



کد کنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۲/۱۲/۲۴



پاسخنامه آزمون الکترونیکی کنکوری‌های ریاضی - مرحله ۱۳

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	محدثه شیخعلی	کاظم اجاللی - سوگند روشنی	مهرداد اسپیدکار - حمیدرضا ولی‌پور
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده	سجاد صادقی‌زاده - مجید میرزایی	محمدجواد سورچی - نرجس تیمناک مروارید شاه‌حسینی - علیرضا ملک‌حسینی پویا هدایتی‌گودرزی
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد - علی‌ترابی - مهسا بایمانی‌نژاد عالیه میرزایی	فرهنگ امیری - سجاد سیف‌اللهی محمد داوودآبادی‌فراهانی - سعیده محبی
مدیر آزمون: رسول خنجری			

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

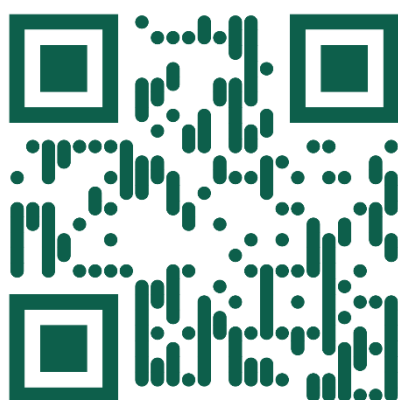


AzmonVIP



دوست مازی من، سلام!

برای اینکه ما نظرت رو در رابطه با آزمون بدونیم نیاز هست که در نظرسنجی شرکت کنی.
برای شرکت در نظرسنجی فقط کافیه روی لینک زیر بزنی یا QR کد زیر رو اسکن کنی تا صفحه
نظرسنجی برات باز بشه!
ممنون که نظرت رو به ما میگی و بهمون برای بهتر شدن آزمون ها کمک می کنی (:



<https://B2n.ir/d79939>

مازی ها؛ میدونین که جلوی هر سوال ما براتون ویژگی و آدرس اون سوال رو میذاریم، حالا
واسه اینکه کامل یادش بگیرید میخوام براتون بگم که چجوری اینا رو براتون چیدیم:

(سطح سوال - سبک سوال - آدرس سوال)
آسان - متوسط - سخت مفهومی - مساله و ... مثلاً: ۱۱۰۱ یعنی فصل ۱ پایه یازدهم



در کنکور سراسری هر سال بیش از یک میلیون نفر شرکت کرده و برای به دست آوردن صندلی دانشگاه‌های برتر با هم رقابت می‌کنند.

یکی از وظایف کنکور، متمایز کردن این افراد از هم می‌باشد. متمایز کردن به این معناست که کنکور باید طوری طراحی شود که تا جای ممکن، دو نفر از داوطلبان رتبه یکسانی کسب نکنند. همین ماجرا باعث می‌شود که طراحان کنکور سراسری مجبور شوند هر سال سؤالات خود را از سال گذشته سخت‌تر طراحی کنند. به همین دلیل هست که هر سال شاهد نوآوری‌های جدیدی در کنکور هستیم.

یکی از ویژگی‌های ثابت کنکور در سالیان اخیر، سخت شدن یک دفعه‌ای بعضی درس‌هاست. به این معنی که در هر سال به صورت تصادفی، تعدادی از دروس سخت‌تر از حد معمول طراحی می‌شوند.

ما در آزمون‌های ماز نیز تا کنکور همین کار را خواهیم کرد و روند طراحی سؤالات ما دقیقاً به همین صورت خواهد بود. در هر آزمون به صورت تصادفی چند درس سخت‌تر از حد معمول طراحی خواهند شد تا بتوانیم شما را به چالش بکشیم و کنکور را دقیق‌تر از هر جای دیگری، برای شما شبیه‌سازی کنیم.

در این آزمون درس **شیمی** سخت‌تر طراحی شد.

۱- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2}$ روی آن نزولی است، کدام است؟

۴ (۴)

۲ - $\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

یکنوایی:

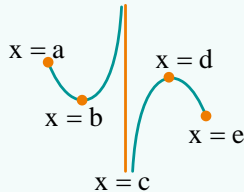
برای تشخیص این که تابع در چه بازه‌ای صعودی یا نزولی است از تابع مشتق می‌گیریم. در هر بازه‌ای که $f'(x) \geq 0$ باشد، تابع صعودی و در هر بازه‌ای که $f'(x) \leq 0$ باشد، تابع نزولی است. به شرطی که درون بازه‌ها، مجانب قائم نداشته باشیم.

$[a, b] \rightarrow f'(x) \leq 0 \rightarrow$ نزولی $f(x)$

$[b, c] \rightarrow f'(x) \geq 0 \rightarrow$ صعودی $f(x)$

$(c, d] \rightarrow f'(x) \geq 0 \rightarrow$ صعودی $f(x)$

$[d, e] \rightarrow f'(x) \leq 0 \rightarrow$ نزولی $f(x)$



از مشتق‌گیری برای تشخیص یکنوایی توابع چندجمله‌ای، گویا، مثلثاتی و ... استفاده می‌کنیم. بهتر است برای تشخیص یکنوایی توابعی مانند براکتی، قدرمطلق و چندضابطه‌ای، از رسم نمودار کمک بگیریم.

پاسخ تشریحی:

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^3 - 2) - 3x^4(x^3 - 2)}{(x^3 - 2)^2} = \frac{4x^6 - 8x^3 - 3x^6}{(x^3 - 2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3(x^3 - 8)}{(x^3 - 2)^2}$$

از تابع مشتق می‌گیریم:

توجه داریم $D_f = \mathbb{R} - \{\sqrt[3]{2}\}$ و $x = \sqrt[3]{2}$ مجانب قائم است.

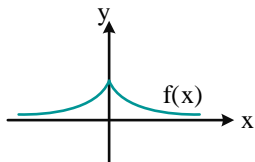
x	$-\infty$	۰	$\sqrt[3]{2}$	۲	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	+
$f(x)$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

مجانب قائم

بزرگ‌ترین بازه‌ای که $f(x)$ روی آن نزولی است $(0, \sqrt[3]{2})$ می‌باشد که طول آن $\sqrt[3]{2}$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۲- نمودار تابع $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. کدام گزینه در مورد وضعیت یکنوایی تابع $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ درست است؟



(۱) روی \mathbb{R} اکیداً صعودی است.

(۲) روی \mathbb{R} اکیداً نزولی است.

(۳) روی $(-\infty, 0]$ اکیداً صعودی و روی $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

(۴) روی $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و روی $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-
$f(x)$	صعودی	نزولی	صعودی

تابع $f(x)$ همواره مثبت است و در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

از تابع $g(x)$ مشتق می‌گیریم تا یکنوایی آن را مشخص کنیم. پس:

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x^2 + 1) - 2xf(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

برای تعیین علامت $g(x)$ دو حالت $x > 0$ و $x < 0$ را در نظر می‌گیریم:

$$1) x \geq 0 \rightarrow \begin{matrix} \text{منفی} & \text{منفی} \\ f(x) > 0 & f'(x) < 0 \end{matrix} \rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)(x^2 + 1) - 2xf(x)}{(x^2 + 1)^2} < 0$$

پس تابع در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

$$x \leq 0 \rightarrow \begin{matrix} \text{مثبت} & \text{مثبت} \\ f(x) > 0 & f'(x) > 0 \end{matrix} \rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)(x^2+1) - 2xf(x)}{(x^2+1)^2} > 0$$

بنابراین تابع در بازه $[-\infty, 0]$ اکیداً صعودی است.

گروه آموزشی ماز

۳- کدام تابع روی دامنه‌اش اکیداً یکنوا می‌باشد؟

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \quad (۴)$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad (۳)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3-1} \quad (۲)$$

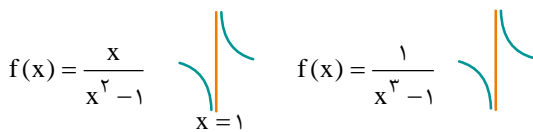
$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

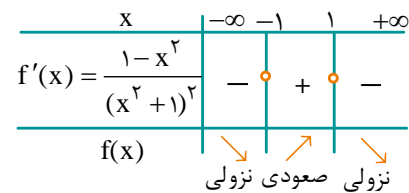
$x=1$ مجانب قائم توابع موجود در گزینه‌های ۱ و ۲ می‌باشد. پس این توابع، اکیداً یکنوا نمی‌باشند. نمودار گزینه‌های ۱ و ۲ در اطراف مجانب قائم ($x=1$) به صورت زیر است.



پس گزینه‌های ۳ و ۴ را بررسی می‌کنیم:

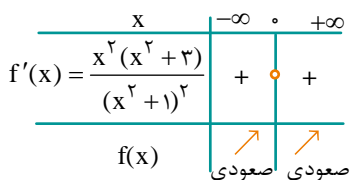
$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2+1) - 2x \times x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

بنابراین تابع موجود در گزینه ۳ اکیداً یکنوا نمی‌باشد.



بنابراین تابع موجود در گزینه ۴ اکیداً صعودی می‌باشد.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x \times x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$



گروه آموزشی ماز

۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & x \geq 1 \\ -x^2 - x & x < 1 \end{cases}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

نقاط بحرانی:

نقطه $x=c$ را بحرانی می‌گوییم هرگاه این نقطه عضو دامنه تابع باشد و مشتق تابع در این نقطه یا صفر باشد و یا وجود نداشته باشد.

$c \in D_f \Rightarrow f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد

با تعریف فوق، تمام نقاطی که در دامنه تابع هستند و تابع در آن نقاط ناپیوسته و یا مشتق‌ناپذیر (نقاط مشتق‌ناپذیر مانند زاویه‌دار، بازگشتی، عطف قائم) باشد، بحرانی هستند. همچنین نقاطی که در آن‌ها، خط مماس، افقی باشد نیز بحرانی هستند. همچنین اگر نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در بازه $[a, b]$ بخواهند نقاط ابتدا و انتهای بازه یعنی $x=a$ و $x=b$ بحرانی هستند.

نکته:

برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع چندضابطه‌ای، نقطه بحرانی تکتک ضابطه‌ها را به دست می‌آوریم. فقط باید نقطه بحرانی در محدوده x قرار داشته باشد. در مرحله بعد، سراغ نقطه مرزی می‌رویم و پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در آن نقطه بررسی می‌کنیم. اگر تابع در نقطه مرزی، ناپیوسته و یا مشتق‌ناپذیر باشد، آن‌گاه نقطه مرزی نیز بحرانی است.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & x > 1 \\ -2x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

چون توابع داده شده در هر ضابطه، چندجمله‌ای هستند، پس نقطه مشتق ناپذیر ندارند و باید مشتق آن‌ها را برابر صفر قرار دهیم.

$$3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2} \text{ در بازه } x > 1 \text{ قرار دارد. پس بحرانی است. اما } x = -\sqrt{2} \text{ بحرانی نمی‌باشد.}$$

$$-2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ در بازه } x < 1 \text{ قرار دارد. پس بحرانی است.}$$

تابع $f(x)$ در $x = 1$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است، پس $x = 1$ نیز بحرانی می‌باشد.

بنابراین در کل تابع $f(x)$ سه نقطه بحرانی دارد. مجموعه نقاط بحرانی $\left\{-\frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}\right\}$

گروه آموزشی ماز

۵- تابع $f(x) = x + |x| - |x^2 + x|$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

تمامی عبارت‌های درون قدرمطلق‌ها را، در یک جدول، تعیین علامت می‌کنیم و تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	-	-	+	+
$x^2 + x$	+	+	-	+

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - x - (x^2 + x) & x \leq -1 \\ x - x + (x^2 + x) & -1 \leq x \leq 0 \\ x + x - (x^2 + x) & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 - x & x \leq -1 \\ x^2 + x & -1 \leq x \leq 0 \\ x - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم و مشتق تک‌تک ضابطه‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم، زیرا توابع موجود در ضابطه‌ها، نقطه مشتق ناپذیری ندارند.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & x < -1 & -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \times \\ 2x + 1 & -1 < x < 0 & 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \checkmark \\ 1 - 2x & x > 0 & 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$$

در بازه $x < -1$ قرار ندارد. در بازه $-1 < x < 0$ قرار دارد. در بازه $x > 0$ قرار دارد.

حال به سراغ نقاط مرزی $x = 0$ و $x = -1$ می‌رویم. تابع در این دو نقطه پیوسته بوده، پس فقط، مشتق‌پذیری را در این ۲ نقطه بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(0) = 1 \quad f'_+(0) = 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow \text{تابع در } x = 0 \text{ مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن غیر صفر است، پس } x = 0 \text{ نقطه بحرانی محسوب نمی‌شود.}$$

$$f'_-(-1) = -2(-1) - 1 = 1 \quad f'_+(-1) = 2(-1) + 1 = -1 \Rightarrow \text{تابع در } x = -1 \text{ مشتق‌پذیر نمی‌باشد، زیرا مشتق‌های راست و چپ در } x = -1 \text{ برابر نیستند. بنابراین } x = -1 \text{ نقطه بحرانی است.}$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای ۳ نقطه بحرانی $\left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۶- تابع $f(x) = 6x^5 + mx^4 + 10x^3$ اکسترم نسبی ندارد. m چند مقدار صحیح را می تواند اختیار کند؟

۲۹ (۴)

۳۰ (۳)

۳۱ (۲)

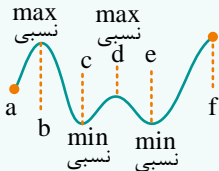
۳۲ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

اکسترم نسبی:

تابع $f(x)$ در $x = c$ ماکزیمم نسبی دارد. اگر یک همسایگی شامل نقطه c (مانند (a, b)) موجود باشد که برای هر $x \in (a, b)$ ، $f(c) \geq f(x)$ باشد. همچنین تابع $f(x)$ در $x = c$ مینیمم نسبی دارد. اگر یک همسایگی شامل نقطه c (مانند (a, b)) موجود باشد که برای هر $x \in (a, b)$ ، $f(c) \leq f(x)$ باشد.



برای تعیین نقاط اکسترم نسبی تابع پیوسته $f(x)$ ، کافی است از تابع مشتق گرفته و بعد مشتق را تعیین علامت کنیم. اگر علامت مشتق از چپ به راست از مثبت به منفی تغییر کند نقطه max نسبی بوده و اگر علامت مشتق از چپ به راست از منفی به مثبت تغییر کند، نقطه min نسبی می باشد. اگر علامت مشتق در یک نقطه تغییر نکند، آن نقطه، اکسترم نسبی نیست.

پاسخ تشریحی:

زمانی تابع $f(x)$ اکسترم نسبی ندارد که $f'(x)$ تغییر علامت ندهد.

$$f'(x) = 30x^4 + 4mx^3 + 30x^2 = 3x^2(15x^2 + 4mx + 15)$$

از تابع $f(x)$ مشتق می گیریم. ببینید:

$$X = 0 \text{ ریشه است. علامت } f'(X) \text{ در } X = 0 \text{ تغییر نمی کند. چرا؟}$$

بنابراین عبارت $15x^2 + 4mx + 15$ نباید تغییر علامت بدهد، پس یا ریشه ندارد ($\Delta < 0$) و یا ریشه مضاعف دارد ($\Delta = 0$). بنابراین:

$$15x^2 + 4mx + 15 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow (4m)^2 - 4 \times 15 \times 15 \leq 0 \Rightarrow 4m^2 - 900 \leq 0 \Rightarrow 4m^2 \leq 900 \xrightarrow{\text{جذر}} |2m| \leq 30$$

$$\Rightarrow -30 \leq 2m \leq 30 \xrightarrow{\div 2} -15 \leq m \leq 15 \Rightarrow \text{تعداد اعداد صحیح در بازه} = 15 - (-15) + 1 = 31$$

گروه آموزشی ماز

۷- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{(x-1)^2}$ ، چند نقطه اکسترم نسبی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

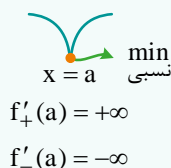
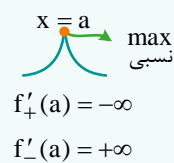
۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

نقاط بازگشتی:

توابع $f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^m}$ (زوج n و فرد m) در $x = a$ نقطه بازگشتی دارند که این نقطه می تواند max نسبی یا min نسبی باشد.



پاسخ تشریحی:

توجه داریم $D_f = \mathbb{R}$. با توجه به درسنامه $x=0$ و $x=1$ اکسترم نسبی هستند. برای پیدا کردن سایر نقاط اکسترم نسبی، از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و $f'(x)$ را تعیین علامت می کنیم.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x-1}} = \frac{2\sqrt[3]{x-1} - 4\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x-1}} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt[3]{x-1} - 4\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x-1} = 2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x-1 = 8x \Rightarrow x = -\frac{1}{7} \\ \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \sqrt[3]{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$



x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$+\infty$
$2\sqrt[3]{x-1}-4\sqrt[3]{x}$	+	0	-	-	-
$\sqrt[3]{x}$	-	-	0	+	+
$\sqrt[3]{x-1}$	-	-	-	-	+
$f'(x)$	+	0	-	+	-

↗ max نسبی
↘ min نسبی
↗ max نسبی

گروه آموزشی ماز

۸- اگر نقطه $A(m, 2)$ max نسبی تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + n + 4 & x \geq 1 \\ x^3 + 3x^2 + n - 5 & x \leq 1 \end{cases}$ باشد، کدام $m+n$ است؟

(۴) ۲ یا -۲۵

(۳) ۱ یا -۲۵

(۲) ۱ یا ۴

(۱) ۱

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم. ببینید:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x & x > 1 \\ 3x^2 + 6x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 4 \\ 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-۲	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+	0	+
$f(x)$	صعودی	انزولی	انزولی	صعودی	انزولی	صعودی

↗ max نسبی
↘ min نسبی
↗ max نسبی
↘ min نسبی

$f(x) = x^3 + 3x^2 + n - 5$ $f(x) = x^3 - 6x^2 + n + 4$

توجه داریم که تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته و مشتق‌ناپذیر است. نقاط به طول $x=1$ و $x=-2$ طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ هستند. پس m می‌تواند ۱ یا -۲ باشد.

$$f(1) = 1 - 6 + n + 4 = 2 \Rightarrow n = 3 \xrightarrow[m=1]{n=3} m+n = 4$$

$$f(-2) = -8 + 12 + n - 5 = 2 \Rightarrow n = 3 \xrightarrow[m=-2]{n=3} m+n = 1$$

گروه آموزشی ماز

۹- به ازای کدام مقدار m ، مجموع کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ در بازه $[-1, 3]$ برابر ۲ است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۵)

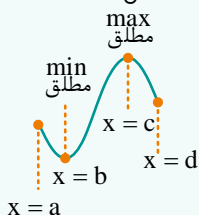
پاسخ: گزینه ۳



نقاط اکسترمم مطلق:



برای به دست آوردن نقاط \max و \min مطلق تابع پیوسته $f(x)$ در بازه $[a, b]$ کافی است نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در این بازه به دست آوریم و عرض نقاط بحرانی که شامل $x=a$ و $x=b$ نیز می‌شود را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنیم. هر کدام بیشتر بود \max مطلق و هر کدام کمتر بود \min مطلق است.





نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{بحرانی} \\ x = 2 & \text{بحرانی} \end{cases}$$

نقاط بحرانی $\{-1, 0, 2, 3\}$

$$f(-1) = m - 4 \Rightarrow \min \text{ مطلق} \quad f(0) = m \Rightarrow \max \text{ مطلق} \quad f(2) = m - 4 \Rightarrow \min \text{ مطلق} \quad f(3) = m \Rightarrow \max \text{ مطلق}$$

$$\min(f) = m - 4 \text{ و } \max(f) = m \Rightarrow \min(f) + \max(f) = 2 \Rightarrow m - 4 + m = 2 \Rightarrow m = 3$$

بنابراین:

گروه آموزشی ماز

۱۰- بیشترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{6\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}$ کدام است؟

$$\frac{5\sqrt{2}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (3)$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (1)$$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲



باز هم نقاط بحرانی:

معمولاً در تعیین نقاط اکسترمم مطلق یا نقاط بحرانی، بازه می‌دهند. اگر بازه در سوال نداشتیم، دامنه تابع را به عنوان بازه برای تعیین نقاط اکسترمم مطلق یا نقاط بحرانی در نظر می‌گیریم.

امان از نقاط بحرانی: اگر مشتق تابع، کسری باشد، ریشه‌های صورت و مخرج مشتق، به شرطی که در دامنه تابع باشند، نقطه بحرانی هستند.



ابتدا دامنه تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x \geq 0 \quad (I)$$

$$6\sqrt{x} - 3\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} \geq 0 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۶}} 6^3 x^3 \geq 3^3 x^3 \xrightarrow{\text{دو طرف بر } x^3 \text{ تقسیم } (x > 0)} 6^3 \geq 3^3 \Rightarrow 64 \geq x \quad (II)$$

$$D_f = (I) \cap (II) \Rightarrow D_f = [0, 64]$$

از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم تا نقاط بحرانی تابع به دست آید.

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{6\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}} = \frac{\frac{4\sqrt{x} - 3\sqrt{x}}{2x}}{2\sqrt{6\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x} - 3\sqrt{x}}{4x\sqrt{6\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}}$$

$$4\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = 0 \Rightarrow 4\sqrt{x} = 3\sqrt{x} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۶}} 4^6 x^3 = 3^6 x^3 \xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر } x^3 \text{ و } x \neq 0} \left(\frac{4}{3}\right)^6 = x$$

$$4x\sqrt{6\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{6\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 64 \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین $x = 0$ ، $x = \left(\frac{4}{3}\right)^6$ و $x = 64$ نقاط بحرانی هستند.

$$f(0) = 0$$

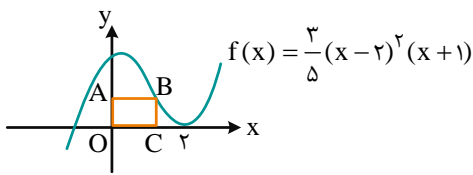
$$f\left(\left(\frac{4}{3}\right)^6\right) = \sqrt{6 \times \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^6}} - 3 \times \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^6} = \sqrt{6 \times \frac{16}{9}} - 3 \times \frac{64}{27} = \sqrt{\frac{32}{3}} - \frac{64}{9} = \sqrt{\frac{32}{9}} - \frac{64}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{64}{9}$$

$$f(64) = \sqrt{6 \times \sqrt{64}} - 3 \times \sqrt{64} = \sqrt{6 \times 4} - 3 \times 8 = 0$$

گروه آموزشی ماز



۱۱- مستطیلی مطابق شکل زیر، طوری قرار گرفته است که یک رأس آن روی نمودار تابع $f(x)$ و دو ضلع آن، روی محورهای مختصات قرار دارد. کدام گزینه در مورد محیط مستطیل درست است؟



- (۱) کمترین مقدار آن $\frac{۱۶۶}{۴۵}$ است.
- (۲) بیشترین مقدار آن $\frac{۱۶۶}{۴۵}$ است.
- (۳) کمترین مقدار آن $\frac{۴۷}{۹}$ است.
- (۴) بیشترین مقدار آن $\frac{۴۷}{۹}$ است.

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

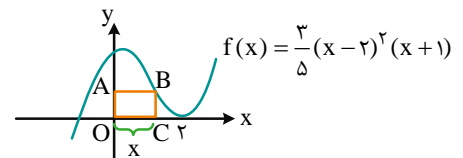
اگر طول نقطه B را x بنامیم، عرض آن $\frac{۳}{۵}(x-2)^2(x+1)$ می شود. پس محیط مستطیل برابر است با:

$$P = 2(x + \frac{3}{5}(x-2)^2(x+1)) \quad 0 \leq x \leq 2$$

بنابراین محیط مستطیل به صورت $P(x) = 2x + \frac{6}{5}(x-2)^2(x+1)$ است. برای محاسبه بیشترین با کمترین مقدار محیط، از $P(x)$ مشتق می گیریم. ببینید:

$$P(x) = 2x + \frac{6}{5}(x^3 - 3x^2 + 4) \Rightarrow P'(x) = \frac{18}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 2 \Rightarrow P'(x) = 0 \Rightarrow \frac{18}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 2 = 0 \quad \times 5$$

$$18x^2 - 36x + 10 = 0 \xrightarrow{\div 2} 9x^2 - 18x + 5 = 0 \Rightarrow (3x-1)(3x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$



$$P(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{6}{5}(\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + 4) = \frac{46}{9} \quad P(\frac{5}{3}) = \frac{10}{3} + \frac{6}{5}(\frac{125}{27} - \frac{25}{3} + 4) = \frac{166}{45}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- خط $y = mx + \frac{1}{4}$ نمودار تابع $f(x) = x^2 - x$ را در دو نقطه A و B قطع می کند. به ازای کدام مقدار m، طول پاره خط AB کمترین مقدار ممکن می شود؟

$$-\frac{1}{2} \quad (۴)$$

$$\sqrt{2} - 1 \quad (۳)$$

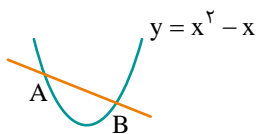
$$2 - \sqrt{2} \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

(سخت - ترکیبی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:



شکل فرضی زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 - x = mx + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - (m+1)x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = (m+1)^2 + 1$$

ابتدا معادله تلاقی خط و منحنی را می نویسیم:

$$|x_A - x_B| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow |x_A - x_B| = \frac{\sqrt{(m+1)^2 + 1}}{1} \Rightarrow |x_A - x_B| = \sqrt{(m+1)^2 + 1}$$

اختلاف ریشه های معادله را به دست می آوریم:

حال اختلاف عرض دو نقطه را به دست می آوریم:

$$|y_A - y_B| = \left| mx_A + \frac{1}{4} - (mx_B + \frac{1}{4}) \right| \Rightarrow |y_A - y_B| = |m| |x_A - x_B| \Rightarrow |y_A - y_B| = |m| \sqrt{(m+1)^2 + 1}$$

اکنون فاصله ۲ نقطه A و B را محاسبه می کنیم:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(m^2 + 2m + 2) + m^2(m^2 + 2m + 2)} = \sqrt{(m^2 + 2m + 2)(m^2 + 1)}$$

زمانی d کمترین مقدار می شود که عبارت زیر را دیکال \min شود، عبارت زیر را دیکال k می نامیم. ببینید:

$$k = (m^2 + 2m + 2)(m^2 + 1) \Rightarrow k' = (2m + 2)(m^2 + 1) + 2m(2m + 2) \Rightarrow k' = 4m^3 + 6m^2 + 6m + 2$$

$$k' = 0 \xrightarrow{\div 2} 2m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0 \Rightarrow (2m + 1)(m^2 + m + 1) = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

بنابراین به ازای $m = -\frac{1}{2}$ طول پاره خط d کمترین مقدار ممکن می شود.

گروه آموزشی ماز

۱۳- جهت تقریر نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}(35 - x^3)$ در بازه (a, b) به سمت بالا است. بیشترین مقدار ممکن برای $b - a$ کدام است؟

۳ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

۲ (۲)

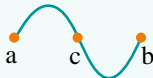
۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

تقریر تابع:

اگر تابع $f(x)$ در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد، در این صورت برای تعیین وضعیت تقریر تابع در این فاصله، مشتق دوم را محاسبه و تعیین علامت می کنیم. در هر فاصله ای که تقریر تابع $f(x)$ رو به بالا باشد، $f''(x) > 0$ و در هر فاصله ای که تقریر تابع $f(x)$ رو به پایین باشد، $f''(x) < 0$ است.



$f''(x) < 0 \Rightarrow$ تقریر تابع در بازه (a, c) رو به پایین است.

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ تقریر تابع در بازه (c, b) رو به بالا است.

پاسخ تشریحی:

مشتق دوم تابع $f(x)$ را به دست آورده و آن را تعیین علامت می کنیم:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(35 - x^3) = 35x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{10}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{35}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{\frac{7}{3}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{70}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{70}{9}x^{\frac{4}{3}}$$

$$f''(x) = -\frac{70}{9}(x^{-\frac{5}{3}} + x^{\frac{4}{3}}) = -\frac{70}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} + \sqrt[3]{x^4}\right) = -\frac{70}{9}\left(\frac{1+x^3}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$1+x^3$	-	0	+	+
$\sqrt[3]{x^5}$	-	-	0	+
$f''(x) = -\frac{70}{9}\left(\frac{1+x^3}{\sqrt[3]{x^5}}\right)$	-	0	موجود نیست +	-
$f(x)$ وضعیت تقریر تابع	∪	∪	∪	∪

بنابراین بزرگترین بازه ای که در آن تقریر تابع $f(x)$ رو به بالاست، بازه $(-1, 0)$ می باشد که طول آن $1 - (-1) = 2$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۴- تابع $f(x) = \cos^2 x + 2 \cos x$ در بازه $(0, 2\pi)$ چند نقطه عطف دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

نقطه عطف:

نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف تابع $f(x)$ می گوئیم هرگاه:

(۱) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

(۲) در این نقطه بتوان خط مماس بر تابع رسم کرد. (خط مماس از تابع می گذرد).

(۳) جهت تقریر در این نقطه عوض شود.

عطف نیست. زیرا نمی توان در این نقطه یک خط بر منحنی مماس رسم کرد.



عطف است.

$x = a$



$x = a$

عطف نیست. زیرا تابع در این نقطه پیوسته نیست.



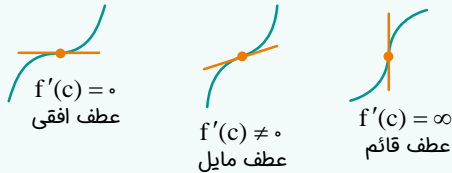
$x = a$



$x = a$

عطف نیست. زیرا تقریر تابع در این نقطه عوض نشده است.

انواع نقطه عطف:



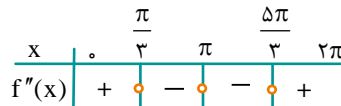
مشتق دوم در نقطه عطف یا صفر است و یا وجود ندارد. برای به دست آوردن نقطه عطف، مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم. اگر علامت مشتق دوم در نقطه‌ای عوض شود، آن نقطه عطف است در صورتی که شرایط نقطه عطف در آن نقطه رعایت شود.

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = \cos^3 x + 2 \cos x \Rightarrow f'(x) = \underbrace{-3 \cos^2 x \sin x}_{\sin 2x} - 2 \sin x \Rightarrow f'(x) = -\sin 2x - 2 \sin x$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x - 2 \cos x \Rightarrow f''(x) = -2(\cos 2x + \cos x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\cos 2x}_{2 \cos^2 x - 1} + \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$



برای تعیین علامت $f''(x)$ از عددگذاری استفاده می‌کنیم:

در نقاط به طول $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$ جهت تقعر تابع عوض می‌شود و تابع در این نقاط پیوسته و مشتق پذیر است و شرایط رسم خط مماس بر تابع در این نقاط وجود دارد، پس تابع دو نقطه عطف دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۵- به ازای کدام مقدار m تابع $f(x) = \frac{x-|x|+m}{|x|+1}$ نقطه عطف دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول:

تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{2x+m}{-x+1} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{-m}{(x+1)^2} & x > 0 \\ \frac{2+m}{(-x+1)^2} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \frac{2m}{(x+1)^3} & x > 0 \\ \frac{2(2+m)}{(-x+1)^3} & x < 0 \end{cases}$$

تنها نقطه‌ای که $f''(x)$ می‌تواند در آن تغییر علامت بدهد، فقط $x=0$ است. بنابراین چون در $f''(x)$ مخرج کسرها مثبت است، پس باید صورت کسرها مختلف‌العلامت باشند. پس:

از طرف دیگر، باید بتوانیم در $x=0$ خط مماس رسم کنیم، یعنی تابع باید در این نقطه مشتق پذیر باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= 2+m \\ f'_+(0) &= -m \end{aligned} \Rightarrow f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow 2+m = -m \Rightarrow m = -1$$

روش دوم:

با توجه به تابع دوضابطه‌ای $f(x)$ ، در می‌یابیم که هر دو ضابطه، تابع هموگرافیک را نشان می‌دهند و تابع هموگرافیک، نقطه عطف ندارد، پس فقط، نقطه مرزی $x=0$ می‌تواند عطف باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۶- نمودار تابع $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4x$ در همسایگی نقطه $x=-1$ به کدام گزینه شبیه است؟



(آسان - مفهومی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

تحلیل نقطه‌ای در نمودار:

اگر بخواهیم وضعیت نمودار تابع را در نقطه‌ای مانند $x = a$ بررسی کنیم باید $f'(a)$ و $f''(a)$ را محاسبه کنیم تا شکل تقریبی نمودار در $x = a$ مشخص شود.

پاسخ تشریحی:

$$f'(x) = 8x^4 - 12x^3 - 4 \Rightarrow f'(-1) = -8 + 12 - 4 = 0$$

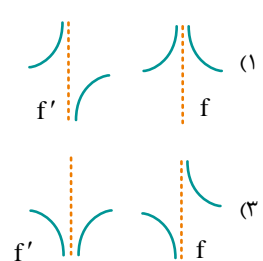
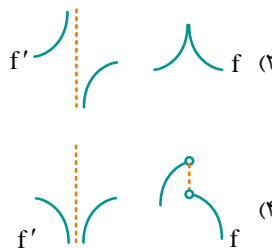
$$f''(x) = 32x^3 - 36x^2 \Rightarrow f''(-1) = -32 - 36 = -68$$

پس شیب خط مماس بر نمودار در $x = -1$ برابر صفر است و تقعر نمودار در $x = -1$ رو به بالا می‌باشد. بنابراین نمودار تابع در این نقطه

به صورت  می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۷- در کدام مورد، نمودار f و f' در همسایگی نقطه‌ای مانند $x = a$ درست رسم نشده است؟



(آسان - مفهومی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم تعبیر هندسی مشتق همان شیب خط مماس بر منحنی تابع است. در هر گزینه می‌توان شیب خط مماس بر f را با نمودار f' مطابقت داد اما در گزینه ۴ شیب خطوط مماس بر نمودار f با نمودار f' تطابق ندارد. در شاخه سمت چپ نمودار f ، نمودار تابع صعودی اکید بوده و چون تقعر نمودار رو به پایین است شیب خطوط مماس رفته رفته کم می‌شود ولی علامت مثبت دارد (در صورتی که در همسایگی چپ این نقطه در نمودار f' ، به $-\infty$ میل می‌کند و با نمودار f تطابق ندارد. پس می‌توان گفت گزینه ۴ پاسخ تست می‌باشد. (به طریق مشابه می‌توان شیب نمودار f را با نمودار f' در سایر گزینه‌ها تطابق داد.)

گروه آموزشی ماز

۱۸- نقطه برخورد مجانب‌های تابع هموگرافیک $f(x) = ax + b + \frac{2x^2 + 3}{x-1}$ روی نیمساز ربع اول و سوم مختصات است. مقدار $f(0)$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

تابع هموگرافیک

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ و $c \neq 0$ را تابع هموگرافیک می‌گوییم. برای رسم نمودار تابع، مجانب‌های افقی و قائم را به دست می‌آوریم و با مشتق‌گیری، وضعیت یکنوایی تابع را مشخص می‌کنیم. برای رسم دقیق‌تر از نقاط کمکی نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow \begin{cases} cx+d=0 \Rightarrow x=-\frac{d}{c} & \text{مجانب قائم} \Rightarrow f'(x) = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} \\ y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y = \frac{a}{c} & \text{مجانب افقی} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \end{cases}$$



پاسخ تشریحی:

ابتدا تابع را مرتب می کنیم. ببینید:

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x-1) + 2x^2 + 3}{x-1} = \frac{ax^2 - ax + bx - b + 2x^2 + 3}{x-1} \Rightarrow f(x) = \frac{(a+2)x^2 + (b-a)x + 3-b}{x-1}$$

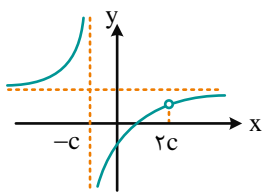
$$a+2=0 \Rightarrow a=-2$$

چون تابع هموگرافیک است، پس ضریب x^2 در صورت باید صفر شود. بنابراین:

مجانِب قائم تابع خط $x=1$ است و مجانب افقی خط $y=b-a$ یعنی $y=b+2$ است. محل برخورد مجانب ها $W(1, b+2)$ است که چون روی نیمساز ربع اول $b+2=1 \Rightarrow b=-1$ و سوم قرار دارد، پس:

$$f(x) = \frac{x+4}{x-1} \Rightarrow f(0) = -4$$

گروه آموزشی ماز



۱۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 7x + b}{x^2 - ax - 2}$ در شکل مقابل رسم شده است. تابع $g(x) = xf(x)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

تابع $f(x)$ در $x=2c$ و $x=-c$ تعریف نمی شود. (مجانِب قائم $x=-c$ و $x=2c$ مجانب قائم است) بنابراین مخرج $f(x)$ به صورت $(x+c)(x-2c)$ است. بنابراین:

$$x^2 - ax - 2 = x^2 - cx - 2c^2 \Rightarrow \begin{cases} -2c^2 = -2 \Rightarrow c = 1 \\ -a = -c \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار $c=1$ نمی تواند باشد.

تابع $f(x)$ در $x=2c$ تعریف نمی شود اما حد دارد، پس $x=2c$ علاوه بر آن که ریشه مخرج $f(x)$ است، ریشه صورت نیز می باشد. پس:

$$x=2c=2 \Rightarrow 3 \times 2^2 - 7 \times 2 + b = 0 \Rightarrow 12 - 14 + b = 0 \Rightarrow b = 2$$

صورت کسر را هم صفر می کند

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 2} = \frac{(3x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ برابر است با:

$$g(x) = xf(x) \Rightarrow g(x) = \frac{3x^2 - x}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{(6x-1)(x+1) - (3x^2 - x)}{(x+1)^2}$$

ضابطه تابع $g(x)$ برابر است با:

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{6x^2 + 6x - x - 1 - 3x^2 + x}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{3x^2 + 6x - 1}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 1 = 0$$

معادله بالا دو جواب دارد، پس $g'(x)$ در دو نقطه تغییر علامت می دهد. بنابراین تابع $g(x)$ دو نقطه اکسترمم نسبی دارد.

گروه آموزشی ماز

۲۰- معادله $x^3 - 3x|x| = m$ سه جواب حقیقی و متمایز دارد. حدود m کدام است؟

$$-3 \leq m \leq 3 \quad (4)$$

$$-4 < m < 4 \quad (3)$$

$$0 \leq m \leq 2 \quad (2)$$

$$-1 \leq m \leq 1 \quad (1)$$

(سخت - ترکیبی / مفهومی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

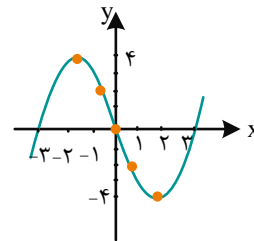
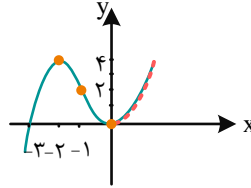
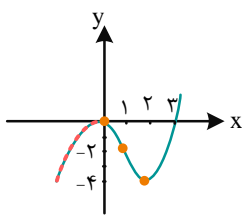
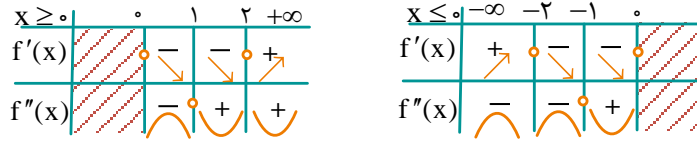
تابع $f(x)$ را به صورت دوضابطه ای می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 0 \\ x^3 + 3x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x \geq 0 \\ 3x^2 + 6x & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & x > 0 \\ 6x + 6 & x < 0 \end{cases}$$

$x=2$ $x=1$
 $x=-2, x=0$ $x=-1$

نمودار هر کدام از ۲ ضابطه را رسم می‌کنیم و بعد نمودار $f(x)$ را می‌کشیم:



بنابراین نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

خط $y = m$ با شرط $-4 < m < 4$ در ۳ نقطه نمودار تابع $f(x)$ را قطع می‌کند و در نتیجه معادله $x^3 - 3x|x| = m$ سه جواب متمایز دارد.

گروه آموزشی ماز

- ۲۱- اگر بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ در رابطه $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ صدق کنند و $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 6$ باشد، حاصل $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ کدام است؟
- (۱) -43 (۲) $-55/5$ (۳) 107 (۴) صفر

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

ضرب داخلی بردار:

ضرب داخلی ۲ بردار \vec{a} و \vec{b} برابر یک عدد می‌شود و از ۲ رابطه به دست می‌آید:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{روش اول}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad \text{روش دوم}$$

زاویه بین بردارهای \vec{a} و \vec{b}

پاسخ تشریحی:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-\vec{c}) \cdot (-\vec{c}) \Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2$$

$$4^2 + 5^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 6^2 \Rightarrow 41 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 36 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{5}{2}$$

حال به محاسبه $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ می‌پردازیم:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 4 + 2(-\frac{5}{2}) - 3 \times 25 = 4 - 5 - 75 = -76$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- شرط لازم و کافی برای آن که دو بردار ناصفر \vec{a} و \vec{b} هم عمود باشند، این است که $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ باشد.

- اگر \vec{a}' تصویر بردار \vec{a} روی بردار \vec{b} باشد، همواره $\vec{a} \cdot \vec{a}' \geq 0$ است.

- اگر $\vec{a} = (2, -1, m)$ و $\vec{b} = (m+1, 3, 4)$ باشد، به ازای دو مقدار حقیقی m حاصل $(m\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ همواره برابر صفر است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

بررسی موارد:

گزاره اول: این گزاره درست است، زیرا:

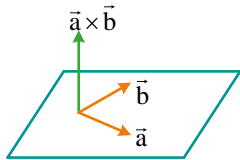
اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ باشد، آن گاه:

گزاره دوم: این گزاره درست است، زیرا:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \xrightarrow{\substack{|\vec{a}| \neq 0 \\ |\vec{b}| \neq 0}} \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a}' = |\vec{a}| |\vec{a}'| \cos \theta \xrightarrow{|\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta} \vec{a} \cdot \vec{a}' = |\vec{a}'|^2 \geq 0$$

گزاره سوم: این گزاره نادرست است، زیرا $k_1 \vec{a} \pm k_2 \vec{b}$ همواره بر $m\vec{a} \times \vec{b}$ عمود است. پس به ازای بی‌شمار عدد حقیقی و غیرصفر m این رابطه برقرار است.



گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر $3x + 2y - 4z = 27$ و عبارت $9x^2 + y^2 + 4z^2$ کمترین مقدار خود را داشته باشد، زاویه بین بردارهای $\vec{m} = (x+z, y-6, -2)$ و

$\vec{n} = (x+1, z+1, 0)$ کدام است؟

(۱) 45° (۲) 60° (۳) 120° (۴) 150°

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

زاویه بین دو بردار:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

نامساوی کوشی-شوارتز

پاسخ تشریحی:

بردارهای $\vec{a} = (3x, y, 2z)$ و $\vec{b} = (1, 2, -2)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به نامساوی کوشی-شوارتز چون عبارت $9x^2 + y^2 + 4z^2$ حداقل مقدار خود را دارد، پس باید بردارهای \vec{a} و \vec{b} با هم موازی باشند، بنابراین:

$$\frac{3x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{2z}{-2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t}{3} \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow 3\left(\frac{t}{3}\right) + 2(2t) - 4(-t) = 27 \Rightarrow 9t = 27 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \\ z = -3 \end{cases}$$

حال بردارهای \vec{m} و \vec{n} را می‌نویسیم و زاویه بین دو بردار را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{m} = (-2, 0, -2) \quad \vec{n} = (2, -2, 0) \Rightarrow \cos \theta = \frac{-4 + 0 + 0}{\sqrt{4+0+4} \times \sqrt{4+4+0}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

پس زاویه بین دو بردار \vec{m} و \vec{n} برابر 120° است.

۲۴- اگر تصویر قائم بردار $\vec{a} = (3, -2, 1)$ روی برداری که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده مساوی می‌سازد، بردار \vec{a}' باشد، جمع مولفه‌های بردار \vec{a}' کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

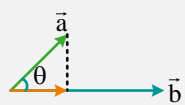
۶ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

تصویر بردار \vec{a} روی امتداد بردار \vec{b} :



$$\begin{cases} \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\ |\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \theta \end{cases}$$

پاسخ تشریحی:

فرم کلی برداری که با جهت مثبت محورهای مختصات، زوایای حاده مساوی می‌سازد به صورت $\vec{b} = (x, x, x)$ ($x > 0$) است.

$$\vec{a} = (3, -2, 1) \Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3x - 2x + x}{3x^2} (x, x, x) \Rightarrow \vec{a}' = \frac{2}{3x} (x, x, x) \Rightarrow \vec{a}' = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\vec{b} = (x, x, x) \Rightarrow \vec{a}' = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \text{جمع مولفه‌های بردار } \vec{a}' = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاعی که بردارهای $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ و $\vec{a} + \vec{c}$ اضلاع آن هستند، کدام است؟

$4\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

مساحت متوازی‌الاضلاع:

مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار \vec{m} و \vec{n} ساخته می‌شود، از رابطه $S = |\vec{m} \times \vec{n}|$ به دست می‌آید.

$$S = |\vec{m} \times \vec{n}|$$

ضرب خارجی دو بردار:

ضرب خارجی ۲ بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{حاصل این دترمینان همان بردار ضرب خارجی می‌باشد.}$$

پاسخ تشریحی:

بردار $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ را ابتدا محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{j} \Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = (0, -2, 0) \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{k} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (0, 0, -2)$$

بردار $\vec{a} + \vec{c}$ را هم محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{i} + \vec{k} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = (2, -2, 1)$$

حال مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار $\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ و $\vec{e} = \vec{a} + \vec{c}$ را محاسبه می‌کنیم. ببینید:

$$\vec{d} \times \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow S = |\vec{d} \times \vec{e}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر بردارهای غیر صفر \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} در رابطه $\vec{a} \times \vec{d} = \vec{c} \times \vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{d} \times \vec{b}$ صدق کنند، کدام دو بردار الزاماً موازی هستند؟

- (۱) $\vec{b} + \vec{c}$ و $\vec{a} + \vec{d}$ (۲) $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{c} + \vec{d}$ (۳) $\vec{a} + \vec{c}$ و $\vec{b} + \vec{d}$ (۴) $\vec{b} + \vec{c}$ و $\vec{a} + \vec{d}$

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

ضرب خارجی:

ضرب خارجی دو بردار \vec{a} و \vec{b} خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

دو بردار موازی:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

اگر ضرب خارجی دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} برابر صفر باشد، یعنی دو بردار موازی‌اند و بالعکس.

پاسخ تشریحی:

کافی است ضرب خارجی بردارهای داده شده را به دست آوریم. ضرب خارجی هر دو برداری که صفر شود یعنی دو بردار با هم موازی‌اند.

$$۱) (\vec{a} + \vec{d}) \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{d} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{c} \neq \vec{0}$$

$$۲) (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d} = \vec{0}$$

$$۳) (\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{d} \neq \vec{0}$$

$$۴) (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d} + \vec{c} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{d} \neq \vec{0}$$

گروه آموزشی ماز

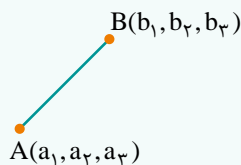
۲۷- در مثلثی با رأس $A(1, 2, -1)$ و $B(3, 4, 2)$ و $C(-1, 0, 3)$ طول ارتفاع وارد بر ضلع BC چند برابر معکوس $\sqrt{33}$ است؟

- (۱) ۱۴ (۲) $14\sqrt{2}$ (۳) ۷ (۴) $3\sqrt{2}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

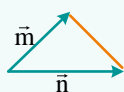
پاسخ: گزینه ۲

فاصله ۲ نقطه A و B :



$$AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

مساحت مثلث:



مساحت مثلث ساخته شده توسط ۲ بردار \vec{m} و \vec{n} از رابطه $S = \frac{1}{2} |\vec{m} \times \vec{n}|$ به دست می‌آید:

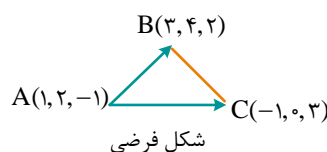
$$S = \frac{1}{2} |\vec{m} \times \vec{n}|$$

پاسخ تشریحی:

بردارهای \vec{AB} و \vec{AC} را تشکیل می‌دهیم. ببینید:

$$\vec{AB} = (2, 2, 3) \quad \vec{AC} = (-2, -2, 4) \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 14\vec{i} - 14\vec{j}$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \times 14\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$



شکل فرضی

حال طول ضلع BC را محاسبه می‌کنیم:

$$BC = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+16+1} = \sqrt{33}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow 7\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times AH \times \sqrt{33} \Rightarrow AH = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{33}} \Rightarrow AH = 14\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{33}} \Rightarrow \text{جواب} = 14\sqrt{2}$$

۲۸- اگر برای دو بردار \vec{a} و \vec{b} رابطه $\sqrt{3}\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}) + 2|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{3}\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b})$ برقرار باشد، زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} کدام است؟

(۴) 135°

(۳) 60°

(۲) 45°

(۱) 30°

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

یک پند برداری:

بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بر هر دو بردار \vec{a} و \vec{b} عمود است، در نتیجه: $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ و $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

پاسخ تشریحی:

رابطه داده شده را ساده می‌کنیم. ببینید:

$$\sqrt{3}\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}) + 2|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{3}\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b}) \Rightarrow \sqrt{3}(\underbrace{\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{=0} + \vec{b} \cdot \vec{a}) + 2|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{3}(\underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}_{=0} + \vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\Rightarrow 2|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{3}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \Rightarrow \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{|a||b|\sin\theta}{|a||b|\cos\theta} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- اگر $|\vec{a}| = 2$ و بردار \vec{b} به صورت $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ باشد، حاصل $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ چند برابر حاصل $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2$ است؟

(۴) $\frac{4}{9}$

(۳) $\frac{18}{13}$

(۲) $\frac{12}{13}$

(۱) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

این شما و این بردارها:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$$

پاسخ تشریحی:

$$\vec{b} = (2, -2, 1) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

اندازه بردار \vec{b} برابر است با:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = 2^2 \times 3^2 = 36$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 2(2^2 + 3^2) = 26$$

$$\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2} = \frac{36}{26} = \frac{18}{13}$$

بنابراین، جواب برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} بردارهایی در فضای سه بعدی باشند، به طوری که حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط این سه بردار، برابر ۱۰ باشد، حجم متوازی السطوحی که توسط بردارهای $2\vec{a} - \vec{b}$ ، $\vec{a} + 2\vec{c}$ و $3\vec{a} + \vec{b}$ ساخته می‌شود کدام است؟

(۴) ۲۱۰

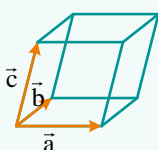
(۳) ۱۴۰

(۲) ۷۰

(۱) ۳۵

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

حجم متوازی السطوح:



حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} برابر است با:

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

پاسخ تشریحی:

طبق گفته سوال، حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط بردارهای \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} برابر 10 است. یعنی:

حال حجم متوازی السطوح ساخته شده توسط سه بردار $\vec{a} + 2\vec{c}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$ و $3\vec{a} + \vec{b}$ را محاسبه می کنیم. بنابراین:

$$V' = |(\vec{a} + 2\vec{c}) \cdot ((\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}))| \Rightarrow V' = |(\vec{a} + 2\vec{c}) \cdot (3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b})|$$

$$\Rightarrow V' = |(\vec{a} + 2\vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{a})| = |\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + 2\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) - 6\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) - 12\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})|$$

$$\Rightarrow V' = |0 + 20 - 6(0) - 12(10)| = |20 - 120| = 100$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- دو مربع لاتین متعامد مرتبه‌ی سوم A و B را در نظر گرفته و درایه‌های نظیر آن‌ها را در هم ضرب کرده و در مربع جدید و خالی C قرار می دهیم. میانگین درایه‌های مربع C کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

دو مربع لاتین متعامد مثال می زنیم که درایه‌های آن‌ها به طور نظیر کنار هم قرار بگیرند، به اعداد زیر می رسیم:

$$\begin{matrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{matrix} \Rightarrow \text{درایه‌های } C \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{matrix} \Rightarrow \bar{x} = \frac{36}{9} = 4$$

گروه آموزشی ماز

برسیم، x کدام است؟

			m
n			
			n

به مربع لاتین

			۱
۲			
		۴	
	x		

۳۲- اگر با اعمال جایگشت روی مربع لاتین

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

فرض کنید n' درایه‌ای از مربع لاتین اولیه باشد:

			۱
۲			
n'		۴	
	x		n'

\Rightarrow

			m
n			
			n

با توجه به مربع لاتین اولیه، n' نمی تواند اعداد ۱، ۲ و ۴ را اختیار کند پس $n' = 3$ است. مربع را تکمیل می کنیم. ببینید:

۴	۲	۳	۱
۲	۳	۱	۴
۳	۱	۴	۲
۱	x	۲	۳

گروه آموزشی ماز

۳۳- با جایگشت حروف کلمه (synonyms) چند کلمه هشت حرفی می توان نوشت که s ها کنار هم باشند و n ها کنار هم نباشند یا n ها کنار هم باشند و s ها کنار هم نباشند؟

۳۱۰۰ (۴)

۲۵۴۰ (۳)

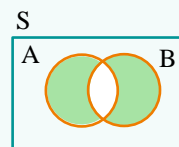
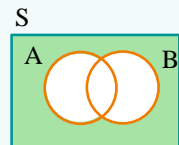
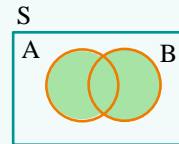
۲۱۶۰ (۲)

۱۸۰۰ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

اصل شمول و عدم شمول:



$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ تعداد عضوایی از S که حداقل به یکی از ۲ مجموعه‌ی A و B تعلق دارند.

$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B|$ تعداد عضوایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B قرار ندارند.

$|A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ تعداد عضوایی از S که فقط در یکی از ۲ مجموعه‌ی A و B قرار دارند.

پاسخ شش‌پایه

توجه کنید در بین ۸ حرف، ۲ حرف s، ۲ حرف n و ۲ حرف y وجود دارد. بنابراین:

$|A| = \frac{7!}{2! \times 2!} = ۱۲۶۰$ تعداد حالاتی که ۲ حرف s کنار هم باشند.

s s y n o m
y n

$|B| = \frac{7!}{2! \times 2!} = ۱۲۶۰$ تعداد حالاتی که ۲ حرف n کنار هم باشند.

n n s y o m
s y

$|A \cap B| = \frac{6!}{2!} = ۳۶۰$ تعداد حالاتی که هم دو حرف s و هم دو حرف n کنار هم باشند.

s s n n y o m
y

پاسخ سؤال $|A \Delta B|$ است. ببینید:

جواب $= |A| + |B| - 2|A \cap B| = ۱۲۶۰ + ۱۲۶۰ - 2 \times ۳۶۰ = ۱۸۰۰$

گروه آموزشی ماز

۳۴- چهار فیلم بایبلون، منو، بعد از خورشید و شناگران را به چند حالت می توان در ۵ سینما $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ اکران کرد به طوری که منو در سینما شماره ۳ و شناگران در سینما شماره ۵ اکران نشوند؟

۶۰۰ (۴)

۵۰۰ (۳)

۴۲۵ (۲)

۴۰۰ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ شش‌پایه

طبق اصل شمول و عدم شمول، تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

(شناگران در سینما شماره ۵ اکران شود \cup منو در سینما شماره ۳ اکران شود) - کل حالات

کل حالات مشابه تعداد توابع تعریف شده از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به مجموعه‌ی ۵ عضوی است که برابر $۵^۴$ یا همان ۶۲۵ است.

$|A| = ۵ \times ۱ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$ تعداد حالاتی که فیلم منو در سینما شماره ۳ اکران شود

$|B| = ۱ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$ تعداد حالاتی که فیلم شناگران در سینما شماره ۵ اکران شود.

$|A \cap B| = ۱ \times ۱ \times ۵ \times ۵ = ۲۵$ تعداد حالاتی که فیلم منو در سینما شماره ۳ و فیلم شناگران در سینما شماره ۵ اکران شوند.

بنابراین جواب برابر است با:

جواب $= |S| - |A \cup B| = ۶۲۵ - (۱۲۵ + ۱۲۵ - ۲۵) = ۴۰۰$

۳۵- ۵ جایزه متمایز را به چند حالت بین نازنین، محدثه و مریم می‌توان تقسیم کرد به طوری که به هر نفر حداقل یک جایزه برسد و جایزه آخر در دست کسی باشد که جایزه اول به او تعلق گرفته است؟

۲۱۰ (۴)

۱۵۰ (۳)

۳۹ (۲)

۳۶ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

تابع:

تعداد توابع تعریف شده از مجموعه m عضوی A به مجموعه n عضوی B ($f: A \rightarrow B$) برابر n^m است.

تابع پوشا:

زمانی می‌توان از مجموعه m عضوی A به مجموعه n عضوی B تابعی پوشا تعریف کرد که $m \geq n$ باشد و اگر $m < n$ باشد هیچ تابع پوشایی از A به B وجود ندارد.

محاسبه‌ی تعداد توابع پوشا از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه 3 عضوی:

$$3^m - 3 \times 2^m + 3$$

پاسخ تشریحی:

مسئله‌ی فوق مشابه تعداد توابع پوشا از یک مجموعه 5 عضوی $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ به مجموعه 3 عضوی $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ است که در آن $f(a_1) = f(a_5)$ است.

می‌توانیم a_5 را از دامنه حذف کنیم. بنابراین:

$$A' = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$3^4 - 3 \times 2^4 + 3 = 81 - 48 + 3 = 36$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- علی، صادق، نیما و امیر در یک شبکه اجتماعی عضو هستند. اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دیگری نیست. در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد به طوری که امیر و علی حتماً دوستی داشته باشند؟

۶۰ (۴)

۵۰ (۳)

۴۵ (۲)

۳۵ (۱)

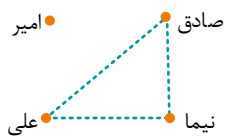
(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

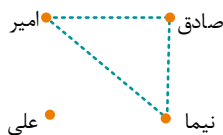
پاسخ تشریحی:

بودن این ۴ دوست در یک شبکه‌ی اجتماعی را به یک گراف ۴ رأسی تشبیه می‌کنیم. بنابراین:

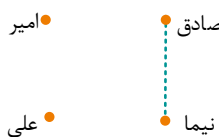
تعداد گراف‌هایی که در آن امیر ایزوله است. $|A| = 2^3$



تعداد گراف‌هایی که در آن علی ایزوله است. $|B| = 2^3$



تعداد گراف‌هایی که هم امیر و هم علی ایزوله هستند. $|A \cap B| = 2$



بنابراین جواب برابر است با:

$$2^4 - 2^3 - 2^3 + 2 = 16 - 8 - 8 + 2 = 2$$

$$2^4 - 2^3 - 2^3 + 2 = 16 - 8 - 8 + 2 = 2$$

$$2^4 - 2^3 - 2^3 + 2 = 16 - 8 - 8 + 2 = 2$$

۳۷- ۳ نفر به چند حالت در ۶ ایستگاه می توانند پیاده شوند، به طوری که در هر ایستگاه حداکثر ۱ نفر پیاده شود و نفر اول در ایستگاه اول و نفر دوم در ایستگاه دوم پیاده نشوند؟

۸۴ (۴)

۴۲ (۳)

۱۶ (۲)

۲۴۳ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴



تابع یک به یک:



تعداد توابع یک به یک تعریف شده از مجموعه m عضو A به مجموعه n عضو B با شرط $m \leq n$ برابر $P(n, m)$ است.

پاسخ تشریحی:

اگر A حالت های پیاده شدن نفر اول در ایستگاه اول و B حالت های پیاده شدن نفر دوم در ایستگاه دوم باشد. آن گاه:

$$|A| = 1 \times 5 \times 4 = 20$$

$$|B| = 5 \times 1 \times 4 = 20$$

$$|A \cap B| = 1 \times 1 \times 4 = 4$$

$$|S| = P(6, 3) = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

بنابراین جواب برابر است با:

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| = 120 - (20 + 20 - 4) = 84$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- در مراسم تقدیر از رتبه های برتر سال گذشته ماز، ۵۰۰۰ نفر دختر و پسر از سه رشته مختلف حضور دارند. حداقل چند نفر از این افراد، ماه تولد، رشته و جنسیت یکسانی دارند؟

۶۸ (۴)

۷۳ (۳)

۱۰۱ (۲)

۷۰ (۱)

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی:

ابتدا تعداد لانه ها را بدست می آوریم و بعد از اصل لانه ی کبوتری استفاده می کنیم. ببینید:

$$\frac{2}{\text{دختر}} \times \frac{3}{\text{رشته ریاضی}} \times \frac{12}{\text{فروردین}} = 72$$

$$\frac{1}{\text{پسر}} \times \frac{3}{\text{رشته تجربی}} \times \frac{12}{\text{اردیبهشت}} = 36$$

$$\frac{1}{\text{رشته انسانی}} \times \frac{12}{\text{اسفند}} = 12$$

۵۰۰۰ کبوتر داریم. پس حداقل کبوترهایی که در یک لانه قرار می گیرند. برابر است با:

$$\begin{array}{r} 5000 \overline{) 72} \\ \underline{69} \\ 32 \end{array}$$

$70 = 69 + 1$ = حداقل تعداد افرادی که دارای رشته جنسیت و ماه تولد یکسان هستند.

گروه آموزشی ماز





۳۹- مجموعه $\{2, 5, 8, 11, \dots, 92, 95, 98\}$ که به صورت تصاعد عددی مرتب شده‌اند را در نظر بگیرید. از این مجموعه حداقل چند عضو انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو عدد وجود دارد که جمعشان ۱۰۳ است؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴



پاسخ تشریحی:

اگر مجموعه داده شده را به صورت زیر دسته‌بندی کنیم:

 $\{50, 53\} \dots \{11, 92\} \{8, 95\} \{5, 98\} \{2\}$

در نتیجه اگر این دسته‌ها را ۱۷ لانه در نظر بگیریم، طبق اصل لانه کبوتری در صورتی که ۱۸ کبوتر داشته باشیم لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن باشد و یا با انتخاب ۱۸ عدد، حداقل ۲ عدد مجموعشان ۱۰۳ است.

گروه آموزشی ماز

۴۰- ۳ خودکار $\{a, b, c\}$ را به چند طریق می‌توان بین علی، احمد، رضا، بهرام و امیر توزیع کرد به طوری که خودکار c به علی برسد و خودکار b به احمد نرسد؟

۶۰ (۴)

۲۰ (۳)

۸۰ (۲)

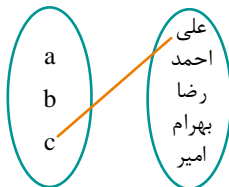
۱۰ (۱)

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳



پاسخ تشریحی:



خودکارها را مجموعه‌ی مبدأ و افراد را مجموعه‌ی مقصد در نظر می‌گیریم. بنابراین:

خودکار a را به هر کدام از ۵ نفر و خودکار b را به ۴ نفر (همه به جز احمد) و خودکار c را فقط به ۱ نفر (علی) می‌توان داد پس جواب برابر است با:

$$5 \times 4 \times 1 = 20$$

گروه آموزشی ماز



۴۱- چه تعداد از عبارات‌های زیر در ارتباط با اثر فوتوالکتریک، درست است؟

الف: بنا به دیدگاه فیزیک کلاسیک، پدیده فوتوالکتریک باید با هر بسامدی رخ دهد.

ب: اگر بسامد نور تابیده شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانه بیشتر باشد، کاهش شدت نور (با ثابت ماندن بسامد)، سبب کاهش انرژی جنبشی فوتوالکترئون‌ها می‌شود.

ج: اگر بسامد نور تابیده شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانه آن فلز کمتر باشد، با افزایش شدت نور (با ثابت ماندن بسامد)، ممکن است پدیده فوتوالکتریک رخ دهد.

د: اگر بسامد نور تابیده شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانه آن فلز بیشتر باشد، با افزایش بسامد نور (بدون تغییر در تعداد فوتون‌ها)، تندی فوتوالکترئون‌ها افزایش می‌یابد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲



بچه‌ها در هیچ درس از متن کتاب درسی غافل نشین. حالا منطبق بر متن کتاب درسی، درسامه زیر رو بخون

تا دهه‌های پایانی قرن نوزدهم، بیشتر حوزه‌های فیزیک، از جمله مکانیک نیوتونی، ترمودینامیک و نظریه الکترومغناطیس ماکسول که امروزه با نام فیزیک کلاسیک از آن‌ها یاد می‌شود به صورت‌بندی‌هایی خود رسیده بود و به نظر می‌رسید که در توصیف گسترده وسیعی از پدیده‌های فیزیکی کاملاً موفق‌اند. با این حال در آن سال‌ها، پدیده‌هایی مشاهده و آزمایش‌هایی انجام شد که تبیین کامل و درست آن‌ها با نظریه‌های فیزیک کلاسیک ممکن نبود و سبب تغییرات بنیادی در دیدگاه فیزیک‌دانان نسبت به توضیح رفتار برخی از پدیده‌های فیزیکی شد. به‌طوری که در سه دهه آغازین قرن بیستم، نتایج این تلاش‌ها به نظریه نسبیت خاص (مربوط به مطالعه پدیده‌ها در تندی‌های بسیار زیاد و قابل مقایسه با تندی نور)، نظریه نسبیت عام (مربوط به مطالعه هندسه فضا - زمان و گرانش) و نظریه کوانتومی (مربوط به مطالعه پدیده‌ها در مقیاس‌های بسیار کوچک، مانند اتم‌ها و ذره‌های سازنده آن‌ها) منجر شد که امروزه به آن فیزیک جدید می‌گویند. اندکی پس از ظهور این نظریه‌ها، شاخه‌های دیگری مانند فیزیک هسته‌ای، فیزیک ذرات بنیادی و کیهان‌شناسی به تدریج به وجود آمدند.

اثر فوتوالکتریک و فوتون

اگر بر کلاهک برق‌نمایی با بار منفی، نور فرابنفش تابیده شود، مشاهده می‌شود که انحراف ورقه‌های آن کاهش می‌یابد (شکل ۱ - الف) در حالی که با تابش نور مرئی، تغییری در انحراف ورقه‌های برق‌نما رخ نمی‌دهد (شکل ۲ - ب). چرا این پدیده‌ها اتفاق می‌افتد؟ آزمایش نشان می‌دهد وقتی نوری با بسامد مناسب مانند نور فرابنفش به سطحی فلزی بتابد الکترون‌هایی از آن گسیل می‌شوند (شکل ۲). این پدیده فیزیک را، اثر فوتوالکتریک و الکترون‌های جدا شده از سطح فلز را فوتوالکترئون می‌نامند.



شکل ۱- الف: برهم‌کنش نور فرودی فرابنفش با کلاهک برق‌نما سبب می‌شود تا ورقه‌های آن به سرعت به هم نزدیک شوند. ب: در حالی که برهم‌کنش نور مرئی گسیل شده از یک لامپ رشته‌ای تغییری در انحراف ورقه‌های برق‌نما به وجود نمی‌آورد.



شکل ۲- الکترون‌ها، انرژی نور فرودی را جذب می‌کنند و از سطح فلز خارج می‌شوند.

همان‌طور که در فصل ۳ دیدیم، نور، موجی الکترومغناطیسی است، بنابراین می‌توان انتظار داشت هنگام برهم‌کنش موج الکترومغناطیسی (نور فرودی) با سطح فلز، میدان الکتریکی این موج، نیروی $\vec{F} = -e\vec{E}$ به الکترون‌های فلز وارد کند و آن‌ها را به نوسان وادارد. به این ترتیب، وقتی دامنه نوسان برخی از الکترون‌ها به قدر کافی بزرگ شود انرژی جنبشی لازم را برای جدا شدن از سطح فلز پیدا می‌کنند. بنابه این دیدگاه کلاسیکی، این پدیده باید با هر بسامدی رخ دهد در حالی که این نتیجه با تجربه سازگار نیست.

یکی دیگر از پیامدهای نظریه الکترومغناطیسی ماکسول این است که شدت نور با مربع دامنه میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی متناسب است ($I \propto E^2$). به این ترتیب انتظار می‌رود به ازای یک بسامد معین، اگر شدت نور فرودی بر سطح فلز را افزایش دهیم باید الکترون‌ها با انرژی جنبشی بیشتری از فلز خارج شوند، نتیجه‌ای که تجربه آن را تأیید نمی‌کند.

شکست مدل موج الکترومغناطیسی در توضیح برخی پدیده‌ها مانند اثر فوتوالکتریک به این معنی نیست که مدل موجی نور باید کنار گذاشته شود. ولی باید متوجه باشیم که مدل موجی، تمام ویژگی‌های نور را در بر ندارد و به همین دلیل قادر نیست توجیه درستی از تمامی پدیده‌های فیزیکی مرتبط با برهم‌کنش نور با ماده را ارائه کند.

پس از نزدیک به ۲۰ سال که تلاش بسیاری از دانشمندان برای توجیه اثر فوتوالکتریک به کمک مفاهیم و قانون‌های فیزیک کلاسیک به نتیجه نرسیده بود در سال ۱۹۰۵ اینشتین توضیحی قانع‌کننده در مورد این اثر ارائه داد و جایزه نوبل فیزیک سال ۱۹۲۱ میلادی را به خاطر تبیین آن دریافت کرد. اینشتین در نظریه فوتوالکتریک خود با

توجه به کارهای قبلی پلانک در زمینه تابش گرمایی اجسام، فرض کرد که نور با بسامد f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر گرفت. هر بسته انرژی، که بعدها فوتون نامیده شد، دارای انرژی‌ای است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = hf$$

در این رابطه h ثابت پلانک نامیده می‌شود و به طور تجربی معلوم شده است که مقدار آن $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ است. بنا بر نظر اینشتین، وقتی نوری تکفام بر سطح فلزی می‌تابد، هر فوتون صرفاً با یکی از الکترون‌های فلز برهم‌کنش می‌کند. اگر فوتون انرژی کافی داشته باشد تا فرایند خارج کردن الکترون از فلز را انجام دهد، الکترون به طور آنی از آن گسیل می‌شود. در این صورت بخشی از انرژی فوتون صرف جدا کردن الکترون از فلز می‌شود و مابقی آن به انرژی جنبشی الکترون خارج شده تبدیل می‌شود.



هنگامی که نوری با بسامد f به فلزی با بسامد آستانه f_0 (بسامد آستانه به جنس فلز بستگی دارد) می‌تابد، سه حالت زیر رخ می‌دهد.

۱. $f > f_0$: در این حالت فوتون‌های تابیده شده حداقل انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از فلز را دارند و پدیده فوتوالکتریک رخ می‌دهد. در این حالت خوب است که نکات زیر را بدانید:

الف: اگر بدون تغییر در تعداد فوتون‌ها، بسامد موج (f) را افزایش دهیم، انرژی جنبشی فوتوالکتریک‌ها افزایش می‌یابد.

ب: اگر بدون تغییر در بسامد نور (f)، تعداد فوتون‌ها را افزایش دهیم، یعنی شدت نور را زیاد کنیم، انرژی جنبشی فوتوالکتریک‌ها تغییر نمی‌کند ولی تعداد الکترون‌های جدا شده از فلز افزایش می‌یابد.

۲. $f < f_0$: در این حالت فوتون‌های تابیده شده حداقل انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از فلز را ندارند و پدیده فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد. در این حالت خوب است که نکات زیر را بدانید:

الف: اگر بدون تغییر در تعداد فوتون‌ها، بسامد موج (f) را افزایش دهیم، ممکن است پدیده فوتوالکتریک رخ بدهد یا ندهد. اگر بسامد نور از بسامد آستانه فلز بیشتر شود یا با آن برابر شود، پدیده فوتوالکتریک رخ می‌دهد.

ب: اگر بدون تغییر در بسامد نور (f)، تعداد فوتون‌ها را افزایش دهیم، یعنی شدت نور را زیاد کنیم، با توجه به این‌که اصلاً پدیده فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد، هیچ تغییری صورت نمی‌گیرد و همچنان هیچ الکترونی از فلز جدا نمی‌شود.

۳. $f = f_0$: در این حالت پدیده فوتوالکتریک رخ می‌دهد و کل انرژی هر فوتون صرف شده شدن الکترون از سطح فلز می‌شود، ولی انرژی جنبشی الکترون‌های جدا شده صفر می‌شود.

بررسی موارد

الف: بنابه دیدگاه فیزیک کلاسیک، پدیده فوتوالکتریک باید با هر بسامدی رخ دهد در حالی که این نتیجه با تجربه سازگار نیست. (در واقع بنابه دیدگاه فیزیک جدید، اگر بسامد نور تابیده شده بر سطح فلز از بسامدی موسوم به بسامد آستانه (که به جنس فلز بستگی دارد) کمتر باشد، فوتون‌ها، حداقل انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از فلز را ندارند و پدیده فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد.) (✓)

ب: اگر بسامد نور تابیده شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانه آن فلز بیشتر باشد، کاهش شدت نور (با ثابت ماندن بسامد)، تعداد فوتون‌ها را کاهش می‌دهد و در نتیجه تعداد الکترون‌های جدا شده از فلز (تعداد فوتوالکتریک‌ها) کاهش می‌یابد، اما انرژی جنبشی فوتوالکتریک‌ها تغییر نمی‌کند. (✗)

ج: اگر بسامد نور تابیده شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانه آن فلز کمتر باشد، با افزایش شدت نور (با ثابت ماندن بسامد)، به هیچ عنوان، پدیده فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد، زیرا بسامد نور تابیده شده، ثابت مانده است و همچنان کمتر از بسامد آستانه می‌باشد. (✗)

د: اگر بسامد نور تابیده شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانه آن فلز بیشتر باشد، با افزایش بسامد نور (بدون تغییر در تعداد فوتون‌ها)، انرژی جنبشی فوتوالکتریک‌ها افزایش می‌یابد و در نتیجه بر طبق رابطه انرژی جنبشی، یعنی $K = \frac{1}{2}mv^2$ ، تندی فوتوالکتریک‌ها نیز افزایش می‌یابد. (✓)

گروه آموزشی ماز

۴۲- مجموع انرژی دو فوتون A و B، برابر با $1.92 \times 10^{-18} \text{ J}$ است. اگر طول موج فوتون A، ۸۰ درصد کمتر از طول موج فوتون B باشد، بسامد فوتون B چند

ه‌ترتز است؟ ($h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

$$5 \times 10^{15} \text{ (۴)}$$

$$5 \times 10^{14} \text{ (۳)}$$

$$2/5 \times 10^{14} \text{ (۲)}$$

$$2/5 \times 10^{15} \text{ (۱)}$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۳



اینشتین فرض کرد که نور با بسامد f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر گرفت. هر بسته انرژی، فوتون نام دارد که دارای انرژی‌ای است که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E = hf \xrightarrow{f = \frac{c}{\lambda}} E = \frac{hc}{\lambda}$$

E: انرژی فوتون (J)

h: ثابت پلانک (J.s)

f: بسامد نور فرودی (Hz)

c: تندی انتشار نور در خلأ $(\frac{m}{s})$

λ : طول موج نور فرودی (m)

✓ تندی انتشار نور در خلأ، $\frac{m}{s} = 3 \times 10^8$ است.

✓ ثابت پلانک نامیده می شود که مقدار آن در SI، $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ است.

الکترون - ولت: ژول واحد بسیار بزرگی است، بنابراین برای بیان انرژی فوتون از واحد کوچک تری به نام الکترون ولت (eV) استفاده می کنیم. یک الکترون ولت، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک الکترون در جابه جایی بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل یک ولت است:

$$|\Delta V| = \left| \frac{\Delta U}{q} \right| \rightarrow 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

تبدیل ژول و الکترون ولت به هم:

$$J \xrightarrow[\times 1.6 \times 10^{-19}]{\div 1.6 \times 10^{-19}} eV$$

گام اول:

طول موج فوتون A، ۸۰ درصد کمتر از طول موج فوتون B می باشد، پس داریم:

$$\lambda_A = \lambda_B - \frac{80}{100} \lambda_B \rightarrow \lambda_A = \frac{20}{100} \lambda_B \rightarrow \lambda_A = \frac{1}{5} \lambda_B$$

$$\frac{\lambda = \frac{c}{f}}{f_A} \rightarrow \frac{c}{f_A} = \frac{1}{5} \left(\frac{c}{f_B} \right) \rightarrow \frac{1}{f_A} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{f_B} \right) \rightarrow \frac{1}{f_A} = \frac{1}{5 f_B} \rightarrow 5 f_A = f_B$$

$$\rightarrow f_A = 5 f_B$$

گام دوم:

مجموع انرژی دو فوتون A و B، برابر با $1.92 \times 10^{-18} \text{ J}$ است. این میزان انرژی بر حسب ژول را به الکترون ولت (eV) تبدیل می کنیم:

$$E_A + E_B = 1.92 \times 10^{-18} \text{ J} = \frac{1.92 \times 10^{-18}}{1.6 \times 10^{-19}} = 12 \text{ eV}$$

می دانیم انرژی هر فوتون از رابطه $E = hf$ به دست می آید، پس داریم:

$$E_A + E_B = 12 \rightarrow hf_A + hf_B = 12 \rightarrow h(f_A + f_B) = 12$$

$$\frac{h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}}{4 \times 10^{-15} (f_A + f_B) = 12 \rightarrow f_A + f_B = \frac{12}{4 \times 10^{-15}} = 3 \times 10^{15}}$$

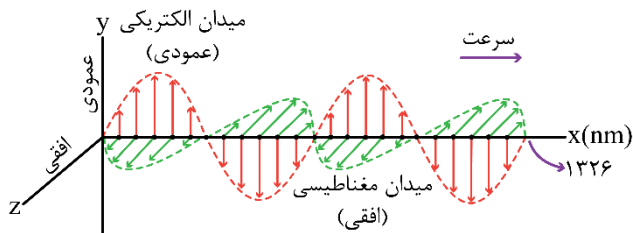
$$\frac{f_A = 5 f_B}{5 f_B + f_B = 3 \times 10^{15}}$$

$$\rightarrow 6 f_B = 3 \times 10^{15} \rightarrow f_B = \frac{3 \times 10^{15}}{6} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

گروه آموزشی ماز

۴۳- شکل زیر، تصویر لحظه ای از نوری را نشان می دهد که از یک لامپ رشته ای با توان ورودی ۹۰W منتشر شده است؛ به طوری که این لامپ از فاصله ۳ کیلومتری دیده می شود. فرض کنید نور لامپ به طور یکنواخت در فضای اطراف آن منتشر می شود و بازده لامپ ۴۰ درصد است. در مدت زمان ۳s چه تعداد فوتون وارد هر دو مردمک چشم های ناظری می شود که در فاصله ۳ کیلومتری از لامپ قرار دارد؟ ($h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ و $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$)

(قطر مردمک = ۲mm)



$$10^7 \quad (1)$$

$$4 \times 10^7 \quad (2)$$

$$2 \times 10^7 \quad (3)$$

$$8 \times 10^7 \quad (4)$$



کمیت کوانتومی (گسسته)



کمیتی است که مضرب درستی از مقدار پایه یا کوانتوم آن کمیت است. یادتان هست که در فیزیک یازدهم، بار الکتریکی (q) کمیتی کوانتومی بود و کوانتوم آن (مقدار پایه) برابر با بار الکتریکی یک الکترون ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) بود. در مورد انرژی موج الکترومغناطیسی هم می‌توان گفت که کمیتی کوانتومی است و مضرب درستی از انرژی یک فوتون (hf) می‌باشد:

$$E = nhf = nh \frac{c}{\lambda}$$

E : انرژی موج الکترومغناطیسی
 n : تعداد فوتون‌ها
 hf : انرژی هر فوتون
 نکته: توان تابشی یک نور تکفام با بسامد f را به کمک رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{nhf}{t} = \frac{nhc}{\lambda t}$$

P : توان تابشی
 E : انرژی موج الکترومغناطیسی
 t : مدت زمان
 حالا که توان تابشی رو بلد شدی، شدت تابشی یک نور تکفام رو هم یاد بگیر:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{E}{At} \rightarrow I = \frac{nhf}{At} = \frac{nhc}{\lambda At}$$

گام اول:

بازده لامپ ۴۰ درصد است، اکنون توان خروجی لامپ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100 \rightarrow 40 = \frac{P_{\text{خروجی}}}{90} \times 100 \rightarrow P_{\text{خروجی}} = 36 \text{ W}$$

گام دوم:

مساحت جبهه موج که در فاصله ۳km از چشمه موج (لامپ) قرار دارد را به دست می‌آوریم: (در واقع مساحت کره‌ای به شعاع ۳km را به دست می‌آوریم).

$$A = 4\pi r^2 \quad r = 3 \text{ km} = 3 \times 10^3 \text{ m} \rightarrow A = 4 \times \pi \times (3 \times 10^3)^2 = 36\pi \times 10^6 \text{ m}^2$$

اکنون، شدت نور در فاصله ۳km از چشمه موج (لامپ) را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P=36 \text{ W}}{A=36\pi \times 10^6 \text{ m}^2} \rightarrow I = \frac{36}{36\pi \times 10^6} = \frac{1}{\pi} \times 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

گام سوم:

مساحت هر مردمک چشم ناظر، که همان مساحت یک دایره است، برابر است با:

$$A_{\text{مردمک}} = \pi r^2 \quad r = \frac{D}{2} \quad D = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m} \rightarrow r = \frac{2 \times 10^{-3}}{2} = 10^{-3} \text{ m} \rightarrow A_{\text{مردمک}} = \pi (10^{-3})^2 = \pi \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

شدت نوری که در فاصله ۳km از چشمه موج (لامپ) وجود دارد، همان شدت نوری است که به هر مردمک چشم ناظر وارد می‌شود.

اکنون مقدار انرژی که به هر مردمک چشم ناظر وارد می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{E}{t A_{\text{مردمک}}} \quad I = \frac{1}{\pi} \times 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad t = 3 \text{ s}, A_{\text{مردمک}} = \pi \times 10^{-6} \text{ m}^2 \rightarrow \frac{1}{\pi} \times 10^{-6} = \frac{E}{3 \times \pi \times 10^{-6}}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{\pi} \times 10^{-6} \times 3 \times \pi \times 10^{-6} = 3 \times 10^{-12} \text{ J}$$

روش تستی:

با یک تناسب ساده هم می‌توانستیم انرژی که به هر مردمک وارد می‌شود را محاسبه کنیم.

$$\frac{36 \text{ W}}{P_{\text{مردمک}}} = \frac{4\pi \times (3000)^2}{\pi \times (10^{-3})^2} \Rightarrow P_{\text{مردمک}} = \frac{36 \times \pi \times 10^{-6}}{4\pi \times 9 \times 10^6} = 10^{-12} \text{ W}$$

در هر ثانیه 10^{-12} J انرژی به هر مردمک می‌رسد، پس در مدت ۳s، $3 \times 10^{-12} \text{ J}$ انرژی به هر مردمک می‌رسد.



با توجه به تصویر لحظه‌ای نور منتشرشده، که در صورت سؤال آمده است، $\lambda = 1326 \text{ nm}$ است، پس داریم:

$$2\lambda = 1326 \text{ nm} \rightarrow \lambda = \frac{1326}{2} = 663 \text{ nm} = 663 \times 10^{-9} \text{ m}$$

پس طول موج نور منتشر شده $663 \times 10^{-9} \text{ m}$ است.

اکنون تعداد فوتون‌های ورودی به هر مردمک چشم ناظر را به دست می‌آوریم:

$$E = nhf \xrightarrow{f = \frac{c}{\lambda}} E = nh \frac{c}{\lambda} \quad \begin{matrix} E = 3 \times 10^{-12} \text{ J}, \lambda = 663 \times 10^{-9} \text{ m} \\ h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}, c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{matrix}$$

$$3 \times 10^{-12} = n \times 6.63 \times 10^{-34} \times \frac{3 \times 10^8}{663 \times 10^{-9}} \rightarrow n = 10^7$$

دقت کنید که به هر مردمک چشم ناظر 10^7 فوتون وارد می‌شود پس به هر دو مردمک چشم ناظر 2×10^7 فوتون وارد می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۴۴ - کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) همه اجسام در هر دمایی که باشند، از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل (نشر) می‌کنند.
- (۲) تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد، ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازنده آن است.
- (۳) در تابشی که از خورشید گسیل می‌شود و به زمین می‌رسد، بعضی از طول موج‌ها وجود ندارند.
- (۴) طیف گسیلی برخلاف طیف جذبی برای هیچ دو گازی همانند یکدیگر نیست.

(آسان - مفهومی و خطبه خط کتاب درسی - ۱۲۰۵)

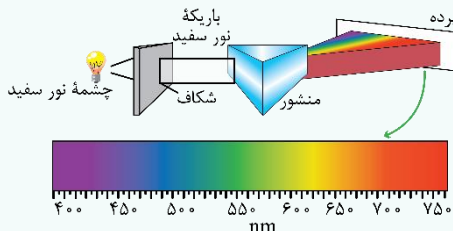
پاسخ: گزینه ۴

انواع طیف‌های اتمی

در این قسمت، انواع طیف‌های اتمی را بررسی می‌کنیم.

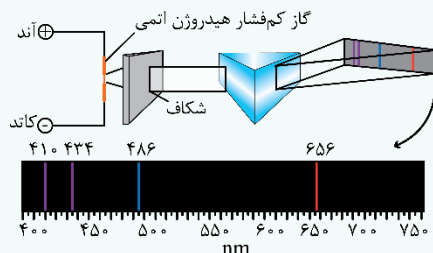
۱- طیف گسیلی پیوسته

همه اجسام در هر دمایی که باشند، از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل (نشر) می‌کنند که به آن تابش گرمایی گفته می‌شود. (اجسام در دماهای بالا از سطح خود نور مرئی گسیل می‌کنند. در دماهای معمولی، بیشتر تابش گسیل شده از سطح اجسام در ناحیه فروسرخ قرار دارد.) برای یک جسم جامد، نظیر رشته داغ یک لامپ روشن، این امواج شامل گستره پیوسته‌ای از طول موج‌هاست. به همین دلیل طیف ایجادشده در این شرایط را طیف گسیلی پیوسته یا به اختصار طیف پیوسته می‌نامند. در شکل زیر، طیف گسیلی پیوسته نور سفید از رشته داغ یک لامپ روشن نشان داده شده است. در این شکل تنها بخش مرئی طیف نشان داده شده است که گستره طول موج آن از حدود 400 nm (نور بنفش) تا حدود 750 nm (نور قرمز) است:



۲- طیف گسیلی خطی

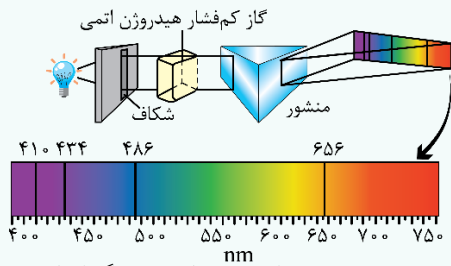
تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد، ناشی از برهم‌کنش قوی بین اتم‌های سازنده آن است. حال آن‌که گازهای کم‌فشار و رقیق، که اتم‌های منفرد آن‌ها از برهم‌کنش‌های قوی موجود در جسم جامد آزادند به جای طیف پیوسته، طیفی گسسته را گسیل می‌کنند که شامل طول‌موج‌های معینی است. این طیف گسسته را معمولاً طیف گسیلی خطی یا به اختصار طیف خطی می‌نامند و طول‌موج‌های ایجادشده در آن، برای اتم‌های هر گاز منحصر به فرد هستند و سرخ‌های مهمی را درباره نوع و ساختار اتم‌های آن گاز به دست می‌دهند. طیف خطی گاز هیدروژن اتمی در ناحیه مرئی، شامل یک رشته منظم از خط‌هایی است که محل آن‌ها در شکل زیر نشان داده شده است:



۳- طیف جذبی خطی

در سال ۱۸۱۴ میلادی فرانیهوفر، با مشاهده دقیق طیف خورشید، خط‌های تاریک نازیکی را در آن کشف کرد (خط‌های تاریکی که در طیف خورشید دیده می‌شود، به افتخار کشف‌کننده آن، خط‌های فرانیهوفر نامیده می‌شوند). این تجربه نشان می‌داد در تابشی که از خورشید گسیل می‌شود و به زمین می‌رسد بعضی از طول‌موج‌ها وجود ندارند. امروزه ما دانیم بسیاری از خط‌های تاریکی که فرانیهوفر در طیف خورشید کشف کرد، ناشی از جذب طول‌موج‌های مربوط به این خط‌ها توسط گازهای جو خورشید است. خط‌های دیگر به سبب جذب نور در گازهای جو زمین پدید می‌آیند.

شکل زیر اسباب آزمایشی را به صورت طرح وار نشان می دهد که در آن باریکه نور سفید قبل از عبور از منشور، از گاز کم فشار هیدروژن می گذرد. با انجام این آزمایش پی می بریم یک طیف پیوسته (مشابه طیف رنگین کمان) با خط هایی تاریک درون آن مشاهده می شود که در آن بعضی از طول موج ها از نور سفید جذب شده اند.



شکل بالا روشی برای مشاهده طیف های جذبی است. یک چشمه نور سفید که گستره ای پیوسته از طول موج ها را تولید می کند، از ظرفی حاوی گاز کم فشار هیدروژن اتمی می گذرد و توسط منشور پاشیده می شود و طیف آن روی پرده تشکیل می شود. خط های تاریک روی طیف، به طول موج هایی از نور سفید مربوط است که توسط اتم های گاز جذب شده اند.

در مورد رابطه طیف گسیلی خطی و طیف جذبی خطی به دو نکته زیر توجه کنید:

الف: هم در طیف گسیلی و هم در طیف جذبی اتم های گاز هر عنصر، طول موج های معینی وجود دارد که از مشخصه های آن عنصر است. یعنی طیف گسیلی و طیف جذبی هیچ دو گازی همانند یکدیگر نیست.

ب: اتم های هر گاز دقیقاً همان طول موج هایی را از نور سفید جذب می کنند که اگر دمای آن ها به اندازه کافی بالا رود و یا به هر صورت دیگر برانگیخته شوند، آن ها را تابش می کنند.

بررسی گزینه ها:

۱ همه اجسام در هر دمایی که باشند، از خود امواج الکترومغناطیسی گسیل (نشر) می کنند که به آن تابش گرمایی گفته می شود. (✓)

۲ تشکیل طیف پیوسته توسط جسم جامد، ناشی از برهم کنش قوی بین اتم های سازنده آن است. (✓)

۳ در سال ۱۸۱۴ میلادی فرانیهوفر، با مشاهده دقیق طیف خورشید، خط های تاریک نازکی را در آن کشف کرد. (خط های تاریکی که در طیف خورشید دیده می شود، به افتخار کشف کننده آن، خط های فرانیهوفر نامیده می شوند) این تجربه نشان می داد در تابشی که از خورشید گسیل می شود و به زمین می رسد بعضی از طول موج ها وجود ندارند. امروزه می دانیم بسیاری از خط های تاریکی که فرانیهوفر در طیف خورشید کشف کرد، ناشی از جذب طول موج های مربوط به این خط ها توسط گاز های جو خورشید است. خط های دیگر به سبب جذب نور در گاز های جو زمین پدید می آیند. (✓)

۴ هم در طیف گسیلی و هم در طیف جذبی اتم های گاز هر عنصر، طول موج های معینی وجود دارد که از مشخصه های آن عنصر است، یعنی طیف گسیلی و طیف جذبی هیچ دو گازی همانند یکدیگر نیست. (✗)

گروه آموزشی ماز

۴۵- در اتم هیدروژن، طول موج سومین خط طیفی در رشته لیمان ($n' = 1$)، چند نانومتر کوتاه تر از طول موج دومین خط طیفی در رشته بالمر ($n' = 2$) است؟

$$(R = \frac{1}{0.09} \text{ nm}^{-1})$$

$$\frac{400}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1600}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1280}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1300}{3} \quad (1)$$

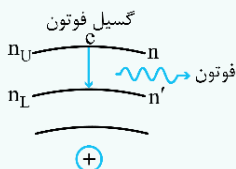
(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

فوتون گسیل شده

مطابق شکل زیر هنگامی که در یک اتم، الکترون از لایه ای به لایه پایین تر منتقل می شود، فوتونی با بسامد f و طول موج λ گسیل می کند. برای به دست آوردن طول موج فوتون گسیل شده در اتم هیدروژن می توانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

معادله ریذبرگ



$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_U^2} \right)$$

λ ← طول موج فوتون گسیل شده

R ← ثابت ریذبرگ $(R = 0.09 \text{ nm}^{-1})$

n_L یا n' ← شماره لایه مقصد (لایه پایین تر)

n یا n_U ← شماره لایه مبدأ (لایه بالاتر)

نکته: در رابطه ریذبرگ اگر R بر حسب nm^{-1} جای گذاری شود، λ بر حسب nm به دست می آید که معمولاً در سؤالات کنکور طول موج بر حسب نانومتر خواسته می شود و نیازی به تبدیل واحد نیست.

بر مبنای لایه مقصد، فوتون‌های گسیلی از اتم هیدروژن گروه‌بندی می‌شوند. به هر گروه در اصطلاح یک رشته اتمی گفته می‌شود و هر رشته را با نام یک دانشمند نام‌گذاری می‌کنند. به طور مثال اگر الکترون‌ها از لایه بالاتر به لایه شماره (۱) منتقل شوند، رشته مورد نظر را رشته لیمان می‌نامند و به الکترون‌ها و فوتون‌های مورد نظر به ترتیب الکترون لیمان و فوتون لیمان می‌گویند. در جدول زیر نام رشته‌های مختلف به همراه پرتو گسیل‌شده، مشخص است.

نام طیف	مقدار n'	رابطه ریدبرگ مربوط به رشته	مقدارهای n	ناحیه طیف
لیمان	۱	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۲, ۳, ۴, ...	فرابنفش
بالمر	۲	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۳, ۴, ۵, ...	فرابنفش و مرئی
پاشن	۳	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۴, ۵, ۶, ...	فروسرخ
براکت	۴	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۵, ۶, ۷, ...	فروسرخ
پفوند	۵	$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$	۶, ۷, ۸, ...	فروسرخ

نکته ۱:

با توجه به جدول بالا، به نکات زیر توجه کنید:

- ۱- همه فوتون‌های رشته لیمان ($n' = 1$) در ناحیه فرابنفش قرار دارند، یعنی طول موج آن‌ها کمتر از 400 nm است.
- ۲- چهار خط طیفی اول رشته بالمر ($n' = 2$) در ناحیه مرئی قرار دارند و خط‌های طیفی بعدی آن در ناحیه فرابنفش قرار دارند.
- ۳- همه فوتون‌های رشته‌های پاشن ($n' = 3$)، براکت ($n' = 4$) و پفوند ($n' = 5$) در ناحیه فرسرخ قرار دارند، یعنی طول موج آن‌ها از 700 nm بیشتر است.
- ۴- با توجه به چند نکته بالا می‌توان به نتایج زیر رسید:
- الف: اگر اتم هیدروژن فوتونی فرابنفش تابش کند، این فوتون ممکن است به رشته لیمان ($n' = 1$) یا رشته بالمر ($n' = 2$) تعلق داشته باشد.
- ب: اگر اتم هیدروژن فوتونی مرئی تابش کند، این فوتون قطعاً مربوط به رشته بالمر ($n' = 2$) است.

نکته ۲:

در رابطه $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ ، با داشتن n' ، مقدار n از $n' + 1$ (اولین خط طیفی رشته n') شروع شده و تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کند. مثلاً اولین خط طیفی رشته براکت ($n' = 4$)، $n = 5$ است. یا مثلاً سومین خط طیفی رشته بالمر ($n' = 2$)، $n = 5$ است. پس وقتی شماره یک خط طیفی از یک رشته را داریم، مقدار n از رابطه شماره خط طیفی $n = n' + 1$ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} n' = 3 &\rightarrow n = 3 + 4 = 7 \quad \text{چهارمین خط طیفی رشته پاشن} \\ n' = 5 &\rightarrow n = 5 + 1 = 6 \quad \text{اولین خط طیفی رشته پفوند} \end{aligned}$$

گام اول:

طبق نکات مطرح‌شده در این سؤال، در اتم هیدروژن، وقتی شماره یک خط طیفی از یک رشته را داریم، مقدار n از رابطه شماره خط طیفی $n = n' + 1$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$n' = 1 \rightarrow n = 1 + 3 = 4 \quad \text{سومین خط طیفی در رشته لیمان } (n' = 1) \quad \text{شماره خط طیفی} = 3$$

پس سومین خط طیفی در رشته لیمان ($n' = 1$)، مربوط به گذار الکترون از مدار $n = 4$ به مدار $n' = 1$ است.

حال، با توجه به رابطه ریدبرگ، طول موج سومین خط طیفی در رشته لیمان ($n' = 1$)، که آن را با λ_1 نشان می‌دهیم، محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow[n' = 1, n = 4]{R = \frac{1}{1.097} (\text{nm})^{-1}} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.097} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) \\ \rightarrow \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{1.097} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{16} \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.097} \left(\frac{16 - 1}{16} \right) \\ \rightarrow \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{1.097} \left(\frac{15}{16} \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1 \times 15}{1.097 \times 16} \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{15}{1600} \right) \\ \rightarrow \lambda &= \frac{1600}{15} = \frac{320}{3} \text{ nm} \end{aligned}$$

گام دوم:

دومین خط طیفی رشته بالمر برابر است با:

$$n' = 2 \rightarrow n = 2 + 2 = 4 \quad \text{دومین خط طیفی در رشته بالمر (} n' = 2 \text{) شماره خط طیفی} = 2$$

پس دومین خط طیفی در رشته بالمر ($n' = 2$)، مربوط به گذار الکترون از مدار $n = 4$ به مدار $n' = 2$ است.

حال، با توجه به رابطه ریدبرگ، طول موج دومین خط طیفی در رشته بالمر ($n' = 2$)، که آن را با λ_2 نشان می‌دهیم، محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad R = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \text{ (nm)}^{-1} \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \left(\frac{4-1}{16} \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \left(\frac{3}{16} \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1 \times 3}{1.097 \times 16} \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{3}{1600} \right)$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{1600}{3} \text{ nm}$$

گام سوم:

طول موج سومین خط طیفی در رشته لیمان ($n' = 1$)، یعنی λ_1 را از طول موج دومین خط طیفی در رشته بالمر ($n' = 2$)، یعنی λ_2 کم می‌کنیم:

$$\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{1600}{3} \text{ nm} - \frac{320}{3} \text{ nm} \rightarrow \Delta \lambda = \frac{1600}{3} - \frac{320}{3} = \frac{1280}{3} \text{ nm}$$

پس طول موج سومین خط طیفی در رشته لیمان ($n' = 1$)، یعنی λ_1 ، از طول موج دومین خط طیفی در رشته بالمر ($n' = 2$)، یعنی λ_2 ، کوتاه‌تر است.

گروه آموزشی ماز

۴۶- اگر کوتاه‌ترین طول موج در یک رشته از اتم هیدروژن، 900 nm باشد، اختلاف بسامد اولین و سومین خط طیفی در این رشته از اتم هیدروژن، چند هرتز است؟

$$\text{است؟ } (R = \frac{1}{1.097 \times 10^7} \text{ (nm)}^{-1}, c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})$$

$$\frac{1}{96} \times 10^{16} \quad (4)$$

$$\frac{1}{192} \times 10^{15} \quad (3)$$

$$\frac{1}{96} \times 10^{15} \quad (2)$$

$$\frac{1}{192} \times 10^{16} \quad (1)$$

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

نکته:

۱- اگر بیشترین بسامد یا انرژی مربوط به یک رشته اتم هیدروژن (مثلاً رشته لیمان) را از ما خواستند، الکترون باید از مدار $n = \infty$ به مدار مقصد برود.

رشته لیمان: $n' = 1, n = \infty$

رشته بالمر: $n' = 2, n = \infty$

رشته پاشن: $n' = 3, n = \infty$

رشته براکت: $n' = 4, n = \infty$

رشته پفوند: $n' = 5, n = \infty$

دقت کنید که بیشترین بسامد یا انرژی، هم‌معنی کوتاه‌ترین طول موج است.

۲- اگر کمترین بسامد یا انرژی مربوط به یک رشته اتم هیدروژن (مثلاً رشته لیمان) را از ما خواستند، الکترون باید از نزدیک‌ترین مدار به مدار مقصد برود.

رشته لیمان: $n' = 1, n = 2$

رشته بالمر: $n' = 2, n = 3$

رشته پاشن: $n' = 3, n = 4$

رشته براکت: $n' = 4, n = 5$

رشته پفوند: $n' = 5, n = 6$

دقت کنید که کمترین بسامد یا انرژی، هم‌معنی بلندترین طول موج است.

۳- اختلاف کوتاه‌ترین و بلندترین طول موج در هر رشته از اتم هیدروژن را، گستره طول موج‌های آن رشته می‌گویند.

کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۰

در اتم هیدروژن در رشته بالمر ($n' = 2$)، بلندترین طول موج گسیل شده، چند نانومتر بیشتر از کوتاهترین طول موج گسیل شده در این رشته است؟

$$(R = 0.1 \text{ nm})^{-1}$$

۲۴۰ (۱) ۳۲۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۵۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

بلندترین طول موج برای انتقال از $n = 3$ به $n' = 2$ است و کوتاهترین طول موج برای انتقال از $n = \infty$ و $n' = 2$ می باشد:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = \frac{1}{0.1} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \rightarrow \lambda_{\max} = \frac{3600}{5} = 720 \text{ nm}$$

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} = \frac{1}{0.1} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) \rightarrow \lambda_{\min} = 400 \text{ nm}$$

$$\lambda_{\max} - \lambda_{\min} = 320 \text{ nm}$$

نکته ۲:

۱- در اتم هیدروژن، هنگامی که الکترون از مدار برانگیخته n به مدار n' می آید و $n' < n$ است، فوتونی تابش می کند که طول موج آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$R \approx 0.1 \text{ nm}^{-1}$$

۲- با ضرب کردن دو طرف رابطه فوق در سرعت نور (c)، بسامد فوتون تابش شده به دست می آید.

$$\frac{c}{\lambda} = Rc \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow{f = \frac{c}{\lambda}} f = Rc \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

دقت کنید که در رابطه بالا برای محاسبه بسامد بر حسب هرتز (Hz)، باید بر حسب m^{-1} جای گذاری شود.

$$R = 0.1 \text{ nm}^{-1} = 0.1 \times 10^9 m^{-1} = 10^8 m^{-1}$$

۳- فرض کنید در اتم هیدروژن، الکترون یک بار از مدار n_1 به مدار n' می رود و فوتونی با بسامد f_1 تابش می کند و بار دوم از مدار n_2 به مدار n' می رود و فوتونی با بسامد f_2 تابش می کند. اختلاف این دو بسامد برابر است با:

$$\begin{cases} f_1 = Rc \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \\ f_2 = Rc \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \end{cases} \rightarrow \Delta f = f_2 - f_1 = Rc \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

دقت کنید که در رابطه بالا نیز برای محاسبه اختلاف بسامد بر حسب هرتز (Hz)، باید بر حسب m^{-1} جای گذاری شود.

کنکور سراسری تجربی دی ۱۴۰۱

اختلاف بسامد اولین و دومین خط طیف اتم هیدروژن در یک رشته معین $35 \times 10^{14} \text{ Hz}$ است. این رشته کدام است؟ $(R = \frac{1}{0.1} \text{ nm}^{-1})$ ، $c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$

۱) براکت ($n' = 4$) ۲) لیمان ($n' = 1$)

۳) پاشن ($n' = 3$) ۴) بالمر ($n' = 2$)

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنیم شماره رشته مورد نظر، n' باشد، پس برای اولین خط طیف $n = n' + 1$ و برای دومین خط طیف، $n = n' + 2$ است.

پس اولین خط طیف در این رشته، مربوط به گذار الکترون از مدار $n_1 = n' + 1$ به مدار n' است و دومین خط طیف در این رشته، مربوط به گذار الکترون از مدار $n_2 = n' + 2$ به مدار n' است.

با استفاده از نکته بالا می توان نوشت:

$$\Delta f = Rc \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \rightarrow \frac{35}{24} \times 10^{14} = \underbrace{\frac{1}{0.1} \times 10^9}_{R \text{ بر حسب } m^{-1}} \times 3 \times 10^8 \left(\frac{1}{(n'+1)^2} - \frac{1}{(n'+2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{144} &= \frac{1}{(n'+1)^2} - \frac{1}{(n'+2)^2} \quad \frac{1}{144} = \frac{1}{9 \times 16} = \frac{1}{9 \times 16} = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \\ \frac{1}{9} - \frac{1}{16} &= \frac{1}{(n'+1)^2} - \frac{1}{(n'+2)^2} \rightarrow \frac{1}{(2+1)^2} - \frac{1}{(2+2)^2} = \frac{1}{(n'+1)^2} - \frac{1}{(n'+2)^2} \\ \rightarrow n' &= 2 \rightarrow \text{رشته مورد نظر، رشته بالمر است.} \end{aligned}$$

گام اول:

طبق نکات مطرح شده در این سؤال، کوتاهترین طول موج (λ_{\min}) در یک رشته از اتم هیدروژن، زمانی اتفاق می افتد که، الکترون از مدار $n = \infty$ به مدار مقصد برود. به دلیل اینکه، شماره رشته مورد نظر یا همان شماره مدار مقصد (یعنی همان مقدار n') را نداریم، با استفاده از معادله ریدبرگ، شماره رشته مورد نظر یا همان شماره مدار مقصد (یعنی مقدار n') را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad R = \frac{1}{100} (nm)^{-1} \rightarrow \frac{1}{900} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) \\ \rightarrow \frac{1}{900} &= \frac{1}{100} \left(\frac{1}{n'^2} \right) \rightarrow \frac{1}{n'^2} = \frac{900}{100} \rightarrow \frac{1}{n'^2} = \frac{100}{900} \rightarrow \frac{1}{n'^2} = \frac{1}{9} \rightarrow n'^2 = 9 \rightarrow n' = 3 \end{aligned}$$

پس رشته مورد نظر، رشته پاشن ($n' = 3$) است.

گام دوم:

طبق نکات مطرح شده در سؤال قبل دیدیم، در اتم هیدروژن، وقتی شماره یک خط طیفی از یک رشته را داریم، مقدار n از رابطه شماره خط طیفی $n = n' + 1$ به دست می آید، پس داریم:

$$\begin{aligned} (n' = 3) \quad \text{اولین خط طیفی در رشته پاشن} &\xrightarrow[n_1 = 3 + 1 = 4]{n' = 3} \\ (n' = 3) \quad \text{سومین خط طیفی در رشته پاشن} &\xrightarrow[n_2 = 3 + 3 = 6]{n' = 3} \end{aligned}$$

پس اولین خط طیفی در رشته پاشن ($n' = 3$)، مربوط به گذار الکترون از مدار $n_1 = 4$ به مدار $n' = 3$ است و سومین خط طیفی در رشته پاشن ($n' = 3$)، مربوط به گذار الکترون از مدار $n_2 = 6$ به مدار $n' = 3$ است.

با استفاده از نکته ۲ مطرح شده در این سؤال، اختلاف بسامد (Δf) اولین و سومین خط طیفی در رشته پاشن ($n' = 3$) را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \Delta f &= R c \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad R = \frac{1}{100} (nm)^{-1} = 10^9 m^{-1}, \quad c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \\ \Delta f &= 10^9 \times 3 \times 10^8 \left(\frac{1}{(4)^2} - \frac{1}{(6)^2} \right) \rightarrow \Delta f = 3 \times 10^{15} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{36} \right) \\ \rightarrow \Delta f &= 3 \times 10^{15} \left(\frac{36 - 16}{16 \times 36} \right) \rightarrow \Delta f = 3 \times 10^{15} \left(\frac{20}{576} \right) \\ \rightarrow \Delta f &= \frac{1}{96} \times 10^{16} \text{ Hz} \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

۴۷- در اتم هیدروژن، الکترون در تراز $n = 6$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر تعداد فوتونهای گسیلی با انرژیهای متفاوت را با A و تعداد فوتونهای گسیلی با انرژیهای متفاوت که در محدوده فروسرخ قرار دارند را با B نشان دهیم، $A - B$ کدام است؟

۶ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)



نکته ۲:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ به دست می آید.}$$


با توجه به رابطه $\frac{n(n-1)}{2}$ تعداد فوتون‌ها با انرژی‌های متفاوت را به دست می‌آوریم:

گام اول:

البته تعداد فوتون‌های گسیل‌شده با انرژی‌های متفاوت را (A)، می‌توانستیم از

גאם דערם:

۳۲

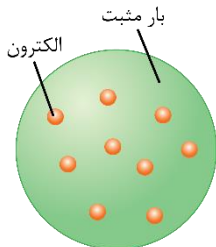
دقت کنید که در تمام گذارهای مربوط به رشته‌های پاشن ($n' = 3$)، براکت ($n' = 4$) و پفوند ($n' = 5$)، فوتون‌هایی با انرژی‌های متفاوت گسیل می‌شود که در محدودهٔ فروسرخ قرار دارند.

گام سوم:

$$A - B \xrightarrow[B=6]{A=15} 15 - 6 = 9$$

گروه آموزشی ماز

۴۸- به ترتیب از راست به چپ، شکل زیر نشان‌دهندهٔ مدل اتمی است و یکی از نارسایی‌های این مدل اتمی این بود که



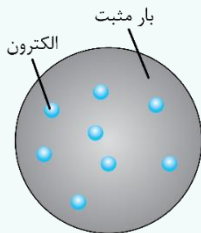
- (۱) تامسون - بسامدهای تابش گسیل شده از اتم، که این مدل پیش‌بینی می‌کرد با نتایج تجربی سازگار نبود.
- (۲) تامسون - بار الکتریکی اتم خنثی نبود.
- (۳) رادرفورد - بار الکتریکی اتم خنثی نبود.
- (۴) رادرفورد - بسامدهای تابش گسیل شده از اتم، که این مدل پیش‌بینی می‌کرد با نتایج تجربی سازگار نبود.

(آسان - مفهومی و خطبه خط کتاب درسی - ۱۳۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

مدل اتمی تامسون

تامسون اولین شخصی بود که موفق به کشف الکترون و اندازه‌گیری نسبت بار به جرم آن $\frac{e}{m}$ شد. طبق مدل اتمی تامسون، اتم همچون کره‌ای است که بار مثبت به طور همگن در سرتاسر آن گسترده شده است و الکترون‌ها که سهم ناچیزی در جرم اتم دارند، در جاهای مختلف آن پراکنده شده‌اند. این مدل را گاهی یک کشمشی هم می‌گویند، زیرا الکترون‌ها مانند دانه‌های کشمش در آن پخش شده‌اند.

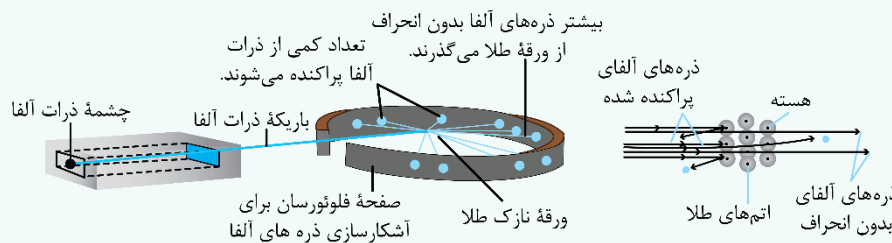


نارسایی مدل تامسون:

در مدل تامسون، الکترون‌ها با بسامدهای معینی حول وضع تعادلشان نوسان می‌کنند و این نوسان سبب تابش امواج الکترومغناطیسی از اتم می‌شود، یکی از ناکامی‌های مدل تامسون این بود که بسامدهای تابش شده از اتم که این مدل پیش‌بینی می‌کرد با نتایج تجربی سازگار نبود. نارسایی دیگر مدل تامسون این بود که نمی‌توانست نتایج حاصل از آزمایش ورقهٔ طلای رادرفورد را توجیه کند.

مدل اتمی رادرفورد:

رادرفورد برای بررسی مدل اتمی تامسون آزمایشی را انجام داد. در این آزمایش، باریکه‌ای از ذرات آلفا (هسته اتم هلیم) به سطح ورقهٔ بسیار نازکی از طلا تابانده می‌شود. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید تعداد زیادی از ذره‌ها بدون انحراف و یا با انحراف کم از ورقهٔ طلا عبور می‌کنند و در برخورد با صفحهٔ فلونورسان، در پشت ورقهٔ نازک طلا جرقه‌های نورانی تولید می‌کنند. اما برخی از ذره‌های آلفا در هنگام خروج از ورقهٔ طلا در زاویه‌های بزرگ منحرف و پراکنده می‌شوند و حتی تعدادی از آن‌ها به عقب برمی‌گردند. رادرفورد از این آزمایش نتیجه گرفت که اتم دارای یک هستهٔ بسیار چگال و کوچک ($m \approx 10^{-15}$ شعاع) با بار مثبت است که با تعدادی الکترون در فاصله‌هایی به نسبت دور احاطه شده است. مدل اتمی را در مورد رادرفورد را مدل هسته‌ای یا مدل هسته‌ای اتم می‌نامند.



نارسایی مدل رادرفورد:

۱- عدم توجیه پایداری اتم: اگر الکترون نسبت به هسته ساکن باشد، باید تحت اثر نیروی ربایشی الکتریکی بین هسته و الکترون، روی هسته سقوط کند و در نتیجه اتم باید ناپایدار باشد که با واقعیت مطابقت ندارد و اگر الکترون مانند سیاره‌های منظومهٔ خورشیدی که به دور خورشید می‌چرخند، به دور هسته بچرخد باز هم حرکت الکترون ناپایدار خواهد بود. زیرا در این حالت حرکت الکترون شتابدار است و بنابر فیزیک کلاسیک، حرکت شتابدار الکترون باعث تابش امواج الکترومغناطیسی می‌شود که بسامد آن با بسامد حرکت مداری الکترون برابر است. با تابش امواج الکترومغناطیسی، انرژی الکترون به تدریج کاهش یافته و شعاع چرخش آن نیز به تدریج کم شده و باز هم الکترون بر روی هسته سقوط می‌کند.

۲- عدم توجیه طیف گسسته اتم: همان طور که گفتیم طبق مدل رادفورد اگر الکترون به صورت شتابدار به دور هسته بچرخد، امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند، با کاهش انرژی الکترون، شعاع چرخش آن به تدریج کمتر شده و بسامد امواج الکترومغناطیسی گسیل شده به تدریج افزایش می‌یابد و به این ترتیب باید طیف امواج الکترومغناطیسی گسیل شده، پیوسته باشد که با واقعیت ناسازگار است. به شکل زیر دقت کنید:



پاسخ سریعی:

شکل صورت سؤال، نشان دهنده مدل اتمی تامسون است. طبق مدل اتمی تامسون، اتم همچون کره‌ای است که بار مثبت به طور همگن در سرتاسر آن گسترده شده است و الکترون‌ها که سهم ناچیزی در جرم اتم دارند، در جاهای مختلف آن پراکنده شده‌اند. این مدل را گاهی مدل کیک کشمش هم می‌گویند، زیرا الکترون‌ها مانند دانه‌های کشمش در آن پخش شده‌اند.

در مدل اتمی تامسون، وقتی الکترون‌ها با بسامدهای معینی حول وضع تعادلشان نوسان می‌کنند، این نوسان سبب تابش امواج الکترومغناطیسی از اتم می‌شود. یکی از ناکامی‌های (نارسایی‌های) مدل تامسون این بود که بسامدهای تابش گسیل شده از اتم، که این مدل پیش‌بینی می‌کرد، با نتایج تجربی سازگار نبود.

گروه آموزشی ماز

۴۹- در اتم هیدروژن، الکترون در چهارمین حالت برانگیخته قرار دارد. اگر در طی انتقال این الکترون، فوتونی با کمترین انرژی تابش شود، به ترتیب از راست

به چپ، شعاع مدار حرکت الکترون چند برابر می‌شود و بسامد فوتون تابش شده، چند هرتز است؟ ($E_R = 13/6 \text{ eV}$, $h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$)

$$1/65 \times 10^{14}, \frac{16}{25} \quad (2)$$

$$7/65 \times 10^{13}, \frac{9}{16} \quad (1)$$

$$1/65 \times 10^{14}, \frac{9}{16} \quad (4)$$

$$7/65 \times 10^{13}, \frac{16}{25} \quad (3)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

مدل بور

بور مدل اتمی خود را بر مبنای سه اصل زیر مطرح کرد:

اصل ۱: مدارها و انرژی‌های الکترون‌ها در هر اتم کوانتیده‌اند؛ یعنی فقط مدارها و انرژی‌های گسسته معینی مجاز هستند. طبق مدل بور، شعاع مدارها در اتم هیدروژن به کمک رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$r_n = n^2 a_0$$

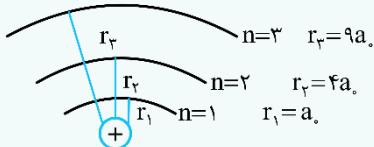
r_n ← شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن

$$(a_0 = 5/29 \times 10^{-11} \text{ m})$$

a_0 ← شعاع کوچک‌ترین مدار در اتم هیدروژن (به ازای $n = 1$) که به آن شعاع بور نیز می‌گویند.

n ← شماره مداری که الکترون روی آن قرار دارد.

نکته: با توجه به مدل بور، شعاع لایه‌های مختلف اتم هیدروژن به صورت شکل زیر است، همان طور که می‌بینید با افزایش n فاصله شعاع لایه‌ها افزایش می‌یابد.



نکته: طبق مدل بور، انرژی الکترون در مدارهای اتم هیدروژن به کمک رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E_n = \frac{-E_R}{n^2}$$

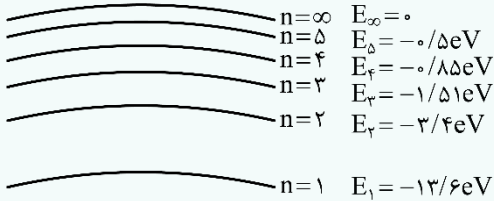
E_n ← انرژی الکترون در هر لایه از اتم هیدروژن

E_R ← انرژی الکترون در اولین مدار اتم هیدروژن (انرژی الکترون در $n = 1$ برابر $E_1 = -13/6 \text{ eV}$ است که اندازه آن را معمولاً یک ریذبرگ می‌نامند و با نماد

E_R نشان می‌دهند ($E_R = 13/6 \text{ eV}$)

n ← شماره مداری که الکترون روی آن قرار دارد.

نکته: با توجه به مدل بور انرژی الکترون در لایه های مختلف اتم هیدروژن به صورت شکل زیر است. همان طور که می بینید با افزایش n فاصله انرژی لایه ها کاهش می یابد.

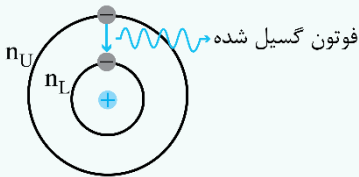


نکته: توصیه می کنیم برای سرعت در پاسخ گویی به سؤالات این قسمت، انرژی الکترون در پنج لایه اول را به خاطر بسپارید.

اصل ۲: وقتی یک الکترون در یکی از مدارهای مجاز است، هیچ نوع تابش الکترومغناطیسی گسیل نمی شود. از این رو گفته می شود الکترون در مدار مانا یا حالت مانا قرار دارد.

اصل ۳: الکترون می تواند از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر برود. هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر E_U به یک حالت مانا با انرژی کمتر E_L ، یک فوتون تابش می شود. در این صورت انرژی فوتون تابش شده برابر اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و مدار نهایی است و داریم:

$$E_U - E_L = hf \quad (\text{معادله گسیل فوتون از اتم})$$



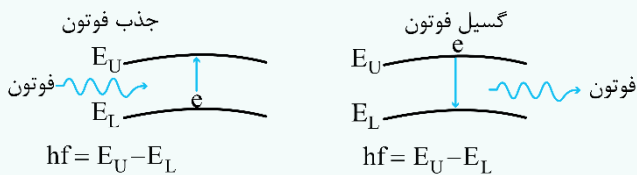
E_U ← انرژی الکترون در لایه بالاتر

E_L ← انرژی الکترون در لایه پایین تر

hf ← انرژی فوتون گسیل شده

هنگامی که الکترون در پایین ترین تراز انرژی ($n=1$) قرار گرفته است، در اصطلاح می گویند الکترون در حالت پایه قرار دارد و هنگامی که الکترون در ترازهای انرژی بالاتر ($n=2, 3, \dots$) قرار می گیرد، در اصطلاح می گویند الکترون برانگیخته شده است.

هنگامی که الکترون از یک لایه با انرژی بیشتر (E_U) به لایه ای با انرژی کمتر (E_L) منتقل می شود، فوتون گسیل می کند و برای این که الکترون از لایه ای با انرژی کمتر (E_L) به لایه ای با انرژی بیشتر (E_U) منتقل شود باید فوتون جذب کند. به عبارت دیگر داریم:



در اتم هیدروژن انرژی مورد نیاز برای انتقال الکترون از حالت پایه ($n=1$) به بالاترین حالت برانگیخته ($n=\infty$) برابر 13.6 eV است. صرف این مقدار انرژی باعث جدا شدن الکترون از اتم می شود و یون مثبت هیدروژن (H^+) تشکیل می شود. این کمترین انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از حالت پایه، انرژی یونش الکترون نامیده می شود. برای به دست آوردن انرژی یونش الکترون هایی که در لایه های مختلف اتم هیدروژن قرار می گیرند می توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$\begin{cases} E_n = \frac{-E_R}{n^2} \rightarrow \Delta E = E_\infty - E_n = \frac{E_R}{n^2} \\ E_\infty = 0 \end{cases}$$

نکته: مقدار پیش بینی شده توسط مدل بور برای انرژی یونش اتم هیدروژن، توافق بسیار خوبی با مقدار تجربی دارد.

کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۰

الکترون در اتم هیدروژن در حالت پایه قرار دارد. انرژی لازم برای اینکه الکترون از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته جهش کند، چند ژول است؟

$$(e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, E_R = 13.6 \text{ eV})$$

$$1) \quad 1.632 \times 10^{-18} \quad 2) \quad 3.176 \times 10^{-18}$$

$$3) \quad 4.72 \times 10^{-19} \quad 4) \quad 5.44 \times 10^{-19}$$

پاسخ: گزینه ۱

اولین حالت برانگیخته همان لایه $n=2$ می باشد، بنابراین:

$$\Delta E = -E_R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) = -13.6 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right)$$

$$\rightarrow \Delta E = -13.6 \times \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = 10.2 \text{ eV} = 1.632 \times 10^{-18} \text{ J}$$

گام اول:

در اتم هیدروژن، اولین حالت برانگیخته، مدار $n = 2$ است. در این سؤال، الکترون در چهارمین حالت برانگیخته قرار دارد. منظور از چهارمین حالت برانگیخته، مدار $n = 5$ است. حال برای اینکه فوتونی با کمترین انرژی تابش شود، الکترون باید به مدار $n = 4$ منتقل شود.

گام دوم:

می‌دانیم شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن از رابطه $r_n = n^2 a_0$ به دست می‌آید، حال شعاع مدارهای $n = 4$ و $n = 5$ را به دست می‌آوریم و سپس شعاع مدار $n = 4$ را تقسیم بر شعاع مدار $n = 5$ می‌کنیم، تا ببینیم شعاع مدار حرکت الکترون در طی انتقال الکترون از مدار $n = 5$ به مدار $n = 4$ چند برابر شده است:

$$r_n = n^2 a_0 \xrightarrow{n=4} r_4 = (4)^2 a_0 \rightarrow r_4 = 16a_0 \quad \rightarrow \frac{r_4}{r_5} = \frac{16a_0}{25a_0} \rightarrow \frac{r_4}{r_5} = \frac{16}{25}$$

$$r_n = n^2 a_0 \xrightarrow{n=5} r_5 = (5)^2 a_0 \rightarrow r_5 = 25a_0$$

پس شعاع مدار حرکت الکترون در طی انتقال الکترون از مدار $n = 5$ به مدار $n = 4$ برابر شده است.

گام سوم:

در اتم هیدروژن، انرژی الکترون در مدارهای $n = 4$ و $n = 5$ ، برابر است با: (البته ممکن است بعضی‌ها، انرژی الکترون در مدارهای اتمی هیدروژن را حفظ باشند).

$$E_n = \frac{-E_R}{n^2} \xrightarrow{n=4} E_4 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{(4)^2} = \frac{-13.6}{16} = -0.85 \text{ eV}$$

$$E_n = \frac{-E_R}{n^2} \xrightarrow{n=5} E_5 = \frac{-13.6 \text{ eV}}{(5)^2} = \frac{-13.6}{25} = -0.544 \text{ eV}$$

الکترون از مدار $n = 5$ به مدار $n = 4$ رفته است، در این صورت، انرژی فوتون تابش شده برابر اختلاف انرژی مدار $n = 4$ و مدار $n = 5$ است. پس با استفاده از رابطه (معادله گسیل فوتون از اتم) $E_U - E_L = hf$ ، که در آن، E_U ، انرژی الکترون در مدار $n = 5$ ($E_U = E_5$) و E_L ، انرژی الکترون در مدار $n = 4$ ($E_L = E_4$)، بسامد فوتون تابش شده را به دست می‌آوریم:

$$E_U - E_L = hf \xrightarrow{\substack{E_U = E_5 \\ E_L = E_4}} E_5 - E_4 = hf \xrightarrow{E_5 = -0.544 \text{ eV}, E_4 = -0.85 \text{ eV}} \xrightarrow{h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}}$$

$$-0.544 - (-0.85) = 4 \times 10^{-15} \times f$$

$$\rightarrow -0.544 + 0.85 = 4 \times 10^{-15} \times f \rightarrow 0.306 = 4 \times 10^{-15} \times f$$

$$\rightarrow f = \frac{0.306}{4 \times 10^{-15}} = 7.65 \times 10^{13} \text{ Hz}$$

گروه آموزشی ماز

۵۰- در اتم هیدروژن، الکترونی در حالت پایه قرار دارد. چه تعداد از فوتون‌های جدول زیر توسط این الکترون در حالت پایه می‌توانند جذب شوند؟

فوتون نور مرئی قرمز	A
فوتون موج فروسرخ	B
فوتون با بسامد $3.187/5 \text{ THz}$	C
فوتون فرابنفش با انرژی $10/2 \text{ eV}$	D

$$(E_R = 13.6 \text{ eV}, h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s})$$

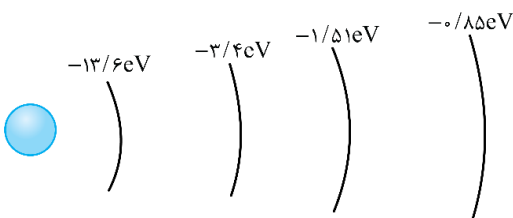
- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

برای آن که الکترون بتواند فوتون را جذب کند، انرژی فوتون باید برابر اختلاف انرژی الکترون در تراز پایه با ترازهای بالایی باشد. شکل زیر ترازهای انرژی اتم هیدروژن را نشان می‌دهد.





همان طور که می بینید، اختلاف انرژی ترازهای اول و دوم برابر $10/2\text{eV}$ است، پس فوتون D می تواند جذب شود. از طرفی کمترین انرژی مورد نیاز برابر $10/2\text{eV}$ است که در محدوده فرابنفش قرار دارد، پس فوتون های مرئی و فروسرخ به اندازه کافی بزرگ نیستند تا الکترون بتواند آن ها را جذب کند و به مدار دوم برود، بنابراین فوتون های A و B جذب نمی شوند. برای بررسی فوتون C ، کافی است انرژی آن را محاسبه کنیم.

$$E_C = hf = 4 \times 10^{-15} \times 3187 / 5 \times 10^{12} = 12 / 75 \text{eV}$$

این انرژی برابر اختلاف انرژی تراز اول و چهارم است، بنابراین فوتون C نیز می تواند جذب شود.

گروه آموزشی ماز

۵۱- کدام یک از گزینه های زیر، در ارتباط با موفقیت ها و نارسایی های مدل اتمی بور درست است؟

- (۱) مدل اتمی بور در محاسبه انرژی یونش همه اتم ها با موفقیت همراه است.
- (۲) مدل اتمی بور نمی تواند چگونگی ایجاد طیف های گسیلی و جذبی هیدروژن اتمی را توصیف کند.
- (۳) مدل اتمی بور نمی تواند توضیح دهد که چرا شدت خط قرمز با شدت خط آبی در طیف گسیلی هیدروژن اتمی متفاوت است.
- (۴) مدل اتمی بور در تبیین پایداری اتم، با موفقیت همراه نیست.



پاسخ: گزینه ۳

(آسان - مفهومی و خطبه خط کتاب درسی - ۱۴۰۵)

موفقیت های مدل بور



- ۱- توضیح چگونگی حرکت الکترون ها در اتم
- ۲- توضیح پایداری اتم و توضیح چگونگی ایجاد طیف های گسیلی و جذبی اتم هیدروژن
- ۳- محاسبه انرژی یونش اتم هیدروژن که توافق بسیار خوبی با مقدار تجربی دارد.
- ۴- مدل اتمی بور علاوه بر هیدروژن برای اتم هایی که تنها یک الکترون دارند نیز صادق است، مانند Li^{2+} . به این اتم ها در اصطلاح اتم های هیدروژن گونه می گویند.

نارسایی های مدل بور:

- ۱- مدل بور برای اتم هایی با بیش از یک الکترون کاربرد ندارد.
- ۲- مدل بور نمی تواند متفاوت بودن شدت خط های طیف گسیلی را توضیح دهد.

کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۰:



- کدام یک از موارد زیر را نمی توان برای اتم های هیدروژن گونه، با استفاده از مدل اتمی بور توجیه کرد؟
- (۱) تبیین پایداری اتم
 - (۲) طول موج های گسیلی طیف اتم
 - (۳) گسسته بودن ترازهای انرژی الکترون در اتم
 - (۴) متفاوت بودن شدت خط های طیف گسیلی اتم
- پاسخ: گزینه ۴
با توجه به توضیحات بالا، گزینه ۴ صحیح است.

بررسی گزینه ها:

- ۱- مدل اتمی بور فقط در محاسبه انرژی یونش اتم های هیدروژن گونه با موفقیت همراه است. (×)
- ۲- مدل اتمی بور می تواند چگونگی ایجاد طیف های گسیلی و جذبی هیدروژن اتمی را توصیف کند. (×)
- ۳- مدل اتمی بور نمی تواند متفاوت بودن شدت خط های طیف گسیلی را توضیح دهد. برای مثال مدل اتمی بور نمی تواند توضیح دهد که چرا شدت خط قرمز با شدت خط آبی در طیف گسیلی گاز هیدروژن اتمی متفاوت است. (✓)
- ۴- مدل اتمی بور در تبیین پایداری اتم، با موفقیت همراه است. (×)

گروه آموزشی ماز

۵۲- در اتم هیدروژن، اگر الکترون از مداری که شعاع آن $16a_0$ است به مداری با شعاع $4a_0$ برود، فوتونی با بسامد f تابش می کند و اگر الکترون از مداری با شعاع $25a_0$ به مداری با شعاع $9a_0$ برود، فوتونی با بسامد f' تابش می کند. نسبت $\frac{f'}{f}$ کدام است؟ (a_0 شعاع بور است).

$$\frac{16}{7} \quad (4)$$

$$\frac{256}{525} \quad (3)$$

$$\frac{16}{25} \quad (2)$$

$$\frac{256}{675} \quad (1)$$





با توجه به رابطه $r_n = n^2 a$ ، در حالت اول، الکترون از مدار $n = 4$ به مدار $n = 2$ رفته و در حالت دوم از مدار $n = 5$ به $n = 3$ رفته است. انرژی فوتون تابش شده در هر حالت برابر است با:

$$\begin{cases} n=3 \rightarrow E_3 = \frac{-E_R}{3^2} = \frac{-E_R}{9} \\ n=5 \rightarrow E_5 = \frac{-E_R}{5^2} = \frac{-E_R}{25} \end{cases} \rightarrow hf' = E_R \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right) \quad \text{رابطه (۱)}$$

$$\begin{cases} n=2 \rightarrow E_2 = \frac{-E_R}{2^2} = \frac{-E_R}{4} \\ n=4 \rightarrow E_4 = \frac{-E_R}{4^2} = \frac{-E_R}{16} \end{cases} \rightarrow hf = E_R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \quad \text{رابطه (۲)}$$

با تقسیم رابطه (۱) بر رابطه (۲) داریم:

$$\frac{f'}{f} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{25}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{225}{2250} - \frac{16}{2250}}{\frac{400}{2250} - \frac{144}{2250}} = \frac{209}{256}$$

گروه آموزشی ماز

۵۳- کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) در گسیل القایی، یک چشمه انرژی خارجی باید وجود داشته باشد تا الکترون‌ها را به ترازهای انرژی بالاتر برانگیخته کند.
- ۲) در گسیل القایی، فوتون گسیل شده در جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند.
- ۳) مدت زمانی که الکترون‌ها در ترازهای شبه پایدار باقی می‌مانند، کوتاه‌تر از مدت زمانی است که الکترون‌ها در حالت برانگیخته معمولی باقی می‌مانند.
- ۴) وارونی جمعیت الکترون‌ها در یک محیط لیزری مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در ترازهای شبه پایدار نسبت به تراز پایین‌تر بسیار بیشتر باشند.



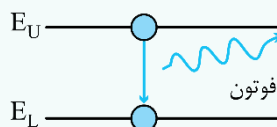
لیزر یکی از مهم‌ترین اختراعات قرن بیستم است، که کاربردهای زیادی در صنعت و پزشکی دارد. از جمله مهم‌ترین این کاربردها عبارتند از:

- ۱- استفاده در چاپگرها (پرینتر لیزری) در کپی اطلاعات روی CD و DVD و خواندن اطلاعات
- ۲- شبکه‌های کابل نوری
- ۳- اندازه‌گیری دقیق طول
- ۴- در جوشکاری و برشکاری فلزات
- ۵- در پزشکی برای جراحی، برداشتن لکه‌های پوستی، اصلاح دید چشم و دندان‌پزشکی

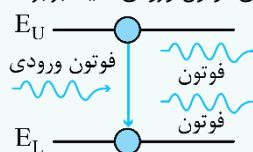
چگونگی ایجاد لیزر

همان‌طور که می‌دانید هنگامی که الکترون از تراز انرژی بالاتر (E_U) به تراز انرژی پایین‌تر (E_L) می‌آید، فوتون گسیل می‌کند. به طور کلی انتقال الکترون به دو صورت می‌تواند باعث گسیل فوتون شود:

الف: گسیل خودبه‌خودی: هنگامی که الکترون به صورت خودبه‌خودی از تراز انرژی بالاتر به تراز انرژی پایین‌تر می‌آید، گسیل خودبه‌خودی صورت می‌گیرد. در گسیل خودبه‌خودی، فوتون در جهتی کاتوره‌ای گسیل می‌شود.



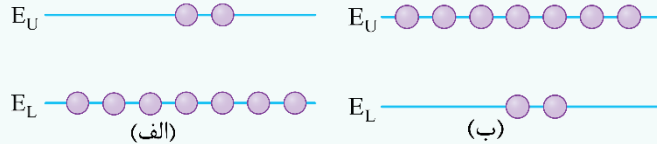
ب: گسیل القایی: اگر به الکترونی که در حالت برانگیخته قرار دارد، فوتونی با انرژی مناسب بتابد، الکترون تحریک شده و به مدار انرژی پایین‌تر می‌رود و فوتونی گسیل می‌کند که به آن گسیل القایی می‌گویند. برای روی دادن گسیل القایی باید انرژی فوتون ورودی دقیقاً برابر اختلاف انرژی دو تراز باشد.



در گسیل القایی سه ویژگی اصلی وجود دارد:

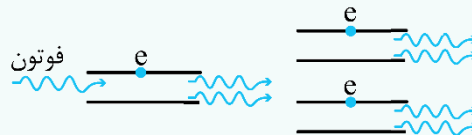
- ۱- یک فوتون جذب و دو فوتون خارج می‌شود. به این ترتیب تعداد فوتون‌ها افزایش یافته و نور تقویت می‌شود.

نکته: در گسیل القایی یک چشمه انرژی خارجی مناسب باید وجود داشته باشد تا الکترون‌ها را به ترازهای انرژی بالاتر برانگیخته کند. این انرژی می‌تواند به روش‌های متعددی از جمله درخش‌های شدید نور معمولی و یا تخلیه‌های ولتاژ بالا فراهم شود. اگر انرژی کافی به اتم‌ها داده شود، الکترون‌های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته خواهند شد که به آن وارونی جمعیت گفته می‌شود. وارونی جمعیت الکترون‌ها در یک محیط لیزری مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در ترازهایی موسوم به ترازهای شبه پایدار نسبت به تراز پایین‌تر بسیار بیشتر باشند. در این ترازها الکترون‌ها مدت‌زمان بسیار طولانی‌تری (10^{-3} s) نسبت به حالت برانگیخته معمولی (10^{-8} s) باقی می‌مانند. این زمان طولانی‌تر، فرصت بیشتری برای افزایش وارونی جمعیت و در نتیجه تقویت نور لیزر فراهم می‌کند. به شکل‌های زیر دقت کنید.



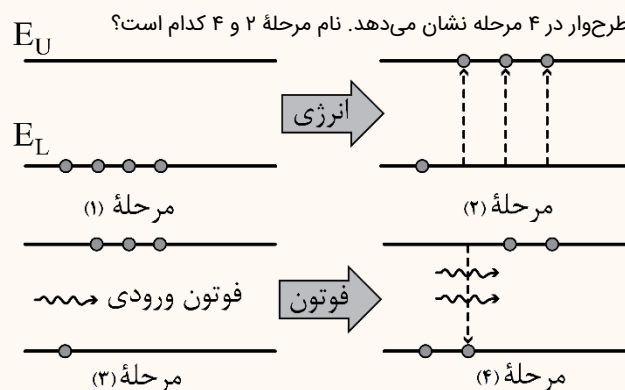
الف: به طور معمول و در دمای اتاق، بیشتر الکترون‌ها در تراز انرژی پایین‌تر قرار دارند.
ب: در وضعیتی که وارونی جمعیت به وجود آید بیشتر الکترون‌ها در تراز بالاتری (در مقایسه با تراز پایین‌تر) قرار دارند.

۲- فوتون گسیل شده در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند.
 ۳- فوتون گسیل شده با فوتون ورودی هم‌گام یا هم‌فاز است.
 اساس کار لیزرها گسیل القایی است. فرض کنید مطابق شکل زیر، به یک اتم برانگیخته فوتونی با انرژی مناسب بتابانیم، همان‌طور که گفتیم در این فرایند دو فوتون مشابه به وجود می‌آید. حال اگر هر یک از این فوتون‌ها به دو اتم برانگیخته دیگر بتابند، ۴ فوتون مشابه ایجاد می‌شود و اگر این فرایند ادامه پیدا کند، مجموعه‌ای از فوتون‌هایی هم‌بسامد، هم‌فاز و هم‌جهت به وجود می‌آیند که باریکه لیزر را تشکیل می‌دهند.



کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۲

شکل زیر، فرایند ایجاد باریکه لیزری را به طور طرح‌وار در ۴ مرحله نشان می‌دهد. نام مرحله ۲ و ۴ کدام است؟



۱) وارونی جمعیت و فرایند گسیل القایی
 ۲) برانگیخته معمولی و فرایند گسیل القایی
 ۳) وارونی جمعیت و فرایند گسیل خودبه‌خود
 ۴) برانگیخته معمولی و فرایند گسیل خودبه‌خود

پاسخ: گزینه ۱

مرحله ۲) وارونی جمعیت را نشان می‌دهد که در آن بیشتر الکترون‌ها در حالت برانگیخته قرار دارند.
 مرحله ۴) گسیل القایی را نشان می‌دهد که در آن، تابش یک فوتون ورودی باعث گسیل فوتون جدیدی می‌شود و در نهایت دو فوتون خارج می‌شوند.

بررسی گزینه‌ها:

- در گسیل القایی، یک چشمه انرژی خارجی باید وجود داشته باشد تا الکترون‌ها را به ترازهای انرژی بالاتر برانگیخته کند. این انرژی می‌تواند به روش‌های متعددی از جمله درخش‌های شدید نور معمولی و یا تخلیه‌های ولتاژ بالا فراهم شود. اگر انرژی کافی به اتم‌ها داده شود، الکترون‌های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته خواهند شد که به آن وارونی جمعیت گفته می‌شود. (✓)
- در گسیل القایی، سه ویژگی اصلی وجود دارد، یکی از این ویژگی‌ها، این است که، فوتون گسیل شده در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند. (✓)
- مدت زمانی که الکترون‌ها در ترازهای شبه پایدار باقی می‌مانند (10^{-3} s)، بسیار طولانی‌تر از مدت زمانی است که الکترون‌ها در حالت برانگیخته معمولی باقی می‌مانند (10^{-8} s). (✗)
- وارونی جمعیت الکترون‌ها در یک محیط لیزری، مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در ترازهایی موسوم به ترازهای شبه پایدار نسبت به تراز پایین‌تر بسیار بیشتر باشند. (✓)

۵۴- چه تعداد از عبارت های زیر، درست است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} C$)

الف: نوترون بار الکتریکی ندارد و جرمش اندکی بیشتر از جرم پروتون است.

ب: در هسته $^{103}_{Rh}$ ، اگر عدد نوترونی برابر ۵۸ باشد، بار الکتریکی خالص هسته، $14/8 \times 10^{-18} C$ است.

ج: ویژگی های هسته یک اتم را، فقط تعداد پروتون های هسته تعیین می کند.

د: ایزوتوپ $^{47}_{22}X$ را با روش شیمیایی، می توان از ایزوتوپ $^{49}_{22}X$ جدا کرد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

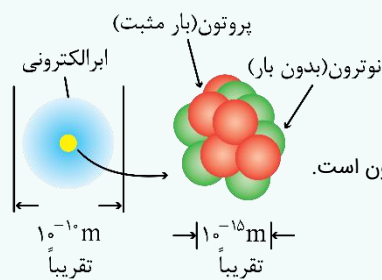
۱ (۱)

(متوسط - مفهومی و خط به خط کتاب درسی - ۱۲۰۶)

پاسخ: گزینه ۱

ساختار هسته

با ساختار هسته در درس شیمی آشنا شدین، ما اینجا بیشتر از جنبه درس فیزیک بررسیش می کنیم ولی خب اگر شیمیتون خوب باشه، حسابی بهتون کمک می کنه. یادتان هست که گفتیم در فیزیک هسته ای با ساختار، برهم کنش ها و واپاشی هسته های اتمی سروکار داریم. با توجه به شکل زیر، اتم از دو قسمت هسته و ابر الکترونی تشکیل شده است که هسته اتم در مرکز آن واقع شده است. ابعاد اتم تقریباً از مرتبه $10^{-10} m$ ابعاد هسته اتم تقریباً از مرتبه $10^{-15} m$ است. پس شعاع هسته اتم، تقریباً $\frac{1}{100000}$ شعاع اتم است.



با دقت در شکل مقابل می توان فهمید که حجم کل هسته بسیار کوچک تر از حجم کل اتم است. نوترون: هسته اتم از نوترون ها و پروتون ها تشکیل شده است که به طور کلی نوترون نامیده می شوند. نوترون که توسط جیمز چادویک، فیزیکدان انگلیسی کشف شد، بار الکتریکی ندارد و جرمش اندکی بیشتر از جرم پروتون است. جرم اتم ها و همچنین اجزای تشکیل دهنده اتم را، افزون بر یکای کیلوگرم با یکای جرم اتمی نیز بیان می کنند.

یکای جرم اتمی را با u یا amu نشان می دهند که برابر با $\frac{1}{12}$ جرم اتم کربن ۱۲ است.

برخی از ویژگی های فیزیکی ذرات تشکیل دهنده اتم:

ذره	بار الکتریکی (C)	جرم	
		کیلوگرم (kg)	یکای جرم اتمی (u)
الکترون	$-1/6 \times 10^{-19}$	$9/10389 \times 10^{-31}$	$5/4858 \times 10^{-4}$
پروتون	$+1/6 \times 10^{-19}$	$1/672622 \times 10^{-27}$	$1/007276$
نوترون	۰	$1/674929 \times 10^{-27}$	$1/008664$

اندکی اختلاف

$$1 amu = 1/66 \times 10^{-27} kg$$

تعداد پروتون های هسته را عدد اتمی (Z) می نامند و در عنصر های مختلف متفاوت است. در یک اتم خنثی، تعداد پروتون های هسته با تعداد الکترون های دور هسته برابر است. تعداد نوترون های هسته، عدد نوترونی (N) نامیده می شود. همچنین مجموع تعداد کل پروتون ها و نوترون ها را عدد جرمی (A) می نامند.

$$\underbrace{A}_{\text{تعداد پروتون ها و نوترون ها (عدد جرمی)}} = \underbrace{Z}_{\text{تعداد پروتون ها (عدد اتمی)}} + \underbrace{N}_{\text{تعداد نوترون ها (عدد نوترونی)}}$$

برای یک عنصر با نماد شیمیایی X ، نماد هسته به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\begin{matrix} \text{نماد عنصر} \leftarrow A & \leftarrow X & \leftarrow Z \\ \text{عدد نوترونی} \leftarrow N & & \text{عدد اتمی} \leftarrow Z \end{matrix}$$

ایزوتوپ ها:

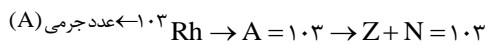
ویژگی های هسته را تعداد پروتون ها و نوترون های آن (عدد جرمی (A)) تعیین می کند. خواص شیمیایی هر اتم را تعداد پروتون های هسته (عدد اتمی (Z)) تعیین می کند. به همین سبب هسته هایی که تعداد پروتون مساوی ولی تعداد نوترون متفاوت دارند خواص شیمیایی یکسانی دارند، در نتیجه این هسته ها در جدول تناوبی عناصر هم مکان هستند و بنابراین ایزوتوپ (هم مکان) نامیده می شوند. به طور مثال، کربن به دو صورت پایدار و با درصدهای فراوانی بسیار متفاوتی در طبیعت یافت می شود که یکی از ۶ پروتون و ۶ نوترون ($^{12}_6C$)، و دیگری از آن ها از ۶ پروتون و ۷ نوترون ($^{13}_6C$) تشکیل شده است. این دو هسته، ایزوتوپ های کربن هستند. جرم های اتمی درج شده در جدول تناوبی عناصر، میانگین جرم های اتمی ایزوتوپ های مختلف هر عنصر است که با توجه به درصد فراوانی آن ها حساب شده اند. به جز هیدروژن، ایزوتوپ های مختلف یک هسته را با نام همان هسته مشخص می کنند. حواستان باشد که ایزوتوپ ها با روش های شیمیایی قابل جداسازی نیستند.

ایزوتوپ های مختلف چند عنصر و درصد فراوانی آن ها در طبیعت

نام عنصر	نماد	Z	N	درصد فراوانی در طبیعت	نام عنصر	نماد	Z	N	درصد فراوانی در طبیعت
هیدروژن ۱	H	۱	۰	۹۹/۹۸۸۵	کربن ۱۳	^{13}C	۶	۷	۱/۰۷
دوتریم (هیدروژن ۲، ^2H)	D	۱	۱	۰/۰۱۱۵	کربن ۱۴	^{14}C	۶	۸	یافت نمی شود
تریتیم (هیدروژن ۳، ^3H)	T	۱	۲	بسیار نادر	اورانیم ۲۳۵	^{235}U	۹۲	۱۴۳	۰/۷۱۶
کربن ۱۲	^{12}C	۶	۶	۹۸/۹۳	اورانیم ۲۳۸	^{238}U	۹۲	۱۴۶	۹۹/۲۸۴

بررسی موارد:

الف: نوترون بدون بار الکتریکی است و جرمش اندکی بیشتر از جرم پروتون است. (✓)
ب:



عدد نوترونی اتم، که همان تعداد نوترون های (N) هسته اتم است، برابر با ۵۸ است، با جایگذاری در رابطه $Z + N = 103$ ، تعداد پروتون های (Z) هسته اتم (عدد اتمی) را به دست می آوریم:

$$Z + N = 103 \xrightarrow{N=58} Z + 58 = 103 \rightarrow Z = 103 - 58 = 45$$

هسته اتم از نوترون ها و پروتون ها تشکیل شده است، نوترون بدون بار الکتریکی است اما پروتون دارای بار الکتریکی است و بار الکتریکی هر پروتون برابر با $+1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ است. پس بار الکتریکی خالص هسته از رابطه $q = +Ze$ ، به دست می آید:

$$q = +Ze \xrightarrow{Z=45} q = +45 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{C} = 7.2 \times 10^{-18} \text{C} = 7.2 \times 10^{-18} \text{C} \quad (*)$$

ج: (*)

این دو جمله را با هم اشتباه نگیرید:

۱- ویژگی های هسته یک اتم را تعداد پروتون ها و نوترون های اتم (عدد جرمی (A)) تعیین می کند.

۲- خواص شیمیایی هر اتم را تعداد پروتون های هسته (عدد اتمی (Z)) تعیین می کند.

د: تنها عناصری را می توان با روش شیمیایی از یکدیگر جدا کرد که عدد اتمی (Z) متفاوتی از یکدیگر داشته باشند و در واقع خواص شیمیایی شان متفاوت از یکدیگر باشد. ایزوتوپ ها (مانند ^{49}X و ^{47}X) به دلیل اینکه عدد اتمی (Z) برابر دارند، پس خواص شیمیایی شان یکسان است و نمی توان به روش شیمیایی، آن ها را از یکدیگر جدا کرد. (*)
پس ۱ مورد از مطالب داده شده، درست است.

گروه آموزشی ماز

۵۵- کدام گزینه نادرست است؟

- بیشتر جرم یک اتم در هسته آن متمرکز شده است.
- نیروی هسته ای، کوتاه برد است و تنها در فاصله ای کوچک تر از ابعاد هسته اثر می کند.
- جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون های تشکیل دهنده اش اندکی بیشتر است.
- هسته ها در واکنش شیمیایی برانگیخته نمی شوند.

(آسان - مفهومی و خط به خط کتاب درسی - ۱۲۰۶)

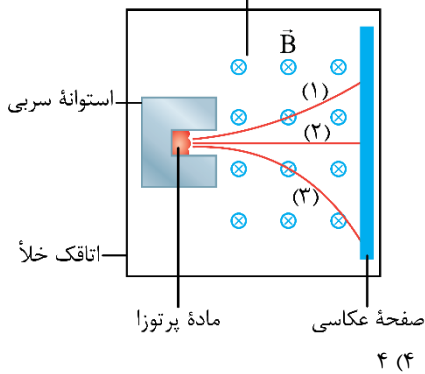
پاسخ: گزینه ۳

بررسی گزینه ها:

- بیشتر جرم یک اتم (بیش از ۹۹/۹ درصد آن) در هسته اتم متمرکز شده است. (✓)
- نیروی هسته ای، کوتاه برد است و تنها در فاصله ای کوچک تر از ابعاد هسته اثر می کند. (✓)
- جرم هسته از مجموع جرم نوکلئون های تشکیل دهنده اش (پروتون ها و نوترون ها) اندکی کمتر است. (*)
- هسته ها در واکنش شیمیایی برانگیخته نمی شوند. (✓)

گروه آموزشی ماز

میدان مغناطیسی (عمود بر صفحه کاغذ به طرف درون)



- ۵۶- شکل مقابل، طرح آزمایش ساده‌ای را نشان می‌دهد، که در آن مسیر پرتوهای گسیل شده (پرتوهای آلفا، بتای منفی و گاما) از یک ماده پرتوزای طبیعی مشخص شده، و این پرتوها از یک میدان مغناطیسی عبور می‌کنند. چه تعداد از عبارات‌های زیر نادرست است؟
- الف: میزان نفوذ پرتوی شماره (۲) در یک ورقه سربی، بیشتر از میزان نفوذ پرتوی شماره (۱) در همان ورقه سربی است.
- ب: جرم ذرات پرتوی شماره (۳)، از جرم ذرات پرتوی شماره (۱)، بیشتر است.
- ج: واپاشی ذرات پرتوی شماره (۱)، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها است.
- د: در واپاشی ذرات پرتوی شماره (۳)، یک نوترون درون هسته به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود.

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

(متوسط - مفهومی و خطبه‌خط کتاب درسی - ۱۳۰۶)

پاسخ: گزینه ۲

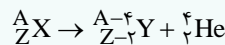
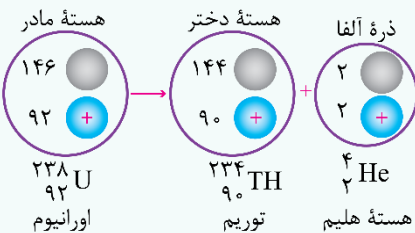
واپاشی آلفا

۱- این واپاشی در هسته‌های سنگین روی می‌دهد.

۲- پرتوهای α ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیوم (${}^4_2\text{He}$) هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند.

۳- برد پرتوهای α کوتاه است. این ذرات پس از طی مسافتی کوتاه در حدود ۱cm تا ۲cm در هوا یا هنگام عبور از لایه‌ای نازک از مواد جذب می‌شوند. پرتوهای α کمترین نفوذ را دارند و با ورقه نازک سربی یا ضخامت ناچیز (۰/۰۱mm) متوقف می‌شوند.

۴- اگر ذره‌های α از راه تنفس یا دستگاه گوارش وارد بدن شوند، باعث آسیب‌های شدید به بدن خواهند شد. به معادله این واپاشی و مثالی که مطرح شده است توجه کنید:



(واپاشی α)

واپاشی β^-

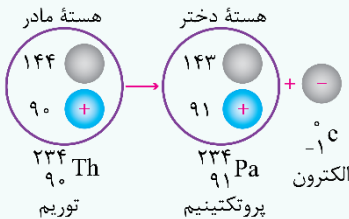
۱- این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها است.

۲- پرتوهای β^- در واقع همان الکترون‌ها هستند.

۳- پرتوهای β^- مسافت خیلی بیشتری را نسبت به پرتوهای α در سرب نفوذ می‌کنند. تقریباً پرتوهای β^- می‌توانند مسافتی در حدود (۰/۱mm) در سرب نفوذ کنند.

۴- الکترون گسیل شده در این واپاشی یکی از الکترون‌های مداری اتم نیست؛ این الکترون وقتی به وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به یک پروتون و یک الکترون تبدیل شود.

به معادله این واپاشی و مثالی که مطرح شده است، توجه کنید:



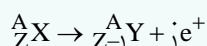
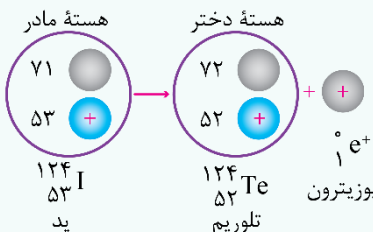
(واپاشی β^-)

واپاشی β^+

۱- در این واپاشی ذره گسیل شده توسط هسته، جرم یکسانی با الکترون دارد ولی به جای بار $-e$ دارای بار الکتریکی $+e$ است. به این الکترون مثبت، پوزیترون می‌گویند و با نماد β^+ یا e^+ نمایش داده می‌شود.

۲- مسافتی که پرتوهای β^+ در سرب نفوذ می‌کنند مانند β^- در حدود (۰/۱mm) است.

۳- هنگام واپاشی β^+ یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود. به معادله این واپاشی و مثالی که مطرح شده است، توجه کنید:



(واپاشی β^+)

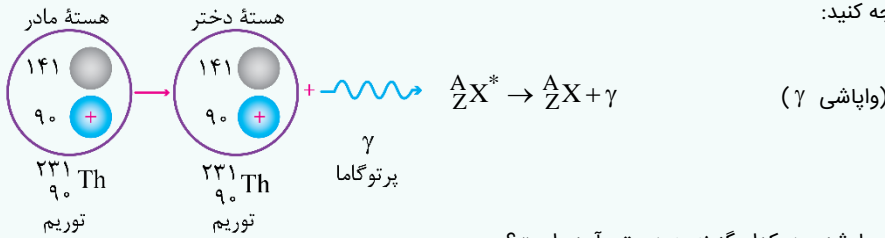
واپاشی γ

۱- اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل پرتوی گاما به حالت پایه می‌رسند.

۲- پرتوهای گاما از جنس امواج الکترومغناطیسی هستند و دارای بار الکتریکی و جرم نمی‌باشند و از فوتون‌های پرانرژی تشکیل شده‌اند.

۳- پرتوهای گاما بیشترین نفوذ را دارند و می‌توانند از ورقه سربی به ضخامت (۱۰۰mm) عبور کنند.

به معادله این واپاشی و مثالی که مطرح شده است، توجه کنید:

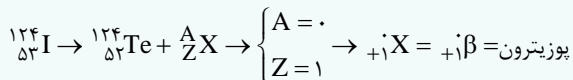


مثال:

شکل مقابل، واپاشی ید ۱۲۴ را نشان می‌دهد. نام ذره گسیل‌شده، در کدام گزینه به درستی آمده است؟

- (۱) آلفا
 - (۲) گاما
 - (۳) پوزیترون
 - (۴) الکترون
- پاسخ: ۳

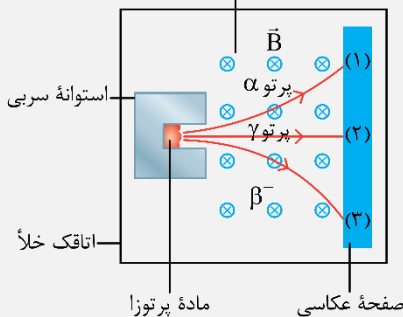
با توجه به واپاشی انجام‌شده می‌توان نوشت:



نکته:

در شکل مقابل یک ماده پرتوزا در محفظه‌ای قرار گرفته است و سه پرتوی آلفا (α)، بتای منفی (β^-) و گاما (γ) را تابش می‌کند. به نکات زیر توجه کنید.

- ۱- پرتو γ از جنس امواج الکترومغناطیسی است و بار الکتریکی ندارد، بنابراین در میدان مغناطیسی منحرف نمی‌شود و در مسیر مستقیم حرکت می‌کند.
- ۲- پرتوی α از جنس هسته اتم هلیوم است و دارای بار مثبت می‌باشد، بنابراین طبق قاعده دست راست، در میدان مغناطیسی نشان داده‌شده به طرف بالا منحرف می‌شود.
- ۳- پرتوی β^- از جنس الکترون است و دارای بار منفی می‌باشد، بنابراین در میدان مغناطیسی نشان داده‌شده به سمت پایین منحرف می‌شود.
- ۴- جرم ذرات α بسیار بیشتر از جرم ذرات β^- است، به همین دلیل میزان انحراف α کمتر از انحراف β^- می‌باشد.



بررسی موارد:

طبق نکات درسنامه، پرتوهای شماره (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب، پرتوهای آلفا (α)، بتای منفی (β^-) و گاما (γ) هستند.

الف: میزان نفوذ پرتوی گاما (γ) (پرتوی شماره ۲) در یک ورقه سربی، بیشتر از میزان نفوذ پرتوی آلفا (α) (پرتوی شماره ۱) در همان ورقه سربی است. (✓)

ب: جرم ذرات آلفا (α) (ذرات پرتوی شماره ۱)، بسیار بیشتر از جرم ذرات بتای منفی (β^-) (ذرات پرتو شماره ۳) است. (✗)

ج: واپاشی بتای منفی (β^-) (ذرات پرتوی شماره ۳) متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها است. (✗)

د: در واپاشی بتای منفی (β^-) (ذرات پرتوی شماره ۳)، یک نوترون درون هسته، به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود و الکترون از هسته خارج می‌شود. (گسیل می‌شود) (✓)

گروه آموزشی ماز

۵۷- حاصل واپاشی هسته مادر ${}_{90}^{232}\text{Th}$ ، یک هسته دختر A ، n ذره آلفا و ۴ ذره الکترون است و حاصل واپاشی هسته مادر ${}_{48}^{99}\text{Cd}$ ، یک هسته دختر m ، B ذره آلفا و ۱ ذره پوزیترون است. اگر تعداد نوترون‌های هسته دختر A و هسته دختر B ، به ترتیب ۱۲۶ و ۵۰ تا باشد، $m+n$ کدام است؟

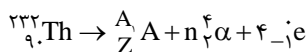
۸ (۴)
۷ (۳)
۶ (۲)
۵ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

معادله واپاشی هسته مادر ${}_{90}^{232}\text{Th}$ را می‌نویسیم:



پایستگی عدد جرمی: $232 = A_1 + n(4) + 4(0) \rightarrow 232 = A_1 + 4n$

پایستگی عدد اتمی: $90 = Z_1 + n(2) + 4(-1) \rightarrow 90 = Z_1 + 2n - 4 \rightarrow 94 = Z_1 + 2n$

سؤال گفته تعداد نوترون های هسته دختر A، ۱۲۶ تا است، پس $N_1 = 126$ است. حال داریم:

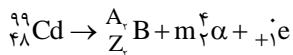
$$A_1 = N_1 + Z_1 \rightarrow N_1 = A_1 - Z_1 \rightarrow A_1 - Z_1 = 126$$

$$\begin{cases} 232 = A_1 + 4n \\ 94 = Z_1 + 2n \end{cases} \xrightarrow[\text{پایین کم می کنیم}]{\text{معادله بالا را از معادله}} 138 = (A_1 - Z_1) + (4n - 2n)$$

$$\xrightarrow{A_1 - Z_1 = 126} 138 = 126 + 2n \rightarrow 12 = 2n \rightarrow n = 6$$

گام دوم:

معادله واپاشی $^{99}_{48}\text{Cd}$ را می نویسیم:



پایستگی عدد جرمی : $99 = A_2 + m(4) + 0 \rightarrow 99 = A_2 + 4m$

پایستگی عدد اتمی : $48 = Z_2 + m(2) + 1 \rightarrow 48 = Z_2 + 2m + 1 \rightarrow 47 = Z_2 + 2m$

سؤال گفته تعداد نوترون های هسته دختر B، ۵۰ تا است، پس $N_2 = 50$ است. حال داریم:

$$A_2 = Z_2 + N_2 \rightarrow N_2 = A_2 - Z_2 \rightarrow A_2 - Z_2 = 50$$

$$\begin{cases} 99 = A_2 + 4m \\ 47 = Z_2 + 2m \end{cases} \xrightarrow[\text{پایین کم می کنیم}]{\text{معادله بالا را از معادله}} 52 = (A_2 - Z_2) + (4m - 2m)$$

$$\xrightarrow{A_2 - Z_2 = 50} 52 = 50 + 2m \rightarrow 2 = 2m \rightarrow m = 1$$

گام سوم:

خواسته سؤال برابر است با:

$$m + n = 1 + 6 = 7$$

گروه آموزشی ماز

- ۵۸- تعداد هسته های مادر اولیه در یک نمونه ماده پرتوزا، برابر ۲۵۶ است. اگر پس از گذشت ۱۸۰ دقیقه، تعداد هسته های اولیه، $93/75$ درصد کاهش یابد، پس از چند دقیقه از ابتدای واپاشی ماده پرتوزا، تعداد هسته های واپاشی شده ماده پرتوزا برابر ۲۲۴ می شود؟
- (۱) ۴۵ (۲) ۱۳۵ (۳) ۹۰ (۴) ۲۷۰

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۶)

پاسخ: گزینه ۲

پرتوزایی و نیمه عمر

۱- مدت زمانی که طول می کشد تا نیمی از یک ماده پرتوزا واپاشیده شود را «نیمه عمر» آن ماده می گویند و آن را با T نشان می دهند.

۲- اگر تعداد هسته های اولیه برابر N_0 باشد، پس از گذشت هر نیمه عمر، تعداد هسته های باقی مانده نصف می شود.

$$N_0 \xrightarrow{T_1/2} \frac{N_0}{2} \xrightarrow{T_1/2} \frac{N_0}{4} \xrightarrow{T_1/2} \frac{N_0}{8} \dots$$

۳- تعداد هسته های پرتوزای باقی مانده (N) از رابطه زیر به دست می آید:

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n = \frac{t}{T_1/2}$$

n : تعداد نیمه عمرها

N_0 : تعداد هسته های مادر اولیه در نمونه پرتوزا

$T_1/2$: نیمه عمر

t : زمان

۴- اختلاف تعداد هسته های مادر اولیه در نمونه پرتوزا و هسته های پرتوزای باقی مانده برابر تعداد هسته های واپاشی شده است.

$$N_{\text{واپاشیده}} = N_0 - N_{\text{باقی مانده}}$$

$$\rightarrow N_{\text{واپاشیده}} = N_0 - \frac{N_0}{2^n} = N_0 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

گام اول:

تعداد هسته‌های اولیه یک نمونه ماده پرتوزا (N_0) پس از گذشت $t_1 = 180 \text{ min}$ ، $\frac{93}{100}$ درصد کاهش یافته است. پس تعداد هسته‌های فعال باقی مانده برابر است با:

$$N = N_0 - \frac{93}{100} N_0 \rightarrow N = \frac{6}{100} N_0$$

گام دوم:

نیمه عمر (T) ماده پرتوزا را بر حسب دقیقه (min) به دست می‌آوریم:

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n=\frac{t}{T}} N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \xrightarrow[N=\frac{6}{100}N_0]{t=t_1=180 \text{ min}}$$

$$\frac{6}{100} N_0 = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{180}{T}} \rightarrow \frac{6}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{180}{T}} \rightarrow$$

$$\frac{625}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{180}{T}} \rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{180}{T}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{180}{T}} \rightarrow 4 = \frac{180}{T} \rightarrow T = \frac{180}{4} = 45 \text{ min}$$

گام سوم:

با توجه به اینکه پس از گذشت مدت زمان t_2 ، تعداد هسته‌های واپاشی شده ماده پرتوزا ($N_{\text{واپاشیده}}$)، ۲۲۴ تا است، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی مانده (پرتوزای باقی مانده N) را پس از گذشت مدت زمان t_2 ، به دست می‌آوریم:

$$N_{\text{پرتوزای باقی مانده}} = 256 - 224 = 32 \rightarrow N_{\text{پرتوزای باقی مانده}} = 256 - N_{\text{واپاشیده}} \xrightarrow[N_0=256]{N_{\text{واپاشیده}}=224} 224 = 256 - N_{\text{پرتوزای باقی مانده}} \rightarrow N_{\text{پرتوزای باقی مانده}} = 32$$

گام چهارم:

پس از گذشت مدت زمان t_2 ، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی مانده ($N_{\text{پرتوزای باقی مانده}}$)، برابر ۳۲ است، بنابراین:

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n=\frac{t}{T}} N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

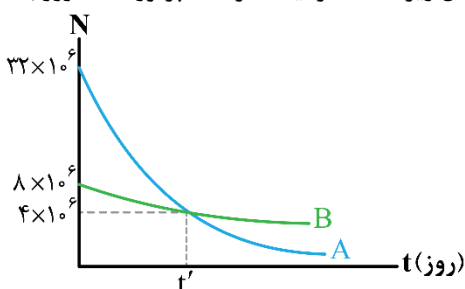
$$\xrightarrow[N_0=256, t=t_2, T=45 \text{ min}]{N=32} 32 = 256 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{45}} \rightarrow$$

$$\frac{32}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{45}} \xrightarrow[\text{مخرج کسر را تقسیم بر ۳۲ می‌کنیم}]{\text{در سمت چپ تساوی صورت و}} \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{45}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{45}} \rightarrow 3 = \frac{t_2}{45} \rightarrow t = 3 \times 45 = 135 \text{ min}$$

گروه آموزشی ماز

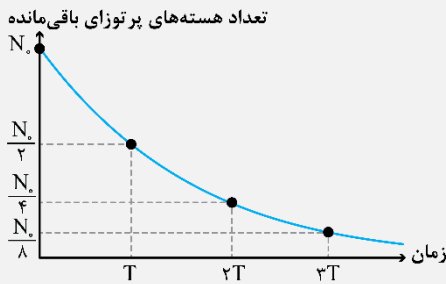
۵۹- نمودار تعداد هسته‌های پرتوزای باقی مانده، برای دو ماده پرتوزا A و B، بر حسب زمان مطابق شکل زیر است. اگر نیمه عمر ماده پرتوزا A، ۲ روز باشد، در ۶ روز سوم از ابتدای واپاشی ماده B، چند هسته آن دچار واپاشی می‌شوند؟



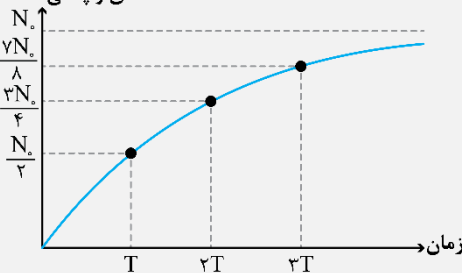
- (۱) 2×10^6
- (۲) $2/5 \times 10^6$
- (۳) 5×10^6
- (۴) 10^6

نکته:

۱- نمودار تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده یک ماده پرتوزا برحسب زمان مطابق شکل مقابل است.



۲- نمودار تعداد هسته‌های واپاشی‌شده برحسب زمان مطابق شکل زیر است. دقت کنید که در هر لحظه مجموع تعداد هسته‌های واپاشی‌شده و هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده برابر تعداد هسته‌های مادر اولیه است.



گام اول:

در زمان t' ، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده (N) در ماده پرتوزای A ، 4×10^6 تا است. با توجه به اینکه، تعداد هسته‌های مادر اولیه (N_0) در ماده پرتوزای A ، 32×10^6 تا است و همچنین، نیمه‌عمر ماده پرتوزا A (T_A) برابر ۲ روز است، زمان t' را برحسب روز به دست می‌آوریم:

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n=\frac{t}{T}} N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \xrightarrow{N=4 \times 10^6, N_0=32 \times 10^6, t=t', T_A=2 \text{ روز}} \rightarrow$$

$$4 \times 10^6 = 32 \times 10^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t'}{2}} \rightarrow \frac{4 \times 10^6}{32 \times 10^6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t'}{2}} \rightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t'}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t'}{2}} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t'}{2}} \rightarrow 3 = \frac{t'}{2} \rightarrow t' = 6 \text{ روز}$$

گام دوم:

در زمان $t' = 6$ روز، تعداد هسته‌های پرتوزای باقی‌مانده (N) در ماده پرتوزای B ، 4×10^6 تا است. با توجه به اینکه تعداد هسته‌های مادر اولیه (N_0) در ماده پرتوزای B ، 8×10^6 تا است، می‌توان فهمید در مدت ۶ روز، تعداد هسته‌های ماده B نصف شده است، بنابراین نیمه‌عمر ماده پرتوزای B (T_B) برابر روز $T_B = 6$ است.

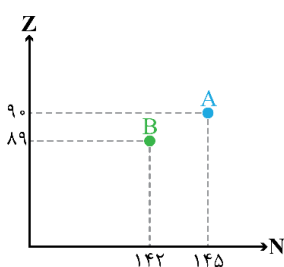
گام سوم:

با توجه به شکل زیر، تعداد هسته‌های باقی‌مانده B در ۶ روز سوم، از 2×10^6 به 10^6 رسیده است و به اندازه 10^6 هسته آن دچار واپاشی می‌شوند.

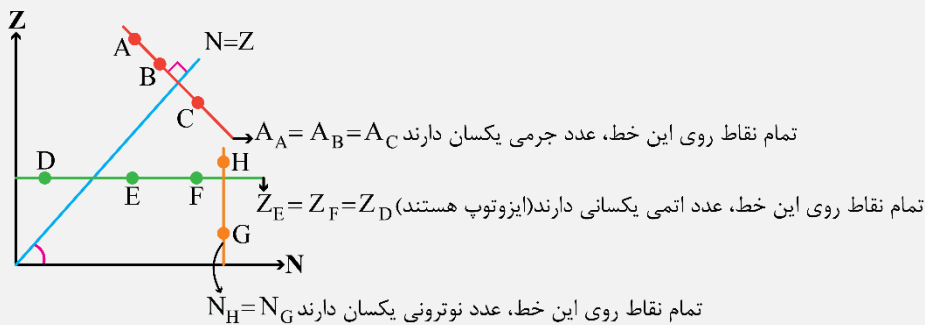
$8 \times 10^6 \xrightarrow{\text{روز اول}} 4 \times 10^6 \xrightarrow{\text{روز دوم}} 2 \times 10^6 \xrightarrow{\text{روز سوم}} 10^6$
 در این بازه ۱۰ هسته دچار واپاشی شده‌اند

گروه آموزشی ماز

۶۰- هسته A با انجام کدام یک از واپاشی‌های زیر به هسته B تبدیل می‌شود؟



- (۱) یک واپاشی β^+ و یک واپاشی α
- (۲) یک واپاشی β^- و یک واپاشی α
- (۳) یک واپاشی β^+ و دو واپاشی α
- (۴) یک واپاشی β^- و دو واپاشی α



نام واپاشی	ذره یا پرتوی تابش شده	هسته مادر	هسته دختر	تغییر مکان در جدول تناوبی عناصرها	معادله واکنش	انحراف در میدان مغناطیسی	نفوذپذیری در سرب	اتفاقات واکنش
آلفا	${}^4_2\text{He}$	${}_Z^AX$	${}_{Z-2}^{A-4}Y$	دو خانه به عقب	${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + \alpha$	α	0.1 mm	هسته دو پروتون و دو نوترون از دست می‌دهد
بتای منفی	${}_{-1}^0e^-$	${}_Z^AX$	${}_{Z+1}^AY$	یک خانه به جلو	${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}^AY + \beta^-$	β^-	0.1 mm	یک نوترون به یک پروتون و یک الکترون تبدیل می‌شود و عدد اتمی هسته یک واحد افزایش می‌یابد.
بتای مثبت	${}_{+1}^0e^+$	${}_Z^AX$	${}_{Z-1}^AY$	یک خانه به عقب	${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + \beta^+$	β^+	0.1 mm	یک پروتون به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود و عدد اتمی هسته یک واحد کاهش می‌یابد.

پاسخ سریعی:

هسته A باید واپاشی انجام دهد که سه نوترون آن کم شود و یک پروتون آن نیز کاهش یابد. فرض کنیم n ذره α و m ذره β^- تابش شده باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$${}_{90}^{235}\text{A} \rightarrow {}_{89}^{231}\text{B} + n {}_2^4\alpha + m {}_{-1}^0e^-$$

$$235 = 231 + 4n \rightarrow n = 1$$

$$90 = 89 + 2n - m \xrightarrow{n=1} m = 1$$

بنابراین با تابش یک ذره α و یک ذره β^- ، هسته A به هسته B تبدیل می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۶۱- تابع کار فلزهای A و B به ترتیب $1/6 \text{ eV}$ و $2/4 \times 10^{-19} \text{ J}$ است. اختلاف بسامد قطع این دو فلز چند تراهرتز است؟

$$(h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV.s}, e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C})$$

۱۰ (۴)

۳۷۵ (۳)

۷۵ (۲)

۲۵ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

یادآوری

برای به دست آوردن بسامد قطع فلز از رابطه کمک می گیریم:

$$hf = W \rightarrow f = \frac{W}{h}$$

پاسخ شریقی:

با توجه به نکته فوق به راحتی می توان نوشت:

$$f_A = \frac{W_A}{h} = \frac{1/6}{4 \times 10^{-15}} = 4 \times 10^{14} \text{ Hz} = 400 \text{ THz}$$

$$f_B = \frac{W_B}{h} = \frac{2/4 \times 10^{-19}}{1/6 \times 10^{-19}} = 1/5 \rightarrow f_B = \frac{1/5}{4 \times 10^{-15}} = 3/75 \times 10^{14} \text{ Hz} = 375 \text{ THz}$$

$$\rightarrow f_A - f_B = 400 - 375 = 25 \text{ THz}$$

گروه آموزشی ماز

۶۲- به فلز A با طول موج قطع ۶۰۰nm، یک بار نوری با طول موج ۵۰۰nm می تابانیم و بیشینه تندی فوتوالکترون ها v_1 می شود. بار دیگر نوری با طول موج

۴۰۰nm به این فلز می تابانیم و بیشینه تندی فوتوالکترون ها v_2 می شود. نسبت $\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(۲) ۵

(۱) $\frac{5}{2}$

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

مقایسه بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون ها در دو حالت:

$$K_{\max} = hf - W, \quad \frac{W}{f} = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{K_{\max_2}}{K_{\max_1}} = \frac{\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_0}} = \frac{\frac{1}{400} - \frac{1}{600}}{\frac{1}{500} - \frac{1}{600}} = \frac{1}{3000} = \frac{5}{2}$$

گام دوم:

مقایسه بیشینه تندی فوتوالکترون ها:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow \frac{K_{\max_2}}{K_{\max_1}} = \left(\frac{v_{\max_2}}{v_{\max_1}} \right)^2 \rightarrow \frac{5}{2} = \left(\frac{v_{\max_2}}{v_{\max_1}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{v_{\max_2}}{v_{\max_1}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۶۳- به ترتیب از راست به چپ، کلمات کدام یک از گزینه ها متن زیر را به درستی تکمیل می کنند؟

تجربه نشان می دهد اگر بتوان نوترون های تند را به نحوی کند ساخت که انرژی جنبشی آنها به حدود ۰/۰۴eV یا کمتر از آن برسد، احتمال جذب

آنها توسط ایزوتوپ های $^{235}_{92}\text{U}$ می یابد. آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت (اتم های کربن) از جمله موادی هستند که به

عنوان کندساز نوترون ها در واکنش های هسته ای استفاده می شوند.

(۲) کاهش - گداخت

(۱) افزایش - گداخت

(۴) کاهش - شکافت

(۳) افزایش - شکافت

(آسان - مفهومی و خطبه خط کتاب درسی - ۱۴۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

نوترون‌های آزاد شده در فرایند شکافت ایزوتوپ ^{235}U ، انرژی جنبشی زیادی دارند (به طور متوسط حدود 2MeV) و به نوترون‌های تند معروف‌اند. این نوترون‌ها، با احتمال بسیار بیشتری جذب ایزوتوپ ^{238}U می‌شوند. تجربه نشان می‌دهد اگر بتوان نوترون‌های تند را به نحوی کند ساخت که انرژی جنبشی آن‌ها به حدود 0.04eV یا کمتر از آن برسد، احتمال جذب آن‌ها توسط ایزوتوپ‌های ^{235}U افزایش می‌یابد. این افزایش احتمال می‌تواند برای ایجاد واکنش زنجیری شکافت کافی باشد. آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت (اتم‌های کربن) از جمله موادی هستند که به عنوان کندساز نوترون‌ها در واکنش‌های شکافت هسته‌ای استفاده می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

۶۴- در یک واکنش هسته‌ای، جرم محصولات 0.02u کمتر از هسته‌های اولیه است. انرژی آزادشده در این واکنش چند مگاالکترون‌ولت است؟

$$c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}, \text{ و هر واحد جرم اتمی معادل } 1.6 \times 10^{-27} \text{kg} \text{ فرض شود.}$$

۲۸۸ (۴)

۲۸/۸ (۳)

۱/۸ (۲)

۱۸ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۶)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

اگر در یک واکنش، مجموع جرم محصولات به اندازه Δm کمتر از مجموع جرم هسته‌های اولیه باشد، انرژی آزاد شده در این واکنش برابر $E = \Delta mc^2$ است.

گام اول:

محاسبه جرم بر حسب کیلوگرم:

$$\Delta m = 0.02\text{u} = 0.02 \times 1.6 \times 10^{-27} = 3.2 \times 10^{-29} \text{kg}$$

گام دوم:

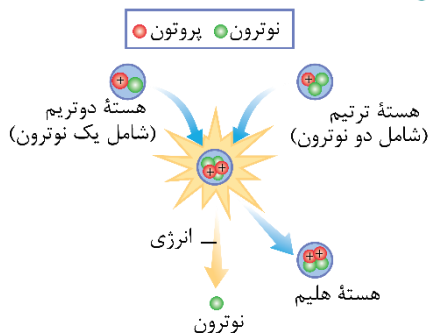
محاسبه انرژی آزادشده:

$$E = \Delta mc^2 = 3.2 \times 10^{-29} \times (3 \times 10^8)^2 = 2.88 \times 10^{-12} \text{J}$$

$$\Rightarrow E = \frac{2.88 \times 10^{-12}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{eV} = 1.8 \times 10^7 \text{eV} = 18 \text{MeV}$$

گروه آموزشی ماز

۶۵- کدام یک از عبارات‌های زیر در مورد شکل مقابل صحیح است؟



(۱) این شکل فرایند شکافت هسته‌ای را نشان می‌دهد.

(۲) مجموع جرم محصولات فرایند، برابر با مجموع جرم هسته‌های اولیه است.

(۳) نوترون به‌دست آمده در پایان فرایند، انرژی جنبشی زیادی دارد.

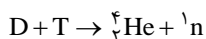
(۴) این آزمایش می‌تواند در دمایی حدود 1000°C انجام شود.

(متوسط - مفهومی و خطبه خط کتاب درسی - ۱۴۰۶)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

شکل نشان داده شده، فرایند گداخت یا همجوشی هسته‌ای نام دارد. در فرایند گداخت هسته‌ای، دو هسته سبک با یکدیگر ترکیب می‌شوند و هسته سنگین‌تری به وجود می‌آورند. مثلاً در این شکل، واکنش گداخت زیر رخ داده است:

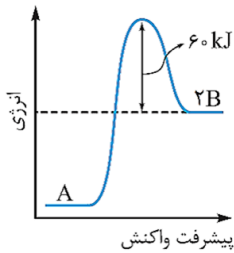


در این واکنش با همجوشی هسته‌های دو ایزوتوپ هیدروژن یعنی دوتریم و تریتیم، هسته هلیم و یک نوترون پرنرژی تولید می‌شود. در واکنش گداخت، مجموع جرم محصولات فرایند، کمتر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است. در اینجا نیز این اختلاف جرم با توجه به رابطه $E = mc^2$ ، سبب آزاد شدن مقدار زیادی انرژی می‌شود.

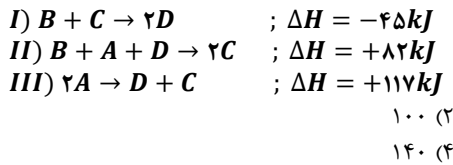


در فرایند گداخت، دو هسته کم جرم باید به قدر کافی به هم نزدیک شوند تا نیروی کوتاه‌برد هسته‌ای بتواند آن‌ها را کنار هم نگه دارد و واکنش گداخت انجام شود. ولی، هر هسته، بار مثبت دارد و هسته دیگر را دفع می‌کند، برای آن که هسته‌ها با وجود این نیروی رانشی بسیار قوی، بتوانند به هم گداخته شوند، باید دما بسیار بالا باشد تا هسته‌ها با انرژی جنبشی زیادی به یکدیگر برخورد کنند. به طور مثال، برای شروع واکنش دوتریم - تریتم، به دمایی حدود ده‌ها میلیون درجه سلسیوس نیاز است.

گروه آموزشی ماز



۶۶- نمودار مقابل، روند تغییر انرژی در یک واکنش را نشان می‌دهد. با توجه به معادله واکنش‌های زیر، مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش انجام شده برابر با چند کیلوژول خواهد بود؟



۱۰۰ (۲)

۱۴۰ (۴)

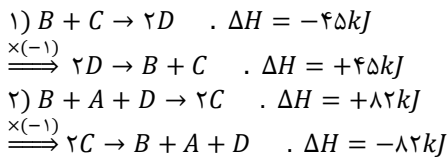
۱۲۰ (۱)

۱۶۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ شریعی

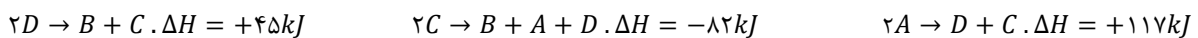
با استفاده از قانون هس، می‌توانیم مقدار ΔH برخی از واکنش‌ها را به طور دقیق محاسبه کنیم. بر اساس این قانون، اگر معادله واکنشی را بتوان از جمع معادله دو یا چند واکنش دیگر به دست آورد، مقدار ΔH آن واکنش نیز از جمع جبری ΔH همان واکنش‌ها بدست می‌آید. ابتدا با استفاده از قانون هس، آنتالپی واکنش شیمیایی $A \rightarrow 2B$ را بدست می‌آوریم. در واکنش موردنظر، گونه B در سمت راست با ضریب دو است. پس واکنش اول و دوم را در (-1) ضرب می‌کنیم. بر این اساس، داریم:



گونه A در واکنش اصلی، در سمت چپ با ضریب ۱ وجود دارد، پس معادله واکنش سوم را تغییر نمی‌دهیم. در این حالت، با جمع واکنش سوم با دو واکنش قبلی، معادله واکنش کلی بدست می‌آید. در این حالت، معادله واکنش سوم به صورت زیر باقی می‌ماند:



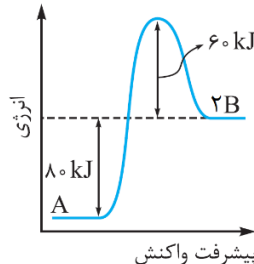
معادله واکنش‌های نهایی ایجاد شده به صورت زیر خواهد بود:



بنابراین آنتالپی واکنش $A \rightarrow 2B$ برابر است با:

$\Delta H = 45 + (-82) + 117 = 80 kJ$

پس مقدار ΔH واکنش مورد نظر برابر با ۸۰ کیلوژول خواهد بود. همانطور که می‌دانیم، انرژی فعال‌سازی معادل با حداقل انرژی موردنیاز برای شروع شدن یک واکنش شیمیایی است. در نمودار انرژی-پیشرفت واکنش، تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها با قله نمودار، انرژی فعال‌سازی واکنش رفت را نشان می‌دهد. همچنین تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها، معادل با مقدار ΔH است. بنابراین نمودار انرژی-پیشرفت واکنش به صورت زیر خواهد بود:



با توجه به توضیحات ذکر شده، انرژی فعال‌سازی واکنش (تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده با قله نمودار) را محاسبه می‌کنیم:

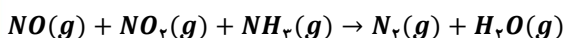
$E_a = 80 + 60 = 140 kJ$

بنابراین انرژی فعال‌سازی واکنش $A \rightarrow 2B$ برابر با ۱۴۰ کیلوژول است.

به حداقل مقدار انرژی مورد نیاز برای شروع شدن یک واکنش شیمیایی، انرژی فعال‌سازی گفته می‌شود. به عبارت دیگر، برای آغاز شدن یک واکنش شیمیایی، واکنش‌دهنده‌ها باید مقدار معینی انرژی داشته باشند. بر این اساس، می‌توان گفت واکنش‌ها صرف نظر از علامت ΔH خود، برای آغاز شدن به مقداری انرژی نیاز دارند که با نماد E_a مشخص می‌شود. کاتالیزورها باید در شرایط انجام واکنش، پایداری شیمیایی و گرمایی مناسبی داشته باشند. توجه داریم که استفاده از کاتالیزورها در صنایع گوناگون می‌تواند سبب کاهش آلودگی محیط زیست شود. برای مثال، با استفاده از کاتالیزورها می‌توان واکنش‌ها را در دماهای پایین‌تر و با سرعت مناسب انجام داد و در نتیجه میزان مصرف سوخت‌های فسیلی را کاهش داد. همانطور که می‌دانیم، کاتالیزورها هیچ تأثیری بر روی مقدار نهایی فراورده‌های واکنش، مقدار ΔH واکنش و سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ندارند و فقط با کاهش مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش‌ها، سرعت انجام شدن آن‌ها را افزایش می‌دهند.

۶۷- یک خودروی دیزلی به ازای طی هر کیلومتر مسافت، مخلوط ۳/۸ گرمی از گازهای NO و NO_۲ با نسبت مولی برابر را وارد هوا می‌کند. برای حذف ۸۰٪ از اکسیدهای نیتروژن تولید شده در طول مسافت ۲۵۰۰ کیلومتر توسط این خودرو، به چند کیلوگرم آمونیاک نیاز بوده و طی این فرایند، درصد جرمی فراورده قطبی در میان مواد تولید شده به تقریب چقدر می‌شود؟

(O = ۱۶ و N = ۱۴ و H = ۱ : g.mol⁻¹)



(معادله واکنش را موازنه کنید.)

۵۸ - ۳/۸ (۴)

۴۹ - ۳/۸ (۳)

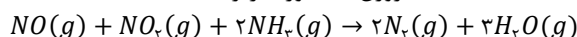
۵۸ - ۳/۴ (۲)

۴۹ - ۳/۴ (۱)

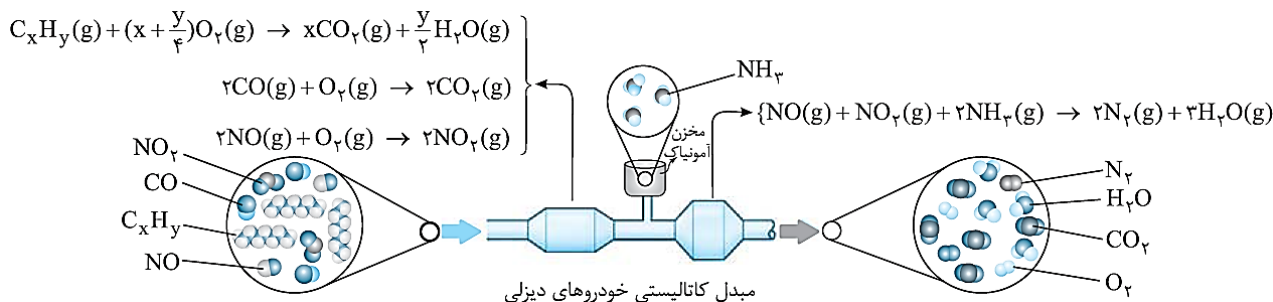
پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

مبدل کاتالیستی موجود در ساختار خودروهای بنزینی، توانایی حذف اکسیدهای نیتروژن تولید شده در خودروهای دیزلی را ندارند. واکنش انجام شده در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی به منظور حذف اکسیدهای نیتروژن، به صورت زیر است:



در این مبدل‌های کاتالیستی، اکسیدهای نیتروژن (گازهای نیتروژن مونوکسید و نیتروژن دی‌اکسید) با آمونیاک واکنش داده و به مواد کم‌خطرتر مثل نیتروژن و بخار آب تبدیل می‌شوند. توجه داریم که آمونیاک، از یک منبع خارجی وارد ساختار این مبدل شده و چون در ساختار آمونیاک اتم نیتروژن وجود دارد، پس می‌توان گفت طی این فرایند شمار اتم‌های نیتروژن موجود در مخلوط گازی افزایش پیدا کرده است. معادله واکنش‌های شیمیایی انجام شده در این مبدل‌ها به صورت زیر است:



با توجه به معادله بالا، به ازای مصرف هر ۲ مول آمونیاک، از ورود ۲ مول گاز آلاینده (مجموعی از اکسیدهای نیتروژن که ۷۶ گرم دارند) به هوا جلوگیری می‌شود. در قدم اول، حساب می‌کنیم به ازای طی هر کیلومتر، چند مول آلاینده تولید می‌شود:

$$? \text{ mol آلاینده} = 1 \text{ km} \times \frac{3/8 \text{ g آلاینده}}{1 \text{ km}} \times \frac{2 \text{ mol آلاینده}}{76 \text{ g آلاینده}} = 0.1 \text{ mol}$$

بنابراین به ازای طی هر کیلومتر مسافت، مقدار ۰/۰۵ مول از هر یک از گازهای NO و NO_۲ آزاد می‌شود. حالا حساب می‌کنیم گازهای آلاینده آزاد شده حین طی کردن مسافت ۲۵۰۰ کیلومتری با چند کیلوگرم آمونیاک واکنش می‌دهند:

$$? \text{ kg } NH_3 = 2500 \text{ km} \times \frac{0.05 \text{ mol } NO}{1 \text{ km}} \times \frac{2 \text{ mol } NH_3}{1 \text{ mol } NO} \times \frac{17 \text{ g } NH_3}{1 \text{ mol } NH_3} \times \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} = 4.25 \text{ kg}$$

می‌خواهیم ۸۰٪ از اکسیدهای نیتروژن تولید شده در موتور این خودرو را حذف کنیم، پس مقدار آمونیاک مورد نیاز معادل با ۰/۸ برابر مقدار آمونیاک بدست آمده از محاسبات بالا می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\text{جرم آمونیاک لازم} = 4.25 \text{ kg } NH_3 \times 0.8 = 3.4 \text{ kg}$$

در ادامه، جرم آب (فراورده با $\mu > 0$) و جرم N_۲ (فراورده با $\mu = 0$) را حساب می‌کنیم:

$$? \text{ g } H_2O = 3.4 \text{ kg } NH_3 \times \frac{1000 \text{ g } NH_3}{1 \text{ kg } NH_3} \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{17 \text{ g } NH_3} \times \frac{3 \text{ mol } H_2O}{2 \text{ mol } NH_3} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} = 5400 \text{ g}$$

$$? \text{ g } N_2 = 3.4 \text{ kg } NH_3 \times \frac{1000 \text{ g } NH_3}{1 \text{ kg } NH_3} \times \frac{1 \text{ mol } NH_3}{17 \text{ g } NH_3} \times \frac{2 \text{ mol } N_2}{2 \text{ mol } NH_3} \times \frac{28 \text{ g } N_2}{1 \text{ mol } N_2} = 5600 \text{ g}$$

در نهایت، درصد جرمی H_۲O را در میان فراورده‌های تولید شده حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی } H_2O = \frac{\text{جرم } H_2O}{\text{جرم } H_2O + \text{جرم } N_2} \times 100 = \frac{5400}{5400 + 5600} \times 100 \approx 49 \text{ درصد}$$

۶۸- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) انرژی فعال سازی واکنش تولید متانول از H_2 و CO در دماهای $300^\circ C$ و $500^\circ C$ برابر با هم است.
- (۲) انرژی فعال سازی واکنش سوختن فسفر سفید، کمتر از انرژی فعال سازی واکنش سوختن هیدروژن است.
- (۳) کاتالیزگر موجود در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، ΔH واکنش انجام شده در این سلول را کاهش می دهد.
- (۴) در دمای اتاق، واکنش بین گازهای هیدروژن و اکسیژن در حضور توری پلاتینی، به صورت انفجاری انجام می شود.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

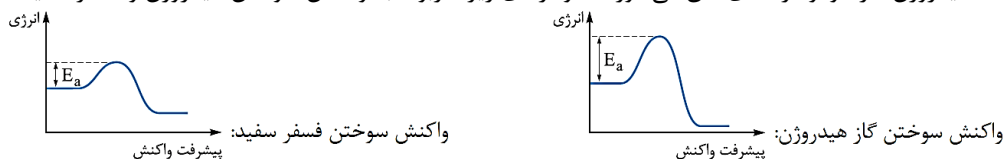
کاتالیزگر موجود در آند و کاتد سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، همانند کاتالیزگر استفاده شده در سایر واکنش ها، انرژی فعال سازی واکنش انجام شده در این سلول را کاهش داده و موجب افزایش سرعت انجام شدن واکنش می شود، اما تاثیری در ΔH واکنش ندارد. توجه داریم که کاتالیزگرها هم در آند و هم در کاتد سلول های سوختی وجود دارند.

سلول سوختی، نوعی سلول گالوانی است که توسط شیمی دان ها و برای گذر از تنگنای تولید انرژی و کاهش آلودگی محیط زیست پیشنهاد می شود. این سلول ها رد پای گاز کربن دی اکسید را کاهش می دهند. رایج ترین سلول سوختی، سلول هیدروژن-اکسیژن است که در آن گاز هیدروژن به آرامی و تحت یک شرایط کنترل شده با گاز اکسیژن وارد واکنش شده و اکسید می شود. طی این فرایند، بخش زیادی از انرژی شیمیایی ذخیره شده در مولکول های هیدروژن به انرژی الکتریکی تبدیل می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) انرژی فعال سازی واکنش ها به دمای محیط واکنش ربطی ندارد و در دماهای مختلف یکسان است. افزایش دما از $300^\circ C$ به $500^\circ C$ ، تنها باعث تامین انرژی فعال سازی شده و مقدار آن را تغییر نمی دهد. توجه داریم که تنها کاتالیزگر می تواند مقدار انرژی فعال سازی واکنش را با استفاده از تغییر مسیر انجام شدن آن واکنش کاهش دهد.

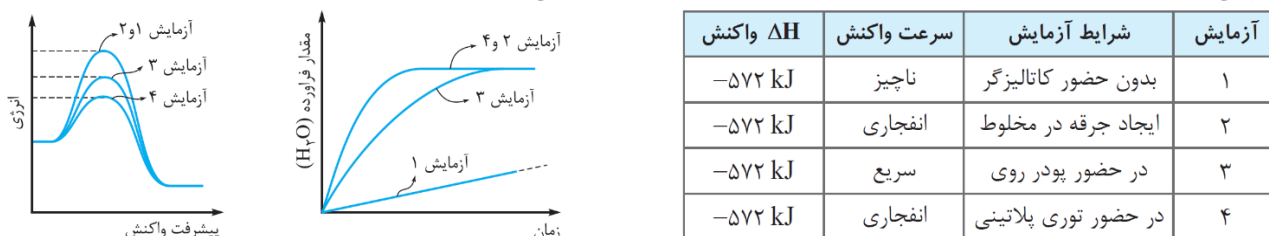
۲) فسفر سفید برخلاف هیدروژن، در هوا و در دمای اتاق می سوزد. نمودارهای زیر، مربوط به واکنش سوختن هیدروژن و فسفر سفید هستند:



چون مقدار انرژی فعال سازی واکنش سوختن فسفر سفید کمتر است، این واکنش با سرعت بیشتری انجام می شود. به همین خاطر است که برای نگهداری فسفر سفید، یک نمونه از آن را در زیر آب نگه می دارند. تصویر زیر، نمونه ای از فسفر سفید در زیر آب را نشان می دهد:



۴) گازهای هیدروژن و اکسیژن در دمای اتاق با هم واکنش نمی دهند؛ اما در حضور توری پلاتینی به عنوان کاتالیزگر، واکنش این گازها به صورت انفجاری انجام می شود. جدول زیر، شرایط واکنش این گازها با یکدیگر در دمای اتاق را نشان می دهد:



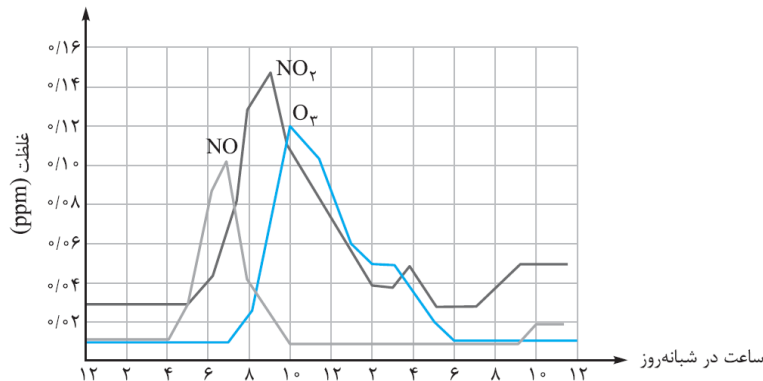
با توجه به تصویر فوق، فلز روی در مقایسه با فلز پلاتین، انرژی فعال سازی واکنش سوختن H_2 را به مقدار کمتری کاهش می دهد. به همین خاطر، واکنش مورد نظر در حضور فلز روی، با سرعت کمتری انجام می شود.

گروه آموزشی ماز

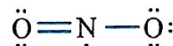
۶۹- از میان گازهای اوزون، نیتروژن مونوکسید و نیتروژن دی اکسید، گازی که حداکثر غلظت آن در هوای شهرهای آلوده بیشتر از سایر گازها است، همانند مولکول ساختار داشته و عدد اکسایش اتم مرکزی در آن، مشابه عدد اکسایش اتم مرکزی در مولکول است.

- (۱) هیدروژن سولفید - خمیده - گوگرد دی اکسید
- (۲) کربنیل سولفید - خطی - کربن دی اکسید
- (۳) کربن دی اکسید - خطی - گوگرد تری اکسید
- (۴) گوگرد دی اکسید - خمیده - اکسیژن دی فلوئورید

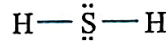
نمودار زیر، روند تغییر غلظت سه مورد از گازهای آلاینده موجود در هواکره را نشان می‌دهد:



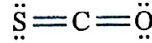
همانطور که مشخص است، حداکثر غلظت گاز NO_2 در هوای شهرهای بزرگ بیشتر از حداکثر غلظت گاز اوزون در هوای این شهرها بوده و حداکثر غلظت گاز اوزون نیز بیشتر از حداکثر غلظت گاز NO است. گازهای NO_2 و NO ، از جمله گونه‌های رادیکال آزاد موجود در هوای آلوده هستند که باعث ایجاد بیماری‌های تنفسی می‌شوند. ساختار مولکولی گاز NO_2 به صورت زیر است:



چون روی اتم مرکزی این مولکول یک عدد الکترون ناپیوندی وجود دارد، این مولکول ساختار خمیده پیدا کرده و اتم‌های سازنده آن روی یک خط راست قرار نمی‌گیرند. ساختار مولکول گوگرد دی‌اکسید و هیدروژن سولفید نیز به صورت زیر است:



چون روی اتم مرکزی این دو مولکول نیز تعدادی الکترون ناپیوندی وجود دارد، این مولکول‌ها هم ساختار خمیده پیدا کرده و اتم‌های سازنده آن‌ها نیز روی یک خط راست قرار نمی‌گیرند. ساختار مولکولی کربن دی‌اکسید و کربنیل سولفید (SCO) نیز به صورت زیر است:



چون روی اتم مرکزی این دو مولکول هیچ الکترون ناپیوندی وجود ندارد، این مولکول‌ها ساختار خطی پیدا کرده و اتم‌های سازنده آن‌ها روی یک خط راست قرار می‌گیرند. در قدم بعد، عدد اکسایش اتم نیتروژن در مولکول NO_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$NO_2: N \text{ عدد اکسایش اتم } N = +4 \implies (-2) \times 2 + x = 0 \implies x = +4$$

در نهایت، عدد اکسایش اتم مرکزی را گوگرد دی‌اکسید و اکسیژن دی‌فلوئورید محاسبه می‌کنیم.

$$SO_2: S \text{ عدد اکسایش اتم } S = +4 \implies (-2) \times 2 + x = 0 \implies x = +4$$

$$OF_2: O \text{ عدد اکسایش اتم } O = +2 \implies (-1) \times 2 + x = 0 \implies x = +2$$

گروه آموزشی ماز

۷۰- چه تعداد از عبارتهای داده شده درست است؟

آ: در سطح سرامیک به کاررفته در ساختار مبدل کاتالیستی، توده‌هایی با قطر چند میکرومتر از سه فلز دسته d وجود دارد.

ب: اغلب واکنش‌های مربوط به حذف انواع آلاینده‌ها در مبدل‌های کاتالیستی خودروها، از نوع اکسایش-کاهش نیستند.

پ: کاتالیزورها در واکنش‌های شیمیایی شرکت نکرده و در طول انجام شدن واکنش نیز جرم آن‌ها ثابت باقی می‌ماند.

ت: پس از استفاده از مبدل کاتالیستی، مقدار گاز NO خارج شده از اگزوز خودرو کمتر از C_xH_y خارج شده می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

فقط عبارت (ت) درست است.

آ: شیمی‌دان‌ها با قراردادن کاتالیزگرهای مناسب بر سر راه گازهای خروجی از موتور خودروها، توانستند واکنش‌های مربوط به حذف آلاینده‌های تولیدشده در موتور خودروها را با سرعت بالاتری به انجام برسانند و با این روش، مقدار زیادی (نه همه!) از گازهای آلاینده را به فرآورده‌های بی‌خطر یا کم‌خطرتر مثل گاز

کربن دی اکسید و ... تبدیل کنند. در سطح سرامیک‌های به کار رفته در ساختار مبدل کاتالیستی، توده‌هایی از سه فلز دسته d یعنی عناصر Pd و Rh با قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر به کار می‌روند.

کارایی مبدل‌های کاتالیستی، به نوع کاتالیزگرهای موجود در آن‌ها و شرایط استفاده از کاتالیزگرها بستگی دارد. به عنوان مثال، این مبدل‌ها را می‌توان به شکل یک قطعه سرامیکی ساخت که به شکل توری درآمده و فلزهای رودیم، پالادیم و پلاتین بر روی آن‌ها نشاندۀ شده است. در نقطه مقابل، سرامیک موجود در این مبدل‌ها را می‌توان به شکل مش (دانه)‌های ریز درآورده و کاتالیزگرهای فلزی را بر روی سطح دانه‌ها پخش کرد. بدیهی است که در حالت دوم (ساختن سرامیک به صورت مش)، سطح تماس کاتالیزگرها با گازهای آلاینده افزایش پیدا کرده و مقدار بیشتری از گازهای آلاینده توسط مبدل کاتالیستی حذف می‌شوند و در نتیجه کارایی مبدل افزایش پیدا می‌کند. کاتالیزگرهای موجود در مبدل‌های کاتالیستی، بارها و بارها در واکنش‌های مربوط به حذف آلاینده‌ها شرکت می‌کنند ولی مصرف نمی‌شوند. توجه داریم که این کاتالیزگرها گاهی با برخی از مواد افزودنی موجود در سوخت‌ها وارد واکنش شده و کارایی خود را از دست می‌دهند. در این شرایط، کارایی مبدل کاتالیستی کاهش پیدا کرده و این مبدل دیگر قابل استفاده نیست.

ب: در واکنش‌های مربوط به حذف آلاینده‌های CO ، NO و C_xH_y در خودروهای بنزینی، دست کم یک عنصر آزاد وجود دارد؛ بنابراین همه این واکنش‌ها از نوع اکسایش-کاهش هستند.

پ: کاتالیزگرها در واکنش‌های شیمیایی شرکت می‌کنند و مسیر انجام شدن آن واکنش شیمیایی را دچار تغییر می‌کنند، اما چون میزان تولید و مصرف آن‌ها در واکنش مورد نظر با هم برابر است، در طول انجام شدن واکنش جرم آن‌ها ثابت و بدن تغییر باقی می‌ماند. به همین خاطر، از کاتالیزگرها می‌توان بارها و بارها در واکنش‌ها استفاده کرد.

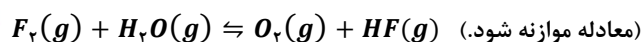
ت: گازهای کربن مونوکسید، نیتروژن مونوکسید و هیدروکربن‌های نسوخته (C_xH_y) از جمله آلاینده‌های تولیدشده در موتور خودروها هستند که باعث آلودگی هوا کره می‌شوند. با استفاده از مبدل‌های کاتالیستی، می‌توان مقدار این آلاینده‌ها را به طور قابل توجهی کاهش داد. پس از به کار بردن مبدل‌های کاتالیستی، همانند زمان عدم استفاده از این مبدل‌ها، مقدار گاز NO خارج شده از اگزوز خودروها کمتر از مقدار C_xH_y خارج شده است. جدول زیر، میزان آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها را در حضور و غیاب مبدل‌های کاتالیستی نشان می‌دهد:

فرمول شیمیایی آلاینده			
NO	C _x H _y	CO	در غیاب مبدل کاتالیستی
۱/۰۴	۱/۰۶۷	۵/۹۹	مقدار آلاینده برحسب گرم به ازای طی یک کیلومتر
۰/۰۴	۰/۰۷	۰/۰۶۱	در حضور مبدل کاتالیستی

در غیاب مبدل‌های کاتالیستی، مقدار گاز CO نسبت به سایر آلاینده‌ها بیشتر است. با استفاده از مبدل مناسب، مقدار این گاز نسبت به سایر گازها به مقدار بیشتری کاهش پیدا می‌کند اما در این شرایط نیز مقدار گاز CO خروجی از اگزوز خودرو، در مقایسه با سایر گازهای آلاینده بیشتر است.

گروه آموزشی ماز

۷۱- مقدار ۲/۲ مول گاز فلوئور و ۷۵/۶ گرم بخار آب را در یک ظرف دو لیتری مخلوط کرده و گرما می‌دهیم تا تعادل گازی زیر برقرار شود. اگر در حالت تعادل ۸ گرم هیدروژن فلوئورید در مخلوط تعادلی وجود داشته باشد، ثابت تعادل این واکنش شیمیایی بر حسب $mol.L^{-1}$ کدام است؟
 ($H = 1$ و $O = 16$ و $F = 19$)



$$f \times 1 \cdot^{-f} (f$$

$$f \times 1 \cdot^{-\Delta} (3)$$

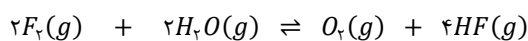
$$2 \times 10^{-7} \text{ (2)}$$

$$2 \times 10^{-5} \quad (1)$$

یاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مساله - ۱۲۰۴)



ابتدا معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:



$$\frac{2}{2} \quad \frac{75/6}{11} = 4/2$$

شمار مول اولیہ:

$$2/2 - 2x \qquad 4/2 - 2x$$

شمار مول، در لحظه تعادل:

شمار مول در لحظه تعادل:

در حالت تعادل $\frac{\Delta}{\nu} = 0.4$ مول هیدروژن فلوئورید در مخلوط گازها وجود دارد، بنابراین داریم:

$$fx = \cdot / f \Rightarrow x = \cdot / 1$$

در قدم بعد، غلظت تعادلی، گونه‌های شرکت کننده در واکنش را حساب می‌کنیم:

$$[F_r] = \frac{r/r - (r \times \cdot / \cdot)}{r} = \text{mol. L}^{-1}, \quad [H_r O] = \frac{r/r - (r \times \cdot / \cdot)}{r} = \text{mol. L}^{-1}$$

$$[HF] = \frac{. / \text{r}}{\text{r}} = . / \text{r mol. L}^{-1} \quad , \quad [O_r] = \frac{. / \text{r}}{\text{r}} = . / . \Delta \text{ mol. L}^{-1}$$

در نهایت ثابت تعادل این واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{[O_r] \times [HF]^f}{[F_r]^r \times [H_rO]^r} = \frac{(\cdot/\cdot\Delta) \times (\cdot/r)^f}{1^r \times r^r} = \frac{\Delta \times 1 \cdot^{-r} \times r^f \times 1 \cdot^{-f}}{r^r} = r \times 1 \cdot^{-\Delta} mol.L^{-1}$$

هر واکنش تعادلی، در دمای مشخص، بر حسب مقدار پیشرفت خود دارای یک ثابت تعادل است که با نماد K نشان داده می‌شود. برای محاسبه ثابت تعادل واکنش $aA + bB \rightleftharpoons cC + dD$ می‌توانیم از رابطه زیر هم استفاده کنیم:

$$K = \frac{n_C^c \times n_D^d}{n_A^a \times n_B^b} \times \left(\frac{1}{V}\right)^{\Delta n} \quad \text{و} \quad \Delta n = (c + d) - (a + b)$$

در رابطه فوق، مولفه n تعداد مول‌های تعادلی هر ماده را نشان می‌دهد. دقت کنید که در محاسبه Δn صرفاً ضرایب مواد گازی و در حالت محلول را در نظر بگیرید. اگر مجموع ضرایب واکنش‌دهنده‌های گازی یا محلول با مجموع ضرایب فراورده‌های گازی یا محلول برابر باشد، Δn برابر صفر شده و مقدار ثابت تعادل مستقل از حجم ظرف می‌شود:

$$K = \frac{n_C^c \times n_D^d}{n_A^a \times n_B^b}$$

گروه آموزشی ماز

۷۲- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- ۱) پس از افزودن گاز ناکتبی کلر به ظرف تعادل $Cl_2(g) + PCl_5(g) \rightleftharpoons PCl_3(g)$ ، غلظت گاز PCl_3 کاهش می‌یابد.
- ۲) تغییر حجم، تاثیری بر جابه‌جایی تعادل $H_2S(g) + I_2(s) \rightleftharpoons 2HI(g) + S(s)$ و سرعت انجام واکنش رفت ندارد.
- ۳) افزودن مقداری سدیم فلوئورید به محلول آبی از HF ، باعث کاهش درجه یونش اسید و افزایش pH محلول می‌شود.
- ۴) با کاهش حجم ظرف در تعادل $2NO_2(g) \rightleftharpoons N_2O_4(g)$ ، مخلوط گازی ابتدا پررنگ و سپس کم‌رنگ‌تر می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

تغییر حجم ظرف، بر واکنش‌هایی تأثیر دارد که در آن‌ها حداقل یک جزء گازی وجود داشته باشد و مجموع ضرایب مواد گازی بین فراورده‌ها و واکنش‌دهنده‌ها نیز در آن‌ها برابر نباشد. چون در تعادل $H_2S(g) + I_2(s) \rightleftharpoons 2HI(g) + S(s)$ تعداد مول‌های گازی در سمت فراورده‌ها بیشتر است، تغییر حجم ظرف موجب جابه‌جایی این تعادل می‌شود. برای مثال، با افزایش حجم ظرف در تعادل مورد نظر، واکنش در جهت رفت جابه‌جا شده و مقدار مول گاز هیدروژن سولفید در ظرف افزایش پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) کلر، از مولکول‌های دواتمی جورهمسته تشکیل شده است، پس می‌توان گفت ذرات سازنده این ماده ناکتبی هستند. پس از افزودن مقداری گاز ناکتبی کلر به ظرف تعادل $Cl_2(g) + PCl_5(g) \rightleftharpoons PCl_3(g)$ ، تعادل مورد نظر در جهت مصرف این ماده (در جهت رفت) جابه‌جا شده و بر این اساس، مقداری گاز PCl_3 مصرف می‌شود. با مصرف گاز PCl_3 در ظرف واکنش، غلظت این گاز کاهش می‌یابد.

۳) با انحلال سدیم فلوئورید در محلول، یون‌های سدیم و فلوئورید وارد محلول می‌شوند. بر این اساس، می‌توان گفت با افزودن یون F^- به سامانه تعادلی هیدروفلوئوریک اسید، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا شده و در نتیجه مقدار درجه یونش اسید در محلول مورد نظر کاهش می‌یابد. از طرفی با انجام این فرایند، غلظت یون H^+ نیز در محلول مورد نظر کاهش یافته و مقدار pH محلول افزایش می‌یابد.

۴) گاز NO_2 اکسید قهوه‌ای رنگ نیتروژن بوده و عامل اصلی رنگ قهوه‌ای هوای آلوده است. با کاهش حجم ظرف در تعادل $2NO_2(g) \rightleftharpoons N_2O_4(g)$ ، در لحظه اعمال تغییر ابتدا غلظت همه مواد افزایش یافته و به همین خاطر، رنگ مخلوط گازی پررنگ می‌شود. در مرحله بعد، تعادل مورد نظر با توجه به کاهش حجم ظرف، به سمت رفت (به سمتی که دارای تعداد مول‌های گازی کمتری باشد) جابه‌جا شده و گاز NO_2 را مصرف می‌کند. با مصرف گاز NO_2 ، شدت رنگ مخلوط کم‌تر می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۷۳- مقدار ۱/۶ مول گاز گوگرد تری‌اکسید را وارد یک ظرف ۴ لیتری می‌کنیم تا تعادل $2SO_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g) + O_2(g)$ برقرار شود. اگر تا لحظه برقراری تعادل ۸۰٪ گوگرد تری‌اکسید تجزیه شده باشد، غلظت O_2 در حالت تعادل برحسب مول بر لیتر و ثابت تعادل (به ترتیب از راست به چپ) کدام است؟

$$\begin{aligned} & ۲/۵۶ \text{ mol.L}^{-۱} - ۰/۳۲ \text{ (۲)} \\ & ۵/۱۲ \text{ mol.L}^{-۱} - ۰/۳۲ \text{ (۴)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ۲/۵۶ \text{ mol.L}^{-۱} - ۰/۱۶ \text{ (۱)} \\ & ۵/۱۲ \text{ mol.L}^{-۱} - ۰/۱۶ \text{ (۳)} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۱ (آسان - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

از آنجا که ۸۰ درصد گاز SO_3 اولیه وارد شده به ظرف واکنش تجزیه شده است، بنابراین داریم:

$$۸۰ \text{ mol } SO_3 \text{ تجزیه شده} = ۱/۶ \times \frac{۸۰}{۱۰۰} = ۱/۲۸ \text{ mol}$$

بر این اساس، در طول واکنش $1/28$ مول گاز SO_2 تجزیه شده و به ترتیب $1/28$ مول گاز SO_2 و $0/64$ مول گاز اکسیژن تولید شده است. بر این اساس، غلظت‌های تعادلی مواد در ظرف واکنش برابر است با:

$$[SO_2] = \frac{\text{مول}}{\text{حجم ظرف}} = \frac{1/6 - 1/28}{4} = 0/08 \text{ mol.L}^{-1} \quad [SO_2] = \frac{\text{مول}}{\text{حجم ظرف}} = \frac{1/28}{4} = 0/32 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[O_2] = \frac{\text{مول}}{\text{حجم ظرف}} = \frac{1/28}{4} = 0/16 \text{ mol.L}^{-1}$$

در نهایت ثابت تعادل واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{[SO_2]^2 [O_2]}{[SO_2]^2} = \frac{(0/32)^2 \times (0/16)}{(0/08)^2} = \frac{(10^{-4} \times 2^1) \times (10^{-2} \times 2^4)}{(10^{-4} \times 2^6)} = 10^{-4+4-6} \times 10^{-2-2+4} = \frac{2^8}{10^2} = 2/56 \text{ mol.L}^{-1}$$

گروه آموزشی ماز

۷۴- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست است؟

آ: در سامانه $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ ، سرعت تولید گاز H_2 از نگاه ذره‌ای با سرعت تولید گاز NH_3 برابر است.

ب: با افزودن $CaO(s)$ به ظرف واکنش $CaSO_4(s) \rightleftharpoons CaO(s) + SO_2(g)$ ، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود.

پ: در واکنش $2X(g) \rightleftharpoons Y(g) + Q$ ، مقدار ثابت تعادل در دمای $750^\circ C$ کلین نسبت به دمای $600^\circ C$ بیشتر خواهد بود.

ت: اگر پیشرفت واکنش تجزیه گاز NO برابر 80% باشد، K تعادل $2NO(g) \rightleftharpoons O_2(g) + N_2(g)$ برابر 4 می‌شود.

ث: خارج کردن گاز اوزون از ظرف، همانند کاهش دما، ثابت تعادل واکنش $2O_3(g) \rightleftharpoons 3O_2(g)$ را کاهش می‌دهد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی و مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

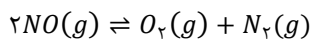
عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: در سامانه تعادلی $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ ، مثل سایر سامانه‌های تعادلی، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر است. از طرفی، می‌دانیم که سرعت تولید یا مصرف هر ماده در یک واکنش شیمیایی، متناسب با ضریب استوکیومتری آن ماده است. با توجه به برابر بودن سرعت واکنش‌های رفت و برگشت و ضریب استوکیومتری مواد در معادله واکنش مورد نظر، می‌توان گفت سرعت تولید گاز H_2 برابر سرعت تولید NH_3 است.

ب: براساس اصل لوشاتلیه، در صورت افزایش غلظت یکی از گونه‌های شرکت‌کننده در یک تعادل شیمیایی، تعادل در جهتی پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن ماده را مصرف کند و سامانه مجدداً به حالت تعادل برسد. در نقطه مقابل، در صورت کاهش غلظت یکی از گونه‌های شرکت‌کننده در یک تعادل شیمیایی، تعادل در جهتی پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن ماده را تولید کند و سامانه مجدداً به حالت تعادل برسد. توجه داریم که در این جابه‌جایی، مقدار K ثابت باقی می‌ماند. با توجه به توضیحات داده شده، عبارت ثابت تعادل واکنش مورد نظر به صورت $K = [SO_2]$ است. چون کلسیم اکسید یک ماده جامد بوده و تغییر مقدار، تاثیری در غلظت آن ندارد، افزودن یا خارج کردن کلسیم اکسید به سامانه واکنش، تعادل را جابه‌جا نمی‌کند.

پ: دمای $750^\circ C$ کلین معادل با $477^\circ C$ می‌شود. واکنش $2X(g) \rightleftharpoons Y(g) + Q$ ، گرماده است، پس با افزایش دما از $477^\circ C$ به $600^\circ C$ ، این تعادل در جهت مصرف گرما (در جهت برگشت) جابه‌جا شده و مقدار ثابت تعادل آن کاهش پیدا می‌کند.



ت: معادله واکنش تعادلی برقرار شده به صورت مقابل است:

اگر در ابتدای کار x مول گاز NO وارد ظرف واکنش شده باشد، با توجه به اینکه بازده واکنش انجام شده برابر با 80% است، $0/8x$ مول از این گاز مصرف شده و $0/2x$ مول از این گاز باقی می‌ماند. از طرفی، طی این فرایند $0/4x$ مول از هر یک از گازهای اکسیژن و نیتروژن نیز تولید می‌شود. توجه داریم که مجموع شمار مول‌های گازی در دو سمت واکنش یکسان بوده و نیاز به تاثیر دادن حجم ظرف نداریم. بر این اساس، ثابت تعادل واکنش را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{[N_2][O_2]}{[NO]^2} = \frac{(N_2 \text{ مول}) \times (O_2 \text{ مول})}{(NO \text{ مول})^2} = \frac{0/4 \times 0/4}{(0/2)^2} = 4$$

ث: معادله واکنش تعادلی انجام شده به صورت $2O_3(g) \rightleftharpoons 3O_2(g) + Q$ است. توجه داریم که گاز اوزون در مقایسه با گاز اکسیژن سطح انرژی بالاتری داشته و به همین خاطر، می‌توان گفت این واکنش شیمیایی گرماده است. با افزایش دما، تعادل مورد نظر در جهت برگشت جابه‌جا شده و مقدار ثابت تعادل واکنش نیز کاهش پیدا می‌کند. این در حالی است که افزودن و یا خارج کردن مواد مختلف به ظرف واکنش، تغییری در ثابت تعادل واکنش ایجاد نکرده و مقدار ثابت تعادل فقط تابع دما است.

گروه آموزشی ماز

۷۵- تعادل $Q + MgCO_3(s) \rightleftharpoons MgO(s) + CO_2(g)$; $K = 0.02 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ در یک مخزن ۱۵ لیتری برقرار است. اگر حجم ظرف واکنش را به ۶۰ لیتر رسانده و با افزایش دمای محیط، مقدار ثابت تعادل واکنش را به اندازه ۵۰٪ تغییر بدهیم، مجموع جرم مواد جامد موجود در ظرف واکنش به اندازه چند گرم تغییر خواهد کرد؟

$$(Mg = 24 \text{ و } O = 16 \text{ و } C = 12 : g \cdot mol^{-1})$$

۶۶ (۴)

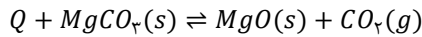
۴۴ (۳)

۸۸ (۲)

۲۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی



معادله موازنه شده واکنش به صورت مقابل است:

در این واکنش، گاز کربن دی اکسید در سمت فراورده ها وجود دارد و کاهش جرم مواد جامد موجود در ظرف واکنش نیز به علت تولید این گاز است. بنابراین برای محاسبه تغییرات جرم مواد جامد موجود در ظرف، کافیت مقدار گاز کربن دی اکسید را قبل و بعد از افزایش حجم ظرف و تغییر دمای محیط حساب کنیم. برای این منظور، ابتدا باید مقدار گاز کربن دی اکسید را در شرایطی که ثابت تعادل برابر با ۰/۰۲ مول بر لیتر و حجم ظرف برابر با ۱۵ لیتر است، بدست بیاوریم. توجه داریم که ثابت تعادل این واکنش، فقط معادل با غلظت گاز کربن دی اکسید بوده و با استفاده از رابطه کلی $K = [CO_2]$ قابل محاسبه است. بر این اساس، داریم:

$$K = [CO_2] = 0.02 \text{ mol} \cdot L^{-1} \Rightarrow n_{CO_2} = [CO_2] \times V = 0.02 \times 15 = 0.3 \text{ mol}$$

پس مقدار گاز کربن دی اکسید اولیه برابر با ۰/۳ مول است. با افزایش دما در این واکنش، ثابت تعادل افزایش یافته و تعادل در جهت رفت جابه جا می شود. طبق فرض سوال، مقدار ثابت تعادل به اندازه ۵۰٪ افزایش پیدا کرده است، پس می توان گفت مقدار این مولفه از ۰/۰۲ مول بر لیتر به ۰/۰۳ مول بر لیتر رسیده است. بنابراین مقدار گاز کربن دی اکسید را در شرایطی که ثابت تعادل برابر با ۰/۰۳ مول بر لیتر و حجم ظرف برابر با ۶۰ لیتر است، محاسبه می کنیم.

$$K = [CO_2] = 0.03 \text{ mol} \cdot L^{-1} \Rightarrow n_{CO_2} = [CO_2] \times V = 0.03 \times 60 = 1.8 \text{ mol}$$

در نتیجه مقدار گاز کربن دی اکسید به اندازه ۱/۵ مول افزایش یافته و از ۰/۳ مول اولیه به ۱/۸ مول در تعادل نهایی رسیده است. در نهایت مقدار افزایش جرم این گاز را حساب می کنیم:

$$? g CO_2 = 1.8 \text{ mol } CO_2 \times \frac{44 g CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} = 66 g$$

با توجه به محاسبات بالا، نتیجه می گیریم مجموع جرم مواد جامد موجود در ظرف واکنش به اندازه ۶۶ گرم کاهش می یابد.

گروه آموزشی ماز

۷۶- تعادل $PCl_5(g) \rightleftharpoons Cl_2(g) + PCl_3(g)$; $K = 10^{-2}$ با ورود مقداری گاز PCl_5 به یک ظرف ۱۰ لیتری آغاز شده است. اگر در حالت تعادل $10^{23} \times 1/204$ مولکول کلر در ظرف واکنش وجود داشته باشد، مقدار اولیه گاز PCl_5 وارد شده به ظرف واکنش برابر با چند گرم بوده است؟

$$(Cl = 35.5 \text{ و } P = 31 : g \cdot mol^{-1})$$

۱۲۵/۱ (۴)

۱۰۴/۲۵ (۳)

۸۲/۵ (۲)

۶۸/۷۵ (۱)

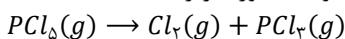
پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی

ابتدا شمار مول های گاز کلر در ظرف واکنش را در لحظه تعادل محاسبه می کنیم. از آنجا که هر مول گاز کلر شامل $10^{23} \times 6/02$ مولکول از این گاز می شود، مقدار گاز کلر را در نمونه ای که دارای $10^{23} \times 1/204$ مولکول کلر است، محاسبه می کنیم:

$$? \text{ mol } Cl_2 = 1/204 \times 10^{23} \text{ molecule } Cl_2 \times \frac{1 \text{ mol } Cl_2}{6/02 \times 10^{23} \text{ molecule } Cl_2} = 0.2 \text{ mol}$$

بنابراین مقدار گاز کلر در لحظه تعادل برابر با ۰/۲ مول است. معادله موازنه شده واکنش و روند تغییرات شمار مول های مواد به صورت زیر است:



x \cdot \cdot : در ابتدای واکنش

$x - 0.2$ 0.2 0.2 : در لحظه تعادل

از آنجا که حجم سامانه در حالت تعادل برابر با ۱۰ لیتر است، ثابت تعادل واکنش را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$K = \frac{[Cl_2][PCl_3]}{[PCl_5]} = \frac{(0.2)^2}{x - 0.2} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{2-1} = 10^{-2} \Rightarrow \frac{0.04}{x - 0.2} = 0.1 \Rightarrow x - 0.2 = 0.4 \Rightarrow x = 0.6 \text{ mol}$$

در نتیجه، شمار مول های اولیه گاز PCl_5 وارد شده به ظرف واکنش برابر با ۰/۶ مول بوده است. در مرحله آخر، جرم اولیه این گاز را حساب می کنیم:

$$? g PCl_5 = 0.6 \text{ mol } PCl_5 \times \frac{208.5 g PCl_5}{1 \text{ mol } PCl_5} = 125.1 g$$

با توجه به محاسبات بالا، نتیجه می‌گیریم که مقدار اولیه گاز PCl_5 وارد شده به ظرف واکنش برابر با $125/1$ گرم بوده است.

گروه آموزشی ماز

۷۷- کدام موارد از مطالب زیر دربارهٔ تعادل $2SO_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g) + O_2(g)$ که در ظرفی به حجم ۱ لیتر برقرار است، درست‌اند؟

- آ: بر اثر نصف شدن حجم ظرف واکنش، غلظت مواد گازی شرکت‌کننده در تعادل، در طول زمان تغییر نخواهد کرد.
 ب: اگر این واکنش گرماگیر باشد، با افزایش دما در حجم ثابت، غلظت گاز گوگرد دی‌اکسید افزایش پیدا می‌کند.
 پ: اگر مقداری از گاز اکسیژن تولید شده را از ظرف واکنش خارج کنیم، تعادل به سمت راست جابه‌جا می‌شود.
 ت: اگر در دمای ثابت، فشار وارد شده به گازها افزایش یابد، سرعت واکنش رفت کاهش پیدا خواهد کرد.
- (۱) آ و ب (۲) آ و ت (۳) ب و پ (۴) پ و ت

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

عبارت‌های (ب) و (پ) درست‌اند.

بررسی موارد:

آ: معادله واکنش انجام شده به صورت $2SO_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g) + O_2(g)$ است. از آنجا که تعداد مول گازها در سمت فراورده‌ها بیشتر است، با کاهش حجم ظرف واکنش، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا شده و در نتیجه غلظت مواد گازی شرکت‌کننده در تعادل تغییر می‌کند. توجه داریم که در لحظه اعمال تغییر (کاهش حجم)، غلظت همه گازها افزایش می‌یابد ولی در ادامه این فرایند و با جابجایی تعادل، غلظت‌ها تغییر خواهد کرد.
 ب: با توجه به گرماگیر بودن این واکنش، با افزایش دمای ظرف در حجم ثابت، تعادل به سمت راست (در جهت مصرف گرما) جابه‌جا شده و غلظت فراورده‌ها از جمله گاز گوگرد دی‌اکسید افزایش می‌یابد.

براساس قانون لوشاتلیه، اگر تغییری موجب بر هم زدن حالت تعادل در یک سامانه تعادلی شود، تعادل در جهتی جابه‌جا می‌شود که تا حد امکان اثر آن تغییر را جبران کند. تغییر دمای سامانه تعادلی، یکی از روش‌های مورد استفاده برای جابه‌جا کردن تعادل‌های شیمیایی است. تغییر دما افزون بر جابه‌جا کردن تعادل، مقدار ثابت تعادل واکنش را نیز تغییر می‌دهد. اثر تغییر دما بر تعادل‌های گوناگون یکسان نیست و به گرماده یا گرماگیر بودن آن واکنش‌ها بستگی دارد. با افزایش دمای یک سامانه در حال تعادل، واکنش در جهت مصرف گرما پیش می‌رود تا دمای سامانه را مجدداً کاهش دهد. اگر این واکنش گرماگیر باشد، تعادل در جهت رفت جابه‌جا شده و مقدار فراورده‌ها افزایش پیدا می‌کند. در نقطه مقابل، اگر این واکنش گرماده باشد، با افزایش دما در جهت برگشت پیش رفته و مقدار واکنش‌دهنده‌ها افزایش می‌یابد. با کاهش دمای یک سامانه در حال تعادل، واکنش در جهت تولید گرما پیش می‌رود تا دمای سامانه را دوباره افزایش دهد. اگر این واکنش گرماگیر باشد، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا شده و مقدار واکنش‌دهنده‌ها افزایش پیدا می‌کند. در نقطه مقابل، اگر این واکنش گرماده باشد، با کاهش دما در جهت رفت پیش می‌رود و مقدار فراورده‌ها افزایش می‌یابد.

پ: بر اثر خارج کردن مقداری گاز اکسیژن از ظرف واکنش، تعادل به سمت راست و تولید گاز O_2 بیشتر جابه‌جا می‌شود تا بنا بر اصل لوشاتلیه، تغییر اعمال شده بر تعادل را تا حد امکان جبران کند.

ت: در دمای ثابت، حجم یک سامانه گازی با فشار آن سامانه رابطه عکس دارد. اگر در دمای ثابت، در این واکنش فشار وارد شده به گازها افزایش یابد (حجم مخلوط گازی شرکت‌کننده در واکنش کاهش پیدا کند)، تعادل به سمت مول‌های گازی کمتر یعنی در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود و از آنجا که برخورد ذرات موجود در ظرف واکنش با هم بیشتر می‌شود، سرعت واکنش رفت و برگشت هر دو افزایش می‌یابد. توجه داریم که میزان افزایش سرعت برای واکنش برگشت، بیشتر از واکنش رفت خواهد بود.

از تغییر حجم سامانه واکنش می‌توان برای تغییر غلظت مواد گازی شرکت‌کننده در واکنش کمک گرفت. یکی از راه‌های تغییر حجم سامانه‌های گازی، تغییر فشار است. در واقع، با افزایش فشار اعمال شده بر یک تعادل گازی، حجم اشغال‌شده توسط گازها کاهش پیدا می‌کند و با کاهش فشار اعمال شده بر یک تعادل گازی نیز حجم اشغال‌شده توسط گازها افزایش می‌یابد.

گروه آموزشی ماز

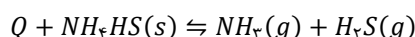
۷۸- به منظور افزایش درصد پیشرفت واکنش $\Delta H > 0$ ، $NH_4HS(s) \rightleftharpoons NH_3(g) + H_2S(g)$ ، از کدام تغییر زیر می‌توان استفاده کرد؟

- (۱) کاهش دمای محیط انجام واکنش
 (۲) افزودن مقداری گاز آمونیاک به ظرف واکنش
 (۳) افزایش حجم ظرف محتوی مواد شرکت‌کننده
 (۴) افزودن کاتالیزگر X به سامانه این واکنش

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

معادله واکنش گرماگیر انجام شده به صورت زیر است:



اگر حجم ظرف واکنش در سامانه مورد نظر افزایش پیدا کند، تعادل گازی داده شده به سمت تعداد مولهای گازی بیشتر (در جهت رفت) جابه‌جا شده و درصد پیشرفت آن افزایش پیدا خواهد کرد. توجه داریم که کاهش دمای محیط و یا افزودن گاز آمونیاک به سامانه واکنش، تعادل را در جهت برگشت جابه‌جا کرده و منجر به کاهش درصد پیشرفت واکنش می‌شوند. افزودن کاتالیزگر به سامانه واکنش نیز منجر به جابه‌جایی تعادل نشده و صرفاً مدت زمان لازم برای برقراری تعادل را کاهش می‌دهد.

گروه آموزشی ماز

۷۹- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- آ: در دمای اتاق، با ایجاد جرقه در مخلوطی از گازهای نیتروژن و هیدروژن، این گازها با یکدیگر واکنش می‌دهند.
 ب: در فناوری مربوط به فرایند هابر، دمای سردکننده کمتر از نقطه جوش آمونیاک و بیشتر از نقطه جوش H_2 است.
 پ: در سامانه واکنش مربوط به فرایند هابر، در حالت تعادل، غلظت آمونیاک حتماً ۲ برابر غلظت گاز نیتروژن خواهد بود.
 ت: شرایط بهینه فرایند هابر شامل کاتالیزگر فلزی حاوی ۶ الکترون با $n + l = 4$ ، دمای $450^\circ C$ و فشار $200 atm$ است.
- (۱) آ و ب (۲) آ و پ (۳) ب و ت (۴) فقط ب

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - مفهومی - ۱۲۰۴)

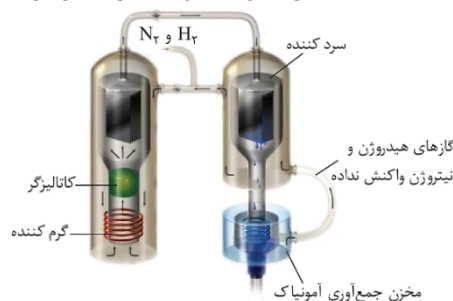
پاسخ تشریحی:

فقط عبارت (ب) درست است.

بررسی موارد:

آ: در دمای اتاق، با ایجاد جرقه در مخلوطی از گازهای نیتروژن و هیدروژن، انرژی فعال‌سازی (E_a) واکنش تامین نشده و این گازها با یکدیگر واکنش نمی‌دهند. به عبارت دیگر، می‌توان گفت نیتروژن واکنش‌پذیری ناچیزی دارد و در دمای اتاق با گاز هیدروژن حتی در حضور کاتالیزگر با جرقه واکنش نمی‌دهد؛ بنابراین از واکنش گازهای هیدروژن و نیتروژن در دما و شرایط اتاق نمی‌توانیم برای تولید آمونیاک استفاده کنیم. از طرف دیگر، واکنش میان این گازها برگشت‌پذیر است و به صورت تعادلی انجام می‌شود، پس کل گازهای هیدروژن و نیتروژن وارد شده به محفظه واکنش، به فراورده تبدیل نمی‌شوند.

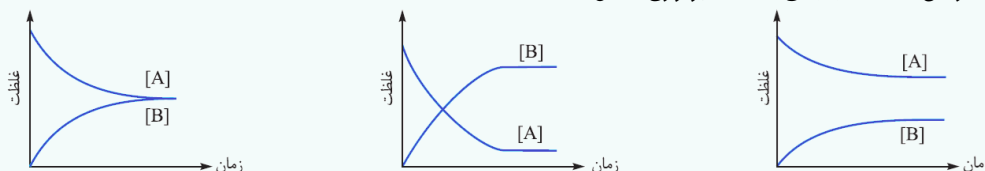
ب: در فرایند تعادلی هابر، گاز آمونیاک با استفاده از گازهای H_2 و N_2 در شرایط ویژه تولید می‌شود. همانطور که می‌دانیم، نقطه جوش گازهای H_2 و N_2 از نقطه جوش آمونیاک بسیار پایین‌تر است؛ بنابراین با تنظیم دمای سردکننده در دمایی کمی پایین‌تر از دمای جوش آمونیاک، می‌توان این گاز را مایع کرده و از مخلوط گازی جدا نمود. تصویر زیر، نمایی از دستگاه استفاده شده برای تولید آمونیاک بر اساس فرایند هابر را نشان می‌دهد:



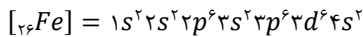
در این دستگاه، گازهای هیدروژن و نیتروژن از ورودی بالای ظرف به درون دستگاه تزریق شده و پس از افزایش دما، در مجاورت کاتالیزگر با یکدیگر واکنش می‌دهند و مخلوطی از گازهای آمونیاک، هیدروژن و نیتروژن را ایجاد می‌کنند. مخلوط گازی حاصل به سمت سردکننده حرکت می‌کند و پس از کاهش دمای آن تا پایین‌تر از نقطه جوش آمونیاک، مولکول‌های NH_3 به حالت مایع درآمده و از مخلوط خارج می‌شوند. در این شرایط، گازهای هیدروژن و نیتروژن واکنش‌نداده، مجدداً به سمت گرم‌کننده حرکت می‌کنند تا از آن‌ها برای تولید آمونیاک بیشتر استفاده شود.

پ: معادله واکنش انجام شده به صورت $3H_2(g) + N_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ است. هرچند که ضریب گاز آمونیاک در این واکنش ۲ برابر ضریب گاز نیتروژن است، اما چون یک ماده در سمت فراورده‌ها و یک ماده در سمت واکنش‌دهنده‌ها قرار گرفته است، نمی‌توان گفت در حالت تعادل، غلظت آمونیاک حتماً ۲ برابر غلظت گاز نیتروژن خواهد بود.

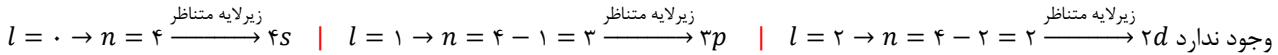
در لحظه برقراری تعادل، غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها ثابت می‌ماند اما هیچ لزومی به یکسان بودن غلظت آن‌ها در لحظه برقراری تعادل وجود ندارد. به عنوان مثال، در واکنش تعادلی $A \rightleftharpoons B$ ، ممکن است در لحظه تعادل، غلظت ماده A، ۱۰ برابر غلظت B باشد. هر یک از نمودارهای غلظت-زمان زیر را می‌توان به روند تغییر غلظت مواد شرکت‌کننده در این سامانه شیمیایی تا لحظه برقراری تعادل نسبت داد:



ت: شرایط بهینه مورد نیاز برای فرایند هابر (فرایند تعادلی تولید آمونیاک از گازهای نیتروژن و هیدروژن) شامل کاتالیزگر آهن، دمای ۴۵۰ درجه سلسیوس و فشار ۲۰۰ اتمسفر است. در این شرایط، درصد پیشرفت واکنش برابر با ۴۳/۷۵٪ بوده و درصد مولی آمونیاک در مخلوط گازی ایجاد شده برابر با ۲۸٪ می‌شود. آرایش الکترونی فلز آهن به صورت زیر است:



با توجه به معادله $n + l = 4$ ، مقادیر l را از صفر تا ۲ تغییر می‌دهیم تا مقدار n بدست بیاید، سپس زیرلایه متناظر با اعداد کوانتومی n و l را می‌نویسیم:



توجه داریم که در آرایش الکترونی $_{26}Fe$ ، در زیرلایه‌های $4s$ و $3p$ به ترتیب ۲ و ۶ الکترون و در مجموع این دو زیرلایه، ۸ الکترون وجود دارد.

گروه آموزشی ماز

۸۰- مقدار ۵۶ گرم گاز CO و ۳۶ گرم بخار آب در یک ظرف دو لیتری مخلوط شده‌اند تا واکنش تعادلی زیر انجام شود. درصد پیشرفت واکنش مورد نظر و مجموع شمار مولکول‌های فراورده‌های واکنش پس از برقراری تعادل در ظرف واکنش به تقریب کدام است؟ ($H = 1$ ، $C = 12$ و $O = 16$)
 $CO(g) + H_2O(g) \rightleftharpoons CO_2(g) + H_2(g) ; K = 4$

$$\frac{1}{2} \times 10^{-24} - \frac{66}{7} (2)$$

$$\frac{1}{2} \times 10^{-24} - 75 (1)$$

$$\frac{1}{6} \times 10^{-24} - \frac{66}{7} (4)$$

$$\frac{1}{6} \times 10^{-24} - 75 (3)$$

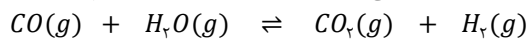
پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۲۰۴)



تعداد مول واکنش‌دهنده‌های وارد شده به ظرف را در ابتدای واکنش حساب می‌کنیم:

$$CO \text{ تعداد مول} = \frac{56}{28} = 2 \text{ mol} \quad \text{و} \quad H_2O \text{ تعداد مول} = \frac{36}{18} = 2 \text{ mol}$$

برای برقرار شدن تعادل، مقدار از واکنش‌دهنده‌ها مصرف شده و مقداری فراورده تولید می‌شود، پس در حالت تعادل داریم:



$$\text{در حال تعادل:} \quad \begin{matrix} 2-x & 2-x & x & x \end{matrix}$$

برای هر واکنش تعادلی، کمیتی به نام ثابت تعادل تعریف می‌شود که مقدار آن در دمای یکسان همواره ثابت خواهد بود. از آنجا که مجموع مول‌های گازی در دو طرف تعادل یکسان است ($\Delta n = 0$)، میزان ثابت تعادل مستقل از حجم ظرف بوده و می‌توانیم بجای غلظت تعادلی هر ماده، شمار مول‌های تعادلی آن را در رابطه ثابت تعادل جایگذاری کنیم، پس داریم:

$$K = \frac{[CO_2][H_2]}{[CO][H_2O]} = \frac{x \times x}{(2-x) \times (2-x)} = \frac{x^2}{(2-x)^2} = 4 \rightarrow \frac{x}{2-x} = 2 \rightarrow x = 4 - 2x \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

ثابت تعادل هر واکنش، معیاری برای سنجش میزان پیشرفت آن واکنش است. در واقع، درصد پیشرفت هر واکنش به ما نشان می‌دهد که از ابتدای واکنش تا لحظه برقراری تعادل، چند درصد از واکنش‌دهنده‌های وارد شده به ظرف، به فراورده تبدیل می‌شوند. برای محاسبه درصد پیشرفت (بازده درصدی) واکنش‌های شیمیایی، از رابطه زیر کمک می‌گیریم:

$$\text{درصد پیشرفت واکنش} = \frac{\text{تعداد مول واکنش‌دهنده مصرف شده}}{\text{تعداد مول اولیه واکنش‌دهنده}} \times 100$$

درصد پیشرفت واکنش برابر است با:

$$\text{درصد پیشرفت واکنش} = \frac{\text{تعداد مول } CO \text{ مصرف شده}}{\text{تعداد مول اولیه } CO} \times 100 = \frac{\frac{4}{3}}{2} \times 100 \approx 66.7\%$$

و مجموع شمار مولکول‌های فراورده‌ها در تعادل برابر خواهد بود با:

$$\text{مولکول} = \left(2 \times \frac{4}{3}\right) \text{ mol} \times \frac{6/0.2 \times 10^{-23}}{1 \text{ mol}} \approx 1/6 \times 10^{-24}$$

گروه آموزشی ماز

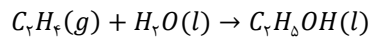
۸۱- کدام یک از مطالب زیر در رابطه با واکنش میان گاز اتن با آب در حضور سولفوریک اسید درست است؟

- (۱) برای تولید نوعی الکل، این واکنش نسبت به واکنش تخمیر گلوکز، از دیدگاه اتمی به‌صرفه‌تر است.
- (۲) فراورده این واکنش، نوعی فراورده پتروشیمیایی بوده و در مقایسه با نفت خام قیمت پایین‌تری دارد.
- (۳) از فراورده تولید شده در این واکنش شیمیایی می‌توان در واکنش تولید برخی از پلی‌استرها استفاده کرد.
- (۴) از واکنش فراورده این فرایند با پروپان‌تیک اسید، ترکیبی بدست می‌آید که شمار اتم‌های H آن با نفتالن برابر است.

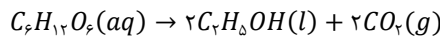
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

شیمی سبز به دنبال طراحی واکنش هایی با کمترین آسیب به محیط زیست و بیشترین بازده است. برطبق اصول شیمی سبز، یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه تر است که شمار بیشتری از اتم های موجود در مواد واکنش دهنده به فراورده های سودمند تبدیل شوند. معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



همه اتم های وارد شده در این واکنش شیمیایی، در ساختار فراورده هدف (اتانول) قرار گرفته و هیچ کدام از اتم ها وارد هیچ فراورده فرعی نشده اند. این در حالی است که معادله واکنش تخمیر گلوکز به صورت زیر است:



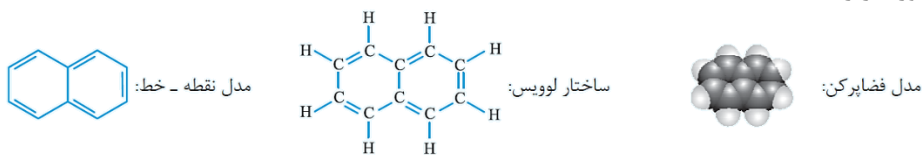
در واکنش تخمیر، برخی از اتم ها وارد ساختار گاز کربن دی اکسید شده و این ماده به عنوان یه فراورده فرعی از محیط واکنش خارج می شود.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) آمونیاک، سولفوریک اسید، متانول، بنزین، پلی اتن، اتانول و اتیلن گلیکول، از جمله فراورده های پتروشیمیایی هستند که با استفاده از نفت خام بدست می آیند. این مواد، با استفاده از فناوری های شیمیایی تولید می شوند. با تبدیل نفت خام به فراورده های پتروشیمیایی ارزشمندتر مانند آمونیاک، بنزین، اتیلن گلیکول، متانول و سولفوریک اسید، می توان از خام فروشی این ماده جلوگیری کرده و آن را با قیمت های بالاتری به فروش رساند.

۲) در واکنش گاز اتن با آب، اتانول تولید می شود. اتانول یک الکل تک عاملی بوده و از آن نمی توان در واکنش تولید پلی استرها استفاده کرد. مونومر مصرف شده در واکنش تولید پلی استرها، الکل های دو عاملی مثل اتیلن گلیکول هستند.

۳) از واکنش میان اتانول (CH_3CH_2OH) با پروپانویک اسید (C_2H_5COOH) در مجاورت سولفوریک اسید، نوعی ترکیب استری به نام اتیل پروپانوات (ترکیبی با فرمول مولکولی $C_2H_5COOCH_2CH_3$) بدست می آید که برخلاف نفتالن ($C_{10}H_8$)، تعداد ۱۰ اتم H در ساختار خود دارد. ساختار مولکولی نفتالن به صورت زیر است:



بنزن، سرگروه خانواده مهمی از مواد به نام ترکیب های آروماتیک (آروماتیک یعنی خوش بو و معطر) است. در ساختار مولکول های سازنده این گروه از مواد، یک یا چند حلقه شش ضلعی کربنی دیده می شود که پیوندهای کربن-کربن موجود در آن، به صورت یکی در میان، دوگانه هستند. نفتالن با فرمول شیمیایی $C_{10}H_8$ نیز یک ترکیب آروماتیک به شمار می رود. در ساختار هر مولکول نفتالن، ۵ پیوند $C=C$ و ۸ پیوند $C-H$ وجود دارد. این ماده، یک ترکیب جامد و سفیدرنگ است که مدت ها به عنوان ضدبید برای نگهداری فرش و لباس کاربرد داشته است.

گروه آموزشی ماز

۸۲- چه تعداد از عبارت های داده شده درست است؟ ($g \cdot mol^{-1}$: $H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$)

آ: درصد جرمی کربن در فراورده واکنش ۲-بوتن با آب، از درصد جرمی کربن در اتیلن گلیکول کمتر است.

ب: چگالی کم، نفوذناپذیری در مقابل هوا، ارزانی و مقاومت در برابر خوردگی، از جمله خواص پلاستیک ها هستند.

پ: نیم مول از دی الکل مصرف شده برای سنتز PET، در واکنش با ۲۸ لیتر گاز O_2 در شرایط استاندارد می سوزد.

ت: به کمک فناوری های شیمیایی، ترکیب های آمینی از جمله متیل آمین را می توان مستقیماً به کمک آلکن ها تولید کرد.

ث: با اکسایش پارازایلین توسط محلول پتاسیم پرمنگنات، نوعی اسید دو پروتون دار به نام ترفتالیک اسید ایجاد می شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

عبارت های (ب)، (پ) و (ث) درست هستند.

بررسی موارد:

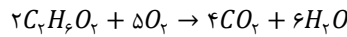
آ: فراورده واکنش ۲-بوتن با آب در مجاورت کاتالیزگر مناسب، ۲-بوتانول با فرمول مولکولی $C_4H_{10}O$ است که مشخصاً درصد جرمی کربن در آن از اتیلن گلیکول با فرمول مولکولی $C_2H_6O_2$ بیشتر است؛ زیرا نسبت شمار اتم های C به شمار اتم های O و یا شمار اتم های H در آن بیشتر است.

ب: چگالی کم، نفوذناپذیری در مقابل هوا، ارزانی و مقاومت در برابر خوردگی، از جمله خواص مهم پلاستیک ها هستند.

استفاده بی‌رویه و بیش از حد از پلاستیک‌ها در صنایع گوناگون و زیست‌تخریب‌ناپذیر بودن آن‌ها سبب شده که این مواد در جای‌جای کره زمین یافت شوند؛ پس باید راهی برای بازیافت این مواد پیدا کرد. یکی از مواد پلاستیکی قابل بازیافت، پلی‌اتیلن ترفتالات است. برای این منظور، مواد و وسایل ساخته شده از این پلیمر را باید به طور جداگانه جمع‌آوری کرده و پس از آن، با انجام فرایندهای فیزیکی و شیمیایی به مواد قابل استفاده تبدیل کرد. برای بازیافت پلی‌اتیلن ترفتالات از روش‌های زیر استفاده می‌شود:

- ۱- مواد ساخته شده از پلی‌اتیلن ترفتالات را می‌توان پس از شست‌وشو و تمیزکردن، ذوب کرده و دوباره از آن‌ها برای تولید وسایل و ابزار استفاده کرد.
 - ۲- این مواد را می‌توان پس از شست‌وشو خرد کرده و به تکه‌های کوچک به نام پرک تبدیل و در تولید مواد پلاستیکی دیگر استفاده کرد.
 - ۳- این مواد و پسماندها را می‌توان به کمک واکنش‌های شیمیایی به مونومرهای سازنده یا مواد اولیه ارزشمند تبدیل کرد.
- توجه داریم که سطح فناوری هر کشور یا گروه صنعتی است که مشخص می‌کند کدام راه را باید برای بازیافت پسماندها انتخاب کرد.

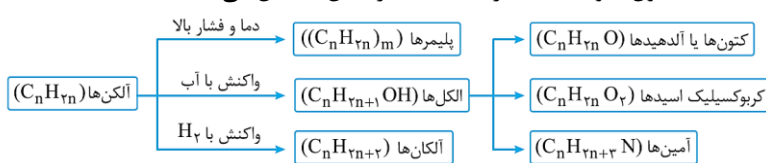
پ: دی الکل استفاده شده در سنتز پلی‌اتیلن ترفتالات، اتیلن گلیکول است که واکنش سوختن کامل آن به صورت زیر است:



بنابراین حجم گاز اکسیژن موردنیاز برابر خواهد بود با:

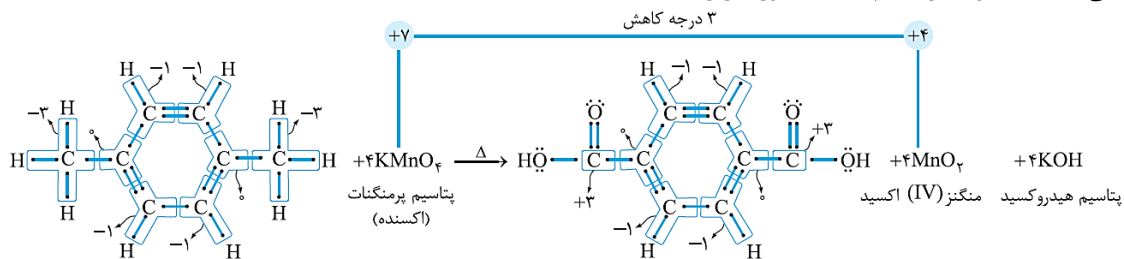
$$? L O_2 = \frac{5 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } C_2H_6O_2} \times \frac{22.4 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 28 \text{ L}$$

ت: روند تولید آمین‌ها، کربوکسیلیک اسیدها، کتون‌ها و آلدهیدها را با استفاده از آلکن‌ها نشان می‌دهد:



با توجه به نمودار، آمین‌ها را با استفاده از الکل‌ها و الکل‌ها را نیز با استفاده از آلکن‌ها تولید می‌کنند؛ اما تبدیل مستقیم آلکن‌ها به آمین‌ها ممکن نیست.

ث: ترفتالیک اسید یک اسید دو پروتون‌دار است که بر اثر اکسایش پارازایلن (هیدروکربنی که از نفت گرفته می‌شود) توسط محلول بنفش‌رنگ پرمنگنات پتاسیم، بدست می‌آید. معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، ترکیب تولید شده طی این فرایند ۲ گروه عاملی کربوکسیل در ساختار خود دارد و همانند سولفوریک اسید و کربنیک اسید، از جمله اسیدهای دوپروتون‌دار به شمار می‌رود.

گروه آموزشی ماز

۸۳- در واکنش ۴۱/۵ گرم ترفتالیک اسید با خلوص ۵۰٪ با مقدار کافی متیل آمین، به شرطی که بازده درصدی واکنش انجام شده برابر با ۸۰٪ باشد، چند

گرم ترکیب آلی تولید می‌شود؟ ($g \cdot mol^{-1}$: $H = 1$ و $C = 12$ و $N = 14$ و $O = 16$)

۱۹/۲ (۴)

۱۲/۸ (۳)

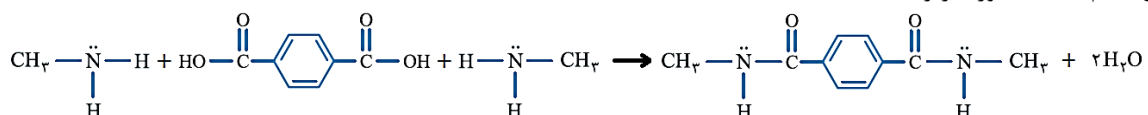
۳۸/۴ (۲)

۱۴/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ شریعی

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش شیمیایی، جرم فراورده تولید شده که یک دی‌آمید با فرمول شیمیایی $C_{11}H_{12}N_2O_4$ و جرم مولی ۱۹۲ گرم بر مول است را محاسبه می‌کنیم:

$$? g C_{11}H_{12}N_2O_4 = 41.5 g C_8H_6O_4 \times \frac{50}{100} \times \frac{1 \text{ mol } C_8H_6O_4}{166 g C_8H_6O_4} \times \frac{1 \text{ mol } C_{11}H_{12}N_2O_4}{1 \text{ mol } C_8H_6O_4} \times$$

$$\frac{192 g C_{11}H_{12}N_2O_4}{1 \text{ mol } C_{11}H_{12}N_2O_4} \times \frac{80}{100} = 19.2 g$$

برای محاسبه جرم فراورده تولید شده با استفاده از روش تناسب، داریم:

$$\frac{C_8H_6O_4 \times \frac{\text{درصد خلوص}}{100} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} = \frac{C_{11}H_{12}N_2O_7 \times \text{جرم مولی}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{C_8H_6O_4 \times \frac{50}{100} \times \frac{80}{100}}{166 \times 1} = \frac{x \text{ g } C_{11}H_{12}N_2O_7}{192 \times 1} \Rightarrow x = 19/2 \text{ g } C_{11}H_{12}N_2O_7$$

گروه آموزشی ماز

۸۴- در روش تولید غیرمستقیم متانول از گاز متان، مقداری بخار متانول با حجم مولی $23 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$ تولید شده است. اگر هیدروژن اضافی تولید شده در

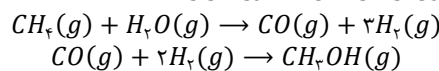
این واکنش، ۹۶ گرم نفتالن را بطور کامل سیر کند، حجم متانول تولید شده بر حسب میلی لیتر کدام است؟ ($C = 12$ و $H = 1 : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۸۶۲۵۰ (۴) ۴۳۱۲۵ (۳) ۵۷۵۰۰ (۲) ۲۸۷۵۰ (۱)

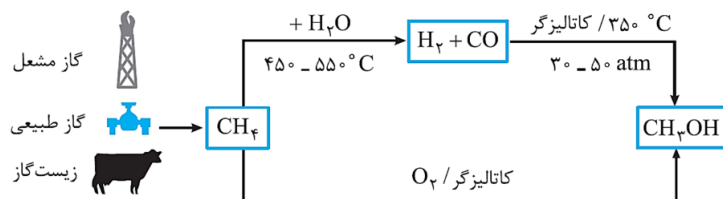
پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

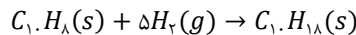
واکنش های انجام شده در روش تولید غیرمستقیم متانول از گاز متان به صورت زیر است:



از ۳ مول هیدروژن تولید شده در واکنش اول، دو مول هیدروژن وارد واکنش دوم می شود. بنابراین به ازای تولید هر مول متانول، یک مول هیدروژن اضافی تولید می شود. توجه داریم که در تولید غیرمستقیم متانول، رد پای کربن دی اکسید افزایش می یابد؛ زیرا برای تأمین دمای بالا، اغلب از سوزاندن سوخت های فسیلی استفاده می شود که گاز کربن دی اکسید تولید می کنند. به همین دلیل، پژوهش های زیادی در حال انجام است تا بتوان گاز متان را به طور مستقیم به متانول تبدیل کرد. به عنوان مثال، می توان گاز متان را در حضور کاتالیزگر و اکسندهای مانند O_2 به طور مستقیم به متانول تبدیل کرد. تصویر زیر، نمایی از فرایند تولید متانول را نشان می دهد:



ابتدا تعداد مول هیدروژن اضافی تولید شده را بدست می آوریم. واکنش سیرشدن کامل نفتالن به صورت زیر است:



در ساختار نفتالن پنج پیوند دوگانه وجود دارد که با پنج مول گاز H_2 به طور کامل سیر می شود؛ بنابراین داریم:

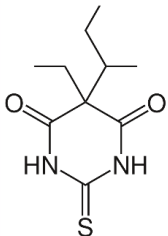
$$? \text{ mol } H_2 = 96 \text{ g } C_{11}H_8 \times \frac{1 \text{ mol } C_{11}H_8}{128 \text{ g } C_{11}H_8} \times \frac{5 \text{ mol } H_2}{1 \text{ mol } C_{11}H_8} = 3/75 \text{ mol } H_2$$

در نهایت حجم متانول تولید شده را حساب می کنیم:

$$? \text{ mL } CH_3OH = 3/75 \text{ mol } H_2 \times \frac{1 \text{ mol } CH_3OH}{1 \text{ mol } H_2} \times \frac{23 \text{ L } CH_3OH}{1 \text{ mol } CH_3OH} \times \frac{1000 \text{ mL } CH_3OH}{1 \text{ L } CH_3OH} = 86250 \text{ mL}$$

گروه آموزشی ماز

۸۵- در رابطه با تصویر مقابل که ساختار نوعی داروی شیمیایی ضد تشنج را نشان می دهد، چه تعداد از عبارات های داده شده درست است؟



آ: عدد اکسایش اتم های نیتروژن در این ترکیب با عدد اکسایش نیتروژن در متیل آمین برابر است.

ب: گروه عاملی موجود در ساختار مولکول پلی اتیلن ترفتالات، در ساختار این ماده یافت می شود.

پ: نیمی از اتم های کربن موجود در ساختار این ماده آلی، به هیچ اتم هیدروژنی متصل نشده اند.

ت: پیوند $C = S$ موجود در آن نسبت به سایر پیوندهای اشتراکی، آنتالپی پیوند بیشتری دارد.

ث: در ساختار این ماده، همانند ساختار ویتامین کا، حلقه های شش ضلعی کربنی وجود دارد.

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

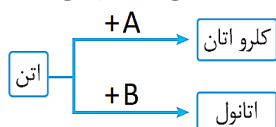
ساختار نشان داده شده، مربوط به یک ماده دارویی به اسم تیوبوتاباریتال است فرمول شیمیایی این ماده دارویی به صورت $C_{11}H_{16}N_2SO_4$ است. در ساختار مولکولی این ترکیب ۳ پیوند دوگانه، یک حلقه شش ضلعی و دو اتم نیتروژن وجود دارد. در رابطه با ترکیب داده شده، فقط عبارت (آ) درست است.

بررسی موارد:

- آ:** نیتروژن در مقایسه با اتم های کربن و هیدروژن خاصیت نافلزی بیشتری دارد. در ساختار این ماده، هر اتم نیتروژن به ۲ اتم کربن و یک اتم هیدروژن متصل شده است، پس عدد اکسایش هر اتم نیتروژن در این ماده برابر با ۳- می شود. در ساختار متیل آمین نیز عدد اکسایش هر اتم نیتروژن برابر با ۳- است.
- ب:** مولکول پلی اتیلن ترفتالات، نوعی پلی استر بوده و در ساختار آن گروه های عاملی استری وجود دارند. این در حالی است که در ساختار ترکیب مورد نظر، گروه عاملی آمیدی یافت شده و گروه عاملی استری وجود ندارد.
- پ:** در ساختار این ترکیب، مجموعاً ۱۰ اتم کربن وجود دارد. از میان این ۱۰ اتم کربن، ۴ مورد از اتم های کربن که همگی در ساختار حلقه شش ضلعی قرار گرفته اند، به هیچ اتم هیدروژنی متصل نشده اند. این تعداد، معادل با ۴۰٪ از کل اتم های کربن است.
- ت:** چون اتم اکسیژن در مقایسه با اتم گوگرد شعاع اتمی کوچک تری دارد، پس قطعاً آنتالپی پیوند $C = S$ کمتر از پیوند $C = O$ خواهد بود.
- ث:** در ساختار مولکولی ویتامین ک، حلقه شش ضلعی کربنی یافت می شود اما در ساختار مولکولی ترکیب داده شده، یک حلقه شش ضلعی وجود دارد که در ساختار آن اتم های کربن و نیتروژن وجود دارند.

گروه آموزشی ماز

۸۶- تصویر زیر، نمایی از فرایند تبدیل گاز اتن به دو فراورده پتروشیمیایی را نشان می دهد:



با توجه به اطلاعات داده شده، ترکیب **A** در ترکیب **B** بوده و در صورت قرار گرفتن مولکول های این ماده در یک میدان الکتریکی، ماده **B**، ذرات سازنده این ماده جهت گیری پیدا

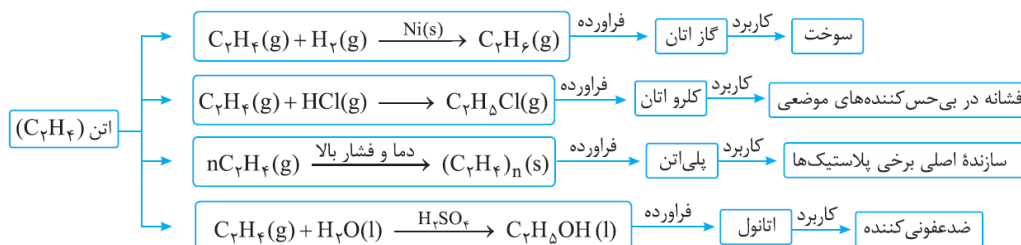
- (۲) محلول - همانند - می کند
(۴) نامحلول - همانند - می کند

- (۱) محلول - برخلاف - نمی کند
(۳) نامحلول - برخلاف - نمی کند

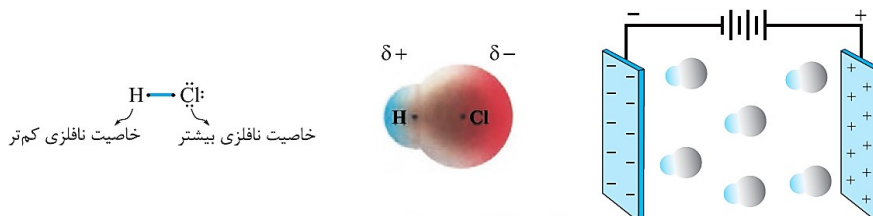
پاسخ: گزینه ۲ (آسان - مفهومی - ۱۲۰۴)

پاسخ تشریحی:

گاز اتن (اولین عضو خانواده آلکن ها با فرمول مولکولی C_2H_2)، سنگ بنای صنایع پتروشیمی بوده و با استفاده از آن، انواع فراورده های پتروشیمیایی سودمند را می توان تهیه کرد. نمودار زیر، روند تبدیل این ماده به برخی از فراورده های سودمند را نشان می دهد:



با توجه به نمودار بالا، ترکیب های **A** و **B** به ترتیب معادل با گاز هیدروژن کلرید و آب هستند. چون گاز هیدروژن کلرید از مولکول های قطبی ساخته شده است، یک نمونه از این ماده در آب حل شده و محلول هیدروکلریک اسید را تولید می کند. تصویر زیر، نمایی از ساختار مولکول های دواتمی گاز هیدروژن کلرید را نشان می دهد:



همانطور که مشخص است، گاز هیدروژن کلرید، همانند آب، از مولکول های قطبی ساخته شده و در صورت قرار گرفتن در یک میدان الکتریکی، ذرات سازنده این ماده جهت گیری پیدا می کنند.

گروه آموزشی ماز

۸۷- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) هریک از اتم‌های کربن موجود در ترفتالیک اسید، توسط یک پیوند دوگانه و دو پیوند یگانه به سایر اتم‌ها متصل شده‌اند.
- (۲) برای افزایش ایمنی در میدان گازی، بخش زیادی از ماده‌ای که جزء اصلی گاز طبیعی به شمار می‌رود را می‌سوزانند.
- (۳) نفت خام، یک مایع غلیظ سیاه‌رنگ بوده و اتن، بنزن و پارازیلن، از جمله هیدروکربن‌های موجود در آن هستند.
- (۴) ساده‌ترین عضو خانواده الکل‌ها، یک ماده زردرنگ بوده و در واکنش با PET، آن را به مواد مفید تبدیل می‌کند.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۴)

پاسخ شریعی:

متانول (ساده‌ترین عضو خانواده الکل‌ها) در واکنش با پلی‌اتیلن ترفتالات یا PET، این ماده را به مواد مفیدی تبدیل می‌کند. توجه داریم که متانول، همانند اتانول، یک ماده بی‌رنگ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:



۱ ساختار ترفتالیک اسید به صورت مقابل است:

فرمول شیمیایی این ترکیب به صورت $C_8H_6O_4$ است. هریک از اتم‌های کربن موجود در این ماده، توسط یک پیوند دوگانه و دو پیوند یگانه به ۳ اتم دیگر متصل شده‌اند.

۲ گاز متان، بخش اصلی سازنده گاز طبیعی است که در میدان‌های نفتی به فراوانی یافت می‌شود. در میدان‌های نفتی برای افزایش ایمنی، بخش قابل توجهی از گاز متان استخراج شده را می‌سوزانند. یکی از کاربردهای گاز متان، تبدیل این ماده به متانول است. گاز متان واکنش‌پذیری بسیار کمی دارد و تبدیل آن به متانول فرایند دشواری است که انجام آن به دانش و فناوری پیشرفته‌ای نیاز دارد. به دلیل ارزان بودن گاز متان و اهمیت بالای متانول در صنایع گوناگون، پژوهش‌های شیمیایی زیادی در حال انجام است تا بتوان روشی برای تبدیل گاز متان به متانول پیدا کرد.

۳ نفت خام، یکی از سوخت‌های فسیلی است که به شکل مایع غلیظ سیاه‌رنگ یا قهوه‌ای متمایل به سبز از دل زمین استخراج می‌شود. بر اساس پژوهش‌ها و یافته‌های تجربی، نفت خام مخلوطی از هزاران ترکیب شیمیایی است که بخش عمده آن‌ها را هیدروکربن‌های گوناگون تشکیل می‌دهند. هیدروکربن‌ها ترکیب‌هایی هستند که از اتصال اتم‌های هیدروژن و کربن به یکدیگر تشکیل شده‌اند. اتن، بنزن، سیکلوگزان و پارازیلن، از جمله هیدروکربن‌های موجود در نفت خام هستند.

در زمان کشف نفت خام، شیمی‌دان‌ها نمی‌دانستند که در این مخلوط سیاه‌رنگ چه موادی وجود دارد، این مواد چه خواصی دارند و هنگام انجام آزمایش و بررسی آن، چه اتفاقاتی ممکن است رخ دهد. پس از آن، شیمی‌دان‌ها با بررسی بیشتر نفت خام، موفق به شناسایی برخی از مواد موجود در آن شده و با ساختار و رفتار این مواد آشنا شدند. ویژگی‌ها و رفتارهای این مواد چنان جذاب و غیرمنتظره بود که سبب افزایش پژوهش‌ها در مورد نفت خام شد. این پژوهش‌ها با یافتن کاربردهای جدید و مناسب برای مواد موجود در نفت خام، خبرهای خوشی از جمله حل مشکل حمل و نقل از شهری به شهر دیگر را نوید می‌داد. بخاطر همین ویژگی‌های جالب است که امروزه نفت خام را طلای سیاه می‌نامند. توجه داریم که روزانه بیش از ۸۰ میلیون بشکه‌ی نفت خام (هر بشکه معادل با ۱۵۹ لیتر است) در دنیا به شکل‌های گوناگون مصرف می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۸۸- برای سنتز دی‌اسید مورد نیاز جهت تولید یک نمونه از پلی‌اتیلن ترفتالات به جرم ۴۸ گرم، به چند گرم پارازیلن با خلوص ۵۳٪ نیاز داریم؟

($g \cdot mol^{-1}$: $H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$)

۸۰ (۴)

۴۰ (۳)

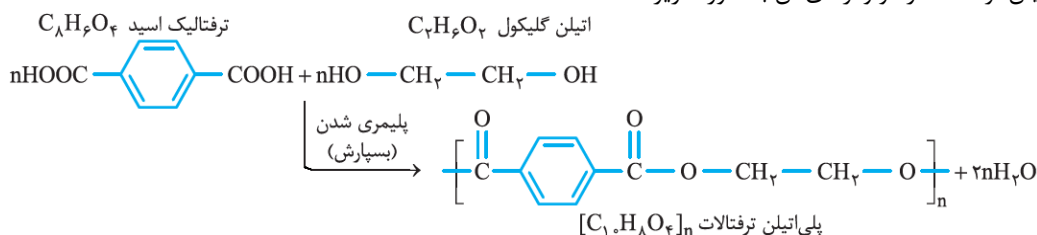
۵۰ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مساله - ۱۲۰۴)

پاسخ شریعی:

واکنش تولید پلی‌اتیلن ترفتالات از مونومرهای آن به صورت زیر است:



برای تولید هر مول ترفتالیک اسید ($C_8H_6O_4$) نیز به ۱ مول پارازیلن (C_8H_{10}) نیاز داریم، پس می‌توان نوشت:

$$n \text{ mol } C_8H_{10} \sim n \text{ mol } C_8H_6O_4 \sim 1 \text{ mol } (C_{10}H_8O_4)_n$$

با توجه به رابطه هم‌ارزی بالا، برای تولید ۱ مول پلی‌اتیلن ترفتالات، به n مول پارازایلین نیاز داریم. بر این اساس، جرم پارازایلین ناخالص استفاده شده در مراحل مربوط به تولید ۴۸ گرم پلی‌اتیلن ترفتالات را محاسبه می‌کنیم.

$$? g C_8H_8O_2 = 48 g (C_8H_8O_2)_n \times \frac{1 \text{ mol } (C_8H_8O_2)_n}{192n g (C_8H_8O_2)_n} \times \frac{n \text{ mol } C_8H_8O_2}{1 \text{ mol } (C_8H_8O_2)_n} \times \frac{106 g C_8H_8O_2}{1 \text{ mol } C_8H_8O_2} \times \frac{100 g C_8H_8O_2}{53 g C_8H_8O_2} = 50 g$$

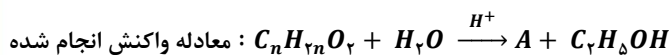
با توجه به محاسبات بالا، برای تولید پلیمر مورد نظر به ۵۰ گرم پارازایلین ناخالص نیاز داریم.

گروه آموزشی ماز

۸۹- مقدار ۴۸۰ گرم از یک استر با خلوص ۹۰٪، در شرایط مناسب در محیط اسیدی با آب واکنش داده و نوعی اسید به همراه ۱۳۸ گرم اتانول تولید می‌کند.

در ساختار استر اولیه چند پیوند اشتراکی وجود داشته و با استفاده از اسید تولید شده، چند کیلوگرم محلول ۲/۵ درصد جرمی می‌توان تهیه کرد؟

$$(O = 16 \text{ و } C = 12 \text{ و } H = 1 : g \cdot mol^{-1})$$



$$13/92, 23 (4)$$

$$9/28, 23 (3)$$

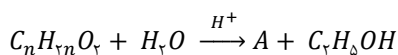
$$13/92, 26 (2)$$

$$9/28, 26 (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مساله - ۱۲۰۴)



استرها دسته‌ای از مواد آلی هستند که در ساختار آن‌ها گروه استری ($-COO-$) وجود دارد. فرمول شیمیایی کلی استرها به صورت $R-COO-R'$ می‌باشد که در آن R معادل با اتم هیدروژن یا یک زنجیره هیدروکربنی بوده و R' معادل با یک زنجیره هیدروکربنی است. توجه داریم که استرها را می‌توان از واکنش میان الکل‌ها ($R'-OH$) و کربوکسیلیک اسیدها ($R-COOH$) بدست آورد. در نقطه مقابل، استرها در واکنش با آب، می‌توانند به اسید و الکل سازنده خود تجزیه شوند. این واکنش، اصطلاحاً به واکنش آبکافت معروف است. ابتدا با استفاده از جرم اتانول به دست آمده، مقدار مول ماده آلی (ترکیب استری) مصرف شده را به دست می‌آوریم. معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



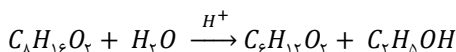
با توجه به معادله واکنش انجام شده، داریم:

$$? \text{ mol } C_nH_{7n}O_2 = 138 g C_7H_8OH \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_8OH}{96 g C_7H_8OH} \times \frac{1 \text{ mol } C_nH_{7n}O_2}{1 \text{ mol } C_7H_8OH} = 3 \text{ mol}$$

طبق فرض سوال، ۴۸۰ گرم ترکیب آلی با خلوص ۹۰٪ (معادل با ۴۳۲ گرم ترکیب آلی خالص) در واکنش آبکافت مصرف شده، پس جرم ۳ مول از ماده آلی اولیه برابر با ۴۳۲ گرم بوده است، بنابراین می‌توان گفت جرم مولی این ترکیب برابر با ۱۴۴ گرم است. سپس با استفاده از جرم مولی ترکیب مورد نظر، فرمول مولکولی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$C_nH_{7n}O_2 : 12n + 7n + 32 = 144 \rightarrow n = 8 \rightarrow C_8H_{16}O_2$$

از آبکافت این استر ($C_8H_{16}O_2$)، اتانول تولید شده است بنابراین ماده A باید یک ترکیب اسیدی ۶ کربنه باشد که فرمول مولکولی آن به صورت $C_6H_{12}O_2$ است. با توجه به مراحل انجام شده، معادله این واکنش به صورت زیر خواهد بود:



در ساختار یک استر ۸ کربنه سیرشده، مجموعاً ۲۶ پیوند اشتراکی بین اتم‌ها وجود دارد. در قدم بعد، جرم اسید تولید شده در این فرایند را محاسبه می‌کنیم:

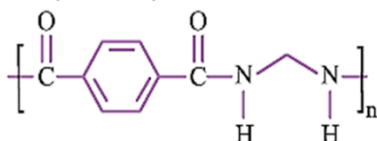
$$? g C_6H_{12}O_2 = 138 g C_7H_8OH \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_8OH}{96 g C_7H_8OH} \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_2}{1 \text{ mol } C_7H_8OH} \times \frac{116 g C_6H_{12}O_2}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_2} = 348 g$$

در قدم آخر، جرم محلول ۲/۵ درصد جرمی از اسید تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? g \text{ محلول } = 348 g C_6H_{12}O_2 \times \frac{100 g \text{ محلول}}{2/5 g C_6H_{12}O_2} \times \frac{1 kg \text{ محلول}}{1000 g \text{ محلول}} = 13/92 kg$$

گروه آموزشی ماز

۹۰- با توجه به ساختار پلیمر زیر، کدام عبارت درست است؟ ($O = 16$ و $N = 14$ و $C = 12$ و $H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)



(۱) همانند پلی‌اتیلن ترفتالات، نیروی بین مولکولی غالب در این پلیمر نیز از نوع پیوند هیدروژنی خواهد بود.

(۲) نسبت شمار اتم‌ها به عناصر در دی‌آمین سازنده این پلیمر، نصف این نسبت در بنزونیک اسید است.

(۳) در ۷۹/۲ گرم از این پلیمر، تقریباً تعداد $10^{24} \times 1/62$ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

(۴) این پلیمر مشابه کولار، یک پلی‌آمید بوده و سرعت آبکافت آن در طبیعت بسیار زیاد است.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی و مساله - ۱۴۰۴)

پاسخ سریعی:

در هر واحد تکرارشونده از این پلیمر، تعداد $(2 \times 2) + (2 \times 1) = 6$ جفت الکترون ناپیوندی ($n.p.e$) وجود دارد. توجه داریم که این جفت الکترون های ناپیوندی روی اتم های نیتروژن و اکسیژن قرار گرفته اند. جرم مولی هر واحد تکرارشونده برابر است با:

$$(9 \times 12) + (2 \times 16) + (2 \times 14) + 8 = 176 \text{ g.mol}^{-1}$$

بر این اساس داریم:

$$? n.p.e = 79/2 \text{ g پلیمر} \times \frac{1 \text{ mol پلیمر}}{176 \text{ g پلیمر}} \times \frac{n \text{ mol تکرارشونده}}{1 \text{ mol پلیمر}} \times \frac{6 \text{ mol } n.p.e}{1 \text{ mol تکرارشونده}} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} n.p.e}{1 \text{ mol } n.p.e} = 1/6254 \times 10^{24} n.p.e$$

بررسی سایر گزینه ها:

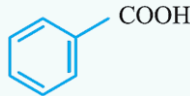
۱ در ساختار پلیمر داده شده، اتم H متصل به N وجود دارد، بنابراین نیروی بین مولکولی غالب در این ماده از نوع پیوند هیدروژنی است. توجه داریم که در ساختار پلی اتیلن ترفتالات، اتم H متصل به O وجود نداشته و نیروی بین مولکولی غالب در این ماده از نوع وان دروالسی است.

۲ ساختار دی آمین سازنده پلیمر داده شده به صورت زیر است:



نسبت شمار اتم ها به عناصر در آن برابر با $\frac{9}{4} = 3$ است؛ در حالی که این نسبت در بنزواتیک اسید با فرمول $C_7H_6O_2$ برابر $\frac{15}{4} = 5$ است.

بنزواتیک اسید ($C_7H_6O_2$) با ساختار زیر، ساده ترین کربوکسیلیک اسید آروماتیک است که در تمشک و توت فرنگی وجود دارد و همانطور که می دانیم، در صنعت از آن به عنوان نگهدارنده استفاده می شود. توجه داریم که نگهدارنده ها نوعی افزودنی هستند که به مواد خوراکی یا غذاها افزوده شده و سرعت واکنش های شیمیایی که منجر به فساد ماده غذایی می شوند را کاهش می دهند.



۴ این پلیمر همانند کولار، یک پلی آمید است و در ساختار آن، گروه عاملی آمیدی به صورت متوالی تکرار شده است. همانطور که می دانیم، سرعت آبکافت پلی آمیدها و پلی استرها در طبیعت بسیار کند است.

گروه آموزشی ماز



آموزش کامل برنامه ریزی برای عید نوروز!

اگر کنکوری هستید که باید این بازه را جدی بگیرید و از آن بهترین استفاده را بکنید. حتی اگر کنکوری نیستید باید برای ایام عید برنامه ریزی کنید!

ایام عید بهترین فرصت جبران کم کاری های گذشته و قوی کردن خودتان است. در نتیجه لازم است برنامه ریزی درسی مجزایی ویژه ایام نوروز داشته باشید. هرآنچه برای برنامه ریزی عید نوروز لازم دارید را در ادامه برایتان توضیح می دهیم.

برنامه ریزی برای عید را از چه زمانی آغاز کنیم؟

مدارس حدوداً یک هفته قبل از عید تعطیل می شوند و بازه نوروز را از ۲۵ اسفند ماه تا ۱۵ فروردین ماه در نظر بگیرید.



فهرستی از کارهایی که لازم است در ایام نوروز انجام بدهید را دریاورید!

این فهرست به شما کمک می کند بدانید قرار است در بازه طلایی نوروز چه کارهایی را انجام بدهید.

اما این فهرست شامل چه مواردی می شود؟

- ✓ درس و مباحثی که در سال تحصیلی فرصت مطالعه آن را نکردید یا از بودجه بندی آزمون عقب ماندید
- ✓ مطالعه برای امتحانات نهایی ✓ مرور همراه با تست ✓ حل تست های جامع
- ✓ تست های هایلایت شده ✓ مرور خلاصه نویسی و نکات یادداشتی ... و



ساعت مطالعه مناسب در بازه ایام نوروز

داوطلبان کنکوری بهتر است بالای ۱۰ ساعت در روز مطالعه داشته باشند.

داوطلبان دهم و یازدهم بهتر است ساعت مطالعاتشان را بیشتر از ایام معمولی در نظر بگیرند.



استراحت کنکوری ها در ایام نوروز



پیشنهاد تمام مشاوران به داوطلبان ۲ الی ۳ روز استراحت است. اما نه بصورت پشت سرهم! بهتر است استراحت هایتان با فاصله باشد. مثلاً روز اول فروردین که به دید و بازدید بزرگان فامیل می روید. در نهایت روز ۱۳ فروردین که ممکن است به تفریح دست جمعی به همراه خانواده بروید.

برنامه ریزی درسی برای عید نوروز

با توجه به لیستی که تهیه کردید برنامه ریزی را شروع کنید. با انجام دادن لیست و تیک زدن کنار هر کدام به خودتان انگیزه بدهید. در برنامه ریزی درسیتان روزهایی را برای جبران در نظر بگیرید، تا اگر نتوانستید یک روز برنامه را اجرا کنید فرصت جبران آن را داشته باشید. یک برنامه قابل اجرا برای خودتان بنویسید نه ایده آل!

برنامه درسیتان به گونه ای باشد که تنوع دروس در آن رعایت شده باشد. زمان استراحت ها به اندازه معقول باشد. در این بازه فرصت دارید تا برای امتحانات نهایی نیز خودتان را آماده کنید. مطالعه برای امتحانات نهایی را در برنامه قرار دهید. برای دروس امتحان نهایی بهتر است از آزمون های سال های اخیر و شبه نهایی های برگزار شده در سال های قبل استفاده کنید. برای دروس کنکور بهترین کار مرور و حل تست است. بهترین منبع حل تست های آزمون های سال های قبل و آزمون های جامع ماز است. می توانید از طریق اپلیکیشن دیجی ماز از آن ها استفاده کنید.

اگر در آزمون دوپینگ ماز ویژه جمع بندی شرکت می کنید مطابق با برنامه پیش بروید. در روزهایی که فرصت بیشتری دارید کارهایی که می خواهید انجام بدهید را در برنامه قرار دهید.

در ادامه شرایط مناسب برای مطالعه خودتان را ایجاد کنید. با توجه به همزمان شدن ایام نوروز و ماه مبارک رمضان بسیاری از دید و بازدیدها کم می شود. اما اگر می بینید ممکن است در فضای خانه درگیر حواشی شوید و فضای مناسبی برای مطالعه ندارید. حتماً با مشورت خانواده در کمپ های مطالعاتی و کتابخانه ها ثبت نام کنید. تا بتوانید بهترین بهره را از این زمان ببرید.



چرا مارکوپولو؟

- ✓ تنها کتاب موجود در ایران که شامل سوالات شبیه ساز نهایی و پیش بینی کنکور ۱۴۰۳ است.
- ✓ تنها کتاب موجود در ایران که تخمین رتبه شما را براساس کنکور و نمره نهایی انجام می دهد.
- ✓ تنها کتاب موجود در ایران که پاسخنامه فوق تشریحی به علاوه کادر آموزشی و جدول جمع بندی دارد.
- ✓ تنها کتاب موجود در ایران که شامل سوالات نهایی ۱۴۰۲ و راهنمای تصحیح مصححان آموزش و پرورش است.

بیشترین کیفیت + مناسب ترین قیمت



برای اطلاعات بیشتر کلیک کنید