش دوم:

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} \times \sqrt{3})} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{27})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{8} + \sqrt{27}} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

 ۱  ۲  ۳  ۴  ۳۵

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \Rightarrow (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \xrightarrow{\text{بهر توان } n} ab = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$ab = \sqrt{2} \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{4} \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt{2} \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{9-4}{6} \Rightarrow x = 3$$

 ۱  ۲  ۳  ۴  ۳۶ طبق صورت سؤال داریم:

$$\sqrt[3]{\sqrt{b}} = \sqrt[6]{2\sqrt{4}} \Rightarrow \sqrt[6]{b} = \sqrt[6]{4} \Rightarrow b = 4$$

$$A = \frac{(2^{a+1})^b}{b^a} = \frac{(2^a)^b \times 2^b}{b^a} \xrightarrow{2^a = \sqrt[4]{3}} A = \frac{(\sqrt[4]{3})^4 \times 2^4}{b^a} \quad (1)$$

حالا  $b^a$  را محاسبه می کنیم.

$$b^a = 4^a = 2^{2a} = (2^a)^2 = (\sqrt[4]{3})^2 = \sqrt{3} \xrightarrow{(1)} A = \frac{(\sqrt[4]{3})^4 \times 16}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times 16}{\sqrt{3}} = \frac{48}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

می دانیم:  ۱  ۲  ۳  ۴  ۳۷

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-9} = \sqrt[n]{\sqrt[3]{3^{10}}} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-9}{1}} = \sqrt[3]{3^{10}} \Rightarrow 3^{\frac{9-n}{1}} = \sqrt[3]{3^{10}} = \sqrt[3]{3^{\frac{10}{1}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{10}{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{9-n}{1} = \frac{10}{3} \Rightarrow 9n - n^2 = 10 \Rightarrow n^2 - 9n + 10 = 0 \Rightarrow (n-8)(n-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=1 & n > 1 \\ n=8 & \end{cases} \rightarrow n=8$$

 ۱  ۲  ۳  ۴  ۳۸

$$\left(\sqrt[3]{7\sqrt{7}} + \sqrt[3]{5\sqrt{5}}\right) \left(\sqrt[3]{39} - \sqrt[3]{5\sqrt{125}}\right)$$

$$= \left(\sqrt[3]{7 \times \sqrt[3]{7}} + \sqrt[3]{5 \times \sqrt[3]{5}}\right) \left(\sqrt[3]{39} - \sqrt[3]{5 \times \sqrt[3]{125}}\right)$$

$$= \left(\sqrt[3]{7^{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{5^{\frac{3}{2}}}}\right) \left(\sqrt[3]{39} - \sqrt[3]{5^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= (\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5}) = 7 - 5 = 2$$

 ۱  ۲  ۳  ۴  ۳۹

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$$

$$(\sqrt{7} + \sqrt{6})^{\sqrt{5}+2} (\sqrt{7} - \sqrt{6})^{\sqrt{5}+2} = ((\sqrt{7} + \sqrt{6})(\sqrt{7} - \sqrt{6}))^{\sqrt{5}+2}$$

$$= (7-6)^{\sqrt{5}+2} = 1^{\sqrt{5}+2} = 1$$

 ۱  ۲  ۳  ۴  ۴۰ می دانیم:  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$$n\sqrt[n-2]{\frac{m}{n-2\sqrt{m}}} = n\sqrt[n-2]{\frac{m}{\frac{1}{m^{n-2}}}} = n\sqrt[n-2]{m^{1-\frac{1}{n-2}}} = n\sqrt[n-2]{\frac{m^{n-2}}{m^{n-2}}} = \left(\frac{m^{n-2}}{m^{n-2}}\right)^{\frac{1}{n-2}} = m^{\frac{1}{n-2}} = n\sqrt[n-2]{m}$$

بررسی گزینه‌ها: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

$$۱) \frac{a^r}{a^{s-r}} = a^{r-(s-r)} = a^{r-s+r} = a^{2r-s} = ۳۲^{r \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = ۳۲^{\frac{r}{2}} = ۲^{\frac{10}{2}}$$

$$۲) a^{r-s} = ۳۲^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = ۳۲^{\frac{1}{6}} = ۲^{\frac{5}{6}}$$

$$۳) \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{s}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} = (a^{-1})^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} = (۳۲^{-1})^{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = (۳۲^{-1})^{-1} = ۳۲ = ۲^5$$

$$۴) ((\sqrt{a})^r)^s = (\sqrt{a})^{rs} = a^{\frac{rs}{2}} = ۳۲^{\frac{6}{2}} = ۳۲^{\frac{1}{2}} = ۲^{12}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲می‌دانیم: در دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $q$ ؛ جمله عمومی دنباله برابر است با:  $a_n = a_1 q^{n-1}$ 

$$a_n = ۲^{an+b} = ۲^{an} \times ۲^b = ۲^b \times (۲^a)^n = ۲^b \times (۲^a)^{n-1} \times ۲^a = ۲^{a+b} \times (۲^a)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = ۲^{a+b} \\ q = ۲^a = ۸ \Rightarrow a = ۳ \end{cases}$$

$$a_۲ = ۱۰۲۴ \Rightarrow ۲^{۳+b} \times (۲^۳)^۲ = ۲^{۱۰} \Rightarrow ۲^{۳+b} \times ۲^۶ = ۲^{۱۰} \Rightarrow ۲^{۳+b+۶} = ۲^{۱۰} \Rightarrow b = ۱$$

$$b_n = bn + a \xrightarrow[b=1]{a=۳} b_n = n + ۳ \rightarrow b_{۲۰} = ۲۰ + ۳ = ۲۳$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

$$۲^{\frac{۲}{۳}} = a \Rightarrow ۲ = a^{\frac{۳}{۲}} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} ۴ = a^۳, \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{۲}{5}} = b \Rightarrow (۳^{-۲})^{\frac{۲}{5}} = b \Rightarrow ۳^{-\frac{۴}{5}} = b \Rightarrow ۳^{-۴} = b^5 \Rightarrow ۳ = b^{\frac{-5}{۴}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{۵}{۴}}$$

$$۱۲^{\frac{۲}{۳}} = (۴ \times ۳)^{\frac{۲}{۳}} = (a^۳ \times \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{۵}{۴}})^{\frac{۲}{۳}} = a^۲ \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{10}{6}} = \frac{a^۲}{\sqrt[۶]{b^5}}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

$$\sqrt[۶]{\frac{1}{۶^{۱۵}}} = \sqrt[۶]{۶^{\frac{-۱۵}{۶}}} = \sqrt[۶]{(۶^۲)^{\frac{1}{6} \times \frac{1}{5}}} = \sqrt[۶]{\sqrt[۵]{۶^۲}}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

$$\sqrt[۳]{۳^{m+۵}} \times \sqrt[۳]{۳^{n+۲}} = ۶^{m+1} \Rightarrow \sqrt[۳]{۳^{m+۵} \times ۳^{n+۲}} = ۶^{m+1}$$

$$\Rightarrow (۳^{m+۵} \times ۳^{n+۲})^{\frac{1}{۳}} = ۶^{m+1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۳}} ۳^{m+۵} \times ۳^{n+۲} = ۶^{۳m+۳} = ۲^{۳m+۳} \times ۳^{۳m+۳}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} m + ۵ = ۳m + ۳ \Rightarrow ۲m = ۲ \Rightarrow m = ۱ \\ n + ۲ = ۳m + ۳ \xrightarrow{m=1} n + ۲ = ۶ \Rightarrow n = ۴ \end{cases} \Rightarrow m + n = ۵$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶  $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ 

$$x^{-۲} + \frac{y^{-1}}{۲} = \frac{1}{(1+\sqrt{۳})^۲} + \frac{1}{۲(۲-\sqrt{۳})} = \frac{1}{1+۲\sqrt{۳}+۳} + \frac{1}{۴-۲\sqrt{۳}}$$

$$= \frac{1}{۴+۲\sqrt{۳}} + \frac{1}{۴-۲\sqrt{۳}} \stackrel{(I)}{=} \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$(I) \begin{cases} \frac{1}{4+2\sqrt{3}} \times \frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{16-12} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{4-2\sqrt{3}} \times \frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{16-12} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

با توجه به صورت سؤال باید  $\beta$  مثبت و  $\alpha$  منفی باشد تا حاصل  $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$  یک عدد منفی شود ( $\beta$  نمی تواند عدد منفی باشد زیرا اعداد منفی ریشه چهارم ندارد). از طرفی  $a > b > 0$  پس  $(a-b)^{\frac{1}{5}} < 0$ ،  $(b-a)^{\frac{1}{5}} > 0$  و  $(a+b)^{\frac{1}{5}} > 0$  است؛ داریم:

$$\begin{cases} \alpha = (b-a)^{\frac{1}{5}} \\ \beta = (a+b)^{\frac{1}{5}}, (a-b)^{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+1)^{\frac{2}{3}} (\sqrt{3}-1)^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2 (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2 (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2 (\sqrt{3}-1)^2} \\ &= \sqrt[3]{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} = \sqrt[3]{16-12} = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹

$$\frac{(16^{\frac{1}{5}})^{\frac{2}{5}}}{\sqrt{\sqrt[5]{64^{\frac{1}{5}}}}} = \frac{(2^4)^{\frac{1}{5} \times \frac{2}{5}}}{\sqrt{\sqrt[5]{(2^6)^{\frac{1}{5}}}}} = \frac{(2^{\frac{8}{25}})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[5]{(2^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2^{\frac{4}{25}}}{(2^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{10}}} = \frac{2^{\frac{4}{25}}}{2^{\frac{6}{50}}} = 2^{\frac{8-6}{25}} = 2^{\frac{2}{25}} = \sqrt[25]{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰

$$\sqrt[5]{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \sqrt{a^{\frac{1}{5}} \times a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{1}{5} + \frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{10}}} = a^{\frac{7}{20}}$$

$$a^{\frac{7}{20}} = a^{\frac{7t-13}{20}} \Rightarrow \frac{7}{20} = \frac{7t-13}{20} \Rightarrow 1 = 7t \Rightarrow t = \frac{1}{7}$$

در نتیجه:

$$2^{7t} = 2^{7 \times \frac{1}{7}} = 2^1 = 2$$

$$16^{\frac{1}{x}} = 2^2 \Rightarrow 2^{4-\frac{4}{x}} = 2^2 \Rightarrow 4 - \frac{4}{x} = 2 \Rightarrow \frac{4}{x} = 2 \Rightarrow x = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \left( \left( 2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^x$$

$$\Rightarrow (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = \left( \left( 2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{2x}{12} \Rightarrow \frac{2x}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{4(x+1)^2} \xrightarrow{x=1} \sqrt[5]{2^2 \times 2^2} = 2$$

$$32 \times A^{\frac{1+2n}{n}} = \sqrt[n]{A} \Rightarrow 32 \times A^{\frac{1}{n}+2} = A^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow 32 \times A^{\frac{1}{n}} \times A^2 = A^{\frac{1}{n}} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{32}$$

در نتیجه:

با توجه به فرض سؤال داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲

$$\Rightarrow |A| = \frac{1}{4\sqrt{2}} \xrightarrow{A>0} A = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳

$$a^x = \sqrt{b} \Rightarrow a^x = b^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$b^y = \sqrt{a} \Rightarrow b^y = a^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{طرفین این رابطه به توان ۲}} b^{2y} = a \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} (b^{2y})^x = b^{\frac{1}{2}} \Rightarrow b^{2xy} = b^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2xy = \frac{1}{2} \Rightarrow xy = \frac{1}{4}$$

$$\left( \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, (a > 0) \end{array} \right)$$

می دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

$$\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{-x}}} = \frac{\sqrt{x \times x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[3]{x \times (-x)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}{-\sqrt[3]{-x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}{-\sqrt[3]{-x^{\frac{3}{2}}}} = -\sqrt[3]{-x}$$

$$\left( \begin{array}{l} a^{-b} = \frac{1}{a^b} \\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^r - b^r = (a-b)(a+b) \end{array} \right)$$

می دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

$$\begin{aligned} & \left( 4^{-0.25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) \left( 4^{\frac{1}{4}} + (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right) \\ &= \left( 4^{-0.25} \right)^2 - \left( (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} \right)^2 = \left( 4^{-\frac{1}{4}} \right)^2 - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}} = (2^2)^{-\frac{1}{2}} - \left( 2^{\frac{3}{2}} \right)^{-\frac{4}{3}} \\ &= 2^{-1} - 2^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$$\text{گزینه ۱} \quad \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{گزینه ۲} \quad \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2}{3} \times \sqrt{2}$$

$$\text{گزینه ۳} \quad \frac{-\sqrt[3]{8}}{\sqrt{-27}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{گزینه ۴} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = 2\sqrt{\frac{2}{18}} = 2\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}$$

گزینه ۱ همواره صحیح نیست. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

 گزینه ۲ و ۳ در حالت کلی برای  $x < 0$  نادرست است.

گزینه ۴ همواره صحیح است.

$$\text{ابتدا توجه کنید که } \sqrt{2\sqrt{2}+1} = \sqrt[4]{(2\sqrt{2}+1)^2} \text{ است، پس: } ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{(2\sqrt{2}+1)^2} \times \sqrt[4]{9-4\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8+1+4\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{9-4\sqrt{2}} \\ &= \sqrt[4]{9+4\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{9-4\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(9+4\sqrt{2})(9-4\sqrt{2})} \\ &= \sqrt[4]{81 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt[4]{81 - 32} = \sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt{7} \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

$$۱) 4^{0.75} = 4^{\frac{3}{4}} = 4^{\frac{3}{4}} = (2^2)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

$$۲) (\sqrt{5} - ۲)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{5} - ۲} = \sqrt[3]{(\sqrt{5} - ۲)^2} = \sqrt[3]{5 - 4\sqrt{5} + 4} = \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$۳) (۹ + ۴\sqrt{5})^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$(۱) \times (۲) \times (۳) = ۲\sqrt{۲} \times \sqrt[6]{9 - 4\sqrt{5}} \times \sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} = ۲\sqrt{۲} \times \sqrt[6]{(9 - 4\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})}$$

$$= ۲\sqrt{۲} \times \sqrt[6]{81 - ۸۰} = ۲\sqrt{۲}$$

۶۰) می‌دانیم: اعداد بزرگتر از ۱ هرچه به توان بزرگتری می‌رسند، بزرگتر می‌شوند.

$$۰ < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۴]{a^۳} \Rightarrow ۰ < a^{\frac{1}{۳}} < a^{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow a \text{ عددی بزرگتر از یک است.}$$

گزینه ۴ نادرست است.  $a$  با توان بزرگتر باید بزرگتر شود.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۱

$$A = \sqrt[۳]{1 - \sqrt{۲}} \times \sqrt[۳]{۳ + ۲\sqrt{۲}} = \sqrt[۳]{1 - \sqrt{۲}} \times \sqrt[۳]{(1 + \sqrt{۲})^۳} = \sqrt[۳]{1 - \sqrt{۲}} \times \sqrt[۳]{1 + \sqrt{۲}}$$

$$= \sqrt[۳]{(1 - \sqrt{۲})(1 + \sqrt{۲})} = \sqrt[۳]{1 - ۲} = \sqrt[۳]{-1} = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۲

$$\sqrt[۶]{1-a} \times \sqrt[۶]{b-1} = \sqrt[۶]{(1-a)(b-1)} \rightarrow \begin{cases} 1-a \geq 0 \\ b-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \leq 1 \text{ (۱)} \\ b \geq 1 \text{ (۲)} \end{cases}$$

$$\sqrt{(۲-b)^۲} = |۲-b| = ۲-b \rightarrow ۲-b \geq 0 \rightarrow b \leq ۲ \text{ (۳)}$$

$$|-a| = a \rightarrow a \geq 0 \text{ (۴)}$$

$$\xrightarrow{(۲),(۳)} 1 \leq b \leq ۲$$

$$\xrightarrow{(۱),(۴)} 0 \leq a \leq 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳

می‌دانیم: در صورتی که  $0 < a < 1$  داریم:

$$a < \sqrt{a} < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۴]{a} < \sqrt[۵]{a} < \dots$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) درست:  $\sqrt[۵]{a} > a$

۲) درست:  $\sqrt[۳]{-a} > \sqrt{a}$

۳) درست:  $\sqrt[۵]{-a} < \sqrt{a}$  (زیرا:  $\sqrt[۵]{-a} < 0 < \sqrt{a}$ )

۴) نادرست:  $-a > \sqrt[۳]{-a}$  (زیرا:  $\sqrt[۳]{-a} < -a$ )

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴

$$\begin{cases} \sqrt[۴]{۶۲۵} = \sqrt[۴]{۵^۴} = ۵ \\ \sqrt[۵]{-۱۲۸} = \sqrt[۵]{(-۲)^۵} = -۲ \\ \sqrt[۳]{-۲۷} = \sqrt[۳]{(-۳)^۳} = -۳ \\ \sqrt[۵]{-\frac{1}{۳۲}} = \sqrt[۵]{\left(\frac{-1}{۲}\right)^۵} = \frac{-1}{۲} \\ \sqrt[۳]{۶۴} = \sqrt[۳]{۴^۳} = ۴ \end{cases} \Rightarrow A = \frac{۵}{-۲} + \frac{۳ \times -۳}{۴ \times \frac{-1}{۲}} + ۴ = \frac{-۵}{۲} + \frac{۹}{۲} + ۴ = ۶$$

۶۵) می‌دانیم: اعداد بین صفر و یک، هرچه از آن‌ها رادیکال با فرجه بزرگتری بگیریم بزرگتر می‌شوند و هرچه آن‌ها را به توان بزرگتری برسانیم، کوچکتر می‌شوند.

ابتدا هر یک از گزینه‌ها را به صورت توان کسری می‌نویسیم:

۱)  $a^۲ \sqrt{a} = a^۲ a^{\frac{1}{۲}} = a^{\frac{۵}{۲}}$

۲)  $\frac{1}{a} = a^{-1}$

۳)  $a \sqrt[۳]{a} = a \times a^{\frac{1}{۳}} = a^{\frac{۴}{۳}}$

$$۴) \sqrt[۵]{a} = a^{\frac{1}{۵}}$$

$$-1 < \frac{1}{۵} < \frac{۴}{۳} < \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۰ < a^{\frac{۵}{۲}} < a^{\frac{۴}{۳}} < a^{\frac{1}{۵}} < 1 < a^{-1}$$

بنابراین گزینه ۱ از همه به صفر نزدیکتر است (کوچکتر است).

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۶

$$\begin{aligned} \sqrt{x^6 x^2} &= \sqrt[۳]{16} \Rightarrow \sqrt[۳]{x^6 \times x^2} = \sqrt[۳]{2^4} \Rightarrow \sqrt[۳]{x^8} = \sqrt[۳]{2^4} \\ \Rightarrow x^{\frac{۸}{۳}} &= 2^{\frac{۴}{۳}} \xrightarrow{(\quad)^{\frac{۳}{۸}}} (x^{\frac{۸}{۳}})^{\frac{۳}{۸}} = (2^{\frac{۴}{۳}})^{\frac{۳}{۸}} \Rightarrow x = 2^{\frac{۴}{۳} \times \frac{۳}{۸}} \\ \Rightarrow x &= 2^{\frac{۶}{۸}} = \sqrt[۳]{2^6} = \sqrt[۳]{64} \end{aligned}$$

ابتدا طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۷

$$\begin{aligned} x &= 7 - 2\sqrt{6} \Rightarrow x^2 = (7 - 2\sqrt{6})^2 = 49 + 24 - 28\sqrt{6} = 73 - 28\sqrt{6} \\ \sqrt{\frac{x+2}{25} + \frac{1}{x}} &= \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 25}{25x}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{73 - 28\sqrt{6} + 2(7 - 2\sqrt{6}) + 25}{7 - 2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{73 - 28\sqrt{6} + 14 - 4\sqrt{6} + 25}{7 - 2\sqrt{6}}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{112 - 32\sqrt{6}}{7 - 2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{16(7 - 2\sqrt{6})}{7 - 2\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{16}}{5} = \frac{4}{5} = ۰,۸ \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\sqrt{\frac{x+2}{25} + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{6}}{25} + \frac{1}{7 - 2\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{9 - 2\sqrt{6}}{25} + \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = ۰,۸$$

می‌دانیم که  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  است. داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

$$\begin{aligned} (x - 2)(x^2 - 4x + 4) - 1 &= (x - 2)(x - 2)^2 - 1 = (x - 2)^3 - 1 \\ &= ((x - 2) - 1)((x - 2)^2 + (x - 2) + 1) = (x - 3)(x^2 - 4x + 4 + x - 2 + 1) = (x - 3)(x^2 - 3x + 3) \end{aligned}$$

می‌دانیم  $(a - b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۹

$$\sqrt[۳]{x+1} - \sqrt[۳]{x-2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[۳]{x+1} - \sqrt[۳]{x-2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{\sqrt[۳]{(x+1)^2} + \sqrt[۳]{(x-2)^2} + \sqrt[۳]{(x+1)(x-2)}}{(\sqrt[۳]{x+1} - \sqrt[۳]{x-2})(\sqrt[۳]{(x+1)^2} + \sqrt[۳]{(x-2)^2} + \sqrt[۳]{(x+1)(x-2)})} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt[۳]{(x+1)^2} + \sqrt[۳]{(x-2)^2} + \sqrt[۳]{x^2 - x - 2}}{x + 1 - (x - 2)} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{(x+1)^2} + \sqrt[۳]{(x-2)^2} + \sqrt[۳]{x^2 - x - 2} = 3 \quad *$$

$$\text{از طرفی: } \sqrt[۳]{x+1} - \sqrt[۳]{x-2} = 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sqrt[۳]{(x+1)^2} + \sqrt[۳]{(x-2)^2} - 2\sqrt[۳]{(x+1)(x-2)} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{(x+1)^2} + \sqrt[۳]{(x-2)^2} = 1 + 2\sqrt[۳]{x^2 - x - 2} \quad **$$

در رابطه \* به جای  $\sqrt[۳]{(x+1)^2} + \sqrt[۳]{(x-2)^2}$  مساویش را از رابطه \*\* قرار می‌دهیم.

$$\text{پس: } 1 + 2\sqrt[۳]{x^2 - x - 2} + \sqrt[۳]{x^2 - x - 2} = 3$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[۳]{x^2 - x - 2} = 2 \Rightarrow \sqrt[۳]{x^2 - x - 2} = \frac{2}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

 می‌دانیم  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$  است.

$$2a^2 + b^2 + 2ab + 4b - 2a + 13 = 0$$

$$\frac{2a^2 = a^2 + a^2, 13 = 9 + 4}{-2a = 4a - 6a} \rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + 4 + 2ab + 4b + 4a + a^2 - 6a + 9}_{(a+b+2)^2} = \underbrace{0}_{(a-3)^2}$$

$$(a + b + 2)^2 + (a - 3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ a + b + 2 = 0 \xrightarrow{a=3} b + 5 = 0 \Rightarrow b = -5 \end{cases}$$

$$\text{پس: } 3a + 2b = 9 - 10 = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۱

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{(\sqrt{2}+1)^5} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^5} &= \sqrt[5]{((\sqrt{2}+1)^5)^5} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^5} \\ &= \sqrt[5]{(2+1+2\sqrt{2})^5} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^5} = \sqrt[5]{(3+2\sqrt{2})^5} \times \sqrt[5]{(3-2\sqrt{2})^5} \\ &= (3+2\sqrt{2})^{\frac{5}{5}} \times (3-2\sqrt{2})^{\frac{5}{5}} = ((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}))^{\frac{5}{5}} \\ &= (3^2 - (2\sqrt{2})^2)^{\frac{5}{5}} = (9-8)^{\frac{5}{5}} = 1^{\frac{5}{5}} = 1 \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۲

$$\text{ابتدا تک تک عبارات صورت سوال را ساده می‌کنیم: } \frac{1}{\sqrt{3+1}} \times \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{3-1}} = \frac{\sqrt{3-1}}{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n+2-n} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{\sqrt{n+2}-1}{2}\right) = 2\sqrt{n+2}-2$$

در نتیجه عبارت سؤال برابر است با:

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۳

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4+3-4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = |2-\sqrt{3}|$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{4+3+4\sqrt{3}} = \sqrt{2^2 + \sqrt{3}^2 + 2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = |2+\sqrt{3}|$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} - 2\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{27} = 2 - \sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -2$$

بنابراین:

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۴

$$\frac{\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{4-\sqrt{15}} + \sqrt{4+\sqrt{15}}} \times \frac{\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}}} = \frac{(\sqrt{4-\sqrt{15}} - \sqrt{4+\sqrt{15}})^2}{4-\sqrt{15} - (4+\sqrt{15})}$$

$$= \frac{4 - \sqrt{15} + 4 + \sqrt{15} - 2\sqrt{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}}{4-\sqrt{15}-4-\sqrt{15}} = \frac{8 - 2\sqrt{16-15}}{-2\sqrt{15}}$$

$$= \frac{6}{-2\sqrt{15}} = \frac{3}{-\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = -\frac{3\sqrt{15}}{15} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$$

برای پاسخ به سؤال ابتدا صورت عبارت خواسته شده را کمی ساده می‌کنیم در این سؤال اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج مورد استفاده قرار می‌گیرند.
 ۱ ۲ ۳ ۴ ۷۵

$$(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 \stackrel{\text{مربع دو جمله‌ای}}{=} ((a-b)^2)^2 ((a+b)^2)^2 = (a-b)^4 (a+b)^4 = ((a-b)(a+b))^4 = (a^2 - b^2)^4$$

و اما  $a^2 = \sqrt{\sqrt{6}-2}$  و  $b^2 = \sqrt{\sqrt{6}+2}$  می‌شوند پس داریم:

$$((\sqrt{\sqrt{6}-2} - \sqrt{\sqrt{6}+2})^2)^2 = (\sqrt{6}-2 + \sqrt{6}+2 - 2\sqrt{6-4})^2 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 = 24 + 8 - 8\sqrt{12} = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2 - \sqrt{3})$$

داخل پرانتز اول مخرج مشترک می‌گیریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۷۶**

$$(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x} = \frac{(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2} - 1)}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{اتحاد جاق و لاغر}} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

می‌دانیم معادله درجه ۲ به صورت  $x^2 - sx + p$  است. در واقع مجموع ریشه‌ها ۲ خواهد بود.  
داریم:

$$x_1 + x_2 = s = 2$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۷۷**

$$A = \sqrt{14 - \sqrt{52}} - \sqrt{14 + \sqrt{52}} = \sqrt{14 - 2\sqrt{13}} - \sqrt{14 + 2\sqrt{13}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{13}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{13}+1)^2} = \underbrace{|\sqrt{13}-1|}_{+} - \underbrace{|\sqrt{13}+1|}_{+}$$

$$= \sqrt{13} - 1 - \sqrt{13} - 1 = -2$$

دو عدد مطلوب را  $x$  و  $y$  می‌نامیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۷۸**

$$x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2y)^2 = 0 \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۷۹**

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$= (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$  می‌دانیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۰**

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab \Rightarrow (a+b)^2 = 9 + 4 \times \frac{3}{4} = 12 \xrightarrow{a,b>0} a+b = \sqrt{12}$$

$$(a+b)^{-2} = (\sqrt{12})^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2 = \frac{1}{12 \times \sqrt{12}} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}$$

$$= \frac{\sqrt{12}}{12 \times 12} = \frac{2\sqrt{3}}{12 \times 12} = \frac{\sqrt{3}}{6 \times 12} = \frac{\sqrt{3}}{72}$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۸۱**

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  می‌دانیم:

$$x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3} = (x - \sqrt{3})^3 \xrightarrow{x=2+\sqrt{3}} (2 + \sqrt{3} - \sqrt{3})^3 = 2^3 = 8$$

عبارت  $x^2 + x$  را به توان ۳ می‌رسانیم. طبق اتحاد مکعب دو جمله‌ای داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۲**

$$x^2 + x = 1 \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^3 + x^3 + 3(x^2)x(x^2 + x) = 1$$

$$\Rightarrow x^3 + x^3 + 3x^3 = 1 \Rightarrow x^3 + 4x^3 = 1$$

مخرج هریک از کسرها را گویا می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۸۳**

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{63} + 8}$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{63} - 8} \times \frac{\sqrt{63} - 8}{\sqrt{63} - 8}$$



$$= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \dots + \frac{\sqrt{63} - 8}{63 - 64}$$

$$= -(1 - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \dots - (\sqrt{63} - 8)$$

$$= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \dots - \sqrt{63} + 8 = 8 - 1 = 7$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۴

$$A = (x^r - 1)(x^r + x + 1)(x^r - x + 1) + 1 = (x - 1)(x + 1)(x^r + x + 1)(x^r - x + 1) + 1$$

$$= (x - 1)(x^r + x + 1)(x + 1)(x^r - x + 1) + 1 = (x^r - 1)(x^r + 1) + 1 = x^{2r} - 1 + 1 = x^{2r}$$

$$\stackrel{x = \sqrt[12]{2}}{=} (12\sqrt[12]{2})^r = \sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۵

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + 1)^{\frac{r}{2}} (\sqrt{2(2 - \sqrt{3})})^{\frac{r}{2}} &= ((\sqrt{3} + 1)^r)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{4 - 2\sqrt{3}})^{\frac{r}{2}} \\ &= (3 + 1 + 2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} (4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = (4 + 2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} (4 - 2\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \\ &= (16 - 4 \times 3)^{\frac{1}{2}} = (16 - 12)^{\frac{1}{2}} = 2 = (2^r)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{r}{2}} \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶

می دانیم  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  است.

$$x^r - 3x^r + 3x - 3\sqrt{3} = \underbrace{x^r - 3x^r + 3x - 1}_{(x-1)^r} + 1 - 3\sqrt{3} = (x - 1)^r + 1 - 3\sqrt{3}$$

با جایگذاری  $x = \sqrt{3} + 1$  داریم:

$$(\sqrt{3} + 1 - 1)^r + 1 - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 1 - 3\sqrt{3} = 1$$

عبارت را گویا می کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۷

$$\begin{aligned} \frac{5 - 2\sqrt{6}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} \times \frac{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}}{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} &= \frac{45\sqrt{3} - 18\sqrt{18} + 55\sqrt{2} - 22\sqrt{12}}{81 \times 3 - 121 \times 2} \\ &= \frac{45\sqrt{3} - 18 \times 3\sqrt{2} + 55\sqrt{2} - 22 \times 2\sqrt{3}}{243 - 242} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

می دانیم که  $(a - b)(a^r + ab + b^r) = a^r - b^r$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸۸

$$\begin{aligned} \frac{xy^r + y^r + y + 1 - x}{y^r + y + 1} &= \frac{(xy^r - x) + (y^r + y + 1)}{y^r + y + 1} = \frac{x(y^r - 1) + (y^r + y + 1)}{y^r + y + 1} \\ &= \frac{x(y - 1)(y^r + y + 1) + (y^r + y + 1)}{y^r + y + 1} \\ &= \frac{(y^r + y + 1)(x(y - 1) + 1)}{y^r + y + 1} = x(y - 1) + 1 = xy - x + 1 \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۹

$$(a + b)^r = a^r + 3a^r b + 3ab^r + b^r = a^r + b^r + 3ab(a + b)$$

$$(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^r = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 7$$

$$A^r = (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^r = x + \frac{1}{x} + 3\sqrt[3]{x} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})}_A$$

$$\Rightarrow A^r = 7 + 3A$$

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2+x+1) &= x^3-1 \\ (x+1)(x^2-x+1) &= x^3+1\end{aligned}$$

می‌دانیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۰

$$\begin{aligned}& (\sqrt[6]{5}-1) \left( \sqrt[6]{5^2}-\sqrt[6]{5}+1 \right) \left( \sqrt[6]{5^2}+\sqrt[6]{5}+1 \right) \left( \sqrt[6]{5}+1 \right) \\ &= \left( (\sqrt[6]{5})^3-1 \right) \left( (\sqrt[6]{5})^3+1 \right) \\ &= (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = 5-1 = 4\end{aligned}$$

ابتدا عبارت‌ها را گویا می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۱

$$\frac{3}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+3}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt{x^3}}{x-1}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{5}{x-1} + \frac{3}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{5+3\sqrt{x}+3+1+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt{x^3}}{x-1}$$

$$= \frac{9+3\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt{x^3}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt[4]{x}+A}{x-1} \Rightarrow A = 3\sqrt{x}+9$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۲

$$A = \frac{16\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+1)} = \frac{15}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+1}$$

$$A = \frac{15}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+1} \times \frac{(\sqrt[3]{4}+1)}{(\sqrt[3]{4}+1)} = \frac{15(\sqrt[3]{4}+1)}{5} \Rightarrow A = 3\sqrt[3]{4}+3$$

اگر  $x = 2 + \sqrt{3}$  باشد، آنگاه  $x + \frac{1}{x}$  برابر می‌شود با: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۳

$$2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \quad (1)$$

اگر مخرج کسر  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$  را گویا کنیم، داریم:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3} \quad (2)$$

یعنی عبارت مورد نظر با توجه به رابطه (۱) و (۲) برابر است با:

$$2 + \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۴

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

نکته:

ابتدا صورت و مخرج کسر داده شده را در  $(a-1)(b-1)$  ضرب می‌کنیم، لذا داریم:

$$A = \frac{(a^2+a+1)(a-1)(b-1)}{(b^2+b+1)(b-1)(a-1)} = \frac{(a^3-1)(b-1)}{(b^3-1)(a-1)}$$

$$\xrightarrow{b^3=a^3} \frac{(a^3-1)(b-1)}{(a^3-1)(a-1)} = \frac{(a^3-1)(b-1)}{-(a^3-1)(a-1)} = -\frac{b-1}{a-1} = \frac{1-b}{a-1}$$

ابتدا توجه کنید که  $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$  است، به همین ترتیب رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۵

$$A = \sqrt{7+6} \sqrt{10-4} \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{7+6} \sqrt{10-4(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{7+6} \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{7+6(2-\sqrt{2})} = \sqrt{19-6\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(3\sqrt{2}-1)^2} = |3\sqrt{2}-1| = 3\sqrt{2}-1 = \sqrt{18}-1$$

هریک از رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۶

$$\sqrt{14} + \sqrt{1+\sqrt{1+8}} = \sqrt{14} + \sqrt{1+\sqrt{9}} = \sqrt{14} + \sqrt{1+3} = \sqrt{14+2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

در نتیجه داریم:

$$A = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} \times 4}{10\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{22\sqrt{2}} = \frac{1}{22}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۷

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$2 < \sqrt{5} \Rightarrow 2 - \sqrt{5} < 0 \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2} \times \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5 - 4} = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} < 3 \Rightarrow 3 - \sqrt{5} > 0 \Rightarrow \left| \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right| = \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \times \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5} + 20}{9 - 5} = 3\sqrt{5} + 5$$

$$\left| \frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \right| - \left| \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right| = 5 + 2\sqrt{5} - 5 - 3\sqrt{5} = -\sqrt{5}$$

می‌دانیم که  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$  است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹۸

$$\lambda a^3 - a^2 b^2 + \lambda a^2 b^2 - b^2 = a^2(\lambda a - b^2) + b^2(\lambda a^2 - b^2)$$

$$= (\lambda a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + b^2)$$

بنابراین  $2a + b$  در عبارت وجود ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۹

ابتدا طرف دوم تساوی را با گویا کردن مخرج کسرها به یک کسر تبدیل می‌کنیم و سپس با مقایسه با طرف اول تساوی، عبارت  $A$  را به دست می‌آوریم.

$$\frac{2}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}+2}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt[4]{x^3}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1}{x-1} \Rightarrow$$

$$\text{عبارت} = \frac{3 + 2\sqrt{x} + 2 + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1}{x-1} = \frac{6 + 3\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x}}{x-1} = \frac{6 + 3\sqrt{x} + A}{x-1} \Rightarrow A = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۰

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{3^2 \times 2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{18 - 12} = \frac{6 - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 6}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۱**

$$4a^2 - b^2 = 91 \Rightarrow (2a + b)(2a - b) = 91$$

$$\xrightarrow{2a+b=y} 7(2a - b) = 91 \Rightarrow 2a - b = \frac{91}{7} = 13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 13 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 5, b = -3$$

$$\Rightarrow a + b = 5 + (-3) = 2$$

در نتیجه داریم:

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۲**

می‌دانیم:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[5]{x^6})^3 - 1 &= (\sqrt[5]{(x^2)^3})^3 - 1 = (\sqrt[5]{(x^2)^3})^2 - 1 \\ &= ((\sqrt[5]{x^2})^3 - 1)((\sqrt[5]{x^2})^2 + 1) \\ &= (\sqrt[5]{x^2} - 1)((\sqrt[5]{x^2})^2 + \sqrt[5]{x^2} + 1)(\sqrt[5]{x^2} + 1)((\sqrt[5]{x^2})^2 - \sqrt[5]{x^2} + 1) \\ &= (\sqrt[5]{x^2} - 1)(\sqrt[5]{x^6} + \sqrt[5]{x^2} + 1)(\sqrt[5]{x^2} + 1)(\sqrt[5]{x^6} - \sqrt[5]{x^2} + 1) \end{aligned}$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۳**

می‌دانیم:  $(x + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

عددها را به ترتیب  $x$ ,  $x + 5$ ,  $x + 10$  فرض می‌کنیم و داریم:

$$x^2 + (x + 5)^2 + (x + 10)^2 = 1925$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 20x + 100 = 1925 \Rightarrow 3x^2 + 30x - 1800 = 0$$

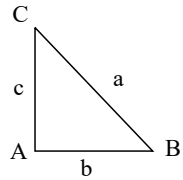
$$x^2 + 10x - 600 = 0 \Rightarrow (x + 30)(x - 20) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 30 = 0 \Rightarrow x = -30 \\ x - 20 = 0 \Rightarrow x = 20 \end{cases}$$

با توجه به مثبت بودن گزینه‌ها،  $x = 20$  را انتخاب می‌کنیم و مجموع ۳ عدد به صورت زیر است:

$$x + x + 5 + x + 10 = 3x + 15 \stackrel{x=20}{=} 60 + 15 = 75$$

**۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۴**

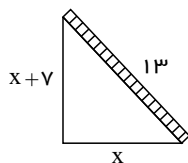
می‌دانیم:  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$



در مثلث قائم‌الزاویه

$$a^2 = b^2 + c^2 : \triangle ABC$$

با نوشتن رابطه فیثاغورس در مثلث روبرو داریم:



$$13^2 = x^2 + (7 + x)^2$$

$$169 = x^2 + 49 + x^2 + 14x \Rightarrow 2x^2 + 14x - 120 \Rightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 12)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \text{ غ ق ق} \\ x = 5 \Rightarrow x + 7 = 5 + 7 = 12 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۵

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1 - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2}{x-1}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$x = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3} + 1$$

$$\frac{2}{x-1} \xrightarrow{x=\sqrt{3}+1} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۶

$$\text{می‌دانیم: } (a \pm b)^r = a^r \pm r a^{r-1} b + r a^{r-2} b^2 \pm b^r$$

$$(3 + \sqrt{2})^r = 27 + 27\sqrt{2} + 18 + 2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$(3 - \sqrt{2})^r = 27 - 27\sqrt{2} + 18 - 2\sqrt{2} \quad (2)$$

در نتیجه بنا بر (۱) و (۲) ساده عبارت سؤال برابر است با:

$$\Rightarrow 54 + 36 + (2\sqrt{2})^r \times 2\sqrt{2} = 90 - 18 \times 2\sqrt{16} = 90 - 16 \times 4 = 90 - 64 = 26$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۷

$$\text{می‌دانیم: } x^r + y^r = (x+y)(x^{r-1} - xy + y^{r-1}) = (x+y)((x+y)^{r-1} - rxy)$$

$$\begin{array}{l} x+y=3 \\ xy=-1 \end{array} \rightarrow x^r + y^r = (3)(9 + 3) = 36$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^r + y^r} = \sqrt{36} = 6$$

$$a^r + b^r = (a+b)^r - r ab(a+b) \quad \text{می‌دانیم: } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 108$$

$$A = \underbrace{(1 + \sqrt{3})^r}_a + \underbrace{(1 - \sqrt{3})^r}_b = \underbrace{(1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3})^r}_2 - \underbrace{r(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}_{1-3} \underbrace{(1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3})}_2$$

$$= 2^r - 3 \times (-2) \times 2 = 8 + 12 = 20$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۹

$$\begin{cases} a(a^r + rab) = a^r + ra^r b = 7 \\ b(b^r + rab) = b^r + rab^r = 20 \end{cases}$$

$$a^r + ra^r b + rab^r + b^r = 27 \rightarrow (a+b)^r = 27 \rightarrow a+b=3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۰

$$A = \frac{\overbrace{2x^r + 2x + x + 1}}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x-1)(x^r + x + 1)}{(2x+1)^r}$$

$$= \frac{2x(x+1) + x + 1}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x-1)(x^r + x + 1)}{(2x+1)^r}$$

$$= \frac{\cancel{(2x+1)} \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)} \cancel{(x+1)}} \times \frac{\cancel{(x-1)} (x^r + x + 1)}{(2x+1)^r}$$

$$= \frac{x^r + x + 1}{2x+1}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۱

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt{x^r+1} + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

در نتیجه:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x-1} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x-1} = \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}{x-1}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{6}} + 1)}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[6]{x} + 1)}{x-1} \rightarrow A = \sqrt[3]{x}(\sqrt[6]{x} + 1)$$

$$x = \frac{\sqrt{3}\sqrt{48} - \sqrt{27}}{\sqrt[4]{27}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{16 \times 3} - \sqrt{9 \times 3}}{\sqrt[4]{9 \times 3}} = \frac{\sqrt{12}\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt[4]{3}} = \frac{3\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt[4]{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۲

از طرفی:

$$\sqrt{x^2 + 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2 + 1)^2} = x^2 + 1 = (\sqrt{3})^2 + 1 = 4$$

$$\text{بنابر فرض سوال: } x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2y)^2 = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y) \Rightarrow 0 \times (x + 2y) = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱۳

در نتیجه داریم:

# پاسخنامه کلیبی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴

۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴

۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴

۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴