

آزمون آزمایشی خیلی سبز

پایه یازدهم

مرحله دوم

رشته ریاضی

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

تاریخ برگزاری: ۱۸/آبان/۱۴۰۳

بودجه بندی دروس	حسابان (۱)	هندسه (۲)	آمار و احتمال
	فصل ۱ (درس ۱ تا ۴) صفحه ۲۸ تا ۲۸	فصل ۱ (درس ۱) صفحه ۹ تا ۱۷	فصل ۱ (درس ۱ و ۲) تا ابتدای قوانین و اعمال بین مجموعه ها صفحه ۱ تا ۲۰
	فیزیک (۲)	شیمی (۲)	
	فصل ۱ (تا ابتدای خازن) صفحه ۱ تا ۳۲	فصل ۱ (تا ابتدای گنج های اعماق دریا) صفحه ۱ تا ۲۵	

مدت پاسخگویی	تأ شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۳۰ دقیقه	۲۰	۱	۲۰	حسابان
۲۰ دقیقه	۳۰	۲۱	۱۰	هندسه
۲۰ دقیقه	۴۰	۳۱	۱۰	آمار و احتمال
۳۰ دقیقه	۶۰	۴۱	۲۰	فیزیک
۲۰ دقیقه	۸۰	۶۱	۲۰	شیمی
۱۲۰ دقیقه		۸۰ سؤال		مجموع

استادید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.



حسابان یازدهم

۱- اگر a جواب معادله $\sqrt{2x-1} = x-2$ باشد، مجموع ارقام عدد $4a$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲- تعداد جواب‌های معادله $\frac{20}{x^2-4} + \frac{x+7}{x+2} = \frac{3x+3}{2x-4}$ کدام است؟

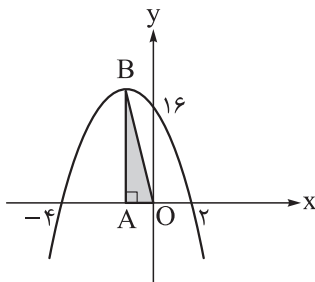
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳- اگر جملات اول و نهم یک دنباله هندسی با قدرنسبت مثبت به ترتیب ۳ و ۲۴۳ باشد، مجموع ۸ جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) $240(\sqrt{3}+1)$ (۲) $240(\sqrt{3}-1)$ (۳) $120(\sqrt{3}+1)$ (۴) $120(\sqrt{3}-1)$

۴- در دنباله هندسی a_n ، مجموع شش جمله اول، ۹ برابر مجموع سه جمله اول است. مقدار $\frac{a_1}{a_5}$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۶۴ (۴) ۱۲۸



۵- با توجه به نمودار سهمی رسم‌شده، مساحت مثلث OAB کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۹ (۴) ۱۸

۶- در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با ضرایب صحیح، مجموع صفرها برابر ۳ و حاصل ضرب آنها برابر ۸- است. کم‌ترین مقدار ممکن برای $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۶ (۳) ۴ (۴) ۱

۷- حاصل $A = |3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}| - \sqrt{5} + 2\sqrt{6}$ کدام است؟

- (۱) $3 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 3$ (۳) ۳ (۴) -۳

۸- فرض کنید دنباله‌ای حسابی از اعداد طبیعی باشد، به طوری که $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 60$ باشد. چند مقدار مختلف برای a_5 وجود دارد؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۱۰

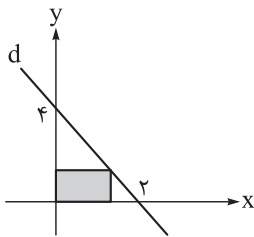
۹- در دنباله $a_n = 2^{n-1} + 2^{12-n}$ ، مجموع ۱۰ جمله اول برابر S_{10} است. باقی‌مانده تقسیم S_{10} بر ۱۰ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۹

۱۰- در معادله $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

محل انجام محاسبات



۱۱- در شکل مقابل، یکی از رئوس مستطیل روی خط d در ناحیه اول و دو ضلع آن روی محورهای مختصات واقع شده است. ماکزیمم مساحت مستطیل رنگی کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۲- تعداد ریشه‌های متمایز معادله $x^2 - 3x^2 + k^2 - 3k + 1 = 0$ عددی فرد است. مجموع مربعات ریشه‌های آن کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۶
(۳) ۹
(۴) ۱۲

۱۳- اگر یکی از ریشه‌های معادله $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} + k = \frac{2x - 1}{5 - x}$ دو برابر معکوس ریشه دیگر باشد، جمع مقدار k و ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) ۵/۵
(۳) ۶
(۴) ۶/۵

۱۴- جواب معادله $\sqrt{8x} + \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{x - 2} + a$ در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ نیز صدق می‌کند. اگر اختلاف جواب‌های معادله درجه دوم $3/5$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای c کدام است؟

- (۱) ۳۲
(۲) ۴۰
(۳) ۴۶
(۴) ۵۶

۱۵- اگر $\cot 1^\circ$ و $\cot 2^\circ$ ریشه‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ باشد، در این صورت معادله‌ای که ریشه‌های آن، $\tan 1^\circ$ و $\tan 2^\circ$ هستند، کدام است؟

- (۱) $bx^2 + ax + 1 = 0$
(۲) $bx^2 - ax + 1 = 0$
(۳) $ax^2 - bx + 1 = 0$
(۴) $ax^2 + bx + 1 = 0$

۱۶- مجموع ریشه‌های معادله $x^2 + \frac{25x^2}{(x-5)^2} = 75$ کدام است؟

- (۱) -۱۵
(۲) -۵
(۳) ۱۰
(۴) ۲۰

۱۷- اگر تفاضل ریشه‌های معادله $|x - 2| + |x - b| = a$ برابر ۱۳ باشد، حداکثر مقدار تابع $y = \frac{2}{|x - a| + |x - 3|}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{5}$
(۳) $\frac{1}{11}$
(۴) $\frac{1}{20}$

۱۸- خط $y = k$ نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{|x^2 + x|}{x}$ را در دو نقطه قطع می‌کند، حدود k کدام است؟

- (۱) $0 < k < 1$
(۲) $-1 \leq k < 0$
(۳) $0 < k \leq 1$
(۴) $-1 < k < 0$

۱۹- اگر مساحت سطح محدود به نمودار تابع $f(x) = 3 - |ax - 1|$ و محور x ها برابر $4/5$ واحد مربع باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) ۲
(۴) $\frac{3}{2}$

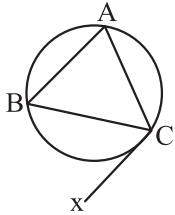
۲۰- اگر $|x - 3| + |1 - y| = x - y - 2$ ، $|6 - x| + |y + 2| = y - x + 8$ و $x + y$ متعلق به بازه $[\alpha, \beta]$ باشد، بیشترین مقدار $(\beta - \alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۹
(۴) ۱۱

محل انجام محاسبات

هندسه یازدهم

۲۱- در شکل زیر $AB = AC$ ، $\widehat{AB} = 126^\circ$ و نیم خط Cx در نقطه C بر دایره مماس است. اندازه زاویه \widehat{BCx} چند درجه است؟



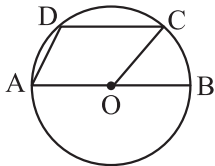
۴۲ (۱)

۴۴ (۲)

۵۲ (۳)

۵۴ (۴)

۲۲- در شکل زیر، وتر CD به طول ۶ موازی قطر AB است. اگر شعاع دایره برابر ۵ باشد، مساحت چهارضلعی $AOCD$ کدام است؟



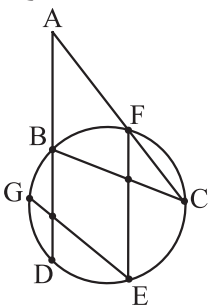
۱۸ (۲)

۱۶ (۱)

۲۴ (۴)

۲۲ (۳)

۲۳- در شکل زیر، F وسط کمان BC و G وسط کمان BD قرار دارد. اگر $\hat{A} = 3x$ ، $\hat{C} = x$ و $\hat{E} = x + 15^\circ$ باشد، مقدار x کدام است؟



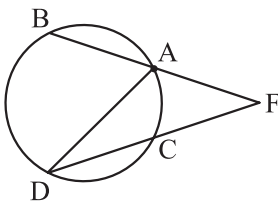
۱۸° (۱)

۲۰° (۲)

۲۵° (۳)

۳۰° (۴)

۲۴- اگر در شکل زیر $\widehat{AB} = \widehat{BD} = \widehat{DC}$ و $\hat{F} = 2\hat{D}$ باشد، اندازه زاویه F چند درجه است؟



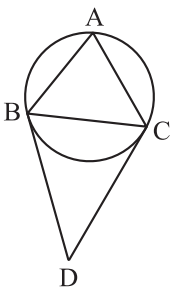
۳۰ (۱)

۳۶ (۲)

۴۰ (۳)

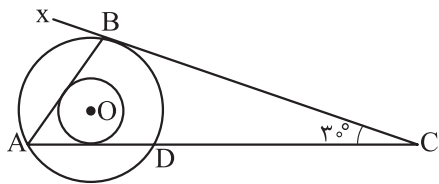
۴۵ (۴)

۲۵- رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$ و $\hat{A} < 90^\circ$) مطابق شکل بر روی یک دایره واقع شده‌اند و مماس‌های رسم شده در نقاط B و C بر این دایره در نقطه D متقاطع‌اند. اگر $\hat{ABC} = 2\hat{D}$ باشد، آنگاه اندازه زاویه A

چه کسری از 180° است؟ $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۱) $\frac{6}{13}$ (۴) $\frac{5}{11}$ (۳)

محل انجام محاسبات

۲۶- در شکل زیر دو دایره هم مرکز هستند و Cx در نقطه B بر دایره بزرگ تر مماس است. اگر AB و AC بر دایره کوچک تر مماس باشند، اندازه زاویه \widehat{ABx} چند درجه است؟



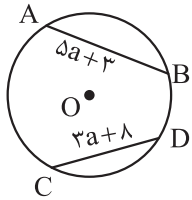
۶۰ (۲)

۵۰ (۱)

۸۰ (۴)

۷۰ (۳)

۲۷- دایره $C(O, 12)$ مطابق شکل مفروض است. به ازای چند عدد طبیعی a ، وتر AB نسبت به وتر CD به مرکز دایره نزدیک تر است؟



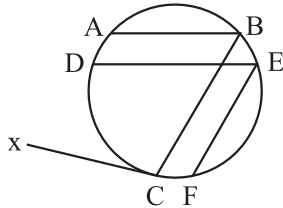
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ بی شمار

۲۸- در شکل زیر $AB \parallel DE$ ، $BC \parallel EF$ و Cx بر دایره مماس است. اگر اندازه کمان \widehat{EF} میانگین اندازه های دو کمان \widehat{AB} و \widehat{CD} ($\widehat{CD} > \widehat{AB}$) و $\widehat{BCx} = 100^\circ$ باشد، اندازه کمان \widehat{EF} چند درجه است؟



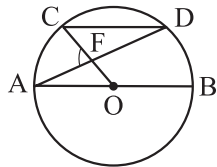
۷۰ (۲)

۶۰ (۱)

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۲۹- در شکل زیر $CD \parallel AB$ و $AB = 6$ و $CD = 3\sqrt{2}$ است. اندازه زاویه \widehat{AFC} کدام است؟



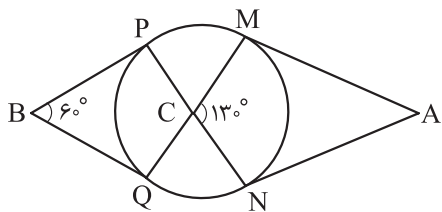
۷۰° (۲)

۶۷/۵° (۱)

۷۵° (۴)

۷۲/۵° (۳)

۳۰- در شکل زیر پاره خط های AM ، AN ، BP و BQ بر دایره مماس اند. اندازه کمان \widehat{MN} چند درجه است؟



۱۱۰ (۱)

۱۲۰ (۲)

۱۳۰ (۳)

۱۴۰ (۴)

محل انجام محاسبات

آمار و احتمال

۳۱- کدام یک از هم‌ارزی‌های زیر نادرست است؟

$$p \wedge (p \vee q) \equiv q \quad (۲)$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad (۱)$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \quad (۴)$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad (۳)$$

۳۲- در چند حالت از جدول ارزش گزاره‌های p ، q و r ، ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۳۳- اگر هر دو گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ و $(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$ ارزش نادرست داشته باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر نیز

ارزش نادرست دارد؟

$$r \Rightarrow q \quad (۴)$$

$$p \Rightarrow q \quad (۳)$$

$$p \vee r \quad (۲)$$

$$q \quad (۱)$$

۳۴- گزاره «هر عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی مربع خودش است» با استفاده از سورها به صورت نوشته می‌شود و ارزش آن است.

$$\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2 \quad (۲) \text{ - نادرست}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2 \quad (۱) \text{ - درست}$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2 \quad (۴) \text{ - نادرست}$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2 \quad (۳) \text{ - درست}$$

۳۵- ارزش گزاره « $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}, n(B - A) = m$ » است و نقیض این گزاره به صورت است.

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}; n(B - A) \neq m \text{ - درست} \quad (۱)$$

$$\exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z}; n(B - A) \neq m \text{ - درست} \quad (۲)$$

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}; n(B - A) \neq m \text{ - نادرست} \quad (۳)$$

$$\exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z}; n(B - A) \neq m \text{ - نادرست} \quad (۴)$$

۳۶- اگر $A = \{\{\}\}$ ، $B = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\}\}, \{\{\}, \{\}, \{\}\}, \{\{\}, \{\}, \{\}, \{\}\}\}$ و $C = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\}\}, \{\{\}, \{\}, \{\}\}, \{\{\}, \{\}, \{\}, \{\}\}\}$ در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

$$B \subseteq C \text{ و } A \subseteq B \quad (۲)$$

$$B \in C \text{ و } A \in B \quad (۱)$$

$$B \subseteq C \text{ و } B \in C \quad (۴)$$

$$A \subseteq C \text{ و } A \in C \quad (۳)$$

۳۷- مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ چند زیرمجموعه دارد، به طوری که اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن

برابر ۴ باشد؟

۲۴ (۴)

۲۱ (۳)

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)

۳۸- اگر k عضو به مجموعه A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۴۸ واحد زیاد می‌شود. مجموعه اولیه A چند

زیرمجموعه حداقل ۳ عضوی دارد؟

۴۲ (۴)

۳۲ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

محل انجام محاسبات

۳۹- چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) $A' \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \notin A \Leftrightarrow x \in B)$

ب) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \vee x \notin B)$

پ) $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۴۰- درون هر یک از خانه‌های جدول زیر، یک عدد طبیعی طوری قرار می‌دهیم به طوری که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر باشد. اگر مجموعه اعداد واقع بر سطر اول با مجموعه اعداد واقع بر سطر دوم برابر باشد،

جمع اعداد واقع بر هر سطر چه قدر است؟

		۵
۹		

۱۵ (۱)

۲۷ (۲)

۲۷ یا ۱۵ (۳)

۳۲ یا ۲۷ (۴)

محل انجام محاسبات

فیزیک یازدهم

۴۱- یک میله پلاستیکی خنثی را با پارچه پشمی مالش می‌دهیم. پس از مالش، بار الکتریکی میله پلاستیکی $8nC$ / $12-$

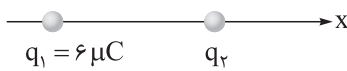
می‌شود؛ بین میله و پارچه چند الکترون و چگونه مبادله شده است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} C$)

(۱) 8×10^9 ، از پارچه به میله (۲) 8×10^9 ، از میله به پارچه

(۳) 8×10^9 ، از پارچه به میله (۴) 8×10^9 ، از میله به پارچه

۴۲- در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 روی محور x ، در فاصله 6 cm از هم قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی که

بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند، برابر $30N$ باشد، بار q_2 چند میکروکولن است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$)



(۱) ۲ (۲) -۲

(۳) ۲۰ (۴) -۲۰

۴۳- در شکل زیر، دو شمع روشن در نزدیکی کره رسانایی قرار دارند. اگر به این کره، بار الکتریکی مثبت دهیم، کدام یک

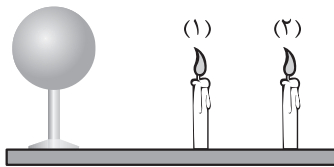
از موارد زیر درباره انحراف شعله شمع‌ها درست است؟

(الف) شعله شمع‌ها به سمت راست منحرف می‌شود.

(ب) شعله شمع‌ها به سمت چپ منحرف می‌شود.

(پ) شعله شمع‌ها به یک اندازه منحرف می‌شود.

(ت) شعله شمع (۱)، بیشتر از شعله شمع (۲) منحرف می‌شود.

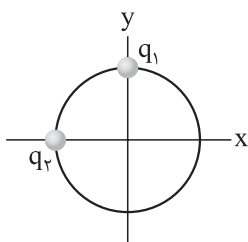


(۱) الف و پ (۲) الف و ت (۳) ب و پ (۴) ب و ت

۴۴- میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصله r از آن برابر با $E = 4 \times 10^5 N/C$ است، این بار از فاصله $\frac{r}{4}$ بر بار الکتریکی

نقطه‌ای 5 میکروکولنی، چند نیوتون نیرو وارد می‌کند؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۸



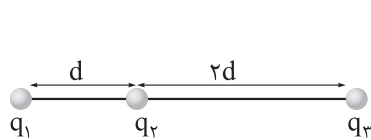
۴۵- در شکل روبه‌رو، دو ذره باردار q_1 و q_2 روی محیط دایره‌ای به قطر 6 cm قرار دارند. اگر میدان

الکتریکی برآیند در مرکز دایره (مبدأ مختصات)، در SI به صورت $\vec{E} = 4 \times 10^4 \vec{i} + 3 \times 10^4 \vec{j}$ باشد، بارهای q_1 و q_2 به ترتیب از راست به چپ، چند نانوکولن هستند؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$)

(۱) -۳ و ۴ (۲) ۳ و ۴ (۳) -۱۲ و ۱۶ (۴) ۱۲ و ۱۶

محل انجام محاسبات

۴۶- در شکل زیر، سه ذره باردار، روی خط راستی قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر کدام از ذره‌ها برابر صفر باشد، کدام گزینه درست است؟



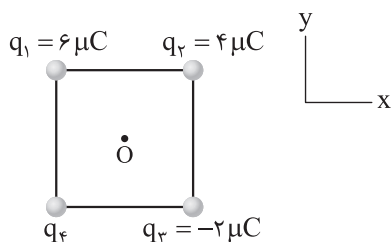
$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{q_3}{q_2} = -\frac{9}{4} \quad (4)$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{9}{4} \quad (1)$$

$$\frac{q_3}{q_2} = \frac{9}{4} \quad (3)$$

۴۷- در شکل مقابل، چهار ذره باردار در رأس‌های مربعی به ضلع 20 cm ثابت شده‌اند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه O (مرکز مربع) در جهت محور x باشد، اندازه این میدان خالص در SI چند واحد است؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{C}^2}$)



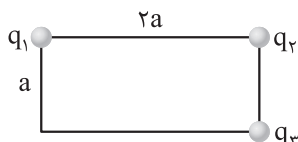
$$18 \times 10^5 \quad (1)$$

$$36 \times 10^5 \quad (2)$$

$$18\sqrt{2} \times 10^5 \quad (3)$$

$$36\sqrt{2} \times 10^5 \quad (4)$$

۴۸- سه ذره باردار در رأس مستطیل مطابق شکل زیر، ثابت نگه داشته شده‌اند و میدان الکتریکی حاصل، در رأس چهارم مستطیل، صفر است. q_3 ، چند برابر q_1 است؟



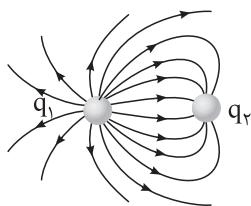
$$-8 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

۴۹- خطوط میدان الکتریکی برای دو کره رسانای باردار کوچک به شکل زیر هستند. در رابطه با نوع بار هر کره و مقایسه اندازه بار آن‌ها کدام درست است؟



$$|q_1| > |q_2|, q_1 < 0, q_2 > 0 \quad (1)$$

$$|q_1| < |q_2|, q_1 < 0, q_2 > 0 \quad (2)$$

$$|q_1| > |q_2|, q_1 > 0, q_2 < 0 \quad (3)$$

$$|q_1| < |q_2|, q_1 > 0, q_2 < 0 \quad (4)$$

۵۰- قطره روغنی در فضای بین دو صفحه افقی که اختلاف پتانسیل معینی دارند، معلق است. اگر جرم این قطره $1/2 \times 10^{-14} \text{ kg}$ و اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه برابر $1/25 \times 10^5 \text{ V/m}$ باشد، درباره تعداد الکترونی که این قطره نسبت به حالت خنثی، جذب کرده یا از دست داده، کدام درست است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, g = 10 \text{ m/s}^2$)

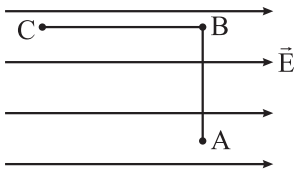
(۲) ۶ الکترون از دست داده است.

(۱) ۶ الکترون جذب کرده است.

(۴) ۸ الکترون از دست داده است.

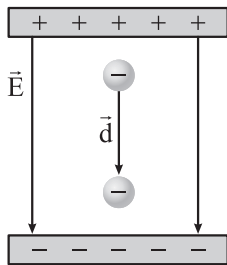
(۳) ۸ الکترون جذب کرده است.

محل انجام محاسبات



۵۱- در شکل مقابل، بار $q = -5\mu\text{C}$ را در میدان الکتریکی یکنواخت $8 \times 10^5 \text{ N/C}$ نخست از نقطه A تا نقطه B و سپس تا نقطه C جابه‌جا می‌کنیم. اگر $AB = 30 \text{ cm}$ و $BC = 40 \text{ cm}$ باشد، کاری که نیروی الکتریکی در این جابه‌جایی انجام می‌دهد، چند ژول است؟

- (۱) ۲
(۲) $1/6$
(۳) -2
(۴) $-1/6$



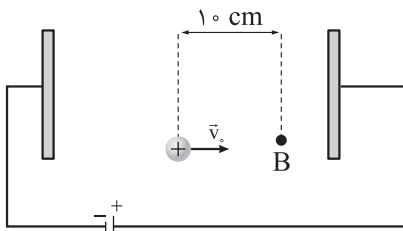
۵۲- مطابق شکل مقابل، یک ذره با بار منفی را در جهت خطوط میدان الکتریکی جابه‌جا می‌کنیم. چه تعداد از عبارات‌های زیر درباره جابه‌جایی این ذره، درست هستند؟

- (الف) کار میدان الکتریکی منفی است.
(ب) کار عامل خارجی مثبت است.
(پ) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره، افزایش می‌یابد.
(ت) پتانسیل الکتریکی، کاهش می‌یابد.

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۵۳- اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های باتری خودرو برابر 12V است. اگر بار الکتریکی 48-C کولن از پایانه منفی به پایانه مثبت باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند ژول و چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) 576 ، افزایش می‌یابد.
(۲) 576 ، کاهش می‌یابد.
(۳) 4 ، افزایش می‌یابد.
(۴) 4 ، کاهش می‌یابد.



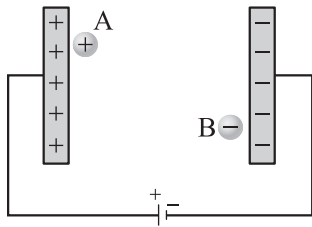
۵۴- در شکل مقابل، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه برابر $2/0 \times 10^3 \text{ N/C}$ است. پروتونی از نقطه A با سرعت \vec{v} در خلاف جهت میدان الکتریکی پرتاب شده است و سرانجام در نقطه B متوقف می‌شود. اگر بار پروتون $1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و جرم آن $1/6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ باشد، تندی پرتاب پروتون (v_0) چند متر بر ثانیه است؟ (از وزن پروتون و مقاومت هوا چشم‌پوشی شود.)

- (۱) 10^4
(۲) 2×10^4
(۳) 10^5
(۴) 2×10^5

۵۵- ذره‌ای به جرم $4\mu\text{g}$ و بار 6nC ، در یک میدان الکتریکی از نقطه A به پتانسیل الکتریکی $V_A = 40\text{V}$ تا نقطه B به پتانسیل الکتریکی V_B ، فقط تحت تأثیر میدان الکتریکی جابه‌جا می‌شود و تندی آن از 4m/s به 8m/s می‌رسد. V_B چند ولت است؟

- (۱) ۲۴
(۲) ۱۶
(۳) -16
(۴) -24

محل انجام محاسبات



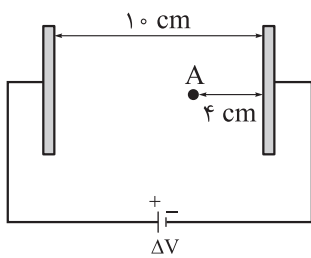
۵۶- مطابق شکل مقابل، ذره A با بار $q_A = |q|$ و جرم $m_A = m$ را از نزدیکی صفحه مثبت و ذره B با بار $q_B = -|q|$ و جرم $m_B = 4m$ را از نزدیکی صفحه منفی، رها می‌کنیم تا در نهایت به صفحه مقابلشان برسند. اگر کار میدان الکتریکی روی این دو ذره به ترتیب W_A و W_B و تندی آنها در لحظه رسیدن به صفحه مقابلشان V_A و V_B باشد، کدام گزینه درست است؟ (از اثر مقاومت هوا و نیروی وزن صرف نظر کنید.)

$$V_A = 2V_B, W_A = W_B \quad (2)$$

$$V_B = V_A, W_A = W_B \quad (1)$$

$$V_A = 2V_B, W_A = -W_B \quad (4)$$

$$V_A = V_B, W_A = -W_B \quad (3)$$



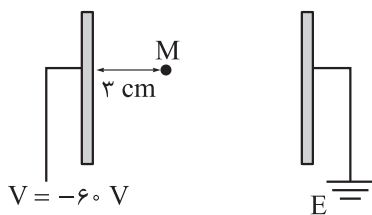
۵۷- در شکل مقابل، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -50 \mu\text{C}$ را در نقطه A رها می‌کنیم تا در نهایت به یکی از صفحه‌های باردار برخورد کند. اگر در طی این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی ذره 3 mJ تغییر کند، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه چند ولت است؟ (از اثر وزن ذره صرف نظر کنید.)

$$60 \quad (2)$$

$$40 \quad (1)$$

$$120 \quad (4)$$

$$100 \quad (3)$$



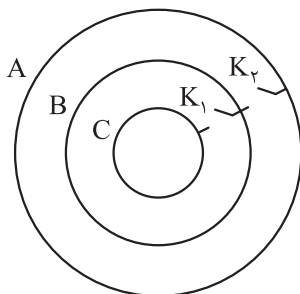
۵۸- در شکل روبه‌رو، در فضای بین دو صفحه رسانای موازی، میدان الکتریکی یکنواخت $E = 500 \text{ N/C}$ ایجاد شده است. به ترتیب، فاصله بین دو صفحه چند سانتی‌متر و پتانسیل الکتریکی نقطه M چند ولت است؟

$$-15 \text{ و } 12 \quad (2)$$

$$-45 \text{ و } 12 \quad (1)$$

$$-15 \text{ و } 6 \quad (4)$$

$$-45 \text{ و } 6 \quad (3)$$



۵۹- در شکل مقابل، سه پوسته کروی و رسانای A، B و C، دارای بارهای الکتریکی $q_C = 5 \mu\text{C}$ و $q_B = -4 \mu\text{C}$ ، $q_A = 10 \mu\text{C}$ هستند. ابتدا کلید K_2 را بسته و سپس باز می‌کنیم و در ادامه کلید K_1 را می‌بندیم. بار الکتریکی نهایی کره‌های A، B و C به ترتیب از راست به چپ، بر حسب میکروکولن، کدام است؟

$$3/5 - 3/5 - 3 \quad (2)$$

$$5 - 5 - 6 \quad (1)$$

$$2/5 - 2/5 - 6 \quad (4)$$

$$11 - 11 - 11 \quad (3)$$

۶۰- یک ماهواره به صورت مکعبی فلزی به ضلع 50 cm است. اگر این ماهواره در اثر عبور از یکی از لایه‌های جو زمین دارای بار الکتریکی شده و اندازه چگالی سطحی بار الکتریکی روی سطح آن $4 \frac{\text{nC}}{\text{cm}^2}$ باشد، اندازه بار موجود در سطح این ماهواره چند میکروکولن است؟ (از تجمع بار بر روی لبه‌ها چشم‌پوشی شود.)

$$60 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

شیمی یازدهم

۶۱- کدام عدد اتمی مربوط به عنصری از دسته d جدول تناوبی است؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۴۸ (۳) ۳۱ (۴) ۲۰

۶۲- در بین فلزهای قلیایی دوره‌های اول تا چهارم جدول تناوبی، بیشترین شعاع اتمی مربوط به بوده و بیشترین خاصیت نافلززی در گروه ۱۷ مربوط به عنصری است که

(۱) K - در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

(۲) K - در دمای ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

(۳) Li - در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

(۴) Li - در دمای ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

۶۳- با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟



(۱) حالت فیزیکی ترکیب Y همانند فراورده‌های واکنش (I) بوده و محلول در آب است.

(۲) Z یک عنصر است و آرایش الکترونی اتم آن به زیرلایه‌ای با گنجایش ۱۰ الکترون ختم می‌شود.

(۳) رنگ فراورده نامحلول واکنش (II)، طول موج بلندتری نسبت به رنگ محلول کلردار واکنش‌دهنده این واکنش دارد.

(۴) نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب X، همانند نسبت شمار کاتیون به آنیون در واکنش‌دهنده اکسیژن‌دار واکنش (III) است.

۶۴- اگر در نمونه‌ای ناخالص از کلسیم کربنات به جرم ۲۵۰ گرم، ۳۶ گرم کلسیم وجود داشته باشد، درصد خلوص این نمونه کدام است و اگر به این نمونه، ۱۶۰ گرم کلسیم کربنات با خلوص ۵ / ۳۷٪ اضافه کنیم، به تقریب چند درصد جرم نمونه نهایی را ناخالصی تشکیل می‌دهد؟ (در ناخالصی‌ها، کلسیم وجود ندارد و $\text{Ca} = 40, \text{O} = 16, \text{C} = 12 : \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) ۳۷ - ۹۰ (۲) ۳۶ - ۶۳

- (۳) ۹۰ - ۶۳ (۴) ۳۶ - ۳۷

۶۵- کدام عبارت درباره عنصری که آرایش لایه ظرفیت آن به $ns^2 np^2$ ختم می‌شود، درست است؟

(۱) اگر شمار الکترون‌های با $I = 2$ آن برابر اتم مس باشد، این عنصر رسانایی کمتری نسبت به عناصر هم‌گروهی پایین‌تر از خود دارد.

(۲) اگر سطح براق و درخشانی داشته باشد، به طور حتم چکش‌خواری و رسانایی خوبی نیز دارد.

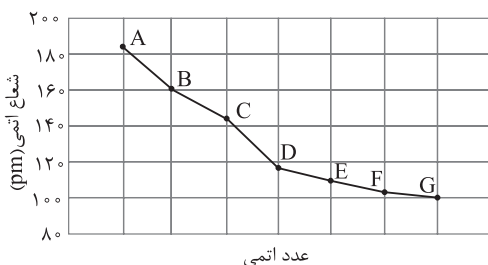
(۳) اگر در واکنش با سایر عناصر، الکترون به اشتراک بگذارد، به طور حتم، $n < 4$ خواهد بود.

(۴) اگر کاتیون پایدار تشکیل دهد، عدد اتمی آن می‌تواند برابر ۵۲ باشد.

محل انجام محاسبات

۶۶- با توجه به معادله داده شده، اگر ۱۶۰ گرم هیدرویدیک اسید با مقدار کافی پتاسیم پرمنگنات واکنش دهد و جرم فراورده اکسیژن دار تولیدی برابر ۸/۱ گرم باشد، بازده درصدی واکنش کدام است؟ ($H = 1, O = 16, I = 127 : g.mol^{-1}$)
 (معادله واکنش موازنه نشده است.)
 $KMnO_4(s) + HI(aq) \rightarrow MnI_2(aq) + H_2O(l) + KI(aq) + I_2(s)$
 (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۴۰ (۴) ۲۰

۶۷- با توجه به نمودار زیر که مربوط به تغییرات شعاع اتمی عناصر در دوره سوم است، کدام موارد درست است؟



الف) جمع جبری بار یون های پایدار عناصرهای مورد نظر برابر صفر است.
 ب) حالت فیزیکی عناصر F و G در دمای اتاق، برخلاف رنگ آنها متفاوت است.

پ) آرایش یون پایدار عنصر D همانند عنصر E به گاز نجیب آرگون می رسد.
 ت) عنصر F به شکل آزاد در طبیعت یافت می شود و اتم آن، ۶ الکترون ظرفیتی دارد.

(۱) الف - ب (۲) الف - ب - ت (۳) پ - ت (۴) ب - پ - ت

۶۸- در کدام گزینه مقایسه انجام شده به نادرستی صورت گرفته است؟

- (۱) واکنش پذیری: $Ca > Zn > Cu$
 (۲) شعاع اتمی: $Si > N > O$
 (۳) خصلت نافلز: $N > Si > P$
 (۴) خصلت فلزی: $Rb > K > Na$

۶۹- کدام موارد از مطالب زیر، به یقین درست اند؟

الف) اولین هالوژن جدول دوره ای که لایه الکترونی چهارم آن اشغال می شود، در دمای $25^\circ C$ با گاز هیدروژن واکنش می دهد.

ب) آرایش الکترونی کاتیون های حاصل از فلزهای واسطه به آرایش الکترونی گاز نجیب نمی رسند.

پ) بدون در نظر گرفتن گاز نجیب، در عناصر دوره دوم جدول دوره ای، بیشترین اختلاف شعاع اتمی بین لیتیم و فلور است.

ت) مجموع ($n + l$) الکترون های ظرفیتی عنصر گازی دوره چهارم جدول دوره ای برابر ۳۳ است.

(۱) ب - ت (۲) الف - پ (۳) الف - ت (۴) ب - پ

۷۰- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر در کدام گزینه، به درستی اشاره شده است؟

الف) آهن (II) اکسید به عنوان رنگ قرمز در نقاشی کاربرد دارد.

ب) از آلومینیم مذاب تولید شده در فرایند ترمیت برای جوشکاری خطوط ریل راه آهن استفاده می شود.

پ) از اولین فلز واسطه دوره چهارم، برای تهیه وسایلی مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه ها استفاده می شود.

ت) استخراج فلزهای روی و نیکل از لابه لای خاک و گیاه، برخلاف طلا و مس، مقرون به صرفه نیست.

(۱) نادرست - نادرست - درست - نادرست (۲) نادرست - درست - نادرست - نادرست

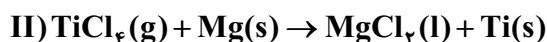
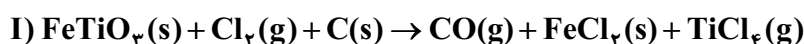
(۳) درست - نادرست - درست - نادرست (۴) نادرست - نادرست - درست - درست

محل انجام محاسبات

۷۵- همه عبارتهای زیر درباره طلا درست است، به جز

- ۱) رسانایی الکتریکی آن بسیار بالا است و این فلز همانند نقره به صورت آزاد در طبیعت یافت می شود
- ۲) مقدار طلا در معادن آن بسیار کم است و برای استخراج میزان اندکی از آن، حجم انبوهی خاک معدن استفاده می شود
- ۳) به اندازه های چکش خوار و نرم است که چند گرم از آن را می توان به صفحه ای با مساحت چند متر مربع تبدیل کرد
- ۴) واکنش ندادن آن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان همراه با بازتاب اندک پرتوهای خورشیدی، سبب شده تقاضای جهانی برای این فلز افزایش یابد

۷۶- تیتانیم اغلب در طبیعت به شکل مخلوطی از ماسه و ایلمنیت (FeTiO_3) یافت می شود. استخراج تیتانیم از این مخلوط به صورت زیر انجام می شود:



مجموع ضرایب استوکیومتری فراورده های واکنش (II) به ضریب CO در واکنش (I) کدام است و اگر درصد جرمی ایلمنیت (FeTiO_3) در مخلوط آن با ماسه، برابر ۲۵ درصد باشد، از واکنش ۰/۰۱ کیلوگرم مخلوط ماسه و ایلمنیت، چند میلی گرم فلز تیتانیم به دست می آید؟ (بازده درصدی واکنش های (I) و (II) را به ترتیب برابر ۱۰۰٪ و ۷۶٪ در نظر بگیرید، معادله واکنش ها موازنه شود. $\text{O} = ۱۶, \text{Cl} = ۳۵ / ۵, \text{Ti} = ۴۸, \text{Fe} = ۵۶ : \text{g.mol}^{-1}$)

(۱) $\frac{۳}{۶۰۰}$ ، (۲) $\frac{۳}{۷۶۰}$ ، (۳) ۱، ۶۰۰ (۴) ۱، ۷۶۰

۷۷- کدام مطلب نادرست است؟ (هر هکتار معادل با ده هزار متر مربع است.)

- ۱) در فرایند استخراج فلز مس با استفاده از گیاهان، درصد جرمی فلز در خاکستر گیاه، بیشتر از درصد جرمی آن در خاک است.
- ۲) فلزی که در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد، در طبیعت به صورت کانه هماتیت یافت می شود.
- ۳) هر چه واکنش پذیری فلزی بیشتر باشد، استخراج آن از سنگ معدن، دشوارتر خواهد بود.
- ۴) اگر در هر هکتار زمین بتوان ۱۰ تن گیاه برداشت کرد، در ۵۰۰ متر مربع، می توان ۲×۱۰^۵ گرم فلز روی پالایش کرد (هر کیلوگرم گیاه، حاوی ۴۰ گرم روی است).

۷۸- توصیف زیر نشان دهنده ویژگی های یکی از عناصر جدول تناوبی است. ویژگی ذکر شده در کدام گزینه، در مورد آن درست است؟

«عنصری با سطح صیقلی که در واکنش با فلئور، الکترون از دست می دهد و شمار الکترون های ظرفیتی آن برابر شمار الکترون های ظرفیتی عنصری زردرنگ و جامد از دوره سوم است و آرایش یون پایدار اولین عنصر هم دسته با آن به گاز نجیب آرگون می رسد.»

- ۱) عنصر بعدی آن، شبه فلزی است که رسانایی الکتریکی کمی دارد.
- ۲) به دسته p و دوره چهارم جدول تعلق دارد.
- ۳) عدد اتمی عنصر هم گروه آن در دوره بعدی، برابر با ۴۲ است.
- ۴) آرایش الکترونی آن مطابق قاعده آفا به $4s^1$ ختم می شود.

محل انجام محاسبات

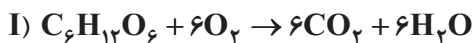
۷۹- در اثر واکنش ۵ گرم کلسیم کربنات با مقدار کافی محلول هیدروکلریک اسید، به تقریب چند مولکول در فرآورده‌ها تولید می‌شود؟ (۲۰ درصد نمونه کلسیم کربنات را ناخالصی تشکیل می‌دهد و بازده درصدی واکنش برابر ۶۰ درصد است، $(Ca = 40, O = 16, C = 12 : g.mol^{-1})$)

(معادله موازنه شود.) $CaCO_3(s) + HCl(aq) \rightarrow CaCl_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$

$$3/01 \times 10^{21} \quad (2) \qquad 3/01 \times 10^{22} \quad (1)$$

$$2/88 \times 10^{22} \quad (4) \qquad 2/88 \times 10^{21} \quad (3)$$

۸۰- اگر جرم برابری گلوکز در واکنش‌های سوختن (واکنش I) و تخمیر بی‌هوازی آن (واکنش II) شرکت کند و اختلاف حجم کربن دی‌اکسید تولیدی در این دو واکنش برابر ۲۰ لیتر باشد، اختلاف جرم الکل و آب تولیدی در آن‌ها چند گرم خواهد بود؟ (بازده واکنش (I) دو برابر واکنش (II) است و حجم مولی گازها در شرایط واکنش، ۲۵ لیتر است، $(H = 1, C = 12, O = 16 : g.mol^{-1})$)



$$9/29 \quad (4)$$

$$6/14 \quad (3)$$

$$9/92 \quad (2)$$

$$4/16 \quad (1)$$

مهم‌ترین ویژگی‌های آزمون‌های خیلی سبز در پایه‌های دهم و یازدهم:

- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
- ۲- برگزاری آزمون‌های ویژه برای زمان‌های خاص (میان‌ترم، ترم، پس از عیدو...)
- ۳- امکان جبران عقب‌ماندگی‌ها یا دوره‌مطالب برای تثبیت آن‌ها

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheylisabz.com

محل انجام محاسبات

پاسخ نامہ آزمون آزمایشی خلی سبز

مرحلہ دوم

پایہ یازدهم

رشته ریاضی

تاریخ برگزاری: ۱۸/آبان/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	زهرا پورشیر - شمیم پهلوان شریف - فرشاد حسن زاده - خشایار خاکی - مجید رفعتی - علی شهبابی محمد گودرزی - میلاد منصوری - حسین نادری - محمدسجاد نقیہ
آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدطاہر شعاعی - صبا مہدوی - حسین ہاشمی طاہری
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	حمید ذبحی - وحید فارسیان - امیرحسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامہ	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیہ	محمدسجاد نقیہ	شمیم پهلوان شریف	سجاد داوطلب علی شهبابی شقایق راہبریان	عادل حسینی - علی رضایی ماہان فنی فر
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مریم نظری	علیرضا کاظمی بقا ماہان فنی فر
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	زهرا جالینوسی	مہدی خوش نویس ماہان فنی فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللہی	علیرضا عبداللہی	ماہان فنی فر - امیر محمودی انزابی پارسا مرادی - ابوالفضل ناصری
شیمی	یاسر عبداللہی	امیرحسین مسلمی	امیرحسین مسلمی	احسان رحیمی	سید علی حسین زاده پارسا طاہری

سرپرست محتوایی: فاطمہ آقاجانیپور



آزمون آزمائشی خلی سبز

سپرست تولید	الناز علی یاری زاده
ویراستاران فنی	منیژه حق دوست - راضیہ سادات خلی نسب زہرا صفری - محیا غنی فرد زہرا فرہادی مہر - مریم مسلمی زاده ساعده نمازی - مریم نوری نیا
رسام	مونا آندستا سارا گنجی آزادپور
صفحه آرائی	سحر ازلی تاش - فاطمہ بخششی مریم حسین زاده - سپیدہ سخایی مائدہ صبری - نیلوفر فرخجستہ مہدیہ گل پور - لیلا نعمت پور



حسابان یازدهم

اگر a جواب معادله $\sqrt{2x-1} = x-2$ باشد، مجموع ارقام عدد $4a$ کدام است؟

۱

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: برای حل معادله، دو طرف را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sqrt{2x-1} = x-2)^2 \Rightarrow 2x-1 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \quad \begin{cases} x=1 \text{ غ ق} \\ x=5 \checkmark \end{cases} \quad \text{(سمت راست منفی می‌شه و رادیکال نمی‌تونه برابر با عدد منفی باشه.)}$$

گام دوم: $a = 5$ جواب قابل قبول ما است؛ پس $4a$ برابر است با 20 و مجموع ارقام 20 می‌شود: $0+2=2$

تعداد جواب‌های معادله $\frac{20}{x^2-4} + \frac{x+7}{x+2} = \frac{3x+3}{2x-4}$ کدام است؟ ۲

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: برای حل معادله در قدم اول نیاز به مخرج مشترک‌گیری داریم. برای این کار مخرج کسرها را کمی ساده‌تر می‌کنیم. مخرج اولین کسر با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌شود و در مخرج کسر حاصل، می‌توانیم از عدد ۲ فاکتور بگیریم:

$$\frac{20}{\underbrace{x^2-4}_{\text{مزدوج}}} + \frac{x+7}{x+2} = \frac{3x+3}{\underbrace{2x-4}_{\text{فاکتورگیری}}}$$

گام دوم: حالا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{20 \times 2}{(x-2)(x+2) \times 2} + \frac{\overbrace{x^2+5x-14}^{(x+7)(x-2)} \times 2}{(x+2)(x-2) \times 2} = \frac{(3x+3)(x+2)}{2(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{40 + 2x^2 + 10x - 28}{2(x-2)(x+2)} = \frac{3x^2 + 9x + 6}{2(x-2)(x+2)}$$

گام سوم: با در نظر گرفتن این‌که $x = 2$ و $x = -2$ به علت این‌که ریشه‌های مخرج هستند، نمی‌توانند جواب معادله باشند، مخرج‌ها را ساده می‌کنیم؛ پس داریم:

$$2x^2 + 10x + 12 = 3x^2 + 9x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \quad \checkmark \\ x = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۳ اگر جملات اول و نهم یک دنباله هندسی با قدرنسبت مثبت به ترتیب ۳ و ۲۴۳ باشد، مجموع ۸ جمله اول این دنباله کدام است؟

$$(۲) ۲۴۰(\sqrt{۳}-۱)$$

$$(۱) ۲۴۰(\sqrt{۳}+۱)$$

$$(۴) ۱۲۰(\sqrt{۳}-۱)$$

$$(۳) ۱۲۰(\sqrt{۳}+۱)$$

Hint

درس Box

به کمک جمله اول و نهم، قدرنسبت (r) دنباله رو به دست بیار، بعد مجموع ۸ جمله اول رو به دست بیار.

به دنباله‌ای که در آن هر جمله از ضرب یک مقدار ثابت در جمله قبلی‌اش به دست می‌آید، دنباله هندسی می‌گویند. در واقع، در این دنباله حاصل تقسیم هر دو جمله متوالی برابر است با قدرنسبت آن. (قدرنسبت دنباله هندسی را معمولاً با r یا q نشان می‌دهند.)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

مانند:

$$۳, ۶, ۱۲, ۲۴, \dots$$

$$r = \frac{۶}{۳} = \frac{۱۲}{۶} = \frac{۲۴}{۱۲} = ۲$$

● جمله عمومی دنباله هندسی: اگر جمله اول یک دنباله هندسی a_1 و قدرنسبت آن r باشد، جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

که در آن:

a_n : جمله nام

a_1 : جمله اول

r: قدرنسبت

n: شماره جمله

● مجموع جملات دنباله هندسی:

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی (S_n) با جمله اول a_1 و قدرنسبت r برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن r قدرنسبت):

با توجه به سؤال، جمله اول (a_1) برابر ۳ و جمله نهم (a_9) برابر ۲۴۳ است؛ پس با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی داریم:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{\substack{a_1=۳, n=۹ \\ a_9=۲۴۳}} ۲۴۳ = ۳ \times r^{9-1} \Rightarrow ۸۱ = r^8 \Rightarrow ۳^4 = r^8 \Rightarrow r = \pm\sqrt{۳}$$

که با توجه به فرض سؤال که $r > 0$ است؛ پس $r = \sqrt{۳}$ می‌باشد.

گام دوم (به دست آوردن مجموع ۸ جمله اول):

طبق فرمول مجموع n جمله اول دنباله هندسی داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \xrightarrow{\substack{a_1=۳, r=\sqrt{۳} \\ n=۸}} S_n = \frac{۳(1-(\sqrt{۳})^8)}{1-\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow S_8 = \frac{۳-۳(\sqrt{۳})^8}{1-\sqrt{۳}} = \frac{۳-۳(۳^4)}{1-\sqrt{۳}} = \frac{۳-۳^5}{1-\sqrt{۳}} = \frac{-۲۴۰}{1-\sqrt{۳}} \times \frac{1+\sqrt{۳}}{1+\sqrt{۳}}$$

گویا کردن

$$\Rightarrow S_8 = \frac{-۲۴۰ \times (1+\sqrt{۳})}{1-۳} = \frac{-۲۴۰(1+\sqrt{۳})}{-۲} = ۱۲۰(1+\sqrt{۳})$$

در دنباله هندسی a_n ، مجموع شش جمله اول، ۹ برابر مجموع سه جمله اول است. مقدار $\frac{a_1}{a_5}$ کدام است؟

۴

۱۲۸ (۴)

۶۴ (۳)

۳۲ (۲)

۱۶ (۱)



Hint ابتدا به کمک نسبت مجموع‌های داده شده قدرنسبت (r) رو به دست بیار. حالا می‌تونی $\frac{a_1}{a_5}$ رو به دست بیاری.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن قدرنسبت (r)):

با توجه به درس باکس سؤال قبل داریم:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

از طرفی، با توجه به صورت سؤال $\frac{S_6}{S_3} = 9$ است؛ پس داریم:

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(1-r^6)}{1-r}}{\frac{a_1(1-r^3)}{1-r}} = \frac{1-r^6}{1-r^3} = 9 \xrightarrow{\text{تجزیه صورت به کمک اتحاد مزدوج}} \frac{(1-r^3)(1+r^3)}{1-r^3} = 9$$

$$\Rightarrow 1+r^3 = 9 \Rightarrow r^3 = 9-1=8 \Rightarrow r=2$$

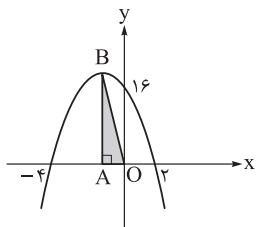
گام دوم (محاسبه مقدار $\frac{a_1}{a_5}$):

با توجه به درس باکس سؤال قبل، جمله عمومی یک دنباله هندسی برابر است با:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

خواسته سؤال مقدار $\frac{a_1}{a_5}$ است؛ پس داریم:

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1 \times r^{1-1}}{a_1 \times r^{5-1}} = \frac{a_1 \times r^0}{a_1 \times r^4} = r^{-4} \xrightarrow{r=2} \frac{a_1}{a_5} = 2^{-4} = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$



با توجه به نمودار سهمی رسم شده، مساحت مثلث **OAB** کدام است؟

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

۱۸ (۴)

۹ (۳)



درسی Box

- میانگین طول نقاط برخورد سهمی با نمودار، طول رأس سهمی (x_s) را به ما می‌دهد. البته x رأس سهمی با داشتن معادله سهمی از رابطه $\frac{-b}{2a}$ نیز قابل محاسبه است.
- با جای گذاری x رأس سهمی در معادله سهمی، y رأس سهمی (y_s) به دست می‌آید که البته از رابطه $\frac{-\Delta}{4a}$ نیز قابل محاسبه است.
- در سهمی به معادله $ax^2 + bx + c = 0$ محل برخورد نمودار با محور y ها است.

پاسخ خیلی تشریحی

برای به دست آوردن مساحت مثلث **OAB**، نیاز به به دست آوردن اندازه قاعده مثلث (**OA**) و ارتفاع مثلث (**AB**) داریم.
گام اول (به دست آوردن x رأس سهمی): طبق نمودار، x_A یا x رأس سهمی یعنی x_B برابر است که به راحتی با محاسبه میانگین نقاط برخورد نمودار با محور افقی قابل محاسبه است:

$$x_A = \frac{2 + (-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow |OA| = 1$$

گام دوم (به دست آوردن معادله سهمی): برای محاسبه **AB**، نیاز داریم، معادله سهمی را به دست آورده و $x = -1$ را در آن قرار دهیم:

$$f(x) = ax^2 + bx + 16$$

محل برخورد نمودار با محور عمودی

نقاط $(2, 0)$ و $(-4, 0)$ که روی سهمی قرار دارند را در آن جای‌گذاری کرده و با حل دستگاه دو معادله دو مجهول، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (2, 0) &\Rightarrow a(2)^2 + b(2) + 16 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -16 \xrightarrow{\text{ساده به 2}} 2a + b = -8 \\ (-4, 0) &\Rightarrow a(-4)^2 + b(-4) + 16 = 0 \Rightarrow 16a - 4b = -16 \xrightarrow{\text{ساده به 4}} 4a - b = -4 \end{aligned} \quad \oplus$$

$$6a = -12 \Rightarrow a = -2$$

$$2a + b = -8 \Rightarrow 2(-2) + b = -8 \Rightarrow b = -8 + 4 = -4 \quad \text{با } a = -2 \text{ را در یکی از معادلات جای‌گذاری می‌کنیم:}$$

پس معادله سهمی به فرم $f(x) = -2x^2 - 4x^2 + 16$ درآمد.

گام سوم (به دست آوردن ارتفاع مثلث): طول **AB** یا همان $f(-1)$ برابر است با:

$$f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 16 = -2 + 4 + 16 = 18$$

$$S = \frac{18 \times 1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

گام چهارم (به دست آوردن مساحت مثلث): مساحت مثلث **OAB** برابر است با:

در سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با ضرایب صحیح، مجموع صفرها برابر ۳ و حاصل ضرب آن‌ها برابر -۸ است. کم‌ترین مقدار ممکن برای $f^2(-۱)$ کدام است؟

۱ (۴)

۴ (۳)

۱۶ (۲)

۱ (صفر)



Hint با توجه به مجموع و حاصل ضرب جواب‌ها، روابط بین ضرایب معادله درجه دوم رو به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (رابطه بین جمع ریشه‌ها و ضرایب):** یک تابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ با ضرایب صحیح را در نظر بگیرید.

می‌دانیم جمع ریشه‌ها برابر با $S = -\frac{b}{a}$ است که طبق صورت سؤال برابر ۳ است؛ پس:

$$S = -\frac{b}{a} = 3 \quad (I)$$

گام دوم (رابطه بین ضرب ریشه‌ها و ضرایب): ضرب ریشه‌ها به صورت $P = \frac{c}{a}$ است که با توجه به سؤال برابر -۸ است؛ پس:

$$P = \frac{c}{a} = -8 \quad (III)$$

گام سوم (رابطه بین ضرایب a , b و c): حال طرفین تساوی‌های (I) و (II) را با هم جمع می‌کنیم و داریم:

$$\begin{cases} S = -\frac{b}{a} = 3 \\ P = \frac{c}{a} = -8 \end{cases} \xrightarrow{+} -\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 3 + (-8) = -5 \Rightarrow \frac{-b+c}{a} = -5$$

$$-b + c = -5a \quad (*)$$

گام چهارم (محاسبه مقدار $f^2(-۱)$): با جای‌گذاری $x = -۱$ در $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم:

$$f(-۱) = a(-۱)^2 + b(-۱) + c = a - b + c$$

$$f(-۱) = a - b + c = a + (-5a) = -4a$$

که با توجه به (*), $-b + c = -5a$ است؛ پس داریم:

$$f^2(-۱) = (-4a)^2 = 16a^2$$

ما به دنبال کم‌ترین مقدار $f^2(-۱)$ هستیم؛ پس:

از آن‌جا که ضرایب معادله، صحیح هستند و ضریب x^2 ، a باید مخالف صفر باشد، پس $a^2 \geq 1$ است؛ بنابراین:

$$f^2(-۱) = 16a^2 \xrightarrow{a^2 \geq 1} f^2(-۱) \geq 16$$

پس کم‌ترین مقدار ممکن برای $f^2(-۱)$ برابر ۱۶ است.

حاصل $A = |3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}| - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ کدام است؟ ۷

-۳ (۴)

۳ (۳)

 $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 3$ (۲) $3 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ (۱)

Hint تکلیف رادیکال رو به کمک قوانین رادیکال مرکب مشخص کن. علامت عبارت داخل قدرمطلق را هم مشخص کن، ببین چی از داخل قدرمطلق خارج می‌شه، کار تمومه.

درسی Box

فاصله X از مبدأ روی محور X ها را $|X|$ می‌نامیم و می‌گوییم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

هرگاه بخواهیم قدرمطلق را برداریم، ابتدا علامت عبارت درون قدرمطلق را مشخص می‌کنیم، چنانچه مثبت باشد، قدرمطلق آن برابر است با خود عبارت و چنانچه منفی باشد، قدرمطلق آن برابر است با قرینه عبارت.

رادیکال مرکب:

در $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ می‌توان به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای عبارت زیر رادیکال را بازنویسی کرد و آن را از زیر رادیکال خارج کرد.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$C^2 = A^2 - B^2$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن حاصل $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$):

با توجه به آن چه که در درس پاکس گفته شد:

$$\sqrt{\frac{A}{2} + \frac{B}{2}} \xrightarrow[C^2 = 25 - 24 = 1]{C^2 = A^2 - B^2} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

گام دوم (به دست آوردن حاصل $|3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}|$):

عبارت $3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ منفی است؛ بنابراین از درون قدرمطلق قرینه آن بیرون می‌آید.

$$|3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}| = -(3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 3$$

گام سوم (به دست آوردن حاصل عبارت A):

$$|3 - \sqrt{3} - \sqrt{2}| - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 3 - \sqrt{3} - \sqrt{2} = -3$$

فرض کنید دنباله‌ای حسابی از اعداد طبیعی باشد، به طوری که $a_1 + a_2 + \dots + a_7 < 60$ باشد. چند مقدار مختلف برای a_8 وجود دارد؟

۱۰ (۴)

۱۲ (۳)

۱۵ (۲)

۱۸ (۱)



Hint

جمع ۷ جمله اول دنباله حسابی داده شده رو برحسب a_1 و d به دست بیار و با توجه به مقادیر مختلف d ، مقادیر قابل قبول برای a_1 و در نتیجه a_8 رو به دست بیار.

دروس Box

دنباله حسابی: به دنباله‌ای که در آن هر جمله با عددی ثابت (قدرنسبت) جمع شده و جمله بعدی به دست می‌آید، دنباله حسابی می‌گویند. در واقع، در این دنباله اختلاف هر دو جمله متوالی برابر است با قدرنسبت آن. (قدرنسبت را معمولاً با d نمایش می‌دهند).

$$a_n - a_{n-1} = d$$

مانند:

$$d = 4 \Rightarrow 1, 5, 9, 13, 17, \dots$$

$\begin{array}{cccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ +4 & +4 & +4 & +4 \end{array}$

جمله عمومی دنباله حسابی: اگر جمله اول یک دنباله حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، جمله عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

که در آن:

 a_n : جمله n ام a_1 : جمله اول d : قدرنسبت n : شماره جمله

مجموع n جمله اول دنباله حسابی: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی که آن را با S_n نمایش می‌دهیم، برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad (1) \text{ اگر جمله اول و آخر و تعداد جملات را داشته باشیم از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad (2) \text{ اگر جمله اول، قدرنسبت و تعداد جملات را داشته باشیم از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه $a_1 + a_2 + \dots + a_7$):

با توجه به رابطه جمع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S_7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_7) = 7\left(\frac{a_1 + a_1 + 6d}{2}\right) = 7\left(\frac{2a_1 + 6d}{2}\right) = 7(a_1 + 3d)$$

گام دوم (حل نامعادله و به دست آوردن خواسته سؤال):

$$a_1 + a_2 + \dots + a_7 < 60 \Rightarrow 7(a_1 + 3d) < 60$$

$$a_1 + 3d < \frac{60}{7} \approx 8.57 \Rightarrow a_1 + 3d \leq 8$$

حالا با توجه به مقادیر مختلف d ، مقادیر قابل قبول a_1 و در نتیجه a_8 را به دست می‌آوریم:

$$a_1 + 3d \leq 8 \Rightarrow \begin{cases} d=0 \Rightarrow a_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow a_8 = a_1 \in \{1, 2, \dots, 8\} \\ d=1 \Rightarrow a_1 + 3 \leq 8 \Rightarrow a_1 \leq 5 \Rightarrow a_1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \xrightarrow{a_8 = a_1 + 7d} a_8 \in \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ d=2 \Rightarrow a_1 + 6 \leq 8 \Rightarrow a_1 \leq 2 \Rightarrow a_1 = 1, 2 \xrightarrow{a_8 = a_1 + 14d} a_8 \in \{9, 10\} \end{cases}$$

بنابراین مقادیر مختلف a_8 برابر است با:

$$a_8 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

در نتیجه، ۱۰ مقدار مختلف برای a_8 وجود دارد.

در دنباله $a_n = 2^{n-1} + 2^{12-n}$ ، مجموع ۱۰ جمله اول برابر S_1 است. باقی مانده تقسیم S_1 بر ۱۰ کدام است؟

۹ (۴)

۵ (۳)

۷ (۲)

۲ (۱)

۹



دنباله داده شده در صورت سؤال جمع دو دنباله هندسیه. مجموع ۱۰ جمله اول هر کدام از اون دنباله ها رو به دست بیار ...

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (مشخص کردن دو دنباله هندسی):

دنباله a_n را به صورت جمع دو دنباله هندسی در نظر می گیریم:

$$a_n = \underbrace{2^{n-1}}_{b_n} + \underbrace{2^{12-n}}_{c_n}$$

حالا جمله اول و قدرنسبت هر کدام از دنباله های هندسی b_n و c_n را به دست می آوریم:

$$b_n = 2^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} \text{جمله اول} \Rightarrow n=1: b_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \\ \text{قدرنسبت} \Rightarrow r = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2^{2-1}}{2^{1-1}} = \frac{2}{1} = 2 \end{cases}$$

$$c_n = 2^{12-n} \Rightarrow \begin{cases} \text{جمله اول} \Rightarrow n=1: c_1 = 2^{12-1} = 2^{11} \\ \text{قدرنسبت} \Rightarrow r = \frac{c_2}{c_1} = \frac{2^{12-2}}{2^{12-1}} = \frac{2^1}{2^{11}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

گام دوم (به دست آوردن مجموع ۱۰ جمله اول دنباله های b_n و c_n):

می دانیم با توجه به درس باکس سؤال ۳، مجموع n جمله اول دنباله هندسی از رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

پس برای دنباله های b_n و c_n داریم:

$$b_n \text{ دنباله } S'_1 = \frac{1(1-2^{10})}{1-2} = \frac{1-2^{10}}{-1} = 2^{10} - 1$$

$$c_n \text{ دنباله } S''_1 = \frac{2^{11}(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^{11}-2}{\frac{1}{2}} = 2^{12} - 2^2 = 2^{12} - 4$$

گام سوم (به دست آوردن مجموع جملات دنباله هندسی a_n):

از آن جا که مجموع جملات دنباله های هندسی a_n (S)، برابر مجموع جملات دنباله هندسی b_n (S') و مجموع جملات دنباله هندسی c_n (S'') است، داریم:

$$S_1 = S'_1 + S''_1 = (2^{10} - 1) + (2^{12} - 4) = 2^{10} + 2^{12} - 5 = 1024 + 4096 - 5 = 5115$$

گام چهارم (به دست آوردن باقی مانده):

با توجه به یکان این عدد، باقی مانده تقسیم آن بر ۱۰ برابر ۵ است.



۱۰ در معادله $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$ مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۱۱ (۱)



با حدس متوجه می‌شوی $x = -1$ یکی از ریشه‌هاست، عبارت درجه سه رو بر عامل $x + 1$ تقسیم کن تا بقیه ریشه‌ها هم به دست بیان.

Hint

درس‌Box

اگر بخواهیم معادله درجه سوم را که عامل $x - a$ دارد حل کنیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

(۱) یک ریشه را با اعداد ۱، ۲، -۱ یا -۲ حدس می‌زنیم تا ببینیم کدام یک در معادله صدق می‌کند. (آن را ریشه a می‌نامیم).

$$\begin{array}{r|l} \text{عبارت درجه ۳} & x - a \\ \vdots & \text{عبارت درجه ۲} \\ \hline & \end{array}$$

(۲) عبارت درجه ۳ را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم تا عامل‌های دیگر به دست آیند.

$$(3) \quad (x - a)(\text{عبارت درجه ۲}) = (x - a) = 0$$

(۳) که یا باید $x - a$ صفر باشد یا عبارت درجه ۲. از حل آن‌ها می‌توان جواب‌های معادله را به دست آورد.

در یک معادله درجه ۲ به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ و $(a \neq 0)$ جمع ریشه‌ها و ضرب ریشه‌ها و تفاضل ریشه‌ها طبق جدول زیر به دست می‌آیند (α و β را ریشه‌های معادله در نظر می‌گیریم):

S: جمع ریشه‌ها	P: ضرب ریشه‌ها	D: تفاضل ریشه‌ها
$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$	$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$	$ \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a } = \sqrt{S^2 - 4P}$

با توجه به S و P برای روابط بین ریشه‌ها داریم:

مجموع مربعات ریشه‌ها: $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$	اثبات: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$
مجموع مکعبات ریشه‌ها: $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$	اثبات: $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$
مجموع معکوس ریشه‌ها: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{S}{P}$	اثبات: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$

گام اول (به دست آوردن ریشه‌ها و عامل‌های عبارت درجه ۳):

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 0$$

با حدس $x = -1$ متوجه می‌شویم که در معادله صدق می‌کند:

حالا عبارت درجه ۳ را بر $(x - (-1)) = x + 1$ تقسیم می‌کنیم تا عامل‌های دیگر به دست آیند.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 4x - 5 & x + 1 \\ -x^3 - x^2 & \hline x^2 - 4x - 5 & \\ -x^2 - x & \\ \hline -5x - 5 & \\ 5x + 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x^2 + x - 5) = 0$$

پس داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

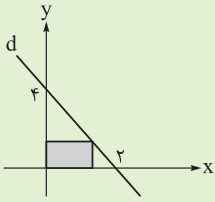
گام دوم (محاسبه جمع مربعات ریشه‌ها):

با توجه به معادله $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x^2 + x - 5) = 0$ یا باید $x+1$ برابر صفر باشد یا $x^2 + x - 5$ ؛ پس:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \xrightarrow{\text{مربع ریشه}} (-1)^2 = 1$$

$$x^2 + x - 5 = 0 \xrightarrow[S=-1, P=-5]{\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}} S^2 - 2P = (-1)^2 - 2(-5) = 11$$

بنابراین مجموع مربعات ریشه‌ها برابر $1+11=12$ است.



۱۱ در شکل مقابل، یکی از رئوس مستطیل روی خط d در ناحیه اول و دو ضلع آن روی محورهای مختصات واقع شده است. ماکزیم مساحت مستطیل رنگی کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

Hint ابتدا معادله خط رو به دست بیار. با توجه به این که یکی از رئوس مستطیل روی خط قرار داره، می تونی طول و عرض مستطیل رو هم برحسب X به دست بیاری و این جوری مساحت برحسب X به دست میاد. حالا ماکزیم مقدار مساحت رو به دست بیار.

• **خط:** فرم کلی ضابطه تابع خطی به صورت $y = mx + h$ می باشد که در آن m (ضریب X) نشان دهنده شیب خط است. اگر $m > 0$ باشد، یک خط با شیب مثبت (صعودی) و اگر $m < 0$ یک خط با شیب منفی (نزولی) خواهیم داشت و h عرض از مبدأ خط می باشد که نشان دهنده محل برخورد با محور Y هاست.

• **نوشتن معادله خط:** برای نوشتن معادله خط نیاز به شیب و مختصات یک نقطه از آن خط داریم.

• **شیب خط:** شیب یک خط برابر است با تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور X ها می سازد.

از طرفی، اگر دو نقطه از یک خط (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) را داشته باشیم، شیب خط برابر است با:

$$\text{شیب} = m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

حالا با داشتن m (شیب) و یک نقطه از خط به عنوان مثال (X_1, Y_1) ، می توانیم معادله خط را به صورت زیر بنویسیم:

$$y - Y_1 = m(x - X_1)$$

• **مسائل کاربردی بیشترین و کمترین مقدار تابع درجه دوم:**

در سؤالاتی ما باید با توجه به اطلاعات سؤال ابتدا به یک تابع درجه دوم (سهمی) به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ برسیم. سپس با استفاده از این نکته که رأس سهمی فقط مینیمم یا ماکزیمم یک سهمی است، می توانیم بیشترین یا کمترین مقدار سهمی (تابع درجه دوم) را به دست آوریم.

برای به دست آوردن طول و عرض رأس سهمی به صورت زیر عمل می کنیم:

در یک معادله درجه دوم به ضابطه $f = ax^2 + bx + c$ طول رأس سهمی از رابطه $X_s = -\frac{b}{2a}$ به دست می آید و برای محاسبه عرض رأس سهمی به دو شکل می توانیم عمل کنیم.

(۱) از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a}$$

(۲) با جای گذاری طول رأس سهمی در ضابطه سهمی می توانیم عرض سهمی را به دست آوریم. یعنی:

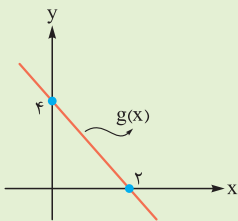
$$y_s = f(x_s) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

✓ **پاسخ خیلی تشریحی** گام اول (نوشتن معادله خط):

از آن جا که برای نوشتن معادله خط نیاز به شیب و یک نقطه از خط داریم. ابتدا شیب را به دست می آوریم. طبق شکل خط از نقاط $(2, 0)$ و $(0, 4)$ می گذرد؛ بنابراین داریم:

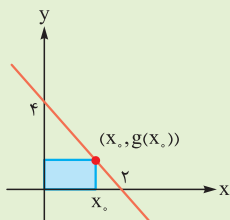
$$m = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2$$

که با داشتن نقطه $(0, 4)$ و شیب $(m = -2)$ می توانیم معادله خط را بنویسیم.



$$\left. \begin{matrix} m = -2 \\ (0, 4) \end{matrix} \right\} \Rightarrow y - 4 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 4 \Rightarrow g(x) = -2x + 4$$

گام دوم (نوشتن مساحت مستطیل بر حسب x):



با توجه به شکل مختصات نقاط دیگر قطر مستطیل $(0,0)$ و $(x_0,0)$ است؛ بنابراین اندازه طول مستطیل است.

$$\text{طول مستطیل} = |x_0 - 0| = x_0$$

و مختصات نقاط دوسر عرض مستطیل به صورت $(x_0, g(x_0))$ و $(x_0, 0)$ است؛ بنابراین با توجه به هم طول بودن این دو نقطه عرض مستطیل برابر است با:

$$\text{عرض مستطیل} = |g(x_0) - 0| = g(x_0) \xrightarrow{g(x) = -2x + 4} g(x_0) = -2x_0 + 4$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{طول} \times \text{عرض} = x_0(-2x_0 + 4) = -2x_0^2 + 4x_0$$

بنابراین مساحت مستطیل بر حسب x_0 یک عبارت درجه دوم است.

گام سوم (به دست آوردن ماکزیمم مساحت مستطیل):

از آن جاکه مساحت مستطیل یک عبارت درجه دوم می باشد، پس برای به دست آوردن ماکزیمم مقدار مساحت مستطیل باید عرض رأس سهمی را به دست آورد؛ پس داریم:

$$S(x_0) = -2x_0^2 + 4x_0 \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1 \Rightarrow y_s = S(1) = -2(1)^2 + 4(1) = -2 + 4 = 2$$

تعداد ریشه‌های متمایز معادله $x^4 - 3x^2 + k^3 - 3k + 1 = 0$ عددی فرد است. مجموع مربعات ریشه‌های آن کدام است؟

۱۲ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۱۲



حل معادله به کمک تغییر متغیر

معادله $(x^2 - 2x)^2 - 7(x^2 - 2x) - 8 = 0$ را در نظر بگیرید. در این معادله، عبارت $x^2 - 2x$ در معادله تکرار شده است. برای حل معادله این گام‌ها را انجام می‌دهیم:

$$t = x^2 - 2x$$

گام اول: عبارتی که تکرار شده است را t می‌گیریم:

$$t^2 - 7t - 8 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{-c}{a} = 8 \end{cases}$$

گام دوم: معادله را بر حسب t می‌نویسیم و حل می‌کنیم:

گام سوم: حالا $x^2 - 2x$ را برابر با -1 و 8 قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = -1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 - 2x = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ و } -2 \end{cases}$$

چند مورد دیگر از معادلاتی که با تغییر متغیر حل می‌شوند را ببینید:

$$x^6 - 5x^3 - 6 = 0 \xrightarrow{x^3=t} t^2 - 5t - 6 = 0 \Rightarrow \dots$$

$$4^x - 3^{x+1} - 8 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2(2^x) - 8 = 0 \xrightarrow{2^x=t} t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow \dots$$

$$\sin^2 x + \cos x - \frac{5}{4} = 0 \xrightarrow{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x} 1 - \cos^2 x + \cos x - \frac{5}{4} = 0 \xrightarrow{\cos x=t} t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \dots$$

در معادله درجه دو، با توجه به علامت Δ ، تعداد ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	دو ریشه متمایز دارد.	یک ریشه مضاعف دارد.	ریشه حقیقی ندارد.

گام اول: با استفاده از تغییر متغیر، $x^2 = t$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$x^4 - 3x^2 + k^3 - 3k + 1 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 3t + k^3 - 3k + 1 = 0$$

به یک معادله درجه دو می‌رسیم.

● اگر این معادله درجه دو، دو جواب مثبت (غیرصفر) داشته باشد، معادله اصلی دارای چهار جواب خواهد بود؛ پس این حالت مد نظر ما نیست.

● اگر این معادله درجه دو، دو جواب منفی داشته باشد، معادله اصلی جواب نخواهد داشت (عدد منفی $x^2 \neq$)؛ پس این حالت نیز مد نظر ما نیست.

● اگر این معادله درجه دو، یک جواب مثبت غیرصفر و یک جواب منفی داشته باشد، معادله اصلی دارای دو جواب خواهد بود (فقط به ازای ریشه مثبت)؛ پس این حالت هم مد نظر ما نیست.

● کافی است این معادله درجه دو دارای یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت باشد. در این صورت معادله اصلی دارای سه جواب خواهد شد که چون تعداد آن فرد است، مورد قبول ما است. ✓

گام دوم: پس در معادله درجه دو $t^2 - 3t + k^3 - 3k + 1 = 0$ ، اگر بخواهیم یکی از جواب‌ها صفر باشد، باید قسمت عدد ثابت، یعنی $k^3 - 3k + 1$ برابر با صفر شود؛ پس:

$$t^2 - 3t + \underbrace{k^3 - 3k + 1}_{\text{باید صفر باشد}} = 0 \Rightarrow t^2 - 3t = 0 \Rightarrow t(t-3) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 3$$

$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$

در تغییر متغیر $x^2 = t$ در نظر گرفته بودیم؛ پس:

$$t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0^2 + (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 3 + 3 = 6$$

گام سوم: مجموع مربعات ریشه‌ها، برابر است با:

درس‌Box

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۳ اگر یکی از ریشه‌های معادله $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} + k = \frac{2x-1}{5-x}$ دو برابر معکوس ریشه دیگر باشد، جمع مقدار k و ریشه‌ها کدام است؟

$$5/5 (2)$$

$$5 (1)$$

$$6/5 (4)$$

$$6 (3)$$

درس‌Box

برای حل معادلات گویا ابتدا مخرج را تجزیه می‌کنیم، مخرج مشترک را به دست می‌آوریم و دو طرف معادله را در آن ضرب می‌کنیم تا از حالت کسری خارج شوند. معادله جدید به دست آمده را حل می‌کنیم و جواب‌ها را چک می‌کنیم. چنانچه هیچ کدام از مخرج‌ها صفر نشوند، جواب‌ها مورد قبول هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (تجزیه مخرج و صورت کسرها):

می‌دانیم:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

پس داریم:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} + k = \frac{2x - 1}{5 - x} \Rightarrow \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} + k = \frac{2x - 1}{5 - x}$$

$$\frac{x + 2}{x - 3} + k = \frac{2x - 1}{5 - x} \Rightarrow \frac{x + 2}{x - 3} + \frac{2x - 1}{x - 5} + k = 0$$

گام دوم (محاسبه مخرج مشترک و ضرب آن در دو طرف معادله):

$$\text{مخرج مشترک} = (x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$$

$$(x - 3)(x - 5) \left(\frac{x + 2}{x - 3} + \frac{2x - 1}{x - 5} + k = 0 \right)$$

$$(x - 5)(x + 2) + (2x - 1)(x - 3) + k(x - 3)(x - 5) = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 + 2x^2 - 7x + 3 + k(x^2 - 8x + 15) = 0$$

$$3x^2 - 10x - 7 + kx^2 - 8kx + 15k = 0$$

$$(3 + k)x^2 - (8k + 10)x + 15k - 7 = 0 \quad (*)$$

گام سوم (محاسبه k):

با توجه به صورت سؤال، یکی از ریشه‌ها دو برابر معکوس ریشه دیگر است. به عبارتی، اگر یکی از ریشه‌ها α باشد، دیگری دو برابر معکوس آن یعنی $\frac{2}{\alpha}$ است؛ پس ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = \alpha \left(\frac{2}{\alpha} \right) = 2$$

از طرفی، در یک معادله درجه ۲ به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ ضرب ریشه‌ها از رابطه $P = \frac{c}{a}$ به دست می‌آید که در (*) برابر است با:

$$P = \frac{15k - 7}{3 + k}$$

پس باید تساوی زیر برقرار باشد:

$$P = \frac{15k - 7}{k + 3} = 2$$

$$2k + 6 = 15k - 7 \Rightarrow 13k = 13 \Rightarrow k = 1$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال):

ما به دنبال جمع مقدار k و ریشه‌ها هستیم. جمع دو ریشه در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه $S = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید که در معادله (*) برابر است با:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-(8k + 10)}{(3 + k)} = \frac{8k + 10}{3 + k} \xrightarrow{k=1} S = \frac{8 + 10}{3 + 1} = \frac{18}{4} = 4.5$$

بنابراین جمع ریشه‌ها و مقدار k برابر است با:

$$S + k = 4.5 + 1 = 5.5$$

۱۴ جواب معادله $\sqrt{8x} + \sqrt{4-x^2} = \sqrt{x-2} + a$ در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ نیز صدق می‌کند. اگر اختلاف جواب‌های معادله درجه دوم $3/5$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای c کدام است؟

۵۶ (۴)

۴۶ (۳)

۴۰ (۲)

۳۲ (۱)



به کمک دامنه معادله رادیکالی رو حل کن. بعد با توجه به اختلاف جواب‌ها، اختلاف مقادیر ممکن c رو هم به دست بیار.

Hint

در بسیاری از معادلات رادیکالی می‌توانیم به کمک دامنه‌ها، معادله رادیکالی را به سرعت حل کنیم.

درس‌Box

به عنوان مثال معادله $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 4$ اصلاً جواب ندارد، چراکه باید $1-x \geq 0$ و در نتیجه $x \leq 1$ و $x-2 \geq 0$ و $x \geq 2$ در نتیجه $x \geq 2$ باشد که برقراری این دو شرط هم‌زمان امکان ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (تعیین دامنه و تعیین جواب):

می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با توجه به فرجه زوج باید نامنفی باشد.

$$\left. \begin{array}{l} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{array} \right\} \cap \rightarrow x=2$$

بنابراین تنها جواب ممکن برای معادله رادیکالی داده شده $x=2$ است.

گام دوم (به دست آوردن مقدار a):

$$x=2 \text{ باید سبب برقراری تساوی } \sqrt{8x} + \sqrt{4-x^2} = \sqrt{x-2} + a \text{ شود؛ بنابراین:}$$

$$\sqrt{8(2)} + \sqrt{4-4} = \sqrt{2-2} + a \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$$

گام سوم (پیدا کردن مقادیر ضریب c):

با مشخص شدن a متوجه می‌شویم معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به صورت $4x^2 + bx + c = 0$ است. از طرفی، $x=2$ در این معادله صدق می‌کند و اختلاف جواب‌های این معادله $3/5$ است؛ پس ریشه دیگر $-1/5$ یا $5/5$ است.

پس ضرب ریشه‌ها می‌تواند حالات زیر را داشته باشد:

$$1) x_1, x_2 = -1/5, 2 \Rightarrow P = 2(-1/5) = -3 = \frac{c}{4} \Rightarrow c = -12$$

$$2) x_1, x_2 = 5/5, 2 \Rightarrow P = 2(5/5) = 11 = \frac{c}{4} \Rightarrow c = 44$$

گام چهارم (اختلاف مقادیر c):

$$c \text{ اختلاف مقادیر } = 44 - (-12) = 56$$

۱۵ اگر $\cot 1^\circ$ و $\cot 2^\circ$ ریشه‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ باشد، در این صورت معادله‌ای که ریشه‌های آن، $\tan 1^\circ$ و $\tan 2^\circ$ هستند، کدام است؟

$$bx^2 - ax + 1 = 0 \quad (2)$$

$$bx^2 + ax + 1 = 0 \quad (1)$$

$$ax^2 + bx + 1 = 0 \quad (3)$$

$$ax^2 - bx + 1 = 0 \quad (3)$$

(۱) در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $\Delta > 0$ داریم:

جمع ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	اختلاف ریشه‌ها
$S = \frac{-b}{a}$	$P = \frac{c}{a}$	$D = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$

(۲) معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل ضربشان P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (به دست آوردن مجموع و حاصل ضرب معادله اولیه): $\cot 1^\circ$ و $\cot 2^\circ$ ، ریشه‌های معادله $x^2 - ax + b = 0$ هستند. حاصل ضرب و مجموع ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S = \cot 1^\circ + \cot 2^\circ = a \quad (I)$$

$$P = \cot 1^\circ \times \cot 2^\circ = b \quad (II)$$

گام دوم (به دست آوردن مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید از روی معادله اولیه): حالا می‌خواهیم، معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\tan 1^\circ$ و $\tan 2^\circ$ باشد؛ مجدد حاصل ضرب و مجموع ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S = \tan 1^\circ + \tan 2^\circ = \frac{1}{\cot 1^\circ} + \frac{1}{\cot 2^\circ} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{\cot 1^\circ + \cot 2^\circ}{\cot 1^\circ \cdot \cot 2^\circ} \xrightarrow{\text{طبق (I) و (II)}} \frac{a}{b}$$

$$P = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ = \frac{1}{\cot 1^\circ} \cdot \frac{1}{\cot 2^\circ} = \frac{1}{\cot 1^\circ \cdot \cot 2^\circ} \xrightarrow{\text{طبق (II)}} \frac{1}{b}$$

گام سوم (نوشتن معادله جدید با ریشه‌های مد نظر): حالا معادله درجه دومی که مجموع و حاصل ضرب ریشه‌هایش را داشته باشیم، برابر است با:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{a}{b}x + \frac{1}{b} = 0 \xrightarrow{\times b} bx^2 - ax + 1 = 0$$

برای نوشتن معادله‌ای درجه دومی که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله اولیه $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، کافی است جای a و c را عوض کنیم:

$$cx^2 + bx + a = 0$$

طبق نکته بالا، بدون هیچ محاسبه خاصی، معادله‌ای که ریشه‌هایش معکوس معادله $x^2 - ax + b = 0$ باشد، به صورت $bx^2 - ax + 1 = 0$ است.



مجموع ریشه‌های معادله $x^2 + \frac{25x^2}{(x-5)^2} = 75$ کدام است؟ **۱۶**

۲۰ (۴)

۱۰ (۳)

-۵ (۲)

-۱۵ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (بازنویسی طرف چپ معادله برحسب معادله درجه ۲):

$$x^2 + \frac{25x^2}{(x-5)^2} = \underbrace{x^2}_a + \underbrace{\left(\frac{5x}{x-5}\right)^2}_b$$

می‌دانیم $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ پس داریم:

$$x^2 + \left(\frac{5x}{x-5}\right)^2 = 75 \Rightarrow \left(x + \frac{5x}{x-5}\right)^2 - 2x\left(\frac{5x}{x-5}\right) = 75 \Rightarrow \left(\frac{x^2 - 5x + 5x}{x-5}\right)^2 - 10\left(\frac{x^2}{x-5}\right) = 75$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{x-5}\right)^2 - 10\left(\frac{x^2}{x-5}\right) = 75$$

گام دوم (استفاده از تغییر متغیر):

$$\frac{x^2}{x-5} \text{ را برابر } t \text{ می‌گیریم:}$$

$$t^2 - 10t = 75 \Rightarrow t^2 - 10t - 75 = 0$$

$$(t-15)(t+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = 15 \end{cases}$$

گام سوم (به دست آوردن خواسته سؤال):

از آن‌جا که $\frac{x^2}{x-5}$ را برابر t قرار داده بودیم؛ پس داریم:

$$t = -5 \Rightarrow \frac{x^2}{x-5} = -5 \Rightarrow x^2 = -5x + 25 \Rightarrow x^2 + 5x - 25 = 0$$

که جمع ریشه‌های آن برابر $-\frac{b}{a} = -5$ است.

$$t = 15 \Rightarrow \frac{x^2}{x-5} = 15 \Rightarrow x^2 = 15x - 75 \Rightarrow x^2 - 15x + 75 = 0 \Rightarrow \Delta = (-15)^2 - 4(1)(75) < 0$$

این معادله اصلاً ریشه ندارد.

۱۷ اگر تفاضل ریشه‌های معادله $|x-2| + |x-b| = a$ برابر ۱۳ باشد. حداکثر مقدار تابع $y = \frac{2}{|x-a| + |x-3|}$ کدام است؟

$$\frac{1}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{20} \quad (4)$$

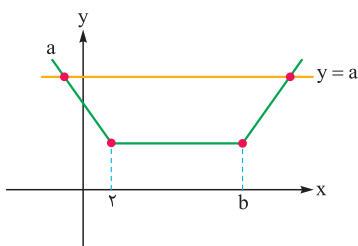
$$\frac{1}{11} \quad (3)$$

مشاوره در این گونه سوالات از رسم نمودار غافل نشوید. خیلی به کارمان می‌آید.

توابع گلدانی

ضابطه	نمودار	تقارن	برد
$y = x-a + x-b $		محور تقارن $\frac{a+b}{2}$	$[b-a , +\infty)$

گام اول: اگر نمودار $|x-2| + |x-b| = a$ را به صورت حدودی رسم کنیم، داریم: **پاسخ خیلی تشریحی**



همان‌طور که در نمودار مشخص است، خط $y = a$ ، نمودار گلدانی را در دو نقطه قطع می‌کند. طبق نمودار دو حالت داریم: یا نقطه تقاطع از ۲ و b بزرگ‌تر است و یا از آن‌ها کوچک‌تر است؛ پس:

$$\text{اگر بزرگ‌تر باشد: } |x-2| + |x-b| = a \Rightarrow x-2+x-b=a \Rightarrow 2x-2-b=a \Rightarrow x_1 = \frac{a+b+2}{2}$$

$$\text{اگر کوچک‌تر باشد: } |x-2| + |x-b| = a \Rightarrow -x+2-x+b=a \Rightarrow -2x+2+b=a \Rightarrow x_2 = \frac{2+b-a}{2}$$

گام دوم: تفاضل ریشه‌ها برابر ۱۳ است، پس $|x_1 - x_2| = 13$ ؛ پس داریم:

$$|x_1 - x_2| = 13 \Rightarrow \left| \frac{a+b+2}{2} - \frac{2+b-a}{2} \right| = 13 \Rightarrow \left| \frac{2a}{2} \right| = 13 \Rightarrow |a| = 13 \begin{cases} a=13 \checkmark \\ a=-13 \times \text{(مجموع دو قدر مطلق نمی‌تواند منفی شود.)} \end{cases}$$

اگر معادله $|x-\alpha| + |x-\beta| = c$ دو جواب داشته باشد، مجموع جواب‌ها برابر $\frac{\alpha+\beta}{2}$ و تفاضل آن‌ها برابر c است. **نکته**

$$|x-a| + |x-3| = |x-13| + |x-3|$$

گام سوم: در مخرج کسر داده‌شده، یک تابع گلدانی داریم:

$$[|13-3|, +\infty) = [10, +\infty)$$

طبق درس باکس، بُرد برابر است با:

پس:

$$|x-3| + |x-3| \geq 10 \Rightarrow \frac{2}{|x-13| + |x-3|} \leq \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{2}{|x-13| + |x-3|} \leq \frac{1}{5}$$

پس حداکثر مقدار y برابر $\frac{1}{5}$ است.

خط $y = k$ در نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{|x^2 + x|}{x}$ را در دو نقطه قطع می‌کند. حدود k کدام است؟ **۱۸**

$$-1 \leq k < 0 \quad (۲)$$

$$0 < k < 1 \quad (۱)$$

$$-1 < k < 0 \quad (۴)$$

$$0 < k \leq 1 \quad (۳)$$



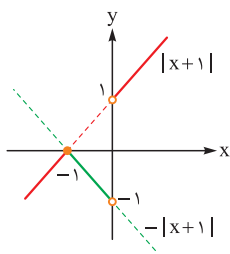
Hint $f(x)$ را در دو بازه $x > 0$ و $x < 0$ به صورت دوضابطه‌ای بنویسید تا ساده‌تر شود.

پاسخ خیلی تشریحی

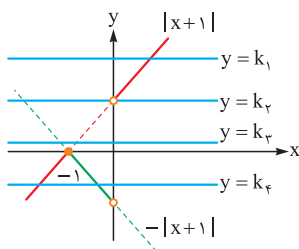
گام اول (بازنویسی ضابطه $f(x)$):

$$f(x) = \frac{|x^2 + x|}{x} = \frac{|x(x+1)|}{x} = \frac{|x|}{x} |x+1| = \begin{cases} \frac{x}{x} |x+1| = |x+1| & x > 0 \\ \frac{-x}{x} |x+1| = -|x+1| & x < 0 \end{cases}$$

گام دوم (رسم تابع f):



گام سوم (بررسی نقطه برخورد $y = k$ و تابع f):



اگر خطوط $y = k$ را در حالت‌های مختلف رسم کنیم، می‌بینیم که تنها خط‌های شبیه $y = k_4$ هستند که نمودار تابع f را در دو نقطه قطع می‌کنند؛ بنابراین با توجه به شکل، محدوده k باید بین -1 و 0 باشد، یعنی $-1 < k < 0$ (چون نقطه $(0, -1)$ توخالی است؛ پس $y = -1$ مطلوب نیست).

۱۹ اگر مساحت سطح محدود به نمودار تابع $f(x) = 3 - |ax - 1|$ و محور x ها برابر $4/5$ واحد مربع باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

Hint

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را به صورت تقریبی (ریشه‌ها برحسب a) رسم کن و بعد با توجه به مساحت داده شده مقدار a رو به دست بیار.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (رسم نمودار $f(x)$):

ابتدا ریشه‌های تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. (یعنی $f(x) = 0$ را حل می‌کنیم).

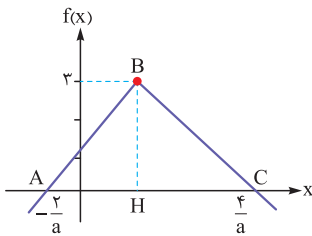
$$f(x) = 3 - |ax - 1| = 0 \Rightarrow |ax - 1| = 3 \xrightarrow{|x|=\alpha \leftrightarrow x=\pm\alpha} ax - 1 = \pm 3$$

$$\begin{cases} ax - 1 = 3 \Rightarrow ax = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{a} \\ ax - 1 = -3 \Rightarrow ax = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{a} \end{cases}$$

می‌دانیم حاصل قدرمطلق همواره نامنفی است، یعنی: $|ax - 1| \geq 0$ ؛ پس:

$$|ax - 1| \geq 0 \xrightarrow{x(-1)} -|ax - 1| \leq 0 \xrightarrow{+3} 3 - |ax - 1| \leq 3$$

بنابراین ماکزیمم تابع f برابر ۳ است (در نقطه‌ای به طول H ، عرض برابر ۳ است)، پس با توجه به موارد داده شده، نمودار تابع f به شکل مقابل است:



توجه: با توجه به متن سؤال، a را مثبت می‌گیریم.

گام دوم (نوشتن رابطه مساحت):

می‌دانیم در یک مثلث مساحت برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

در شکل رسم شده در گام قبل دیدیم که سطح محدود به نمودار تابع $f(x)$ و محور x ها یک مثلث است که قاعده و ارتفاع آن برابر است با:

$$\text{قاعده} = |AC| = \frac{4}{a} - \left(-\frac{2}{a}\right) = \frac{6}{a}$$

$$\text{ارتفاع} = |BH| = 3$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{a}\right) \times 3 = \frac{9}{a}$$

بنابراین مساحت برابر است با:

گام سوم (به دست آوردن مقدار a):

با توجه به صورت سؤال مساحت برابر $4/5$ است؛ پس:

$$S = \frac{9}{a} = 4/5 \Rightarrow a = 2$$

۲۰ اگر $|x-3|+|1-y|=x-y-2$ ، $|6-x|+|y+2|=y-x+8$ ، $x+y$ متعلق به بازه $[\alpha, \beta]$ باشد، بیشترین مقدار $(\beta - \alpha)$ کدام است؟

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



چند قانون مهم قدرمطلق

۱) $|x+y| \leq |x|+|y|$

۲) $|x-y| \geq |x|-|y|$

۳) $|a+b| = |a|+|b| \Rightarrow ab \geq 0$. a و b هم علامت‌اند.

۴) $|a+b| < |a|+|b| \Rightarrow ab < 0$. a و b مختلف‌العلامت‌اند.

۵) $|a+b| = a+b \Rightarrow a \geq 0, b \geq 0$

گام اول (بررسی تساوی اول): پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به درس باکس، اگر $|a|+|b|=a+b$ باشد، $a \geq 0$ و $b \geq 0$ است که در تساوی $|x-3|+|1-y|=x-y-2$ داریم:

$$\underbrace{|x-3|}_a + \underbrace{|1-y|}_b = \underbrace{x-3}_a + \underbrace{1-y}_b = \underbrace{x-y-2}_{a+b}$$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم: $a = x-3 \geq 0$ ، $b = 1-y \geq 0$ است؛ پس:

$$a = x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad (1)$$

$$b = 1-y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1 \quad (2)$$

گام دوم (بررسی تساوی دوم):

در تساوی $|6-x|+|y+2|=y-x+8$ نیز داریم:

$$\underbrace{|6-x|}_{a'} + \underbrace{|y+2|}_{b'} = \underbrace{6-x}_{a'} + \underbrace{y+2}_{b'} = \underbrace{y-x+8}_{a'+b'}$$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم: $a' = 6-x \geq 0$ و $b' = y+2 \geq 0$ است؛ پس:

$$a' = 6-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6 \quad (3)$$

$$b' = y+2 \geq 0 \Rightarrow y \geq -2 \quad (4)$$

گام سوم (به دست آوردن حدود x و y):

از (۱) و (۳) داریم:

$$(I) \quad 3 \leq x \leq 6$$

از (۲) و (۴) داریم:

$$(II) \quad -2 \leq y \leq 1$$

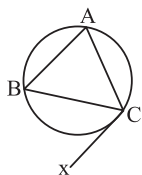
گام چهارم (به دست آوردن حدود $x+y$):

که از جمع طرفین (I) و (II) خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 3 + (-2) \leq x+y \leq 6+1 \longrightarrow 1 \leq x+y \leq 7$$

بنابراین $x+y$ متعلق به بازه $[1, 7]$ می‌باشد؛ پس بیشترین مقدار $\beta - \alpha$ برابر $7-1=6$ است.

در شکل زیر $AB = AC$ ، $\widehat{AB} = 126^\circ$ و نیم خط Cx در نقطه C بر دایره مماس است. اندازه زاویه \widehat{BCx} چند درجه است؟



۴۴ (۲)

۴۲ (۱)

۵۴ (۴)

۵۲ (۳)

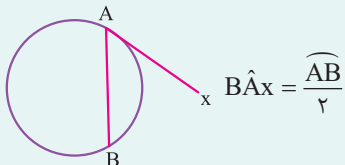


دقت کنید که زاویه \widehat{BCx} ، یک زاویه ظلی است.

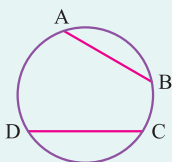
Hint

(۱) اندازه هر زاویه ظلی برابر نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه است.

درسی Box



(۲) کمان‌های نظیر دو وتر مساوی در یک دایره برابر یکدیگرند و برعکس، وترهای نظیر دو کمان مساوی در یک دایره با یکدیگر برابرند.



$$AB = CD \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

گام اول: چون وترهای AB و AC برابر یکدیگرند، پس کمان‌های نظیر آن‌ها مساوی یکدیگرند، یعنی $\widehat{AC} = \widehat{AB} = 126^\circ$ و

پاسخ خیلی تشریحی ✓

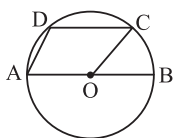
در نتیجه داریم:

$$\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 360^\circ - 2 \times 126^\circ = 108^\circ$$

گام دوم: زاویه \widehat{BCx} زاویه‌ای ظلی و اندازه آن نصف اندازه کمان مقابل آن است، پس داریم:

$$\widehat{BCx} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$$

در شکل زیر، وتر CD به طول ۶ موازی قطر AB است. اگر شعاع دایره برابر ۵ باشد، مساحت چهارضلعی $A OCD$ کدام است؟



۱۸ (۲)

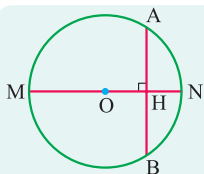
۱۶ (۱)

۲۴ (۴)

۲۲ (۳)

مشاوره قضیه‌های مربوط به وتر در دایره (فعالیت ۱ تا ۶ صفحه ۱۳) از مهم‌ترین سوالات کتاب درسی است و احتمال طرح یکی از آن‌ها در امتحان نهایی بسیار زیاد است.

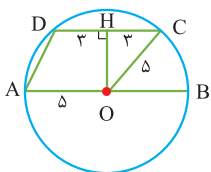
از مرکز دایره عمودی بر وتر CD رسم کنید.



اگر قطری از یک دایره بر وتری از آن دایره عمود باشد، آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

$$MN \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \widehat{AM} = \widehat{BM}, \widehat{AN} = \widehat{BN} \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: از مرکز دایره، عمود OH را بر وتر CD رسم می‌کنیم.



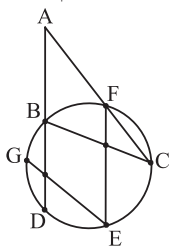
می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس $CH = DH = ۳$ است و در مثلث قائم‌الزاویه OCH ، طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$OH^2 = OC^2 - CH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow OH = 4$$

گام دوم: طبق فرض $OA \parallel CD$ ، پس چهارضلعی $A OCD$ دوزنقه است و مساحت آن از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$S = \frac{OH(OA + CD)}{2} = \frac{4(5 + 6)}{2} = 22$$

در شکل زیر، F وسط کمان BC و G وسط کمان BD قرار دارد. اگر $\hat{A} = 3x$ ، $\hat{C} = x$ و $\hat{E} = x + 15^\circ$ باشد، مقدار x کدام است؟



۲۰° (۲)

۱۸° (۱)

۳۰° (۴)

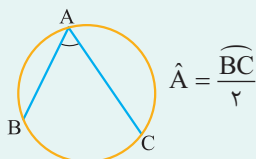
۲۵° (۳)



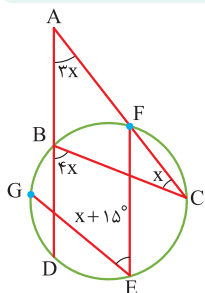
Hint زاویه $\hat{D}BC$ زاویه خارجی برای مثلث ABC است.

درسی Box

اندازه هر زاویه محاطی در یک دایره برابر نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: زاویه $\hat{D}BC$ برای مثلث ABC زاویه خارجی است، پس داریم:



$$\hat{D}BC = \hat{A} + \hat{C} = 3x + x = 4x$$

از طرفی $\hat{D}BC$ زاویه محاطی روبه‌رو به کمان CED است. بنابراین داریم:

$$\hat{D}BC = \frac{\widehat{CED}}{2} = 4x \Rightarrow \widehat{CED} = 8x$$

گام دوم: F وسط کمان BC و G وسط کمان BD است، پس $\widehat{BF} = \widehat{FC}$ و $\widehat{DG} = \widehat{GB}$ و در نتیجه می‌توان نوشت:

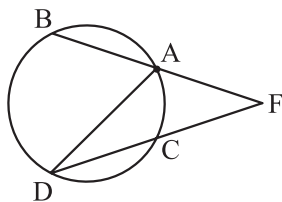
$$\widehat{DG} + \widehat{GB} + \widehat{BF} + \widehat{FC} = 36^\circ - \widehat{CED} \Rightarrow 2\widehat{GB} + 2\widehat{BF} = 36^\circ - 8x$$

$$\Rightarrow \widehat{GB} + \widehat{BF} = 18^\circ - 4x \Rightarrow \widehat{GBF} = 18^\circ - 4x$$

گام سوم: زاویه E زاویه محاطی روبه‌رو به کمان GBF است، بنابراین داریم:

$$\hat{E} = \frac{\widehat{GBF}}{2} \Rightarrow x + 15^\circ = \frac{18^\circ - 4x}{2} \Rightarrow 2x + 30^\circ = 18^\circ - 4x$$

$$\Rightarrow 6x = 15^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$$



۲۴ اگر در شکل مقابل $\widehat{AB} = \widehat{BD} = \widehat{DC}$ و $\widehat{F} = 2\widehat{D}$ باشد، اندازه زاویه F چند درجه است؟

۳۶ (۲)

۳۰ (۱)

۴۵ (۴)

۴۰ (۳)

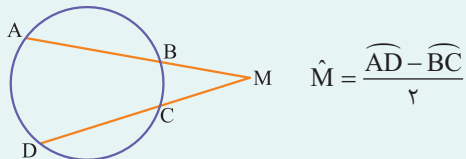
مشاوره این سؤال مشابه تمرین‌های صفحه ۱۶ کتاب درسی هندسه ۲ طراحی شده و امکان طرح چنین سؤالاتی در امتحان نهایی بسیار زیاد است.

Hint

دربین Box

به کمک رابطه $\widehat{F} = 2\widehat{D}$ ، رابطه بین اندازه کمان‌های موجود در دایره را به دست آورید.

اگر امتداد وترهای AB و DC در نقطه‌ای مانند M در بیرون دایره با یکدیگر برخورد کنند، اندازه زاویه M برابر نصف اختلاف اندازه کمان‌های محصور بین دو وتر است، یعنی داریم:



$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** فرض کنید $\widehat{AB} = \widehat{BD} = \widehat{DC} = \alpha$ و $\widehat{AC} = \beta$ باشد. زاویه D محاطی و زاویه F ، زاویه بین امتداد دو وتر است، بنابراین داریم:

$$\widehat{F} = 2\widehat{D} \Rightarrow \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} = 2 \times \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \times \frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = 2\beta \Rightarrow \alpha = 3\beta$$

گام دوم: مجموع اندازه‌های کمان‌های یک دایره برابر 360° است، پس داریم:

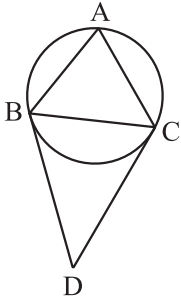
$$\widehat{AB} + \widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{AC} = 360^\circ \Rightarrow 3\alpha + \beta = 360^\circ \xrightarrow{\alpha=3\beta} 10\beta = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = 36^\circ \Rightarrow \alpha = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$$

گام سوم: اندازه زاویه F برابر است با:

$$\widehat{F} = \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{108^\circ - 36^\circ}{2} = 36^\circ$$

۲۵ رأس‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$ و $\hat{A} < 90^\circ$) مطابق شکل بر روی یک دایره واقع شده‌اند و مماس‌های رسم شده در نقاط B و C بر این دایره در نقطه D متقاطع‌اند. اگر $\hat{ABC} = 2\hat{D}$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه A چه کسری از 180° است؟



$$\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\frac{6}{13} \quad (4)$$

$$\frac{5}{11} \quad (3)$$



از مرکز دایره به نقاط B و C وصل کنید تا زاویه مرکزی $B\hat{O}C$ ایجاد شود.

Hint

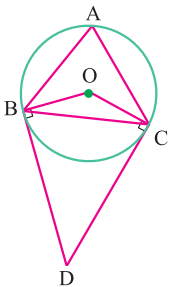
درس‌Box

(۱) اندازه هر زاویه مرکزی برابر اندازه کمان مقابل به آن زاویه و اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه است، پس اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به یک کمان دو برابر اندازه هر زاویه محاطی روبه‌رو به آن کمان است.

(۲) یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند، اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود باشد.

گام اول: از مرکز دایره به نقاط B و C وصل می‌کنیم. چون DB و DC بر دایره مماس هستند، پس شعاع‌های OB و OC در این دو نقطه بر این مماس‌ها عمودند.

پاسخ خیلی تشریحی



در چهارضلعی $OBDC$ داریم:

$$\hat{O} + \hat{O}BD + \hat{D} + \hat{O}CD = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O} + \hat{D} = 360^\circ - 2 \times 90^\circ = 180^\circ \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O} = \widehat{BC} \text{ (زاویه مرکزی)} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \text{ (زاویه محاطی)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O} = 2\hat{A} \xrightarrow{(*)} 2\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

گام دوم: طبق فرض $\hat{ABC} = 2\hat{D}$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین:

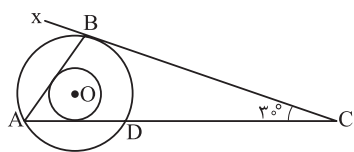
$$\hat{A} + \hat{ABC} + \hat{ACB} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{ABC} = \hat{ACB} = 2\hat{D}} \hat{A} + 4\hat{D} = 180^\circ$$

گام سوم: با حل دستگاه دو معادله دو مجهول زاویه A را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} + 4\hat{D} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow 4(2\hat{A} + \hat{D}) - (\hat{A} + 4\hat{D}) = 4 \times 180^\circ - 180^\circ \Rightarrow 7\hat{A} = 3 \times 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{3}{7} \times 180^\circ$$

در شکل زیر دو دایره هم مرکز هستند و Cx در نقطه B بر دایره بزرگ تر مماس است. اگر AB و AC بر دایره کوچک تر مماس باشند،



اندازه زاویه \widehat{ABx} چند درجه است؟

۶۰ (۲)

۵۰ (۱)

۸۰ (۴)

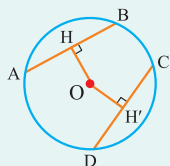
۷۰ (۳)



تمام مماس‌های رسم شده بر یک دایره از مرکز آن دایره به یک فاصله هستند.

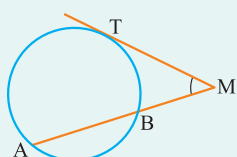
Hint

(۱) اگر دو وتر در یک دایره برابر یکدیگر باشند، فاصله یکسانی از مرکز دایره دارند و برعکس، هر دو وتر در یک دایره که از مرکز دایره به یک فاصله باشند، برابر یکدیگرند.



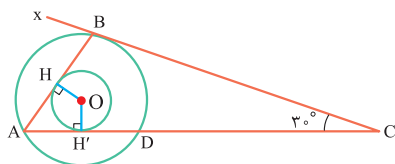
$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

(۲) زاویه بین یک وتر و یک مماس از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{2}$$

گام اول: وترهای AB و AD از دایره بزرگ تر به دایره کوچک تر مماس اند، بنابراین فاصله مرکز دایره کوچک تر (نقطه O) از این دو وتر برابر شعاع دایره کوچک تر بوده و چون AB و AD از مرکز دایره بزرگ تر به یک فاصله اند، پس برابر یکدیگرند و در نتیجه کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{AD} برابرند.



گام دوم: با فرض $\widehat{AB} = \widehat{AD} = x$ و $\widehat{BD} = y$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BD} + \widehat{AD} = 36^\circ &\Rightarrow 2x + y = 36^\circ \\ \hat{C} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{BD}}{2} \Rightarrow 36^\circ = \frac{x - y}{2} &\Rightarrow x - y = 72^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 14^\circ \\ y = 8^\circ \end{cases}$$

گام سوم: زاویه \widehat{ABx} ، زاویه ظلّی روبه‌رو به کمان \widehat{AB} است، پس داریم:

$$\widehat{ABx} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{14^\circ}{2} = 7^\circ$$

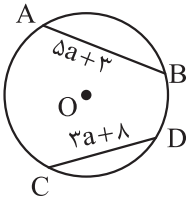
درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

ریاضیات

دایره $C(O, 12)$ مطابق شکل مفروض است. به ازای چند عدد طبیعی a ، وتر AB نسبت به وتر CD به مرکز دایره نزدیک تر است؟

۱۷



۲ (۲)

۱ (۱)

۴ بی‌شمار

۳ (۳)

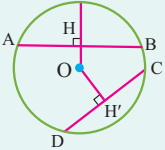


مشاوره این سؤال براساس تمرین ۸ صفحه ۱۷ کتاب درسی هندسه ۲ طراحی شده است. اثبات این تمرین می‌تواند از سؤال‌های مورد توجه در امتحان نهایی باشد.

به رابطه بین طول وتر و فاصله آن از مرکز دایره توجه کنید.

Hint

از بین دو وتر، هر کدام که بزرگ‌تر باشد به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس، از بین دو وتر، هر کدام که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، از دیگری بزرگ‌تر است.



$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: وتر AB نسبت به وتر CD ، به مرکز دایره نزدیک‌تر است، پس وتر AB از وتر CD بزرگ‌تر است.

$$AB > CD \Rightarrow 5a + 3 > 3a + 8 \Rightarrow 2a > 5 \Rightarrow a > \frac{5}{2}$$

گام دوم: طول وتر مقداری مثبت است، پس داریم:

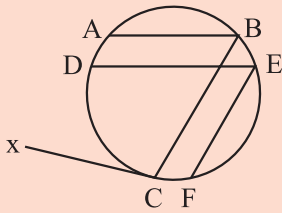
$$\left. \begin{array}{l} 5a + 3 > 0 \Rightarrow a > -\frac{3}{5} \\ 3a + 8 > 0 \Rightarrow a > -\frac{8}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow a > -\frac{3}{5}$$

گام سوم: قطر دایره بزرگ‌ترین وتر دایره است، پس طول وتر AB (وتر بزرگ‌تر) باید از قطر دایره کم‌تر باشد:

$$5a + 3 < 24 \Rightarrow 5a < 21 \Rightarrow a < \frac{21}{5}$$

گام چهارم: اشتراک جواب‌های مراحل قبل به صورت $\frac{5}{2} < a < \frac{21}{5}$ است، پس تنها دو مقدار طبیعی ۳ و ۴ برای a قابل قبول است.

در شکل زیر $EF \parallel BC$ ، $AB \parallel DE$ و Cx بر دایره مماس است. اگر اندازه کمان \widehat{EF} میانگین اندازه‌های دو کمان \widehat{AB} و \widehat{CD} باشد، اندازه کمان \widehat{EF} چند درجه است؟



۷۰ (۲)

۶۰ (۱)

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

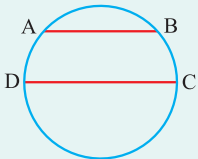
مشاوره این سؤال براساس ایده و تره‌های موازی در دایره و با الهام از سؤالی از کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۱ طراحی شده است. مشابه چنین سؤالی بارها در کنکور تکرار شده است.

Hint

دقت کنید که به محاسبه اندازه هر کدام از کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} نیاز نداریم و تنها مجموع اندازه این دو کمان مهم است.

دینستی‌باکس

دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر اندازه کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

یعنی از موازی بودن وترهای AB و CD نتیجه می‌گیریم کمان‌های \widehat{AD} و \widehat{BC} برابر یکدیگرند و برعکس از مساوی بودن کمان‌های \widehat{AD} و \widehat{BC} و این حقیقت که AB و CD یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند، نتیجه می‌گیریم $AB \parallel CD$.

گام اول: فرض کنید $\widehat{EF} = x$ باشد. در این صورت داریم: پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\widehat{EF} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = x \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 2x$$

هم‌چنین فرض کنید $\widehat{AD} = y$ باشد. چون $AB \parallel DE$ ، پس $\widehat{BE} = y$ و به دلیل مشابه $\widehat{CF} = y$ است.

گام دوم: مجموع کمان‌های دایره 360° است:

$$\underbrace{(\widehat{AB} + \widehat{CD})}_{2x} + \underbrace{\widehat{EF}}_x + \underbrace{(\widehat{AD} + \widehat{BE} + \widehat{CF})}_{3y} = 360^\circ \Rightarrow 3x + 3y = 360^\circ \Rightarrow x + y = 120^\circ$$

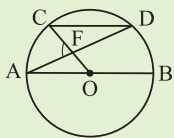
گام سوم: زاویه \widehat{BCx} ، زاویه ظلی روبه‌رو به کمان \widehat{BAC} است، پس داریم:

$$\widehat{BCx} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \Rightarrow 100^\circ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 2x + y = 200^\circ$$

گام چهارم: با کم کردن روابط به‌دست‌آمده در گام‌های دوم و سوم داریم:

$$(2x + y) - (x + y) = 200^\circ - 120^\circ \Rightarrow x = 80^\circ \Rightarrow \widehat{EF} = 80^\circ$$

۲۹ در شکل زیر $CD \parallel AB$ ، $AB = 6$ و $CD = 3\sqrt{2}$ است. اندازه زاویه AFC کدام است؟



$$70^\circ \quad (2)$$

$$67/5^\circ \quad (1)$$

$$75^\circ \quad (4)$$

$$72/5^\circ \quad (3)$$

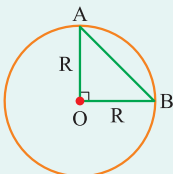


مشاوره این سؤال براساس تمرین ۴ صفحه ۱۷ کتاب درسی طراحی شده است و به جای معلوم گرفتن اندازه زاویه AFC ، این بار اندازه کمان CD در صورت سؤال داده شده است.

رابطه بین اندازه کمان برحسب درجه با طول وتر متناظر آن کمان برحسب شعاع دایره را به خاطر داشته باشید.



اندازه کمان نظیر وتری از دایره که طول آن $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایره باشد، 90° است، زیرا مطابق شکل داریم:



$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 2R^2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}R$$

$$AB = \sqrt{2}R \Leftrightarrow \widehat{AB} = 90^\circ$$

گام اول: شعاع دایره برابر $R = 3$ و طول وتر CD برابر $3\sqrt{2}$ است، پس طول وتر CD برابر شعاع دایره بوده و در نتیجه $\widehat{CD} = 90^\circ$ است. از طرفی $CD \parallel AB$ ، پس $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ و در نتیجه داریم:

$$2\widehat{AC} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 45^\circ$$

گام دوم: زاویه A ، زاویه محاطی روبه‌رو به کمان \widehat{BD} و زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان \widehat{AC} است، پس داریم:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22/5^\circ$$

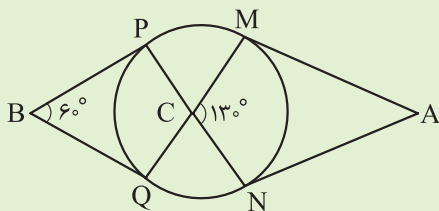
$$\widehat{AOC} = \widehat{AC} = 45^\circ$$

گام سوم: زاویه AFC ، زاویه خارجی مثلث OAF است، بنابراین:

$$\widehat{AFC} = \widehat{AOC} + \hat{A} = 45^\circ + 22/5^\circ = 67/5^\circ$$

پاسخ خیلی تشریحی

۳۰ در شکل زیر پاره‌خط‌های AM ، AN ، BP و BQ بر دایره مماس‌اند. اندازه کمان \widehat{MN} چند درجه است؟



۱۲۰ (۲)

۱۱۰ (۱)

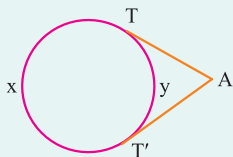
۱۴۰ (۴)

۱۳۰ (۳)

مشاوره این سؤال براساس تمرین ۳ صفحه ۱۷ کتاب درسی هندسه ۲ و با الهام از سؤالی از کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۰ طراحی شده است.

Hint با توجه به اندازه زاویه B ، اندازه کمان \widehat{PQ} را محاسبه کنید.

(۱) اگر از نقطه A خارج یک دایره، دو مماس بر آن دایره رسم کنیم، آن‌گاه داریم:

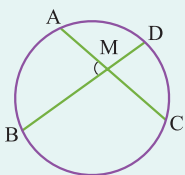


$$\hat{A} = \frac{x-y}{2}$$

با در نظر گرفتن $x+y = 36^\circ$ و $x-y = 2\hat{A}$ داریم:

$$\begin{cases} x+y = 36^\circ \\ x-y = 2\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 18^\circ + \hat{A} \\ y = 18^\circ - \hat{A} \end{cases}$$

(۲) زاویه بین دو وتر متقاطع در دایره از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\hat{AMB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: فرض کنید $\widehat{MN} = x$ ، $\widehat{PQ} = y$ ، $\widehat{MP} = z$ و $\widehat{QN} = t$ باشد. در این صورت طبق رابطه زاویه بین دو مماس داریم:

$$B = \frac{\widehat{PMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 60^\circ = \frac{x+z+t-y}{2} \Rightarrow (x-y) + (z+t) = 120^\circ$$

$$\hat{MCN} = 130^\circ \Rightarrow \hat{MCP} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

گام دوم:

طبق رابطه زاویه بین وترهای متقاطع در دایره داریم:

$$\hat{MCP} = \frac{\widehat{MP} + \widehat{QN}}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{z+t}{2} \Rightarrow z+t = 100^\circ \Rightarrow x-y = 20^\circ$$

$$\hat{MCN} = \frac{\widehat{MN} + \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 130^\circ = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 260^\circ$$

گام سوم:

$$\begin{cases} x+y = 260^\circ \\ x-y = 20^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 140^\circ \\ y = 120^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{MN} = 140^\circ$$

گام اول: با توجه به مورد اول درس باکس داریم:

$$\widehat{PQ} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

گام دوم: وترهای MQ و PN در نقطه C متقاطع‌اند، بنابراین:

$$\hat{MCN} = \frac{\widehat{PQ} + \widehat{MN}}{2} \Rightarrow 130^\circ = \frac{120^\circ + \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{MN} = 140^\circ$$

تیزبازی

آمار و احتمال

۳۱

کدام یک از هم‌ارزی‌های زیر نادرست است؟

$$p \wedge (p \vee q) \equiv q \quad (۲)$$

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad (۱)$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \quad (۴)$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad (۳)$$

جبر گزاره‌ها

درس‌نویس Box

(۱) نقیض یک گزاره: نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

• اگر ارزش p درست باشد، ارزش $\sim p$ نادرست است و برعکس:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

• ارزش نقیض نقیض یک گزاره، با ارزش خود گزاره یکسان است:

(۲) ترکیب‌های فصلی و عطفی دو گزاره: اگر دو گزاره را با حرف ربط «یا» به هم مرتبط کنیم، ترکیب فصلی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم « p یا q » و می‌نویسیم « $p \vee q$ ».

اگر دو گزاره را با حرف ربط «و» به هم مرتبط کنیم، ترکیب عطفی دو گزاره به وجود می‌آید که آن را می‌خوانیم « p و q » و می‌نویسیم « $p \wedge q$ ».

ارزش $p \vee q$ زمانی درست است که ارزش دست کم یکی از دو گزاره p یا q درست باشد و ارزش $p \wedge q$ زمانی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشد:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	ن

(۳) ترکیب شرطی دو گزاره: به گزاره $p \Rightarrow q$ ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم و آن را به صورت «اگر p آن‌گاه q » می‌خوانیم. ارزش یک گزاره شرطی تنها در حالتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

• در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، به p «مقدم» یا «فرض» و به q «تالی» یا «حکم» می‌گوییم.

• گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را به این دو صورت نیز می‌خوانیم: q شرط لازم است برای p و p شرط کافی است برای q

• اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد:

به $q \Rightarrow p$ عکس گزاره شرطی می‌گوییم؛

به $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض یک گزاره شرطی می‌گوییم که با $p \Rightarrow q$ هم‌ارزش است، یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$ ؛

و به $(q \Rightarrow p) \sim$ نقیض عکس یک گزاره شرطی می‌گوییم.

• انتفای مقدم: در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر p یا «مقدم» نادرست باشد، گزاره به انتفای مقدم درست است:

$$p \equiv F \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

• درست‌بودن تالی: در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر q یا «تالی» درست باشد، $p \Rightarrow q$ همواره درست است:

$$q \equiv T \xrightarrow{\text{در این صورت}} p \Rightarrow q \equiv T$$

۴) ترکیب دوشروطی: اگر دو گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را با ترکیب عطفی « \wedge » به هم مرتبط کنیم، ترکیب دوشروطی $p \Leftrightarrow q$ به دست می‌آید که آن را به صورت « p اگر و تنها اگر q » یا « p شرط لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم.

● ارزش $p \Leftrightarrow q$ فقط در حالتی درست است که p و q هم‌ارزش باشند.



p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

● نقیض $p \Leftrightarrow q$ را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

● ترکیب دوشروطی یک گزاره با خودش همواره درست و ترکیب دوشروطی یک گزاره با نقیضش همواره نادرست است:

$$p \Leftrightarrow p \equiv T$$

$$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$$

هم‌ارزی‌های منطقی

$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	(۱) جابه‌جایی
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	(۲) شرکت‌پذیری
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(۳) توزیع‌پذیری
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	(۴) قانون دمورگان
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	(۵) جذب
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$		(۶) هم‌ارزی گزاره شرطی
$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$		(۷) هم‌ارزی‌های گزاره دوشروطی

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گزینه (۱): همان هم‌ارزی گزاره شرطی؛

گزینه (۳): همان قانون دمورگان؛

گزینه (۴): همان هم‌ارزی گزاره دو شرطی است.

اما دو گزاره گزینه (۲) یعنی $p \wedge (p \vee q)$ و $p \equiv q$ هم‌ارز نیستند، زیرا طبق قانون جذب داریم:

$$\underbrace{p \wedge (p \vee q)}_p \equiv q \xrightarrow{\text{پس}} p \equiv q$$

که چنین هم‌ارزی درست نیست.

۳۲ در چند حالت از جدول ارزش گزاره‌های p ، q و r ، ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

گام دوم: با توجه به جدول رسم‌شده، ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ فقط در یک حالت نادرست است.

گام اول: با توجه به درس‌بکس سؤال قبل، ارزش گزاره شرطی تنها زمانی نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست باشد. یعنی ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ تنها زمانی نادرست است که ارزش $p \wedge q$ درست و ارزش r نادرست باشد.

گام دوم: ارزش گزاره عطفی $p \wedge q$ تنها زمانی درست می‌شود که ارزش p و q درست باشد؛ بنابراین ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ تنها زمانی نادرست است که p درست، q درست و r نادرست باشد، یعنی فقط در یک حالت ارزش این گزاره نادرست است.

په‌چور دیگه

۳۳ اگر هر دو گزاره r و $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ و $(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$ ارزش نادرست داشته باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر نیز ارزش نادرست دارد؟

$$p \vee r \text{ (۲)}$$

$$q \text{ (۱)}$$

$$r \Rightarrow q \text{ (۴)}$$

$$p \Rightarrow q \text{ (۳)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$p \vee r$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	F	F	F
	گزینه (۱)		گزینه (۳)	گزینه (۴)			گزینه (۲)

گام دوم: با توجه به جدول بالا، در دو سطر رنگ‌شده، ارزش هر دو گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ و $(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$ نادرست است. حالا ارزش گزاره گزینه (۲) هم در این دو سطر نادرست است؛ پس جواب گزینه (۲) می‌شود. (با توجه به جدول، در دو سطر گفته‌شده، ارزش گزاره گزینه (۱) در یک سطر درست و در سطر دیگر نادرست است و ارزش گزاره‌های گزینه‌های (۳) و (۴) در هر دو سطر درست است.)

گام اول: ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ نادرست است؛ پس باید $p \Rightarrow q$ درست و r نادرست باشد.

گام دوم: ارزش گزاره $(r \Rightarrow q) \Rightarrow p$ نادرست است؛ پس باید $r \Rightarrow q$ درست و p نادرست باشد.

گام سوم: پس ارزش دو گزاره p و r نادرست بوده و بنابراین ارزش گزاره $p \vee r$ نادرست است.

بهبود دیگر

۳۴

گزاره «هر عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی مربع خودش است» با استفاده از سورها به صورت نوشته می‌شود و ارزش آن است.

$$(۲) \forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2 \text{ - نادرست}$$

$$(۱) \forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2 \text{ - درست}$$

$$(۴) \exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2 \text{ - نادرست}$$

$$(۳) \exists x \in \mathbb{R}; x \leq x^2 \text{ - درست}$$

سورها

دروس Box

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر»، یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد \forall و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود.

۱) ارزش گزاره‌های سوری با سور عمومی (یا همان \forall)، زمانی درست است که ارزش گزاره، به ازای تمام اعضای دامنه متغیر درست باشد.
۲) ارزش گزاره‌های سوری با سور وجودی (یا همان \exists)، زمانی درست است که ارزش گزاره، به ازای حداقل یکی از اعضای دامنه متغیر درست باشد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: گزاره «هر عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی مربع خودش است» با استفاده از سورها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\forall x \in \mathbb{R}; x \leq x^2$$

گام دوم: ارزش این گزاره نادرست است، برای مثال به ازای $x = \frac{1}{2}$ داریم:

$$x = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = x^2$$

ارزش گزاره « $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}, n(B-A) = m$ » است و نقیض این گزاره به صورت است.

۳۵

(۱) درست - $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$

(۲) درست - $\exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$

(۳) نادرست - $\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$

(۴) نادرست - $\exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$

برای هر مجموعه مثل A که زیر مجموعه اعداد طبیعی باشد و هر عدد طبیعی مثل m ، وجود دارد مجموعه‌ای مثل B که زیر مجموعه اعداد صحیح باشد و تعداد اعضای مجموعه $B-A$ برابر m باشد.

نقیض یک گزاره سوری

درس‌Box

برای نقیض کردن یک گزاره سوری، باید:

- (۱) سور را برعکس کنیم! یعنی اگر سور وجودی داشتیم، به جای آن سور عمومی قرار دهیم و اگر سور عمومی داشتیم، به جای آن سور وجودی قرار دهیم.
 - (۲) گزاره نما را نقیض کنیم.
- به عبارت دیگر:

$$\sim (\forall x \in A; p(x)) \equiv \exists x \in A; \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x \in A; p(x)) \equiv \forall x \in A; \sim p(x)$$

گام اول: با توجه به تعبیر، ارزش گزاره درست است، چون هر مجموعه مثل A را که در نظر بگیریم، کافی است مجموعه B را به این صورت تشکیل دهیم که شامل تمام اعضای مجموعه A باشد و علاوه بر اعضای مجموعه A ، m عضو دیگر هم داشته باشد. برای مثال اگر $A = \{2, 4\}$ و $m = 3$ باشد، با فرض $B = \{-1, 2, 4, 5, 6\}$ ، $B-A = \{-1, 5, 6\}$ شده و $n(B-A) = 3 = m$ می‌شود.

گام دوم: با توجه به درس باکس، نقیض این گزاره به صورت زیر می‌شود:

$$\sim (\forall A \subseteq \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) = m)$$

$$\equiv \exists A \subseteq \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \forall B \subseteq \mathbb{Z}; n(B-A) \neq m$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۳۶ اگر $A = \{\}$ ، $B = \{\{\}, 2\}$ و $C = \{\}, \{\{\}, \{\{\}, 2\}, 2\}$ ، در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

(۲) $B \subseteq C$ و $A \subseteq B$

(۱) $B \in C$ و $A \in B$

(۴) $B \subseteq C$ و $B \in C$

(۳) $A \subseteq C$ و $A \in C$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: $A \in B$ ، $A \in C$ و $B \in C$ است، زیرا:

$$B = \{\underbrace{\{\}}_A, 2\} \Rightarrow A \in B$$

$$C = \{\underbrace{\{\}}_A, \underbrace{\{\{\}, 2\}}_B, 2\} \Rightarrow B \in C$$

پس تا این جا گزینه (۱) درست است.

گام دوم: A زیرمجموعه B نیست، زیرا زیرمجموعه‌های B به صورت زیر هستند:

$$B = \{\{\}, 2\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌های } B} \emptyset, \{\{\}, \{2\}, \{\{\}, 2\}$$

پس $A \not\subseteq B$ و گزینه (۲) نادرست می‌شود.

تا همین جا به جواب رسیدیم، ولی درستی $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ را هم بررسی می‌کنیم.

گام سوم: زیرمجموعه‌های C به صورت زیرند:

$$C = \{\{\}, \{\{\}, \{2\}, 2\} \xrightarrow{\text{زیرمجموعه‌های } C} \emptyset, \underbrace{\{\}}_A, \{2\}, \{\{\}, \{2\}\}, \underbrace{\{\{\}, 2\}}_B, \dots$$

در بین زیرمجموعه‌های C ، A و B هم دیده می‌شوند، پس $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ و گزینه‌های (۳) و (۴) هم درست هستند.

مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ چند زیرمجموعه دارد، به طوری که اختلاف بزرگترین و کوچکترین عضو آن برابر ۴ باشد؟ ۳۷

۲۴ (۴)

۲۱ (۳)

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)


درس‌Box

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، 2^n تا است، زیرا هر یک از n عضو دو حالت دارند که در زیرمجموعه باشند یا نباشند.

$$A = \{ \downarrow 1, \downarrow 2, \downarrow 3, \dots, \downarrow n \} \xrightarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}} \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ بار}} = 2^n$$

گام اول: برای این که اختلاف بزرگترین و کوچکترین عضو ۴ باشد، سه حالت داریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

● حالت اول: کوچکترین عضو برابر ۱ و بزرگترین عضو برابر ۵ باشد: در این حالت هر کدام از اعضای بین ۱ و ۵ (یعنی ۲، ۳ و ۴)، دو حالت دارند که در زیرمجموعه باشند یا نباشند؛ پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر $2 \times 2 \times 2 = 8$ تا می‌شود.

$$\{ \downarrow 1, \downarrow 2, \downarrow 3, \downarrow 4, \downarrow 5 \}$$

حالت ۲ حالت ۲ حالت ۲

● حالت دوم: کوچکترین عضو برابر ۲ و بزرگترین عضو برابر ۶ باشد: در این حالت هر کدام از اعضای بین ۲ و ۶ (یعنی ۳، ۴ و ۵)، دو حالت دارند که در زیرمجموعه باشند یا نباشند؛ پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر $2 \times 2 \times 2 = 8$ تا می‌شود.

$$\{ \downarrow 2, \downarrow 3, \downarrow 4, \downarrow 5, \downarrow 6 \}$$

حالت ۲ حالت ۲ حالت ۲

● حالت سوم: کوچکترین عضو برابر ۳ و بزرگترین عضو برابر ۷ باشد: در این حالت هر کدام از اعضای بین ۳ و ۷ (یعنی ۴، ۵ و ۶)، دو حالت دارند که در زیرمجموعه باشند یا نباشند؛ پس تعداد زیرمجموعه‌ها برابر $2 \times 2 \times 2 = 8$ تا می‌شود.

$$\{ \downarrow 3, \downarrow 4, \downarrow 5, \downarrow 6, \downarrow 7 \}$$

حالت ۲ حالت ۲ حالت ۲

گام دوم: بنابراین تعداد کل زیرمجموعه‌هایی که اختلاف کوچکترین و بزرگترین عضو آن‌ها ۴ باشد، برابر $8 + 8 + 8 = 24$ تا است.

۳۸ اگر k عضو به مجموعه A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۴۸ واحد زیاد می‌شود. مجموعه اولیه A چند زیرمجموعه حداقل ۳ عضوی دارد؟

۴۲ (۴)

۳۲ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)



تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: اگر تعداد اعضای مجموعه A را n فرض کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^n می‌شود.

گام دوم: اگر به مجموعه A ، k عضو اضافه کنیم، تعداد اعضای آن $n+k$ و تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^{n+k} می‌شود.

گام سوم: طبق گفته سؤال، با این کار تعداد زیرمجموعه‌ها ۴۴۸ تا زیاد می‌شود:

$$2^{n+k} = 2^n + 448 \Rightarrow 2^{n+k} - 2^n = \underbrace{448}_{64 \times 7}$$

$$\Rightarrow 2^n (2^k - 1) = 2^6 \times (2^3 - 1) \Rightarrow \begin{cases} 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6 \\ 2^k - 1 = 2^3 - 1 \Rightarrow 2^k = 2^3 \Rightarrow k = 3 \end{cases}$$

گام چهارم: مجموعه اولیه A شش عضو داشت؛ پس تعداد زیرمجموعه‌های حداقل سه‌عضوی آن برابر می‌شود با:

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی

$$= 20 + 15 + 6 + 1 = 42$$

چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟ **۳۹**

الف) $A' \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \notin A \Leftrightarrow x \in B)$

ب) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \vee x \notin B)$

پ) $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر)



تعریف زیرمجموعه (و روابط بین مجموعه‌ها) به کمک نمادهای ریاضی

درس‌Box

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به درس‌باکس، «پ» درست است، اما «الف» و «ب» نادرست‌اند. اصلاح‌شده موارد «الف» و «ب» به صورت زیر است:

الف) $A' \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \notin A \Rightarrow x \in B)$

ب) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$

۴۰

درون هر یک از خانه‌های جدول زیر، یک عدد طبیعی طوری قرار می‌دهیم به طوری که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر باشد. اگر مجموعه اعداد واقع بر سطر اول با مجموعه اعداد واقع بر سطر دوم برابر باشد، جمع اعداد واقع بر هر سطر چه قدر است؟

		۵
۹		

۲۷ (۲)

۱۵ (۱)

۳۲ یا ۲۷ (۴)

۲۷ یا ۱۵ (۳)

درس‌Box

دو مجموعه مساوی: اگر هر عضو مجموعه A، عضوی از مجموعه B و هر عضو مجموعه B، عضوی از مجموعه A باشد، در این صورت دو مجموعه A و B برابرند و می‌نویسیم $A = B$.

گام اول: عدد واقع در خانه وسط را برابر x و عدد واقع در خانه سمت راست آن را برابر y در نظر می‌گیریم که در این صورت جمع اعداد واقع بر سطر دوم برابر $x + y + 9$ می‌شود.

		۵
a	b	
۹	x	y
c	d	e

قطر A قطر B

گام دوم: مجموع عددهای واقع بر هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر است؛ پس:

$$A \text{ قطر} : 5 + x + c = x + y + 9 \Rightarrow c = y + 4$$

$$\text{جمع اعداد واقع بر ستون سمت چپ} : a + 9 + c = x + y + 9 \Rightarrow a + 9 + y + 4 = x + y + 9 \Rightarrow a = x - 4$$

$$\text{جمع اعداد واقع بر سطر اول} : a + b + 5 = x + y + 9 \Rightarrow x - 4 + b + 5 = x + y + 9 \Rightarrow b = y + 8$$

گام سوم: بنابراین تا این جا جدول به شکل زیر می‌شود:

A →	x - 4	y + 8	5
B →	9	x	y
	y + 4	d	e

گام چهارم: مجموعه اعداد واقع بر سطر اول به صورت $A = \{x - 4, y + 8, 5\}$ و مجموعه اعداد واقع بر سطر دوم به صورت $B = \{9, x, y\}$ است. طبق گفته سؤال، $A = B$. در مجموعه A عضو ۵ را داریم؛ پس در مجموعه B هم باید این عضو را داشته باشیم که در دو حالت امکان پذیر است:

● حالت اول: اگر $x = 5$ باشد، دو مجموعه A و B به شکل زیر می‌شوند:

$$A = \{1, y + 8, 5\}$$

$$B = \{9, 5, y\}$$

که واضح است در این صورت، برای برابری دو مجموعه کافی است $y = 1$ باشد، بنابراین در این حالت اعداد واقع بر سطر اول، ۵، ۹ و ۱ می‌شوند که جمع آن‌ها برابر $1 + 9 + 5 = 15$ است؛ پس جمع اعداد واقع بر هر سطر ۱۵ می‌شود.

بد نیست کامل شده جدول در این حالت را ببینید:

۱	۹	۵
۹	۵	۱
۵	۱	۹

● حالت دوم: اگر $y = 5$ باشد، دو مجموعه A و B به شکل زیر می‌شوند:

$$A = \{x - 4, 13, 5\}$$

$$B = \{9, x, 5\}$$

که واضح است در این صورت، برای برابری دو مجموعه کافی است $x = 13$ باشد که در این صورت جدول به شکل زیر می‌شود: (با جای‌گذاری $y = 5$ و $x = 13$ در جدول گام سوم به این جدول رسیدیم.)

B

۹	۱۳	۵
۹	۱۳	۵
۹	d	e

جمع اعداد واقع بر سطر اول در این حالت برابر $9 + 13 + 5 = 27$ است؛ پس:

$$13 + 13 + d = 27 \Rightarrow d = 1$$

$$5 + 5 + e = 27 \Rightarrow e = 17$$

اما چنین چیزی غیرممکن است، چون در این صورت، جمع اعداد واقع بر قطر B برابر $9 + 13 + 17 = 39$ می‌شود؛ بنابراین امکان ندارد حالت دوم رخ دهد و جواب صحیح، همان جواب به‌دست‌آمده در حالت اول یعنی ۱۵ است.

فیزیک یازدهم

۴۱

یک میله پلاستیکی خنثی را با پارچه پشمی مالش می دهیم. پس از مالش، بار الکتریکی میله پلاستیکی $12/8 \mu\text{C}$ می شود؛ بین میله و پارچه چند الکترون و چگونه مبادله شده است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{C}$)

(۲) 8×10^{10} ، از میله به پارچه(۱) 8×10^{10} ، از پارچه به میله(۴) 8×10^9 ، از میله به پارچه(۳) 8×10^9 ، از پارچه به میله

از رابطه $q = \pm ne$ ، تعداد الکترون مبادله شده را محاسبه کنید. دقت کنید جسمی که بار آن منفی شده است، الکترون گرفته است.

Hint

کوانتیده بودن بار الکتریکی: همواره بار الکتریکی یک جسم، مضرب صحیحی از یک مقدار پایه (بار بنیادی e) است و هر مقدار دلخواهی نمی تواند داشته باشد.

کوتی Box

$$q = \pm ne, \quad e = 1/6 \times 10^{-19} \text{C}$$

تعداد الکترون مبادله شده

علامت + : برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت - : برای جسمی که الکترون گرفته است.

گام اول: وقتی بار الکتریکی میله پلاستیکی منفی شده، پس الکترون از پارچه پشمی به میله پلاستیکی منتقل شده است. بنابراین گزینه های (۲) و (۴) رد می شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

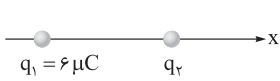
گام دوم:

$$|q| = ne \Rightarrow 12/8 \times 10^{-9} = n \times 1/6 \times 10^{-19}$$

$$n = \frac{12/8 \times 10^{-9}}{1/6 \times 10^{-19}} = 8 \times 10^{10} \text{ الکترون}$$

فیزیک

۴۲ در شکل زیر، دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 روی محور x ، در فاصله 6 cm از هم قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی که بار q_1 به بار q_2 وارد می‌کند، برابر $\vec{i} (30 \text{ N})$ باشد، بار q_2 چند میکروکولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



$$(2) \quad 2$$

$$(4) \quad -20$$

$$(1) \quad 2$$

$$(3) \quad 20$$



با توجه به نوع نیروی بین بارها، علامت بار q_2 را تشخیص دهید. سپس با استفاده از قانون کولن $(F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2})$ ، مقدار بار q_2 را به دست آورید.



اگر دو بار ذره‌ای q_1 و q_2 در فاصله r از هم قرار داشته باشند، اندازه نیرویی که این دو ذره باردار به هم وارد می‌کنند از رابطه

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2} \text{ به دست می‌آید.}$$

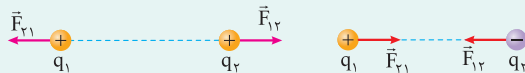
$$F = \text{اندازه نیرو (N)}$$

$$k = \text{ثابت کولن} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$$

$$r = \text{فاصله بین دو بار (m)}$$

$$q_1 \text{ و } q_2 = \text{بارهای الکتریکی نقطه‌ای (C)}$$

این نیرو، در صورت ناهمنام بودن بارها، از نوع جاذبه و در صورت همنام بودن بارها، از نوع دافعه است.



بر اساس قانون سوم نیوتون، نیروهای الکتریکی که این دو بار بر یکدیگر وارد می‌کنند، هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف جهت یکدیگر هستند.

گام اول: با توجه به جهت نیروی وارد بر بار q_2 ، متوجه می‌شویم که علامت آن مثبت است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند.



گام دوم:

$$F = \frac{k |q_1| |q_2|}{r^2} \Rightarrow 30 = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-6} \times q_2}{(6 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow 30 = \frac{9 \times 6 \times 10^{+3} \times q_2}{36 \times 10^{-4}}$$

$$q_2 = 20 \times 10^{-9} \text{ C} = 20 \mu\text{C}$$

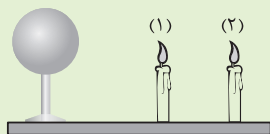
هرگاه اندازه دو بار بر حسب میکروکولن باشد و فاصله آن‌ها نیز بر حسب سانتی‌متر داده شده باشد، نیروی کولنی بین دو بار بدون تبدیل واحد از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$F = \frac{9 \times |q_1| |q_2|}{r^2} \Rightarrow 30 = \frac{9 \times 6 \times q_2}{6^2} \Rightarrow q_2 = 20 \mu\text{C}$$

✓ پاسخ خیلی تشریحی

تیزپاوی

۴۳ در شکل زیر، دو شمع روشن در نزدیکی کرهٔ رسانایی قرار دارند. اگر به این کره، بار الکتریکی مثبت دهیم، کدام یک از موارد زیر دربارهٔ انحراف شعلهٔ شمع‌ها درست است؟



(الف) شعلهٔ شمع‌ها به سمت راست منحرف می‌شود.

(ب) شعلهٔ شمع‌ها به سمت چپ منحرف می‌شود.

(پ) شعلهٔ شمع‌ها به یک اندازه منحرف می‌شود.

(ت) شعلهٔ شمع (۱)، بیشتر از شعلهٔ شمع (۲) منحرف می‌شود.

(۲) الف و ت

(۱) الف و پ

(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

با توجه به این که شعلهٔ شمع حاوی یون‌های مثبت است و هر چه از کره دورتر می‌شویم، میدان الکتریکی ضعیف‌تر می‌شود، تست را پاسخ دهید.

Hint

در شعلهٔ شمع، تعداد بسیار زیادی یون مثبت وجود دارد و یون‌های منفی در اقلیت هستند (تقریباً ناچیز) و صفر در نظر گرفته می‌شوند؛ بنابراین به دلیل هم نام‌بودن بار کره و شعله، نیروی بین آن‌ها دافعه بوده و شعله‌ها به سمت راست منحرف می‌شوند. (مورد «الف» صحیح است)، اما نیروی وارد بر شعلهٔ شمع (۱)، بیشتر از نیروی وارد بر شعلهٔ شمع (۲) است؛ زیرا به کره نزدیک‌تر است. (مورد «ت» صحیح است).

پاسخ خیلی تشریحی ✓

میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصله r از آن برابر با $E = 4 \times 10^5 \text{ N/C}$ است. این بار از فاصله $\frac{r}{4}$ بر بار الکتریکی نقطه‌ای 5 میکروکولنی، چند نیوتون نیرو وارد می‌کند؟

۸ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

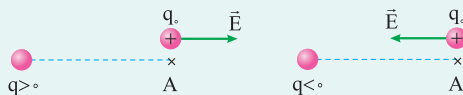


Hint

ابتدا از رابطه مقایسه‌ای $\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ ، میدان را در فاصله $\frac{r}{4}$ به دست آورید؛ سپس از رابطه $F = Eq$ ، اندازه نیروی وارد بر بار 5 میکروکولنی را به دست آورید.

درس‌Box

برای محاسبه اندازه میدان الکتریکی ناشی از بار q در فاصله r از آن، از رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ استفاده می‌کنیم. برای تشخیص جهت میدان الکتریکی، بار آزمون ($q_0 > 0$) را در نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم، جهت نیرویی که بار q به بار آزمون وارد می‌کند، جهت میدان را در آن نقطه نشان می‌دهد.



میدان الکتریکی در یک نقطه، به اندازه بار q که آن میدان را ایجاد کرده و هم‌چنین به فاصله از بار بستگی دارد.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2}{q_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

اگر بار الکتریکی q_0 در میدان الکتریکی \vec{E} قرار بگیرد، از طرف میدان به آن نیروی F وارد می‌شود.

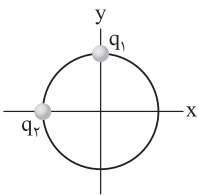
$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q_0$$

گام اول: ابتدا میدان الکتریکی را در فاصله $\frac{r}{4}$ از بار q ، محاسبه می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_2}{4 \times 10^5} = \left(\frac{r}{\frac{r}{4}}\right)^2 \Rightarrow E_2 = 16 \times 10^5 \text{ N/C}$$

گام دوم: نیروی وارد بر بار $q_0 = 5 \mu\text{C}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$F = E_2 \times q_0 \Rightarrow F = 16 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-6} = 8 \text{ N}$$



در شکل روبه‌رو، دو ذره باردار q_1 و q_2 روی محیط دایره‌ای به قطر 6cm قرار دارند. اگر میدان الکتریکی برآیند در مرکز دایره (مبدأ مختصات)، در SI به صورت $\vec{E} = 4 \times 10^4 \vec{i} + 3 \times 10^4 \vec{j}$

باشد، بارهای q_1 و q_2 به ترتیب از راست به چپ، چند نانوکولن هستند؟ ($k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}$)

۴ و ۳ (۲)

۴ و -۳ (۱)

۱۶ و ۱۲ (۴)

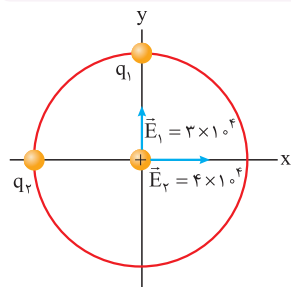
۱۶ و -۱۲ (۳)

۴۵



با توجه به جهت بردارهای \vec{i} و \vec{j} ، علامت بارهای q_1 و q_2 را تعیین کنید و سپس با استفاده از رابطه $E = \frac{k|q|}{r^2}$ ، اندازه هر بار را به دست آورید.

Hint



گام اول: مؤلفه‌های میدان الکتریکی را روی شکل رسم می‌کنیم و مطابق شکل، با توجه به راستا و جهت میدان‌ها متوجه می‌شویم که میدان الکتریکی حاصل از q_1 در راستای محور y و میدان حاصل از q_2 در راستای محور x ها است. بنابراین با توجه به تعریف میدان الکتریکی، بار q_1 منفی و بار q_2 مثبت خواهد بود (گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند).

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: اندازه باری که هر میدان الکتریکی را ایجاد کرده، محاسبه می‌کنیم:

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

$$E_1 = 3 \times 10^4 = \frac{9 \times 10^9 \times |q_1|}{(3 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow |q_1| = 3 \times 10^{-9} \text{C} = 3 \text{nC} \xrightarrow{q_1 < 0} q_1 = -3 \text{nC}$$

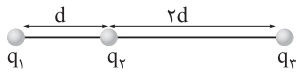
$$E_2 = 4 \times 10^4 = \frac{9 \times 10^9 \times |q_2|}{(3 \times 10^{-2})^2} \Rightarrow |q_2| = 4 \times 10^{-9} \text{C} = 4 \text{nC} \xrightarrow{q_2 > 0} q_2 = +4 \text{nC}$$



فیزیک

۴۶ در شکل زیر، سه ذره باردار، روی خط راستی قرار دارند. اگر نیروی الکتریکی خالص وارد بر هر کدام از ذره‌ها برابر صفر باشد، کدام

گزینه درست است؟



$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{9}{4} \quad (1)$$

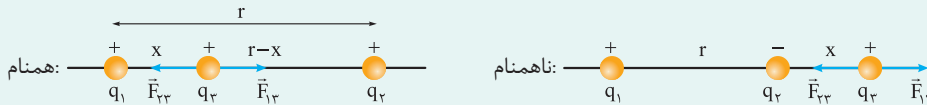
$$\frac{q_3}{q_2} = -\frac{9}{4} \quad (4)$$

$$\frac{q_3}{q_2} = \frac{9}{4} \quad (3)$$

برایند نیروهای وارد بر همه بارها صفر است، با این فرض علامت بارهای q_1 و q_3 را یکسان و علامت بار q_2 را مخالف این دو قرار دهید؛ سپس نیروی وارد بر بار q_3 را از طرف بارهای q_1 و q_2 مساوی هم قرار دهید ($|F_{13}| = |F_{23}|$) تا نسبت $\frac{q_1}{q_2}$ به دست آید.

اگر دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در فاصله r از یکدیگر ثابت شده باشند و بخواهیم بار q_3 را روی خط واصل دو بار یا امتداد آن قرار دهیم تا نیروی خالص وارد بر آن از سمت دو بار q_1 و q_2 صفر باشد، اگر دو بار همنام باشند بار q_3 بین آن‌ها و نزدیک بار کوچک‌تر و اگر دو بار ناهمنام باشند بار q_3 خارج آن‌ها و نزدیک بار کوچک‌تر قرار می‌گیرد. در این صورت برای به دست آوردن فاصله بار q_3 تا بار کوچک‌تر، اندازه نیروهای وارد بر آن را برابر قرار می‌دهیم.

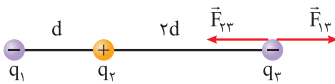
$$|F_{13}| = |F_{23}|$$



گام اول: با توجه به توضیحات درس باکس، بارهای q_1 و q_2 باید ناهمنام باشند تا بر ایند نیروهای وارد بر بار q_1 که خارج آن‌هاست صفر شود و هم‌چنین بارهای q_1 و q_2 نیز باید ناهمنام باشند تا بر ایند نیروهای وارد بر بار q_3 صفر شود. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

فرض کنید بارهای q_1 و q_2 منفی و بار q_3 مثبت باشد.

گام دوم: برای به دست آوردن نسبت بارهای q_1 و q_2 ، بر ایند نیروهای وارد بر بار q_3 را برابر با صفر قرار می‌دهیم:



$$|F_{13}| = |F_{23}| \Rightarrow \frac{k|q_1||q_3|}{9d^2} = \frac{k|q_2||q_3|}{4d^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = -\frac{9}{4}$$

برای به دست آوردن فاصله باری که بر ایند نیروهای وارد بر آن از طرف بارهای دیگر صفر است، تا بار کوچک‌تر، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:



$$x = \frac{r}{\sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} \pm 1}$$

بارها همنام ± 1
بارها ناهمنام ± 1

$$|q_1| > |q_2|$$

x : فاصله بار آزمون تا بار کوچک‌تر

r : فاصله دو بار از یکدیگر

علامت +: بارها همنام باشند.

علامت -: بارها ناهمنام باشند.

$$2d = \frac{d}{\sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} - 1} \Rightarrow \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} = \frac{3}{2}$$

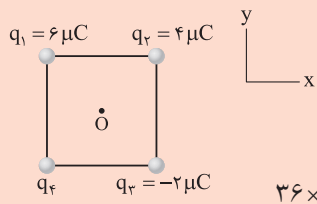
$$\frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{9}{4}$$

Hint

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

تیزبازی



در شکل مقابل، چهار ذره باردار در رأس‌های مربعی به ضلع 20 cm ثابت شده‌اند. اگر میدان الکتریکی خالص در نقطه O (مرکز مربع) در جهت محور x باشد، اندازه

این میدان خالص در SI چند واحد است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$

$$36 \times 10^5 \quad (2)$$

$$18 \times 10^5 \quad (1)$$

$$36\sqrt{2} \times 10^5 \quad (4)$$

$$18\sqrt{2} \times 10^5 \quad (3)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا بار q_4 را به دست می‌آوریم؛ چون میدان خالص در جهت محور x می‌باشد، باید بردارهای میدان که در راستای قطرهای مربع هستند هم‌اندازه باشند؛ یعنی:

$$\frac{k|q_1|}{r^2} + \frac{k|q_3|}{r^2} = \frac{k|q_4|}{r^2} - \frac{k|q_2|}{r^2} \Rightarrow |q_1| + |q_3| = |q_4| - |q_2| \Rightarrow |q_4| = 12 \mu\text{C}$$

چون میدان خالص در جهت مثبت x است، $q_4 = +12 \mu\text{C}$ می‌باشد.

گام دوم: حالا اندازه میدان ناشی از هر یک از بارها را در مرکز مربع محاسبه می‌کنیم:

$$E = \frac{k|q|}{r^2}$$

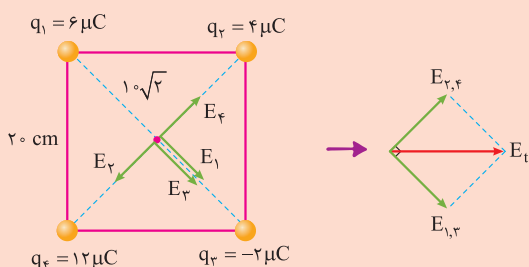
$$E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-6}}{(10\sqrt{2} \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 6 \times 10^3}{2 \times 10^{-2}} = 27 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6}}{(10\sqrt{2} \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 4 \times 10^3}{2 \times 10^{-2}} = 18 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_3 = \frac{9 \times 10^9 \times 12 \times 10^{-6}}{(10\sqrt{2} \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 12 \times 10^3}{2 \times 10^{-2}} = 54 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_4 = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6}}{(10\sqrt{2} \times 10^{-2})^2} = \frac{9 \times 2 \times 10^3}{2 \times 10^{-2}} = 9 \times 10^5 \text{ N/C}$$

گام سوم: بار رسم میدان‌ها روی شکل در مرکز مربع، برابند آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.



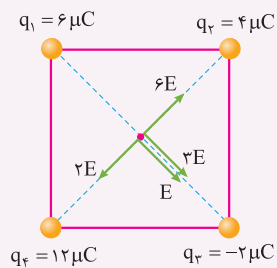
$$E_2, E_4 \xrightarrow{\text{خلاف جهت}} E_{2,4} = |E_2 - E_4| = 18 \times 10^5 - 9 \times 10^5 = 9 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_1, E_3 \xrightarrow{\text{هم جهت}} E_{1,3} = |E_1 + E_3| = 27 \times 10^5 + 54 \times 10^5 = 81 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_t = \sqrt{E_{2,4}^2 + E_{1,3}^2} = \sqrt{(9 \times 10^5)^2 + (81 \times 10^5)^2} = 81\sqrt{2} \times 10^5 \text{ N/C}$$

می‌توانیم اندازه میدان حاصل از یکی از بارها را در مرکز مربع E بنامیم و میدان ناشی از بقیه بارها را براساس آن به عنوان ضربی از E در نظر گرفته و در نهایت E_t را محاسبه کنیم.

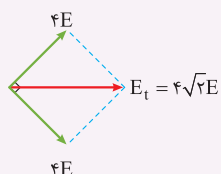
در این جا میدان حاصل از بار q_3 را E در نظر می‌گیریم، بنابراین:



$$\frac{E_4}{E} = \frac{|q_4|}{|q_3|} \Rightarrow \frac{E_4}{E} = \frac{12}{2} \Rightarrow E_4 = 6E$$

$$\frac{E_1}{E} = \frac{|q_1|}{|q_3|} \Rightarrow \frac{E_1}{E} = \frac{6}{2} \Rightarrow E_1 = 3E$$

$$\frac{E_2}{E} = \frac{|q_2|}{|q_3|} \Rightarrow \frac{E_2}{E} = \frac{4}{2} \Rightarrow E_2 = 2E$$



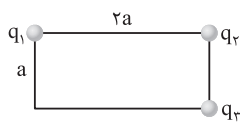
$$E_t = \frac{4\sqrt{2} \times 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6}}{(10^{-2} \times \sqrt{2})^2} = 36\sqrt{2} \times 10^5 \text{ N/C}$$

فیزیک

سه ذره باردار در رأس مستطیل مطابق شکل زیر، ثابت نگه داشته شده‌اند و میدان الکتریکی حاصل، در رأس چهارم مستطیل، صفر است.

۴۸

q_3 ، چند برابر q_1 است؟



$$-۸ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$

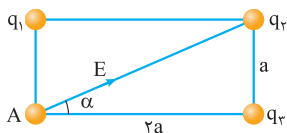
$$-۲ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

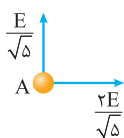


Hint میدان حاصل از q_2 را در راستای عمودی و افقی تجزیه کن.

پاسخ خیلی تشریحی گام اول: میدان حاصل از q_2 در نقطه A را E در نظر می‌گیریم.



در این صورت با تجزیه E در راستای عمودی و افقی داریم:



$$\text{« چون که } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ و } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{»}$$

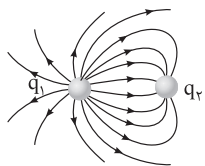
توجه کنید که اهمیتی ندارد علامت بار q_2 چه باشد، چون که آن را منفی در نظر گرفتیم، پس برای خنثی شدن میدان‌ها در نقطه A، هر دو بار q_1 و q_2 باید مثبت باشند.

گام دوم: حالا برابری میدان‌ها را در راستای عمودی و افقی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{k|q_1|}{a^2} &= \frac{E}{\sqrt{5}} \\ \frac{k|q_2|}{4a^2} &= \frac{2E}{\sqrt{5}} \end{aligned} \Rightarrow \frac{4|q_1|}{|q_2|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{|q_2|}{|q_1|} = ۸$$

$$\xrightarrow{q_1, q_2 > 0} \frac{q_2}{q_1} = ۸$$

خطوط میدان الکتریکی برای دو کره رسانای باردار کوچک به شکل زیر هستند. در رابطه با نوع بار هر کره و مقایسه اندازه بار آن‌ها کدام درست است؟ **۴۹**



$$(1) |q_1| > |q_2|, q_2 < 0, q_1 > 0$$

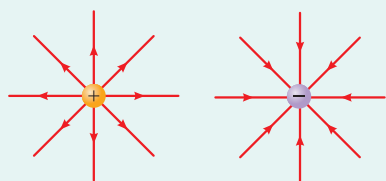
$$(2) |q_1| < |q_2|, q_2 < 0, q_1 > 0$$

$$(3) |q_1| > |q_2|, q_2 > 0, q_1 < 0$$

$$(4) |q_1| < |q_2|, q_2 > 0, q_1 < 0$$

با توجه به این که جهت خطوط میدان از بار مثبت به سمت بار منفی است و در نزدیکی باری که اندازه آن بزرگ‌تر است، خطوط میدان به هم نزدیک‌تر هستند، گزینه درست را تشخیص دهید.

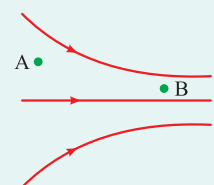
Hint



تجسم میدان الکتریکی: برای نمایش میدان الکتریکی در اطراف بارها، از خطوط میدان الکتریکی کمک می‌گیریم. همان‌طور که می‌دانیم برای تعیین جهت میدان الکتریکی در هر نقطه، یک بار مثبت در آن نقطه قرار می‌دهیم و جهت میدان الکتریکی، هم‌جهت با نیروی وارد بر این بار مثبت است. به همین دلیل است که خطوط میدان الکتریکی همواره از بار مثبت خارج شده و به بار منفی وارد می‌شوند.

درس‌Box

ویژگی‌های خطوط میدان الکتریکی:



(۱) تراکم خطوط میدان الکتریکی در هر نقطه، نشانگر اندازه میدان است. یعنی هر جا که خطوط میدان به هم نزدیک‌تر و فشرده‌تر هستند، میدان قوی‌تر است.

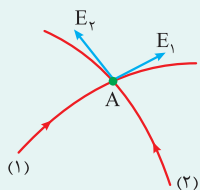
$$E_B > E_A$$

(۲) بردار مماس بر خط میدان الکتریکی در هر نقطه، جهت میدان در آن نقطه را نشان می‌دهد.

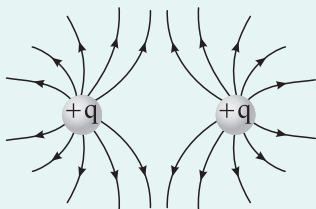


خط میدان الکتریکی

(۳) از هر نقطه میدان الکتریکی فقط یک خط میدان می‌گذرد به عبارت دیگر خطوط میدان الکتریکی یکدیگر را قطع نمی‌کنند. اگر خطوط میدان یکدیگر را قطع کنند، چون دو مماس قابل رسم است، مطابق شکل، میدان در نقطه تقاطع دارای یک جهت مشخص نیست و چنین چیزی امکان‌پذیر نمی‌باشد.

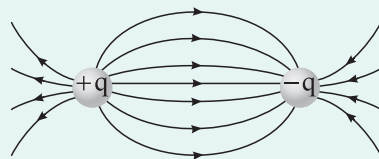


در شکل‌های زیر، خطوط میدان الکتریکی برای چند حالت مهم نشان داده شده‌اند.



میدان الکتریکی در اطراف یک تک‌قطبی الکتریکی

$$|q_+| = |q_+|$$



میدان الکتریکی در اطراف یک دوقطبی الکتریکی

$$|q_-| = |q_+|$$

با توجه به جهت خطوط میدان در می‌یابیم که بار q_1 مثبت و بار q_2 منفی است. (بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند) چون در نزدیکی باری که اندازه آن بزرگ‌تر است، خطوط میدان به یکدیگر نزدیک‌تر هستند، بنابراین $|q_1| > |q_2|$ است. **پاسخ خیلی تشریحی ✓**

فیزیک

۵۰ قطره روغنی در فضای بین دو صفحه افقی که اختلاف پتانسیل معینی دارند، معلق است. اگر جرم این قطره $1/2 \times 10^{-14} \text{ kg}$ و اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه برابر $1/25 \times 10^5 \text{ V/m}$ باشد، درباره تعداد الکترونی که این قطره نسبت به حالت خنثی، جذب کرده یا از دست داده، کدام درست است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)

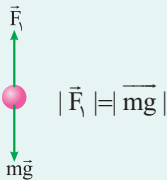
- (۱) ۶ الکترون جذب کرده است. (۲) ۶ الکترون از دست داده است.
 (۳) ۸ الکترون جذب کرده است. (۴) ۸ الکترون از دست داده است.

Hint

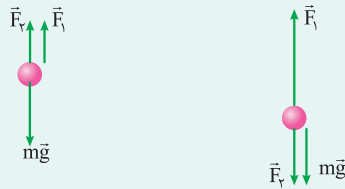
ابتدا از رابطه $E |q| = mg$ ، بار قطره روغن را محاسبه کنید و سپس از رابطه $q = ne$ ، تعداد الکترون جذب شده توسط قطره روغن را به دست آورید. دقت کنید که در آزمایش قطره روغن میلیکان، بار صفحه بالایی مثبت است!

درس Box

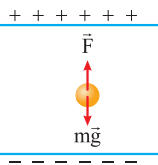
اگر جسمی به جرم m در یک فضا در حال تعادل باشد، باید نیروی خالص وارد بر آن صفر شود. در صورتی که علاوه بر وزن، یک نیروی دیگر به آن وارد شود، این دو نیرو هم‌اندازه و خلاف جهت یکدیگر هستند.



و اگر چند نیروی دیگر نیز همراه نیروی وزن به آن اثر کند، باید برابری نیروهای وارد بر آن صفر شود.



$$|\overline{mg}| = |\overline{F_1} + \overline{F_2}| \quad |\overline{F_1}| = |\overline{F_2} + \overline{mg}|$$



گام اول: با توجه به این که در آزمایش قطره روغن میلیکان، صفحه بالایی بار مثبت و صفحه پایین بار منفی دارد، نیروهای وارد بر قطره روغن را به صورت مقابل رسم می‌کنیم و چون نیروی وارد بر قطره روغن رو به صفحه مثبت است، نتیجه می‌گیریم که بار آن منفی است، در نتیجه الکترون جذب کرده است (گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شود).

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: برای این که قطره روغن به صورت معلق قرار بگیرد باید نیروی خالص وارد بر آن صفر باشد یعنی:

$$|\overline{F}| = |\overline{mg}| \Rightarrow E |q| = mg \Rightarrow 1/25 \times 10^5 \times |q| = 1/2 \times 10^{-14} \times 10 \Rightarrow |q| = 9/6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$q = ne \Rightarrow 9/6 \times 10^{-19} = n \times 1/6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = 6$$

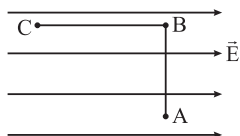
در حل سؤالاتی که اعداد اعشاری و توان‌های ده دهی زیاد دارند، نیم‌نگاهی به گزینه‌ها داشته باشید، اگر اعداد گزینه‌ها طوری بود که از لحاظ ارزش مکانی ارقام، متفاوت نبودند و رقم‌ها در گزینه‌ها متفاوت بود، می‌توانید در محاسباتی که ضرب و تقسیم دارند صفرها، توان‌های 10^0 و اعشارها را در نظر نگیرید. در نهایت عددی که به دست می‌آید ممکن است، دقیقاً همان‌طور یا با ارزش مکانی مختلف در گزینه‌ها یافت شود.

$$F = mg \Rightarrow E |q| = mg \Rightarrow Ene = mg$$

$$n = \frac{mg}{Ee} = \frac{1/2 \times 10^{-14}}{1/25 \times 10^5 \times 1/6 \times 10^{-19}} \Rightarrow \frac{1/2 \times 10^{-14}}{125 \times 16 \times 10^{-14}} = \frac{3}{500} \Rightarrow \frac{3}{5} = 0/6$$

عدد ۶ در گزینه‌ها درست است.

تیزبازی



در شکل مقابل، بار $q = -5\mu\text{C}$ را در میدان الکتریکی یکنواخت $8 \times 10^5 \text{ N/C}$ ، نخست از نقطه A تا نقطه B و سپس تا نقطه C جابه‌جا می‌کنیم. اگر $AB = 30 \text{ cm}$ و $BC = 40 \text{ cm}$ باشد، کاری که نیروی الکتریکی در این جابه‌جایی انجام می‌دهد، چند ژول است؟

$$1/6 \text{ (2)}$$

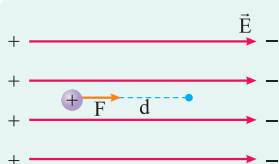
$$2 \text{ (1)}$$

$$-1/6 \text{ (4)}$$

$$-2 \text{ (3)}$$



کار هر یک از مسیرهای AB و BC را با رابطه $W = E |q| d \cos \theta$ محاسبه کنید؛ سپس برای به دست آوردن کار کل میدان الکتریکی، آن‌ها را با هم جمع جبری کنید.



همان‌طور که قبلاً گفتیم اگر بار الکتریکی q درون میدان الکتریکی یکنواخت قرار بگیرد، این میدان بر بار q نیرو وارد می‌کند. حال اگر این بار الکتریکی در اثر نیروی میدان جابه‌جا شود؛ می‌توانیم کار انجام‌شده توسط میدان را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$W_{\text{میدان}} = E |q| d \cos \theta$$

W : کار میدان الکتریکی (J) E : میدان الکتریکی (N/C)

q : بار الکتریکی (C) d : جابه‌جایی (m)

کار را در دو مسیر AB و BC از رابطه زیر محاسبه کرده و سپس با هم جمع می‌کنیم.

دقت کنید در مسیر AB زاویه بین بردار نیرو و جابه‌جایی 90° درجه بوده و در نتیجه کار صفر است.

$$W_{\text{میدان}} = E |q| d \cos \theta$$

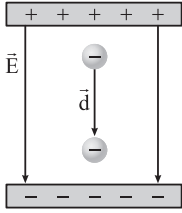
$$W_{\text{میدان کل}} = W_{AB} + W_{BC} \Rightarrow W_{\text{میدان کل}} = \cancel{W_{AB}} + 8 \times 10^5 \times 5 \times 10^{-6} \times 40 \times 10^{-2} \times 1$$

$$W_{\text{میدان}} = 1/6 \text{ J}$$

کار انجام‌شده توسط میدان مثبت است، زیرا در مسیر BC، نیروی وارد بر بار q و بردار جابه‌جایی آن، هر دو به سمت چپ (هم‌جهت) هستند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓



مطابق شکل مقابل، یک ذره با بار منفی را در جهت خطوط میدان الکتریکی جابه‌جا می‌کنیم. چه تعداد از

عبارت‌های زیر دربارهٔ جابه‌جایی این ذره، درست هستند؟

(الف) کار میدان الکتریکی منفی است.

(ب) کار عامل خارجی مثبت است.

(پ) انرژی پتانسیل الکتریکی ذره، افزایش می‌یابد.

(ت) پتانسیل الکتریکی، کاهش می‌یابد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

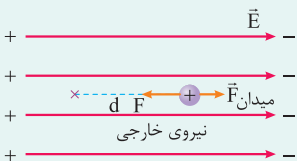


درس‌بوک

اگر بار الکتریکی q را درون میدان الکتریکی یکنواخت با نیرویی هم‌اندازه با نیروی الکتریکی میدان، اما در خلاف جهت آن جابه‌جا کنیم، برای این جابه‌جایی کار انجام داده‌ایم که از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_{\text{میدان}}| = |\vec{E}| q$$

$$W_{\text{نیروی خارجی}} = |\vec{E}| q_0 |\vec{d}| \cos \theta$$



(N/C) : میدان الکتریکی E

W : کار نیروی خارجی (J)

(m) : جابه‌جایی d

(C) : بار الکتریکی q_0

$$\left. \begin{aligned} W > 0 & \leftarrow \cos \theta > 0 & 0^\circ < \theta < 90^\circ \\ W < 0 & \leftarrow \cos \theta < 0 & 90^\circ < \theta < 180^\circ \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \theta : \text{زاویه بین نیرو و جابه‌جایی}$$

تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی:

اگر یک بار الکتریکی درون یک میدان الکتریکی یکنواخت جابه‌جا شود (توسط نیروی الکتریکی و یا توسط نیروی خارجی) روی آن کار انجام می‌شود و اندازهٔ این کار برابر با اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل بار است.

اگر بار الکتریکی در جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود $\Delta U < 0$ و اگر بار الکتریکی در خلاف جهت تمایل خود در میدان جابه‌جا شود $\Delta U > 0$ است.

$$|\Delta U| = |W|$$

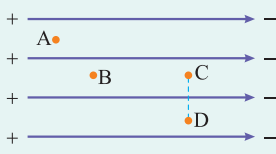
بار الکتریکی منفی: در جهت میدان حرکت کند. $\Delta U > 0$

خلاف جهت میدان حرکت کند. $\Delta U < 0$

بار الکتریکی مثبت: در جهت میدان حرکت کند. $\Delta U < 0$

خلاف جهت میدان حرکت کند. $\Delta U > 0$

پتانسیل الکتریکی:



$$V_A > V_B > V_C = V_D$$

این کمیت از ویژگی‌های میدان الکتریکی است و ارتباطی به حضور یا عدم حضور بار الکتریکی درون میدان ندارد. به طوری که درون میدان، پتانسیل الکتریکی در نزدیکی صفحهٔ مثبت بیشتر از پتانسیل در نزدیکی صفحهٔ منفی است؛ پس با حرکت در جهت میدان پتانسیل کاهش می‌یابد و بالعکس، با حرکت در خلاف جهت میدان پتانسیل افزایش می‌یابد.

دقت کنید که در یک راستای عمود بر میدان، پتانسیل الکتریکی ثابت می‌ماند.

بررسی موارد:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

(الف) درست. نیروی وارد بر بار از طرف میدان الکتریکی رو به بالا و جهت حرکت رو به پایین است. $(\cos 180^\circ = -1, \theta = 180^\circ)$

(ب) درست. نیروی خارجی وارد بر بار رو به پایین و جهت حرکت بار نیز رو به پایین است. $(\cos 0^\circ = 1, \theta = 0^\circ)$

(پ) درست. از آن‌جا که بار الکتریکی در خلاف جهت تمایل خود حرکت می‌کند. $(\Delta U > 0)$

(ت) درست. هر چه درون میدان به صفحهٔ منفی نزدیک شویم، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد.

فیزیک

۵۳

اختلاف پتانسیل الکتریکی پایانه‌های باتری خودرو برابر ۱۲V است. اگر بار الکتریکی ۴۸- کولن از پایانه منفی به پایانه مثبت باتری جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل الکتریکی آن چند ژول و چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) ۵۷۶، افزایش می‌یابد. (۲) ۵۷۶، کاهش می‌یابد.
 (۳) ۴، افزایش می‌یابد. (۴) ۴، کاهش می‌یابد.



Hint با استفاده از رابطه $\Delta U = \Delta V \cdot q$ تغییرات انرژی پتانسیل را محاسبه کنید.

درس‌Box

اختلاف پتانسیل الکتریکی:

اگر بار الکتریکی q در میدان الکتریکی از نقطه (۱) به (۲) منتقل شود و انرژی پتانسیل آن از U_1 به U_2 برسد، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو نقطه (۱) و (۲) از رابطه زیر قابل محاسبه است:

تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی (J)

$$V_2 - V_1 = \frac{U_2 - U_1}{q} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

اختلاف پتانسیل (C)

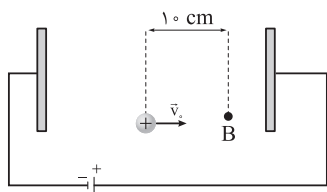
بار الکتریکی (V)
 (لرؤماً با علامت‌ش باید لحاظ شود.) دو نقطه (V)

تذکر: اختلاف پتانسیل پایانه‌های یک باتری $V_+ - V_-$ است.

$$\Delta U = \Delta V \cdot q \Rightarrow \Delta U = 12 \times (-48) = -576 \text{ J} \Rightarrow \Delta U < 0$$

کاهش می‌یابد. دقت کنید چون بار از پایانه منفی به پایانه مثبت منتقل شده است $\Delta V = V_+ - V_-$ که همان اختلاف پتانسیل دو سر باتری است. اما اگر بار الکتریکی از پایانه مثبت به پایانه منفی منتقل می‌شد $\Delta V = V_- - V_+ = -12$ باید لحاظ می‌شد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



در شکل مقابل، اندازه میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه برابر $2/0 \times 10^3 \text{ N/C}$ است. پروتونی از نقطه A با سرعت \vec{v}_0 در خلاف جهت میدان الکتریکی پرتاب شده است و سرانجام در نقطه B متوقف می‌شود. اگر بار پروتون $1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و جرم آن $1/6 \times 10^{-27} \text{ kg}$ باشد، تندی پرتاب پروتون (v_0) چند متر بر ثانیه است؟ (از وزن پروتون و مقاومت هوا چشم‌پوشی شود.)

$$2 \times 10^4 \quad (2)$$

$$10^4 \quad (1)$$

$$2 \times 10^5 \quad (4)$$

$$10^5 \quad (3)$$



ابتدا با استفاده از رابطه $\Delta U = -Eqd \cos \theta$ ، تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی را به دست آورید، سپس با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی، $\Delta U = -\Delta K$ را قرار دهید تا v_0 را به دست آورید.



Hint

بر طبق اصل پایستگی انرژی، اندازه تغییرات انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی با یکدیگر برابر و علامت آن‌ها قرینه یکدیگر است.



دروس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Delta U = -W = -E |q| d \cos \theta$$

$$\Delta U = -2 \times 10^3 \times 1/6 \times 10^{-19} \times 10 \times 10^{-2} \times -1 = +3/2 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \frac{1}{2} m (0 - v_0^2) = -3/2 \times 10^{-17} \text{ J}$$

$$-\frac{1}{2} \times 1/6 \times 10^{-27} \times v_0^2 = -3/2 \times 10^{-17} \Rightarrow v_0^2 = 4 \times 10^5 \Rightarrow v_0 = 2 \times 10^5 \text{ m/s}$$



فیزیک

ذره‌ای به جرم $4\mu\text{g}$ و بار 6nC در یک میدان الکتریکی از نقطه A به پتانسیل الکتریکی $V_A = 40\text{V}$ تا نقطه B به پتانسیل الکتریکی V_B فقط تحت تأثیر میدان الکتریکی جابه‌جا می‌شود و تندی آن از 4m/s به 8m/s می‌رسد. V_B چند ولت است؟

- ۲۴ (۱)
- ۱۶ (۲)
- ۲۴ (۴)
- ۱۶ (۳)

Hint

ابتدا از رابطه $\Delta K = \frac{1}{2}m(V_f^2 - V_i^2)$ ، تغییرات انرژی جنبشی و در نتیجه ΔU را محاسبه کنید؛ سپس آن را در رابطه $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ قرار دهید تا پتانسیل الکتریکی نقطه B را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی را محاسبه می‌کنیم.

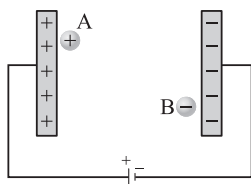
$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \Delta U = -\frac{1}{2}m(V_B^2 - V_A^2)$$

$$\Delta U = -\frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-9} (64 - 16) = -96 \times 10^{-9} \text{ J}$$

گام دوم: سپس از رابطه زیر، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه A و B و در نهایت پتانسیل نقطه B به دست می‌آید.

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q}$$

$$V_B - 40 = \frac{-96 \times 10^{-9}}{6 \times 10^{-9}} \Rightarrow V_B - 40 = -16 \Rightarrow V_B = +24\text{V}$$



مطابق شکل مقابل، ذره A با بار $q_A = |q|$ و جرم $m_A = m$ را از نزدیکی صفحه مثبت و ذره B با بار $q_B = -|q|$ و جرم $m_B = 4m$ را از نزدیکی صفحه منفی، رها می‌کنیم تا در نهایت به صفحه مقابلشان برسند. اگر کار میدان الکتریکی روی این دو ذره به ترتیب W_A و W_B و تندی آنها در لحظه رسیدن به صفحه مقابلشان V_A و V_B باشد، کدام گزینه درست است؟ (از اثر مقاومت هوا و نیروی وزن صرف نظر کنید.)

$$V_A = 2V_B, W_A = W_B \quad (2)$$

$$V_B = V_A, W_A = W_B \quad (1)$$

$$V_A = 2V_B, W_A = -W_B \quad (4)$$

$$V_A = V_B, W_A = -W_B \quad (3)$$

با توجه به قضیه کار و انرژی جنبشی، تغییرات انرژی جنبشی دو ذره A و B را برابر قرار دهید، $(\Delta K_A = \Delta K_B)$ تا نسبت تندی آنها را به دست آورید.

Hint

چون اندازه دو بار یکسان، میدان الکتریکی یکنواخت و جابه‌جایی هر دو بار فاصله بین دو صفحه است و برای هر دو بار، نیرو و بردار جابه‌جایی هم‌جهت هستند $(\theta = 0^\circ)$ ، کار میدان الکتریکی روی دو ذره A و B با هم برابر است. (گزینه‌های (3) و (4) رد می‌شوند)

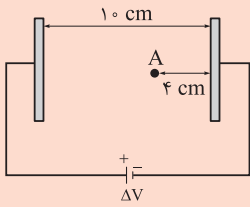
پاسخ خیلی تشریحی

$$W_A = W_B = E |q| d \cos \theta$$

به دلیل برابر بودن کار میدان روی دو ذره، اندازه تغییرات انرژی پتانسیل الکتریکی و در نتیجه اندازه تغییرات انرژی جنبشی آنها نیز با یکدیگر برابر خواهد بود.

$$\Delta K_A = \Delta K_B \Rightarrow \frac{1}{2} m (V_A^2 - 0) = \frac{1}{2} (4m) (V_B^2 - 0)$$

$$V_A^2 = 4V_B^2 \Rightarrow V_A = 2V_B$$



در شکل مقابل، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -5.0 \mu\text{C}$ را در نقطه A رها می‌کنیم تا در نهایت به یکی از صفحه‌های باردار برخورد کند. اگر در طی این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی ذره 3 mJ تغییر کند، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه چند ولت است؟ (از اثر وزن ذره صرف نظر کنید).

۶۰ (۲)

۴۰ (۱)

۱۲۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۵۷

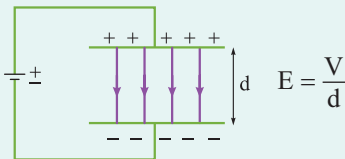


ابتدا از رابطه $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$ اختلاف پتانسیل بین نقطه A و صفحه مثبت را به دست آورید، سپس با توجه به رابطه $\Delta V = Ed$ ،

اندازه میدان بین دو صفحه را برابر با اندازه میدان بین نقطه A و صفحه مثبت قرار دهید تا اختلاف پتانسیل دو صفحه به دست آید.

$$\frac{\Delta V_{\text{دو صفحه}}}{d} = \frac{\Delta V_{A,+}}{d_{A,+}}$$

بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه فلزی موازی که به یک باتری با پتانسیل V متصل هستند، از رابطه زیر به دست می‌آید.



E: میدان الکتریکی (N/C)

V: اختلاف پتانسیل بین دو صفحه (V)

d: فاصله بین دو صفحه (m)

دقت داشته باشید چون درون یک میدان الکتریکی یکنواخت، اندازه میدان در همه نقاط با هم برابر است، اگر اندازه اختلاف پتانسیل دو نقطه A و B مطابق شکل برابر $|\Delta V_{AB}|$ باشد، بزرگی میدان الکتریکی یکنواخت موجود در فضا برابر است با:

$$E = \frac{|\Delta V_{AB}|}{d'}$$

گام اول: همان طور که می‌دانیم، اگر بار $q = -5.0 \mu\text{C}$ را از نقطه A رها کنیم به سمت صفحه مثبت حرکت می‌کند؛ بنابراین ابتدا اختلاف پتانسیل بین نقطه A و صفحه مثبت را به دست می‌آوریم:

$$\Delta V' = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow \Delta V' = \frac{-3 \times 10^{-3}}{-5.0 \times 10^{-6}} \Rightarrow \Delta V' = 60 \text{ V}$$

گام دوم: میدان الکتریکی یکنواخت بین دو صفحه را در دو حالت محاسبه می‌کنیم، یکبار بین نقطه A تا صفحه مثبت و بار دیگر بین دو صفحه که قطعاً در هر دو حالت با هم برابر هستند:

$$E = \frac{|\Delta V'|}{d'} = \frac{60}{6 \times 10^{-2}} = 10^3 \text{ N/C}$$

$$E = \frac{|\Delta V|}{d} \Rightarrow \frac{\Delta V}{10^{-1}} = 10^3 \Rightarrow \Delta V = 100 \text{ V}$$

از آنجا که میدان الکتریکی یکنواخت و در همه جا یکسان است، در گام دوم می‌توانیم برای به دست آوردن اختلاف پتانسیل دو صفحه از تناسب زیر استفاده کنیم:

$$\frac{60}{6} = \frac{\Delta V}{10} \Rightarrow \Delta V = 100 \text{ V}$$

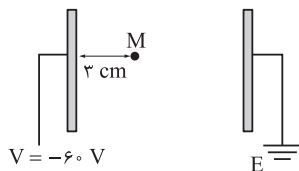
دقت کنید با توجه به گزینه‌ها می‌توانستیم صفرها و اعشارها را نیز حذف کنیم!

Hint

درستی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

تیزپازی



در شکل روبه‌رو، در فضای بین دو صفحه رسانای موازی، میدان الکتریکی یکنواخت $E = 500 \text{ N/C}$ ایجاد شده است. به ترتیب، فاصله بین دو صفحه چند سانتی‌متر و پتانسیل الکتریکی نقطه M چند ولت است؟

$$-15 \text{ و } 12 \text{ (۲)}$$

$$-45 \text{ و } 12 \text{ (۱)}$$

$$-15 \text{ و } 6 \text{ (۴)}$$

$$-45 \text{ و } 6 \text{ (۳)}$$

Hint

ابتدا از رابطه $E = \frac{\Delta V}{d}$ ، فاصله دو صفحه را به دست آورید؛ سپس چون میدان بین دو صفحه در همه جا یکسان است از همین رابطه می‌توانید اختلاف پتانسیل نقطه M و صفحه سمت چپ را حساب کنید و در آخر با تشخیص این‌که پتانسیل نقطه M بیشتر از صفحه سمت چپ است، گزینه درست را انتخاب کنید.

گام اول: صفحه سمت راست به زمین متصل است، بنابراین پتانسیل آن صفر است، پس اختلاف پتانسیل بین دو صفحه 60 V بوده و می‌توانیم فاصله بین دو صفحه را به دست آوریم:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow 500 = \frac{60}{d} \Rightarrow d = 12 \times 10^{-2} \text{ m} = 12 \text{ cm}$$

گام دوم: با توجه به این‌که میدان الکتریکی یکنواخت است، رابطه آن را بین نقطه M و صفحه با پتانسیل -60 V به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|\Delta V| = Ed \Rightarrow |\Delta V| = 500 \times 3 \times 10^{-2} = 15 \text{ V}$$

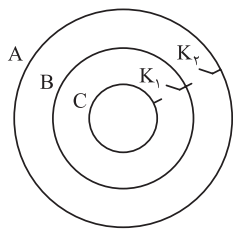
گام سوم: از آنجایی‌که بار صفحه سمت راست مثبت‌تر از صفحه سمت چپ است؛ هر چه به صفحه سمت چپ نزدیک می‌شویم پتانسیل کاهش می‌یابد؛ بنابراین پتانسیل نقطه M ، 15 V بیشتر از پتانسیل صفحه سمت چپ است:

$$V_M = -60 + 15 = -45 \text{ V}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۵۹



در شکل مقابل، سه پوسته کروی و رسانای A، B و C، دارای بارهای الکتریکی $q_B = -4\mu\text{C}$ ، $q_A = 10\mu\text{C}$ و $q_C = 5\mu\text{C}$ هستند. ابتدا کلید K_2 را بسته و سپس باز می‌کنیم و در ادامه کلید K_1 را می‌بندیم. بار الکتریکی نهایی کره‌های A، B و C به ترتیب از راست به چپ، بر حسب میکروکولن، کدام است؟

$$3/5 - 3/5 - 3 \quad (2)$$

$$1 - 5 - 6 \quad \text{صفر}$$

$$2/5 - 2/5 - 6 \quad (4)$$

$$3 - 11 - \text{صفر}$$

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مرحله به مرحله تغییرات را حساب کنید، دقت کنید که نحوه توزیع بار در اجسام رسانا چگونه رخ می‌دهد.

گام اول: توجه کنید که بار در اجسام رسانا، در خارجی‌ترین پوسته توزیع می‌شود. با بستن کلید K_2 ، بار پوسته B برابر صفر و بار پوسته A برابر با $6\mu\text{C} = 10 - 4$ خواهد شد.

گام دوم: کلید K_1 قطع شده است، پس بار پوسته A همان $6\mu\text{C}$ می‌ماند؛ با وصل کردن کلید K_1 ، مشابه حالت اول، بار B برابر با $5\mu\text{C} = 5 + 0$ و بار C صفر خواهد شد.

فیزیک

۶۰

یک ماهواره به صورت مکعبی فلزی به ضلع 50cm است. اگر این ماهواره در اثر عبور از یکی از لایه‌های جو زمین دارای بار الکتریکی شده و اندازه چگالی سطحی بار الکتریکی روی سطح آن $4 \frac{\text{nC}}{\text{cm}^2}$ باشد، اندازه بار موجود در سطح این ماهواره، چند میکروکولن است؟ (از تجمع بار بر روی لبه‌ها چشم‌پوشی شود.)

۶۰ (۴)

۶ (۳)

۱۰ (۲)

۱ (۱)



Hint ابتدا مساحت هر وجه مکعب را حساب کنید و چون مکعب ۶ وجه دارد، آن را در ۶ ضرب کنید تا مساحت کل مکعب به دست

آید. سپس از رابطه $\sigma = \frac{Q}{A}$ اندازه بار الکتریکی موجود در سطح ماهواره را به دست آورید.

اگر مساحت سطحی که بار روی آن توزیع شده است برابر A و بار الکتریکی موجود در آن سطح برابر Q باشد چگالی سطحی بار که با نماد σ نشان داده می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

σ : چگالی سطحی بار (C/m^2)

Q : بار الکتریکی (C)

A : مساحت (m^2)

$$A = 6 \times (50 \times 10^{-2})^2 = 6 \times 2500 \times 10^{-4} = 1500 \times 10^{-4} = 15 \text{ m}^2$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow 4 \times 10^{-5} = \frac{Q}{15} \Rightarrow Q = 6 \times 10^{-5} \text{ C} = 60 \mu\text{C}$$

درستی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام عدد اتمی مربوط به عنصری از دسته d جدول تناوبی است؟

۲۰ (۴)

۳۱ (۳)

۴۸ (۲)

۳۷ (۱)


درتس Box

عنصرهای دسته d در دوره‌های ۴ تا ۷ و گروه‌های ۳ تا ۱۲ جدول دوره‌ای قرار دارند. در هر یک از این دوره‌ها، ۱۰ عنصر دسته d وجود دارد که عدد اتمی آن‌ها در جدول زیر آورده شده است:

شماره دوره	عدد اتمی عنصرهای دسته d (فلزهای واسطه)
۴	۲۱ - ۳۰
۵	۳۹ - ۴۸
۶	۷۱ - ۸۰
۷	۱۰۳ - ۱۱۲

دقت کنید عدد اتمی اولین عنصر دسته d در دوره‌های چهارم و پنجم، ۳ واحد از گاز نجیب قبل خود و (Ar_{18} و Kr_{36}) بیشتر است، اما با توجه به این که عنصرهایی با عددهای اتمی ۵۷ تا ۷۰ و ۸۹ تا ۱۰۲ در دو ردیف پایین جدول قرار گرفته‌اند، عدد اتمی نخستین عنصر دسته d دوره‌های ششم و هفتم به ترتیب برابر با ۷۱ و ۱۰۳ است. در ضمن با توجه به این که آخرین عنصر دسته d هر دوره، در گروه ۱۲ قرار دارد، عدد اتمی آخرین عنصر دسته d دوره‌های ۴ تا ۷، ۶ واحد کم‌تر از گاز نجیب همان دوره است.

عنصری با عدد اتمی ۴۸، آخرین عنصر دسته d دوره پنجم است، زیرا عدد اتمی آن ۶ واحد کم‌تر از گاز نجیب دوره پنجم (Xe_{84}) می‌باشد و در گروه ۱۲ قرار دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): عنصری با عدد اتمی ۳۷ در گروه اول جدول دوره‌ای قرار دارد (زیرا عدد اتمی آن، یک واحد بیشتر از گاز نجیب Kr_{36} است) و جزء عنصرهای دسته s است.

گزینه (۳): عنصری با عدد اتمی ۳۱ در گروه ۱۳ جدول قرار دارد (زیرا عدد اتمی آن، ۵ واحد کم‌تر از گاز نجیب Kr_{36} است) و جزء عنصرهای دسته p است.

گزینه (۴): عنصری با عدد اتمی ۲۰ در گروه ۲ جدول قرار دارد (زیرا عدد اتمی آن، ۲ واحد بیشتر از گاز نجیب Ar_{18} است) و جزء عنصرهای دسته s است.

عنصرهای گروه‌های ۱ و ۲ و هلیوم از گروه ۱۸، جزء عنصرهای دسته s و عنصرهای گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ (به جز هلیوم)، جزء عنصرهای دسته p جدول دوره‌ای هستند.



نکته

در بین فلزهای قلیایی دوره‌های اول تا چهارم جدول تناوبی، بیشترین شعاع اتمی مربوط به بوده و بیشترین خاصیت نافلزی در گروه ۱۷ مربوط به عنصری است که

(۱) K ۱۹ - در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد

(۲) K ۱۹ - در دمای ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد

(۳) Li ۳ - در دمای اتاق به آرامی با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد

(۴) Li ۳ - در دمای ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد



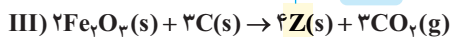
(۱) در یک دوره، شعاع اتمی از چپ به راست کاهش و خاصیت نافلزی برخلاف خاصیت فلزی از چپ به راست افزایش می‌یابد. در یک گروه، شعاع اتمی از بالا به پایین افزایش و خاصیت نافلزی برخلاف خاصیت فلزی، از بالا به پایین کاهش می‌یابد.
(۲) شرایط واکنش هالوژن‌ها با گاز هیدروژن در جدول زیر آورده شده است:

نام هالوژن	شرایط واکنش با گاز هیدروژن
فلوئور (F)	حتی در دمای 200°C به سرعت واکنش می‌دهد.
کلر (Cl)	در دمای اتاق به آرامی واکنش می‌دهد.
برم (Br)	در دمای 200°C واکنش می‌دهد.
ید (I)	در دمای بالاتر از 400°C واکنش می‌دهد.

در گروه ۱ بیشترین شعاع اتمی در دوره ۱ تا ۴ مربوط به K ۱۹ و بیشترین خاصیت نافلزی در گروه ۱۷ مربوط به F ۹ است که در دمای 200°C یا ۷۳ کلوین به سرعت با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به واکنش‌های زیر، کدام مورد درست است؟



(۱) حالت فیزیکی ترکیب Y همانند فرآورده‌های واکنش (I) بوده و محلول در آب است.

(۲) Z یک عنصر است و آرایش الکترونی اتم آن به زیرلایه‌ای با گنجایش 10 الکترون ختم می‌شود.

(۳) رنگ فرآورده نامحلول واکنش (II)، طول موج بلندتری نسبت به رنگ محلول کلردار واکنش دهنده این واکنش دارد.

(۴) نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب X، همانند نسبت شمار کاتیون به آنیون در واکنش دهنده اکسیژن‌دار واکنش (III) است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در واکنش‌های (I) تا (III)، X، Y، Z به ترتیب $\text{Fe(OH)}_2(\text{s})$ ، $\text{FeCl}_2(\text{aq})$ و $\text{Fe}(\text{s})$ هستند. Fe(OH)_2 و Fe(OH)_3 دو ماده نامحلول در آب به رنگ‌های سبز و قرمز آجری هستند و محلول دو ماده FeCl_2 و FeCl_3 به ترتیب به رنگ سبز و زرد است. طول موج رنگ قرمز از طول موج رنگ زرد بلندتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): در واکنش (I) حالت فیزیکی X یا همان Fe(OH)_2 ، جامد و رسوب است.

گزینه (۲): آرایش الکترونی عنصر $\text{Z}(\text{Fe})$ به صورت $[\text{Ar}]3d^6 4s^2$ است که به زیرلایه $4s$ با گنجایش دو الکترون ختم می‌شود.

در عناصر دسته d، آخرین الکترون به زیرلایه d وارد می‌شود، ولی آرایش الکترونی این عناصر به زیرلایه ns ختم می‌شود.

گول نخوری ✖

گزینه (۴): نسبت شمار آنیون به کاتیون در Fe(OH)_2 برابر $\frac{2}{1}$ است، اما نسبت شمار کاتیون به آنیون در Fe_2O_3 برابر $\frac{2}{3}$ است.





۶۴ اگر در نمونه‌ای ناخالص از کلسیم کربنات به جرم ۲۵۰ گرم، ۳۶ گرم کلسیم وجود داشته باشد، درصد خلوص این نمونه کدام است و اگر به این نمونه، ۱۶۰ گرم کلسیم کربنات با خلوص ۳۷/۵٪ اضافه کنیم، به تقریب چند درصد جرم نمونه نهایی را ناخالصی تشکیل می‌دهد؟ (در ناخالصی‌ها، کلسیم وجود ندارد و $\text{Ca} = ۴۰, \text{O} = ۱۶, \text{C} = ۱۲: \text{g.mol}^{-۱}$)

$$\begin{array}{ll} ۳۷ - ۹۰ (۱) & ۶۳ - ۳۶ (۲) \\ ۶۳ - ۹۰ (۳) & ۳۷ - ۳۶ (۴) \end{array}$$

با توجه به جرم کلسیم، در نمونه اولیه، جرم خالص کلسیم کربنات و سپس درصد خلوص آن را محاسبه می‌کنیم. برای قسمت دوم سؤال، باید جرم ناخالصی‌ها را در دو نمونه حساب کرده و در نهایت، درصد آن را در مخلوط نهایی محاسبه کنیم.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به دست آوردن جرم کلسیم کربنات با توجه به میزان کلسیم:

$$۳۶ \text{ g Ca} \times \frac{۱ \text{ mol Ca}}{۴۰ \text{ g Ca}} \times \frac{۱ \text{ mol CaCO}_3}{۱ \text{ mol Ca}} \times \frac{۱۰۰ \text{ g CaCO}_3}{۱ \text{ mol CaCO}_3} = ۹۰ \text{ g CaCO}_3 \text{ (خالص)}$$

گام دوم: با توجه به فرمول درصد خلوص داریم:

$$\text{درصد خلوص} = \frac{\text{جرم ماده خالص}}{\text{جرم ماده ناخالص}} \times ۱۰۰ = \frac{۹۰}{۲۵۰} \times ۱۰۰ = ۳۶\%$$

گام سوم: با توجه به جرم نمونه ثانویه و درصد خلوص آن داریم:

$$۳۷/۵ = \frac{\text{جرم خالص نمونه ۲}}{۱۶۰} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{جرم خالص نمونه ۲} = \frac{۱۶۰ \times ۳۷/۵}{۱۰۰} = ۱۶۰ \times \frac{۳}{۸} = ۶۰ \text{ g}$$

$$۲ \text{ گام چهارم: با توجه به جرم دو نمونه، جرم ناخالص دو نمونه را محاسبه و درصد آن را به دست می‌آوریم:}$$

جرم ماده خالص - جرم کل نمونه ۲ = جرم ناخالصی نمونه ۲ = ۱۰۰ - ۶۰ = ۴۰ g

$$۱ \text{ گام چهارم: با توجه به جرم دو نمونه، جرم ناخالص دو نمونه را محاسبه و درصد آن را به دست می‌آوریم:}$$

$$\text{مجموع جرم ناخالصی‌ها} = ۱۶۰ + ۱۰۰ = ۲۶۰ \text{ g} \Rightarrow ۲۵۰ - (۲۵۰ \times \frac{۳۶}{۱۰۰}) = ۱۶۰ \text{ g} \Rightarrow \text{جرم ناخالص نمونه ۱} = ۲۶۰ \text{ g}$$

$$\Rightarrow \text{درصد ناخالصی در نمونه نهایی} = \frac{\text{مجموع جرم ناخالصی‌ها}}{\text{جرم نمونه نهایی}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۶۰}{۲۵۰ + ۱۶۰} \times ۱۰۰ = ۶۳\%$$

کدام عبارت دربارهٔ عنصری که آرایش لایهٔ ظرفیت آن به $ns^2 np^2$ ختم می‌شود، درست است؟

گروه ۱۴

۳d

(۱) اگر شمار الکترون‌های با $l=2$ آن برابر اتم مس باشد، این عنصر رسانایی کم‌تری نسبت به عناصر هم‌گروهی پایین‌تر از خود دارد.

فلز یا شبه فلز

(۲) اگر سطح براق و درخشانی داشته باشد، به طور حتم چکش‌خواری و رسانایی خوبی نیز دارد.

فلز یا نافلز

(۳) اگر در واکنش با سایر عناصر، الکترون به اشتراک بگذارد، به طور حتم، $n < 4$ خواهد بود.

فلز

(۴) اگر کاتیون پایدار تشکیل دهد، عدد اتمی آن می‌تواند برابر ۵۲ باشد.

آرایش لایهٔ ظرفیت عنصرهای گروه ۱۴ به $ns^2 np^2$ ختم می‌شود. این گروه شامل عناصر C (نافلز)، Si، Ge (شبه‌فلز) و Sn، Pb، Fl (فلز) است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

شمار الکترون‌های با $l=2$ در مس (۲۹ Cu) مطابق آرایش الکترونی فشردهٔ آن، $1s^2 \dots 3d^10 4s^1$ ، برابر ۱۰ است که این شمار الکترون، در Ge (۳۲) که هم‌دورهٔ مس است، نیز وجود دارد:



با توجه به این‌که Ge (۳۲) شبه‌فلز و نیمه‌رسانا است و عناصر پایین آن فلز هستند، گزینهٔ (۱) کاملاً درست است. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): شبه‌فلزها همانند فلزها سطح درخشان دارند، اما چکش‌خوار نیستند و در اثر ضربه خرد می‌شوند.

گزینهٔ (۳): کربن، سیلیسیم و ژرمانیم در واکنش با سایر عناصر الکترون به اشتراک می‌گذارند و یون پایدار تک‌اتمی تشکیل نمی‌دهند. در Ge (۳۲)، آرایش الکترونی لایهٔ ظرفیت به $4s^2 4p^2$ ختم می‌شود و $n=4$ است.

گزینهٔ (۴): در گروه ۱۴، دو عنصر قلع و سرب، کاتیون پایدار تشکیل می‌دهند. عدد اتمی این دو عنصر به ترتیب برابر با ۵۰ و ۸۲ است.

۶۶ با توجه به معادله داده شده، اگر ۱۶۰ گرم هیدرویدیک اسید با مقدار کافی پتاسیم پرمنگنات واکنش دهد و جرم فراورده اکسیژن دار

تولیدی برابر ۱/۸ گرم باشد، بازده درصدی واکنش کدام است؟ ($H = 1, O = 16, I = 127 : g \cdot mol^{-1}$)

(معادله واکنش موازنه نشده است.) $KMnO_4(s) + HI(aq) \rightarrow MnI_2(aq) + H_2O(l) + KI(aq) + I_2(s)$

۱۶ (۱) ۳۲ (۲) ۴۰ (۳) ۲۰ (۴)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: معادله موازنه واکنش به صورت زیر است:



روش اول:

با توجه به جرم واکنش دهنده و فراورده تولیدی داریم:

$$160 \text{ g HI} \times \frac{1 \text{ mol HI}}{128 \text{ g HI}} \times \frac{8 \text{ mol H}_2\text{O}}{16 \text{ mol HI}} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{R}{100} = \frac{18}{8} \text{ g H}_2\text{O}$$

$$\Rightarrow R = \frac{128 \times 100 \times 2}{160} = 16$$

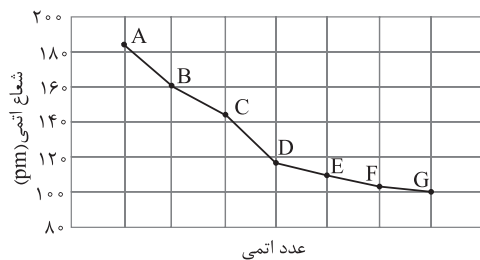
روش دوم: کسر تناسب بین HI و H₂O به صورت زیر است:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{160 \times R}{100 \times 128 \times 16} = \frac{18}{18 \times 8} \Rightarrow R = \frac{128 \times 2}{16} = 16$$

تیزبازی

در این سؤال نیازی به موازنه کامل واکنش نبوده، زیرا دو ماده‌ای که رابطه استوکیومتری و ضرایب آن‌ها در حل سؤال مهم است، HI و H₂O هستند که با توجه به این که H فقط در ساختار این دو ماده وجود دارد، می‌توان نسبت ضریب این دو ماده را فقط با موازنه هیدروژن به دست آورد:





۶۷ با توجه به نمودار روبه‌رو که مربوط به تغییرات شعاع اتمی عناصر در دوره سوم است، کدام موارد درست است؟
 الف) جمع جبری بار یون‌های پایدار عنصرهای مورد نظر برابر صفر است.
 ب) حالت فیزیکی عناصر F و G در دمای اتاق، برخلاف رنگ آن‌ها متفاوت است.

پ) آرایش یون پایدار عنصر D همانند عنصر E به گاز نجیب آرگون می‌رسد.

ت) عنصر F به شکل آزاد در طبیعت یافت می‌شود و اتم آن، ۶ الکترون ظرفیتی دارد.

۲) الف - ب - ت

۱) الف - ب

۴) ب - پ - ت

۳) پ - ت

پاسخ خیلی تشریحی ✓ عبارتهای «الف»، «ب»، «ت» درست‌اند. با توجه به این که در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد، عناصر A تا G به ترتیب، Na ، Mg ، Al ، Si ، P ، S و Cl هستند.

بررسی عبارت‌ها:

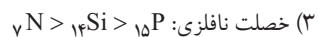
الف) یون پایدار عناصر دوره سوم به صورت Na^+ ، Mg^{2+} ، Al^{3+} ، Si (یون پایدار ندارد)، P^{3-} ، S^{2-} و Cl^- است که جمع جبری بار آن‌ها برابر صفر است.

ب) در دوره سوم (بدون گاز نجیب) فقط حالت فیزیکی کلر در دمای اتاق، گاز است و بقیه عناصر جامدند. کلر گازی زردرنگ و گوگرد نیز جامدی زردرنگ است.

پ) Si یون پایدار تک‌اتمی ندارد و با اشتراک‌گذاشتن الکترون به گاز نجیب هم‌دوره‌اش ($_{18}\text{Ar}$) می‌رسد.

ت) شمار الکترون‌های لایه ظرفیت S، ۱۶ که در گروه ۱۶ قرار دارد، برابر ۶ است و این عنصر به صورت آزاد در طبیعت یافت می‌شود.

در کدام گزینه مقایسه انجام شده به نادرستی صورت گرفته است؟



دروس Box

روندهای تناوبی در دسته‌های S و P جدول دوره‌ای

در یک دوره از چپ به راست	در یک گروه از بالا به پایین
● شعاع اتمی عنصرها و اختلاف شعاع اتمی دو عنصر متوالی، کاهش می‌یابد.	● شعاع اتمی عنصرها افزایش می‌یابد.
● خصلت فلزی عنصرها کاهش می‌یابد.	● خصلت فلزی عنصرها افزایش می‌یابد.
● خصلت نافلزی عنصرها افزایش می‌یابد.	● خصلت نافلزی عنصرها کاهش می‌یابد.
● واکنش‌پذیری فلزها کاهش می‌یابد.	● واکنش‌پذیری فلزها افزایش می‌یابد.
● واکنش‌پذیری نافلزها افزایش می‌یابد.	● واکنش‌پذیری نافلزها کاهش می‌یابد.

در گزینه (۳)، خاصیت نافلزی P از Si بیشتر است، زیرا در یک دوره از چپ به راست خصلت نافلزی عنصرها افزایش می‌یابد. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

توجه کنید در عناصر واسطه لزوماً از چپ به راست، واکنش‌پذیری کاهش یا افزایش نمی‌یابد و واکنش‌پذیری مس (Cu) از روی (Zn) کمتر است و اگر حواستون نباشه، همون اول که گزینه (۱) رو می‌خونید، طبق قاعده کلی به اشتباه گزینه (۱) رو انتخاب می‌کنید. ✗ گول نخوری

۶۹

۳۵ Br

کدام موارد از مطالب زیر، به یقین درست‌اند؟

- الف) اولین هالوژن جدول دوره‌ای که لایهٔ الکترونی چهارم آن اشغال می‌شود، در دمای 250°C با گاز هیدروژن واکنش می‌دهد.
 ب) آرایش الکترونی کاتیون‌های حاصل از فلزهای واسطه به آرایش الکترونی گاز نجیب نمی‌رسند.
 پ) بدون در نظر گرفتن گاز نجیب، در عناصر دورهٔ دوم جدول دوره‌ای، بیشترین اختلاف شعاع اتمی بین لیتیم و فلور است.
 ت) مجموع $(n+1)$ الکترون‌های ظرفیتی عنصر گازی دورهٔ چهارم جدول دوره‌ای برابر ۳۳ است.

۳۶ Kr

(۲) الف - پ

(۱) ب - ت

(۴) ب - پ

(۳) الف - ت

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

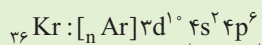
بررسی عبارت‌ها:

الف) 35Br اولین هالوژنی است که لایهٔ الکترونی چهارم آن از الکترون اشغال می‌شود و چون در دمای 250°C می‌تواند با گاز H_2 واکنش بدهد؛ بنابراین به یقین در دمای 250°C نیز می‌تواند واکنش بدهد.

ب) مثلاً آرایش الکترونی 21Sc^{3+} به گاز نجیب آرگون می‌رسد.

پ) شعاع اتمی عنصرها از چپ به راست کاهش می‌یابد و بیشترین شعاع اتمی در دورهٔ دوم، مربوط به 3Li و کم‌ترین آن مربوط به 9F است.

ت) عنصر گازی دورهٔ چهارم، 36Kr است که مجموع $(n+1)$ الکترون‌های ظرفیتی آن برابر است با:



$$(n+1) = [(4+0) \times 2] + [(4+1) \times 6] = 38$$

۷۰

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر در کدام گزینه، به درستی اشاره شده است؟

الف) آهن (III) اکسید به عنوان رنگ قرمز در نقاشی کاربرد دارد.

ب) از آلومینیم مذاب تولیدشده در فرایند ترمیت برای جوشکاری خطوط ریل راه آهن استفاده می‌شود.

پ) از اولین فلز واسطه دوره چهارم، برای تهیه وسایلی مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها استفاده می‌شود. ← اسکاندیم (${}_{21}\text{Sc}$)

ت) استخراج فلزهای روی و نیکل از لابه‌لای خاک و گیاه، برخلاف طلا و مس، مقرون به صرفه نیست.

۲) نادرست - نادرست - نادرست - نادرست

۱) نادرست - نادرست - درست - نادرست

۴) نادرست - نادرست - درست - درست

۳) درست - نادرست - درست - نادرست



پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های «الف» و «ب»، نادرست و عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) از آهن (III) اکسید به عنوان رنگ قرمز در نقاشی استفاده می‌شود.

ب) از آهن مذاب تولیدشده در فرایند ترمیت $(\text{Fe}_2\text{O}_3(s) + 2\text{Al}(s) \rightarrow 2\text{Fe}(l) + \text{Al}_2\text{O}_3(s))$ برای جوشکاری خطوط ریل راه آهن استفاده می‌شود.

پ) از اسکاندیم (${}_{21}\text{Sc}$) که اولین فلز واسطه دوره چهارم است، برای تهیه وسایل خانه مانند تلویزیون رنگی و برخی از شیشه‌ها استفاده می‌شود.

ت) استخراج فلزهای روی و نیکل برخلاف طلا و مس از لابه‌لای خاک، مقرون به صرفه نیست.

۷۱ اگر در واکنش مقدار کافی کربن با Fe_2O_3 که برای استخراج آهن در فولاد مبارک استفاده می‌شود، ۲۸ تن آهن تولید شود، به تقریب

چند تن آهن (III) اکسید با خلوص ۷۵ درصد، مصرف شده است؟ ($\text{Fe} = ۵۶, \text{O} = ۱۶, \text{C} = ۱۲ : \text{g.mol}^{-1}$)

۱۶۰ (۴)

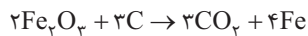
۲۶ / ۶ (۳)

۱۰۶ / ۶ (۲)

۵۳ / ۳ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: معادله موازنه واکنش به صورت زیر است:



گام دوم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$28 \text{ Ton Fe} \times \frac{1000 \text{ kg}}{1 \text{ Ton}} \times \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{56 \text{ g Fe}} \times \frac{2 \text{ mol Fe}_2\text{O}_3}{4 \text{ mol Fe}} \times \frac{160 \text{ g Fe}_2\text{O}_3}{1 \text{ mol Fe}_2\text{O}_3} \times \frac{100 \text{ g ناخالص}}{75 \text{ g خالص}} \times \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ Ton}}{1000 \text{ kg}}$$

$$= \frac{160}{3} \approx 53 / 3 \text{ Ton Fe}_2\text{O}_3 \text{ ناخالص}$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم ناخالص} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\frac{\text{جرم ناخالص}}{\text{Fe}_2\text{O}_3} = \frac{\text{جرم}}{\text{Fe}}$$

با توجه به این که جرم هر دو ماده برحسب تن است، نیازی به تبدیل واحد نیست.

$$x \times \frac{75}{100} = \frac{1}{4 \times 56} \times \frac{75}{100} \times \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{4 \times 2 \times 160}{3 \times 4 \times 2} = 53 / 3 \text{ ton Fe}_2\text{O}_3 \text{ ناخالص}$$

		R																												
			E			G																								

با توجه به جایگاه چند عنصر که در جدول تناوبی مقابل نشان داده

۷۲

شده است، کدام گزینه درست است؟

(۱) عنصر X برخلاف عنصر Z ، در اثر ضربه خرد نمی‌شود.

(۲) برای نام‌گذاری ترکیب‌های M ، نیازی به استفاده از اعداد رومی نیست.

(۳) عنصر D همانند عنصرهای دارای رسانایی الکتریکی هم‌دوره خود، با تشکیل کاتیون به پایداری می‌رسد.

(۴) اگر مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی الکترون‌های ظرفیت یکی از عنصرهای نشان داده شده در جدول برابر ۱۳ باشد، عدد

اتمی آن از عدد اتمی عنصر G کم‌تر است.



بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): X نافلز و Z ، شبه‌فلز است و هر دو در اثر ضربه خرد می‌شوند.

گزینه (۲): عنصر M با عدد اتمی ۲۵، همان منگنز است. منگنز (${}_{25}Mn$) دارای چند نوع کاتیون پایدار است و در نام‌گذاری ترکیب‌های آن، باید از اعداد رومی استفاده کرد. در کتاب درسی، به منگنز (II) کربنات اشاره شده است.

گزینه (۳): عنصرهای دارای رسانایی الکتریکی شامل فلز و شبه‌فلز می‌باشد، در دوره سوم، Si فقط الکترون به اشتراک می‌گذارد.

گزینه (۴): با بررسی $(n+1)$ الکترون‌های ظرفیت دو عنصر بعد از عنصر G ، (M و Z) متوجه می‌شویم که عدد اتمی عنصر مورد نظر از G کوچک‌تر است.

$${}_{25}M: [{}_{18}Ar]3d^5 4s^2 \quad \text{الکترون‌های ظرفیت } (n+1): 5(3+2) + 2(4+0) = 33$$

$${}_{32}Z: [{}_{18}Ar]3d^{10} 4s^2 4p^2 \quad \text{الکترون‌های ظرفیت } (n+1): 2(4+1) + 2(4+0) = 18$$

عنصر مجهول که عدد اتمی آن از G کوچک‌تر و $(n+1)$ الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۱۳ است Y یا ${}_{13}N$ است.

$${}_{13}Y: [{}_{2}He]2s^2 2p^3 \Rightarrow \text{الکترون‌های ظرفیت } (n+1) = 2(2+0) + 3(2+1) = 13$$

۷۳ کدام مورد درست است؟ (X = فلز واسطه، Y = فلز اصلی)

(۱) اگر واکنش: $Cl_4(g) + 2YI \rightarrow 2YCl + I_4$ به طور طبیعی انجام پذیر باشد، در همین شرایط، واکنش $Br_4(l) + 2YCl \rightarrow 2YBr + Cl_4$ نیز به طور طبیعی انجام پذیر است.

(۲) اگر واکنش: $2X_4O_3(s) + 3Ti(s) \rightarrow 4X(s) + 3TiO_2(s)$ به طور طبیعی انجام پذیر باشد، واکنش $ZnO(s) + X(s) \rightarrow X_4O_3(s) + Zn(s)$ نیز به طور طبیعی انجام پذیر است.

(۳) با توجه به واکنش: $X + 2HCl \rightarrow XCl_4 + H_2$ که به طور طبیعی انجام نمی پذیرد، می توان دریافت که واکنش پذیری کلر از X بیشتر است.

(۴) اگر واکنش: $2X_4O_3(s) + 3C(s) \rightarrow 4X(s) + 3CO_2(g)$ به طور طبیعی انجام پذیر باشد، واکنش $X_4O_3(s) + 6Y(s) \rightarrow 2X(s) + 3Y_2O(s)$ نیز به طور طبیعی انجام پذیر است.



اگر یک واکنش در جهت رفت به طور طبیعی انجام پذیر باشد، واکنش پذیری واکنش دهنده ها از فرآورده ها بیشتر خواهد بود و اگر انجام پذیر نباشد، واکنش پذیری فرآورده ها از واکنش دهنده ها بیشتر خواهد بود.



به طور کلی واکنش پذیری فلزهای اصلی از فلزهای واسطه بیشتر است، اما در میان واسطه ها نظم مشخصی وجود ندارد. از واکنش $C + X_4O_3 \rightarrow \dots$ نتیجه می گیریم واکنش پذیری عنصر کربن از X (واسطه) بیشتر است و با توجه به بیشتر بودن واکنش پذیری فلزهای اصلی از کربن، واکنش پذیری عنصر Y (فلز اصلی) به یقین از X بیشتر خواهد بود و واکنش $Y + X_4O_3 \rightarrow \dots$ به طور طبیعی انجام خواهد شد. بررسی سایر گزینه ها:



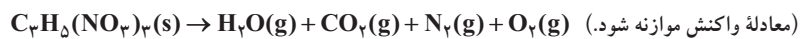
گزینه (۱): واکنش پذیری کلر از برم بیشتر است و واکنش $Br_4 + YCl \rightarrow \dots$ به طور طبیعی انجام پذیر نخواهد بود.
گزینه (۲): از واکنش اول نتیجه می گیریم واکنش پذیری $Ti > X$ است، اما نمی توانیم واکنش پذیری X با Zn را مقایسه کنیم.
گزینه (۳): با توجه به انجام ناپذیری واکنش $X + HCl \rightarrow \dots$ ، می توان گفت که واکنش پذیری هیدروژن از X بیشتر بوده و واکنش در جهت طبیعی پیش نمی رود.



۷۴

اگر m گرم نیترو گلیسرین با خلوص 60% مطابق واکنش زیر تجزیه شود و حجم گاز نیتروژن تولید شده برابر $3/6$ لیتر باشد، m کدام است؟

(بازده واکنش 80% و حجم مولی گازها در شرایط واکنش، $22/7$ لیتر است. $(H=1, C=12, N=14, O=16 : g.mol^{-1})$)



۲۴ (۴)

۳۶ (۳)

۴۰ (۲)

۵۰ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ معادله موازنه واکنش به صورت زیر است:



$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{100} = \frac{\text{حجم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{C_3H_5(NO_3)_3}$$

$$\Rightarrow \frac{m \times \frac{60}{100} \times \frac{80}{100}}{4 \times \frac{227}{100}} = \frac{3/6}{6 \times \frac{22/7}{1}} \Rightarrow m = \frac{4 \times 36 \times 100}{6 \times 8 \times 6} = 50 \text{ g}$$

می‌توانستیم فقط نیتروژن را موازنه کنیم. چون فقط با این اتم سر و کار داشتیم.

تیزبازی



۷۵

همه عبارت‌های زیر درباره طلا درست است، به جز

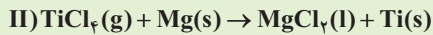
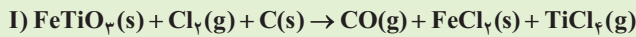
- (۱) رسانایی الکتریکی آن بسیار بالا است و این فلز همانند نقره به صورت آزاد در طبیعت یافت می‌شود
- (۲) مقدار طلا در معادن آن بسیار کم است و برای استخراج میزان اندکی از آن، حجم انبوهی خاک معدن استفاده می‌شود
- (۳) به اندازه‌ای چکش‌خوار و نرم است که چند گرم از آن را می‌توان به صفحه‌ای با مساحت چند متر مربع تبدیل کرد
- (۴) واکنش‌ندادن آن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان همراه با بازتاب اندک پرتوهای خورشیدی، سبب شده تقاضای جهانی برای این فلز افزایش یابد



همه ویژگی‌های مذکور در گزینه‌های (۱) تا (۳) از ویژگی‌های عنصر طلا است، اما طلا علاوه بر واکنش‌ندادن با گازهای موجود در هواکره و مواد موجود در بدن انسان، پرتوهای خورشیدی را بسیار زیاد بازتاب می‌کند و این ویژگی طلا در کنار سایر ویژگی‌های دیگر آن، سبب شد تقاضای جهانی برای این فلز افزایش یابد.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

تیتانیم اغلب در طبیعت به شکل مخلوطی از ماسه و ایلمنیت (FeTiO_3) یافت می‌شود. استخراج تیتانیم از این مخلوط به صورت زیر انجام می‌شود:



مجموع ضرایب استوکیومتری فرآورده‌های واکنش (II) به ضریب CO در واکنش (I) کدام است و اگر درصد جرمی ایلمنیت (FeTiO_3) در مخلوط آن با ماسه، برابر ۲۵ درصد باشد، از واکنش ۰/۰۱ کیلوگرم مخلوط ماسه و ایلمنیت، چند میلی‌گرم فلز تیتانیم به دست می‌آید؟ (بازده درصدی واکنش‌های (I) و (II) را به ترتیب برابر ۱۰۰٪ و ۷۶٪ در نظر بگیرید، معادله واکنش‌ها موازنه شود.

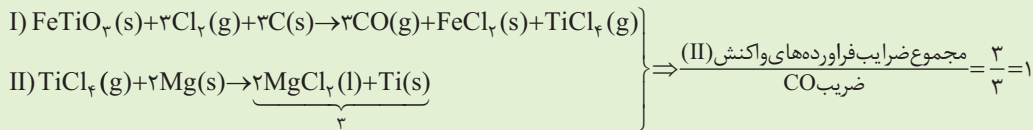
$$(\text{O} = ۱۶, \text{Cl} = ۳۵ / ۵, \text{Ti} = ۴۸, \text{Fe} = ۵۶ : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$$

$$\begin{array}{ll} ۷۶۰, \frac{۳}{۳} (۲) & ۶۰۰, \frac{۳}{۳} (۱) \\ ۷۶۰, ۱ (۴) & ۶۰۰, ۱ (۳) \end{array}$$



Hint ابتدا هر دو واکنش را موازنه و با توجه به جرم FeTiO_3 ، به مول TiCl_4 و از مول TiCl_4 به جرم Ti در واکنش دوم می‌رسیم.

گام اول: موازنه واکنش‌ها به صورت زیر است: **پاسخ خیلی تشریحی**



گام دوم:

روش اول:

$$\text{mgTi} = \frac{۱۰۰ \text{ mg}}{۱۰۰} \times \frac{۷۶}{۱۰۰} \times \frac{۴۸ \text{ g}}{۱ \text{ mol Ti}} \times \frac{۱ \text{ mol TiCl}_4}{۱ \text{ mol FeTiO}_3} \times \frac{۱ \text{ mol FeTiO}_3}{۱۵۲ \text{ g FeTiO}_3} \times \frac{۱ \text{ mol FeTiO}_3}{۱۰۰ \text{ g}} \times \frac{۲۵ \text{ g FeTiO}_3}{۱ \text{ kg}} \times ۱۰۰ = ۶۰۰ \text{ mgTi}$$

روش دوم: با توجه به یکسان بودن ضرایب ماده مشترک دو واکنش (TiCl_4) می‌توانیم به صورت مستقیم بین FeTiO_3 و Ti کسر تناسب بنویسیم. فقط باید موازنه باشد بازده واکنش دوم هم باید در صورت کسر جرم FeTiO_3 (واکنش دهنده واکنش اول) ضرب شود:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{درصد خلوص} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{۱}{۱۰۰} \times \frac{۷۶}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} \times \frac{۴۸ \text{ g}}{۱ \text{ mol Ti}} \times \frac{۱ \text{ mol FeTiO}_3}{۱۵۲ \text{ g FeTiO}_3} \times \frac{۱ \text{ mol FeTiO}_3}{۱۰۰ \text{ g}} \times \frac{۲۵ \text{ g FeTiO}_3}{۱ \text{ kg}} \times ۱۰۰ = \frac{x}{۴۸}$$

$$\Rightarrow x = ۶۰۰ \text{ mgTi}$$

۷۷

کدام مطلب نادرست است؟ (هر هکتار معادل با ده هزار متر مربع است.)

- (۱) در فرایند استخراج فلز مس با استفاده از گیاهان، درصد جرمی فلز در خاکستر گیاه، بیشتر از درصد جرمی آن در خاک است.
 (۲) فلزی که در سطح جهان بیشترین مصرف سالانه را در بین صنایع گوناگون دارد، در طبیعت به صورت کانه هماتیت یافت می‌شود.
 (۳) هر چه واکنش پذیری فلزی بیشتر باشد، استخراج آن از سنگ معدن، دشوارتر خواهد بود. **آهن**
 (۴) اگر در هر هکتار زمین بتوان ۱۰ تن گیاه برداشت کرد، در ۵۰۰ متر مربع، می‌توان 2×10^5 گرم فلز روی پالایش کرد (هر کیلوگرم گیاه، حاوی ۴۰ گرم روی است).



پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): در فرایند گیاه‌پالایی، چون گیاه مورد نظر فلز را جذب می‌کند، پس تغلیظ اتفاق می‌افتد. از طرف دیگر در اثر سوزاندن گیاه، جرم کل گیاه کاهش می‌یابد، ولی مقدار فلز درون آن ثابت است؛ بنابراین درصد جرمی فلز در خاکستر بیشتر از خاک خواهد بود.

گزینه (۲): آهن فلزی است که در سطح جهان، بیشترین مصرف سالانه را دارد. این فلز در طبیعت به صورت کانه هماتیت یافت می‌شود. گزینه (۳): کاملاً درسته!

گزینه (۴): با توجه به مساحت زمین داریم:

$$?g \text{ Zn} = 500 \text{ متر مربع} \times \frac{1 \text{ هکتار}}{10^4 \text{ مترمربع}} \times \frac{10 \text{ تن گیاه}}{1 \text{ هکتار}} \times \frac{1000 \text{ kg گیاه}}{1 \text{ تن گیاه}} \times \frac{40 \text{ g Zn}}{1 \text{ kg گیاه}} = 2 \times 10^4 \text{ g}$$

بنابراین میزان روی در این زمین، $2 \times 10^4 \text{ g}$ است.

توصیف زیر نشان دهنده ویژگی‌های یکی از عناصر جدول تناوبی است. ویژگی ذکر شده در کدام گزینه، در مورد آن درست است؟
 «عنصری با سطح صیقلی که در واکنش با فلزات، الکترون از دست می‌دهد و شمار الکترون‌های ظرفیتی آن برابر شمار الکترون‌های ظرفیتی
 عنصری زردرنگ و جامد از دوره سوم است و آرایش یون پایدار اولین عنصر هم‌دسته با آن به گاز نجیب آرگون می‌رسد.»

(۱) عنصر بعدی آن شبه‌فلزی است که رسانایی الکتریکی کمی دارد. $16S$

(۲) به دسته p و دوره چهارم جدول تعلق دارد.

(۳) عدد اتمی عنصر هم‌گروه آن در دوره بعدی، برابر با ۴۲ است.

(۴) آرایش الکترونی آن مطابق قاعده آفبا به $4s^1$ ختم می‌شود.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

منظور از عنصری با سطح صیقلی که الکترون از دست می‌دهد، عنصری فلزی است و عنصر جامد و زردرنگ دوره سوم، $16S$ است که شمار الکترون‌های ظرفیتی آن برابر ۶ است؛ بنابراین عنصر مورد نظر، عنصری واسطه از گروه ۶ بوده و شمار الکترون‌های ظرفیت آن برابر ۶ است.

از این که آرایش الکترونی یون پایدار و اولین عنصر هم‌دسته و هم‌دوره آن به گاز نجیب آرگون می‌رسد (اسکاندیم، $21Sc$ ، این ویژگی را دارد)، نتیجه می‌گیریم عنصر مجهول در دوره چهارم قرار دارد.

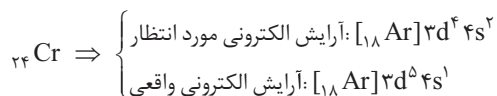
عنصر واسطه دوره چهارم در گروه ۶، همان کروم ($24Cr$) است. بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): عنصر بعد از $24Cr$ در دوره چهارم، فلز منگنز ($25Mn$) است.

گزینه (۲): عنصر مورد نظر به دسته d تعلق دارد.

گزینه (۳): عدد اتمی عنصر گروه ۶ از دوره پنجم، ۶ واحد بیشتر از گاز نجیب دوره چهارم است: $36 + 6 = 42$

گزینه (۴): مطابق قاعده آفبا، آرایش الکترونی کروم باید به $4s^2$ ختم شود اما داده‌های طیف‌سنجی نشان داده است که در بیرونی‌ترین زیرلایه این اتم، ۱ الکترون وجود دارد.



در اثر واکنش ۵ گرم کلسیم کربنات با مقدار کافی محلول هیدروکلریک اسید، به تقریب چند مولکول در فرآورده‌ها تولید می‌شود؟ (۲۰ درصد

نمونه کلسیم کربنات را ناخالصی تشکیل می‌دهد و بازده درصدی واکنش برابر ۶۰ درصد است. $(Ca = 40, O = 16, C = 12 : g \cdot mol^{-1})$

معادله موازنه شود. $CaCO_3(s) + HCl(aq) \rightarrow CaCl_2(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$

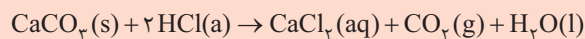
درصد خلوص کلسیم کربنات، ۸۰٪ است.

$$3/01 \times 10^{21} \quad (2)$$

$$2/88 \times 10^{22} \quad (4)$$

$$3/01 \times 10^{22} \quad (1)$$

$$2/88 \times 10^{21} \quad (3)$$



گام اول: موازنه واکنش:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

به ازای مصرف هر مول $CaCO_3$ ، ۲ مول ماده مولکولی (H_2O, CO_2) تولید می‌شود.

گام دوم:

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$\Delta g CaCO_3 \times \frac{1 \text{ mol } CaCO_3}{100 \text{ g } CaCO_3} \times \frac{80 \text{ g خالص}}{100 \text{ g ناخالص}} \times \frac{2 \text{ mol مولکول}}{1 \text{ mol } CaCO_3} \times \frac{6/02 \times 10^{23} \text{ مولکول}}{1 \text{ mol مولکول}} \times \frac{60}{100}$$

بازده واکنش

$$= \frac{5 \times 80 \times 60 \times 2 \times 6/02 \times 10^{23}}{100 \times 100 \times 100} = \frac{48 \times 6/02 \times 10^{23}}{10^3} = 2/88 \times 10^{22} \text{ مولکول}$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

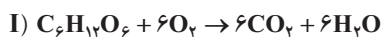
$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد مولکول}}{\text{عدد آووگادرو} \times \text{ضریب}}$$

$CaCO_3$ $CO_2 + H_2O$

$$\Rightarrow \frac{5 \times 80 \times 60}{100 \times 100 \times 100} = \frac{x}{6/02 \times 10^{23} \times 2} \Rightarrow x = \frac{240 \times 6/02 \times 2 \times 10^{23}}{10^4} \approx 2/88 \times 10^{22} \text{ مولکول}$$

۸۰

اگر جرم برابری گلوکز در واکنش‌های سوختن (I) و تخمیر بی‌هوازی آن (II) شرکت کند و اختلاف حجم کربن دی‌اکسید تولیدی در این دو واکنش برابر ۲۰ لیتر باشد، اختلاف جرم الکل و آب تولیدی در آن‌ها چند گرم خواهد بود؟ (بازده واکنش (I) دو برابر واکنش (II) است و حجم مولی گازها در شرایط واکنش، ۲۵ لیتر است، $(H=۱, C=۱۲, O=۱۶ : g.mol^{-1})$

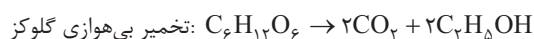
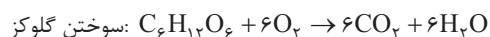


$$۹/۹۲ (۲)$$

$$۴/۱۶ (۱)$$

$$۹/۲۹ (۴)$$

$$۶/۱۴ (۳)$$



جرم و در نتیجه تعداد مول گلوکز اولیه در دو واکنش برابر است. مول اولیه گلوکز را x ، بازده واکنش اول را $۲R$ و بازده واکنش دوم را R در نظر می‌گیریم. اختلاف حجم CO_2 تولیدی در دو واکنش را برابر ۲۰ لیتر قرار می‌دهیم:

$$\text{واکنش اول: } x \text{ mol } C_6H_{12}O_6 \times \frac{6 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{۲۵ \text{ L } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{۲R}{۱۰۰} = (۳xR) \text{ L } CO_2$$

$$\text{واکنش دوم: } x \text{ mol } C_6H_{12}O_6 \times \frac{۲ \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{۲۵ \text{ L } CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{R}{۱۰۰} = (۰/۵ xR) \text{ L } CO_2$$

$$۳xR - ۰/۵xR = ۲۰ \Rightarrow ۲/۵xR = ۲۰ \Rightarrow xR = ۸$$

جرم آب و الکل تولیدشده در دو واکنش را برحسب x و R حساب کرده و اختلاف آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{واکنش اول: } x \text{ mol } C_6H_{12}O_6 \times \frac{6 \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{۱۸ \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} \times \frac{۲R}{۱۰۰} = (۲/۱۶xR) \text{ g } H_2O$$

$$\text{واکنش دوم: } x \text{ mol } C_6H_{12}O_6 \times \frac{۲ \text{ mol } C_2H_5OH}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{۴۶ \text{ g } C_2H_5OH}{1 \text{ mol } C_2H_5OH} \times \frac{R}{۱۰۰} = (۰/۹۲xR) \text{ g } C_2H_5OH$$

$$\text{اختلاف جرم آب و الکل: } (۲/۱۶ - ۰/۹۲) \frac{xR}{۱} = ۹/۹۲ \text{ g}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓