نام و نام خانوادگی: مهندس سهیل حاج کرم

نام آزمون: ۱۵۵ تست تابع درجه دوم و کاربردهای آن ریاضی کنکور

AKO
گروه مشاوره و برنامه ریزی آکو
آموزشگاه پرسا

ریاضی 3 و کنکور پایه

پایه معادلات و نامعادلات و تابع درجه دوم • تابع درجه دوم و کاربردهای آن

۱) منحنی $y=(۲x+۱)(x+۸)$ با خطوط $y=mx$ نقطهٔ مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است؟ متوسط - سراسری - ۱۳۸۸

۱) $۵<m<۱۳$ ۲) $۱۵<m<۲۳$ ۳) $۷<m<۱۵$ ۴) $۹<m<۲۵$

۲) اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y=(a-۱)x^۲+x+۳$ نسبت به خط $x=۲$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ متوسط - سراسری - ۱۳۸۳

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۳) برد تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^۲+x+۲}$ کدام است؟ متوسط - منتا - ۱۳۹۱

۱) $\left(۰,\frac{۴}{۷}\right]$ ۲) $\left[\frac{-۴}{۷},۰\right)$ ۳) $\left[۰,\frac{۴}{۷}\right]$ ۴) $\left(۰,\frac{۴}{۷}\right)$

۴) نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۲+bx+c$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۶ قطع کرده و از نقطه $(-۲,-۶)$ می گذرد. $f(-۱)$ کدام است؟ متوسط - خارج از کشور - ۱۳۸۹

۱) -۸ ۲) -۷ ۳) -۵ ۴) -۴

۵ معادله‌ی وتر مشترک دو سهمی $y = x^۲ - ۴x + ۵$ و $y = -x^۲ + ۲x$ کدام است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

① $۲y = ۲x + ۵$ ② $۲y + ۲x = ۵$ ③ $y = ۲x + ۵$ ④ وتر مشترک ندارند

۶ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^۲ + ۲ax + ۳$ بالای محور x ها است. مقادیر a در کدام گزینه صدق می‌کند؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

① $a > -\sqrt{۳}$ ② $a < \sqrt{۳}$ ③ $a > \sqrt{۳}$ یا $a < -\sqrt{۳}$ ④ $-\sqrt{۳} < a < \sqrt{۳}$

۷ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = x(۲x + m - ۱) + ۱$ بر محور x ها مماس است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

① $۱ \pm \sqrt{۲}$ ② $۱ \pm ۲\sqrt{۲}$ ③ $\sqrt{۲} \pm ۱$ ④ $۲\sqrt{۲} \pm ۱$

۸ منحنی به معادله‌ی $y = (m + ۲)x^۲ + ۴x + m - ۱$ به ازای کدام مقدار m محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

① $-۳ < m < ۲$ ② $-۲ < m < ۳$ ③ $-۱ < m < ۲$ ④ $۱ < m < ۲$

۹ منحنی به معادله‌ی $y = (x - ۱)(x^۲ - ax + a)$ محور x ها را در ۳ نقطه قطع می‌کند. حدود a کدام است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

① $۰ < a < ۴$ ② $a < ۰$ یا $a > ۴$ ③ $-۴ < a < ۰$ ④ $a < -۴$ یا $a > ۰$

۱۰ به ازای کدام مقدار m، رأس سهمی $y = mx^{۲} - ۳x + ۱$ بر روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) $-\frac{۳}{۴}$ (۲) $-\frac{۱۵}{۴}$ (۳) $\frac{۱۵}{۴}$ (۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۱ نمودار تابع $y = -۳x^{۲} + ۴x - ۳$ از کدام نواحی می‌گذرد؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) اول و سوم (۲) دوم و چهارم (۳) اول و دوم (۴) سوم و چهارم

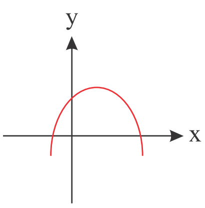
۱۲ به ازای کدام مقدار m، منحنی به معادله‌ی $y = (m+۱)x^{۲} - ۲x + m - ۱$، مماس بر محور xها و در بالای آن قرار دارد؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) -۲ (۲) $-\sqrt{۲}$ (۳) $\sqrt{۲}$ (۴) ۲

۱۳ به ازای چند مقدار صحیح برای a، سهمی $y = ax^{۲} + (a+۲)x + a + \frac{۳}{۴}$ تنها از دو ناحیه مختصات عبور می‌کند؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار

۱۴ ضابطهٔ تابع f با نمودار مقابل، مطابق کدام گزینه می‌تواند باشد؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲



(۱) $-x^{۲} + ۵x - ۷$

(۲) $-۲x^{۲} + ۳x + ۵$

(۳) $x^{۲} - ۳x + ۲$

(۴) $-۳x^{۲} - ۲x + ۴$

۱۵ به ازای کدام مقدار a سهمی $y=(a+2)x^2+(2a-3)x-a+4$ تنها از ربع سوم مختصات نمی‌گذرد؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) $a>-2$ ۲) $a<\frac{3}{2}$ ۳) $(-2\,,\,4)-\{0\}$ ۴) $(-2\,,\,\frac{3}{2})-\{0\}$

۱۶ به ازای کدام مقادیر m، منحنی $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می گذرد؟ متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۷

۱) $m<-2$ ۲) $m<-1$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $-4<m<-2$

۱۷ به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر a نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

۱۸ منحنی به معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ محور طول‌ها را در ۳ و ۱ و محور عرض‌ها را در ۶ قطع کرده است. کمترین مقدار y کدام است؟

متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۱۹ به‌ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=x^2-(m-1)x+4$ در بالای محور xها قرار می‌گیرد؟ متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

۱) $-3<m<5$ ۲) $-2<m<4$ ۳) $-3<m<4$ ۴) $-1<m<4$

متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

۲۰ محیط مستطیلی ۱۸۰ واحد است. به ازای کدام طول مستطیل مساحت آن بیشترین مقدار است؟

(۱) ۷۵ (۲) ۶۰ (۳) ۵۰ (۴) ۴۵

متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

۲۱ به ازای کدام مقدار m، منحنی تابع $y=(m+۲)x^۲+۴x+m-۱$ همواره بالای محور xهاست؟

(۱) $m>۲$ (۲) $m>-۲$ (۳) $m<-۳$ (۴) $-۳<m<۲$

متوسط- ۱۳۹۴ -smart

۲۲ به ازای چه حدودی از a، نمودار $y=ax^۲+۲x+a$ همواره بالای محور xها قرار دارد؟

(۱) $(۱,+\infty)$ (۲) $\varnothing$ (۳) $(-۱,۱)$ (۴) $(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

۲۳ بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۲+۴x+۵$ برابر ۹ است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

متوسط- ۱۳۹۴ -smart

(۱) $x=-۱$ (۲) $x=۲$ (۳) $x=۳$ (۴) $x=۴$

۲۴ در صورتی که منحنی تابع $y=۲x^۲+ax+a-\frac{۳}{۲}$، محور xها را در طرفین محور yها قطع کند، آنگاه حدود تغییرات a چگونه است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۴

(۱) $a<۲$ یا $a>۶$ (۲) $۲<a<۶$ (۳) $a<\frac{۳}{۲}$ (۴) $a>\frac{۳}{۲}$

۲۵ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر k، خط $y=-۲$ در بالاترین نقطه‌ی سهمی $f(x)=kx^۲+۲\sqrt{۲}x+k-۱$ بر سهمی مماس است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۴

(۱) $\{-۱\}$ (۲) $\{-۲\}$ (۳) $\{-۲,۱\}$ (۴) $\varnothing$

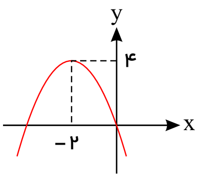
۲۶ به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$ ، بر نیمساز ناحیهٔ اول محورهای مختصات، مماس است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۳

(۱) -۴ (۲) $-۱۲, ۴$ (۳) $۱۲, -۴$ (۴) ۱۲

۲۷ با توجه به نمودار تابع $f(x) = a(x - x_۱)(x - x_۲)$، مقدار a کدام است؟

متوسط- ۱۳۹۵ -smart



(۱) ۱ (۲) -۱

(۳) -۲ (۴) ۲

۲۸ اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+۳)x^۲ - ۴x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

متوسط- سراسری- ۱۳۸۳

(۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۴

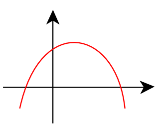
۲۹ مینیمم تابع $y = x^۲ + ۶x + a$ روی خط $y = ۲x + ۱$ قرار دارد. a کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۹ (۴) -۳

۳۰ ضابطه‌ی تابع f با نمودار مقابل، مطابق کدام گزینه می‌تواند باشد؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

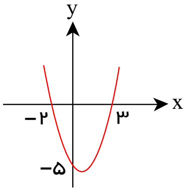


(۱) $y = -x^۲ + ۵x - ۷$ (۲) $y = -۲x^۲ + ۳x + ۵$

(۳) $y = x^۲ - ۳x + ۲$ (۴) $y = -۳x^۲ - ۲x + ۴$

۳۱) شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم به معادله‌ی $y = ax^۲ + bx + c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟

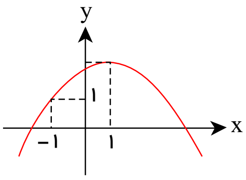
متوسط- منتا- ۱۳۹۴



۱) ۵ ۲) -۵
۳) ۶ ۴) -۶

۳۲) در سهمی شکل مقابل به معادله‌ی $f(x) = ax^۲ + bx + c$، اگر $a - b = -۳$ آنگاه $f(۱)$ کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۴



۱) -۴ ۲) ۰
۳) ۴ ۴) ۵

۳۳) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ + (k+۱)x + k + ۴ = ۰$، اگر حاصل‌ضرب ریشه‌ها ۲ برابر مجموع ریشه‌ها باشد، آن‌گاه تابع $f(x) = kx^۲ - ۴x + ۱$ چگونه است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۵

۱) ماکسیمم برابر ۳ دارد. ۲) مینیمم برابر ۳ دارد. ۳) ماکسیمم برابر ۱ – دارد. ۴) مینیمم برابر ۱ – دارد.

۳۴) به ازای چه حدودی از a تابع درجه‌ی دوم $f(x) = (a-۱)x^۲ - ۲\sqrt{۳}x + (a+۱)$، از ناحیه‌ی سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

متوسط- ۱۳۹۵ -smart

۱) $a \geq ۲$ ۲) $۱ \leq a \leq ۲$ ۳) R ۴) $a > ۱$

۳۵ اگر رأس سهمی $y=(k+۳)x^۲-۴x+k$ روی محور xها باشد، مقدار k کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۶

① -۴ یا -۱ ② -۴ یا ۱ ③ ۴ یا -۱ ④ ۴ یا ۱

۳۶ نمودار سهمی $y=۲x^۲-۸x+۱$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۶

① اول ② دوم ③ سوم ④ چهارم

۳۷ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی‌متر است، مثلثی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکسیمم است. مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

متوسط- سراسری- ۱۳۸۴

① ۳۰ ② ۳۲ ③ ۳۴ ④ ۳۶

۳۸ به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=(۱-a)x^۲+۲\sqrt{۶}x-a$، همواره بالای محور xها است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۶

① $a<۱$ ② $a<-۲$ ③ $a>۳$ ④ $-۲<a<۱$

۳۹ اگر مجموع طول نقاط تلاقی سهمی $y = ۲x^۲ + (۲ - m)x + m$ با محور xها برابر m باشد، حاصل‌ضرب طول این نقاط کدام است؟

متوسط- ۱۳۹۷ -smart

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $-\frac{۱}{۲}$

۴۰ منحنی $y = x^۲ + ۷x + ۱۰$ را چند واحد به طرف راست منتقل کنیم تا نقاط برخورد آن با $y = \sqrt{x}$ دو نقطه با طول‌های مثبت باشند؟

متوسط- ۱۳۹۷ -smart

(۱) ۳٫۵ واحد (۲) بیش از ۵ واحد (۳) کم‌تر از ۳٫۵ واحد (۴) ۵ واحد

۴۱ خط $y = ۲$ بر نمودار تابع $y = ax^۲ + ۳x + (a + ۲)$، در پایین‌ترین نقطه‌ی آن مماس است. aکدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۷

(۱) $-\frac{۳}{۲}$ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) $\frac{۵}{۲}$ (۴) $-\frac{۵}{۴}$

۴۲ اگر نمودار $y = x^۲ - ۲mx + m + ۲$ جهت منفی محور xها را در دو نقطه قطع کند، حدود m کدام است؟

متوسط- ۱۳۹۷ -smart

(۱) $-۲ < m < -۱$ (۲) $-۱ < m < ۰$ (۳) $۰ < m < ۱$ (۴) $۱ < m < ۲$

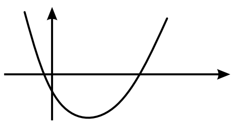
۴۳) به ازای چه مقادیری از m، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}-(m+۱)x+۱$ در نقطه‌ای واقع در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات، کم‌ترین مقدار خود را دارد؟

smart- ۱۳۹۷ -متوسط

۱) $-۱<m<۱$
۲) $-۱<m<۳$
۳) $۱<m<۳$
۴) $m>۳$

۴۴) سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ در شکل زیر داده شده است، کدام گزینه صحیح است؟

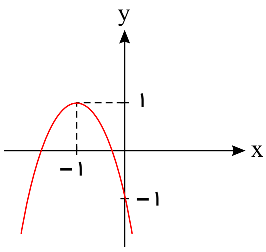
متوسط- منتا- ۱۳۹۸



۱) $b>\circ$
۲) $c>\circ$
۳) $ac>\circ$
۴) $abc>\circ$

۴۵) نمودار تابع $f(x)=\frac{a}{۲}(x+b)^{۲}+\frac{c}{۳}$ در زیر رسم شده است. حاصل $a+bc$ کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۸



۱) $+۱$
۲) -۳
۳) -۱
۴) $+۳$

۴۶) برد تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^{۲}+۲x+۲a$ به صورت $(-\infty,۱]$ است. مقدار $f(\circ)$ کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۸

۱) ۱ یا $\frac{-۱}{۲}$
۲) ۲ یا -۱
۳) ۲
۴) -۱

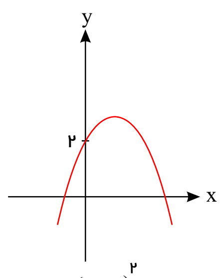
متوسط- منتا- ۱۳۹۸

۴۷) برای تابع $f(x) = x^{۲} + ۳x + \frac{۱۱}{۲}$، مقدار y چند عدد طبیعی را نمی‌تواند بپذیرد؟

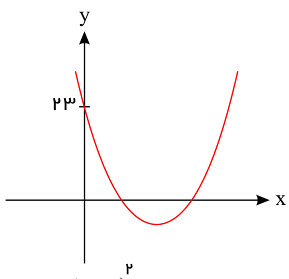
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

متوسط- منتا- ۱۳۹۸

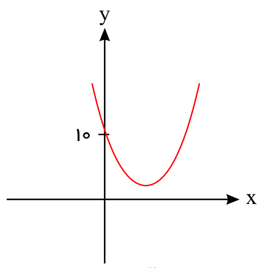
۴۸) نمودار کدام تابع به غلط رسم شده است؟

۱)


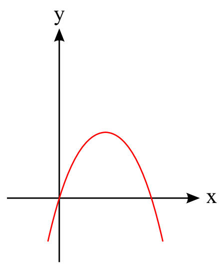
$y = -(x+۱)^{۲} + ۳$

۲)


$y = (x-۵)^{۲} - ۲$

۳)


$y = (x-۳)^{۲} + ۱$

۴)


$y = -(x-۱)^{۲} + ۱$

۴۹) اگر نقاط برخورد تابع $f(x) = ۰/۵x^{۲} + x - ۷/۵$ با محورهای مختصات رئوس یک مثلث باشند، مساحت مثلث مورد نظر کدام است؟

متوسط- ۱۳۹۸ -smart

۱) ۱۵
۲) ۶۰
۳) ۳۰
۴) ۹۰

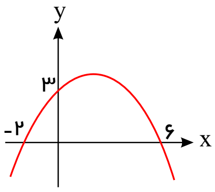
۵۰ سهمی $y=۲x^۲+bx+۶$ بر قسمت منفی محور xها مماس است. معادلهٔ محور تقارن آن کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۸ -smart

① $x=-\sqrt{۳}$ ② $x=\sqrt{۳}$ ③ $x=۲\sqrt{۳}$ ④ $x=-۴\sqrt{۳}$

۵۱ به‌ازای کدام مقادیر m، دهانهٔ سهمی به معادلهٔ $y=(m+۱)x^۲-۴x+(m-۲)$ رو به بالا بوده و محور xها را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند؟ متوسط- ۱۳۹۸ -smart

① $(-۱,۳)$ ② $(-۲,۳)$ ③ $(-۱,۴)$ ④ $(-۲,-۱)$

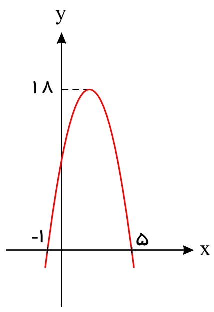
۵۲ بیش‌ترین مقدار y در سهمی شکل مقابل کدام است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۸



① ۴ ② $\frac{۷}{۲}$ ③ ۵ ④ $\frac{۹}{۲}$

۱۵۵ تست تابع درجه دوم و کاربردهای آن ریاضی کنکور

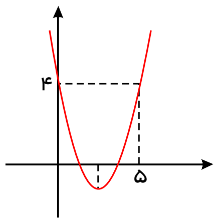
۵۳ اگر شکل داده‌شده نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $A=-۳a+\frac{b}{۲}-c$ کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۸ -smart



(۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) -۲

۵۴ اگر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+ax-b$ به‌صورت زیر باشد، مجموع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ چقدر از حاصل‌ضرب آن‌ها بیشتر است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۸



(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) $\frac{۳}{۲}$
(۴) $\frac{۵}{۲}$

۵۵ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y=(۱-m)x^{۲}+۲(m-۳)x-۱$، همواره پایین محور xها است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

(۱) $۱<m<۵$
(۲) $۲<m<۵$
(۳) $۲<m<۴$
(۴) $۲<m<۶$

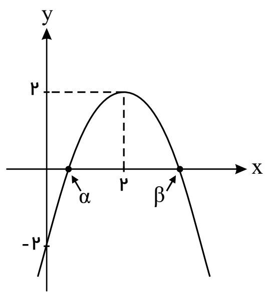
۵۶ تابع درجهٔ دوم f، دارای ماکزیممی به طول -۲ روی محور xهاست. اگر نمودار این تابع را سه واحد به‌سمت راست و یک واحد به‌سمت پایین منتقل کنیم، عرض از مبدأ هیچ تغییری نمی‌کند. مقدار تابع اولیه، به‌ازای $x = ۴$ کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۹

۱) -۳ ۲) -۹ ۳) -۱۲ ۴) -۱۵

۵۷ با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$، حاصل عبارت $۲\alpha^۲ + \alpha\beta^۳$ کدام است؟

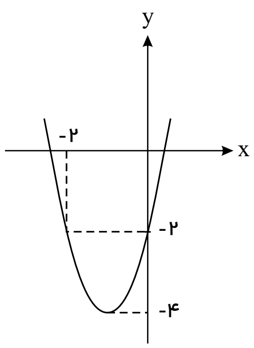
متوسط- ۱۳۹۸ -smart



۱) ۲۴
۲) ۴۲
۳) ۱۲
۴) ۴۰

۵۸ با توجه به شکل زیر که مربوط به تابع درجهٔ دوم f است، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ کدام است؟

متوسط- ۱۳۹۸ -smart

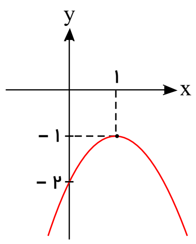


۱) -۲
۲) -۱
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) $-\frac{۳}{۲}$

۵۹ رأس سهمی $y=-x^{2}+4x-3$ و نقطه‌های برخورد این سهمی با محور xها به‌ترتیب سه رأس A، B و C از مثلث ABC را تشکیل می‌دهند، طول میانهٔ CM کدام است؟ (نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ C، به مبدأ نزدیک‌تر است.) متوسط- منتا- ۱۳۹۸

۱) $\sqrt{10}$
۲) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
۳) $2\sqrt{10}$
۴) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

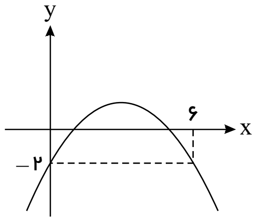
۶۰ ضابطهٔ سهمی مربوط به شکل زیر کدام است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۸



۱) $f(x)=-2x^{2}+x-2$
۲) $f(x)=-2x^{2}-2x-1$
۳) $f(x)=-x^{2}+2x-2$
۴) $f(x)=-x^{2}+x-2$

۶۱ اگر صفرهای تابع درجه دوم زیر جملات چهارم و هشتم یک دنبالهٔ حسابی باشند، مجموع جملهٔ دوم و دهم این دنبالهٔ حسابی کدام است؟

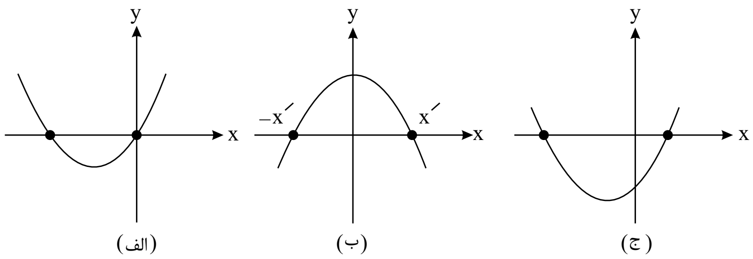
متوسط- ۱۳۹۹ -smart



۱) ۶
۲) ۳
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۱۲

۶۲ نمودارهای زیر مربوط به توابع درجهٔ دوم به معادلهٔ کلی $y = ax^۲ + bx + c$ هستند، در چند مورد از آن‌ها حاصل abc منفی است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۹



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۶۳ به‌ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y = (m - ۱)x^۲ + mx + ۱$ فقط از ناحیهٔ سوم نمی‌گذرد؟

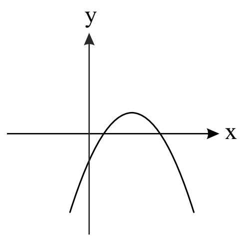
متوسط- ۱۳۹۹ -smart

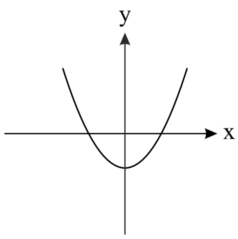
۱) $m > ۱$
۲) $۰ < m < ۱$
۳) $m < ۰$
۴) $\varnothing$

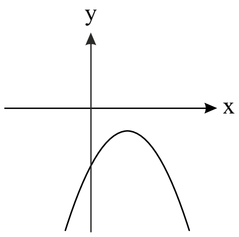
۶۴) نقطهٔ ماکسیمم تابع $y = mx^{۲} - x + ۱$ در ناحیهٔ دوم مختصات قرار می‌گیرد. تمام حدود m کدام است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۹

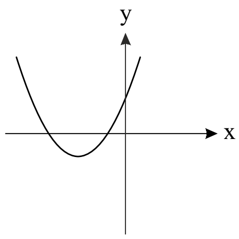
۱) $۰ < m < \frac{۱}{۲}$
۲) $m > -\frac{۱}{۴}$
۳) $-\frac{۱}{۴} < m < ۰$
۴) $m < ۰$

۶۵) اگر خط $x = ۱$ محور تقارن سهمی مفروض $y = kx^{۲} + k^{۲}x + k^{۳}$ باشد، آن‌گاه شکل سهمی $y = k^{۳}x^{۲} + k^{۲}x + k$ مطابق کدام گزینه است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۹

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶۶) اختلاف سنی دو برادر ۸ سال است. اگر سال دیگر حاصل ضرب سن آن‌ها ۱۰۵ باشد، امسال سن برادر بزرگ‌تر چه‌قدر است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۹

۱) ۱۵
۲) ۱۴
۳) ۸
۴) ۹

۶۷) پرتابگر وزنه‌ای، وزنهٔ خود را به نحوی پرتاب می‌کند که مسیر طی شده از رابطهٔ $y = -\frac{۳}{۱۶}x^{۲} + \frac{۹}{۸}x + \frac{۲۱}{۱۶}$ به‌دست می‌آید (y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی‌شده است.) فاصلهٔ بین نقطهٔ اوج وزنه و محل برخورد وزنه با زمین چقدر است؟ متوسط- منتا- ۱۳۹۹

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) $\sqrt{۲۱}$

۶۸ اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۴}mx^{۲}+(m+۱)x+۳+\frac{۷}{m}$ فقط از نواحی سوم و چهارم مختصات نگذرد، حدود m کدام است؟

متوسط- منتا- ۱۳۹۹

۱) $۰\le m\le ۳$ ۲) $۰<m\le ۳$ ۳) $۱<m\le ۴$ ۴) $۱\le m\le ۴$

۶۹ فرض کنید نقاط $(-۲,۵)$، $(۰,۵)$ و $(۱,۱۱)$، بر سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

متوسط- سراسری- ۱۳۹۹

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۱,۴)$ ۳) $(۲,۹)$ ۴) $(۲,۱۵)$

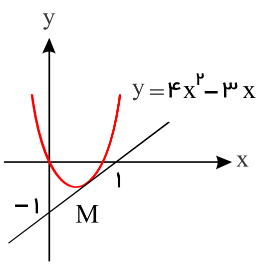
۷۰ فرض کنید $A(-۱,۹)$ رأس سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ گذرا بر نقطهٔ $(۳,۱)$ باشد. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) $(۵,-۷)$ ۲) $(۵,-۹)$ ۳) $(۲,۵)$ ۴) $(۱,۵)$

۷۱ با توجه به شکل مقابل طول نقطهٔ M کدام است؟

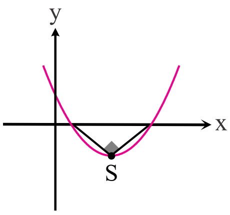
متوسط- منتا- ۱۴۰۰



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

متوسط- منتا- ۱۴۰۰

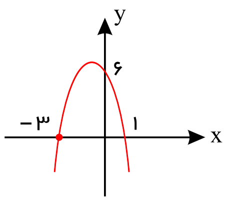
۷۲ نمودار سهمی $y = x^{۲} - ۳x + c$ به‌صورت مقابل است. Δ در معادلهٔ $y = ۰$ کدام است؟



(۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۹

متوسط- منتا- ۱۴۰۰

۷۳ نمودار سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ به‌صورت مقابل است. حاصل ضرب مختصات رأس سهمی کدام است؟



(۱) -۸
(۲) -۱۰
(۳) -۹
(۴) $-\frac{۲۰}{۳}$

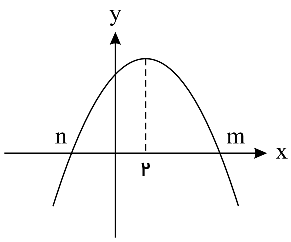
متوسط- منتا- ۱۴۰۰

۷۴ به‌ازای کدام مقادیر a منحنی $y = ax^{۲} + (۲ - a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات عبور <u>نمی‌کند</u>؟

(۱) $a \geq ۲$
(۲) $a \leq ۲$
(۳) $a > ۰$
(۴) $۰ < a \leq ۲$

متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۷۵ نمودار سهمی $f(x) = ax^{۲} + ۳bx - ۶a$ به‌صورت زیر است. حاصل $m^{۳} + n^{۳}$ کدام است؟



(۱) ۱۴۲
(۲) ۱۱۲
(۳) ۱۳۶
(۴) ۱۲۴

۷۶) اگر سهمی به معادلهٔ $f(x) = (a-۲)x^{۲} - ۲\sqrt{۵}x + a + ۲$ از ناحیهٔ سوم و چهارم نگذرد، حدود a کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۱) $a \geq ۳$ یا $a \leq -۳$
۲) $a \geq ۳$
۳) $a > ۲$
۴) $a > -۲$

۷۷) پایین‌ترین نقطهٔ نمودار تابع $f(x) = ax^{۲} - ۲(x-a) - ۱$ در ناحیهٔ چهارم صفحهٔ مختصات قرار دارد. مجموعهٔ مقادیر ممکن a کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

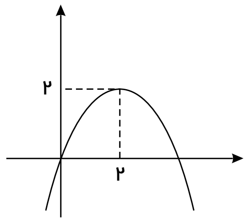
۱) $(۰, ۱)$
۲) $(-۱, ۰)$
۳) $(-\frac{۱}{۲}, ۱)$
۴) $(-\frac{۱}{۲}, ۰)$

۷۸) محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = -x^{۲} + ۶x - k$ سهمی را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی خط $y = -۵$ جدا می‌کند، چقدر است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۷۹ نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f(ab)$ کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰ -smart



(۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲) $-\frac{۳}{۲}$

(۳) $-\frac{۵}{۲}$ (۴) -۲

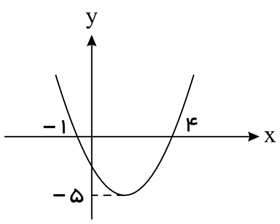
۸۰ اگر یک سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴- قطع کند و رأسش روی نیمساز ربع دوم باشد. این سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (محور تقارن این سهمی یا موازی با محور y یا موازی با محور x است.)

متوسط- ۱۴۰۰ -smart

(۱) $\frac{۴}{۹}$ (۲) $\frac{۵}{۹}$ (۳) $\frac{۸}{۹}$ (۴) $\frac{۱۱}{۹}$

۸۱ نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}-bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a+b-c$ کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰ -smart



(۱) $\frac{۸}{۵}$ (۲) $\frac{۱۲}{۵}$

(۳) صفر (۴) $\frac{۳۲}{۵}$

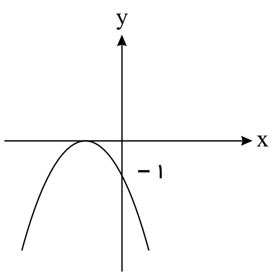
متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۸۲) نمودار تابع $f(x)=mx^{۲}-\frac{۲}{۳}mx+۱$ همواره بالای محور طول‌ها قرار دارد. مجموعهٔ مقادیر ممکن m کدام است؟

(۱) $(۰,۹)$ (۲) $[۰,۹)$ (۳) $(۳,-۳)$ (۴) $[۰,-۹]$

متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۸۳) به ازای چند مقدار a نمودار تابع $f(x)=(a-۸)x^{۲}+ax-b$ به صورت مقابل است؟



(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

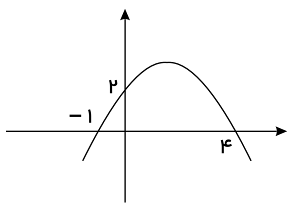
متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۸۴) کمترین مقدار تابع $f(x)=ax^{۲}-۴x-۳$ برابر -۱۰ است. معادلهٔ محور تقارن نمودار تابع f کدام است؟

(۱) $x=\frac{۷}{۲}$ (۲) $x=\frac{۴}{۷}$ (۳) $y=\frac{۷}{۲}$ (۴) $y=\frac{۷}{۴}$

متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۸۵) نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟



(۱) ۱ (۲) ۲
(۳) $\frac{۵}{۲}$ (۴) ۳

۸۶ خط $y=-۴$ در پایین‌ترین نقطهٔ سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲-\sqrt{۸}x+a-۳$ بر آن مماس است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۲

۸۷ نمودار تابع $f(x)=(a-۲)x^۲-\sqrt{۱۲}x+a$ از ناحیه‌های اول و دوم صفحهٔ مختصات عبور <u>نمی‌کند</u>. مجموعه مقادیر a کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

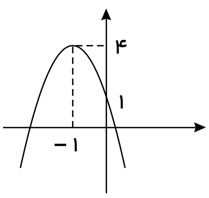
۱) $(-\infty,-۳]\cup[۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۱]\cup[۳,+\infty)$ ۳) $(-\infty,+۲)$ ۴) $(-\infty,-۱]$

۸۸ نمودار تابع $f(x)=(۲-k)x^۲-\sqrt{۸}x+۱-k$ بالای محور طول‌ها قرار نمی‌گیرد. مجموعه مقادیر ممکن k کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $[۳,+\infty)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(۰,۳)$

۸۹ مجموع معکوسات صفرهای تابع درجهٔ دوم که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده، کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۲ ۲) ۳
۳) ۶ ۴) ۴



۹۰ خط $y = ۲m - ۱$ محور تقارن سهمی $y = x^۲ + ۴x + ۲$ را در روی خود سهمی قطع می‌کند. مقدار m کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

(۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $-\frac{۱}{۳}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $-\frac{۱}{۲}$

۹۱ مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط برخورد نمودار تابع $f(x) = -x^۲ + ۳x + ۴$ با محورهای مختصات است، کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۹۲ سهمی $y = mx^۲ + (m+۱)x - ۱$ همواره پایین محور طول‌هاست. به‌جای m چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

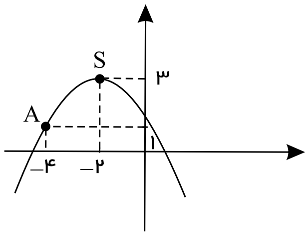
(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۹۳ اگر مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $-۳x^۲ + (a-۱)x + a + ۲ = ۰$ برابر ۱۰ باشد آن‌گاه محور تقارن سهمی $y = ax^۲ - ۲۸x + a + ۱$ کدام است؟ $(a > ۰)$ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

(۱) $x = ۲$ (۲) $x = -۲$ (۳) $x = \frac{۷}{۱۱}$ (۴) $x = -\frac{۷}{۱۱}$

۹۴ در سهمی شکل مقابل به معادلهٔ $c + bx + ax^۲ = f(x)$، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

متوسط - ۱۴۰۰ -smart



(۱) ۲

(۲) ۲٫۵

(۳) ۳

(۴) ۳٫۵

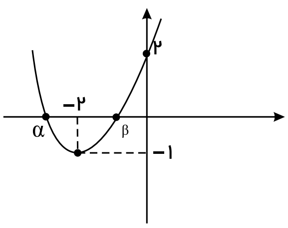
۹۵ در صورتی که منحنی تابع $y = ۳x^۲ + ۲ax + a + \frac{۱۰}{۳}$، از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات عبور کند، آن‌گاه حدود تغییرات a چگونه است؟

متوسط - ۱۴۰۰ -smart

(۱) $a < -۲$ یا $a > ۵$ (۲) $a < -\frac{۱۰}{۳}$ (۳) $a > -\frac{۱۰}{۳}$ (۴) $-۲ < a < ۵$

۹۶ نمودار سهمی با ضابطهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c$ را در شکل مقابل مشاهده می‌کنید. حاصل عبارت $۴\alpha^۲ + \frac{۳}{۲}\beta^۳\alpha$ کدام است؟

متوسط - ۱۴۰۰ -smart



(۱) $\frac{۱۶}{۳}$

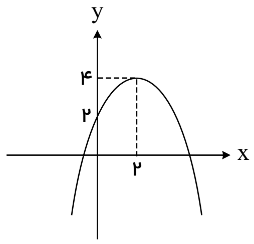
(۲) $\frac{۱۲۸}{۳}$

(۳) $\frac{۳۲}{۹}$

(۴) $\frac{۱۲۸}{۹}$

۹۷ نمودار سهمی $y=f(x)$ به صورت زیر است. بزرگترین بازه‌ای که در آن نمودار $y=f(x)$ بالای خط $۲y-x=۰$ قرار می‌گیرد، کدام است؟

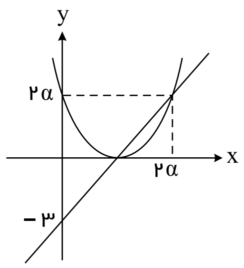
متوسط- منتآزمون- ۱۴۰۱



① $(-۱,۴)$
② $(-۱,۳)$
③ $(-۲,۳)$
④ $(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$

۹۸ نمودار سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به‌صورت مقابل است. مقدار $f(-\frac{۳}{۲})$ کدام است؟

متوسط- منتآزمون- ۱۴۰۱



① ۶
② ۹
③ ۱۲
④ ۱۸

۹۹ اگر دو نقطهٔ $(۵,k)$ و (m,k) روی سهمی $y=x^{۲}-۴x+۲m-۶$ قرار داشته باشند. آنگاه طول پاره‌خطی که $y=-۳$ روی سهمی جدا می‌کند، کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰ -smart

① ۲
② ۴
③ ۵
④ ۶

۱۰۰ به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(۲-m)x^۲-۲mx+۱$ فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد؟ متوسط- ۱۴۰۰ -smart

۱) $m<-۲$ یا $m>۱$ ۲) $۰<m<۱$ ۳) $m>۲$ ۴) ϕ

۱۰۱ رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ نقطهٔ $(۲,-۲)$ است و این سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند. نمودار سهمی $y=bx^۲+۲cx-a$ از کدام ناحیهٔ صفحهٔ مختصات می‌گذرد؟ متوسط- منتآزمون- ۱۴۰۱

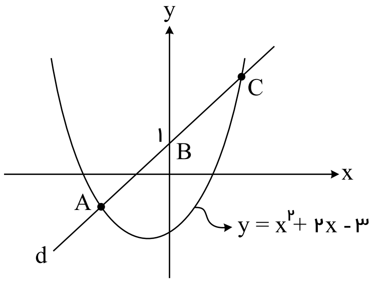
۱) اول و دوم ۲) سوم و چهارم ۳) اول و دوم و سوم ۴) دوم و سوم و چهارم

۱۰۲ سهمی $y=-x^۲+۲x+۱$ خط راست گذرا از نقطهٔ $(۱,۰)$ و با عرض از مبدأ -۱ را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ M، کدام مضرب $\sqrt{۲۶}$ است؟ متوسط- خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۳ در شکل مقابل $AB = BC$، فاصلهٔ مبداء تا خط d کدام است؟

متوسط- منتآزمون- ۱۴۰۱



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

۱۰۴ به‌ازای چند مقدار a، سهمی $y = ax^{۲} + (۳ + ۲a)x$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

متوسط- سراسری- ۱۴۰۱

۱) هیچ مقدار a

۲) تمام مقادیر a

۳) ۱

۴) ۲

۱۰۵ کمترین مقدار تابع $y = mx^{۲} - ۱۲x + ۵m - ۱$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟

متوسط- سراسری- ۱۴۰۱

۱) $x = ۲$ ۲) $x = ۲/۵$ ۳) $x = ۳$ ۴) $x = ۳/۵$

۱۰۶ رأس سهمی $y = -ax^{۲} + ax + ۲$ روی سهمی $y = ۲bx^{۲} - bx - ۱$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b - a$ چقدر است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) -۶ ۲) ۶ ۳) -۱۸ ۴) ۱۸

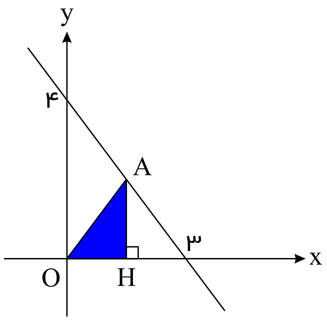
۱۰۷ نمودار تابع $y = ۳x^{۲} + (۲m - ۱)x + m + \frac{۴}{۳}$ در ناحیه دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) $-\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $-\frac{۷}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۰۸ در شکل مقابل، بیشترین مساحت مثلث OAH چقدر است؟

متوسط - منتاآزمون - ۱۴۰۲



۱) ۲٫۵
۲) ۱٫۵
۳) ۲٫۲۵
۴) ۱٫۷۵

۱۰۹ محور تقارن‌های سهمی‌های $y = x^۲ + ax - ۲$ و $y = -x^۲ - ۲x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y = ۱$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟

متوسط - سراسری - ۱۴۰۲

۱) -۸
۲) -۴
۳) ۸
۴) ۴

۱۱۰ برد تابع $f(x) = \dfrac{۱ + x^۲}{۲x}$ کدام است؟

سخت - منتا - ۱۳۹۱

۱) $[-۱, ۱]$
۲) $(-۱, ۱)$
۳) $R - (-۱, ۱)$
۴) $R - [-۱, ۱]$

۱۱۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a - ۳)x^۲ + ax - ۱$، از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

سخت - سراسری - ۱۳۹۲

۱) $a \leq ۲$
۲) $۰ < a \leq ۲$
۳) $۲ < a < ۳$
۴) $۰ < a < ۳$

۱۱۲ برد تابع $f(x) = \dfrac{x}{x^۲ + x + ۱}$ کدام است؟ — سخت- منتا- ۱۳۹۲

۱) $[-۱, \frac{۱}{۳})$ ۲) $[-۱, \frac{۱}{۳}]$ ۳) $\mathbb{R} - (-۱, \frac{۱}{۳})$ ۴) $(-\infty, \frac{۱}{۳}]$

۱۱۳ برد تابع $y = \dfrac{۴x + ۱}{x^۲ - ۲x}$ کدام است؟ — سخت- منتا- ۱۳۹۲

۱) $[-۴, -۱]$ ۲) $\mathbb{R} - (-۴, -۱)$ ۳) $\mathbb{R} - (-۲, ۱)$ ۴) $\mathbb{R}$

۱۱۴ اگر قدر مطلق تفاضل ریشه‌های تابع $f(x) = -x^۲ + x - m$ برابر ۳ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ — سخت- منتا- ۱۳۹۴

۱) بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{۹}{۴}$ است. ۲) کم‌ترین مقدار تابع $\frac{۹}{۴}$ است. ۳) بیش‌ترین مقدار تابع $\frac{۹}{۲}$ است. ۴) کم‌ترین مقدار تابع $\frac{۹}{۲}$ است.

۱۱۵ به ازای چه حدودی از a، نمودار تابع درجه‌ی دوم $y = ax^۲ - (a - ۴)x + \frac{۹}{۴}$ فقط از ناحیه‌ی چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ — سخت- smart- ۱۳۹۴

۱) $-۱ < a < ۰$ ۲) $-۲ < a < -۱$ ۳) $۱ < a < ۲$ ۴) $۰ < a < ۱$

۱۱۶ محور تقارن سهمی $y = x^{۲} + ۴x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (۲-) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور xها ایجاد می‌کند، کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۴

(۱) $۲\sqrt{۳}$ (۲) $۴\sqrt{۳}$ (۳) $۲\sqrt{۲}$ (۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۱۷ اگر عبارت $y = ax(x+۱)+۱$ همواره مثبت باشد، به جای a چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟ سخت- ۱۳۹۴ -smart

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) صفر

۱۱۸ اگر مساحت مثلثی که راس‌های آن نقاط برخورد منحنی به معادله‌ی $y = x^{۲} - kx + ۱$ با محورهای مختصات است، برابر یک واحد مربع باشد، k کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۴

(۱) ± ۲ (۲) ± ۴ (۳) $\pm ۲\sqrt{۲}$ (۴) $\pm \sqrt{۲}$

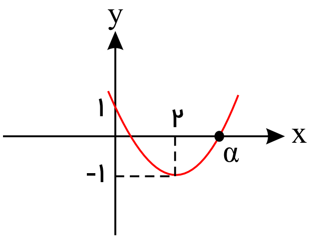
۱۱۹ به ازای چند مقدار صحیح a، تابع درجه‌ی دوم $y = ax^{۲} + ۲(a+۲)x + ۲a + ۷$ محور xها را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند؟

سخت- منتا- ۱۳۹۲

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) بی شمار

۱۲۰ با توجه به شکل روبه‌رو که نمودار یک تابع درجه‌ی دو را نشان می‌دهد. مقدار α کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۵



۱) ۳ ۲) $\frac{۵}{۲}$

۳) $۲+\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۴+\sqrt{۲}}{۲}$

۱۲۱ اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور xها را در دو نقطه، به طول‌های ۱– و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

سخت- ۱۳۹۶ -smart

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۲۲ به ازای کدام مقادیر a، منحنی $y = ax^۲ - (a+۲)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

سخت- سراسری- ۱۳۸۹

۱) $a \leq ۲$

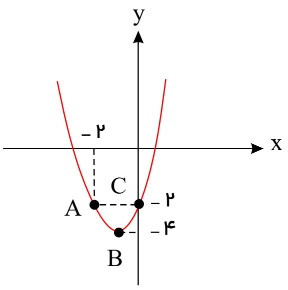
۲) $a \leq -۲$

۳) $a > ۰$

۴) $-۲ \leq a < ۰$

۱۲۳ نمودار تابع درجه‌ی دوم $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. مجموع مربعات ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = ۰$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۶



۱) ۵

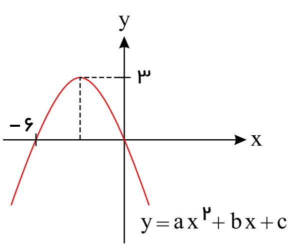
۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۱۲۴ باتوجه به سهمی روبرو، حاصل عبارت $\frac{-\sqrt{b^۲}}{a}$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۶



۱) -۱

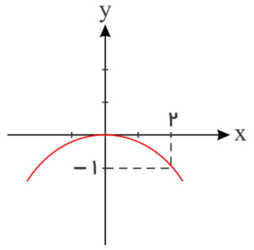
۲) ۲

۳) -۴

۴) ۶

۱۲۵ رأس سهمی مقابل را به نقطهٔ $(-۲,۳)$ انتقال می‌دهیم، ضابطهٔ سهمی جدید کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۶



۱) $y=-x^۲-۴x-۱$

۲) $y=-\frac{۱}{۴}x^۲-۲x+۱$

۳) $y=-\frac{۱}{۴}x^۲-x+۲$

۴) $y=\frac{۱}{۴}x^۲+۲x+۵$

۱۲۶ اگر یکی از منحنی‌های تابع درجهٔ دوم $y=(a-۱)x^۲+x+۳$ نسبت به خط $x=۲$ متقارن باشد، این منحنی xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) ۲

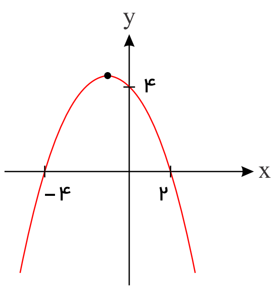
۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

۱۲۷ معادله سهمی شکل زیر کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۶



۱) $y=-۲x^۲-x+۴$

۲) $y=-\frac{۱}{۲}x^۲+x+۴$

۳) $y=-\frac{۱}{۲}x^۲-x+۴$

۴) $y=-\frac{۱}{۲}x^۲+۴$

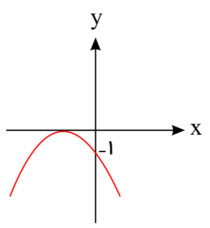
۱۲۸ اگر نمودار سهمی $f(x)=ax^{۲}+۴x+a-۳$، محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز با طول مثبت قطع کند، راس سهمی به ازای کدام مقادیر a، زیر محور xها قرار دارد؟ سخت- ۱۳۹۶ -smart

(۱) $(-۱,۰)$ (۲) $\varnothing$ (۳) $(-\infty,۰)$ (۴) $(-\frac{۱}{۲},۰)$

۱۲۹ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=ax^{۲}+۲(x+a)-۱$ در ربع سوم قرار دارد؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

(۱) $-۱<a<\frac{۱}{۲}$ (۲) $-\frac{۱}{۲}<a<۱$ (۳) $۰<a<۱$ (۴) $a>۰$

۱۳۰ نمودار تابع $y=(a-۵)x^{۲}+(a+۳)x+b$ به صورت مقابل است. مجموعه مقادیر a چگونه است؟ سخت- ۱۳۹۷ -smart



(۱) تهی است.

(۲) شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

(۳) دو عضوی است.

(۴) تنها شامل یک عدد صحیح است.

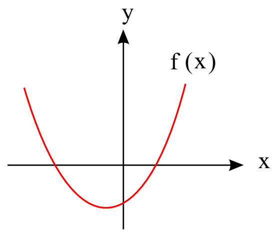
سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱۳۱ به ازای کدام مقادیر α منحنی تابع $y = ax^۲ - ax + ۲a - ۱$ فقط از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

① $[\frac{۱}{۲}, \frac{۴}{۷}]$ ② $[\frac{۱}{۲}, \frac{۴}{۷})$ ③ $[۰, \frac{۱}{۲}]$ ④ $[۱, +\infty)$

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱۳۲ اگر α و β ریشه‌های حقیقی تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ با نمودار زیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟



① $abc > ۰$ ② $\alpha^۳ + \beta^۳ < ۰$

③ $\frac{b^۲}{۴} < ac$ ④ $f(\frac{\alpha + \beta}{۲}) = \frac{\Delta}{۴a}$

۱۳۳ اگر مینیمم سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ بر ماکسیمم سهمی به معادلهٔ $g(x)=-x^۲+۴x-۵$ منطبق بوده و فاصلهٔ بین نقاط تقاطع منحنی f با محور xها، ۶ واحد باشد، مجموع ضرایب ضابطهٔ سهمی $f(x)$ کدام است؟

سخت- ۱۳۹۸ -smart

(۱) $-\frac{۱}{۹}$ (۲) $-\frac{۲}{۹}$ (۳) $-\frac{۵}{۹}$ (۴) $-\frac{۸}{۹}$

۱۳۴ تمام محدودهٔ a کدام باشد تا سهمی به معادلهٔ $y=(a+۶)x^۲+(a-۲)x+۱$ از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات عبور نکند؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

(۱) $-۶<a<-۲$ (۲) $a\leq -۲$ (۳) $a\geq -۲$ (۴) $a>۵$

۱۳۵ با توجه به ضابطهٔ سهمی $y = x^{۲} - mx + m - ۱$ به‌ازای کدام مقدار مثبت m، مساحت مثلثی که دو رأس آن صفرهای این سهمی و رأس سوم آن منطبق بر رأس سهمی می‌باشد، برابر ۱ است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۹

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳۶ نمودار تابع $f(x) = (۱ - m)x^{۲} + (۲m - ۱)x - (m + ۲)$ و محور x ها فقط در یک نقطه مشترک هستند. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

سخت- ۱۳۹۹ -smart

(۱) $\frac{۹}{۸}$ (۲) $\frac{۱۳}{۸}$ (۳) $\frac{۱۷}{۸}$ (۴) ۱

۱۳۷ توابع خطی f و g روی نقطه‌ای واقع بر محور yها غیر از مبدأ مختصات، بر هم عمودند؛ نمودار تابع $y=(f\cdot g)(x)$ از چند ناحیهٔ محورهای مختصات عبور می‌کند؟

سخت- منتا- ۱۳۹۹

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۳۸ اگر تابع $f(۲x+۳)=(x-۱)^۲-x$ مفروض باشد، نمودار تابع $f(x)$ از چند ناحیهٔ مختصات عبور می‌کند؟

سخت- ۱۳۹۹ -smart

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

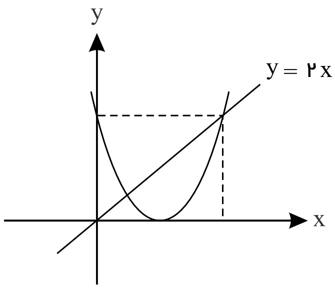
۱۳۹ نمودار $f(x)=x^۲-۲x+۳$ را سه واحد به چپ انتقال داده و سپس نسبت به $x=۲$ قرینه می‌کنیم. نمودار جدید و f نسبت به کدام خط تقارن دارند؟

سخت- منتا- ۱۴۰۰

۱) ۲٫۵ ۲) ۳ ۳) ۳٫۵ ۴) ۴

۱۴۰ نمودار سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ به‌صورت مقابل است. مقدار b کدام است؟

سخت- منتا- ۱۴۰۰



(۱) -۱۲

(۲) -۶

(۳) -۴

(۴) -۸

۱۴۱ به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $y=(a-۳)x^{۲}+ax-۱$ از تمام نواحی به‌جز ناحیهٔ اول عبور می‌کند؟

سخت- منتا- ۱۴۰۰

(۱) $a\leq ۲$ (۲) $۰<a\leq ۲$ (۳) $۲<a<۳$ (۴) $a<-۶$

۱۴۲ اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع خطی غیر ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشند و نمودار تابع $y=(f\cdot g)(x)$ فقط از دو ناحیهٔ مختصات عبور کند، کدام گزینه همواره راجع به تابع $h(x)=(\frac{f}{g})(x)$ صحیح است؟

سخت- منتا- ۱۴۰۰

(۱) دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است.

(۲) یک‌به‌یک است.

(۳) برد آن مجموعه‌ای نامتناهی است.

(۴) با $y=(f\cdot g)(x)$ دو نقطهٔ برخورد دارد.

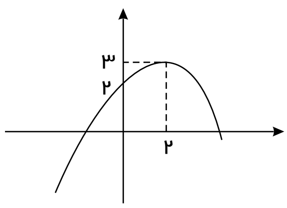
۱۴۳ محدودهٔ a کدام باشد تا نمودار تابع درجه دوم $y=(a+۶)x^{۲}+(a-۲)x+۱$ از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات عبور نکند؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart

(۱) $-۶<a<-۲$ (۲) $a\leq -۶$ (۳) $a\geq -۲$ (۴) $a>۵$

۱۴۴ نمودار تابع درجهٔ دوم f در شکل مقابل رسم شده است. مجموع مربعات صفرهای تابع f کدام است؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart



۱) ۸

۲) ۱۶

۳) ۳۲

۴) ۳۶

۱۴۵ پایین‌ترین نقطهٔ سهمی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ - ۴x + b$ بر بالاترین نقطهٔ سهمی به معادلهٔ $y = -x^۲ + ax + ۳$ منطبق است. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد دو سهمی با محور عرض‌ها از یکدیگر چقدر است؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۶ بەازای کدام مقادیر a نمودار تابع $f(x) = x^{۲} + (۱ - ۲a)x + a^{۲} - ۱$ فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

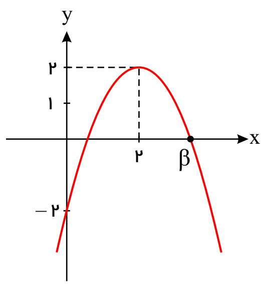
(۱) $(-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$

(۲) $[۱, +\infty)$

(۳) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۴})$

(۴) $[۱, \frac{۵}{۴})$

۱۴۷ در شکل مقابل که نمودار سهمی به معادلهٔ $y = ax^{۲} + bx - ۲$ است، مقدار β کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart



(۱) $۲ - \sqrt{۲}$

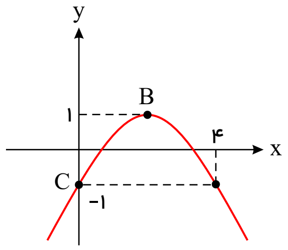
(۲) $۴ - \sqrt{۲}$

(۳) $۲ + \sqrt{۲}$

(۴) $۴ + \sqrt{۲}$

۱۴۸ نمودار تابع درجهٔ دوم $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=\circ$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\beta^۲}+\frac{۱}{\alpha^۲}$ کدام است؟

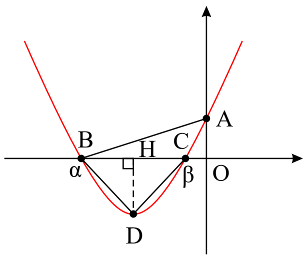
سخت- ۱۴۰۰ -smart



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۴۹ نمودار زیر مربوط به سهمی $y=۲x^۲-bx+۳$ است. اگر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ، ۲۴ برابر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{DBC}$ باشد، مقدار b کدام است؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart



۱) ۵
۲) -۵
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $-\sqrt{۵}$

۱۵۰ اگر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های تابع $f(x)=۲x^۲-x+m+۱$ برابر ۴ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح **نیست**؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) $m=\frac{-۷۱}{۸}$
۲) ریشه‌های تابع برابر $\frac{۹}{۴}$ و $\frac{-۷}{۴}$ است.
۳) خط $y=۸$ بر تابع $f(x)$ مماس است.
۴) خط $x=\frac{۱}{۴}$ محور تقارن تابع است.

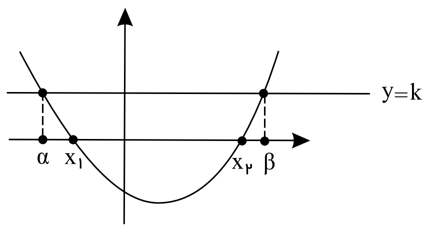
۱۵۱ اگر تابع درجهٔ دوم $y = f(x)$ محور xها را در دو نقطه به طول ۳ و ۱ قطع کند و با خط $y = x - ۳$ در نقطه‌ای به طول ۲ متقاطع باشد آن‌گاه تابع $y = f(x - ۳) + ۱$ محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

۱۵۲ اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت زیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart



۱) $b\alpha\beta < ۰$
۲) $f(\frac{\alpha + \beta}{۲}) = \frac{\Delta}{۴a}$
۳) $\frac{b}{۴a} > \frac{c}{b}$
۴) $\beta - x_۲ = x_۱ - a$

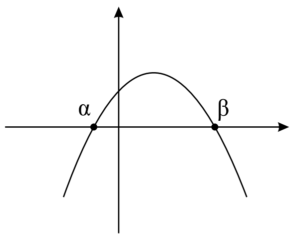
۱۵۳ می‌دانیم خط $y=-۳$، محور تقارن مشترک دو سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ و $g(x)=-x^۲+۴x-۷$ را روی خود سهمی‌ها قطع می‌کند. اگر سهمی $f(x)$ روی محور طول‌ها، پاره‌خطی به طول ۵ جدا کرده باشد، مقدار a کدام است؟ $(a>۰)$

سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۴) $-\frac{۴۸}{۲۵}$

۱۵۴ نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه درست است؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart



۱) $a\alpha+b\beta<۰$

۲) $f(\frac{\alpha+\beta}{۲})<c$

۳) $\frac{b^۲}{۴}<ac$

۴) $\frac{ac}{\alpha\beta}>۰$

۱۵۵ در سهمی به معادلهٔ $f(x)=x^۲-\sqrt{۱۱}x+k$، رأس و صفرهای تابع f، رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مقدار k کدام است؟

سخت- منتآزمون- ۱۴۰۱

۱) ۰٫۲۵ ۲) ۰٫۲۵- ۳) ۰٫۵ ۴) ۰٫۵-

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

معادلهٔ حاصل از تلاقی دو منحنی ریشه ندارد، پس Δی آن باید منفی باشد:

$$(۲x+۱)(x+۸)=mx \Rightarrow ۲x^۲+۱۶x+x+۸=mx \Rightarrow ۲x^۲+(۱۷-m)x+۸=۰$$
$$\Delta=(۱۷-m)^۲-۶۴<۰ \Rightarrow |m-۱۷|<۸ \Rightarrow -۸<m-۱۷<۸ \Rightarrow ۹<m<۲۵$$

۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

خط $x=۲$ محور تقارن تابع درجه‌ی دوم داده شده است.

$$x=\frac{-b}{۲a} \Rightarrow x=۲=-\frac{۱}{۲a-۲} \Rightarrow ۴a-۴=-۱ \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$
$$y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳ \xrightarrow[y=۰]{\times(-۴)} y=x^۲-۴x-۱۲=۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰ \begin{cases} x=-۲ \\ x=۶ \end{cases}$$

چون طول مثبت را خواسته پس $x=۶$ جواب مسأله است.

۳ **۱** ۲ ۳ ۴ برای محاسبه‌ی برد یک تابع می‌توانیم آنرا ساده نموده و سپس حدود آن را بیابیم.

باید حدود جملهٔ زیر را بیابیم:

$$f(x)=\frac{۱}{x^۲+x+۲}=\frac{۱}{x^۲+x+\frac{۱}{۴}+\frac{۷}{۴}}=\frac{۱}{\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۷}{۴}} \quad *$$
$$\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲\geq ۰ \Rightarrow \left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۷}{۴}\geq\frac{۷}{۴} \Rightarrow ۰<\frac{۱}{\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۷}{۴}}\leq\frac{۴}{۷} \Rightarrow R_f=\left(۰,\frac{۴}{۷}\right]$$

۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$$(۱,۰)\in f \Rightarrow ۰=a+b+c \quad (۱)$$
$$(۰,-۶)\in f \Rightarrow -۶=c \quad (۲)$$
$$(-۲,-۶)\in f \Rightarrow -۶=۴a-۲b+c \quad (۳)$$

حال از دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) و (۳) مقادیر c,b,a را مشخص می‌کنیم:

$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=۰ \\ c=-۶ \\ ۴a-۲b+c=-۶ \end{cases} \xrightarrow{c=-۶} \begin{cases} a+b+(-۶)=۰ \\ ۴a-۲b+(-۶)=-۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۶ \\ ۴a-۲b=۰ \end{cases} \Rightarrow a=۲, b=۴$$
$$f(x)=۲x^۲+۴x-۶ \Rightarrow f(-۱)=۲(-۱)^۲+۴(-۱)-۶=-۸$$

۵ ۱ ۲ ۳ **۴** وتر مشترک دو تابع درجه‌ی دوم، خطی است که محل تلاقی دو منحنی را به هم وصل می‌کند لذا دو منحنی را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y=x^۲-۴x+۵ \\ y=-x^۲+۲x \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^۲-۴x+۵=-x^۲+۲x \Rightarrow ۲x^۲-۶x+۵=۰ \Rightarrow \Delta=۳۶-۴۰<۰$$

معادله‌ی تلاقی ریشه ندارد، پس دو منحنی همدیگر را قطع نمی کنند و وتر مشترک ندارند.

۶ ۱ ۲ ۳ **۴** شرط مثبت بودن یک عبارت درجه‌ی دوم آن است که $a>۰$ و $\Delta<۰$ باشد.

$a>۰ \quad \Rightarrow ۱>۰$ برقرار است

$$\Delta<۰ \quad \Rightarrow \quad b^۲-۴ac<۰ \quad \Rightarrow \quad ۴a^۲-۱۲<۰ \quad \Rightarrow \quad ۴a^۲<۱۲$$
$$\Rightarrow \quad a^۲<۳ \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{۳}<a<\sqrt{۳}$$

۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$y=۲x^۲+mx-x+۱ \Rightarrow y=۲x^۲+(m-۱)x+۱$$

شرط آنکه منحنی تابع درجه‌ی دوم بر محور x ها مماس باشد آن است که $\Delta=۰$ باشد.

$$\Delta=۰ \quad \Rightarrow \quad b^۲-۴ac=۰ \quad \Rightarrow \quad (m-۱)^۲-۸=۰$$
$$\Rightarrow (m-۱)^۲=۸ \quad \Rightarrow m-۱=\pm\sqrt{۸} \quad \Rightarrow \quad m=۱\pm ۲\sqrt{۲}$$

۸ **۱** ۲ ۳ ۴ شرط آن‌که تابع درجه‌ی دوم محور xها را در دو نقطه قطع کند آن است که $\Delta>۰$ باشد.

$$\Delta>۰ \quad \Rightarrow \quad b^۲-۴ac>۰$$
$$\Rightarrow \quad ۱۶-۴(m+۲)(m-۱)>۰ \Rightarrow ۱۶-۴(m^۲-m+۲m-۲)>۰$$
$$\Rightarrow \quad ۱۶-۴m^۲+۴m-۸m+۸>۰ \Rightarrow ۴m^۲+۴m-۲۴<۰ \Rightarrow m^۲+m-۶<۰$$
$$\Rightarrow (m+۳)(m-۲)<۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۳<m<۲$$

۹ ۴ ۳ **۲** ۱

$y=(x-۱)(x^۲-ax+a)=۰ \xrightarrow{y=۰} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$x^۲-ax+a=۰$ دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد باید $\Rightarrow \Delta>۰ \Rightarrow a^۲-۴(۱)(a)>۰ \Rightarrow a^۲-۴a>۰$

$\Longrightarrow a(a-۴)>۰ \Longrightarrow$

a	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
$a^۲-۴a<۰$		+	۰	−	۰	+	

$\Longrightarrow a<۰$ یا $a>۴$

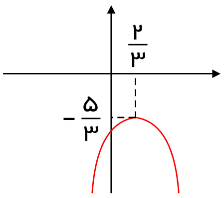
۱۰ ۴ **۳** ۲ ۱ یعنی باید مختصات نقطه‌ی S را بدست آوریم و سپس نقطه را در خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) صدق دهیم.

$$\left.\begin{array}{l} x_S=\dfrac{-b}{۲a}\Rightarrow x_S=\dfrac{۳}{۲m} \\ y_S=\dfrac{۴aa-b^۲}{۴a}\Rightarrow y_S=\dfrac{۴m-۹}{۴m}\end{array}\right\} \xRightarrow{y=x} \dfrac{۴m-۹}{۴m}=\dfrac{۳}{۲m}$$

$\Rightarrow ۸m-۱۸=۱۲ \Rightarrow ۸m=۳۰ \Rightarrow m=\frac{۱۵}{۴}$

۱۱ **۴** ۳ ۲ ۱

چون Δ منفی است $(۱۶-۳۶=-۲۰)$ سهمی محور x را قطع نمی کند و چون ضریب $x^۲$ منفی است دارای Max است پس حتماً از ناحیه‌ی سوم و چهارم می گذرد.



۱۲ ۴ **۳** ۲ ۱ چون تابع بر محور x مماس است پس $\Delta=۰$ است.

$\Delta=۰ \to b^۲-۴ac=۰ \to ۴-۴(m+۱)(m-۱)=۰$

$\to ۴-۴(m^۲-۱)=۰ \to m^۲-۱=۱ \to m^۲=۲ \to \begin{cases} m=\sqrt{۲} \\ m=-\sqrt{۲}\end{cases}$

از طرفی تابع y در بالای محور x ها قرار دارد لذا دارای Min است. به عبارت دیگر ضریب $x^۲$ باید بزرگ‌تر از صفر باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$x^۲$ ضریب $=m+۱>۰ \Rightarrow m>-۱ \xrightarrow{m=\pm\sqrt{۲}} m=\sqrt{۲}$

۱۳ **۴** ۳ ۲ ۱ شرط عبور سهمی از دو ناحیه به صورت زیر خواهد بود:

$\Delta\le ۰\ ,\ a\ne ۰ \qquad y=ax^۲+(a+۲)x+(a+\frac{۳}{۴}) \Rightarrow \Delta=(a+۲)^۲-۴(a+\frac{۳}{۴})a=a^۲+۴a+۴-۴a^۲-۳a$

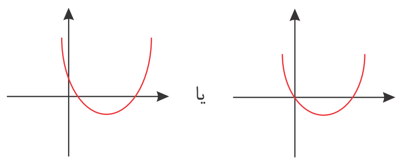
$\Rightarrow \Delta=-۳a^۲+a+۴=-(۳a^۲-a-۴)=-(۳a-۴)(a+۱)\le ۰ \Rightarrow (۳a۴)(a+۱)\ge ۰ \Rightarrow a\le -۱$ یا $a\ge \frac{۴}{۳}$

مجموعهٔ بالا شامل بی‌شمار عدد صحیح است.

۱۴ ۴ ۳ **۲** ۱ دهانهٔ سهمی رو به پایین است بنابراین ضریب $x^۲$ باید منفی باشد (رد گزینه ۳). از طرفی یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد، بنابراین حاصل ضرب ریشه ها $(\frac{c}{a})$ باید منفی باشد (رد گزینه ۱). طول رأس سهمی $(\frac{-b}{۲a})$ مثبت است (رد گزینه ۴) بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۵ **۴** ۳ ۲ ۱ باید تقعر منحنی رو به بالا و ریشه‌های آن نامنفی باشد.

شماتیکی از سهمی مورد نظر می‌کشیم و به کمک آن حدود a را تعیین می‌کنیم:

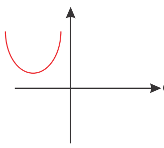


سهمی رو به بالا : $a+۲>۰ \Rightarrow a>-۲$

ضرب ریشه‌ها : $\dfrac{-a+۴}{a+۲}\ge ۰ \Rightarrow -a+۴\ge ۰ \Rightarrow a\le ۴$

جمع ریشه‌ها : $\dfrac{-(۲a-۳)}{a+۲}>۰ \Rightarrow ۲a-۳<۰ \Rightarrow a<\dfrac{۳}{۲}$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۲<a<\frac{۳}{۲}$

توجه کنید که تابع به شکل  از ربع سوم و چهارم نمی‌گذرد ولی چون سؤال توابعی که تنها از ربع سوم نمی‌گذرد را خواسته است، این حالت قابل قبول نیست.

۱۶ ۴ ۳ ۲ **۱** اگر در تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ ، $\frac{c}{a}<۰$ باشد.(یعنی a و c مختلف العلامه باشند)، تابع درجه دوم از ۴ ناحیه می گذرد. بنابراین باید $m+۲<۰$ و در نتیجه $m<-۲$ باشد.

۱۷ ۴ ۳ ۲ **۱** معادله دو ریشهٔ منفی دارد، بنابراین $\Delta>۰$ ، $P>۰$ و $S<۰$ است.

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow (a+۳)^۲ - ۴(-۱)(a) = a^۲ + ۱۰a + ۹ = (a+۱)(a+۹) > ۰ \Rightarrow a > -۱ \ \text{یا} \ a < -۹ \quad (۱) \\ P > ۰ \Rightarrow \dfrac{-۱}{a} > ۰ \Rightarrow a < ۰ \quad (۲) \\ S < ۰ \Rightarrow -\dfrac{a+۳}{a} < ۰ \xrightarrow{a<۰} a + ۳ < ۰ \Rightarrow a < -۳ \quad (۳) \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های: (۱)،(۲)،(۳) به صورت $a < -۹$ است.

۱۸ (۱) **(۲)** (۳) (۴) ابتدا سه نقطه را در تابع صدق داده تا a و b و c به دست آیند.

$$\left.\begin{array}{l} A\left|\begin{array}{l} ۱ \\ ۰ \end{array}\right. \rightarrow ۰ = a + b + c \\ B\left|\begin{array}{l} ۳ \\ ۰ \end{array}\right. \rightarrow ۰ = ۹a + ۳b + c \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} a + b = -۶ \\ ۹a + ۳b = -۶ \end{cases} \rightarrow a = ۲ \ , \ b = -۸$$

$$C\left|\begin{array}{l} ۰ \\ ۶ \end{array}\right. \rightarrow ۶ = c$$

کمترین مقدار تابع درجهٔ دوم همان عرض نقطهٔ S (رأس سهمی) است.

$$y = \frac{-\Delta}{۴a} = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۴۸ - ۶۴}{۸} = \frac{-۱۶}{۸} = -۲$$

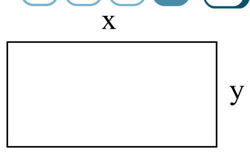
۱۹ **(۱)** (۲) (۳) (۴) شرط آنکه تابع درجهٔ دوم $y = ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت باشد آن است که $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد. بنابراین:

$I): a > ۰ \rightarrow ۱ > ۰$ همواره برقرار است

$$II): \ \Delta < ۰ \rightarrow b^۲ - ۴ac < ۰ \rightarrow (-(m-۱))^۲ - ۱۶ < ۰ \rightarrow (m-۱)^۲ < ۱۶$$

$$\rightarrow -۴ < m - ۱ < ۴ \rightarrow -۳ < m < ۵$$

۲۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**



$$\text{محیط مستطیل} = ۱۸۰ \rightarrow ۲(x+y) = ۱۸۰ \rightarrow x + y = ۹۰ \rightarrow y = ۹۰ - x$$

$$\text{مساحت مستطیل} = xy = x(۹۰ - x) = -x^۲ + ۹۰x \ : \text{تابع درجه‌ی دوم}$$

$$x_{Max} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۹۰}{-۲} = ۴۵$$

۲۱ **(۱)** (۲) (۳) (۴) y همواره مثبت است و می دانیم شرط مثبت بودن یک عبارت درجه‌ی دوم آن است که $\Delta < ۰ \ , \ a > ۰$ باشد.

$$I: a > ۰ \rightarrow m + ۲ > ۰ \rightarrow m > -۲$$

$$II: \ \Delta < ۰ \rightarrow ۱۶ - ۴(m+۲)(m-۱) < ۰ \rightarrow ۱۶ - ۴m^۲ + ۴m - ۸m + ۸ < ۰$$

$$\rightarrow ۴m^۲ + ۴m - ۲۴ > ۰ \rightarrow m^۲ + m - ۶ > ۰ \rightarrow (m+۳)(m-۲) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -۳, m > ۲$$

از اشتراک $I \ , \ II$ به جواب $m > ۲$ می رسیم.

۲۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴) برای این که عبارت درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد، باید:

$$\begin{cases} \Delta < ۰ & \Rightarrow ۲^۲ - ۴(a)(a) < ۰ \Rightarrow ۴a^۲ > ۴ \Rightarrow a^۲ > ۱ \Rightarrow a < -۱ \ \text{یا} \ a > ۱ (*) \\ \text{ضریب } x^۲ & > ۰ \Rightarrow a > ۰ \quad (**) \end{cases}$$

از اشتراک : $(*)$, $(**)$ داریم: $a \in (۱, +\infty)$

۲۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴) می‌دانیم که بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم ($a < ۰$) برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

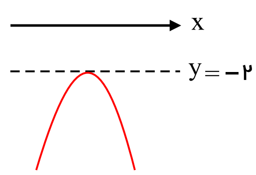
$$y_s = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = ۹ \rightarrow \frac{۲۰a - ۱۶}{۴a} = ۹ \rightarrow ۳۶a = ۲۰a - ۱۶ \rightarrow ۱۶a = -۱۶ \rightarrow a = -۱$$

پس خط به معادله‌ی $x = \dfrac{-b}{۲a} = \dfrac{-(۴)}{۲(-۱)} = ۲$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

۲۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴) باید معادله‌ی $۲x^۲ + ax + a - \dfrac{۳}{۲} = ۰$، دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد تا نمودار تابع $y = ۲x^۲ + ax + a - \dfrac{۳}{۲}$، محور xها را در طرفین محور yها قطع کند. برای آن که معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای دو ریشه‌ی غیرصفر با علامت‌های متفاوت باشد، لازم و کافی است که $\dfrac{c}{a} < ۰$ ، پس:

$$\frac{a - \frac{۳}{۲}}{۲} < ۰ \Rightarrow a - \frac{۳}{۲} < ۰ \Rightarrow a < \frac{۳}{۲}$$

۲۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴) با توجه به شکل زیر بالاترین نقطه‌ی سهمی یا همان عرض ماکسیمم تابع برابر -۲ است. در نتیجه:



$$\frac{۴ac - b^۲}{۴a} = -۲ \rightarrow \frac{۴(k)(k-۱) - ۸}{۴k} = -۲ \rightarrow ۴k^۲ - ۴k - ۸ = -۸k \Rightarrow ۴k^۲ + ۴k - ۸ = ۰$$

$$\rightarrow k^۲ + k - ۲ = ۰ \Rightarrow (k+۲)(k-۱) = ۰ \Rightarrow k = ۱ \ , \ k = -۲$$

اما چون تابع ماکسیمم دارد، باید ضریب $x^۲$ منفی باشد، یعنی: $k < ۰$. پس تنها $k = -۲$ قابل قبول است.

۲۶ **(۱)** (۲) (۳) (۴) کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیهٔ اول $(y = x)$ تلاقی دهیم و معادلهٔ تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

معادلهٔ تلاقی : $\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow \boxed{2x^2 + mx + m + 6 = 0}$

شرط ریشهٔ مضاعف : $\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(2)(m+6) = m^2 - 8m - 48 = 0$

$\Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m، طول نقطهٔ تماس مثبت است (در ناحیهٔ اول x مثبت است).

$m = 12 \ : \ 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3$ غ ق ق

$m = -4 \ : \ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ ق ق

۲۷ ۴ ۳ **۲** ۱ طول رأس سهمی برابر $-2 = x_s$ است و چون تابع درجهٔ دوم از مبدأ مختصات گذشته، پس یکی از نقاط برخورد تابع با محور xها $x_1 = 0$ است، بنابراین محل دیگر برخورد تابع با محور xها $x_2 = -4$ است $\left(x_S = \dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow[x_2 = -4]{x_1 = 0} f(x) = a(x - 0)(x + 4) \rightarrow f(x) = ax(x+4)$$

چون نقطهٔ $\left|\begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix}\right.$ روی سهمی قرار دارد، پس مختصاتش در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 4 = -2a(-2+4) \rightarrow 4 = -4a \rightarrow a = -1$$

۲۸ ۴ ۳ ۲ **۱** بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم همان عرض رأس سهمی است.

$$y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \Rightarrow 4ac - b^2 = 0 \Rightarrow 4(k+3)(k) - 16 = 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

تابع درجهٔ دوم وقتی دارای Max است که ضریب x^2 منفی باشد، پس فقط $k = -4$ قابل قبول است.

۲۹ ۴ ۳ ۲ **۱** کافی است، مختصات نقطهٔ S را از رابطهٔ $\left|\begin{matrix} \frac{-b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} \end{matrix}\right.$ بدست آورده و در خط داده شده صدق دهیم.

$$\left|\begin{matrix} \frac{-b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} \end{matrix}\right. \rightarrow \left|\begin{matrix} \frac{-6}{2} \\ \frac{4a-36}{4} \end{matrix}\right. \rightarrow \left|\begin{matrix} -3 \\ a-9 \end{matrix}\right. \xrightarrow[\text{صدق}]{y=2x+1} a - 9 = -6 + 1 \rightarrow a = 4$$

۳۰ ۴ ۳ **۲** ۱ چون شکل دارای Max است ضریب x^2 باید منفی باشد بنابراین گزینه‌ی سوم حذف می‌شود. تابع درجه دوم محور xها را در دو نقطه به طول‌های مثبت و منفی قطع کرده است بنابراین حاصلضرب ۲ ریشه یعنی $\frac{c}{a}$ باید منفی باشد. بنابراین گزینه‌ی اول حذف می‌شود و چون قدرمطلق ریشه‌ی مثبت از قدرمطلق ریشه‌ی منفی بزرگتر است جمع ۲ ریشه باید مثبت باشد یعنی $-\frac{b}{a}$ باید مثبت باشد بنابراین گزینه‌ی چهارم حذف می‌شود.

۳۱ ۴ ۳ **۲** ۱ چون تابع درجه‌ی دوم محور طول‌ها را در $x = 3$ و $x = -2$ قطع کرده است می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y = a(x+2)(x-3)$ نشان داد و چون این تابع از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix} 0 \\ -5 \end{matrix}\right.$ می‌گذرد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix} 0 \\ -5 \end{matrix}\right. \rightarrow -5 = a(2)(-3) \Rightarrow -5 = -6a \Rightarrow a = \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{5}{6}(x+2)(x-3) = \frac{5}{6}(x^2 - x - 6) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{6}x - 5$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{6} \ , \ b = -\frac{5}{6} \ , \ c = -5 \rightarrow a + b + c = -5$$

۳۲ **۴** ۳ ۲ ۱ نقطه‌ی $\left|\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right.$ روی تابع قرار دارد پس مختصات آن در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = a - b + c \Rightarrow 1 = -3 + c \Rightarrow c = 4$$

طول رأس سهمی $= 1 \rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow 2a + b = 0 \xrightarrow{a-b=-3} a = -1 \ , \ b = 2$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4 \Rightarrow f(1) = -1 + 2 + 4 = 5$$

۳۳ ۴ ۳ ۲ **۱**

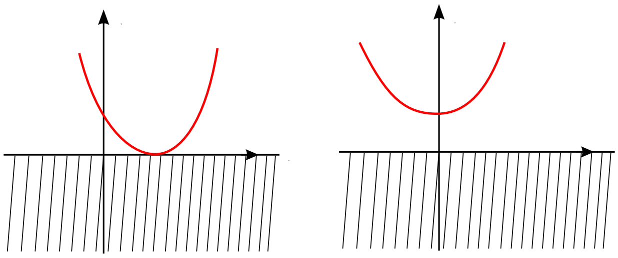
$$x'x'' = 2(x' + x'') \rightarrow \frac{c}{a} = 2\left(-\frac{b}{a}\right) \rightarrow c = -2b \rightarrow k + 4 = -2k - 2$$

$$\rightarrow 3k = -6 \rightarrow k = -2 \rightarrow f(x) = -2x^2 - 4x + 1$$

چون ضریب درجه‌ی دوم، منفی است تابع دارای Max است و Max تابع همان عرض نقطه‌ی S است.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(1) - 16}{4(-2)} = \frac{-24}{-8} = 3$$

۳۴ ۴ ۳ ۲ **۱** سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر است.



برای اینکه یک سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب x^2 مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta \leq 0$ باشد.

$$Min \Rightarrow x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow a-1>0 \to a>1 \qquad (I)$$

$$\Delta \leq 0 \to \Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4(a-1)(a+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 12 - 4a^2 + 4 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 \geq 16 \Rightarrow a^2 \geq 4$$

$$\Rightarrow a \leq -2 \text{ یا } a \geq 2 \qquad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $a \geq 2$ می‌رسیم.

۳۵ ۴ ۳ **۲** ۱

عرض رأس سهمی در نمودار $y = ax^2 + bx + c$ برابر: $\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$ است.

$$y = (k+3)x^2 - 4x + k \Rightarrow \text{عرض رأس سهمی} = \frac{4(k+3)k - (-4)^2}{4(k+3)} = \frac{4k^2 + 12k - 16}{4(k+3)}$$

نقطه رأس سهمی روی محور xها است، یعنی عرض رأس سهمی صفر است. بنابراین:

$$\frac{4k^2 + 12k - 16}{4(k+3)} = 0 \Rightarrow 4k^2 + 12k - 16 = 0 \xrightarrow{\div 4} k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (k-1)(k+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k-1=0 \Rightarrow k=1 \\ k+4=0 \Rightarrow k=-4 \end{cases}$$

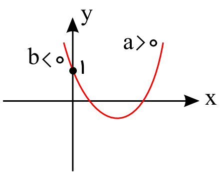
۳۶ ۴ **۳** ۲ ۱ در سهمی $y = ax^2 + bx + c$، علامت a جهت دهانهٔ سهمی، مقدار c عرض از مبدأ سهمی و علامت b، علامت شیب نمدار در عرض از مبدأ را مشخص می‌کند.

در این سؤال $a > 0$، $b < 0$ و $c = 1$ است.

همچنین $\Delta > 0$ است و نمودار محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 8 = 56$$

پس نمودار سهمی به صورت زیر است:



پس سهمی از ربع سوم نمی‌گذرد.

۳۷ ۴ ۳ **۲** ۱ اگر در این مثلث طول قاعده را a و ارتفاع وارد بر آن را h بنامیم، در این صورت $a + h = 16$ است.

$$S = \frac{1}{2}ah \xrightarrow{h=16-a} S(a) = \frac{1}{2}a(16-a) = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$$

تابع $S = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$ یک تابع درجهٔ دوم برحسب a است که چون ضریب a^2 منفی است، پس تابع ماکزیمم دارد. عرض رأس این سهمی که بیشترین مقدار آن نیز هست برابر با $-\frac{\Delta}{4a'}$ است.

$$S_{Max} = \frac{-\Delta}{4a'} = \frac{4a'c' - b^2}{4a'} = \frac{4(-\frac{1}{2})(0) - 64}{4(\frac{-1}{2})} = \frac{-64}{-2} = 32$$

۳۸ ۴ ۳ **۲** ۱ شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد (بالای محور xها باشد) آن است که $a > 0$ (ضریب x^2) و $\Delta < 0$ باشد.

$$a > 0 \to 1 - a > 0 \to a < 1 \ : \ I$$

$$\Delta < 0 \to b^2 - 4ac < 0 \to 24 - 4(1-a)(-a) < 0 \to 24 + 4a - 4a^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\div(-4)} a^2 - a - 6 > 0 \to (a-3)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 3 \ : \ II$$

از اشتراک I و II به جواب $a<-2$ می‌رسیم.

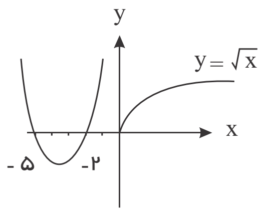
۳۹) ۱ **۲** ۳ ۴ طول نقاط سهمی با محور xها همان ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+(2-m)x+m=0$ هستند.

مجموع طول نقاط تلاقی = مجموع ریشه‌ها $=-\frac{b}{a}=-\frac{2-m}{2}=\frac{m-2}{2}=m \to 2m=m-2 \to m=-2$

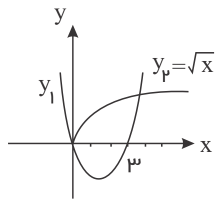
حاصل‌ضرب ریشه‌ها $=\frac{c}{a}=\frac{m}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

۴۰) ۱ **۲** ۳ ۴

با رسم دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=(x+2)(x+5)$ معلوم است که این دو تابع نقطهٔ برخوردی ندارند.



حال اگر ۵ واحد منحنی درجه دوم را به راست منتقل کنیم تلاقی این دو منحنی یک نقطه به طول مثبت و نقطهٔ دیگر مبدأ خواهد بود
پس باید بیش از ۵ واحد به سمت راست منتقل شود.



۴۱) ۱ **۲** ۳ ۴ چون خط افقی $y=2$ در پایین‌ترین نقطه‌ی تابع درجه‌ی دوم بر آن مماس شده است بنابراین عرض رأس سهمی، برابر ۲ است.

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=2\to\frac{4a(a+2)-9}{4a}=2\to\frac{4a^2+8a-9}{4a}=2\to 4a^2+8a-9=8a$$

$$\to 4a^2=9\to a^2=\frac{9}{4}\to\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ a=-\frac{3}{2} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

توجه کنید چون تابع دارای Min است ضریب x^2 یعنی a باید مثبت باشد.

۴۲) **۱** ۲ ۳ ۴ شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم، محور طول را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع کند آن است که $\Delta>0$ و $\frac{c}{a}>0$ و $\frac{-b}{a}<0$ باشد.

$$\Delta>0\xrightarrow{b^2-4ac>0}4m^2-4(m+2)>0\to m^2-m-2>0\to(m-2)(m+1)>0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-1 \ \text{یا}\ m>2 \quad (I)$$

$$\frac{c}{a}>0\to m+2>0\to m>-2 \quad (II)$$

$$-\frac{b}{a}<0\to 2m<0\to m<0 \quad (III)$$

از اشتراک I و II و III به جواب $-2<m<-1$ می‌رسیم.

۴۳) **۱** ۲ ۳ ۴ رأس سهمی که کمترین عرض را دارد باید در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات واقع باشد و می‌دانیم نقطه‌ای که در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات است دارای طول و عرض مثبت است.

$$x_S>0\to\frac{-b}{2a}>0\to\frac{m+1}{2}>0\to m+1>0\to m>-1 \ (I)$$

$$y_S>0\to\frac{4ac-b^2}{4a}>0\to\frac{4-(m+1)^2}{4}>0\to 4-(m+1)^2>0\to(m+1)^2<4$$

$$\to -2<m+1<2\to -3<m<1 \ (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $-1<m<1$ می‌رسیم.

۴۴) ۱ ۲ ۳ **۴** چون نمودار دارای مینیمم است پس $a>0$

چون ضرب صفرهای تابع درجه دوم منفی است پس $P=\frac{c}{a}<0$ و در نتیجه $c<0$ از طرفی جمع ریشه‌ها مثبت است پس $-\frac{b}{a}>0$ و در نتیجه $-b>0$ لذا $b<0$ پس:

$$a>0\ ,\ c<0\ ,\ b<0\Rightarrow abc>0$$

گزینه ۴ صحیح است.

۴۵) ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به $\underbrace{\text{رأس سهمی}}_{(-1,1)}$ خواهیم داشت:

بنابراین: $f(x)=\frac{a}{2}(x+1)^2+1$

$$b=1\ ,\ \frac{c}{3}=1\Rightarrow c=3$$

با توجه به اینکه $f(x)$ از نقطهٔ $(-۱\ ,\ ۰)$ عبور می‌کند خواهیم داشت:

$$-۱ = \frac{a}{۲}(۰+۱)^۲ + ۱ \Rightarrow \frac{a}{۲} = -۲ \Rightarrow a = -۴$$

$$\Rightarrow a + bc = -۴ + ۱ \times ۳ = -۴ + ۳ = -۱$$

۴۶ ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به برد داده‌شده متوجه می‌شویم که بیش‌ترین مقدار تابع (y_S) برابر یک می‌باشد و ضریب $x^۲$ حتماً باید منفی باشد.

$$\frac{۴ac - b^۲}{۴a} = ۱ \to \frac{۸a^۲ - ۴}{۴a} = ۱ \to ۸a^۲ - ۴a - ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} a = ۱ & \text{غ‌ق‌ق} \\ a = \frac{c}{a} = -\frac{۴}{۸} = -\frac{۱}{۲} & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

پس: $f(x) = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۲x - ۱ \to f(۰) = -۱$

۴۷ ۱ **۲** ۳ ۴ با یک تابع درجهٔ دوم با ضریب $x^۲$ مثبت $(a = ۱ > ۰)$ مواجه‌ایم که کم‌ترین مقدار آن از رابطهٔ $\frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ به‌دست می‌آید.

$$\frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۲۲ - ۹}{۴} = \frac{۱۳}{۴} \to y \geq \frac{۱۳}{۴}$$

برد تابع سه عدد طبیعی ۱، ۲ و ۳ را نمی‌توان قبول کند.

۴۸ **۱** ۲ ۳ ۴ به بررسی گزینهٔ «۴» می‌پردازیم.

گزینهٔ اول:
$$\begin{cases} \text{درست} \leftarrow \text{ضریب } x^۲ \text{ منفی است شکل دارای } Max \text{ است.} \\ x = ۰ \to y = -۱ + ۳ = ۲ \to \text{درست} \\ y = ۰ \to (x+۱)^۲ = ۳ \to x + ۱ = \pm\sqrt{۳} \to \begin{cases} x = -۱ + \sqrt{۳} \sim ۰/۷ \\ x = -۱ - \sqrt{۳} \sim -۲/۷ \end{cases} \to \text{نادرست} \end{cases}$$

گزینهٔ دوم:
$$\begin{cases} \text{درست} \leftarrow \text{ضریب } x^۲ \text{ مثبت است شکل دارای } Min \text{ است.} \\ x = ۰ \to y = ۲۳ \to \text{درست} \\ y = ۰ \to (x-۵)^۲ = ۲ \to x - ۵ = \pm\sqrt{۲} \to \begin{cases} x = ۵ + \sqrt{۲} \sim ۶/۴ \\ x = ۵ - \sqrt{۲} \sim ۳/۶ \end{cases} \to \text{درست} \end{cases}$$

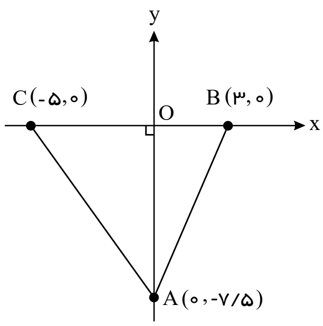
گزینهٔ سوم:
$$\begin{cases} \text{درست} \leftarrow \text{ضریب } x^۲ \text{ مثبت است شکل دارای } Min \text{ است.} \\ x = ۰ \to y = ۱۰ \to \text{درست} \\ y = ۰ \to (x-۳)^۲ = -۱ \to \text{محور طول را قطع نمی‌کند.} \to \text{درست} \end{cases}$$

گزینهٔ چهارم:
$$\begin{cases} \text{درست} \leftarrow \text{ضریب } x^۲ \text{ منفی است شکل دارای } Max \text{ است.} \\ x = ۰ \to y = ۰ \to \text{درست} \\ y = ۰ \to (x-۱)^۲ = ۱ \to x - ۱ = \pm۱ \to \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۰ \end{cases} \to \text{درست} \end{cases}$$

۴۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(x) = ۰/۵x^۲ + x - ۷/۵ \to \begin{cases} x = ۰ \to y = -۷/۵ \\ y = ۰ \to ۰/۵x^۲ + x - ۷/۵ \to x^۲ + ۲x - ۱۵ = ۰ \to (x-۳)(x+۵) = ۰ \to x = ۳\ ,\ x = -۵ \end{cases}$$

مطابق شکل، مساحت مثلث برابر است با:



$$\to S = \frac{BC \times AO}{۲} = \frac{۸ \times ۷/۵}{۲} \to S = ۳۰$$

۵۰ **۱** ۲ ۳ ۴ چون تابع درجهٔ دوم بر محور xها مماس است پس $\Delta = ۰$ است.

$$\Delta = ۰ \longrightarrow b^۲ - ۴ac = ۰ \longrightarrow b^۲ - ۴۸ = ۰ \longrightarrow b^۲ = ۴۸ \longrightarrow b = \pm\sqrt{۴۸} = \pm ۴\sqrt{۳}$$

چون بر قسمت منفی محور xها مماس است باید $\frac{-b}{۲a} < ۰$ باشد و چون $a > ۰$ است بنابراین b نیز باید مثبت باشد پس $b = ۴\sqrt{۳}$ قابل قبول است.

معادلهٔ محور تقارن: $x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴\sqrt{۳}}{۴} \longrightarrow x = -\sqrt{۳}$

۵۱) ۱ برای آن‌که دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد باید ضریب $x^۲$ مثبت باشد و برای این‌که محور xها را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند باید $\Delta > ۰$ باشد.

$$x^۲ \text{ ضریب } > ۰ \longrightarrow m + ۱ > ۰ \longrightarrow m > -۱ \quad (I)$$

$$\Delta > ۰ \longrightarrow b^۲ - ۴ac > ۰ \longrightarrow ۱۶ - ۴(m+۱)(m-۲) > ۰ \longrightarrow ۴ - (m+۱)(m-۲) > ۰$$

$$\longrightarrow ۴ - m^۲ + ۲m - m + ۲ > ۰ \longrightarrow m^۲ - m - ۶ < ۰ \longrightarrow (m-۳)(m+۲) < ۰$$

$$\longrightarrow -۲ < m < ۳ \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $-۱ < m < ۳$ می‌رسیم.

۵۲) ۱ چون سهمی، محور طول‌ها را در $x = -۲$ و $x = ۶$ قطع می‌کند پس معادلهٔ سهمی را می‌توان به‌صورت $y = a(x+۲)(x-۶)$ نشان داد و چون تابع از نقطهٔ $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۳ \end{vmatrix}$ می‌گذرد این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\begin{vmatrix} ۰ \\ ۳ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} ۳ = a(۲)(-۶) \longrightarrow ۳ = -۱۲a \longrightarrow a = -\frac{۱}{۴} \longrightarrow y = \frac{-۱}{۴}(x+۲)(x-۶)$$

طول رأس سهمی وسط دو ریشه است پس:

$$x_S = \frac{-۲+۶}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \xrightarrow{\text{تابع}} y_S = \frac{-۱}{۴}(۴)(-۴) = ۴$$

۵۳) ۱ چون تابع درجهٔ ۲ محور xها را در $x = ۵$ و $x = -۱$ قطع می‌کند، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x) = a(x+۱)(x-۵)$ نوشته می‌شود. ضمناً طول رأس سهمی وسط دو ریشه است، پس داریم:

$$x_S = \frac{۵ + (-۱)}{۲} \rightarrow x_S = ۲ \quad , \quad S\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱۸ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۸ = a(۳)(-۳) \rightarrow a = -۲$$

$$f(x) = a(x+۱)(x-۵) \xlongequal{a=-۲} -۲(x+۱)(x-۵) = -۲(x^۲ - ۴x - ۵)$$

$$\rightarrow f(x) = -۲x^۲ + ۸x + ۱۰ \rightarrow a = -۲ \, , \, b = ۸ \, , \, c = ۱۰$$

پس: $A = -۳a + \frac{b}{۲} - c = -۳(-۲) + \frac{۸}{۲} - ۱۰ \rightarrow A = ۰$

۵۴) ۱ طول رأس سهمی برابر $\frac{۵}{۲}$ است زیرا باید وسط $x = ۰$ و $x = ۵$ (دو نقطهٔ هم‌عرض) باشد.

$$x_S = \frac{-b}{۲a} \rightarrow \frac{۵}{۲} = \frac{-a}{۲} \rightarrow a = -۵$$

$$f(۰) = ۴ \rightarrow -b = ۴ \rightarrow b = -۴$$

بنابراین $f(x) = x^۲ - ۵x + ۴$ است.

ضرب ریشه‌ها $= \frac{c}{a} = ۴$ و جمع ریشه‌ها $= -\frac{b}{a} = ۵$

پس جمع ریشه‌ها یک واحد بیشتر از ضرب ریشه‌ها است.

۵۵) ۲

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور xها باشد، آن است که $a < ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد:

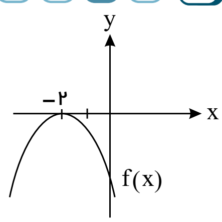
$$a < ۰ \Rightarrow ۱ - m < ۰ \Rightarrow m > ۱ \quad (I)$$

$$\Delta < ۰ \xrightarrow{b^۲ - ۴ac < ۰} ۴(m-۳)^۲ - ۴(۱-m)(-۱) < ۰ \xrightarrow{\div ۴} (m-۳)^۲ + (۱-m) < ۰$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۶m + ۹ + ۱ - m < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۷m + ۱۰ < ۰ \Rightarrow (m-۲)(m-۵) < ۰ \Rightarrow ۲ < m < ۵ \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $۲ < m < ۵$ می‌رسیم.

۵۶ (۴) **(۳)** (۲) (۱)



تابع اولیه: $f(x)=a(x+2)^2$, **عرض از مبدأ** $=f(0)=4a$ (I)

$f(x)=a(x+2)^2 \xrightarrow{\text{سه واحد به راست}} y=a(x-3+2)^2=a(x-1)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} y=a(x-1)^2-1$

تابع جدید : $F(x)=a(x-1)^2-1$

عرض از مبدأ $=F(0)=a(0-1)^2-1=a-1$ (II)

$\Rightarrow 4a=a-1\Rightarrow 3a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ تابع اولیه : $f(x)=-\frac{1}{3}(x+2)^2\Rightarrow f(4)=-\frac{1}{3}(4+2)^2=-\frac{1}{3}\times 36=-12$

۵۷ (۴) (۳) (۲) **(۱)** **باتوجه به اینکه** $f(x)=ax^2+bx+c$ است، داریم:

$f(0)=-2\to c=-2$

$f(2)=2\to 4a+2b+c=2\to 4a+2b=4$

$x_S=-\frac{b}{2a}\to 2=-\frac{b}{2a}\to 4a=-b\xrightarrow{4a+2b=4}-b+2b=4\to b=4\ ,\ a=-1$

پس $f(x)=-x^2+4x-2$ است و درضمن α و β ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند و می‌دانیم $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=4$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=2$ است.

$\alpha\beta^3+2\alpha^2=\alpha\beta(\beta^2)+2\alpha^2=2\beta^2+2\alpha^2=2(\alpha^2+\beta^2)=2((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)=2(16-4)=24$

۵۸ (۴) (۳) **(۲)** (۱) **تابع درجهٔ دوم به‌صورت** $f(x)=ax^2+bx+c$ است.

$f(0)=-2\to c=-2$

باتوجه به سهمی رسم‌شده، طول رأس سهمی وسط $x=0$ و $x=-2$ **است یعنی طول رأس سهمی** $x_S=-1$ است.

$x_S=-\frac{b}{2a}\to -1=-\frac{b}{2a}\to 2a=b$

$y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}\to -4=\frac{-8a-b^2}{4a}\to -4=\frac{-8a-4a^2}{4a}\to -16a=-8a-4a^2\to 4a^2-8a=0\to 4a(a-2)=0\to \begin{cases} a=0 & \text{غ ق ق} \\ a=2\xrightarrow{2a=b} b=4 \end{cases}$

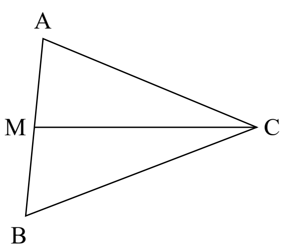
پس: $f(x)=2x^2+4x-2\to$ **حاصل‌ضرب ریشه‌ها** $=\frac{c}{a}=-\frac{2}{2}=-1$

۵۹ (۴) (۳) **(۲)** (۱) **می‌دانیم مختصات رأس سهمی از رابطهٔ** $S\left|\begin{matrix}-\frac{b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{matrix}\right.$ به‌دست می‌آید، پس:

$A\left|\begin{matrix}-\frac{b}{2a}\\ \frac{4ac-b^2}{4a}\end{matrix}\right.\to A\left|\begin{matrix}2\\ 1\end{matrix}\right.$

نقاط برخورد تابع با محور x**:** $y=0\to x^2-4x+3=0\to (x-1)(x-3)=0\to \begin{cases} B\left|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right. \\ C\left|\begin{matrix}3\\ 0\end{matrix}\right. \end{cases}$

مثلث ABC **را درنظر گرفته، اکنون می‌خواهیم طول میانهٔ** CM **را به‌دست آوریم.**



$\to$ M وسط AB $\left|\begin{matrix}\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}\\ \frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$

پس: $CM=\sqrt{(x_C-x_M)^2+(y_C-y_M)^2}=\sqrt{(3-\frac{3}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

۶۰ (۴) **(۳)** (۲) (۱) **تابع درجهٔ دوم به‌صورت** $f(x)=ax^2+bx+c$ است.

$\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = 0 + 0 + c \to c = -2$

$x_S = 1 \to -\frac{b}{2a} = 1 \to 2a = -b$

$y_S = -1 \to \frac{4ac - b^2}{4a} = -1 \to \frac{-8a - b^2}{4a} = -1 \xrightarrow{2a=-b} \frac{-8a - 4a^2}{4a} = -1 \to -8a - 4a^2 = -4a \to 4a^2 + 4a = 0 \to 4a(a+1) = 0$

$\to \begin{cases} a = -1 \to b = 2 \\ a = 0 \ \text{غ ق ق} \end{cases} \to f(x) = -x^2 + 2x - 2$

۶۱) **۱** ۲ ۳ ۴ دو نقطه $\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 6 \\ -2 \end{vmatrix}$ عرض یکسانی دارند و معادلهٔ محور تقارن سهمی، میانگین طول این دو نقطه می‌شود پس $x_S = 3$ است. یعنی $\frac{a_4 + a_8}{2} = 3$ است.

طبق قاعدهٔ اندیس ها در دنبالهٔ حسابی هرگاه $m + n = p + q$ باشد، آن‌گاه $a_m + a_n = a_p + a_q$ است.

$\frac{a_4 + a_8}{2} = 3 \to a_4 + a_8 = 6 \xrightarrow{4+8=2+10} a_2 + a_{10} = 6$

۶۲) ۱ **۲** ۳ ۴ در شکل (الف)، $a > 0$ و حاصل‌جمع دو ریشه منفی و حاصل‌ضرب آن‌ها صفر است، چون یکی از ریشه‌ها صفر می‌باشد. بنابراین:

$P = \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow abc = 0$

و در شکل (ب) دو ریشه قرینهٔ هم می‌باشند، بنابراین $S = 0$ است.

بنابراین:

$S = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow abc = 0$

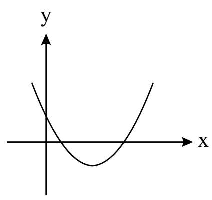
ولی در شکل (ج)، $a > 0$ و $S < 0$ و $P < 0$است:

$S = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} b > 0$

$P = \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} c < 0$

بنابراین $abc < 0$ است.

۶۳) ۱ ۲ ۳ **۴** نمودار فرضی تابع به شکل



است (شکل می‌تواند از مبدأ هم بگذرد).

$Min \to x^2 \ \text{ضریب} > 0 \to m - 1 > 0 \to m > 1$

$\text{جمع ریشه‌ها} > 0 \to -\frac{b}{a} > 0 \to \frac{-m}{\underbrace{m-1}_{+}} > 0 \to -m > 0 \to m < 0$

$\text{ضرب ریشه‌ها} \geq 0 \to \frac{c}{a} \geq 0 \to \frac{1}{\underbrace{m-1}_{+}} \geq 0 \to$ برقرار است.

نیازی به بررسی $\Delta > 0$ نمی‌باشد زیرا اشتراک جواب‌های بدست آمده، تهی است.

۶۴) ۱ ۲ ۳ **۴** مختصات رأس سهمی از رابطهٔ $S \begin{vmatrix} -\frac{b}{2a} \\ \frac{4ac-b^2}{4a} \end{vmatrix}$ بدست می‌آید.

$S \begin{vmatrix} \frac{1}{2m} \\ \frac{4m-1}{4m} \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{و عرض مثبت است}]{\text{در ناحیهٔ دوم، طول منفی}} \begin{cases} \frac{1}{2m} < 0 \to 2m < 0 \to m < 0 \quad (I) \\ \frac{4m-1}{4m} > 0 \to \begin{array}{c|ccccc} m & -\infty & 0 & & \frac{1}{4} & +\infty \\ \hline & + & \text{ن} & - & 0 & + \end{array} \to m < 0 \ \text{یا} \ m > \frac{1}{4} \quad (II) \end{cases}$

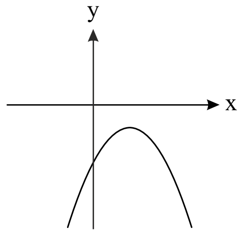
از طرفی چون سهمی دارای ماکسیمم است ضریب x^2 باید منفی باشد یعنی $m < 0$ است (III) اشتراک سه جواب بدست آمده، $m < 0$ است.

۶۵) ۱ ۲ **۳** ۴ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ است:

$-\frac{k^2}{2k} = 1 \Rightarrow k = -2$

پس سهمی موردنظر دارای ضابطهٔ $y = -8x^2 + 4x - 2$ است.

این سهمی دهانه‌اش رو به پایین ($a<۰$) و طول رأس آن مثبت ($-\frac{b}{۲a}>۰$) و عرض از مبدأ آن منفی ($c<۰$) و بدون ریشه ($\Delta<۰$) است که در شرایط سهمی زیر صدق می‌کند:



۶۶ ۴ ۳ **۲** ۱ اگر x را سن برادر کوچک‌تر بعد از یکسال در نظر بگیریم، داریم:

$$x(x+۸)=۱۰۵ \Rightarrow x^۲+۸x-۱۰۵=۰ \Rightarrow (x+۱۵)(x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۷ \\ x=-۱۵ \ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

سن برادر بزرگ تر بعد از یکسال : $x+۸=۱۵ \Rightarrow$ سن امسال او $=۱۵-۱=۱۴$

۶۷ ۴ **۳** ۲ ۱ باید نقطهٔ رأس سهمی موردنظر و صفرهای آن را تعیین کنیم:

طول نقطهٔ رأس : $-\frac{b}{۲a}=\frac{\frac{۹}{۸}}{\frac{۳}{۸}}=۳ \Rightarrow y(۳)=\frac{-۲۷}{۱۶}+\frac{۲۷}{۸}+\frac{۲۱}{۱۶}=\frac{۴۸}{۱۶}=۳$

پس مختصات نقطهٔ اوج وزنه، $(۳,۳)$ است.

$$-\frac{۳}{۱۶}x^۲+\frac{۹}{۸}x+\frac{۲۱}{۱۶}=۰ \xrightarrow{\times ۱۶} -۳x^۲+۱۸x+۲۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ & \times \\ x=۷ & \checkmark \end{cases}$$

پس محل برخورد وزنه با زمین نقطهٔ $(۷,۰)$ است. حال فاصلهٔ این دو نقطه برابر است با:

$$d=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۶۸ ۴ ۳ **۲** ۱ یعنی $f(x)\geq ۰$ باشد و شرط آنکه عبارت درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ بزرگتر مساوی صفر باشد آن است که $a>۰$ و $\Delta\leq ۰$ باشد.

$$I)a>۰ \to \frac{۱}{۴}m>۰ \to m>۰$$

$$II)\Delta\leq ۰ \to b^۲-۴ac\leq ۰ \to (m+۱)^۲-m(۳+\frac{۷}{m})\leq ۰ \to m^۲+۱+۲m-۳m-۷\leq ۰ \to m^۲-m-۶\leq ۰ \to (m-۳)(m+۲)\leq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲\leq m\leq ۳$$

از اشتراک I و II به جواب $۰<m\leq ۳$ می‌رسیم.

۶۹ ۴ ۳ ۲ **۱** کافی است که مختصات سه نقطهٔ داده شده را در تابع صدق دهیم.

$$A\left|\begin{matrix}۰\\۵\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۵=۰+۰+c\to c=۵$$

$$\left.\begin{matrix} B\left|\begin{matrix}-۲\\۵\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۵=۴a-۲b+۵\to ۴a-۲b=۰ \\ C\left|\begin{matrix}۱\\۱۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱۱=a+b+۵\to a+b=۶ \end{matrix}\right\} \to a=۲\ ,\ b=۴$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=۲x^۲+۴x+۵$ است که نقطهٔ $\left|\begin{matrix}-۱\\۳\end{matrix}\right.$ روی این تابع قرار دارد.

۷۰ ۴ ۳ **۲** ۱

در تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ رأس سهمی از رابطهٔ $x_S=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید و این طول را در تابع قرار می‌دهیم عرض آن به دست می‌آید.

$$-\frac{b}{۲a}=-۱\to ۲a=b$$

$$f(-۱)=۹\to a-b+c=۹\xrightarrow{b=۲a} -a+c=۹$$

$$\left|\begin{matrix}۳\\۱\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱=۹a+۳b+c\xrightarrow{b=۲a} ۱۵a+c=۱\to \begin{cases}-a+c=۹\\ ۱۵a+c=۱\end{cases} \to ۱۶a=-۸\to a=-\frac{۱}{۲}\ ,b=-۱,c=\frac{۱۷}{۲}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲-x+\frac{۱۷}{۲}$ است که نقطهٔ $\left|\begin{matrix}۵\\-۹\end{matrix}\right.$ روی این تابع قرار دارد.

۷۱ ۴ ۳ **۲** ۱ معادلهٔ خط: $y=x-۱$ است که این خط بر نمودار سهمی مماس است. یعنی معادلهٔ ثلاثی آن‌ها ریشهٔ مضاعف دارد.

$$۴x^۲-۳x=x-۱\Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱=۰\Rightarrow (۲x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

۷۲ ۴ **۳** ۲ ۱ مثلث قائم‌الزاویه موردنظر، متساوی‌الساقین نیز می‌باشد، پس ارتفاع وارد بر وتر، نصف طول وتر است. حال در این سهمی داریم:

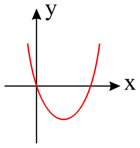
$$|\frac{\Delta}{4a}| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \Rightarrow \Delta = 2\sqrt{\Delta} \Rightarrow \Delta = 4$$

(۷۳) **۱** ۲ ۳ ۴

$$y = a(x+3)(x-1) \xrightarrow{x=0} -3a = 6 \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2(x+3)(x-1) \rightarrow S(-1, 8) \Rightarrow -1 \times 8 = -8$$

(۷۴) **۱** ۲ ۳ ۴ سهمی قطعاً از مبدأ مختصات می‌گذرند، پس برای اینکه از ربع سوم عبور نکند باید به‌صورت زیر باشد.



$$\begin{cases} S \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a-2}{a} \geq 0 \xrightarrow{a>0} a \geq 2$$

(۷۵) ۱ ۲ **۳** ۴ در سهمی داده‌شده، طول رأس $x = 2$ است که داریم:

$$f(x) = ax^2 + 3bx - 6a \Rightarrow \text{رأس سهمی}: \; x = -\frac{3b}{2a} = 2 \Rightarrow -\frac{3b}{a} = 4$$

طبق شکل، m و n طول نقاط برخورد سهمی با محور xها یعنی ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = 0$ هستند.

$$ax^2 + 3bx - 6a = 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها}: \begin{cases} x = m \\ x = n \end{cases}$$

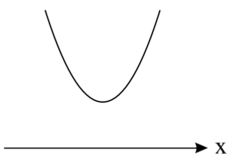
$$\text{جمع ریشه‌ها}: S = m + n = -\frac{3b}{a} = 4 \,, \quad \text{ضرب ریشه‌ها}: P = m \cdot n = \frac{-6a}{a} = -6$$

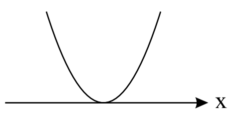
خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$m^3 + n^3 = (m+n)^3 - 3mn(m+n) = S^3 - 3PS = 4^3 - 3(-6) \times 4 = 64 + 72 = 136$$

(۷۶) ۱ **۲** ۳ ۴

طبق شکل مقابل سهمی از ناحیهٔ سوم و چهارم نمی‌گذرد. هرگاه رو به بالا بوده و با محور xها برخوردی نداشته باشد یا مماس بر محور xها باشد، یعنی $\Delta \leq 0$، پس داریم:





$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 20 - 4(a-2)(a+2) \leq 0 \xrightarrow{\div 4} 5 - (a^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow 5 - a^2 + 4 \leq 0 \Rightarrow a^2 \geq 9 \Rightarrow |a| \geq 3 \Rightarrow a \leq -3 \text{ یا } a \geq 3 \quad (1)$$

$$\text{سهمی رو به بالا} \Rightarrow x^2 \;\; \text{ضریب} \; > 0 \Rightarrow a - 2 > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر است با:

$$(1) \cap (2): a \geq 3$$

(۷۷) **۱** ۲ ۳ ۴ ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x) = ax^2 - 2x + 2a - 1$ است.

چون نمودار تابع، پایین‌ترین نقطه را دارد، پس $a > 0$. (۱)

طول پایین‌ترین نقطهٔ نمودار باید مثبت باشد. پس:

$$-\frac{-2}{2a} > 0 \Rightarrow a > 0 \quad (2)$$

عرض پایین‌ترین نقطهٔ نمودار باید منفی باشد، پس:

$$-\frac{\Delta}{4a} < 0 \xrightarrow{a>0} \Delta > 0 \;\Rightarrow 4 - 4a(2a-1) > 0 \Rightarrow 1 - a(2a-1) > 0 \Rightarrow 2a^2 - a - 1 < 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(2a+1) < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 1 \qquad (3)$$

بنابراین:

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow a \in (0, 1)$$

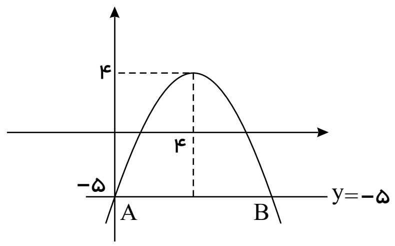
(۷۸) ۱ ۲ **۳** ۴ محور تقارن سهمی، آن را در رأس سهمی قطع می‌کند. پس $y = 4$ عرض رأس سهمی است.

$$-\frac{\Delta}{۴a}=۴\Rightarrow-\frac{۳۶-۴k}{۴(-۱)}=۴\Rightarrow ۳۶-۴k=۱۶\Rightarrow ۴k=۲۰\Rightarrow k=۵$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=-x^۲+۶x-۵$ است که مطابق شکل مقابل در نقاط A و B خط $y=-۵$ را قطع می‌کند.

$$-x^۲+۶x-۵=-۵$$

$$x^۲-۶x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۶\end{cases}$$



بنابراین $x_B=۶$ و $x_A=۰$؛ درنتیجه: $AB=۶$

۷۹ ۴ **۳** ۲ ۱ با توجه به این‌که $x=۲$ محور تقارن نمودار است و $x=۰$ یکی از ریشه‌های $f(x)$ است، پس $x=۴$ ریشهٔ دیگر است.

$$f(x)=x(ax+b)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-\frac{b}{a}=۴\Rightarrow b=-۴a\end{cases}\Rightarrow f(x)=ax^۲-۴ax$$

از طرف دیگر نمودار از نقطهٔ $(۲,۲)$ عبور کرده است. پس:

$$f(۲)=۲\Rightarrow ۴a-۸a=۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=۲\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+۲x$$

$$f(ab)=f(-۱)=-\frac{۱}{۲}-۲=-\frac{۵}{۲}$$

۸۰ ۴ **۳** ۲ ۱ معادلهٔ سهمی را به صورت $y=a(x-۲)(x+۴)$ درنظر می‌گیریم.

طول رأس این سهمی $x=-۱$ است. پس عرض آن هم باید $y=۱$ باشد تا رأس سهمی روی نیمساز ربع دوم باشد. بنابراین سهمی از نقطهٔ $(-۱,۱)$ عبور می‌کند:

$$۱=a(-۱-۲)(-۱+۴)\Rightarrow a=-\frac{۱}{۹}$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{۱}{۹}(x-۲)(x+۴)$ است. در نتیجه:

$$x=۰\Rightarrow y=-\frac{۱}{۹}(-۲)(۴)=\frac{۸}{۹}$$

یعنی سهمی در نقطهٔ $(۰,\frac{۸}{۹})$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

۸۱ **۴** ۳ ۲ ۱ چون $f(-۱)=f(۴)=۰$ پس ضابطهٔ f را می‌توانیم به‌صورت $f(x)=k(x+۱)(x-۴)$ در نظر بگیریم. از طرف دیگر طول رأس سهمی برابر $\frac{-۱+۴}{۲}=\frac{۳}{۲}$ است و عرض آن برابر -۵ است. پس:

$$f(\frac{۳}{۲})=-۵\Rightarrow k(\frac{۳}{۲}+۱)(\frac{۳}{۲}-۴)=-۵$$

$$-\frac{۲۵}{۴}k=-۵\Rightarrow k=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{۴}{۵}(x+۱)(x-۴)=\frac{۴}{۵}x^۲-\frac{۱۲}{۵}x-\frac{۱۶}{۵}$$

پس $a=\frac{۴}{۵}\ ,\ b=-\frac{۱۲}{۵}\ ,\ c=-\frac{۱۶}{۵}$ و درنتیجه:

$$a+b-c=\frac{۴}{۵}+\frac{۱۲}{۵}+\frac{۱۶}{۵}=\frac{۳۲}{۵}$$

۸۲ ۴ ۳ **۲** ۱ برای این که نمودار تابع درجهٔ دوم f بالای محور طول‌ها قرار گیرد، باید در معادلهٔ $mx^۲-\frac{۲}{۳}mx+۱=۰$ ضریب $x^۲$ مثبت و Δ منفی باشد. پس:

$$m>۰\ ,\ \Delta=\frac{۴}{۹}m^۲-۴m<۰\Rightarrow ۴m(\frac{۱}{۹}m-۱)<۰\Rightarrow ۰<m<۹$$

از طرف دیگر اگر $m=۰$، آن‌گاه $f(x)=۱$ و نمودار f بالای محور طول‌ها قرار دارد.

پس مجموعهٔ مقادیر ممکن m بازهٔ $[۰,۹)$ است.

۸۳ ۴ ۳ ۲ **۱** نمودار از نقطهٔ $(۰,-۱)$ عبور می‌کند. پس:

$$f(۰)=-۱\Rightarrow -b=-۱\Rightarrow b=۱$$

نمودار بر محور طول‌ها مماس است، پس Δ در معادلهٔ $(a-۸)x^۲+ax-b=۰$ برابر صفر است.

$$\Delta=a^۲+۴b(a-۸)=۰\Rightarrow a^۲+۴(a-۸)=۰\Rightarrow a^۲+۴a-۳۲=۰\Rightarrow(a+۸)(a-۴)=۰\Rightarrow a=۴\ ,\ a=-۸$$

چون نمودار در نقطه‌ای با طول منفی بر محور طول‌ها مماس است، پس جواب معادلهٔ بالا باید منفی باشد. یعنی:

$$-\frac{-a}{۲(a-۸)} < ۰ \Rightarrow \frac{a}{a-۸} < ۰$$

به‌ازای $a = ۴$ عبارت بالا منفی است، ولی به‌ازای $a = -۸$ مثبت است. پس a فقط می‌تواند برابر با ۴ باشد.

(۸۴) گزینه ۱ — کمترین مقدار تابع برابر است با:

$$y_{\min} = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{۴a(-۳) - (-۴)^۲}{۴a} = \frac{-۱۲a - ۱۶}{۴a} = -۱۰$$

$$\Rightarrow -۱۲a - ۱۶ = -۴۰a \Rightarrow ۲۸a = ۱۶ \Rightarrow a = \frac{۴}{۷}$$

بنابراین معادلهٔ محور تقارن به‌صورت زیر است:

$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴}{۲ \times \frac{۴}{۷}} = \frac{۷}{۲}$$

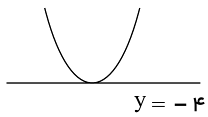
(۸۵) گزینه ۴ — با توجه به این‌که $f(۴) = f(-۱) = ۰$ ضابطهٔ تابع را به‌صورت $f(x) = k(x+۱)(x-۴)$ می‌نویسیم. چون $f(۰) = ۲$ پس:

$$k(۰+۱)(۰-۴) = ۲ \Rightarrow k = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{۱}{۲}(x+۱)(x-۴) = -\frac{۱}{۲}(x^۲ - ۳x - ۴) = -\frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۳}{۲}x + ۲$$

بنابراین $a = -\frac{۱}{۲}$، $b = \frac{۳}{۲}$ و $c = ۲$ و درنتیجه: $a + b + c = ۳$

(۸۶) گزینه ۳ — مطابق شکل مقابل $y = -۴$ باید عرض رأس سهمی باشد.



عرض رأس سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ برابر $\frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ است.

پس:

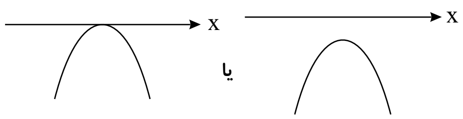
$$\frac{۴a(a-۳) - (-\sqrt{۸})^۲}{۴a} = -۴$$

$$۴a^۲ - ۱۲a - ۸ = -۱۶a \Rightarrow ۴a^۲ + ۴a - ۸ = ۰ \Rightarrow a^۲ + a - ۲ = ۰$$

$$a = -۲ \ , \ a = ۱$$

جواب ۲- قابل قبول نیست چون سهمی مینیمم ندارد.پس مجموع مقادیر ممکن برای a برابر ۱ است.

(۸۷) گزینه ۴ — نمودار تابع f باید به صورت‌های مقابل باشد:



بنابراین باید ضریب $x^۲$ منفی باشد، یعنی $a < ۲$ و $\Delta \leq ۰$ (نامثبت) باشد. پس:

$$\Delta = ۱۲ - ۴(a-۲)a \leq ۰ \Rightarrow a^۲ - ۲a - ۳ \geq ۰ \Rightarrow (a+۱)(a-۳) \geq ۰ \xrightarrow{\text{نقض علامت}} a \leq -۱ \text{ یا } a \geq ۳$$

$$a \leq -۱$$

بنابراین اگر $a \leq -۱$، آن‌گاه دو شرط بالا برقرار هستند و نمودار تابع f از ناحیه‌های اول و دوم عبور نمی‌کند.

(۸۸) گزینه ۲ — برای این‌که نمودار تابع درجهٔ دوم $y = ax^۲ + bx + c$ بالای محور طول‌ها قرار بگیرد، باید شرایط $a > ۰$ و $\Delta \leq ۰$ برقرار باشد. پس:

$$a = ۲ - k < ۰ \Rightarrow k > ۲ \quad (۱)$$

$$\Delta = ۸ - ۴(۲-k)(۱-k) \leq ۰ \Rightarrow -۴k^۲ + ۱۲k \leq ۰$$

$$۴k(k-۳) \geq ۰ \Rightarrow k \geq ۳ \text{ یا } k \leq ۰ \quad (۲)$$

اشتراک شرایط (۱) و (۲) بازهٔ $[۳, +\infty)$ است.

(۸۹) گزینه ۳ — رأس سهمی نمودار تابع f نقطهٔ $(-۱, ۴)$ است، پس ضابطهٔ f به‌صورت $f(x) = k(x+۱)^۲ + ۴$ است. نمودار f از نقطهٔ $(۰, ۱)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(۰) = ۱ \Rightarrow k(۰+۱)^۲ + ۴ = ۱ \Rightarrow k = -۳$$

$$\Rightarrow f(x) = -۳(x+۱)^۲ + ۴ = -۳x^۲ - ۶x + ۱$$

بنابراین اگر α و β صفرهای تابع f باشند، داریم:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{-۶}{(-۳)}}{-\frac{۱}{۳}}=۶$$

۹۰ ۱ ۲ ۳ **۴** اگر خط $y=k$ محور تقارن سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ را در روی خود سهمی قطع کند.

$Max(f)=k$ یا $Min(f)=k$

$y=x^۲+۴x+۲ \to a=۱>۰ \to$ سهمی مینیمم دارد

$y_{Min}=?\qquad x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲}=-۲$

$y_{Min}=(-۲)^۲+۴(-۲)+۲=-۲$

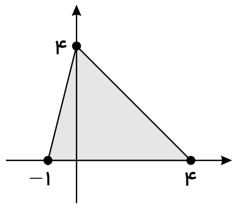
$۲m-۱=y_{Min}\to ۲m-۱=-۲\to m=-\frac{۱}{۲}$

۹۱ ۱ ۲ **۳** ۴ نقاط تلاقی با محورهای مختصات را پیدا می‌کنیم.

$x=۰\to y=۴$

$y=۰\to -x^۲+۳x+۴=۰\to x^۲-۳x-۴=۰\to (x-۴)(x+۱)=۰\to x=۴\ ,\ x=-۱$

بنابراین نقاط تلاقی مانند شکل مقابل هستند و مساحت مثلث مورد نظر برابر است با:



$$\frac{۴\times ۵}{۲}=۱۰$$

۹۲ ۱ ۲ **۳** ۴ برای آنکه سهمی $y=ax^۲+bx+c$ همواره پایین محور طول‌ها باشد باید همزمان $\Delta<۰$ و $a<۰$ باشد. داریم:

$\Delta=(m+۱)^۲+۴m=m^۲+۶m+۱\to\Delta<۰\to m^۲+۶m+۱<۰$

$m^۲+۶m+۱=۰\to m=\frac{-۶\pm\sqrt{۳۲}}{۲}=\frac{-۶\pm۴\sqrt{۲}}{۲}=-۳\pm۲\sqrt{۲}$

$\to -۳-۲\sqrt{۲}<m<-۳+۲\sqrt{۲}$

از طرفی می‌دانیم ضریب $x^۲$ یعنی m نیز باید منفی باشد. بنابراین $m<۰$ بوده و جواب نهایی برای محدودهٔ m برابر است با:

$(-۳-۲\sqrt{۲}$ و $-۳+۲\sqrt{۲})\cap(-\infty\ ,\ ۰)=(-۳-۲\sqrt{۲}$ و $-۳+۲\sqrt{۲})$

در بازهٔ موردنظر مقادیر صحیح m برابر است با: $-۱\ ,\ -۲\ ,\ -۳\ ,\ -۴\ ,\ -۵$

پس مقدار ۵ صحیح به‌جای m می‌توان قرار داد.

۹۳ **۱** ۲ ۳ ۴ اگر ریشه‌های معادلهٔ $-۳a^۲+(a-۱)x+a+۲=۰$ برابر α و β باشد، داریم:

$$\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲p=(\frac{a-۱}{۳})^۲+۲(\frac{a+۲}{۳})=۱۰$$

$$\to\frac{a^۲-۲a+۱}{۹}+\frac{۲a+۴}{۳}=۱۰\to a^۲-۲a+۱+۶a+۱۲=۹۰$$

$$\to a^۲+۴a-۷۷=۰\to(a+۱۱)(a-۷)=۰\to\begin{cases}a=۷ & \text{ق ق}\\ a=-۱۱ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$\to y=ax^۲-۲۸x+a+۱=۷x^۲-۲۸x+۸\to$ معادلهٔ محور تقارن $=\frac{۲۸}{۱۴}=۲$

۹۴ ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به شکل مختصات رأس سهمی به‌صورت $S\begin{vmatrix}-۲\\۳\end{vmatrix}$ و $A\begin{vmatrix}-۴\\+۱\end{vmatrix}$ نقطهٔ دیگری از سهمی است. پس می‌توانیم ضابطهٔ سهمی را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$y=a(x+۲)^۲+۳\xrightarrow[\text{در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کند}]{A\begin{vmatrix}-۴\\+۱\end{vmatrix}}۱=a(-۴+۲)^۲+۳\to a=-\frac{۱}{۲}$$

$$\to f(x)=-\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲+۳\to f(-۱)=-\frac{۱}{۲}(-۱+۲)^۲+۳=۲/۵$$

۹۵ ۱ **۲** ۳ ۴ سهمی $y=ax^۲+bx+c$ زمانی از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات عبور می‌کند که $\frac{c}{a}<۰$ برقرار باشد. پس:

$$\frac{a+\frac{۱۰}{۳}}{۳}<۰ \Rightarrow a+\frac{۱۰}{۳}<۰ \Rightarrow a<-\frac{۱۰}{۳}$$

۹۶ ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به نمودار، نقطهٔ $\begin{vmatrix}-۲\\-۱\end{vmatrix}$ رأس سهمی می‌باشد، پس می‌توان ضابطهٔ سهمی را به صورت $f(x)=a(x+۲)^۲-۱$ نوشت. با توجه به اینکه سهمی از نقطهٔ $\begin{vmatrix}۰\\۲\end{vmatrix}$ می‌گذرد. داریم:

$$f(۰)=۲\to ۲=a(۰+۲)^۲-۱\to a=\frac{۳}{۴}\to f(x)=۰\to \frac{۳}{۴}(x+۲)^۲-۱=۰\to ۳(x+۲)^۲=۴\to ۳(x^۲+۴x+۴)=۴\to ۳x^۲+۱۲x+۱۲=۴$$
$$\to ۳x^۲+۱۲x+۸=۰$$

با توجه به نمودار، ریشهٔ معادلهٔ بالا، α و β هستند. می‌دانیم $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۸}{۳}$ و $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۴$ است. داریم:

$$\frac{۳}{۲}\beta^۳\alpha+۴\alpha^۲=\frac{۳}{۲}(\beta\alpha)\beta^۲+۴\alpha^۲=\frac{۳}{۲}(\frac{۸}{۳})\beta^۲+۴\alpha^۲=۴\beta^۲+۴\alpha^۲=۴(\alpha^۲+\beta^۲)=۴((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)=۴((-۴)^۲-۲(\frac{۸}{۳}))=\frac{۱۲۸}{۳}$$

۹۷ **۱** ۲ ۳ ۴ چون رأس سهمی $A(۲,۴)$ است، پس $y=k(x-۲)^۲+۴$ ضابطهٔ سهمی است. اما سهمی از $M(۰,۲)$ عبور می‌کند. به همین جهت $۲=k\times ۴+۴$ و درنتیجه $k=-\frac{۱}{۲}$ است.

$$f(x)=-\frac{۱}{۲}(x-۲)^۲+۴$$

حال باید نامعادلهٔ $f(x)>\frac{x}{۲}$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}(x-۲)^۲+۴>\frac{x}{۲}\Rightarrow -(x-۲)^۲+۸>x\Rightarrow x^۲-۴x+۴+x-۸<۰\Rightarrow x^۲-۳x-۴<۰\Rightarrow (x+۱)(x-۴)<۰\Rightarrow -۱<x<۴$$

بنابراین در بازهٔ $(-۱,۴)$ سهمی بالای خط $y=\frac{x}{۲}$ است.

۹۸ ۱ ۲ **۳** ۴ دو نقطه با طول صفر و ۲α روی سهمی دارای عرض یکسان هستند، پس طول رأس سهمی $x_s=\frac{۰+۲\alpha}{۲}=\alpha$ است. همچنین عرض رأس سهمی نیز برابر صفر است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=a(x-\alpha)^۲$ است.

نقطهٔ $(۰,۲\alpha)$ روی سهمی قرار دارد:

$$f(۰)=a(\alpha)^۲=۲\alpha\Rightarrow a=\frac{۲}{\alpha}\Rightarrow f(x)=\frac{۲}{\alpha}(x-\alpha)^۲$$

خط رسم شده از نقاط $(۰,-۳)$، $(\alpha,۰)$ و $(۲\alpha,۲\alpha)$ می‌گذرد، پس ضابطهٔ آن $y=۲x-۳$ است. محل برخورد خط با محور xها، برابر α است:

$$۲\alpha-۳=۰\Rightarrow \alpha=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(x)=\frac{۴}{۳}(x-\frac{۳}{۲})^۲\Rightarrow f(-\frac{۳}{۲})=\frac{۴}{۳}(-۳)^۲=۱۲$$

۹۹ ۱ ۲ ۳ **۴** اگر دو نقطهٔ $(۵,k)$ و (m,k) روی سهمی هستند و عرضشان برابر است، لذا طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_{\min}=\frac{m+۵}{۲}$$

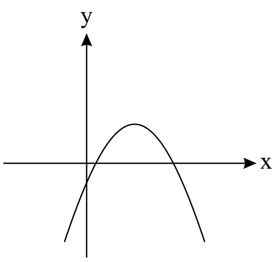
در سهمی $y=ax^۲+bx+c$ طول رأس سهمی برابر است با:

$$\text{طول رأس}=-\frac{b}{۲a}\to \frac{m+۵}{۲}=\frac{-(-۴)}{۲}=۲$$
$$\frac{m+۵}{۲}=۲\to m=-۱\Rightarrow y=x^۲-۴x-۲-۶=x^۲-۴x-۸$$

طول پاره‌خطی که $y=-۳$ روی سهمی $y=x^۲-۴x-۸$ جدا می‌کند، قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۴x-۸=-۳$ است.

$$x^۲-۴x-۸+۳=۰\Rightarrow x^۲-۴x-۵=۰\Rightarrow x_۱=-۱, x=-\frac{c}{a}=۵$$
$$\text{طول پاره خط}=۵-(-۱)=۶$$

۱۰۰ ۱ ۲ ۳ **۴** نمودار فرضی تابع به شکل



است.(شکل می‌تواند از مبدأ هم بگذرد.)

$$\Delta>۰\to b^۲-۴ac=(-۲m)^۲-۴(۲-m)>۰\to ۴m^۲+۴m-۸>۰\xrightarrow{\div ۴} m^۲+m-۲>۰\to (m+۲)(m-۱)>۰\to \begin{cases} m>۱\\ \text{یا}\\ m<-۲\end{cases}\quad (۱)$$

$$a<۰\to ۲-m<۰\to m>۲\quad (۲)$$

$$S>\circ \to -\frac{b}{a}=\frac{-(-۲m)}{۲-m}=\frac{۲m}{۲-m}>\circ \to \circ<m<۲ \quad (۳)$$

$$P>\circ \to \frac{c}{a}=\frac{۱}{۲-m}>\circ \to m<۲ \quad (۴)$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳)\cap(۴)=\varnothing$$

۱۰۱ ۴ ۳ ۲ ۱ چون رأس سهمی نقطهٔ $(۲,-۲)$ است، پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=a(x-۲)^۲-۲$ است. از طرفی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند، پس مختصات نقطهٔ $(\circ, ۲)$ در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کنند.

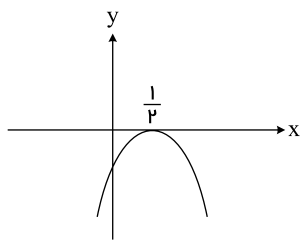
$$۲=a(\circ-۲)^۲-۲ \Rightarrow ۴a=۴ \Rightarrow a=۱$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$y=(x-۲)^۲-۲=x^۲-۴x+۲ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=-۴ \\ c=۲ \end{cases}$$

حال سهمی $y=bx^۲+۲cx-a$ به‌صورت $y=-۴x^۲+۴x-۱=-(۲x-۱)^۲$ و نمودار آن به‌صورت زیر است:

واضح است که این سهمی از ربع‌های سوم و چهارم دستگاه مختصات می‌گذرد.



۱۰۲ ۴ ۳ ۲ ۱

$$y=-x^۲+۲x+۱ \to S\left|\begin{matrix}-\frac{b}{۲a}\\ \frac{۴ac-b^۲}{۴a}\end{matrix}\right. = S\left|\begin{matrix}۱\\ ۲\end{matrix}\right.$$

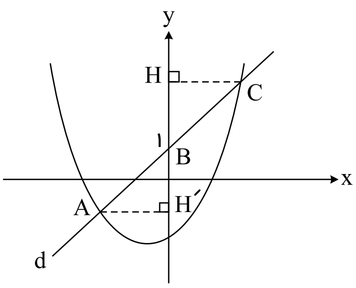
معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $\left|\begin{matrix}۱\\ \circ\end{matrix}\right.$ و عرض از مبدأ -۱ به‌صورت $y=x-۱$ است.

تلاقی: $x-۱=-x^۲+۲x+۱ \to x^۲-x-۲=\circ \to (x-۲)(x+۱)=\circ \to x=۲\,,\ x=-۱ \to x_M=\frac{۲-۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{y=x-۱} y_M=-\frac{۱}{۲}$

$$S\left|\begin{matrix}۱\\ ۲\end{matrix}\right. ,\ M\left|\begin{matrix}\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۱}{۲}\end{matrix}\right. \to SM=\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۲+\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۶}}=\sqrt{\frac{۲۶}{۴}}=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$$

بنابراین این اندازه $\frac{۱}{۲}$ برابر $\sqrt{۲۶}$ است.

۱۰۳ ۴ ۳ ۲ ۱ معادلهٔ خط d را به‌صورت $y=mx+۱$ در نظر می‌گیریم. در شکل دو مثلث BHC و ABH' هم‌نهشت‌اند، پس $CH=AH'$ یعنی معادلهٔ $x^۲+۲x-۳=mx+۱$ دارای دو ریشهٔ قرینه است.



$$\Rightarrow x^۲+(۲-m)x-۴=\circ \to \text{مجموع ریشه‌ها}:\ S=\circ \Rightarrow m=۲$$

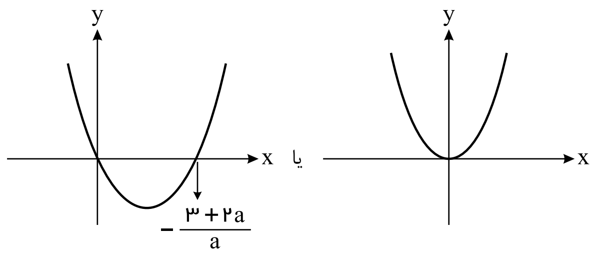
فاصله مبدأ تا خط $y=۲x+۱$ برابر است با:

$$\frac{|\circ-۲(\circ)-۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۰۴ ۴ ۳ ۲ ۱ سهمی $y=ax^۲+(۳+۲a)x$ از مبدأ گذر است، زیرا:

$$y=\circ \Rightarrow ax^۲+(۳+۲a)x=\circ \Rightarrow x(ax+۳+۲a)=\circ \Rightarrow x=\circ, ax+۳+۲a=\circ \Rightarrow x=-\frac{۳+۲a}{a}$$

برای آن که سهمی از ناحیهٔ سوم عبور نکند، باید رو به بالا بوده و ریشهٔ معادله $y=۰$ یعنی $x=-\frac{۳+۲a}{a}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



$$\text{سهمی رو به بالا} \Rightarrow a>۰ \Rightarrow -\frac{۳+۲a}{a}\ge ۰ \Rightarrow \frac{۳+۲a}{a}\le ۰ \xrightarrow{a>۰} ۳+۲a\le ۰ \Rightarrow ۲a\le -۳ \Rightarrow a\le -\frac{۳}{۲}$$

چون اشتراک $a>۰$ و $a\le -\frac{۳}{۲}$ سهمی است، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۱۰۵ ۴ ۳ ۲ **۱** عرض رأس سهمی $y=\frac{-\Delta}{۴a}$ است پس:

$$y=mx^۲-۱۲x+۵m-۱$$
$$\frac{-\Delta}{۴a}=۲ \Rightarrow \Delta=-۸a \Rightarrow ۱۴۴-۴m(۵m-۱)=-۸m \Rightarrow ۱۴۴-۲۰m^۲+۴m=-۸m$$
$$\Rightarrow ۲۰m^۲-۱۲m-۱۴۴=۰ \xrightarrow{\div ۴} ۵m^۲-۳m-۳۶=۰$$
$$\Rightarrow \Delta=۹-۴\times ۵\times(-۳۶)=۷۲۹ \Rightarrow m=\frac{۳\pm ۲۷}{۱۰} \Rightarrow \begin{cases} m=۳ \\ m=-\frac{۲۴}{۱۰}\end{cases}$$

چون سهمی دارای کمترین مقدار است پس $m>۰$ و $m=۳$ قابل قبول است.

$$y=۳x^۲-۱۲x+۱۴ \Rightarrow \text{محور تقارن}: x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۱۲}{۲\times ۳}=۲$$

۱۰۶ ۴ ۳ **۲** ۱ رأس سهمی $y=-ax^۲+ax+۲$ را می‌یابیم:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{a}{۲(-a)}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=-\frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}+۲=\frac{a}{۴}+۲$$
$$\text{رأس}\left(\frac{۱}{۲},\frac{a}{۴}+۲\right)$$

نقطهٔ فوق بر روی سهمی $y=۲bx^۲-bx-۱$ قرار دارد.

$$\frac{a}{۴}+۲=۲b\times\frac{۱}{۴}-\frac{b}{۲}-۱ \Rightarrow \frac{a}{۴}+۲=-۱ \Rightarrow \frac{a}{۴}=-۳ \Rightarrow a=-۱۲$$

حال رأس سهمی $y=۲bx^۲-bx-۱$ را می‌یابیم:

$$x_{\text{رأس}}=-\frac{-b}{۲\times ۲b}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow y=۲b\times\frac{۱}{۱۶}-\frac{b}{۴}-۱=\frac{b}{۸}-\frac{b}{۴}-۱ \Rightarrow y=-\frac{b}{۸}-۱ \Rightarrow \text{رأس}\left(\frac{۱}{۴},-\frac{b}{۸}-۱\right)$$

نقطهٔ فوق بر روی سهمی $y=-ax^۲+ax+۲$ قرار دارد.

$$-\frac{b}{۸}-۱=-\frac{۹}{۱۶}+\frac{۹}{۴}+۲=\frac{۳۹}{۱۶}+۲ \xrightarrow{a=-۱۲} -\frac{b}{۸}-۱=\frac{-۳۶}{۱۶}+۲ \Rightarrow -\frac{b}{۸}-۱=-\frac{۹}{۴}+۲ \Rightarrow -\frac{b}{۸}=۳-\frac{۹}{۴}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow b=-۶ \Rightarrow b-a$$
$$=-۶-(-۱۲)=۶$$

۱۰۷ ۴ **۳** ۲ ۱ معادلهٔ تلاقی سهمی داده‌شده و خط $y=-x$ باید ریشهٔ مضاعف بدهد.

$$\begin{cases} y=۳x^۲+(۲m-۱)x+m+\frac{۴}{۳} \\ y=-x\end{cases} \Rightarrow ۳x^۲+(۲m-۱)x+m+\frac{۴}{۳}=-x \Rightarrow ۳x^۲+۲mx-x+m+\frac{۴}{۳}=-x \Rightarrow ۳x^۲+۲mx+m+\frac{۴}{۳}=۰ \quad (۱)$$
$$\Delta=۰ \Rightarrow ۴m^۲-۴\times ۳(m+\frac{۴}{۳})=۰ \xrightarrow{\div ۴} m^۲-۳(m+\frac{۴}{۳})=۰ \Rightarrow m^۲-۳m-۴=۰ \Rightarrow (m-۴)(m+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۴ \\ m=-۱\end{cases}$$

ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱) باید در ناحیهٔ دوم باشد، پس داریم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲m}{۲\times ۳}=-\frac{m}{۳}<۰ \Rightarrow m>۰$$

بنابراین $m=۴$ قابل قبول است و داریم:

$$y=۳x^۲+(۲\times ۴-۱)x+۴+\frac{۴}{۳}=۳x^۲+۷x+\frac{۱۶}{۳}$$
$$x_{\text{رأس}}=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۷}{۲\times ۳}=-\frac{۷}{۶}$$

۱۰۸ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا معادله خط گذرنده از نقاط $(۳,۰)$ و $(۰,۴)$ را می‌یابیم.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴ - ۰}{۰ - ۳} = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow y - ۰ = -\frac{۴}{۳}(x - ۳) \Rightarrow y = -\frac{۴}{۳}x + ۴$$

اگر مختصات نقطهٔ A به‌صورت $A(x, y)$ باشد، داریم:

$$OH = x\,,\ AH = y \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}OH \cdot AH = \frac{۱}{۲}xy$$

چون نقطهٔ A روی خط $y = -\frac{۴}{۳}x + ۴$ قرار دارد، پس:

$$S = \frac{۱}{۲}x(-\frac{۴}{۳}x + ۴) = -\frac{۲}{۳}x^۲ + ۲x$$

$$S_{\max} = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۴ - ۰}{۴ \times (-\frac{۲}{۳})} = \frac{۴}{\frac{۸}{۳}} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

۱۰۹ ۴ **۳** ۲ ۱ محور تقارن دو سهمی یکسان است، پس:

$$\begin{cases} y = x^۲ + ax - ۲ \rightarrow \text{محور تقارن} : x = \dfrac{-a}{۲(۱)} \\ y = -x^۲ - ۲x + b \rightarrow \text{محور تقارن} : x = \dfrac{-(-۲)}{۲(-۱)} \end{cases} \Rightarrow \frac{-a}{۲} = -۱ \Rightarrow a = ۲$$

طبق فرض، دو سهمی در دو نقطه به عرض ۱ مشترک‌اند، پس:

$$\text{سهمی اول} : y = x^۲ + ۲x - ۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = ۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری } x=۱ \text{ در سهمی دوم}} ۱ = -۱^۲ - ۲(۱) + b \Rightarrow b = ۴$$

توجه: می‌توانستیم به‌جای $x = ۱$، ریشه $x = -۳$ را در معادلهٔ سهمی دوم جایگذاری کنیم.

۱۱۰ ۴ **۳** ۲ ۱

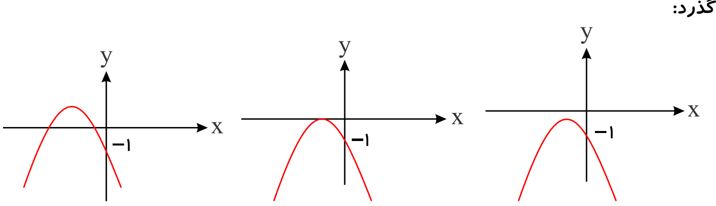
$$y = \frac{۱ + x^۲}{۲x} \Rightarrow ۱ + x^۲ = ۲xy \Rightarrow x^۲ - ۲yx + ۱ = ۰$$

حال شرط $\Delta \geq ۰$ را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta \geq ۰ \Rightarrow ۴y^۲ - ۴ \geq ۰ \Rightarrow y^۲ \geq ۱ \Rightarrow |y| \geq ۱ \Rightarrow y \leq -۱ \text{ یا } y \geq ۱$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع} = \mathbb{R} - (-۱, ۱)$$

۱۱۱ ۴ ۳ ۲ **۱** در سه حالت زیر نمودار سهمی داده شده در ناحیهٔ اول نمی‌گذرد:



$$x^۲ \text{ ضریب} < ۰ \Rightarrow a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < ۳ \quad (۱)$$

اگر دو ریشه داشته باشد (شکل ۱) باید هر دو منفی باشد که داریم:

$$\Delta = a^۲ + ۴a - ۱۲ > ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a + ۶) > ۰ \Rightarrow a > ۲ \text{ یا } a < -۶ \quad (۲)$$

$$P = \alpha\beta > ۰ \Rightarrow P = \frac{-۱}{a - ۳} > ۰ \Rightarrow a - ۳ < ۰ \Rightarrow a < ۳ \quad (۱)$$

$$S = \alpha + \beta < ۰ \Rightarrow S = \frac{-a}{\underbrace{a - ۳}_{-}} < ۰ \Rightarrow a > ۳ \text{ یا } \Rightarrow a < ۰ \quad (۳)$$

که اشتراک (۱) و (۲) و (۳) برابر $a < -۶$ می شود.

حال اگر سهمی ریشه مضاعف داشته باشد (شکل ۲) یا ریشهٔ حقیقی نداشته باشد (شکل ۳)، داریم:

$$\Delta = (a - ۲)(a + ۶) \leq ۰ \Rightarrow -۶ \leq a \leq ۲ \quad (۴)$$

که اشتراک (۱) و (۴) برابر $-۶ \leq a \leq ۲$ است و اجتماع دو بازه جواب برابر $a \leq ۲$ می باشد.

۱۱۲ ۴ ۳ **۲** ۱ تابع را به صورت معادله‌ای بر حسب x می‌نویسیم و شرط جواب داشتن را می‌نویسیم :

$$y = \frac{x}{x^۲ + x + ۱} \Rightarrow yx^۲ + (y - ۱)x + y = ۰,\ \Delta \geq ۰$$

$$\Delta = (y - ۱)^۲ - ۴y^۲ = (۳y - ۱)(-y - ۱) \geq ۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} y & & -۱ & & \frac{۱}{۳} & \\ \hline (۳y - ۱) \cdot (-y - ۱) \geq ۰ & - & ۰ & + & ۰ & - \end{array} \Rightarrow -۱ \leq y \leq \frac{۱}{۳}$$

بنابراین برد تابع $[-۱, \frac{۱}{۳}]$ است.

۱۱۳ ۴ ۳ **۲** ۱ تابع را به صورت معادله ای بر حسب x باز نویسی می کنیم وشرط $\Delta \geq ۰$ را اعمال می کنیم :

$$y=\frac{۴x+۱}{x^۲-۲x}\Rightarrow yx^۲-(۲y+۴)x-۱=۰,\quad \Delta\geq ۰$$

$$\Delta=۴((y+۲)^۲+y)\geq ۰\Rightarrow y^۲+۵y+۴\geq ۰\qquad y\geq -۱, y\leq -۴\Rightarrow R_y=\mathbb{R}-(-۴,-۱)$$

بنابراین برد تابع $\mathbb{R}-(-۴,-۱)$ خواهد بود.

۱۱۴ ۴ ۳ ۲ **۱** اگر ریشه‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\text{قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها}=|x_۱-x_۲|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۱-۴(-۱)(-m)}}{|-۱|}=۳$$

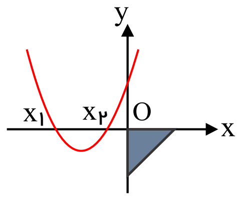
$$\Rightarrow\sqrt{۱-۴m}=۳\Rightarrow ۱-۴m=۹\Rightarrow ۴m=-۸\Rightarrow m=-۲$$

پس معادله‌ی تابع به صورت $f(x)=-x^۲+x+۲$ است.

چون ضریب $x^۲$، (a) منفی است بنابراین تابع ماکسیمم دارد و بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم، همان عرض راس سهمی یعنی $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$ می‌باشد.

$$\text{عرض ماکسیمم}=\frac{۴(-۱)(۲)-۱}{۴(-۱)}=\frac{۹}{۴}$$

۱۱۵ **۴** ۳ ۲ ۱ با توجه به شکل زیر، برای این که نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم رخ دهد، با توجه به این حالت:



$f(۰)=\frac{۹}{۴}\Rightarrow$ تابع بالای مبدأ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

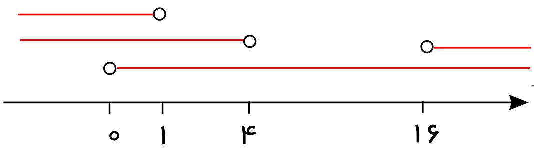
تابع باید مینیمم داشته باشد. $\Rightarrow\ a>۰\quad (I)$

$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}<۰\xrightarrow{a>۰}a-۴<۰\Rightarrow a<۴\quad (II)$$

$P=x_۱x_۲=\frac{c}{a}>۰\xrightarrow{a>۰}c>۰\Rightarrow\frac{۹}{۴}>۰$ همواره برقرار است

$$\Delta=b^۲-۴ac>۰\Rightarrow\Delta=(a-۴)^۲-۹a=a^۲-۱۷a+۱۶>۰$$

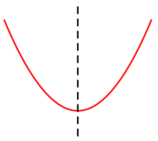
$(a-۱)(a-۱۶)>۰\Rightarrow a<۱$ یا $a>۱۶\quad (III)$



$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)}\ ۰<a<۱$

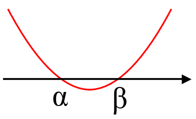
۱۱۶ ۴ **۳** ۲ ۱

مطابق شکل مقابل محور تقارن یک سهمی، سهمی را در نقطه‌ی رأس سهمی قطع می‌کند. از آنجا که $x=-\frac{b}{۲a}=-۲$ محور تقارن سهمی است و سهمی را در نقطه‌ای به عرض $y=-۲$ قطع کرده، بنابراین نقطه‌ی $(-۲\ ,\ -۲)$ روی منحنی است، در نتیجه در تابع صدق می‌کند.



$$-۲=(-۲)^۲+۴(-۲)+k\Rightarrow k=۲$$

پس معادله‌ی تابع به صورت $y=x^۲+۴x+۲$ است. همچنین با توجه به شکل مقابل، طول پاره‌خطی که منحنی روی محور xها ایجاد می‌کند برابر قدرمطلق تفاضل ریشه‌های تابع است. یعنی:



$$\text{طول پاره‌خط}=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۱۶-۴(۲)}}{|۱|}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۱۱۷ ۴ ۳ **۲** ۱ برای آن که عبارت درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت یا بالای محور xها باشد، باید دو شرط زیر همواره برقرار باشد:

۱) $\Delta<۰$ ۲) $a>۰$

ابتدا عبارت داده‌شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$y=ax(x+۱)+۱\Rightarrow y=ax^۲+ax+۱$$

حال برای آن که عبارت درجهٔ دوم همواره مثبت باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

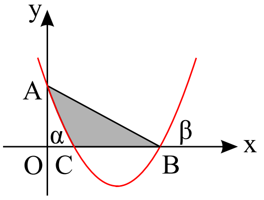
$$\begin{cases}\Delta<۰\Rightarrow a^۲-۴a<۰\Rightarrow a(a-۴)<۰\Rightarrow ۰<a<۴\\ a>۰\Rightarrow a>۰\end{cases}$$

اشتراک دو شرط فوق برابر $۰<a<۴$ می‌شود. اما صبر کنید در صورت سؤال نگفته عبارت حتماً باید درجهٔ دوم باشد. به عبارت دیگر اگر $a=۰$ باشد نیز عبارت $y=ax^۲+ax+۱$ برابر عدد مثبت یک خواهد شد. پس $a=۰$ نیز درست است:

$$y=ax^۲+ax+۱\xrightarrow{a=۰}y=۰+۰+۱=۱$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با:
$$(۰ < a < ۴) \cup \{۰\} = ۰ \leq a < ۴$$
که در بازهٔ فوق چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ موجود است.

۱۱۸ (۱) (۲) (۳) (۴) به نمودار فرضی زیر توجه کنید: باتوجه به شکل در نقطه‌ی برخورد منحنی با محور yها، $x = ۰$ است.
$$x = ۰ \xrightarrow{\text{تابع}} y_A = ۱$$
نقاط برخورد منحنی با محور xها هم، همان ریشه‌های تابع هستند. حال برای محاسبه‌ی مساحت مثلث به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$S = \frac{(BC)(OA)}{۲} \xrightarrow[BC=|\alpha-\beta|]{OA=۱} S = \frac{|\alpha-\beta|(۱)}{۲} = \frac{|\alpha-\beta|}{۲}$$
چون مساحت مثلث برابر یک است و قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها در تابع درجه‌ی دوم برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است بنابراین:
$$۱ = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}{۲} \Rightarrow ۲|a| = \sqrt{\Delta} \Rightarrow ۲ = \sqrt{k^۲ - ۴} \Rightarrow ۴ = k^۲ - ۴ \Rightarrow k = \pm ۲\sqrt{۲}$$

۱۱۹ (۱) (۲) (۳) (۴) از آنجا که سهمی، محور x ها را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند، لذا معادله‌ی $y = ۰$ حداقل یک جواب دارد. لذا $\Delta \geq ۰$. در نتیجه داریم:
$$y = ax^۲ + ۲(a+۲)x + ۲a + ۷ \quad , \quad \Delta \geq ۰$$
$$\Delta = ۴(a+۲)^۲ - ۴(a)(۲a+۷) = ۴(a^۲ + ۴a + ۴ - ۲a^۲ - ۷a) = ۴(-a^۲ - ۳a + ۴) \geq ۰$$
$$\Rightarrow a^۲ + ۳a - ۴ \leq ۰ \Rightarrow (a-۱)(a+۴) \leq ۰ \Rightarrow -۴ \leq a \leq ۱$$
بنابراین مقادیر صحیح قابل قبول برای a برابر است با:

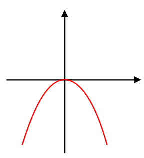
$a = -۴, -۳, -۲, -۱, ۱ \Rightarrow$ ۵ مقدار صحیح

$a = ۰$ قابل قبول نیست زیرا در این صورت تابع، به صورت خط در می آید و دیگر سهمی نیست.

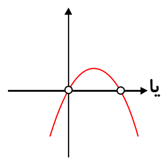
۱۲۰ (۱) (۲) (۳) (۴) صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = ax^۲ + bx + c$ می‌باشد و نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix} \right.$ رأس سهمی است که در تابع صدق می‌کند و طولش از رابطه‌ی $x_s = \frac{-b}{۲a}$ به دست می‌آید در ضمن نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix} \right.$ نیز روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می‌کند.
$$x_s = \frac{-b}{۲a} \to ۲ = \frac{-b}{۲a} \to ۴a = -b \text{ و } \left| \begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} -۱ = ۴a + ۲b + c \text{ و } \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۱ = c$$
$$-۱ = ۴a + ۲b + c \xrightarrow[c=۱]{۴a=-b} -۱ = -b + ۲b + ۱ \to b = -۲ \, , \, a = \frac{۱}{۲}$$
بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۲x + ۱$ است و با توجه به شکل، $x = \alpha$ ریشه‌ی بزرگ تر معادله‌ی $y = ۰$ است.
$$y = ۰ \xrightarrow{\times ۲} x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \to \Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶ - ۸ = ۸$$
$$\text{ریشه‌ی بزرگتر} = \frac{۴ + \sqrt{۸}}{۲} = \frac{۴ + ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ + \sqrt{۲}$$

۱۲۱ (۱) (۲) (۳) (۴) رأس سهمی روی نیمساز ربع اول $(y = x)$ قرار دارد، بنابراین مختصات آن به‌صورت $S\left| \begin{matrix} \alpha \\ \alpha \end{matrix} \right.$ است و چون سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول -۱ و ۳ قطع کرده است، طول رأس سهمی دقیقاً وسط -۱ و ۳ است.
$$x_S = \frac{-۱ + ۳}{۲} = ۱ \to S\left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix} \right.$$
$$\text{معادلهٔ سهمی}: y = a(x-۳)(x+۱) \xrightarrow[\text{صدق}]{S\left| \begin{matrix} ۱ \\ ۱ \end{matrix} \right.} ۱ = a(-۲)(۲) \to -۴a = ۱ \to a = \frac{-۱}{۴}$$
$$\text{معادلهٔ سهمی}: y = \frac{-۱}{۴}(x-۳)(x+۱) \xrightarrow{x=۰} y = \frac{-۱}{۴}(-۳)(۱) = \frac{۳}{۴}$$
توجه کنید اگر یک سهمی، محور طول را در دو نقطه به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع کند، می‌توان معادلهٔ آن را به‌صورت $y = a(x - x_۱)(x - x_۲)$ نشان داد.

۱۲۲ (۱) (۲) (۳) (۴) برای اینکه سهمی از ناحیهٔ دوم عبور نکند، دهانهٔ آن باید رو به پائین رسم شود یعنی $a < ۰$ باشد و برای این تابع داریم:
$$y = ax^۲ - (a+۲)x = x(ax - a - ۲) = ۰$$
$$\Rightarrow \boxed{x = ۰} \, , \, \boxed{x = \frac{a+۲}{a}}$$
چون یکی از ریشه‌ها $x = ۰$ است پس باید از مبدأ عبور کند و برای اینکه از ناحیهٔ دوم عبور نکند ریشهٔ بعدی باید نامنفی باشد، یعنی شکل سهمی به یکی از این صورت‌ها باشد



یا



دقت کنید که به ازای $a = ۰$ نیز خط $y = -۲x$ از ربع دوم می‌گذرد.

$$x=\frac{a+۲}{a}\geq ۰ \xrightarrow{a<۰} a+۲\leq ۰ \Rightarrow a\leq -۲$$

۱۲۳ ۴ ۳ **۲** ۱ طول نقطه‌ی B با همان رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطه‌ی هم عرض A و C است.

$$x_B=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{-۲+۰}{۲}=-۱$$

و توجه کنید صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=ax^۲+bx+c$ است.

$$\left.\begin{array}{l} A\left|\begin{array}{l}-۲\\-۲\end{array}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -۲=۴a-۲b+c \\ B\left|\begin{array}{l}-۱\\-۴\end{array}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -۴=a-b+c \end{array}\right\} \xrightarrow{c=-۲} \begin{cases} ۴a-۲b=۰ \\ a-b=-۲ \end{cases} \to a=۲\,,\,b=۴$$

$$C\left|\begin{array}{l}۰\\-۲\end{array}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -۲=c$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=۲x^۲+۴x-۲$ است. برای بدست آوردن مجموع مربعات ریشه های معادله‌ی $۲x^۲+۴x-۲=۰$ بدین صورت عمل می کنیم.

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=-\frac{۴}{۲}=-۲\quad,\quad x'x''=\frac{c}{a}=-۱$$

مجموع مربعات ریشه‌ها: $x'^۲+x''^۲=(x'+x'')^۲-۲x'x''=۴-۲(-۱)=۶$

۱۲۴ **۴** ۳ ۲ ۱ طول رأس سهمی، میانگین صفرها (ریشه‌ها)ی سهمی است. در این سؤال ریشه‌ها صفر و -۶ است:

$$x_s=-۳$$

عرض سهمی هم ۳ $y_s=$ است، پس ضابطه سهمی $y=a(x+۳)^۲+۳$ است. مختصات یکی از نقاط $(۰,۰)$ و $(-۶,۰)$ را در ضابطه جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۰=۹a+۳\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

پس ضابطه سهمی $y=-\frac{۱}{۳}(x+۳)^۲+۳$ است:

$$-\frac{۱}{۳}(x^۲+۶x+۹)+۳=-\frac{۱}{۳}x^۲-۲x=ax^۲+bx+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۱}{۳} \\ b=-۲ \\ c=۰ \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sqrt{b^۲}}{a}=-\frac{|b|}{a}=-\frac{۲}{-\frac{۱}{۳}}=۶$$

۱۲۵ ۴ **۳** ۲ ۱ رأس در نقطهٔ $(۰,۰)$ قرار دارد. پس ضابطهٔ آن به صورت $y=ax^۲$ است، که از نقطهٔ $(۲,-۱)$ نیز می‌گذرد.

$$y=ax^۲\xrightarrow{(۲,-۱)}-۱=a(۲)^۲\Rightarrow -۱=۴a\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}\Rightarrow y=\frac{-۱}{۴}x^۲$$

ضابطهٔ سهمی جدید به صورت $y=-\frac{۱}{۴}(x-x_s)^۲+y_s$ است که (x_s,y_s) نقطه رأس جدید است:

سهمی جدید: $y=-\frac{۱}{۴}(x+۲)^۲+۳=y=-\frac{۱}{۴}x^۲-x+۲$

۱۲۶ **۴** ۳ ۲ ۱

در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ خط به معادلهٔ $x=-\frac{b}{۲a}$ محور تقارن است.

$$y=(a-۱)x^۲+x+۳\xrightarrow[x=\frac{-b}{۲a}]{\text{محور تقارن}}x=\frac{-۱}{۲(a-۱)}\xrightarrow{x=۲}-\frac{۱}{۲(a-۱)}=۲$$

$\Rightarrow a-۱=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow$ ضابطهٔ تابع: $y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳$

نقاط برخورد منحنی با محور xها عبارتند از:

$$-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳=۰\xrightarrow{\times(-۴)}x^۲-۴x-۱۲=۰\Rightarrow(x-۶)(x+۲)=۰\xrightarrow{x>۰}x=۶\,,x=-۲$$

مقدار مثبت $x=۶$ است.

۱۲۷ ۴ **۳** ۲ ۱ سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کرده است پس از نقطهٔ $(۰,۴)$ می‌گذرد.

$$y=ax^۲+bx+c\xrightarrow{(۰,۴)}۴=c\Rightarrow y=ax^۲+bx+۴$$

سهمی محور x ها را در نقطه‌هایی به طول ۲ و ۴− قطع کرده است پس از نقطه‌های $(۲,۰)$ و $(-۴,۰)$ می‌گذرد.

$$y=ax^۲+bx+۴\xrightarrow{(۲,۰)}a\times ۲^۲+b\times ۲+۴=۰\Rightarrow ۴a+۲b+۴=۰$$

$$y=ax^۲+bx+۴\xrightarrow{(-۴,۰)}a\times(-۴)^۲+b\times(-۴)+۴=۰\Rightarrow ۱۶a-۴b+۴=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ 4a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}\ ,\ b=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2-x+4$$

۱۲۸ ۴ ۳ **۲** ۱ چون نمودار سهمی، محور xها را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند پس $\Delta>0$ و $\frac{-b}{a}>0$ (جمع ۲ ریشه) و $\frac{c}{a}>0$ (ضرب دو ریشه) است.

$$I)\Delta>0 \to b^2-4ac>0 \to 16-4a(a-3)>0 \to 16-4a^2+12a>0$$

$$\to 4a^2-12a-16<0 \to a^2-3a-4<0 \to (a-4)(a+1)<0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1<a<4$$

$$II)\frac{-b}{a}>0 \to \frac{-4}{a}>0 \to a<0$$

$$III)\frac{c}{a}>0 \to \frac{a-3}{a}>0 \to$$

a	$-\infty$		0		3		$+\infty$
عبارت >0		+	ت‌ن	−	۰	+	

$\Longrightarrow a<0$ یا $a>3$

از اشتراک این سه جواب به $-1<a<0$ می‌رسیم، چون رأس سهمی زیر محور xها قرار دارد بنابراین عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac-b^2}{4a}$ باید منفی باشد.

$$\frac{4ac-b^2}{4a}<0 \to \frac{\overbrace{b^2-4ac}^{+}}{4a}>0 \to 4a>0 \to a>0$$

و توجه کنید که $a>0$ و $-1<a<0$ اشتراکی با هم ندارند.

۱۲۹ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا تابع درجه‌ی دوم داده شده را به‌صورت $f(x)=ax^2+2x+2a-1$ مرتب می‌کنیم. چون تابع درجه‌ی دوم دارای Min است بنابراین ضریب x^2 باید مثبت باشد یعنی $a>0$ است (I). چون تابع دارای Min است و در ربع سوم قرار دارد پس محور xها را در دو نقطه‌ی متمایز قطع می‌کند یعنی $\Delta>0$ است.

$$\Delta>0 \to b^2-4ac>0 \to 4-4a(2a-1)>0 \to 4-8a^2+4a>0$$

$\Longrightarrow 8a^2-4a-4<0 \Longrightarrow$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
عبارت <0		+	۰	−	۰	+	

$\Longrightarrow -\frac{1}{2}<a<1 \quad : II$

از اشتراک I و II به جواب $0<a<1$ می‌رسیم.

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $-\frac{b}{2a}$ نیز باید منفی باشد.

$\frac{-b}{2a}<0 \to \frac{-2}{2a}<0 \to$ برقرار است چون $0<a<1$ است.

۱۳۰ **۴** ۳ ۲ ۱ نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$ روی شکل قرار دارد پس مختصات این نقطه در تابع صدق می‌کند.

$$\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{صدق}} -1=0+0+b \to b=-1 \to f(x)=(a-5)x^2+(a+3)x-1$$

تابع درجه‌ی دوم بر محور xها مماس است بنابراین دلتا باید صفر باشد.

$$\Delta=0 \to b^2-4ac=0 \to (a+3)^2-4(a-5)(-1)=0 \to a^2+9+6a+4a-20=0$$

$$\to a^2+10a-11=0 \to (a+11)(a-1)=0 \to a=-11, a=1\ (I)$$

چون تابع در سمت چپ محور yها بر محور xها مماس شده است پس ریشه‌ی مضاعف یعنی $-\frac{b}{2a}$ باید منفی باشد.

$\frac{-a-3}{2a-10}<0 \to$

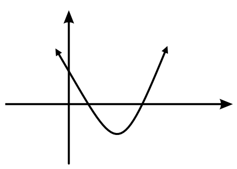
a	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
عبارت <0		−	۰	+	ت‌ن	−	

$\to a<-3$ یا $a>5\ (II)$

از اشتراک I و II به جواب $a=-11$ می‌رسیم.

۱۳۱ ۴ ۳ **۲** ۱

برای آنکه تابع $y=ax^2+bx+c$ فقط از ناحیهٔ سوم عبور نکند باید $a>0$، $\Delta>0$، $S>0$ و $P\geq0$ باشد.



$$a>0 \to a>0$$

$$\Delta>0 \to b^2-4ac>0 \to a^2-4a(2a-1)>0 \to a^2-8a^2+4a>0$$

$$\to -7a^2+4a>0 \to a(-7a+4)>0 \to 0<a<\frac{4}{7}$$

$S > ۰ \to -\frac{b}{a} > ۰ \to \frac{a}{a} > ۰ \to ۱ > ۰$ برقرار است.

$P \geq ۰ \to \frac{c}{a} \geq ۰ \to \frac{۲a-۱}{\underbrace{a}_{+}} \geq ۰ \to ۲a - ۱ \geq ۰ \to a \geq \frac{۱}{۲}$

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به جواب $\frac{۱}{۲} \leq a < \frac{۴}{۷}$ می‌رسیم.

۱۳۲ ۴ ۳ **۲** ۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ اول: چون سهمی رو به بالا است پس $a > ۰$ است و عرض از مبدأ سهمی، منفی است پس $c < ۰$ است در ضمن طول رأس سهمی، منفی است یعنی:

$\underbrace{\frac{-b}{۲a}}_{+} < ۰ \longrightarrow -b < ۰ \longrightarrow b > ۰ \xrightarrow{a>۰,b>۰,c<۰} abc < ۰ \longrightarrow$ گزینهٔ اول نادرست است.

گزینهٔ دوم: از روی شکل مشخص است که تابع دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است که اندازهٔ ریشهٔ منفی بزرگ‌تر از ریشهٔ مثبت است یعنی: $\alpha\beta < ۰$ و $\alpha + \beta < ۰$

پس : $\alpha^۳ + \beta^۳ = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{-}^۳ - \underbrace{۳\underbrace{\alpha\beta}_{-}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-}}_{+} < ۰ \longrightarrow$ گزینهٔ دوم درست است.

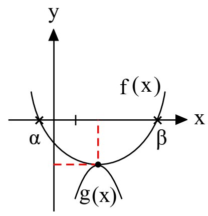
گزینهٔ سوم: تابع داده شده دارای ۲ ریشهٔ حقیقی متمایز است یعنی:

$\Delta > ۰ \longrightarrow b^۲ - ۴ac > ۰ \longrightarrow b^۲ > ۴ac \longrightarrow \frac{b^۲}{۴} > ac \longrightarrow$ گزینهٔ سوم نادرست است.

گزینهٔ چهارم: می‌دانیم $x_S = \frac{\alpha+\beta}{۲}$ و $y_S = \frac{-\Delta}{۴a}$ است پس $f(\frac{\alpha+\beta}{۲}) = \frac{-\Delta}{۴a}$ بوده و این گزینه نیز نادرست است.

۱۳۳ **۴** ۳ ۲ ۱ مرحلهٔ اول: ابتدا شکل مسأله را تصور می‌کنیم. برای این کار، اول رأس سهمی $g(x)$ را پیدا می‌کنیم.

$x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۴}{-۲} = ۲ \Rightarrow y_S = g(۲) = -۱$



پس رأس سهمی $f(x)$ هم مشخص شد:

$\left| \begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix} \right. \xrightarrow{x_S=۲} \frac{\alpha+\beta}{۲} = ۲ \Rightarrow \alpha + \beta = ۴ \quad (I)$

مرحلهٔ دوم: در صورت سؤال تفاضل ریشه‌ها داده شده است (۶ واحد)، پس داریم:

$\beta - \alpha = ۶ \; (II) \xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} \overbrace{\alpha+\beta}^{\frac{-b}{a}} = ۴ \\ \beta - \alpha = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۱ \\ \beta = ۵ \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta) = a(x+۱)(x-۵) \quad (*)$

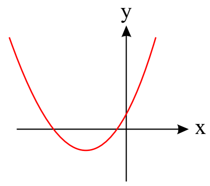
مرحلهٔ آخر جایگذاری رأس سهمی در معادلهٔ $(*)$ است:

$\left| \begin{matrix} ۲ \\ -۱ \end{matrix} \right. \xrightarrow{(*)} a(۲+۱)(۲-۵) = -۱ \Rightarrow -۹a = -۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۹}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۹}(x^۲ - ۴x - ۵) \Rightarrow$ مجموع ضرایب $= \frac{۱}{۹}(۱ - ۴ - ۵) = -\frac{۸}{۹}$

۱۳۴ ۴ **۳** ۲ ۱

سهمی می‌تواند از نواحی اول و دوم و سوم عبور کند.



$\Delta > ۰ \to b^۲ - ۴ac > ۰ \to (a-۲)^۲ - ۴(a+۶) > ۰ \to a^۲ + ۴ - ۴a - ۴a - ۲۴ > ۰$

$\to a^۲ - ۸a - ۲۰ > ۰ \to (a-۱۰)(a+۲) > ۰ \to a < -۲$ یا $a > ۱۰$

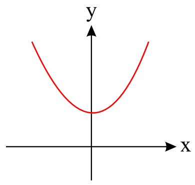
$x^۲$ ضریب $> ۰ \to a + ۶ > ۰ \to a > -۶$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} < ۰ \to -\frac{b}{\underbrace{a}_{+}} < ۰ \to -b < ۰ \to b > ۰ \to a - ۲ > ۰ \to a > ۲$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها} \geq ۰ \to \frac{c}{a} \geq ۰ \to \frac{۱}{a+۶} \geq ۰ \to a + ۶ > ۰ \to a > -۶$$

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به $a > ۱۰$ می‌رسیم.

سهمی می‌تواند از نواحی اول و دوم عبور کند.



$$x^۲ \text{ ضریب} > ۰ \to a + ۶ > ۰ \to a > -۶$$

$$\Delta \leq ۰ \xrightarrow[\text{ممکن است بر محور طول مماس باشد.}]{\text{مساوی به خاطر آن است که سهمی}} b^۲ - ۴ac \leq ۰ \to a^۲ - ۸a - ۲۰ \leq ۰ \to (a - ۱۰)(a + ۲) \leq ۰ \to -۲ \leq a \leq ۱۰$$

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به $-۲ \leq a \leq ۱۰$ می‌رسیم.

$$\begin{cases} a > ۱۰ \\ -۲ \leq a \leq ۱۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} a \geq -۲$$

۱۳۵ (۴) (۳) (۲) (۱) برای محاسبهٔ مساحت مثلث مورد نظر باید قاعده و سپس ارتفاع آن را بدست آوریم. قاعدهٔ مثلث، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها و ارتفاع مثلث، قدر مطلق عرض رأس سهمی است.

$$S = \frac{|\alpha - \beta| \times |y_S|}{۲} = \frac{|\frac{\sqrt{\Delta}}{a}| \times |\frac{۴ac - b^۲}{۴a}|}{۲}$$

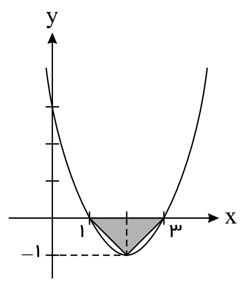
$$\frac{|\frac{\sqrt{m^۲ - ۴m + ۴}}{۱}||\frac{۴m - ۴ - m^۲}{۴}|}{۲} = \frac{|\sqrt{(m-۲)^۲}||\frac{m^۲ - ۴m + ۴}{۴}|}{۲}$$

$$= \frac{|m - ۲||(m - ۲)^۲|}{۸} = \frac{|(m - ۲)^۳|}{۸} = ۱ \to |m - ۲| = ۲$$

$$\to \begin{cases} m - ۲ = ۲ \to m = ۴ \\ m - ۲ = -۲ \to m = ۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

برای درک مسئله به شکل زیر توجه کنید.

$$m = ۴ \to y = x^۲ - ۴x + ۳ \to$$



۱۳۶ (۴) (۳) (۲) (۱) برای آنکه نمودار این تابع و محور xها فقط در یک نقطه مشترک باشند، باید معادلهٔ $(۱ - m)x^۲ + (۲m - ۱)x - (m + ۲) = ۰$ فقط دارای یک ریشه باشد.

حالت اول) $\Delta = ۰$ و معادلهٔ درجهٔ دو، یک ریشه مضاف داشته باشد (نمودار تابع f بر محور x ها مماس شود):

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۲m - ۱)^۲ + ۴(۱ - m)(m + ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow (۴m^۲ - ۴m + ۱) + (-۴m^۲ - ۴m + ۸) = ۰ \Rightarrow -۸m + ۹ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۹}{۸}$$

حالت دوم) اگر در معادلهٔ $(۱ - m)x^۲ + (۲m - ۱)x - (m + ۲) = ۰$، ضریب $x^۲$ صفر شود، یعنی:

$$۱ - m = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

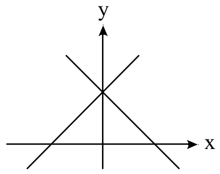
در این صورت، معادلهٔ فوق به معادلهٔ درجهٔ اول $x - ۳ = ۰$ تبدیل می‌شود و باز هم دارای یک ریشه است.

پس مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با:

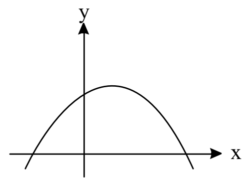
$$\frac{۹}{۸}+۱=\frac{۱۷}{۸}$$

۱۳۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

با توجه به اطلاعات مسئله، می‌توان گفت که نمودارهای فرضی f و g، به صورت زیر هستند:



پس $y=(f\cdot g)(x)$، دارای یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی است که در نتیجه، نمودار آن یک سهمی به شکل زیر خواهد بود، توجه کنید چون علامت شیب‌های f و g متفاوت است، دهانهٔ سهمی $y=(f\cdot g)(x)$ رو به پایین خواهد بود.



با توجه به شکل بالا پس این سهمی، از چهار ناحیه می‌گذرد.

۱۳۸ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا باید تابع $f(x)$ را به‌دست آوریم:

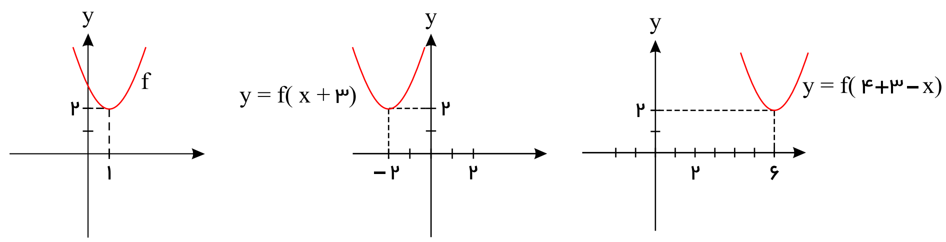
$$۲x+۳=t \to ۲x=t-۳ \to x=\frac{t-۳}{۲}$$

پس: $f(t)=(\frac{t-۳}{۲}-۱)^۲-(\frac{t-۳}{۲}) \to f(t)=(\frac{t-۳-۲}{۲})^۲-(\frac{t-۳}{۲}) \to f(t)=(\frac{t-۵}{۲})^۲-(\frac{t-۳}{۲}) \to f(t)=\frac{t^۲+۲۵-۱۰t}{۴}-(\frac{t-۳}{۲})$

$$\to f(t)=\frac{۱}{۴}t^۲+\frac{۲۵}{۴}-\frac{۵}{۲}t-\frac{۱}{۲}t+\frac{۳}{۲} \to f(x)=\frac{۱}{۴}x^۲-۳x+\frac{۳۱}{۴}$$

در این تابع درجهٔ دوم $\Delta>۰\ ,\ S>۰\ ,\ P>۰$ است. بنابراین از ۳ ناحیهٔ محورهای مختصات عبور می‌کند.

۱۳۹ ۱ ۲ **۳** ۴



با توجه به طول رأس‌ها $(x=۶\ ,\ x=۱)$ نسبت به خط $x=\frac{۶+۱}{۲}=۳/۵$ متقارن‌اند.

۱۴۰ ۱ ۲ ۳ **۴** نقاط $(۰,c)$ و $(\frac{c}{۲},c)$ روی سهمی قرار دارند؛ دو نقطه با عرض یکسان، بنابراین طول رأس سهمی میانگین طول‌های این دو نقطه یعنی $\frac{c}{۴}$ است.

$$\Rightarrow y=a(x-\frac{c}{۴})^۲$$

نقطهٔ $(۰,c)$ در مختصات تابع صدق می‌کند:

$$c=a(۰-\frac{c}{۴})^۲=a\cdot\frac{c^۲}{۱۶}\Rightarrow a=\frac{۱۶}{c}$$

پس ضابطهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$y=a(x-\frac{c}{۴})^۲ \xrightarrow{a=\frac{۱۶}{c}} y=\frac{۱۶}{c}(x-\frac{c}{۴})^۲$$

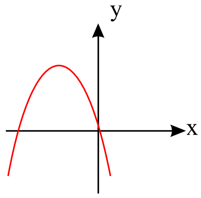
$$\Rightarrow y=\frac{۱۶}{c}(x^۲+\frac{c^۲}{۱۶}-x\frac{c}{۲}) \Rightarrow y=\frac{۱۶}{c}x^۲-۸x+c \Rightarrow b=-۸$$

۱۴۱ ۱ ۲ ۳ **۴** سهمی فقط از ربع اول نگذرد این است که $a<۰$، $\Delta>۰$، $S<۰$ و $P>۰$ است (مطابق شکل زیر). پس در این سؤال داریم:

$a-۳<۰ \Rightarrow a<۳$ (۱)

$\Delta = a^۲+۴(a-۳)=a^۲+۴a-۱۲=(a+۶)(a-۲)>۰ \Rightarrow a<-۶$ یا $a>۲$ (۲)

$P=\frac{۱}{a-۳}>۰ \Rightarrow a-۳<۰$ همان شرط (۱) است $S=-\frac{a}{a-۳}<۰ \Rightarrow \frac{a}{a-۳}<۰ \Rightarrow \frac{a}{a-۳}>۰ \Rightarrow a<۰$ یا $a>۳$ (۳)



اشتراک مجموعه‌های (۱)، (۲) و (۳) بازهٔ $a<-۶$ است.

۱۴۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)** اگر f و g توابع درجهٔ یک باشند، نمودار $y=(f\cdot g)(x)$ یک سهمی است که برای عبور از دو ناحیه نباید دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، پس ریشه‌های f و g باید یکسان باشند:

$$f(x)=a(x-\alpha)\ ,\ g(x)=b(x-\alpha)\rightarrow h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a(x-\alpha)}{b(x-\alpha)}=\frac{a}{b}$$

اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ اول: نادرست است زیرا $D_h=\mathbb{R}-\{\alpha\}$

گزینهٔ دوم: نادرست است زیرا تابع ثابت، یک‌به‌یک نیست.

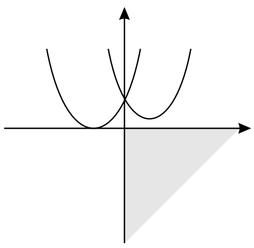
گزینهٔ سوم: نادرست است چون تابع ثابت است، برد آن تک‌عضوی است.

گزینهٔ چهارم: درست است زیرا:

$$(f\cdot g)(x)=\frac{a}{b}\rightarrow ab(x-\alpha)^۲=\frac{a}{b}\rightarrow (x-\alpha)^۲=\frac{۱}{b^۲}\rightarrow x-\alpha=\pm\frac{۱}{b}\rightarrow x=\alpha\pm\frac{۱}{b}$$

۱۴۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴) در این حالات تابع درجهٔ دوم از ناحیهٔ چهارم عبور نمی‌کند.

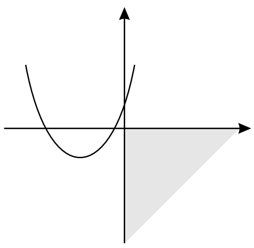
حالت اول:



مماس بر محور طول یا بالای محور طول →

$$\left.\begin{array}{l} x^۲ \text{ ضریب } >۰\rightarrow a+۶>۰\rightarrow a>-۶\\ \Delta\le ۰\rightarrow (a-۲)^۲-۴(a+۶)\le ۰\rightarrow a^۲+۴-۴a-۴a-۲۴\le ۰\\ \rightarrow a^۲-۸a-۲۰\le ۰\rightarrow (a-۱۰)(a+۲)\le ۰\rightarrow -۲\le a\le ۱۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} -۲\le a\le ۱۰$$

حالت دوم:



$$\left.\begin{array}{l} x^۲ \text{ ضریب } >۰\rightarrow a+۶>۰\rightarrow a>-۶\\ b>۰\rightarrow a-۲>۰\rightarrow a>۲\\ \Delta>۰\rightarrow (a-۲)^۲-۴(a+۶)>۰\rightarrow a^۲+۴-۴a-۴a-۲۴>۰\\ \rightarrow a^۲-۸a-۲۰>۰\rightarrow (a-۱۰)(a+۲)>۰\rightarrow a<-۲ \text{ یا } a>۱۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} a>۱۰$$

از اجتماع دو جواب به‌دست آمده به جواب $a\ge -۲$ می‌رسیم.

۱۴۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴) ضابطهٔ تابع f را به‌صورت $f(x)=a(x-k)^۲+h$ در نظر می‌گیریم. چون رأس سهمی تابع f نقطهٔ $(۲,۳)$ است، پس $k=۲$ و $h=۳$، یعنی $f(x)=a(x-۲)^۲+۳$. نمودار از نقطهٔ $(۰,۲)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(۰)=۲\Rightarrow a(۰-۲)^۲+۳=۲\Rightarrow ۴a=-۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۴}(x-۲)^۲+۳=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۲$$

اگر α و β صفرهای تابع f باشند، آن‌گاه:

$$\alpha+\beta=-\frac{۱}{-\frac{۱}{۴}}=۴\quad ,\quad \alpha\beta=\frac{۲}{-\frac{۱}{۴}}=-۸$$

بنابراین مجموع مربعات صفرهای تابع f برابر است با:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2(-8)=32$$

۱ ۲ **۳** ۴ **۱۴۵** طول پایین‌ترین نقطهٔ سهمی به معادلهٔ $y=2x^2-4x+b$ برابر است با $x=-\dfrac{-4}{2\times 2}=1$ و عرض این نقطه برابر است:

$$y=2\times 1^2-4\times 1+b=b-2$$

طول بالاترین نقطهٔ سهمی به معادلهٔ $y=-x^2+ax+3$ برابر است با:

$$x=-\frac{a}{2(-1)}=\frac{a}{2}$$

پس $\dfrac{a}{2}=1\Rightarrow a=2$. عرض این نقطه برابر است با:

$$y=-1+2+3=4$$

بنابراین $b-2=4\to b=6$.

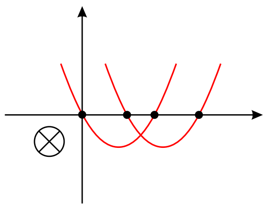
نقطهٔ برخورد سهمی $y=2x^2-4x+6$ با محور عرض‌ها نقطهٔ $(0,6)$ و نقطهٔ برخورد سهمی $y=-x^2+2x+3$ با محور عرض‌ها نقطهٔ $(0,3)$ است. فاصلهٔ این دو نقطه برابر ۳ است.

۱ ۲ ۳ **۴** **۱۴۶** با توجه به شکل زیر، برای اینکه نمودار فقط از ناحیهٔ سوم نگذرد باید شرایط زیر را داشته باشد:

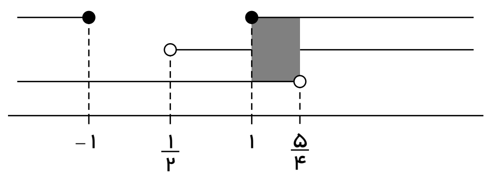
$$1)\ \Delta=b'^2-4a'c'>0\Rightarrow(1-2a)^2-4(1)(a^2-1)>0\Rightarrow 1-4a+4a^2-4a^2+4>0\Rightarrow 4a<5\Rightarrow a<\frac{5}{4}\quad(1)$$

$$2)\ S>0\Rightarrow-\frac{b'}{a'}-\frac{1-2a}{1}>0\Rightarrow-1+2a>0\Rightarrow 2a>1\Rightarrow a>\frac{1}{2}\quad(2)$$

$$3)\ P\geq 0\Rightarrow\frac{c'}{a'}\frac{a^2-1}{1}\geq 0\Rightarrow a^2-1\geq 0\Rightarrow a^2\geq 1\Rightarrow a\geq 1\ \text{یا}\ a\leq -1\quad(3)$$



سه شرط بالا را مطابق نمودار زیر را اشتراک می‌گیریم؛ داریم:



$$\xrightarrow{(1)\cap(2)\cap(3)}[1,\frac{5}{4})$$

۱ ۲ **۳** ۴ **۱۴۷** طول رأس سهمی $x=-\dfrac{b}{2a}$ است. پس:

$$-\frac{b}{2a}=2\Rightarrow b=-4a$$

پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=ax^2-4ax-2$ است. با قرار دادن $x=2$ در معادلهٔ سهمی عرض آن را حساب می‌کنیم:

$$y=4a-8a-2=-4a-2$$

بنابراین با توجه به نمودار داریم:

$$-4a-2=2\Rightarrow a=-1\xrightarrow{b=-4a}b=4$$

یعنی معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=-x^2+4x-2$ است. طول نقطهٔ برخورد سهمی با محور طول‌ها مورد سؤال است. پس در معادلهٔ سهمی قرار می‌دهیم $y=0$.

$$-x^2+4x-2=0\Rightarrow x^2-4x+2=0\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=16-8=8}\begin{cases}x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}\\[2mm] x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2}\end{cases}$$

طبق شکل، β ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ فوق است و بزرگتر از ۲ است. پس:

$$\beta=2+\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ **۱۴۸** طول نقطهٔ B با همان رأس سهمی، میانگین طول‌های دو نقطهٔ هم عرض A و C است.

$$x_B=\frac{x_C+x_A}{2}=\frac{0+4}{2}=2$$

باتوجه به مختصات $B\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$ (رأس سهمی)، می‌توان ضابطهٔ سهمی را به صورت $f(x)=a(x-2)^2+1$ نوشت. با جایگذاری مختصات نقطهٔ $C\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$ در ضابطهٔ سهمی داریم:

$$f(x)=a(x-2)^2+1\xrightarrow{C\left|\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right.}-1=a(0-2)^2+1\to a=\frac{-1}{2}\to f(x)=\frac{-1}{2}(x-2)^2+1$$

برای بدست آوردن ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ خواهیم داشت:

$-\frac{1}{2}(x-2)^2+1=0 \to (x-2)^2=2 \to x^2-4x+4=2 \to x^2-4x+2=0 \to$ ریشه‌های معادلهٔ موردنظر هستند. β , $\alpha \to \begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=4 \\ p=\alpha\beta=\frac{c}{a}=2 \end{cases}$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{S^2-2p}{p^2}=\frac{16-4}{4}=\frac{12}{4}=3$$

۱۴۹ ۱ **۲** ۳ ۴ نقطهٔ A محل برخورد سهمی با محور yها و B و C محل برخورد سهمی با محور xها و D رأس سهمی می‌باشد. مساحت مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DBC}$ از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{|OA||BC|}{2} \to \begin{cases} x=0 \to y_A=3=OA \\ BC=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{b^2-24}}{2} \end{cases} \xrightarrow[BC=\frac{\sqrt{b^2-24}}{2}]{OA=3} S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{3\times\frac{\sqrt{b^2-24}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{b^2-24}}{4}$$

$$S_{\overset{\Delta}{DBC}}=\frac{|DH||BC|}{2}=\frac{(-24+b^2)\sqrt{b^2-24}}{32}$$

باتوجه به صورت سوال داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=24\,S_{\overset{\Delta}{DBC}} \to \frac{\cancel{3}\cancel{\sqrt{b^2-24}}}{\cancel{4}}=\frac{\cancel{24}\cancel{\sqrt{b^2-24}}}{\cancel{32}} \to b^2-24=1 \to b^2=24 \to b=\pm5 \xrightarrow[\text{باتوجه به نمودار}]{S=\frac{+b}{2}} xS<0 \to \frac{+b}{2}<0 \to b<0 \to b=-5$$

۱۵۰ ۱ ۲ **۳** ۴ اگر α و β صفرهای تابع $f(x)=2x^2-x+m+1$ باشند، داریم:

$|\alpha-\beta|=4 \to \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=4 \to \frac{\sqrt{1-8m-8}}{2}=4 \to \sqrt{-8m-7}=8 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} -8m-7=64 \to m=\frac{-71}{8} \to$ درست است ۱ گزینهٔ*

$\begin{cases} \alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{1}{2} \\ |\alpha-\beta|=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{با فرض } \alpha>\beta} \begin{cases} \alpha+\beta=\frac{1}{2} \\ \alpha-\beta=4 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha=\frac{9}{4} \\ \beta=-\frac{7}{4} \end{cases} \to$ درست است ۲ گزینهٔ*

* خط $y=\frac{-\Delta}{4a}$ بر سهمی مماس است. بنابراین:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=4 \to \frac{\sqrt{\Delta}}{2}=4 \to \sqrt{\Delta}=8 \to \Delta=64 \to y=-\frac{64}{4\times2}=-8$$

پس خط $y=-8$ بر تابع مماس است. بنابراین گزینهٔ ۳ نادرست است.

* خط $x=\frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی است. پس:

$x=\frac{-b}{2a}=\boxed{\frac{1}{4}} \to$ گزینهٔ ۴درست است

۱۵۱ ۱ **۲** ۳ ۴ اگر تابع درجهٔ دوم محور xها را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند معادلهٔ تابع درجهٔ دوم به‌صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ خواهد بود.
بنابراین معادلهٔ تابع درجهٔ دوم به‌صورت زیر خواهد بود.

$$f(x)=a(x-1)(x-3)$$

چون تابع f و خط $y=x-3$ در نقطه به طول $x=2$ متقاطع‌اند، لذا:

$y=x-3 \xrightarrow{x=2} y=2-3=-1 \Rightarrow (2,-1)$ نقطهٔ تقاطع

بنابراین نقطهٔ $(2,-1)$ روی نمودار تابع درجهٔ دوم قرار دارد.

$$f(x)=a(x-1)(x-3) \xrightarrow{(2,-1)} -1=a(2-1)(2-3) \Rightarrow a=1$$
$$\Rightarrow f(x)=(x-1)(x-3) \Rightarrow y=f(x-3)+1=(x-3-1)(x-3-3)+1 \Rightarrow y=f(x-3)+1=(x-4)(x-6)+1$$

برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد تابع با محور yها، به جای x صفر قرار می‌دهیم.

$$x=0 \to y=(0-4)(0-6)+1=25$$

۱۵۲ ۱ ۲ ۳ **۴** به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) اگر در $x=0$ یک خط مماس بر سهمی موردنظر رسم کنیم، شیب خط آن برابر ضریب b است. پس $b<0$ بوده و $\alpha\beta b>0$ می‌باشد. گزینهٔ ۱ نادرست است.

(۲) می‌دانیم نقاط (α,k) و (β,k) دو نقطه از سهمی هستند پس $x_S=\frac{\alpha+\beta}{2}$ با توجه به رابطهٔ $y_S=-\frac{\Delta}{4a}$ داریم:

$$f(\frac{\alpha+\beta}{2})=-\frac{\Delta}{4a}$$

گزینهٔ ۲ نادرست است.

(۳) سهمی محور xها را در دو نقطه متمایز قطع کرده است. پس $\Delta>0$ است. با توجه به نمودار $a>0$ و $b<0$ است. پس $\frac{c}{b}<\frac{b}{4a} \xleftarrow[4ab<0]{\div 4ab} b^2>4ac \leftarrow \Delta=b^2-4ac>0$

گزینهٔ ۳ نادرست است.

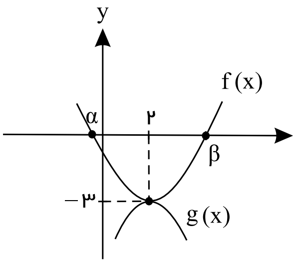
(۴) $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های حقیقی سهمی هستند. بنابراین:

$$x_S = \frac{x_۱ + x_۲}{۲} = \frac{\alpha + \beta}{۲} \to x_۱ + x_۲ = \alpha + \beta \to \beta - x_۲ = x_۱ - \alpha$$

۱۵۳ (۴) (۳) (۲) (۱) خط $y = -۳$ محور تقارن مشترک هر دو سهمی را روی آنها قطع می‌کند پس $y = -۳$ از رأس هر دو سهمی گذشته و با توجه به اینکه محور تقارن سهمی‌ها مشترک است، پس رأس‌های هر دو سهمی بر هم منطبق بوده یعنی هر دو سهمی در رأس‌هایشان بر هم مماس هستند. با توجه به ضابطهٔ سهمی $g(x) = -x^۲ + ۴x - ۷$ مختصات رأس آن برابر است با:

$$S_{g(x)} = S_{f(x)} \Rightarrow S_{g(x)} \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{۲a} = \frac{-۴}{-۲} = ۲ \\ -۳ \end{array} \right. \Rightarrow S_{f(x)} = \left| \begin{array}{l} ۲ \\ -۳ \end{array} \right.$$

با توجه به مسئله، شکل زیر را رسم می‌کنیم و طول پاره‌خطی که سهمی $f(x)$ روی محور طول‌ها جدا می‌کند، برابر تفاضل ریشه‌های سهمی است. از طرفی طول رأس سهمی برابر میانگین ریشه‌های سهمی است. داریم:



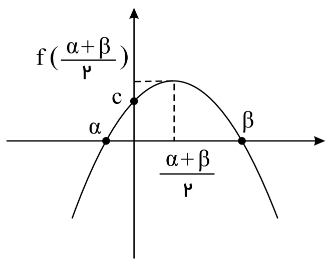
$$\begin{cases} \beta - \alpha = ۵ \\ \frac{\alpha + \beta}{۲} = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = ۵ \\ \beta + \alpha = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{۹}{۲} \\ \alpha = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

با در نظرگرفتن ضابطهٔ سهمی به‌صورت $f(x) = a(x + \frac{۱}{۲})(x - \frac{۹}{۲})$ و جایگذاری رأس سهمی در آن داریم:

$$-۳ = a(۲ + \frac{۱}{۲})(۲ - \frac{۹}{۲}) \Rightarrow -۳ = a \times \frac{۵}{۲} \times (-\frac{۵}{۲}) \Rightarrow a = \frac{۱۲}{۲۵}$$

۱۵۴ (۴) (۳) (۲) (۱) با توجه به نمودار تابع f واضح است که $b > ۰, c > ۰, a < ۰, \beta > ۰, \alpha < ۰$.

بنابراین:



$$\begin{cases} a\alpha > ۰ \\ b\beta > ۰ \end{cases} \Rightarrow a\alpha + b\beta > ۰$$

$$f(\frac{\alpha + \beta}{۲}) > c$$

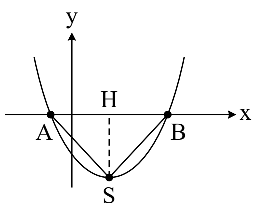
$$f(\alpha) = f(\beta) = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac > ۰ \Rightarrow b^۲ > ۴ac \Rightarrow \frac{b^۲}{۴} > ac$$

$$\begin{cases} ac < ۰ \\ \alpha\beta < ۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{ac}{\alpha\beta} > ۰$$

بنابراین فقط نابرابری گزینهٔ (۴) درست است.

۱۵۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

شکل روبه‌رو می‌تواند سهمی f باشد. برای اینکه مثلث متساوی‌الساقین ASB، متساوی الاضلاع باشد، لازم است $SH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} AB$ باشد، پس داریم:



$$\left| -\frac{\Delta}{۴(۱)} \right| = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \frac{\Delta}{|۱|} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{\Delta^۲}{۱۶} = \frac{۳}{۴}\Delta \Rightarrow \Delta = ۱۲ \Rightarrow ۱۱ - ۴k = ۱۲ \Rightarrow k = -۰٫۲۵$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴
۲	۴
۳	۱
۴	۱
۵	۴
۶	۴
۷	۲
۸	۱
۹	۲
۱۰	۳
۱۱	۴
۱۲	۳
۱۳	۴
۱۴	۲
۱۵	۴
۱۶	۱
۱۷	۱
۱۸	۲
۱۹	۱
۲۰	۴
۲۱	۱
۲۲	۱
۲۳	۲
۲۴	۳
۲۵	۲
۲۶	۱
۲۷	۲
۲۸	۱
۲۹	۱
۳۰	۲
۳۱	۲
۳۲	۴
۳۳	۱
۳۴	۱
۳۵	۲
۳۶	۳
۳۷	۲
۳۸	۲
۳۹	۲
۴۰	۲
۴۱	۲
۴۲	۱
۴۳	۱
۴۴	۴
۴۵	۳
۴۶	۴
۴۷	۲
۴۸	۱
۴۹	۳
۵۰	۱
۵۱	۱
۵۲	۱
۵۳	۱
۵۴	۱
۵۵	۲
۵۶	۳
۵۷	۱
۵۸	۲
۵۹	۲
۶۰	۳
۶۱	۱
۶۲	۲
۶۳	۴
۶۴	۴
۶۵	۳
۶۶	۲
۶۷	۳
۶۸	۲
۶۹	۱
۷۰	۲
۷۱	۲
۷۲	۳
۷۳	۱
۷۴	۱
۷۵	۳
۷۶	۲
۷۷	۱
۷۸	۳
۷۹	۳
۸۰	۳
۸۱	۴
۸۲	۲
۸۳	۱
۸۴	۱
۸۵	۴
۸۶	۳
۸۷	۴
۸۸	۲
۸۹	۳
۹۰	۴
۹۱	۳
۹۲	۳
۹۳	۱
۹۴	۲
۹۵	۲
۹۶	۲
۹۷	۱
۹۸	۳
۹۹	۴
۱۰۰	۴
۱۰۱	۲
۱۰۲	۴
۱۰۳	۴
۱۰۴	۱
۱۰۵	۱
۱۰۶	۲
۱۰۷	۳
۱۰۸	۲
۱۰۹	۳
۱۱۰	۳
۱۱۱	۱
۱۱۲	۲
۱۱۳	۲
۱۱۴	۱
۱۱۵	۴
۱۱۶	۳
۱۱۷	۲
۱۱۸	۳
۱۱۹	۱
۱۲۰	۳
۱۲۱	۱
۱۲۲	۲
۱۲۳	۲
۱۲۴	۴
۱۲۵	۳
۱۲۶	۴
۱۲۷	۳
۱۲۸	۲
۱۲۹	۳
۱۳۰	۴
۱۳۱	۲
۱۳۲	۲
۱۳۳	۴
۱۳۴	۳
۱۳۵	۳
۱۳۶	۳
۱۳۷	۴
۱۳۸	۳
۱۳۹	۳
۱۴۰	۴
۱۴۱	۴
۱۴۲	۴
۱۴۳	۳
۱۴۴	۳
۱۴۵	۳
۱۴۶	۴
۱۴۷	۳
۱۴۸	۱
۱۴۹	۲
۱۵۰	۳
۱۵۱	۲
۱۵۲	۴
۱۵۳	۱
۱۵۴	۴
۱۵۵	۲