نام و نام خانوادگی: سهیل حاج کرم

نام آزمون: ۵۰ تست سخت ماتریس هندسه

دوازدهم

آموزشگاه پرسا

فصل اول : ماتریس‌ها و کاربردها

ماتریس‌ها و اعمال روی آن

معرفی ماتریس و درایه‌های آن

۱ اگر در ماتریس $A=[2i+j]_{n\times n}$ مجموع درایه‌های ستون سوم برابر ۶۰ باشد، مجموع درایه‌های سطر چهارم کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

(۱) ۴۸ (۲) ۵۵ (۳) ۶۱ (۴) ۶۹

۲ اگر $A=[a_{ij}]_{7\times 7}$ و $a_{ij}=ij$ باشد، آنگاه مجموع تمام درایه‌های ماتریس A کدام است؟ سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

(۱) ۴۴۱ (۲) ۱۰۱۵ (۳) ۷۸۴ (۴) ۸۱۹

۳ اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشد طوری که $B^3=I$ و $AB=B^2A$، حاصل ماتریس $(AB^2)^2$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۲

(۱) A (۲) A^2 (۳) B (۴) I

۴ اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $a_{ij}=ij$ و مجموع تمام درایه‌های ماتریس A برابر ۱۲۹۶ باشد، آنگاه n کدام است؟

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۵ اگر $\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۷ & ۱۰ \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، آنگاه حاصل $a+۲b+۳c+۴d$ چقدر است؟

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۶ چند ماتریس اسکالر مانند A وجود دارد به‌طوری که حاصل‌ضرب درایه‌های غیر صفر آن ۶۴ و مجموع تمام درایه‌های آن ۱۲ باشد؟

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۱) چنین ماتریسی وجود ندارد. ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

معرفی ماتریس‌های خاص

۷ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} b & ۴ \\ ۱ & a \end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۸ \end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix} ۱ & -a \\ b & \frac{-۳}{۲} \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر DC یک ماتریس قطری باشد، جمع درایه‌های روی قطر اصلی AB کدام است؟

سخت- ۱۴۰۱ -smart

۱) ۴۰ ۲) ۴۳ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶

جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب اعداد حقیقی در ماتریس

۸) اگر برای دو ماتریس مربعی A و B تساوی‌های $3AB=-4BA$ و $AB^3=-mB^3A$ برقرار باشند، مقدار m کدام است؟

سخت- smart- ۱۴۰۰

۱) $\frac{64}{27}$ ۲) $\frac{16}{9}$ ۳) $-\frac{64}{9}$ ۴) $-\frac{16}{9}$

سخت- smart- ۱۴۰۰

۹) اگر $A^2=\begin{bmatrix}2 & -8\\ 0 & 3\end{bmatrix}$، $B^2=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$ و $B-A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-10 & -5\\ 8 & -10\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-10 & -5\\ 8 & 10\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}10 & 5\\ -8 & -10\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}10 & -5\\ -8 & 10\end{bmatrix}$

ضرب ماتریس‌ها

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱۰) اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$، آنگاه A^{101} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ۴) $-I$

سخت- سراسری- ۱۳۸۴

(۱۱) برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ رابطهٔ $A^2 = \alpha A + \beta I$ برقرار است. دوتایی (α, β) کدام است؟

(۱) $(2, 11)$ (۲) $(2, 13)$ (۳) $(4, 11)$ (۴) $(4, 13)$

سخت- منتا- ۱۳۹۸

(۱۲) اگر $A^3 - 2A^2 + 3A - 2I = \bar{O}$ باشد آنگاه ماتریس A^4 کدام است؟

(۱) $A^2 - 4A + 4I$ (۲) $A^2 - 4A - 4I$ (۳) $A^2 + 4A + 4I$ (۴) $A^2 + 4A - 4I$

سخت- منتا- ۱۳۹۸

(۱۳) اگر $A^2 = A - 2I$ و $A^5 = \alpha A + \beta I$ باشد، حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سخت- منتا- ۱۳۹۸

(۱۴) اگر $AB - BA = I$ باشد، حاصل $AB^2 - B^2A$ کدام است؟

(۱) $2A$ (۲) $2B$ (۳) A^2 (۴) B^2

سخت- ۱۴۰۰ -smart

(۱۵) رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & x \\ 2 & y \end{bmatrix}$ برقرار است. حاصل $\frac{x+y}{x-y}$ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱۶ اگر $A = \begin{bmatrix} \tan x & ۱ \\ \dfrac{-۱}{\cos^۲ x} & -\tan x \end{bmatrix}$، آنگاه حاصل $A^۵ - A^۶ + A^۷$ کدام است؟ $(x \neq \dfrac{k\pi}{۲})$

(۱) I (۲) $-I$ (۳) $۳I$ (۴) $-۳I$

۱۷ اگر $[-۱\ \ ۱] \times A = [۲\ \ ۴]$ و $[۳\ \ ۲] \times A = [۱\ \ -۳]$ باشد، حاصل $[-۱\ \ -۲] \times A$ کدام است؟(A یک ماتریس است.)

سخت- ۱۴۰۰ -smart

(۱) $[-۲\ \ ۲]$ (۲) $[-۳\ \ ۳]$ (۳) $[۲\ \ -۲]$ (۴) $[-۱\ \ ۱]$

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۱۸ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۳ & -۱ \end{bmatrix}$ آنگاه $A^{۱۵!}$ کدام است؟

(۱) A (۲) I (۳) $-A$ (۴) $A^{۱۵}$

سخت- ۱۳۹۴ -smart

۱۹ اگر $A = \begin{bmatrix} \tan x & -۱ \\ \dfrac{۱}{\cos^۲ x} & -\tan x \end{bmatrix}$، آن گاه حاصل $A^{۳۰} + A^{۲۰} + A^۶$ کدام است؟ $(x \neq \dfrac{k\pi}{۲})$

(۱) I (۲) $-I$ (۳) $۳I$ (۴) $-۳I$

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۲۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^{۲}+A^{۳}+\cdots A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۳۵

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۲۱ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد آنگاه حاصل $A+A^{۲}+A^{۳}+\cdots+A^{۲۰}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۴۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲۰ \\ ۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۴۰ & ۰ \\ ۲۰ & ۰ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

۲۲ اگر $A\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}A$ باشد، و درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی باشند، کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های A کدام است؟

سخت- ۱۳۹۶ -smart

۱) ۶
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۸

سخت- منتا- ۱۳۹۲

۲۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد مجموع درایه‌های سطر دوم در ماتریس $A^{۱۰۰۰}$ کدام است؟

۱) ۱۰۰۱
۲) ۲۰۰۱
۳) ۱۰۰۰
۴) ۲۰۰۰

۵۰ تست سخت ماتریس هندسه دوازدهم

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۲۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۳ & ۱ \end{bmatrix}$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $(A-۲I)(A^۲+۲A+I)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۱۲ ۴) -۱۲

سخت- منتا- ۱۳۹۹

۲۵ با توجه به رابطهٔ $\begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۸ \\ ۸ & ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y & x \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۱ & y \end{bmatrix}$، حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

سخت- منتا- ۱۳۹۹

۲۶ ماتریس $A=\begin{bmatrix} \frac{۱}{\cos x} & -\tan x \\ \tan x & \frac{-۱}{\cos x} \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس $A^{۱۰}+A^{۷}+A^{۵}$ کدام است؟ $(x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲})$

۱) $۲A+I$ ۲) $A-۲I$ ۳) $۲A-I$ ۴) $-I$

۲۷ اگر $A=[a_{ij}]_{۴\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۵}$ و $C=AB$ باشد، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس C از کدام رابطه به دست می‌آید؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) $\sum_{i=۱}^{۴} a_{۲i}b_{i۳}$ ۲) $\sum_{i=۱}^{۳} a_{۲i}b_{i۳}$ ۳) $\sum_{i=۱}^{۴} a_{i۲}b_{۳i}$ ۴) $\sum_{i=۱}^{۳} a_{i۲}b_{۳i}$

۲۸ در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۲n+۱}+A^{۲n}$ برابر ۱۴۵۸ باشد، n کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۲

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۹ در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های $A^{۱۰}$ کدام است؟

سخت- آزاد عصر- ۱۳۸۵

(۱) $۲^{۱۰}$ (۲) $۲^{۱۱}$ (۳) $۲^{۱۲}$ (۴) $۲^{۹}$

۳۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ در ماتریس $A^{۱۰۰}$ حاصل جمع درایه‌ها کدام است؟

سخت- آزاد صبح- ۱۳۸۲

(۱) -۱ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۳

۳۱ اگر $A=\begin{bmatrix} x & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & z & y \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۳y & -۳ \\ z+۲ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و AB ماتریس اسکالر باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

سخت- منتآزمون- ۱۴۰۲

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۲) ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ با تعریف $a_{ij}=۲i+j$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس A برابر ۴۵ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های سطر دوم این ماتریس کدام است؟

سخت- ۱۳۹۹ -smart

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۳۳) اگر $[۲\quad ۱]\times A=[۳\quad ۵]$ و $[۳\quad ۴]\times A=[-۱\quad ۲]$ باشد، حاصل $[۸\quad ۹]\times A$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) $[۱\quad ۹]$ ۲) $[۱\quad -۹]$ ۳) $[-۱\quad ۹]$ ۴) $[-۱\quad -۹]$

۳۴) در ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&۰\\۱&۱\end{bmatrix}$ حاصل $A^n-A^{n-۱}$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۲

۱) $\begin{bmatrix}۲^{n-۱}&۰\\۱&۰\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۲^{n-۱}&۰\\۰&۰\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۲^{n-۱}&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۲^{n-۱}&۰\\۲^{n-۱}&۰\end{bmatrix}$

۳۵) اگر برای ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B روابط $BA+A=B$ و $AB+B=A$ برقرار باشد، آنگاه چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح‌اند؟ سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

الف) $B=\overline{O}$ ب) $B^{۲}=I$

ج) $AB=\overline{O}$ د) $A^{۲}=\overline{O}$

هـ) $B=A$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

smart- ۱۳۹۹ -سخت

۳۶) معادلهٔ $\begin{bmatrix} ۲ & x & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & x & -۱ \\ x & ۱ & ۲ \\ -۲ & -۴ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ a \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$ به‌ازای کدام مقدار a، ریشهٔ مضاعف دارد؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۳۷) ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ با درایه‌های $A_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-j\ ;\ i>j \\ i+j\ ;\ i=j \\ j^{۲}-i\ ;\ i<j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ با درایه‌های $b_{ij}=ij$ مفروض‌اند. حاصل $\sum_{k=1}^{۳} a_{۱k}b_{k۲}$ چقدر است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) ۴۶ ۲) ۵۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۳۸) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ و $A+۴B=O$ آنگاه حاصل $A(A+۲B)(۲A-B)(A+B)$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۲

۱) $\frac{۲۷}{۳۲}A$
۲) $-\frac{۲۷}{۳۲}A$
۳) I
۴) $\overline{O}$

۳۹) ماتریس‌های مربعی A و B هم‌مرتبه بوده و ماتریس $۳B^۲A-BA$ ماتریسی اسکالر است که مجموع تمام درایه‌هایش صفر است. ماتریس $B^۳A$ چند برابر ماتریس $AB^۶$ است؟

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۱) ۳
۲) ۹
۳) ۲۷
۴) ۸۱

۴۰) چه تعداد از گزاره‌های زیر دربارهٔ ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B درست است؟

سخت- ۱۳۹۹ -smart

الف) اگر ماتریس AB معلوم باشد، بی‌شمار ماتریس ممکن برای A و B وجود دارد.

ب) اگر ماتریس $A^۲$ معلوم باشد دقیقاً یک ماتریس منحصربه‌فرد برای A وجود دارد.

پ) اگر ماتریس AB قطری باشد، ماتریس BA هم قطعاً قطری است.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴۱) اگر $B=\begin{bmatrix} \tan x & ۰ \\ ۰ & \cot x \end{bmatrix}$ آنگاه $B^{۱۰۰۰}+B^{۹۹۹}$ کدام است؟ (درایه‌های ماتریس B تعریف شده هستند.)

متوسط- منتا- ۱۳۹۲

۱) I
۲) B
۳) $\begin{bmatrix} \tan x & ۱ \\ ۱ & \cot x \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱ & \tan x \\ \cot x & ۱ \end{bmatrix}$

۴۲) فرض کنید $A=[a_{ij}]_{۹۹۹\times۹۹۹}$ و $a_{ij}=\begin{cases}۰ & ; \quad i+j\neq ۱۰۰۰\\ -۱ & ; \quad i+j=۱۰۰۰\end{cases}$ در این صورت مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{۱۰۰۰}+A^{۱۰۰۱}$ چقدر است؟

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۱) ۹۹۸　　۲) -۹۹۹　　۳) ۱۰۰۰　　۴) -۱۰۰۱

۴۳) اگر $AB=B$ و $BA=A$ حاصل $(A+B)(A-B)$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) $۲A-۲B$　　۲) $A-B$　　۳) $۲A+۲B$　　۴) $A+B$

۴۴) اگر $A=\begin{bmatrix}\cos^۲\alpha & \frac{\sin ۲\alpha}{۲}\\ \frac{\sin ۲\alpha}{۲} & \sin^۲\alpha\end{bmatrix}$ درایهٔ سطر اول و ستون دوم ماتریس $A^{۱۰}$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) $\sin ۲\alpha$　　۲) $\sin^۲\alpha$　　۳) $\frac{\sin ۲\alpha}{۲}$　　۴) $\cos^۲\alpha$

۴۵) ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i;i>j \\ i+j;i=j \\ |i^{۲}-j^{۲}|;i<j \end{cases}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $b_{ij}=ij$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس AB چقدر است؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۴۰ ۴) ۱۵۰

۴۶) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و $AB=B$ و $BA=A$ باشد، آنگاه حاصل $(A+B)^{۳}$ کدام است؟

سخت- خوشخوان- ۱۳۹۸

۱) $A+B$ ۲) $۲(A+B)$ ۳) $۳(A+B)$ ۴) $۴(A+B)$

۴۷) اگر $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $B^{۲}(B+I)^{۶}$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۲

۱) B ۲) $۶B$ ۳) $۶۴B$ ۴) $۳۲B$

۴۸) برای ماتریس مربعی A داریم $A^{۲}=A$، حاصل $A(۷A-۵I)^{۲۰}$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۲

۱) $۲^{۲۰}A$ ۲) $۲^{۲۰}I$ ۳) $۲^{۲۱}A$ ۴) $۲^{۲۱}I$

۴۹ ماتریس مربعی A طوری مفروض است که $A^{۳} = \overline{O}$، حاصل $A(۳I - A)^{۵}$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۲

(۱) $۲۴۳I - ۴۰۵A$
(۲) $۲۴۳A - ۴۰۵A^{۲}$
(۳) $۲۴۳A + ۴۰۵A^{۲}$
(۴) $۲۴۳I + ۴۰۵A$

۵۰ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ a & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b & -۳ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$ و رابطه $(۲A + B)(A - ۲B) = ۲(A^{۲} - B^{۲} - ۲AB) + AB$ برقرار باشد، حاصل $a^{۲} - b^{۲}$ کدام است؟ سخت- ۱۴۰۱ -smart

(۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۳
(۴) ۹

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا ماتریس A را می‌سازیم:

$$A=[۲i+j]_{n\times n}=\begin{bmatrix} ۲+۱ & ۲+۲ & ۲+۳ & \cdots & ۲+n \\ ۴+۱ & ۴+۲ & ۴+۳ & \cdots & ۴+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۲n+۱ & ۲n+۲ & ۲n+۳ & \cdots & ۲n+n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\text{مجموع درایه‌های ستون سوم}=۶۰\to(۲+۴+\cdots+۲n)+(\underbrace{۳+۳+\cdots+۳}_{n\text{بار}})=۶۰$$

$$۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}+۳n=۶۰\to n^۲+۴n-۶۰=۰\to\begin{cases} n=۶ \\ n=-۱۰ \ \text{غق} \end{cases}$$

$$\text{مجموع درایه‌های سطر چهارم}=(۸+۸+۸+۸+۸+۸)+(۱+۲+۳+۴+۵+۶)=۴۸+۲۱=۶۹$$

۲ ۱ ۲ **۳** ۴ ماتریس A طبق تعریف به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ ۲ & ۲\times۲ & ۲\times۳ & ۲\times۴ & ۲\times۵ & ۲\times۶ & ۲\times۷ \\ ۳ & ۳\times۲ & ۳\times۳ & ۳\times۴ & ۳\times۵ & ۳\times۶ & ۳\times۷ \\ ۴ & ۴\times۲ & ۴\times۳ & ۴\times۴ & ۴\times۵ & ۴\times۶ & ۴\times۷ \\ ۵ & ۵\times۲ & ۵\times۳ & ۵\times۴ & ۵\times۵ & ۵\times۶ & ۵\times۷ \\ ۶ & ۶\times۲ & ۶\times۳ & ۶\times۴ & ۶\times۵ & ۶\times۶ & ۶\times۷ \\ ۷ & ۷\times۲ & ۷\times۳ & ۷\times۴ & ۷\times۵ & ۷\times۶ & ۷\times۷ \end{bmatrix}$$

یعنی سطر i ام، i برابر سطر اول است. مجموع درایه‌های سطر اول با $\frac{۷\times۸}{۲}$ یعنی ۲۸ برابر است. پس:

$$\text{مجموع درایه‌های } A=۱\times۲۸+۲\times۲۸+\cdots+۷\times۲۸$$
$$=۲۸(۱+۲+\cdots+۷)=۲۸\times۲۸=۷۸۴$$

۳ ۱ **۲** ۳ ۴ با توجه به فرض سوال داریم:

$$(AB^۲)^۲=AB^۲AB^۲=AB^۲(AB)B=AB^۲(B^۲A)B$$

می‌دانیم $B^۳=I$ می‌باشد پس $B^۴=B$ می‌باشد.

$$=AB^۴AB=AB(AB)=AB(B^۲A)=AB^۳A=AIA=A^۲$$

۴ ۱ **۲** ۳ ۴ مجموع درایه‌های سطر اول برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}=۱+۲+\cdots+n$ است. همچنین درایه‌های سطر kام، k برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است، پس داریم:

$$\text{مجموع درایه‌های } A=\frac{n(n+۱)}{۲}+۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}+\cdots+n\times\frac{n(n+۱)}{۲}=(۱+۲+\cdots+n)\frac{n(n+۱)}{۲}=[\frac{n(n+۱)}{۲}]^۲$$

پس:

$$\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲=۱۲۹۶\Rightarrow\frac{n(n+۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow n=۸$$

۵ ۱ **۲** ۳ ۴ جمع ماتریسی سمت راست را انجام داده و درایه‌های متناظر در دو طرف را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۷ & ۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a+b+c+d & a-b+c+d \\ a+b-c+d & a+b+c-d \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -a+b+c+d=۵ \\ a-b+c+d=۶ \\ a+b-c+d=۷ \\ a+b+c-d=۱۰ \end{cases}\xrightarrow{(+)}۲(a+b+c+d)=۲۸\Rightarrow a+b+c+d=۱۴$$

حال معادلهٔ اخیر را با هر کدام از معادلات بالا حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a+b+c+d=۱۴ \\ -a+b+c+d=۵ \end{cases}\Rightarrow ۲a=۹\Rightarrow a=\frac{۹}{۲}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$b=۴,c=\frac{۷}{۲},d=۲$$

درنتیجه:

$$a+۲b+۳c+۴d=\frac{۹}{۲}+۸+\frac{۲۱}{۲}+۸=۳۱$$

۶ ۱ ۲ **۳** ۴ ماتریس اسکالر A را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x\end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم:

$$x \text{ عدد گویا است}: \begin{cases} x^n=64 \xrightarrow{x\ \text{گویا}} x\ \text{طبیعی است} \Rightarrow (x=4, n=3)\ \text{یا}\ (x=2, n=6)\\ nx=12\end{cases}$$

پس دو حالت ممکن وجود دارد.

۷ ۴ ۳ ۲ ۱ ماتریس DC را تشکیل می‌دهیم:

$$D\times C=\begin{bmatrix}1 & -a\\ b & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 8 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & 0\\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}0=2-4a\Rightarrow a=\frac{1}{2}\\ 0=b-12\Rightarrow b=12\end{cases}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 12\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & \\ & 40\end{bmatrix}$$

AB مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $=45$

۸ ۴ ۳ ۲ ۱

طبق فرض داریم:

$$3AB=-4BA\Rightarrow AB=-\frac{4}{3}BA$$

$$AB^3=AB\cdot B^2=-\frac{4}{3}BA\cdot B^2=-\frac{4}{3}B\cdot AB\cdot B=-\frac{4}{3}B\cdot(-\frac{4}{3}BA)\cdot B=\frac{16}{9}B^2\cdot AB=\frac{16}{9}B^2\cdot(-\frac{4}{3}BA)=-\frac{64}{27}B^3A$$

$$\Rightarrow AB^3=-\frac{64}{27}B^3A\quad (1)$$

از طرفی طبق مسئله: $AB^3=-mB^3A\quad (2)$

بنابراین از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$m=\frac{64}{27}$$

۹ ۴ ۳ ۲ ۱ عبارت موردنظر در توان دوم ماتریس $B-A$ وجود دارد:

$$(B-A)^2=(B-A)\cdot(B-A)=B^2-BA-AB+A^2\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -8\\ 0 & 3\end{bmatrix}-AB-BA+\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-5 & -15\\ 10 & 10\end{bmatrix}$$

$$=-AB-BA+\begin{bmatrix}5 & -10\\ 2 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}10 & 5\\ -8 & -10\end{bmatrix}$$

۱۰ ۴ ۳ ۲ ۱ ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I$$

$$\rightarrow A^3=-I\xrightarrow{\text{طرفین به توان } 33}A^{99}=-I\xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } A^2}A^{101}=-A^2$$

۱۱ ۴ ۳ ۲ ۱ ماتریس A^2 را یافته و در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

روش اول:

$$A^2=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 2\\ 10 & 21\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}9 & 2\\ 10 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha & \alpha\\ 5\alpha & 4\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\alpha+\beta & \alpha\\ 5\alpha & 4\alpha+\beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=13\end{cases}$$

روش دوم: (نکته) هر ماتریس 2×2 مانند A در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^2-(a+d)A+|A|I=\overline{O}$$

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ - ۲A - ۱۳I = \bar{O} \Rightarrow A^۲ = ۲A + ۱۳I \Rightarrow \alpha=۲,\beta=۱۳$$

۱۲ ۴ ۳ ۲ **۱** طبق فرض داریم:

$$A^۳ - ۲A^۲ + ۳A - ۲I = \bar{O} \xrightarrow{\text{طرفین در } A \text{ ضرب شود}} A^۴ - ۲A^۳ + ۳A^۲ - ۲A = \bar{O}$$

$$\xrightarrow{A^۳ = ۲A^۲ - ۳A + ۲I} A^۴ - ۲(۲A^۲ - ۳A + ۲I) + ۳A^۲ - ۲A = \bar{O}$$

$$\to A^۴ - ۴A^۲ + ۶A - ۴I + ۳A^۲ - ۲A = \bar{O} \to A^۴ - A^۲ + ۴A - ۴I = \bar{O}$$

$$\to A^۴ = A^۲ - ۴A + ۴I$$

۱۳ **۴** ۳ ۲ ۱ از روی ماتریس $A^۲$، ماتریس $A^۵$ را می‌یابیم:

$$A^۲ = A - ۲I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} A^۴ = A^۲ - ۴A + ۴I = (A-۲I) - ۴A + ۴I$$

$$\to A^۴ = -۳A + ۲I \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A} A^۵ = -۳A^۲ + ۲AI = -۳(A-۲I) + ۲A$$

$$\to A^۵ = -۳A + ۶I + ۲A$$

$$\to A^۵ = -A + ۶I = \alpha A + \beta I \to \begin{cases}\alpha=-۱\\ \beta=۶\end{cases} \to \alpha+\beta = ۵$$

۱۴ ۴ ۳ **۲** ۱ فرض سؤال را از سمت راست و از سمت چپ در ماتریس B ضرب می‌کنیم:

$$AB - BA = I \xrightarrow[\text{در } B \text{ ضرب شود}]{\text{طرفین از سمت راست}} AB^۲ - BAB = B$$

$$\xrightarrow{+} AB^۲ - B^۲A = ۲B$$

$$AB - BA = I \xrightarrow[\text{در } B \text{ ضرب شود}]{\text{طرفین از سمت چپ}} BAB - B^۲A = B$$

۱۵ **۴** ۳ ۲ ۱ ضرب دو ماتریس فوق را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}x&۲\\y&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\y&x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x^۲+۲y & xy+۲x\\ xy+۲y & y^۲+۲x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۹&۶\\۵&۴\end{bmatrix} \to \left.\begin{matrix}xy+۲x=۶\\xy+۲y=۵\end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} ۲(x-y)=۱ \to x-y=\frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{matrix}x^۲+۲y=۹\\y^۲+۲x=۴\end{matrix}\right\} \to x^۲+۲y-(y^۲+۲x)=۵ \to (x^۲-y^۲)+۲(y-x)=۵$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y)+۲(y-x)=۵ \to (x-y)(x+y-۲)=۵ \xrightarrow{x-y=\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲}(x+y-۲)=۵ \to x+y-۲=۱۰ \to x+y=۱۲$$

درنتیجه:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{۱۲}{\frac{۱}{۲}} = ۲۴$$

۱۶ ۴ ۳ ۲ **۱** ماتریس $A^۲$ را می‌سازیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix}\tan x & ۱\\ -\frac{۱}{\cos^۲ x} & -\tan x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tan x & ۱\\ -\frac{۱}{\cos^۲ x} & -\tan x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tan^۲ x - \frac{۱}{\cos^۲ x} & \tan x - \tan x\\ -\frac{\tan x}{\cos^۲ x}+\frac{\tan x}{\cos^۲ x} & -\frac{۱}{\cos^۲ x}+\tan^۲ x\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\tan^۲ x}$$

$$A^۲ = \begin{bmatrix}\tan^۲ x - (۱+\tan^۲ x) & ۰\\ ۰ & -(۱+\tan^۲ x)+\tan^۲ x\end{bmatrix} \to A^۲ = \begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix} = -I$$

$$A^۵ - A^۶ + A^۷ = (A^۲)^۲\times A - (A^۲)^۳ + (A^۲)^۳\times A = A + I - A = I$$

۱۷ **۴** ۳ ۲ ۱ ماتریس A باید ۲×۲ باشد تا ضرب قابل انجام باشد. با فرض $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix}-۱ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲&۴\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-a+c & -b+d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲&۴\end{bmatrix} \to -a+c=۲\ ,\ -b+d=۴$$

$$\begin{bmatrix}۲&۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&-۳\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}۲a+۳c & ۲b+۳d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱&-۳\end{bmatrix} \to ۲a+۳c=۱\ ,\ ۲b+۳d=-۳$$

$$\begin{cases}-a+c=۲\\ ۲a+۳c=۱\end{cases} \to c=۱\ ,\ a=-۱$$

$$\begin{cases}-b+d=۴\\ ۲b+۳d=-۳\end{cases} \to d=۱\ ,\ b=-۳$$

$$\begin{bmatrix}-۱&-۲\end{bmatrix}\times A = \begin{bmatrix}-۱&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&-۳\\۱&۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-۱&۱\end{bmatrix}$$

۱۸ ۴ ۳ **۲** ۱ ماتریس‌های $A^۲$ و $A^۳$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-3&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}2&1\\-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-3&-2\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix}1&1\\-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

بنابراین:

$$A^{15!}=A^{3\overbrace{(2\times4\times5\times\cdots\times15)}^{k:\ \text{زوج}}}=(-I)^k=I$$

۱۹ ۱ **۲** ۳ ۴ از اتحادهای مثلثاتی می‌دانیم $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ، پس خواهیم داشت:

$$A=\begin{bmatrix}\tan x&-1\\\frac{1}{\cos^2 x}&-\tan x\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}\tan x&-1\\\frac{1}{\cos^2 x}&-\tan x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tan x&-1\\\frac{1}{\cos^2 x}&-\tan x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I$$

$$\Rightarrow A^{30}+A^{20}+A^6=(-I)^{15}+(-I)^{10}+(-I)^3=-I$$

۲۰ **۱** ۲ ۳ ۴ سعی می‌کنیم قانونی برای A^n به دست بیاوریم:

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&1\\-1&-(1-1)\end{bmatrix}$$

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+1&2\\-2&-(2-1)\end{bmatrix}$$

$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\-3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+1&3\\-3&-(3-1)\end{bmatrix}$$

طبق استدلال استقرایی می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$A^n=\begin{bmatrix}n+1&n\\-n&-(n-1)\end{bmatrix}$$

$$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\\-2&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&3\\-3&-2\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}11&10\\-10&-9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+3+\cdots+11&1+2+\cdots+10\\-1-2-\cdots-10&-1-2-\cdots-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13\times10}{2}&\frac{10\times11}{2}\\\frac{-10\times11}{2}&\frac{-9\times10}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}65&55\\-55&-45\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=20$$

۲۱ ۱ ۲ ۳ **۴** ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

پس نتیجه می‌شود:

$$A^n=\begin{cases}A&,n=\text{فرد}\\I&,n=\text{زوج}\end{cases}$$

بنابراین:

$$A+A^2+\cdots+A^{20}=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=10\begin{bmatrix}2&2\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&20\\0&0\end{bmatrix}$$

۲۲ **۱** ۲ ۳ ۴ ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و مثبت بنابه فرض در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a+2b&a\\c+2d&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c&b+d\\2a&2b\end{bmatrix}$$

اگر $c=2b$ و $a=b+d$ باشد. تساوی اخیر همواره برقرار است پس $A=\begin{bmatrix}b+d&b\\2b&d\end{bmatrix}$ و جمع درایه‌های آن $4b+2d$ می‌شود که کم‌ترین مقدار آن به ازای $b=d=1$ عدد ۶ می‌شود.

۲۳ **۱** ۲ ۳ ۴ ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&9\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

به نظر می‌رسد اگر ادامه دهیم، آنگاه:

$$A^n=\begin{bmatrix}1&n&x\\0&1&n\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{1000}=\begin{bmatrix}1&1000&x\\0&1&1000\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{جمع درایه‌های سطر دوم}\ A^{1000}=1001$$

۲۴ **۱** ۲ ۳ ۴ اگر A^3 را محاسبه کنیم، نتیجه می‌گیریم $A^3=\bar{O}$، بنابراین داریم:

$$(A-2I)(A^2+2A+I)=A^3+2A^2+A-2A^2-4A-2I$$

$$=-3A-2I=-3\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&0&0\\1&-3&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\6&-2&0\\-3&9&-2\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=6$$

۲۵ ۴ **۳** ۲ ۱

$$\begin{bmatrix}x&1\\y&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x&y\\y&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2+y&xy+x\\xy+y&y^2+x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&12\\10&8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left.\begin{array}{l}x^2+y=18\\y^2+x=8\end{array}\right\}\xrightarrow{-}(x^2+y)-(y^2+x)=18-8\Rightarrow \begin{array}{l}(x^2-y^2)-(x-y)=10\\(x-y)(x+y-1)=10\quad(1)\end{array}\\ \left.\begin{array}{l}xy+x=12\\xy+y=10\end{array}\right\}\xrightarrow{-}(xy+x)-(xy+y)=12-10=2\Rightarrow x-y=2\qquad(2)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\ ,\ (2)}2(x+y-1)=10\Rightarrow x+y-1=5\Rightarrow x+y=6$$

۲۶ **۴** ۳ ۲ ۱ ابتدا ماتریس A را می‌سازیم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}-\tan x&\dfrac{1}{\cos x}\\ \dfrac{-1}{\cos x}&\tan x\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\tan x&\dfrac{1}{\cos x}\\ \dfrac{-1}{\cos x}&\tan x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tan^2 x-\dfrac{1}{\cos^2 x}&-\dfrac{\tan x}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{\cos x}\\ \dfrac{\tan x}{\cos x}-\dfrac{\tan x}{\cos x}&\dfrac{-1}{\cos^2 x}+\tan^2 x\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x}\begin{bmatrix}\tan^2 x-1-\tan^2 x&0\\0&-1-\tan^2 x+\tan^2 x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=-I\quad A^{10}+A^7+A^5=(A^2)^5+(A^2)^3\times A+(A^2)^2\times A$$

$$=(-I)^5+(-I)^3\times A+(-I)^2\times A=-I-I\times A+I\times A=-I-A+A=-I$$

۲۷ ۴ ۳ **۲** ۱

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-&-&-\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\-&-&-\\-&-&-\end{bmatrix}}_{A}{}_{4\times3}\times\underbrace{\begin{bmatrix}-&-&b_{13}&-&-\\-&-&b_{23}&-&-\\-&-&b_{33}&-&-\end{bmatrix}}_{B}{}_{3\times5}=\underbrace{\begin{bmatrix}-&-&-&-&-\\-&-&c_{23}&-&-\\-&-&-&-&-\\-&-&-&-&-\\-&-&-&-&-\end{bmatrix}}_{C}{}_{4\times5}$$

می‌دانیم c_{23} از ضرب درایه‌های سطر دوم A در ستون سوم B بدست می‌آید و در ماتریس A درایه‌های سطر دوم به شکل $\sum_{i=1}^{3}a_{2i}$ و در ماتریس B درایه‌های ستون سوم به شکل $\sum_{i=1}^{3}b_{i3}$ می‌باشد.

پس c_{23} به صورت $a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}=\sum_{i=1}^{3}a_{2i}b_{i3}$ بدست می‌آید.

۲۸ ۴ **۳** ۲ ۱ ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&3\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}=3I$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، آنگاه $A^n=\begin{cases}3^kI, n=2k\\3^kA, n=2k+1\end{cases}$، پس:

$$A^{2n}+A^{2n+1}=\begin{bmatrix}3^n&0\\0&3^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3^{n+1}&0\\0&3^n\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها}=3\times3^n+3^{n+1}=2\times3^{n+1}$$

$$\Rightarrow2\times3^{n+1}=1458\Rightarrow3^{n+1}=729=3^6$$

۲۹ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}2&2&2&2\\0&0&0&0\\2&2&2&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=2A\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix}2&2&2&2\\0&0&0&0\\2&2&2&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4&4&4\\0&0&0&0\\4&4&4&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}=4A$$

پس $A^2=2^1A$ و $A^3=2^2A$ به استقرا نتیجه می‌گیریم $A^n=2^{n-1}A$ داریم:

$$A^{10}=2^9A\Rightarrow A^{10}\ \text{مجموع درایه‌های}=2^9(8)=2^9\times2^3=2^{12}$$

۳۰ **۴** ۳ ۲ ۱

اگر ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست آوریم و به استقرا نتیجه می‌گیریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-2&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad,\quad A^3=\begin{bmatrix}1&-3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad,\quad A^{100}=\begin{bmatrix}1&-100&100\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

۳۱) ۱ **۲** ۳ ۴

$$A\times B=\begin{bmatrix}1&0&x\\1&1&0\\y&z&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\-3&3y&0\\0&-3&z+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3x&x(z+2)\\0&3y&0\\3y-3z&3yz-3&z+2\end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر است، بنابراین:

$$\begin{cases}3=3y=z+2\Rightarrow\begin{cases}y=1\\z=1\end{cases}\\-3x=x(z+2)=3y-3z=3yz-3=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

پس: $x+y+z=2$

۳۲) ۱ ۲ **۳** ۴

$$A=[2i+j]_{n\times n}=\begin{bmatrix}2+1&2+2&2+3&\dots&2+n\\4+1&4+2&4+3&\dots&4+n\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\2n+1&&2n+3&\dots&2n+n\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$A\ \text{مجموع درایه‌های ستون سوم}=45\Rightarrow 2(1+2+\dots+n)+(\underbrace{3+\dots+3}_{\text{تا سطر } n})=45$$

$$\Rightarrow 2\times\frac{n(n+1)}{2}+3n=45\Rightarrow n^2+4n=45\Rightarrow n^2+4n-45=0\to\begin{cases}n=-9 & \text{غ ق ق}\\n=5 & \checkmark\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های سطر دوم}=2(\underbrace{2+2+\dots+2}_{\text{۵ تا ستون}})+(1+2+3+4+5)=20+\frac{5\times 6}{2}=35$$

۳۳) **۱** ۲ ۳ ۴ ماتریس A باید 2×2 باشد تا ضرب قابل انجام باشد. بنابراین فرض می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+c&2b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5\end{bmatrix}\to\begin{cases}2a+c=3\\2b+d=5\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+4c&3b+4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\end{bmatrix}\to\begin{cases}3a+4c=-1\\3b+4d=2\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}2a+c=3\\3a+4c=-1\end{cases}\to\begin{cases}a=\dfrac{13}{5}\\c=-\dfrac{11}{5}\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}2b+d=5\\3b+4d=2\end{cases}\to\begin{cases}b=\dfrac{18}{5}\\d=-\dfrac{11}{5}\end{cases}$$

$$\to\begin{bmatrix}8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{13}{5}&\dfrac{18}{5}\\-\dfrac{11}{5}&-\dfrac{11}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9\end{bmatrix}$$

۳۴) ۱ ۲ ۳ **۴** ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^2&0\\2^2-1&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}4&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^3&0\\2^3-1&1\end{bmatrix}$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم $A^n=\begin{bmatrix}2^n&0\\2^n-1&1\end{bmatrix}$ می‌شود.

$$A^n-A^{n-1}=\begin{bmatrix}2^n&0\\2^n-1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2^{n-1}&0\\2^{n-1}-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n-2^{n-1}&0\\2^n-2^{n-1}&0\end{bmatrix}$$

$$2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$$

$$A^n-A^{n-1}=\begin{bmatrix}2^{n-1}&0\\2^{n-1}&0\end{bmatrix}$$

۳۵) ۱ ۲ **۳** ۴ از روابط داده شده به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}AB+B=A\\BA+A=B\end{cases}\xrightarrow{+}AB+BA+B+A=A+B\Rightarrow AB+BA=\overline{O}\quad(1)$$

$$\begin{cases} A\times(BA+A)=A\times B\Rightarrow ABA+A^۲=AB \\ (AB+B)\times A=A\times A\Rightarrow ABA+BA=A^۲\end{cases}\xrightarrow{-} A^۲-BA=AB-A^۲\Rightarrow ۲A^۲=AB+BA\quad(۲)$$

$\xrightarrow{(۲),(۱)} ۲A^۲=\bar{O}\Rightarrow A^۲=\bar{O}\rightarrow$ مورد (د) صحیح است

$AB+B=A\Rightarrow A\times(AB+B)=A\times A\Rightarrow A^۲B+AB=A^۲\Rightarrow \bar{O}B+AB=\bar{O}\Rightarrow AB=\bar{O}\rightarrow$ مورد (ج) صحیح است

$AB+B=A\rightarrow \bar{O}+B=A\Rightarrow B=A\Rightarrow$ مورد (هـ) صحیح است

اگر $A=B=\begin{bmatrix}۰&۱\\۰&۰\end{bmatrix}$ باشد، شرایط مسئله برقرار است ولی هیچ‌کدام از روابط $B=\bar{O}$ و $B^۲=I$ برقرار نیستند.

۳۶ ۴ ۳ **۲** ۱

$$[۱\quad x\quad ۲]\begin{bmatrix}۳&x&-۱\\x&۱&۲\\-۲&-۴&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\a\\-۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow\begin{bmatrix}x^۲-۱&۲x-۸&۴x-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\a\\-۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow x^۲-۱+۲ax-۸a-۴x+۱=۰$$

$\Rightarrow x^۲+(۲a-۴)x-۸a=۰$

شرط ریشهٔ مضاعف: $\Delta=(۲a-۴)^۲-۴(۱)(-۸a)=۰\Rightarrow ۴a^۲-۱۶a+۱۶+۳۲a=۰\Rightarrow ۴a^۲+۱۶a+۱۶=(۲a+۴)^۲=۰\Rightarrow ۲a+۴=۰\Rightarrow a=-۲$

۳۷ **۴** ۳ ۲ ۱

$$A=[a_{ij}]_{۲\times۳}\ ,\ a_{ij}=\begin{cases}i^۲-j & i>j\\ i+j & i=j\\ j^۲-i & i<j\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_{۱۱}\xlongequal{i=۱\ ,\ j=۱}۱+۱=۲\\ a_{۱۲}\xlongequal{i=۱\ ,\ j=۲}۲^۲-۱=۳\\ a_{۱۳}\xlongequal{i=۱\ ,\ j=۳}۳^۲-۱=۸\end{cases}$$

$$B=[b_{ij}]\ ,\ b_{ij}=ij\Rightarrow\begin{cases}b_{۱۲}=۱\times۲=۲\\ b_{۲۲}=۲\times۲=۴\\ b_{۳۲}=۳\times۲=۶\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=۱}^{۳}a_{۱k}b_{k۲}=a_{۱۱}b_{۱۲}+a_{۱۲}b_{۲۲}+a_{۱۳}b_{۳۲}=۲\times۲+۳\times۴+۸\times۶=۶۴$$

تذکر: نماد $\sum$ یعنی مجموع

۳۸ ۴ ۳ **۲** ۱ طبق فرض داریم:

$A+۴B=\bar{O}\Rightarrow A=-۴B$

در عبارت خواسته شده به جای A مساوی آن $-۴B$ را قرار می‌دهیم.

$?=(-۴B)(-۲B)(-۹B)(-۳B)=+۲۱۶B^۴$

حال لازم است ماتریس $B^۴$ را به دست آوریم.

$$B^۴=(-\frac{۱}{۴}A)^۴=\frac{۱}{۲۵۶}A^۴(I)$$

از طرفی برای ماتریس A داریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱&۱\\-۳&-۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۳=\begin{bmatrix}۱&۱\\-۳&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\-۳&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=-I(II)$$

$$(I),(II)\Rightarrow ?=\frac{۲۱۶}{۲۵۶}A^۳\times A=\frac{-۲۷}{۳۲}A$$

۳۹ ۴ **۳** ۲ ۱ با استفاده از فرض سؤال می‌فهمیم که ماتریس موردنظر ماتریس صفر است. پس:

$$۳B^۲A-BA=\bar{O}\Rightarrow ۳B^۲A=BA\quad(۱)$$

$$\begin{aligned}B^۳A=B^۲(BA)&\xlongequal{(۱)}B^۲(۳B^۲A)=۳B^۴A=۳B^۳(BA)\\&\xlongequal{(۱)}۳B^۳(۳B^۲A)=۹B^۵A=۹B^۴(BA)\\&\xlongequal{(۱)}۹B^۴(۳B^۲A)=۲۷B^۶A\end{aligned}$$

۴۰ ۴ ۳ **۲** ۱ بررسی گزاره‌ها:

الف) اگر فرض کنیم $A=kI$ و $B=\frac{۱}{k}(AB)$، آنگاه به‌ازای همه مقادیر حقیقی و غیر صفر k، A و B وجود دارد پس گزارهٔ الف صحیح است.

ب) برای ماتریس $A^۲$، اگر A جواب باشد $(-A)$ نیز جواب است. پس گزارهٔ ب نادرست است.

پ) مثال نقض فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۴&۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&-۲\end{bmatrix}$ در این‌صورت:

$$AB=\begin{bmatrix}۲&۱\\-۴&۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&-۸\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۱&۱\\۲&-۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲&۱\\-۴&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&۳\\۱۲&-۲\end{bmatrix}$$

ماتریس AB قطری است ولی BA قطری نمی‌باشد پس گزارهٔ پ نادرست است.

۴۱ ۴ **۳** ۲ ۱ ماتریس B^2 را به دست می‌آوریم:

$$B^2=\begin{bmatrix}0 & \tan x\\ \cot x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \tan x\\ \cot x & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$\Rightarrow\begin{cases}B^n=I\text{؛ عدد طبیعی زوج } n\\ B^n=B\text{؛ عدد طبیعی فرد } n\end{cases}$$

$$B^{999}+B^{1000}=B+I=\begin{bmatrix}1 & \tan x\\ \cot x & 1\end{bmatrix}$$

۴۲ ۴ ۳ ۲ **۱** ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}_{999\times 999}$$

یعنی یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۹۹۹ که قطر فرعی آن همگی عدد -1 و بقیهٔ درایه‌ها همگی صفرند. در چنین ماتریسی می‌توان نشان داد به‌ازای nهای زوج برابر I و به‌ازای nهای فرد برابر A است، پس:

$$A^{1000}+A^{1001}=I+A$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & -1\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots\, 0\, \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

در ماتریس مربعی $I+A$ (که از مرتبه زوج ۹۹۹ است)، درایه‌های قطر اصلی، همگی برابر ۱، فقط درایهٔ وسطی برابر صفر است، بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $I+A$ برابر ۹۹۸ است.

۴۳ ۴ ۳ ۲ **۱** با توجه به فرض سؤال داریم:

$$AB=B\xrightarrow{A=BA}B\underbrace{AB}_{B}=B\rightarrow B^2=B$$

$$BA=A\xrightarrow{B=AB}A\underbrace{BA}_{A}=A\rightarrow A^2=A$$

$$(A+B)(A-B)=\underbrace{A^2}_{A}-\underbrace{AB}_{B}+\underbrace{BA}_{A}-\underbrace{B^2}_{B}=2A-2B$$

۴۴ ۴ **۳** ۲ ۱ با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$، ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \frac{\sin 2\alpha}{2}\\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \sin^2\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \frac{\sin 2\alpha}{2}\\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \sin^2\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha & \cos^3\alpha\sin\alpha+\sin^3\alpha\cos\alpha\\ \cos^3\alpha\sin\alpha+\sin^3\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) & \cos\alpha\sin\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\\ \sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) & \sin^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \frac{\sin 2\alpha}{2}\\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \sin^2\alpha\end{bmatrix}=A$$

$$\rightarrow A^2=A\rightarrow A^{10}=A\rightarrow \text{درایهٔ سطر اول و ستون دوم}=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

۴۵ **۴** ۳ ۲ ۱ داریم:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 8\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 3 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن درایه‌های سطر دوم AB، کافیست سطر دوم A را در ستون‌های ۱ تا ۳ ماتریس ضرب کنیم:

$$AB=[25\quad 50\quad 75]\Rightarrow \text{مجموع}=150$$

۴۶ **۴** ۳ ۲ ۱ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$AB=B\ (1)\quad ,\quad BA=A\ (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = B \xrightarrow{(۲)} (BA)B = B \xrightarrow{(۱)} BB = B \Rightarrow B^۲ = B \\ BA = A \xrightarrow{(۱)} (AB)A = A \xrightarrow{(۲)} AA = A \Rightarrow A^۲ = A \end{cases}$$

$$(A+B)^۲ = A^۲ + AB + BA + B^۲ = A + B + A + B = ۲(A+B)$$

$$(A+B)^۳ = (A+B)^۲(A+B) = ۲(A+B)(A+B)$$

$$= ۲(A+B)^۲ = ۴(A+B)$$

توجه: اگر $A = B = I$ باشد حاصل برابر با $۸I$ است و فقط گزینه‌ی «۴» درست است.

۴۷ ۱ ۲ **۳** ۴ با کمی تحقیق می‌بینیم که $B^۲ = B$، پس $B^n = B$ و در حالت کلی داریم:

$$(B+I)^۶ = \binom{۶}{۰}B^۶ + \binom{۶}{۱}B^۵ + \binom{۶}{۲}B^۴ + \cdots + \binom{۶}{۶}I$$

$$= \binom{۶}{۰}B + \binom{۶}{۱}B + \binom{۶}{۲}B + \cdots + \binom{۶}{۵}B + I$$

$$= \left(\binom{۶}{۰} + \cdots + \binom{۶}{۵}\right)B + ۶I = (۲^۶ - ۱)B + ۶I = ۶۳B + I$$

$$B^۲ = B \Rightarrow B^۲(B+I)^۶ = B(۶۳B + I) = ۶۳B^۲ + B = ۶۳B + B = ۶۴B$$

۴۸ **۱** ۲ ۳ ۴ برای عبارت خواسته شده سعی می‌کنیم الگویی به دست بیاوریم:

$$A(۷A - ۵I) = ۷A^۲ - ۵A \overset{A^۲=A}{=\!=} ۷A - ۵A = ۲A \quad (۱)$$

$$A(۷A - ۵I)^۲ = A(۷A - ۵I)(۷A - ۵I) \overset{\text{از } (۱)}{=\!=} ۲A(۷A - ۵I) \overset{\text{از } (۱)}{=\!=} ۲ \times ۲A = ۲^۲A \quad (۲)$$

$$A(۷A - ۵I)^۳ = A(۷A - ۵I)^۲(۷A - ۵I) \overset{\text{از } (۲)}{=\!=} ۲^۲A(۷A - ۵I) \overset{\text{از } (۱)}{=\!=} ۲^۲(۲A) = ۲^۳A$$

به استقرا ثابت می‌شود:

$$A(۷A - ۵I)^{۲۰} = ۲^{۲۰}A$$

۴۹ ۱ **۲** ۳ ۴

اولاً چون $IA = AI$ می‌باشد، پس می‌توانیم از اتحادها استفاده کنیم. ضمناً چون $A^۳ = \overline{O}$، پس به‌ازای $n \geq ۳$ داریم: $A^n = \overline{O}$

$$(۳I - A)^۵ = (۳I)^۵ - \binom{۵}{۱}(۳I)^۴A + \binom{۵}{۲}(۳I)^۳(A)^۲ - \binom{۵}{۳}(۳I)^۲(A)^۳ + \cdots$$

بقیه جملات دارای $A^۳$ و $A^۴$ و $A^۵$ هستند که حاصل آن‌ها حتماً ماتریس صفر است.

$$\Rightarrow (۳I - A)^۵ = ۲۴۳I - ۴۰۵A + ۲۷۰A^۲$$

$$? = A(۲۴۳I - ۴۰۵A + ۲۷۰A^۲) = ۲۴۳A - ۴۰۵A^۲ + ۲۷۰A^۳ \overset{A^۳=\overline{O}}{=\!=} ۲۴۳A - ۴۰۵A^۲$$

۵۰ ۱ ۲ ۳ **۴** ضرب ماتریسی عبارت سمت چپ تساوی را انجام می‌دهیم:

$$۲A^۲ - ۲B^۲ - ۴AB + BA = ۲(A^۲ - B^۲ - ۲AB) + AB \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ a & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -۳ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -۳ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ a & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲b - ۱۵ & ۰ \\ ab - ۲۰ & -۳a + ۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{AB = BA}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲b - ۳a & ۳b - ۱۲ \\ -۱۰ + ۲a & -۷ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = ۵ \\ b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a^۲ - b^۲ = ۹$$

۵۰ تست سخت ماتریس هندسه دوازدهم

پاسخ‌نامه کلیدی

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۴	۱۴	۲	۲۷	۲	۴۰	۲
۲	۳	۱۵	۴	۲۸	۳	۴۱	۳
۳	۲	۱۶	۱	۲۹	۳	۴۲	۱
۴	۲	۱۷	۴	۳۰	۴	۴۳	۱
۵	۲	۱۸	۲	۳۱	۲	۴۴	۳
۶	۳	۱۹	۲	۳۲	۳	۴۵	۴
۷	۳	۲۰	۱	۳۳	۱	۴۶	۴
۸	۱	۲۱	۴	۳۴	۴	۴۷	۳
۹	۳	۲۲	۱	۳۵	۳	۴۸	۱
۱۰	۱	۲۳	۱	۳۶	۲	۴۹	۲
۱۱	۲	۲۴	۱	۳۷	۴	۵۰	۴
۱۲	۱	۲۵	۳	۳۸	۲		
۱۳	۴	۲۶	۴	۳۹	۳		