

آزمون وی آی پی

اولین بخش آزمون ها در تلگرام

آرشیو آزمون های سال گذشته 🤖

جهت دانلود آزمون ها در کانال ما با آیدی
زیر در تلگرام عضو باشید:

@AzmonVip[!]
t.me/AzmonVip





کد کنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۲/۱۰/۲۱



پاسخنامه آزمون الکترونیکی کنکوری‌های ریاضی - مرحله ۷

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	محدثه شیخعلی	محمد خانگلدی - سوگند روشنی	حمیدرضا ولی‌پور - علیرضا کاظمی بقا رضا قانع
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده	سجاد صادقی‌زاده - محمدجواد حاجی‌وند - علی محمودی - مجید میرزایی	مرورید شاه‌حسینی - جواد سورچی - علیرضا ملک‌حسینی - امیر هوشنگ کیانی قلعه‌سردی
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد - علی ترابی - رضا طهرانچی حامد اسماعیلی - حسین ایروانی - مهسا بایمانی‌نژاد محمد کهنه‌پوشی	فرهنگ امیری - سجاد سیف‌اللهی عالیه میرزایی
مدیر آزمون: رسول خنجری			

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

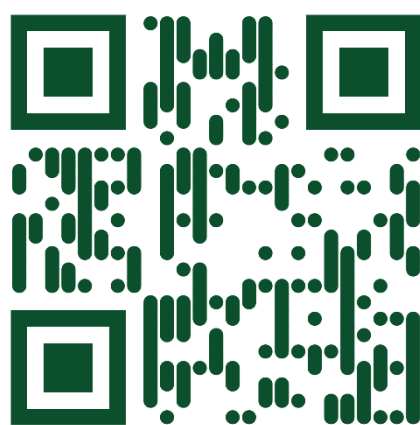


AzmonVIP



دوست مازی من، سلام!

برای اینکه ما نظرت رو در رابطه با آزمون بدونیم نیاز هست که در نظرسنجی شرکت کنی.
برای شرکت در نظرسنجی فقط کافیه روی لینک زیر بزنی یا QR کد زیر رو اسکن کنی تا صفحه
نظرسنجی برات باز بشه!
ممنون که نظرت رو به ما میگی و بهمون برای بهتر شدن آزمون ها کمک می کنی (:



<https://B2n.ir/h43907>

مازی ها؛ میدونین که جلوی هر سوال ما براتون ویژگی و آدرس اون سوال رو میذاریم، حالا
واسه اینکه کامل یادش بگیرید میخوام براتون بگم که چجوری اینا رو براتون چیدیم:

(سطح سوال - سبک سوال - آدرس سوال)

آسان - متوسط - سخت مفهومی - مساله و ... مثلاً: ۱۱۰۱ یعنی فصل ۱ پایه یازدهم آدرس سوال



AzmonVIP



۱- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به $g(x) = 2f(3x-1) + 1$ تبدیل شود، نقطه $A(2, -1)$ بر روی f به چه نقطه‌ای از تابع g متناظر می‌شود؟

(۴) $(9, -1)$ (۳) $(6, -1)$ (۲) $(3, -1)$ (۱) $(1, -1)$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱



یک جمع‌بندی فخن از انتقال

فرض کنید برد تابع $y = f(x)$ بازه $[a, b]$ باشد. $(k > 0)$

نوع تبدیل	ضابطه جدید	برد جدید
k واحد انتقال عمودی به بالا	$f(x) + k$	$[a + k, b + k]$
k واحد انتقال عمودی به پایین	$f(x) - k$	$[a - k, b - k]$
انبساط عمودی	$kf(x), (k > 1)$	$[ka, kb]$
انقباض عمودی	$kf(x), (0 < k < 1)$	$[ka, kb]$
قرینه نسبت به محور x ها	$-f(x)$	$[-b, -a]$

فرض کنید دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $[a, b]$ باشد. $(k > 0)$

نوع تبدیل	ضابطه جدید	دامنه جدید
k واحد انتقال افقی به راست	$f(x - k)$	$[a + k, b + k]$
k واحد انتقال افقی به چپ	$f(x + k)$	$[a - k, b - k]$
انقباض افقی	$f(kx), k > 1$	$[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$
انبساط افقی	$f(kx), 0 < k < 1$	$[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$
قرینه نسبت به محور y ها	$f(-x)$	$[-b, -a]$

روش اول:

تبدیلات را اعمال می‌کنیم:

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 3x} y = f(3x-1) \xrightarrow{\times 2} y = 2f(3x-1)$$

یک واحد انتقال به راست انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{3}$ عرض نقاط ۲ برابر شود

$$\xrightarrow{+1} y = 2f(3x-1) + 1$$

یک واحد انتقال به بالا

$$A(2, -1) \Rightarrow (3, -1) \Rightarrow (1, -1) \Rightarrow (1, -2) \Rightarrow A'(1, -1)$$

روش دوم:

نقطه $A(2, -1)$ بر f واقع است: $f(2) = -1$ در تابع g ورودی $2f(3x-1) + 1$ را برابر ۲ قرار می‌دهیم.

$$3x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$g(1) = 2f(2) + 1 = -2 + 1 = -1 \Rightarrow A'(1, -1)$$

سوالانت منتخب:

قرینه نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

(۴) -4 (۳) -2 ✓(۲) -3 (۱) 3 

- ۲- باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 4x - 1$ برابر $2x - 1$ است. باقی مانده تقسیم $P(x+2)P(x-2)$ بر $2x - 4$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) ۷ (۳) -۷ (۴) $x - 9$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

و اکنون باقی مانده و قضیه تقسیم:

$$R = f\left(\frac{-b}{a}\right)$$

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ برابر است با:

به عبارت دیگر در تقسیم $f(x)$ بر یک جمله‌ای $ax + b$ ، اگر ریشه مقسوم‌علیه را در مقسوم جایگزین کنیم باقی مانده به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی:

باقی مانده $P(x)$ بر $x^2 - 4x - 1$ برابر $2x - 1$ است. بنابراین:

$$P(x) = x(x - 4)Q(x) + 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} P(0) = -1 \\ P(4) = 7 \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$P(x+2)P(x-2) = (2x-4)Q'(x) + R$$

$$\xrightarrow{x=2} R = P(4)P(0) = -7$$

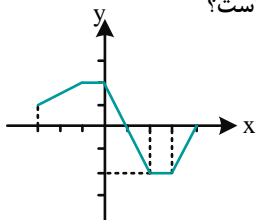
مقسوم‌علیه درجه ۱ بوده و در نتیجه باقی مانده درجه صفر و یک عدد است.

سوال‌های منتخب:

- فرض کنید باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی مانده تقسیم $P(x^2) + 4P(-x)$ بر $x - 2$ کدام است؟
- (۱) ۷ ✓ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) -۱

گروه آموزشی ماز

- ۳- با توجه به نمودار $y = f(x)$ ، طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y = \frac{1}{3}f(-2x+3) - 2$ در آن صعودی می‌باشد کدام است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۴
(۴) ۸

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

با توجه به اینکه ضریب x منفی است تابع حاصل در بازه‌هایی که $f(x)$ صعودی است نزولی و در بازه‌هایی که $f(x)$ نزولی است صعودی می‌باشد. زیرا نمودار نسبت به محور y ها قرینه شده است. بزرگ‌ترین بازه‌ای که $f(x)$ در آن نزولی است $[-1, 3]$ است. بازه متناظر با این بازه جواب مساله می‌باشد. طول این بازه ۴ می‌باشد، x ضریب -۲ دارد. بنابراین طول نقاط، نصف شده و طول بازه موردنظر برابر ۲ خواهد شد، بقیه تبدیلات تاثیری در طول این بازه ندارد.

گروه آموزشی ماز

- ۴- تابع $f(x) = 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{4}x$ را با ضریب ۳ در جهت محور طول‌ها منبسط و نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. در انتها تابع را $\frac{3}{4}$ واحد به سمت

راست منتقل می‌کنیم. نمودار حاصل از کدام نواحی محورهای مختصات عبور می‌کند؟

(۴) اول، سوم و چهارم

(۳) اول، دوم و چهارم

(۲) دوم، سوم و چهارم

(۱) دوم و چهارم

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

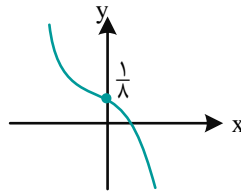
ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{4}x = (2x - \frac{1}{2})^3 + \frac{1}{8}$$

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{انبساط افقی با ضریب ۳}]{x \rightarrow \frac{x}{3}} y = f\left(\frac{x}{3}\right) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور y ها}]{x \rightarrow -x} y = f\left(-\frac{x}{3}\right) \xrightarrow[\frac{3}{4} \text{ واحد به سمت راست}]{x \rightarrow x - \frac{3}{4}} y = f\left(-\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)\right) = f\left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$f(x) = \left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right) = \left(2\left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(-\frac{2}{3}x\right)^2 + \frac{1}{4}$$

خواهیم داشت:



نمودار این تابع از نواحی اول و دوم و چهارم عبور می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۵- تابع $y = f(2x)$ اکیداً نزولی و بر عبارت $2x - 3$ بخش پذیر است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 9x + 9}{f(x)}}$ کدام است؟

(۴) $(3, +\infty)$

(۳) $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right) - \{3\}$

(۲) $(-\infty, 3] - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

(۱) $(-\infty, \frac{3}{2}]$

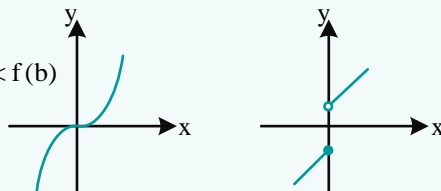
(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

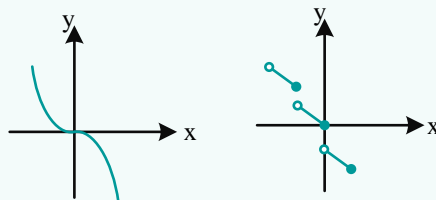
توابع اکیداً یکنوا را دریاب!

فرض کنید a و b دو عضو دلخواه از مجموعه A (دامنه f) باشند.

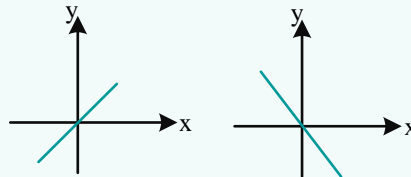
۱) اکیداً صعودی: $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$



۲) اکیداً نزولی: $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$



۳) تابعی که یا اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی: اکیداً یکنوا



پاسخ شریعی:

تابع $y = f(2x)$ بر $2x - 3$ بخش پذیر است.

$$f(2x) = (2x - 3)Q(x) \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} f(3) = 0$$

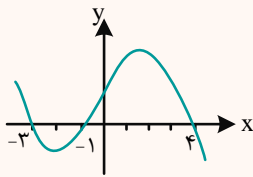
$$\frac{2x^2 - 9x + 9}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(2x - 3)(x - 3)}{f(x)} \geq 0$$

دقت کنید که تابع f اکیداً نزولی است و ریشه آن ۳ است، پس در x های قبل از ۳، برد آن مثبت است و در x های بعد از ۳، برد تابع f منفی است (مثلاً مطابق شکل زیر). حال داریم:

x	$\frac{3}{2}$	3
$f(x)$	+	+
$(2x - 3)(x - 3)$	+	-
$\frac{(2x - 3)(x - 3)}{f(x)}$	+	-

$$\Rightarrow D_f = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$$

سوالات منتخب: ؟؟



شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

(۱) $\{-1, 1\} \cup \{0, 4\}$

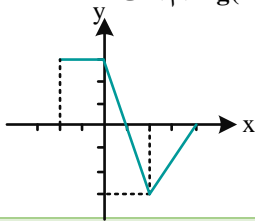
(۲) $\{-3, 1\} \cup [0, 2]$

(۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$ ✓

گروه آموزشی ماز

۶- نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. اگر تابع $g(x) = f(ax+b)+b$ در بازه $[-1, k]$ بر محور طول‌ها منطبق باشد، $g(-\frac{5}{3})$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۳

(۳) -۳

(۴) -۶

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار f ، قسمتی از نمودار که پس از تبدیل به g می‌تواند بر محور x ها منطبق شود بازه $[-2, 0]$ است. عرض تابع f در این فاصله برابر ۳ است. بنابراین برای اینکه $g(x) = f(ax+b)+b$ بر محور x ها منطبق شود باید $b = -3$ باشد. از مون وی ای پی

$$g(x) = f(ax-3) - 3$$

تابع f ابتدا ۳ واحد به سمت راست منتقل شده است. $f(x) \rightarrow f(x-3)$

$$[-2, 0] \rightarrow [1, 3]$$

پس از آن طول نقاط $\frac{1}{a}$ برابر شده است و بازه $[1, 3]$ به $[-1, k]$ تبدیل شده است. در نتیجه a عددی منفی است.

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow \frac{3}{a} \leq \frac{x}{a} \leq \frac{1}{a} \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{a}, \frac{1}{a} \right]$$

بنابراین $\frac{3}{a} = -1$ و $a = -3$ است.

$$g(x) = f(-3x-3) - 3 \Rightarrow g(-\frac{5}{3}) = f(2) - 3 = -3 - 3 = -6$$

خواهیم داشت:

گروه آموزشی ماز

۷- تابع f در فاصله $[0, 5]$ به صورت $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ تعریف شده است. اگر دامنه f مجموعه اعداد حقیقی و $f(x)f(x+5) = 1$ باشد، حاصل $f(49)$ کدام است؟

است؟

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{11}{19}$

(۴) $\frac{19}{11}$

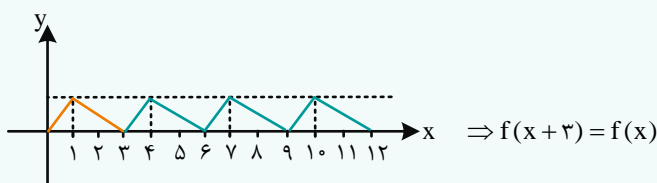
(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

بریم سراغ دوره تناوب:

$$\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow x \pm T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

کوچک‌ترین T مثبت را دوره تناوب تابع f می‌نامیم.



پاسخ شریعی:

$$f(x + \Delta) = \frac{1}{f(x)}$$

می دانیم:

$$f(x + 10) = f(x + \Delta + \Delta) = \frac{1}{f(x + \Delta)} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = f(x)$$

بنابراین:

$$f(49) = f(4 \times 10 + 9) = f(9) = f(4 + \Delta) = \frac{1}{f(4)} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

خواهیم داشت:

گروه آموزشی ماز

۸- در تابع $y = a - 3 \cos a\pi x$ دوره تناوب با بیشترین مقدار تابع برابر است. کمترین مقدار تابع کدام می تواند باشد؟

۵ (۴)

-۴ (۳)

$\frac{\sqrt{17}-6}{2}$ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳



نکات انتقال مثلثاتی در یک نگاه:



$$y = c + a \sin bx \begin{cases} \max = c + |a|, \min = c - |a| \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \\ \text{یکنوایی در } x = 0 \begin{cases} ab < 0 \text{ اکیدا نزولی} \\ ab > 0 \text{ اکیدا صعودی} \end{cases} \end{cases}$$

پاسخ شریعی:

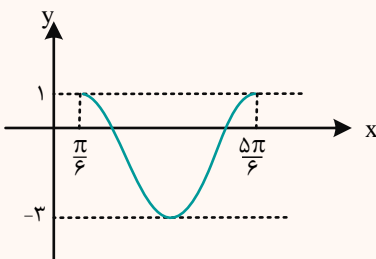
$$\begin{aligned} \text{دوره تناوب تابع} = T &= \frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{2}{|a|} \Rightarrow \frac{2}{|a|} = a + 3 \\ \text{ماکزیمم تابع} = a + |-3| = a + 3 &\begin{cases} a > 0 \Rightarrow a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \\ a < 0 \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -2 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

خواهیم داشت:

$$\text{مینیمم} = a - |-3| = a - 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \\ -4 \\ -5 \end{cases}$$

در گزینه ها فقط -۴ موجود است.

سؤالات منتخب:



شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در یک بازه تناوب است. مقادیر b و c کدام اند؟

✓ (۱) $b = 3, c = -1$

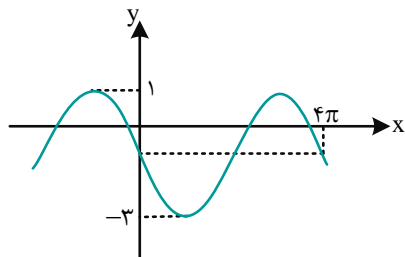
(۲) $b = 3, c = -2$

(۳) $b = \frac{3}{2}, c = -2$

(۴) $b = \frac{3}{2}, c = -1$

گروه آموزشی ماز

۹- نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx) + c$ رسم شده است حاصل $|a+b|+c$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) $\frac{7}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

$$\text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 1 \\ \min = -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow c = -1, |a| = 2$$

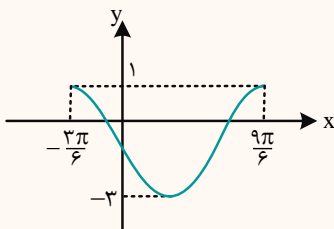
$$\begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \\ a = -2 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |a+b| = \frac{3}{2}$$

$$|a+b|+c = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه تابع در $x=0$ نزولی است، بنابراین $ab < 0$ است. در نتیجه:

خواهیم داشت:

سوالات منتخب:

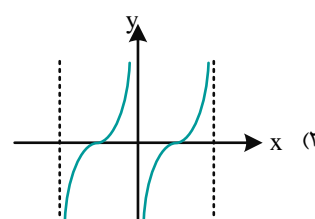
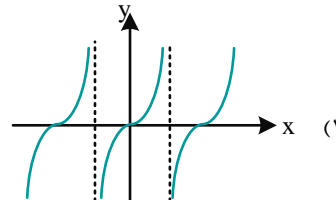
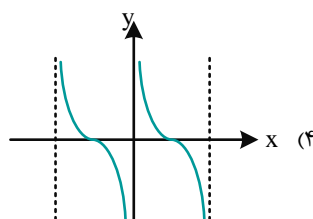
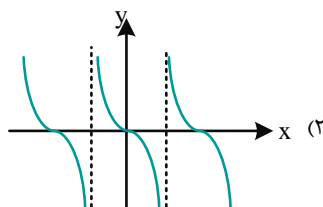


شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) -2 ✓
(۲) -3
(۳) -4
(۴) -6

گروه آموزشی ماز

۱۰- نمودار تابع $y = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\tan^2(\frac{\pi}{4} - x) - 1}$ به کدام صورت است؟



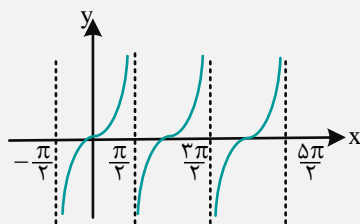
(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳



هر آن چیزی که در مورد $\tan x$ لازم است بدانید:

- (۱) فاصله بین دو مجانب متوالی یک دوره تناوب است.
- (۲) وسط مجانب‌ها، محل برخورد نمودار با محور x هاست.
- (۳) نمودار تابع بین دو مجانب متوالی، اکیداً صعودی است.



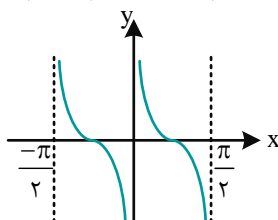
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

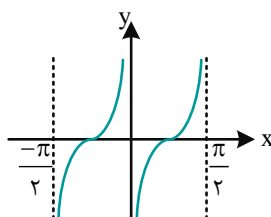
روش اول:

α را برابر $\frac{\pi}{4} - x$ در نظر می‌گیریم و با توجه به نکته گفته شده مربوط به $\tan 2\alpha$ داریم:

$$y = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\tan^2(\frac{\pi}{4} - x) - 1} = -\frac{1}{2} \tan 2(\frac{\pi}{4} - x) = -\frac{1}{2} \tan(\frac{\pi}{2} - 2x) = -\frac{1}{2} \cot 2x$$



تابع $y = \cot 2x$ که همان $y = \tan(\frac{\pi}{2} - 2x)$ می‌باشد را رسم می‌کنیم.



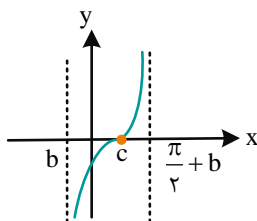
حال تابع $y = -\frac{1}{2} \cot 2x$ را رسم می‌کنیم.

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\tan^2(\frac{\pi}{4} - x) - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

گزینه ۳ درست است.

گروه آموزشی ماز



۱۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{\tan(ax) - 1}{\tan(ax) + 1}$ رسم شده است. $a + \frac{b}{c}$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴) ۳

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲



این هم یک نکته جمع و جور در مورد $\tan x$:

$$\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\tan(ax) - 1}{\tan(ax) + 1} = \tan(ax - \frac{\pi}{4})$$

فاصله بین دو مجانب متوالی در این تابع $\frac{\pi}{|a|}$ است. بنابراین:

$$\frac{\pi}{|a|} = (b + \frac{\pi}{2}) - b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2$$

تابع اکیداً صعودی و ضریب \tan مثبت است در نتیجه $a > 0$ خواهد بود)
خواهیم داشت:

$$y = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$$

این تابع همان تابع $y = \tan x$ است که $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست منتقل شده و طول نقاط آن نصف شده است. این تابع در $x = b$ دارای مجانب است که نقطه متناظر

آن در $y = \tan x$ ، $x = \frac{-\pi}{2}$ است و همچنین نقطه متناظر این تابع در $x = c$ ، نقطه $x = 0$ در $\tan x$ است، پس یکبار به جای x ، b قرار می دهیم و یکبار c :

$$2b - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow b = -\frac{\pi}{4}$$

$$2c - \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{8}$$

در نتیجه:

$$a + \frac{b}{c} = 2 - 1 = 1$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- مجموع ریشه های معادله $\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x = \frac{1}{4}$ در فاصله $[0, \frac{3\pi}{4}]$ کدام است؟

۳π (۴)

$\frac{8\pi}{3}$ (۳)

$\frac{7\pi}{3}$ (۲)

۲π (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۲) آزمون وی ای پی

پاسخ: گزینه ۳

یه کچهوله معادلات مثلثاتی:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = \pm \alpha + 2k\pi$$

پاسخ شریعی

معادله را ساده می کنیم:

$$\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow -\cos 3x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 3x = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2\pi}{9} \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \\ x_3 = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{9} \\ x_4 = \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{9} \end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{8\pi}{3}$$

سوالات منتخب:

مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(3x) \tan(x) = 1$ در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) 5π (۲) 6π ✓ (۳) $\frac{9\pi}{2}$ (۴) $\frac{11\pi}{2}$

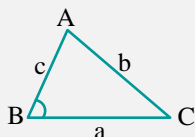
گروه آموزشی ماز

۱۳- چند مثلث می‌توان ساخت که اندازهٔ دو ضلع آن برابر ۴ و ۵ و مساحت آن برابر ۳ باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - محاسباتی - ۱۲۰۲)

مساحت مثلث به کمک سینوس:



$$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

پاسخ شریعی:

اگر $a = 4$ و $b = 5$ باشد، خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin \hat{C} = 3 \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{3}{10}$$

اگر $\sin \alpha = \frac{3}{10}$ باشد، $\sin(\pi - \alpha)$ نیز برابر $\frac{3}{10}$ است. بنابراین دو مثلث با این شرایط می‌توان رسم کرد.

سوالات منتخب:

مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ (کتاب درسی)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ ✓ (۴) ۳

گروه آموزشی ماز

۱۴- تابع f اکیداً نزولی است. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ برابر ۲ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[f(x)]-2}{f(x)-2}$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - ترکیبی/محاسباتی - ۱۲۰۳)

برخی از قضایای حد:

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و g در یک همسایگی a مثبت باشد، آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

پاسخ شریعی:

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ برابر ۲ است. یعنی $f(2) = 2$ می‌باشد. تابع f اکیداً نزولی است. بنابراین: $f(2^+) = 2^-$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[f(x)]-2}{f(x)-2} = \frac{[f(2^+)]-2}{f(2^+)-2} = \frac{[2^-]-2}{2^- - 2} = \frac{1-2}{0^- - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$



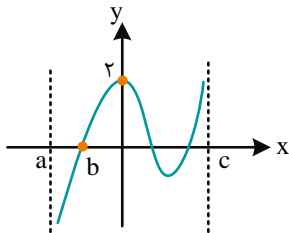
سوالات منتخب:

مقدار $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x + \left[\frac{3}{x^2}\right]}$ کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است.

- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ ✓ (۳) صفر (۴) $\frac{2}{3}$

گروه آموزشی ماز

۱۵- با توجه به نمودار تابع f ، کدام گزینه درست است؟ [] علامت جزء صحیح است.



(۱) $\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{x}{f(x)} = +\infty$ (۲) $\lim_{x \rightarrow a^+} \left[\frac{-x}{f(x)} \right] = 0$

(۳) $\lim_{x \rightarrow c^-} \left[\frac{1}{f(x)} \right] = 0$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)] - 2}{x - [x]} = -\infty$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۳)

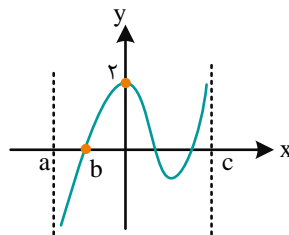
پاسخ: گزینه ۳

یہ نکته‌های:

اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ باشد، آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

بررسی گزینه‌ها:



۱ $\lim_{x \rightarrow b^+} \frac{x}{f(x)} = \frac{b}{0^+} = -\infty$ ✗

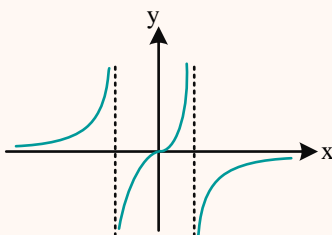
۲ $\lim_{x \rightarrow a^+} \left[\frac{-x}{f(x)} \right] = \left[\frac{-a}{-\infty} \right] = \left[0^- \right] = -1$ ✗

۳ $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{+\infty} = \left[\frac{1}{+\infty} \right] = \left[0^+ \right] = 0$ ✓

۴ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)] - 2}{x - [x]} = \begin{cases} 0^+ \Rightarrow \frac{[2^-] - 2}{0^+ - [0^+]} = \frac{1 - 2}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ 0^- \Rightarrow \frac{[2^-] - 2}{0^- - [0^-]} = \frac{1 - 2}{0^- - (-1)} = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases}$ ✗

سوالات منتخب:

شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{ax^2 + bx + 1}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟



- (۱) $a < 0, b = 0$ ✓
(۲) $a > 0, b = 0$
(۳) $a > 0, b = 1$
(۴) $a < 0, b = 1$

گروه آموزشی ماز

۱۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin x}}{4x^2 - 4\pi x + \pi^2}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{4}$

(۳) ۱

(۲) $+\infty$

(۱) صفر

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

اتحاد مربع دو جمله‌ای با طعم مثلثات!

یک هم ارزی مهم:

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

$$\text{اگر } u \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin u \sim u \\ 1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2} \end{cases}$$

روش اول:

حاصل حد را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin x}}{4x^2 - 4\pi x + \pi^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2}}{(2x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\sqrt{2} \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})|}{16(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} |\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}|}{16(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{16 |\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}|} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$$

روش دوم:

تغییر متغیر: $x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + t$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin x}}{4x^2 - 4\pi x + \pi^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sin(\frac{\pi}{2} + t)}}{4t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos t}}{4t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{t^2}{2}}}{4t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{4\sqrt{2}|t|^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4\sqrt{2}|t|} = +\infty$$

سوالات منتخب:

حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

(۴) $+\infty$

(۳) $-\infty$

(۲) ۱

(۱) -۱

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2 - \sqrt{ax+b}}{ax^2 - bx + a} = -\infty$ باشد، محل برخورد مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{ax+b+1}{bx+a+1}$ کدام است؟

(۴) $(-\frac{1}{b}, -1)$

(۳) $(-\frac{1}{b}, 0)$

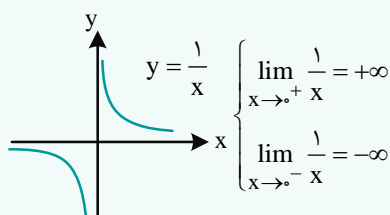
(۲) $(-1, -\frac{1}{b})$

(۱) $(0, -\frac{1}{b})$

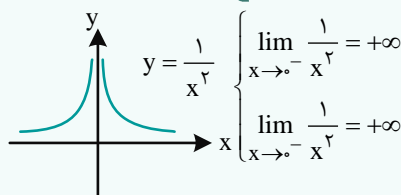
(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

نکاتی در مورد ریشه مضاعف و ریشه ساده مخرج روی نمودار:

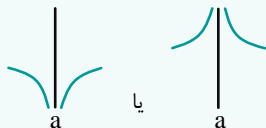


$x=0$ ریشه ساده مخرج است.



$x=0$ ریشه مضاعف مخرج است.

نتیجه مهم: اگر نمودار تابعی در همسایگی نقطه a به یکی از دو صورت زیر بود، می‌فهمیم $x = a$ ریشه مضاعف مخرج است.



پاسخ شریعی:

با توجه به $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2 - \sqrt{ax+b}}{ax^2 - bx + a} = -\infty$ درمی‌یابیم $x = a$ ریشه مضاعف مخرج کسر بوده است. زیرا حاصل حد در هر دو سمت a برابر $-\infty$ شده و تغییر علامت نداشته است. بنابراین:

$$ax^2 - bx + a = a(x-a)^2 = ax^2 - 2a^2x + a^3 \Rightarrow \begin{cases} b = 2a^2 \\ a = a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ غ ق ق} \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

ا نمی‌تواند صفر باشد، زیرا تابع ابتدای سوال همواره دارای مخرج صفر می‌شود.

خواهیم داشت:

$$a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{(x-1)^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{0^+} = +\infty \text{ غ ق ق}$$

$$a = -1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2 - \sqrt{-x+2}}{-(x+1)^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{0^-} = -\infty \checkmark$$

در نتیجه:

$$f(x) = \frac{-x+3}{2x} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانِب قائم: } x = 0 \\ \text{محل تقاطع: } (0, -\frac{1}{2}) \\ \text{مجانِب افقی: } y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

سوالات منتخب:

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{2x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳) ✓

۳ (۲)

-۳ (۱)

گروه آموزشی ماز

۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+4}{-x-3} \right] + \frac{\sqrt{4x^2 - 4x}}{x+4}$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

-۵ (۴)

-۴ (۳)

-۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۳)

پاسخ: گزینه ۴ ✓

پاسخ شریعی:

می‌دانیم حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+4}{-x-3} = -2$ است. حال باید ببینیم این عبارت در $-\infty$ از -2 کوچک‌تر است یا بزرگ‌تر.

$$(-2) - \frac{2x+4}{-x-3} = \frac{-2}{x+3} \xrightarrow{x \rightarrow (-\infty)} \frac{-2}{x+3} > 0 \Rightarrow -2 > \frac{2x+4}{-x-3}$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x+4}{-x-3} \right] = \left[(-2)^- \right] = -3$$

اکنون حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 4x}}{x+4}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x|}{x} = -2$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x+4}{-x-3} \right] + \frac{\sqrt{4x^2-4x}}{x+4} = -3-2 = -5$$

بنابراین:

سوالانت منتخب:

حد عبارت $x \left[\frac{1}{x} \right]$ در کدام حالت عدد متناهی نیست؟ ([] نماد جزء صحیح است)

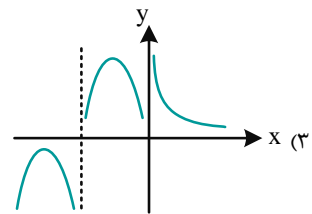
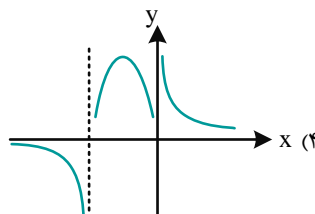
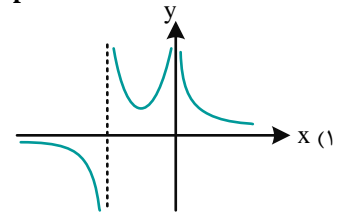
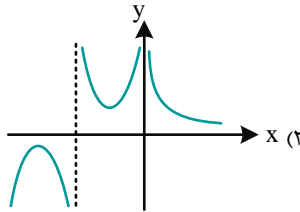
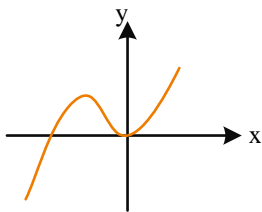
$x \rightarrow +\infty$ (۴)

$x \rightarrow -\infty$ (۳) ✓

$x \rightarrow 0^+$ (۲)

$x \rightarrow 0^-$ (۱)

گروه آموزشی ماز

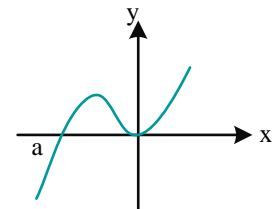
۱۹- نمودار تابع f رسم شده است. تابع $\frac{1}{f}$ به کدام صورت است؟

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار f خواهیم داشت:

۱) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f} = \frac{1}{\infty} = 0^-$

۲) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f} = \frac{1}{\infty} = 0^+$ (گزینه ۳ و ۴ حذف)

۳) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ (گزینه ۳ و ۴ حذف)

۴) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ (گزینه ۲ و ۳ حذف)

۵) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

گزینه ۱ درست است.

گروه آموزشی ماز

۲۰- $f(x) = \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{ax^n + (a-1)x^{n-1} - 3}$ و $y=2$ مجانب افقی این تابع است. کدام یک نمی تواند مجانب قائم این تابع باشد؟

$x = -\frac{3}{2}$ (۴)

$x = -3$ (۳)

$x = 3$ (۲)

$x = 1$ (۱)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۳)

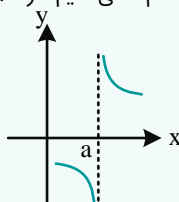
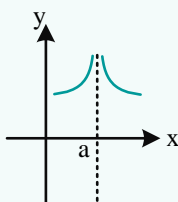
پاسخ: گزینه ۲



مجانبت قائم:

فرض کنید f در یک همسایگی چپ یا راست a تعریف شده باشد، خط $x=a$ را مجانب قائم f می نامیم هرگاه:

$\lim_{x \rightarrow a^+ \text{ یا } a^-} f(x) = \pm \infty$



مجانِب افقی:



خط $y = b$ را مجانب افقی تابع f می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از دو شرط $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ یا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ برقرار باشد.

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y = \frac{x}{-x+1}$$

پاسخ تشریحی:

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم: از مومن وی ای پی

$$f(x) = \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{ax^n + (a-1)x^{n-1} - 3}$$

$$1) a \neq 0 \xrightarrow{y=2 \text{ مجانب افقی}} \begin{cases} n=2 \\ \frac{a^2}{a} = 2 \Rightarrow a=2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3} \xrightarrow{\text{مجانِب قائم}} \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$2) a = 0 \xrightarrow{y=2 \text{ مجانب افقی}} n=2 \Rightarrow f(x) = \frac{-2x+1}{-x-3} \xrightarrow{\text{مجانِب قائم}} x=-3$$

پس $x=3$ نمی‌تواند مجانب قائم این تابع باشد.

سوالات منتخب:

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

✓ ۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

-۲ (۱)

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر $A_{2 \times 2} = [(i-j)]$ و $B = \begin{bmatrix} \cot x & 0 \\ 0 & \tan x \end{bmatrix}$ و $C = AB$ باشد، آن‌گاه جمع درایه‌های ماتریس C^{26} کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۲۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

با توجه به صورت سؤال، ماتریس‌های A و B را می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-2 \\ 2-1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \cot x & 0 \\ 0 & \tan x \end{bmatrix}$$

C برابر است با حاصل ضرب AB ، بنابراین:

$$C = AB \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cot x & 0 \\ 0 & \tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\tan x \\ \cot x & 0 \end{bmatrix}$$

حالا C^2 را به دست می‌آوریم:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\tan x \\ \cot x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\tan x \\ \cot x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tan x \cot x & 0 \\ 0 & -\tan x \cot x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

C^{26} را به صورت $(C^2)^{13}$ می نویسیم و به جای C^2 ، $-I$ را جایگذاری می کنیم:

$$C^{26} = (C^2)^{13} = (-I)^{13} = -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جمع درایه ها}} -2$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر $A = [(-1)^{i+j}(2i-j)]_{2 \times 2}$ باشد و $A^f = mA + nI$ باشد، $m+n$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲



رابطه چی؟ بله دست شنیدید، رابطه کیلی همیلتون!!



در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ خواهیم داشت:

$$A^T - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$$

پاسخ تشریحی:

با توجه به صورت سؤال، ماتریس A را می نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-1) & -(2-2) \\ -(4-1) & (4-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

با توجه به نکته گفته شده، رابطه کیلی همیلتون را می نویسیم تا به ماتریس A^f برسیم:

$$A^T - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$$

$$\xrightarrow{a=1, b=0, c=-3, d=2} A^T - 3A + 2I = \bar{O} \rightarrow A^T = 3A - 2I \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^f = (3A - 2I)^2$$

$$\Rightarrow A^f = 9A^T - 12A + 4I \xrightarrow{\text{طبق رابطه}} A^f = 9(3A - 2I) - 12A + 4I$$

$$\Rightarrow A^f = 15A - 14I$$

در صورت سؤال گفته شده است که $A^f = mA + nI$ پس:

$$15A - 14I = mA + nI \Rightarrow m=15, n=-14 \Rightarrow m+n=1$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر $A^2 - 3A = I$ و ماتریس A وارون پذیر باشد و وارون ماتریس $I - A$ برابر $mA + nI$ باشد، $m-6n$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی:

ابتدا $2I$ به طرفین اضافه می کنیم تا بتوانیم به کمک اتحاد جمله مشترک، سمت چپ تساوی را تجزیه کنیم:

$$A^2 - 3A = I \xrightarrow{+2I} A^2 - 3A + 2I = 3I$$

$$\Rightarrow (A - I)(A - 2I) = 3I$$

$$\xrightarrow{\div 3} (A - I)\left(\frac{1}{3}(A - 2I)\right) = I \Rightarrow (A - I)\underbrace{\left(\frac{1}{3}(A - 2I)\right)}_{(I-A)^{-1}} = I$$

طبق گفته سؤال، وارون $(I - A)$ برابر $mA + nI$ است، پس:

$$mA + nI = \frac{1}{3}(A - 2I) \Rightarrow mA + nI = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{3}, n = \frac{2}{3} \rightarrow 3n - 6m = 2 + 2 = 4$$

گروه آموزشی ماز



۲۴- اگر $(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = A - B$ و $C = AB^{-1} + BA^{-1}$ باشد، آن گاه مجموع درایه های $C^3 + 3C$ کدام است؟
 ۴ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ شریقی:

وارون ماتریس $A^{-1} - B^{-1}$ برابر $A - B$ است، پس حاصل ضرب آنها برابر I است:

$$(A - B)(A^{-1} - B^{-1}) = I \Rightarrow \underbrace{AA^{-1}}_I - AB^{-1} - BA^{-1} + \underbrace{BB^{-1}}_I = I$$

$$\Rightarrow AB^{-1} + BA^{-1} = I$$

طبق صورت سؤال، $C = AB^{-1} + BA^{-1}$ ، پس:

$$AB^{-1} + BA^{-1} = I \Rightarrow C = I$$

خواسته سؤال، مجموع درایه های $C^3 + 3C$ است، در نتیجه:

$$C^3 = I^3 = I \Rightarrow C^3 + 3C = I + 3I = 4I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه ها}} 8$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-1)x + (3-m)y = 2y \\ 3x - 6 = (m-2)y \end{cases}$ جواب نداشته باشد و $A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ m & -2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|-2A| |A|^{-1}|$ کدام است؟
 ۵۷۶ (۴) ۱۱۵۲ (۳) ۲۷۶۴۸ (۲) ۲۳۰۴ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

موقعیت دو خط $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ در صفحه:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \rightarrow \text{دو خط منطبق}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \text{دو خط موازی}$$

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \rightarrow \text{دو خط متقاطع}$$

ضرب عدد در دترمینان:

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد:

$$|kA| = k^n |A|$$

پاسخ شریقی:

ابتدا دو خط داده شده در دستگاه را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$\begin{cases} (m-1)x + (3-m)y = 2y \\ 3x - 6 = (m-2)y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-1)x - 2y = m-3 \\ 3x - (m-2)y = 6 \end{cases}$$

طبق گفته سؤال، دستگاه جواب ندارد، در نتیجه:

$$\frac{m-1}{3} = \frac{-2}{-(m-2)} \neq \frac{m-3}{6} (*)$$

ابتدا به کمک طرفین وسطین مقادیر m را از دو کسر سمت چپ به دست می آوریم:

$$\frac{m-1}{3} = \frac{2}{m-2} \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 6 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}$$

حالا $m = 4$ و $m = -1$ را در رابطه (*) جاگذاری می کنیم:

$$m = 4 \Rightarrow \frac{3}{3} = \frac{2}{2} \neq \frac{1}{6} \quad (m = 4 \text{ قابل قبول})$$

$$m = -1 \Rightarrow \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3} \quad (m = -1 \text{ غیر قابل قبول})$$

حالا m را در A جاگذاری می کنیم و خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ m & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -8 - 4 = -12$$

$$\text{خواسته سؤال: } \left| -2A \right| |A|^{-1} = \left| -2A \right|^2 |A|^{-1} = (-2)^4 |A|^2 |A|^{-1}$$

$$\left| A^{-1} \right| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow 16 |A|^2 = 16 \times 144 = 2304$$

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر $(A-I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ باشد. مجموع درایه های $(A-I)^{-1}A$ کدام است؟

۱۷ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ شریعی:

ابتدا $(A-I)^{-1}A$ را در $(A-I)$ ضرب می کنیم تا به ماتریس همانی برسیم:

$$(A-I)^{-1}(A-I) = I \Rightarrow (A-I)^{-1}A - \underbrace{(A-I)^{-1}I}_{(A-I)^{-1}} = I$$

$$\Rightarrow (A-I)^{-1}A = (A-I)^{-1} + I$$

$$\Rightarrow (A-I)^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه ها}} 19$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- ماتریس $A = \begin{bmatrix} |A| & 0 & -1 \\ 0 & |A| & 1 \\ 0 & 2 & |A| \end{bmatrix}$ وارون پذیر است. اگر به درایه واقع بر سطر سوم و ستون سوم ۳ واحد اضافه کنیم، دترمینان چه تغییری می کند؟

(۲) ۳ واحد کاهش می یابد.

(۴) تغییری نمی کند.

(۱) ۹ واحد افزایش می یابد.

(۳) ۲۷ واحد افزایش می یابد.

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

مازی های عزیز، دو نکته زیر رو در مورد دترمینان ها از دست ندید!

نکته ۱:

اگر به درایه ای از ماتریس، k واحد اضافه شود به دترمینان، k ضربدر همسازه همان درایه اضافه می شود.

نکته ۲:

برای به دست آوردن دترمینان ماتریس های 3×3 ، بهتر است دترمینان را حول سطری به دست آوریم که صفرهای بیشتری دارد.

پاسخ شریعی:

ابتدا دترمینان ماتریس A را به کمک بسط حول ستون اول به دست می آوریم:

$$|A| = |A| \begin{vmatrix} |A| & 1 \\ 2 & |A| \end{vmatrix} = |A| (|A|^2 - 2)$$

دقت کنید که ماتریس A وارون پذیر است، پس $|A| \neq 0$ ، در نتیجه می توانیم $|A|$ را از دو طرف تساوی خط بزنیم:

$$|A| = |A|(|A|^2 - 2) \Rightarrow 1 = |A|^2 - 2 \Rightarrow |A| = \sqrt{3} \quad (1)$$

حال سؤال می گوید که به درایه a_{33} ، 3 واحد اضافه کنیم، ماتریس جدید را A' در نظر می گیریم و آن را بازنویسی می کنیم و باز هم به کمک بسط حول ستون اول، دترمینان این ماتریس را محاسبه می کنیم:

$$A' = \begin{bmatrix} |A| & 0 & -1 \\ 0 & |A| & 1 \\ 0 & 2 & |A|+3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A'| = |A|(|A|(|A|+3) - 2)$$

$$\xrightarrow{|A|=\sqrt{3}} |A'| = \sqrt{3}(\sqrt{3}(\sqrt{3}+3) - 2) = \sqrt{3}(3\sqrt{3}+1) = 9 + \sqrt{3} \quad (2)$$

با دقت به نتیجه گیری های (۱) و (۲) می بینیم که 9 واحد به دترمینان اضافه شده است.

گروه آموزشی ماز

۲۸- دو خط $\Delta: x-3y=5$ و $\ell_1: 2x+y=4$ را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از هر دو خط به فاصله یکسان باشد و از خط ℓ_2 به فاصله $1/5$ باشد؟

(۴) بی شمار

(۳) ۴

(۲) ۲

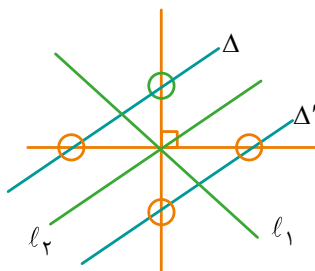
(۱) صفر

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳



ابتدا وضعیت دو خط را مشخص می کنیم:



$$\xrightarrow{\substack{a=1, b=-3 \\ a'=2, b'=1}} \frac{1}{2} \neq \frac{-3}{1} \Rightarrow \text{دو خط متقاطع هستند}$$

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله هستند، نیمساز زوایایی است که آن دو خط با یکدیگر می سازند، حالا دقت کنید که مکان هندسی نقاطی که فاصله آن ها از خط ℓ_2 برابر $1/5$ است، دو خط موازی در دو طرف خط ℓ_2 و به فاصله $1/5$ از آن است. با توجه به شکل، این دو مکان هندسی در چهار نقطه با یکدیگر برخورد می کنند، در نتیجه ۴ نقطه شرایط گفته شده در مسئله را دارند.

گروه آموزشی ماز

۲۹- اگر دایره $2x^2 + ky^2 + mx - 2ky = 0$ در مبدأ مختصات بر نیمساز ناحیه اول و سوم مماس باشد، مساحت دایره کدام است؟

(۴) 3π

(۳) $2\sqrt{2}\pi$

(۲) 2π

(۱) π

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

به دست آوردن شعاع و مرکز از روی معادله گسترده دایره چگونه است؟

در دایره به معادله گسترده $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، مرکز و شعاع از روابط زیر به دست می آیند.

$$O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

دقت کنید که برای استفاده از این روابط، ضرایب x^2 و y^2 حتماً باید برابر یک باشد.



معادله گسترده دایره داده شده است، ضرایب x^2 و y^2 باید با یکدیگر برابر باشند، پس $k=2$. معادله را بازنویسی می کنیم و ضرایب x^2 و y^2 را به ۱ تبدیل می کنیم:

$$2x^2 + 2y^2 + mx - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{m}{2}x - 2y = 0$$

دایره در مبدأ مختصات بر خط $y = x$ مماس است، پس مرکز آن روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم یعنی خط $y = -x$ قرار دارد. ابتدا مرکز دایره را به دست می آوریم و سپس مؤلفه های آن را بر روی خط $y = -x$ جایگذاری می کنیم تا m به دست آید:

$$O = \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2} \right) \xrightarrow{a=\frac{m}{2}, b=-2} O = \left(\frac{-m}{4}, 1 \right)$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } O \text{ روی خط } y=-x \text{ است}} \frac{-m}{4} = -1 \Rightarrow \frac{m}{4} = 1 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow a = 2$$

و حالا نوبت پیدا کردن شعاع است:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \xrightarrow{a=2, b=-2, c=0} r = \frac{1}{2} \sqrt{4+4} = \frac{1}{2} (2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

سؤال از ما مساحت دایره را می خواهد:

$$S = \pi r^2 \xrightarrow{r=\sqrt{2}} S = \pi (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ بر خط $3x - 4y = 4$ مماس است. اگر از نقطه $A(3, 4)$ یک قاطع بر دایره رسم کنید که دایره را در نقاط P و Q قطع کند، $AP \cdot AQ$ کدام است؟

۲۱ (۴)

$\frac{17}{2}$ (۳)

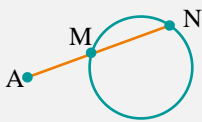
۱۵ (۲)

۱۱ (۱)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

بچه ها نکته زیر از قلم نیفتد!



اگر از نقطه A یک قاطع بر دایره $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$ رسم کنیم، آن گاه حاصل ضرب قطعات ایجاد شده برابر است با:
 $AM \times AN = f(A)$

پاسخ شریقی:

شعاع دایره برابر است با فاصله مرکز تا خط مماس، پس:

$$\text{معادله خط: } 3x - 4y = 4 \Rightarrow 3x - 4y - 4 = 0$$

$$R = |OH| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{x_0=-1, y_0=2, a=3, b=-4, c=-4} R = \frac{|-3 - 8 - 4|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$$

دقت کنید که مرکز دایره و شعاع آن را داریم، پس ابتدا معادله استاندارد آن را می نویسیم و سپس معادله گسترده اش را به دست می آوریم:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \xrightarrow{\alpha=-1, \beta=2, R=3} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

حالا با توجه به نکته داده شده به سراغ خواسته سؤال می رویم:

$$AP \times AQ = f(x_0, y_0) \rightarrow f(3, 4) = 9 + 16 + 6 - 16 - 4 = 11$$

گروه آموزشی ماز

۳۱- در مورد گزاره زیر کدام مورد درست است؟

«مجموعه A ، n عضو دارد. اگر به تعداد زیرمجموعه های مجموعه توانی A ، ۱ واحد اضافه کنیم، عدد به دست آمده عددی اول است.»

(۱) گزاره نادرست است و اگر A ، ۵ عضو داشته باشد، گزاره رد می شود.

(۲) گزاره درست است و با استدلال استنتاجی ثابت می شود.

(۳) گزاره نادرست است، اگر A ، ۸ عضو داشته باشد، گزاره رد می شود.

(۴) گزاره درست است و با برهان خلف ثابت می شود.

(سخت - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

مجموعه توانی دیگر چیست؟!

مجموعه توانی مجموعه A ، مجموعه ای است که شامل تمام زیرمجموعه های A ، از جمله خود A و تهی می باشد.

نکته ریز کتاب درسی:

اعداد به فرم $2^n + 1$ ، همیشه اول نیستند و $n = 5$ مثال نقضی برای آن است.

پاسخ تشریحی:

ابتدا دقت کنید:

مجموعه توانی A ، 2^n عضو دارد \Rightarrow مجموعه A ، 2^n زیرمجموعه دارد \Rightarrow مجموعه A ، n عضو دارد

مجموعه توانی A ، 2^{2^n} زیرمجموعه دارد \Rightarrow

حالا اگر یک واحد به تعداد زیرمجموعه های مجموعه توانی A اضافه کنیم، $2^n + 1$ زیرمجموعه خواهد داشت.

با بررسی گزینه ها درمی یابیم که به ازای $n = 5$ گزاره نادرست است و رد می شود، پس گزینه ۱ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۳۲- چه تعداد از اعضای مجموعه $\{21, 22, 23, \dots, 250\}$ اگر به جای n در عبارت $\frac{n^2(n+1)^2}{9}$ قرار گیرند، این عبارت زوج می شود؟

۱۵۳ (۴)

۷۶ (۳)

۷۹ (۲)

۱۲۰ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

دو نکته ریز از فصل اول گسسته!

نکته ۱:

اگر عددی فرد باشد، مربع آن فرد است و برعکس. همچنین اگر عددی زوج باشد، مربع آن نیز زوج است و برعکس.

نکته ۲:

حاصل ضرب دو عدد متوالی، همواره زوج است.

پاسخ تشریحی:

طبق نکته اول گفته شده، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{9} = \left(\frac{n(n+1)}{3}\right)^2$ زوج باشد، باید $\frac{n(n+1)}{3}$ نیز زوج باشد، از طرفی می دانیم که حاصل ضرب دو عدد متوالی زوج

است، پس $n(n+1)$ نیز زوج است، حال برای اینکه $\frac{n(n+1)}{3}$ زوج شود کافی است که یکی از اعداد n یا $n+1$ مضرب ۳ باشد، یعنی به صورت $3k$ ، پس:

$$\text{حالت ۱: } n = 3k \Rightarrow 21 \leq 3k \leq 250 \Rightarrow 7 \leq k \leq 83$$

$$(۱) \quad (83 - 7) + 1 = 77 \quad \text{تعداد}$$

$$\text{حالت ۲: } n + 1 = 3k \Rightarrow n = 3k - 1 \Rightarrow 21 \leq 3k - 1 \leq 250$$

$$\Rightarrow 22 \leq 3k \leq 251 \Rightarrow 8 \leq k \leq 83$$

$$(۲) \quad (83 - 8) + 1 = 76 \quad \text{تعداد}$$

$$(۱), (۲) \rightarrow 77 + 76 = 153$$

گروه آموزشی ماز

۳۳- اگر n بزرگ ترین عدد دو رقمی باشد که به ازای آن، عبارت $3^n - 2^n$ بر ۳۵ بخش پذیر باشد، آن گاه مجموع ارقام بزرگ ترین عدد دو رقمی x که در

معادله $9 \equiv nx \pmod{15}$ صدق می کند، کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

نکته زیر از اهن نکته های قشنگ بحث نظریه اعداد!

اگر $a^n - b^n \mid a^k + b^k$ ، آن گاه $\frac{n}{k}$ زوج است.



۳۵ را به صورت $۳^۳ + ۲^۳$ می نویسیم و از نکته گفته شده استفاده می کنیم:

$$۳۵ | ۳^n - ۲^n \rightarrow ۳^۳ + ۲^۳ | ۳^n - ۲^n$$

$$\frac{n}{۳} = ۲k \Rightarrow n = ۶k \Rightarrow ۱۰ \leq ۶k \leq ۹۹ \Rightarrow ۲ \leq k \leq ۱۶ \Rightarrow k_{\max} = ۱۶ \Rightarrow n_{\max} = ۹۶$$

$$\begin{array}{c} ۱۵ \\ ۹۶x \equiv -۹ \rightarrow ۶x \equiv ۶ \end{array} \xrightarrow[\div ۶]{\frac{۱۵}{۳} = ۵} x \equiv ۱ \pmod{(۶, ۱۵)=۳}$$

$$x = ۵k' + ۱ \xrightarrow{k'=۱۹} x_{\max} = ۹۶$$

$$۹ + ۶ = ۱۵$$

گروه آموزشی ماز

۳۴- به ازاء چند عدد طبیعی سه رقمی مانند n دو عبارت $۱۲n + ۷$ و $۵n - ۲$ نسبت به هم اول هستند؟

۸۹۰ (۴)

۸۸۵ (۳)

۱۰ (۲)

۱۵ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳



خاصیت مهم عا د کردن:

اگر a دو عبارت b و c را عا د کند، آن گاه هر ترکیب خطی از آن ها را نیز عا د می کند.

$$\begin{array}{l} a | b \\ a | c \end{array} \rightarrow a | mb \pm nc$$

تعریف ب.م.م با عا د کردن:

دو عدد صحیح a و b مفروض اند. (حداقل یکی مخالف صفر است). هرگاه $d | a$ و $d | b$ ، کوچک ترین عدد طبیعی d را ب.م.م a و b می گوئیم و آن را به صورت $(a, b) = d$ نمایش می دهیم.

یه تعریف کچله در مورد دو عدد نسبت به هم اول داشته باشیم:

اگر $(a, b) = ۱$ ، آن گاه دو عدد نسبت به هم اول هستند.



برای اینکه دو عبارت نسبت به هم اول باشند، ب.م.م آن ها باید برابر ۱ باشد، پس ابتدا ب.م.م آن ها را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} d | ۵n - ۲ \xrightarrow{\times ۱۲} d | ۶۰n - ۲۴ \\ d | ۱۲n + ۷ \xrightarrow{\times ۵} d | ۶۰n + ۳۵ \end{cases} \xrightarrow{-} d | ۶۰n - ۲۴ - ۶۰n - ۳۵ \Rightarrow d | -۵۹ \Rightarrow d = ۱, ۵۹$$

حال برای اینکه بفهمیم به ازای چند مقدار n ، ب.م.م برابر ۵۹ می شود، $۵n - ۲$ را به پیمانه ۵۹ با صفر هم نهشت قرار می دهیم:

$$۵n - ۲ \equiv ۰ \pmod{۵۹} \Rightarrow ۵n \equiv ۲ \pmod{۵۹} \Rightarrow ۵n \equiv ۱۲۰ \pmod{۵۹} \xrightarrow{\div ۵} n \equiv ۲۴ \pmod{۵۹} \Rightarrow n = ۵۹t + ۲۴$$

n های سه رقمی را می خواهیم:

$$۱۰۰ \leq ۵۹t + ۲۴ \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۷۶ \leq ۵۹t \leq ۹۷۵$$

$$\xrightarrow{t \in \mathbb{Z}} ۲ \leq t \leq ۱۶ \Rightarrow \text{تعداد اعداد } t \text{ ممکن} = (۱۶ - ۲) + ۱ = ۱۵$$

به ازای ۱۵ مقدار t ، ۱۵ مقدار n سه رقمی، تولید می شود که به ازای آن ها دو عبارت $۵n - ۲$ و $۱۲n + ۷$ دارای ب.م.م ۵۹ می شود، در حالی که مطلوب مسئله ما این است ب.م.م برابر یک شود، پس تعداد کل اعداد سه رقمی را منهای ۱۵ می کنیم:

$$۹۰۰ - ۱۵ = ۸۸۵$$

گروه آموزشی ماز

۳۵- اگر a عددی صحیح و $a^۲ - ۴$ مضرب ۵ باشد، باقی مانده $۳a - ۱$ بر ۱۰ چند مقدار مختلف می تواند اختیار کند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



افراز مجموعه اعداد صحیح به کمک قضیه تقسیم چجوری انجام میشه؟



در تقسیم اعداد صحیح بر m ، m مدل باقی مانده خواهیم داشت که اگر این ها را به کمک قضیه تقسیم نمایش دهیم، اعداد صحیح را به m دسته افراز کرده ایم، مثلاً در تقسیم بر ۴، اعداد صحیح به چهار مدل زیر افراز می شوند:

$$4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$$

اینم یه فوت کوزه گری در مورد به توان رساندن رابطه تقسیم!



وقتی الگوریتم تقسیم را به توان می رسانیم، می توانیم فقط باقی مانده را به توان برسانیم.

گام اول:

$a^2 - 4$ صحیح و مضرب ۵ است، در نتیجه:

$$a^2 - 4 = 5k \Rightarrow a^2 = 5k + 4$$

گام دوم:

حالا اعداد صحیح را به پیمانه ۵ افراز می کنیم:

$$a = 5k \Rightarrow a^2 = 5k'$$

$$a = 5k + 1 \Rightarrow a^2 = 5k' + 1$$

$$a = 5k + 2 \Rightarrow a^2 = 5k' + 4$$

$$a = 5k + 3 \Rightarrow a^2 = 5k' + 9 = 5k'' + 4$$

$$a = 5k + 4 \Rightarrow a^2 = 5k' + 16 = 5k'' + 1$$

با دقت به مرحله اول و دوم می بینیم که a به صورت $5k + 2$ یا $5k + 3$ است، حالا با توجه به این مورد، باقی مانده $3a - 1$ بر ۱۰ را بررسی می کنیم:

$$a = 5k + 2 \Rightarrow 3a - 1 = 15k + 5 \begin{cases} k=2t \rightarrow 3a-1=30t+5 \xrightarrow{\text{باقی مانده } (3a-1) \text{ بر } 10} 5 \\ k=2t+1 \rightarrow 3a-1=30t+20 \xrightarrow{\text{باقی مانده } (3a-1) \text{ بر } 10} 0 \end{cases}$$

$$a = 5k + 3 \Rightarrow 3a - 1 = 15k + 8 \begin{cases} k=2t \rightarrow 3a-1=30t+8 \xrightarrow{\text{باقی مانده } (3a-1) \text{ بر } 10} 8 \\ k=2t+1 \rightarrow 3a-1=30t+23 \xrightarrow{\text{باقی مانده } (3a-1) \text{ بر } 10} 3 \end{cases}$$

بنابراین چهار مقدار را اختیار می کند.

گروه آموزشی ماز

۳۶ - اگر $a \equiv 9!$ و $b \equiv \sum_{n=1}^{1403} n!$ باشند و a و b کوچک ترین اعداد طبیعی دو رقمی باشند که در این رابطه ها صدق می کنند، مجموع ارقام عدد $a^2 + b^2$ کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴



یک خاصیت مهم و کاربردی از هم نهشتی رو با هم ببینیم:



در هر مرحله از هم نهشتی، می توانیم به جای جملات، باقی مانده ی آن ها را بر پیمانه ی هم نهشتی قرار دهیم. مثلاً در اعداد توان دار اگر پایه بزرگ بود، باقی مانده ی آن را بر پیمانه جایگزین می کنیم.

پاسخ شریعی:

ابتدا ۹! را باز می کنیم و سپس با توجه به نکته گفته شده، باقی مانده ها بر ۱۷ را جایگزین می کنیم:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \equiv 17 \times 42 \times 20 \times 6 \equiv 4 \times 8 \times 3 \times 6 \equiv 32 \times 18 \equiv 15$$

$$\Rightarrow 9! \equiv 15$$



پس کوچکترین عدد دو رقمی که در رابطه صدق می کند، ۱۵ است، پس $a = 15$ حال به سراغ قسمت دوم سؤال می رویم:

$$\sum_{n=1}^{1403} n! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! + 5! \equiv 1 + 2 + 6 + 0 + 0 \equiv 9 \equiv 33$$

در نتیجه کوچکترین عدد طبیعی دو رقمی که در رابطه صدق می کند ۳۳ است، پس $b = 33$. دقت کنید که از $4!$ به بعد، همه ی عددها بر ۲۴ بخش پذیرند، چرا که عامل ۲۴ در آن ها وجود دارد، پس به جای تمام آن ها صفر می گذاریم.
خواسته سؤال:

$$\begin{aligned} a = 15 &\Rightarrow a^2 = 225 \\ b = 33 &\Rightarrow b^2 = 1089 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= 1314 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 1+3+1+4 = 9 \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- مجموع ارقام بزرگترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله $95 = 7y + x + 10(12 \times 1000^{13})$ صدق می کند، کدام است؟

۲۷ (۴)

۲۶ (۳)

۲۴ (۲)

۲۵ (۱)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

این هم از معادله سیاله و روش حل کردن آن:

هر معادله به شکل $ax + by = c$ را معادله سیاله خطی می نامیم و برای به دست آوردن جواب آن، ابتدا معادله را به ساده ترین شکل ممکن می نویسیم و سپس معادله را به معادله هم نهشتی با پیمانه یکی از ضرایب تبدیل می کنیم. یکی از دو معادله را انتخاب کرده و حل می کنیم و با جایگذاری آن در معادله سیاله، متغیر دیگر را می یابیم.

پاسخ تشریحی:

با توجه به درسنامه، معادله هم نهشتی زیر را تشکیل می دهیم:

$$(12 \times 1000^{13} + 10)x \equiv 95 \pmod{7}$$

به جای ۱۲، ۱۰۰۰ و ۱۰، هم نهشتهای آن ها به پیمانه ۷ را قرار می دهیم:

$$\left((5) \times (-1)^{13} + (3) \right) x \equiv 95 \pmod{7} \Rightarrow -2x \equiv 95 \pmod{7} \Rightarrow 5x \equiv 95 \pmod{7}$$

$$\xrightarrow{\div 5} x \equiv 19 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 19$$

برای اینکه بزرگترین عدد سه رقمی x به دست آید، $k = 140$:

$$\xrightarrow{k=140} x = 7(140) + 19 = 999 \xrightarrow{\text{جمع ارقام}} 9+9+9 = 27$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- اگر در گراف ساده G با مجموعه رئوس V همواره $|V(G)| = 8$ و $\sum_{i=1}^8 \deg(V_i) = 50$ باشد، بیشترین تعداد رأسی که همسایگی بسته آن رأس، ۸ عضوی است، چه تعداد است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

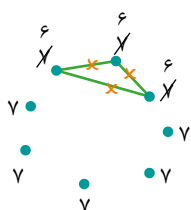
پاسخ: گزینه ۳

به به! بلاخره رسیدیم به گراف. اینم دو تانگنه از مبحث گراف

در گراف ساده، مجموع درجات رئوس، دو برابر تعداد یال ها می باشد.

نکته: اگر در سؤالی p و q داده شده باشد و حداکثر تعداد رأس فول خواسته شده باشد به سراغ گراف کامل می رویم.

پاسخ تشریحی:



منظور از $|V(G)|$ همان مرتبه گراف است، پس $p = 8$ و منظور از $\sum_{i=1}^8 \deg(v_i) = 50$ مجموع درجات رئوس است که برابر $2q$

می باشد، در نتیجه: $2q = 50$ پس $q = 25$.

رأسی که همسایگی بسته آن ۸ عضو داشته باشد، در اینجا رأس فول است، پس سؤال از ما بیشترین تعداد رأس فول را می‌خواهد، حال با توجه به نکته گفته شده به سراغ گراف کامل می‌رویم، گراف کامل ۸ رأسی دارای $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ یال است، پس گراف ما گراف کاملی است که ۳ یال آن حذف شده است، حال برای اینکه بیشترین تعداد رأس فول را داشته باشیم باید ۳ یال را از سه رأس حذف کنیم، در نتیجه حداکثر ۵ رأس فول خواهیم داشت.

گروه آموزشی ماز

۳۹- گراف ۶- منظم G ناهمبند است و حداقل مرتبه و اندازه را دارد. این گراف چند دور به طول ۴ دارد؟

۳۵ (۴)

۷۰ (۳)

۱۳۵ (۲)

۲۱۰ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۲)

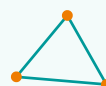
پاسخ: گزینه ۱

گراف همبند و ناهمبند:

گرافی که فقط از یک بخش تشکیل شده است را همبند و گرافی که از بیش از یک بخش تشکیل شده است را ناهمبند می‌نامیم.



گراف ناهمبند



گراف همبند

دور به طول n در گراف K_p

تعداد دورهای به طول n در گراف K_p از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\binom{p}{n} \frac{(n-1)!}{2}$$

$$(p \geq 3, n = 3, 4, \dots, p)$$

پاسخ تشریحی:

گراف ذکر شده اگر بخواهد حداقل مرتبه و اندازه را داشته باشد با توجه به ناهمبند بودن آن باید از دو بخش تشکیل شده باشد، همچنین هر رأس دارای ۶ یال است، پس حداقل مرتبه‌ی هر بخش گراف، ۷ است. در نتیجه گراف گفته شده از دو گراف K_7 تشکیل شده است. پس برای پیدا کردن دورهای به طول ۴ در آن از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد دورهای به طول } n \text{ در گراف } K_p = \binom{p}{n} \frac{(n-1)!}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{در گراف } K_7 \text{ داریم}} \text{تعداد دور به طول ۴} = 2 \times \binom{7}{4} \frac{(4-1)!}{2} = 2 \times 35 \times 3 = 210$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- گراف ساده G از مرتبه ۱۰ تنها یک دور ۱۰ رأسی دارد. چند یال به این گراف اضافه کنیم تا هر دو رأس آن با هم مجاور شوند؟

۴۰ (۴)

۳۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

اینم از تعریف گراف کامل:

گرافی که هر دو رأس در آن مجاور هستند، گراف کامل نام دارد. تعداد یال‌های یک گراف کامل p رأسی از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

نکته:

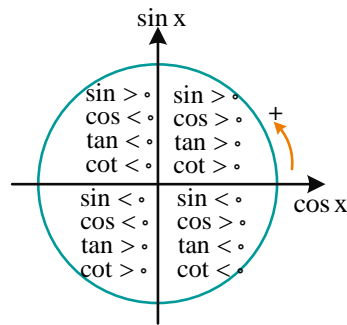
گراف n رأسی که تنها دارای یک دور به طول n باشد را با یک n ضلعی نمایش می‌دهند (دارای n یال است.) و آن را با C_n نام‌گذاری می‌کنند.

پاسخ تشریحی:

گراف گفته شده در صورت سؤال همان C_{10} است که ۱۰ یال دارد. حال با توجه به درسنامه می‌خواهیم آن را به گراف کامل ۱۰ رأسی تبدیل کنیم، ابتدا محاسبه می‌کنیم که گراف K_{10} چند یال دارد:

$$q = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

پس $45 - 10 = 35$ یال باید به آن اضافه کنیم.



دایره مثلثاتی

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ و } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

اتحادها

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

روابط $(\alpha \pm \beta)$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

روابط (2α)

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

زوایای متمم $(\alpha, 90^\circ - \alpha)$

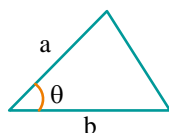
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

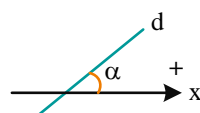
$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

زوایای مکمل $(\alpha, 180^\circ - \alpha)$



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

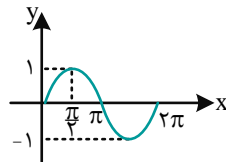
مساحت مثلث



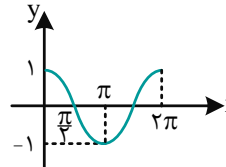
$$m_d = \tan \alpha$$

شیب خط

مفاهیم پایه



نمودار $y = \sin x$



نمودار $y = \cos x$

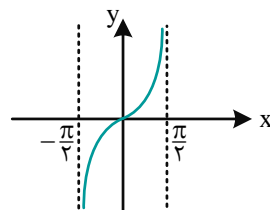
تابع $y = a + b \sin(cx + d)$

- $a + |b| \leftarrow \max$
- $a - |b| \leftarrow \min$
- دوره تناوب (T) $\leftarrow T = \frac{2\pi}{|c|}$
- تابع در $y = 0$
 - صعودی $\leftarrow bc > 0$
 - نزولی $\leftarrow bc < 0$

رسم نمودارهای مثلثاتی

تابع $y = a + b \cos(cx + d)$

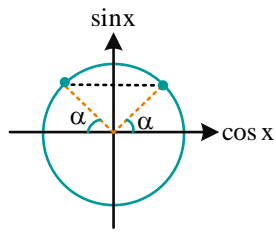
- $a + |b| \leftarrow \max$
- $a - |b| \leftarrow \min$
- دوره تناوب (T) $\leftarrow T = \frac{2\pi}{|c|}$



نمودار $y = \tan x$

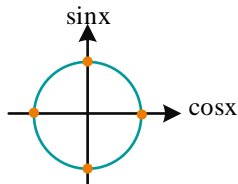
تابع $y = \tan(ax)$

- دوره تناوب $\leftarrow T = \frac{\pi}{|a|}$



$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

معادله سینوسی

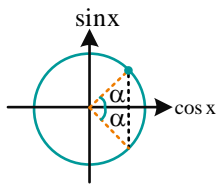


$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

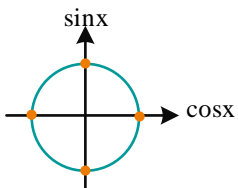
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

حالات خاص معادله سینوسی



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = 2k\pi - \alpha \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

معادله کسینوسی



$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

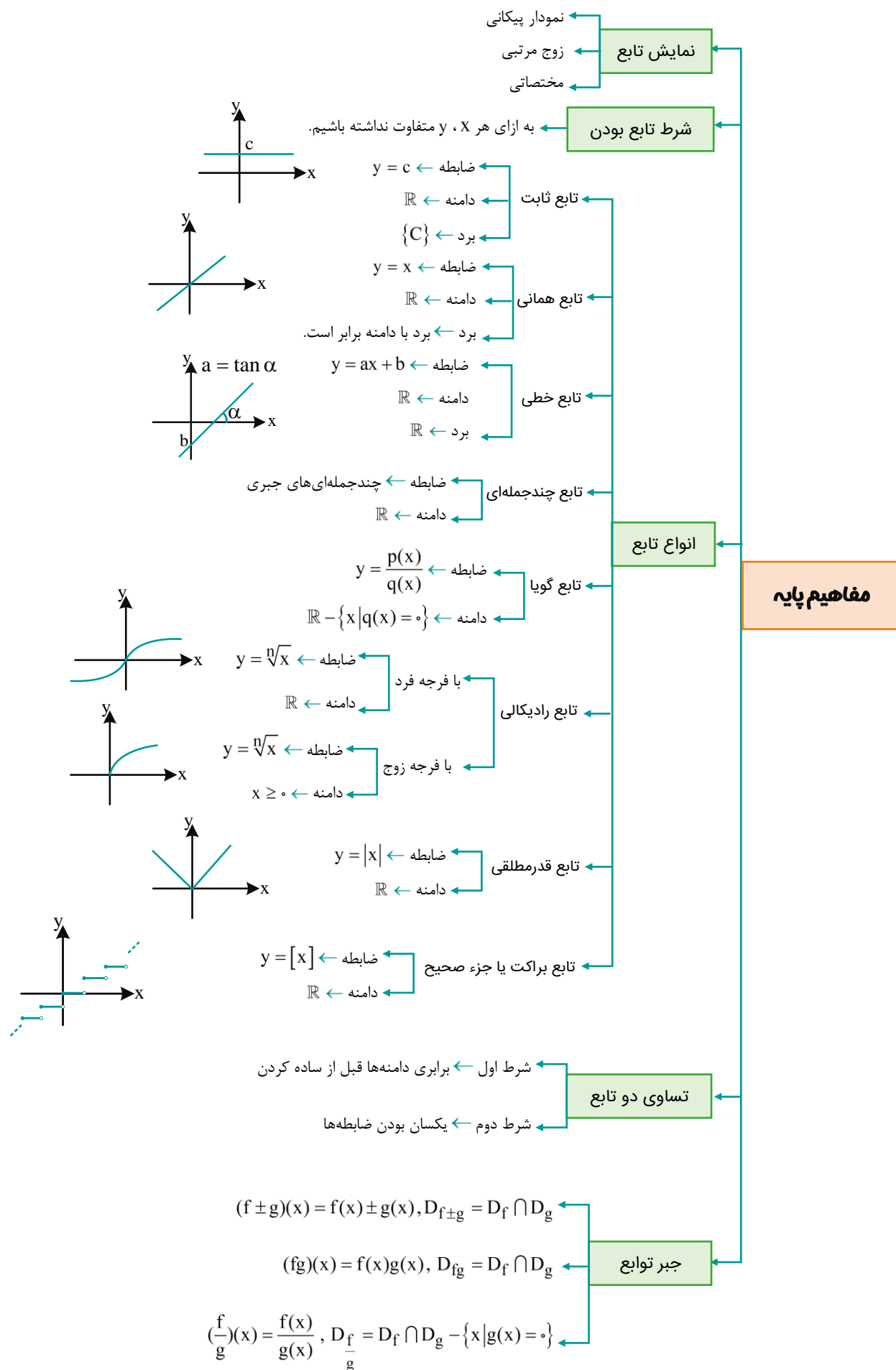
حالات خاص معادله کسینوسی

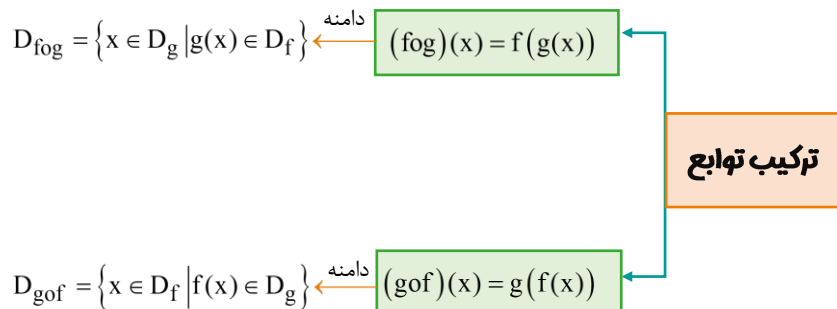
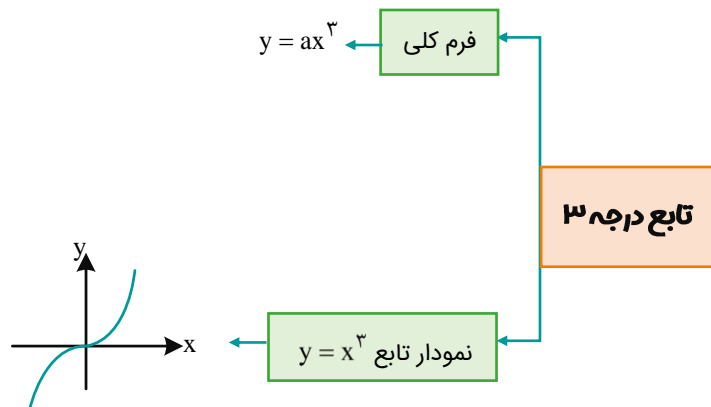
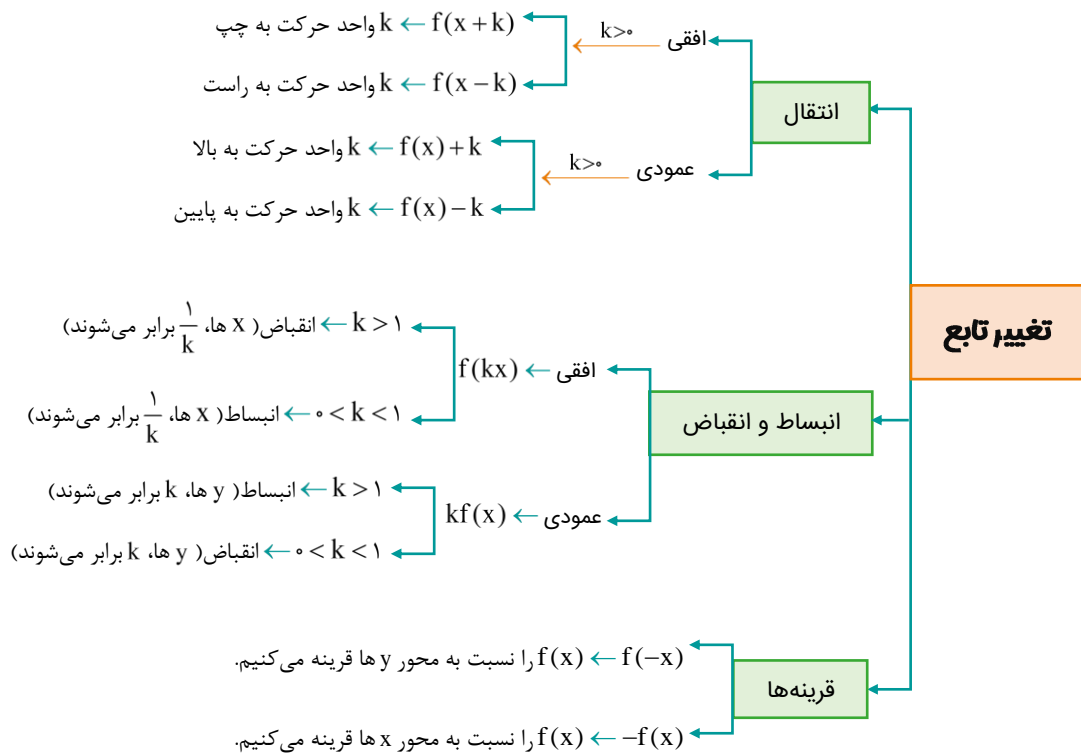
$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

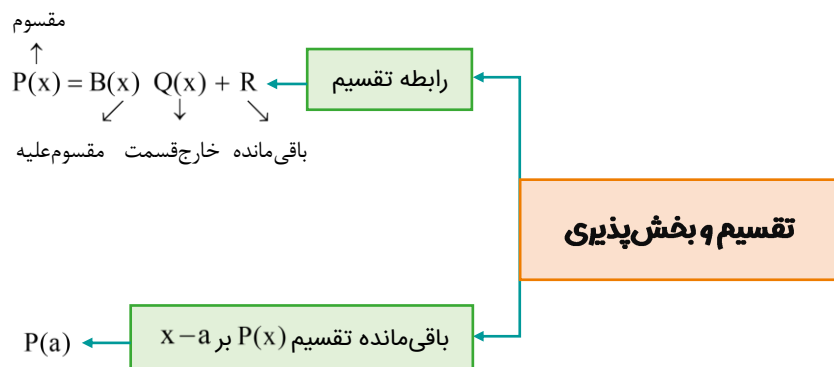
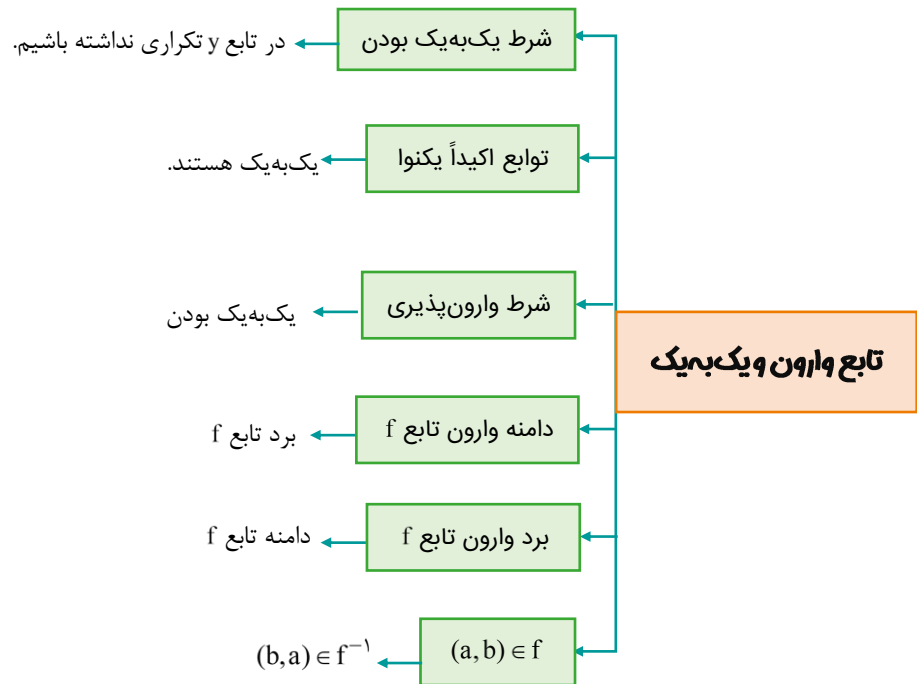
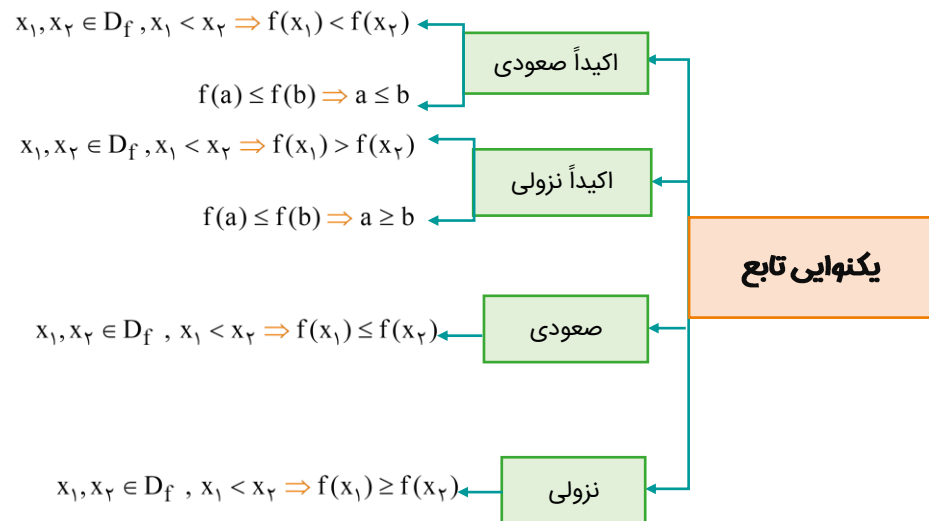
$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$

معادله تانژانت و کتانژانتی

معادله مثلثاتی









مفاهیم پایه

شرط وجود حد

برابری حد چپ و راست

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

قضایای حد

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right)$$

حد تابع $y = [x]$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} [x] &= [a^+] = a \\ \lim_{x \rightarrow a^-} [x] &= [a^-] = a - 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [x] = [a] \Leftrightarrow a \notin \mathbb{Z}$$

رفع ابهام

به کمک اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج و فاکتورگیری

به کمک هم‌ارزی‌ها

$$\begin{aligned} \sin u &\sim u \\ \tan u &\sim u \\ \cos u &\sim 1 - \frac{u^2}{2} \end{aligned} \quad \text{اگر } u \rightarrow 0$$

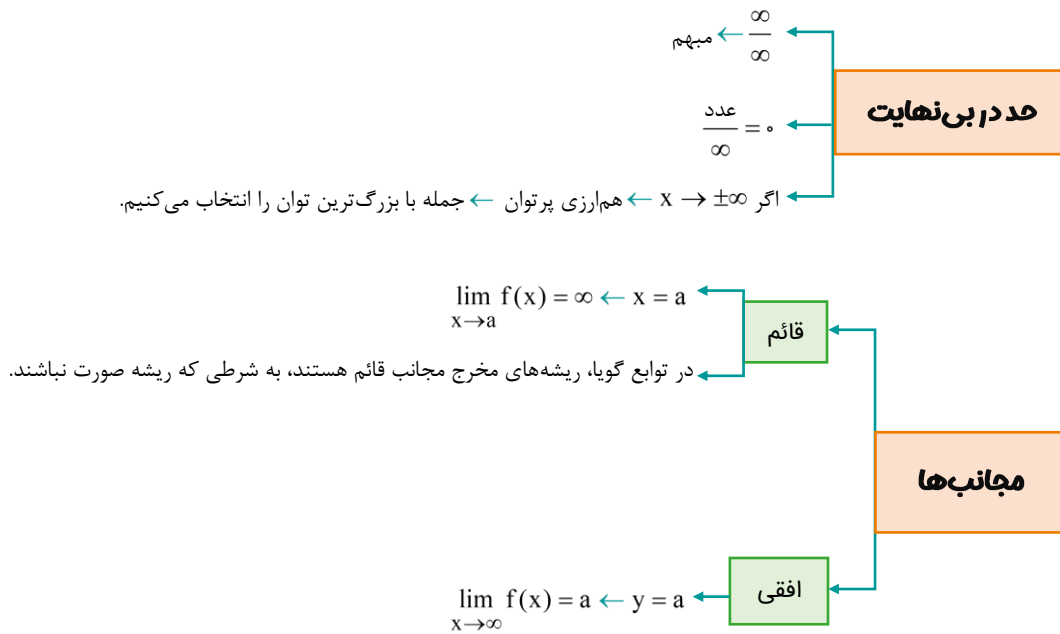
حد بی‌نهایت

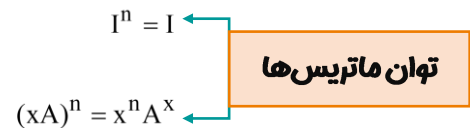
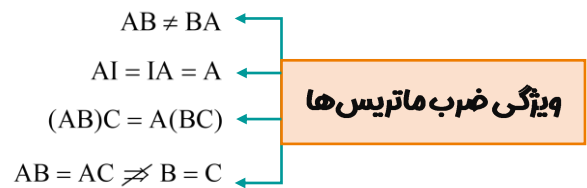
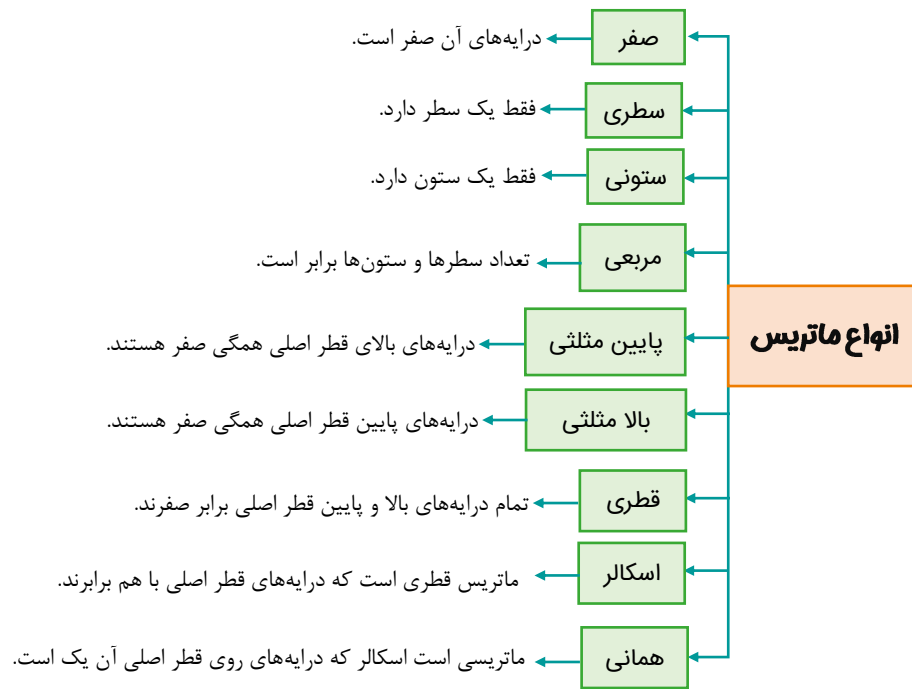
$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$







دترمینان و ویژگی های آن

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc : 2 \times 2 \text{ دترمینان ماتریس}$$

$$A^2 - (a+d)A + |A|I = \bar{O} \leftarrow 2 \times 2 \text{ دترمینان در ماتریس}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \leftarrow 3 \times 3 \text{ دترمینان ماتریس}$$

اگر همه درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی صفر باشد، دترمینان آن صفر است.

$$|AB| = |BA| = |A||B| \leftarrow \text{اگر } A \text{ و } B \text{ دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند}$$

دترمینان ماتریس های قطری و مثلثی برابر است با حاصل ضرب درایه های قطر اصلی

$$A_{n \times n}, k \in \mathbb{R} : |kA| = k^n |A|$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس 2×2

$$AA^{-1} = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

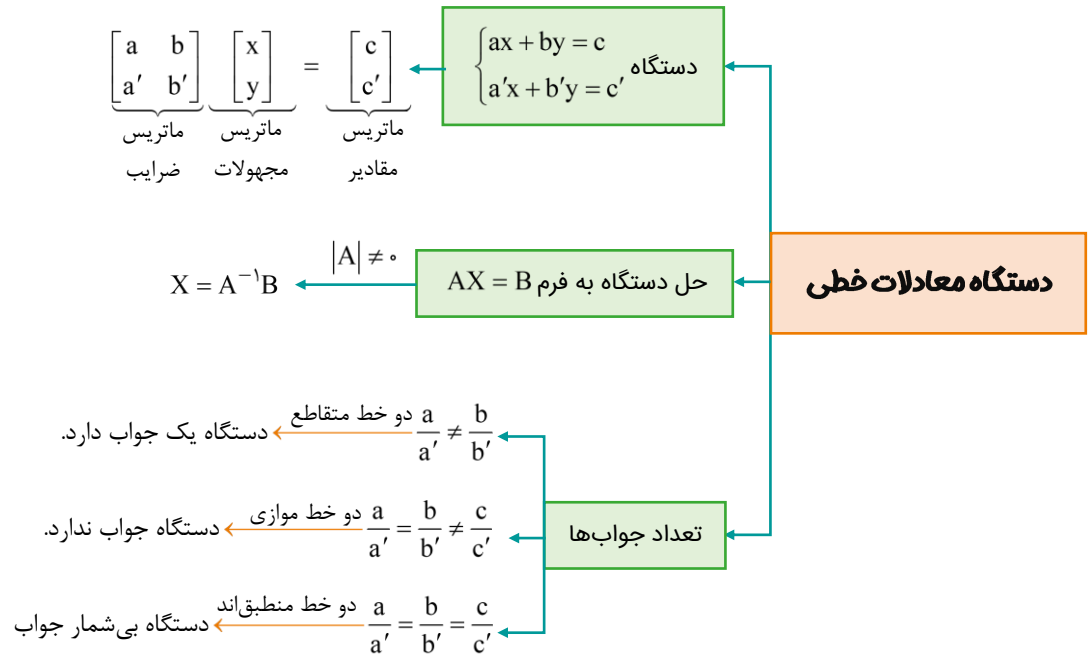
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

برخی از ویژگی ها

وارون ماتریس

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

معادله ماتریسی $AX = B$





مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت (مرکز) به فاصله ثابت (شعاع) باشند.

تعریف

معادله استاندارد به مرکز (α, β) و شعاع R

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

پیدا کردن مرکز از روی آن $\leftarrow O = \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$

پیدا کردن شعاع از روی آن $\leftarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

برای پیدا کردن شعاع و مرکز باید ضریب x^2 و y^2 برابر یک باشد.

ضریب x^2 و y^2 یکسان باشد.

$$a^2 + b^2 - 4c > 0$$

شرط دایره بودن

معادله گسترده

دایره

متخارج $\leftarrow OH > R$

مماس $\leftarrow OH = R$

متقاطع $\leftarrow OH < R$

وضعیت نسبی خط و دایره به شعاع R
(OH فاصله مرکز از خط)

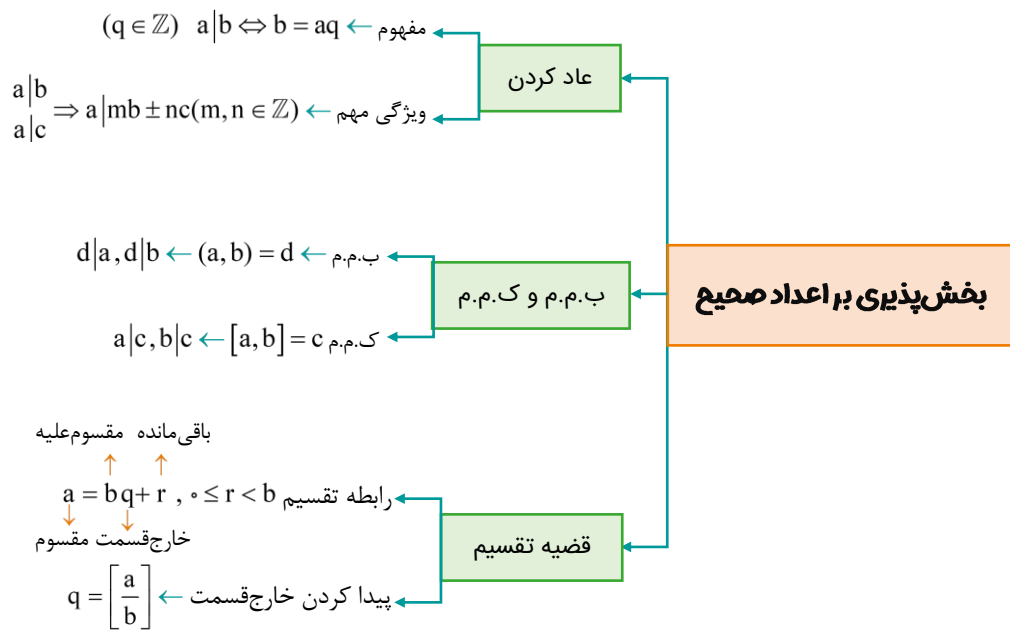
متخارج $\leftarrow d > R + R'$

مماس خارج $\leftarrow d = R + R'$

متقاطع $\leftarrow |R - R'| < d < R + R'$

مماس داخل $\leftarrow d = |R - R'|$

وضعیت نسبی دو دایره به شعاع R و R'
(d فاصله بین مرکزها)





$$a \equiv b^m \Leftrightarrow a - b = mt \text{ یا } a = mt + b \quad (t \in \mathbb{Z})$$

مفهوم

مضارب پیمانه را به طرفین همزهستی می‌توانیم اضافه و یا کم کنیم.

دو خاصیت مهم

$$\begin{cases} a \equiv b^m \\ a \equiv b^n \end{cases} \Rightarrow a \equiv b^{[m,n]} \quad \text{ادغام پیمانه‌ها}$$

توانی از پایه را می‌یابیم که به پیمانه موردنظر با ۱ یا -۱ همزهست باشند.

تعیین باقی‌مانده اعداد توان‌دار

به کمک توان پیدا شده، توان اصلی را تولید می‌کنیم.

$$ac \equiv bc^m \xrightarrow[(c,m)=d]{\div c} a \equiv b^{\frac{m}{d}}$$

تقسیم طرفین همزهستی

همزهستی

اگر $(a, m) | b$ ← معادله بی‌شمار جواب دارد.معادله همزهستی $ax \equiv b^m$ اگر $(a, m) \nmid b$ ← معادله جواب ندارد.فرم کلی $ax + by = c$ ←

معادله سیاله خطی

اگر $c | (a, b)$ ← معادله بی‌شمار جواب دارد.اگر $c \nmid (a, b)$ ← معادله جواب ندارد.

تعیین رقم یکان

همزهستی به پیمانه ۱۰





گراف

دنباله درجات

مجموع درجات رأس‌ها، دو برابر تعداد یال‌هاست.

تعداد رأس‌های درجه فرد، باید زوج باشد.

مجموعه همسایه‌های رأس a

باز \leftarrow خود a در آن نیست. $N_G(a)$

بسته \leftarrow خود a در آن موجود است. $N_G[a]$

گراف r -منتظم

مجموع درجات $2q = rp$

rp نمی‌تواند هیچ‌گاه فرد باشد.

گراف کامل K_p

همه رأس‌ها با هم مجاور هستند.

حداکثر و حداقل درجه آن $(p-1)$ است.

تعداد یال‌ها $\leftarrow q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$

گراف تهی (\bar{K}_p)

هیچ یالی ندارد.

مسیر

در گراف از مرتبه P ، طول مسیر حداکثر $P-1$ است.

در گراف P_n ، دو رأس درجه یک و بقیه رأس‌ها از درجه ۲ هستند.

در گراف P_n ، تعداد کل مسیرهای موجود برابر است با: $\binom{P}{2}$

در هر گراف ساده، تعداد مسیرهای به طول صفر همان تعداد رأس‌ها و تعداد مسیرهای به طول یک همان تعداد یال‌ها می‌باشد.

دور

گرافی که از تنها یک دور به طول n تشکیل شده است را با C_n نمایش می‌دهند.

تعداد دورها به طول n در گراف K_p $\leftarrow \binom{P}{n} \frac{(n-1)!}{2}$

همبند و ناهمبند

همبند فقط از یک بخش تشکیل شده است.

اگر $q \geq \binom{P-1}{2} + 1$ گراف قطعاً همبند است.

اگر $\Delta = P-1$ گراف قطعاً همبند است.

اگر $\delta = P-1$ گراف قطعاً همبند است.

۴۱- معادله مکان - زمان دو متحرک A و B که همزمان باهم بر روی محور x حرکت می کنند، در SI به ترتیب به صورت $x = vt - 70$ و $x = (v + 10)t - 120$ است. اگر در ابتدای ۲ ثانیه سوم پس از شروع حرکت، متحرک A از مکان $x = +10\text{m}$ بگذرد، چند ثانیه پس از اینکه دو متحرک به یکدیگر می رسند، فاصله دو متحرک از یکدیگر برابر ۴۰ متر می شود؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

یادآوری

معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:

$$x = vt + x_0 \begin{cases} x_0: \text{مکان اولیه} \\ v: \text{سرعت ثابت جسم} \end{cases}$$

گام اول:

به دست آوردن معادله مکان - زمان هر دو متحرک A و B:

۲ ثانیه سوم حرکت، یعنی بازه زمانی $t_1 = 4\text{s}$ تا $t_2 = 6\text{s}$ پس ابتدای ۲ ثانیه سوم پس از شروع حرکت، یعنی لحظه $t_1 = 4\text{s}$ ، در نتیجه متحرک A در لحظه $t = 4\text{s}$ از مکان $x = +10\text{m}$ می گذرد. با جایگذاری در معادله مکان - زمان داده شده داریم:

$$x = vt - 70 \xrightarrow[t=4\text{s}]{x=+10\text{m}} 10 = 4v - 70 \rightarrow 80 = 4v \rightarrow v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

با توجه به اینکه فرم کلی معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت $x = vt + x_0$ است، پس از مقایسه این فرم کلی با معادله مکان - زمان داده شده در صورت سؤال نتیجه می گیریم که سرعت متحرک A، $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و سرعت متحرک B، $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است.

در نهایت معادله مکان - زمان دو متحرک A و B به صورت زیر است:

$$x_A = 20t - 70 \quad \text{معادله مکان - زمان متحرک A}$$

$$x_B = 30t - 120 \quad \text{معادله مکان - زمان متحرک B}$$

گام دوم:

به دست آوردن لحظه رسیدن دو متحرک به یکدیگر:

برای به دست آوردن لحظه رسیدن دو متحرک به یکدیگر، مکان دو متحرک در معادله مکان - زمان را مساوی یکدیگر قرار می دهیم:

$$\begin{cases} x_A = 20t - 70 \\ x_B = 30t - 120 \end{cases} \rightarrow x_A = x_B \rightarrow 20t - 70 = 30t - 120 \rightarrow 10t - 50 = 0 \rightarrow t = 5\text{s}$$

گام سوم:

به دست آوردن لحظه ای که برای دومین بار فاصله دو متحرک از یکدیگر برابر ۴۰ متر می شود:

$$|x_B - x_A| = 40 \rightarrow |30t - 120 - (20t - 70)| = 40 \rightarrow |10t - 50| = 40 \rightarrow \begin{cases} 10t - 50 = 40 \rightarrow t_2 = 9\text{s} \\ 10t - 50 = -40 \rightarrow t_1 = 1\text{s} \end{cases}$$

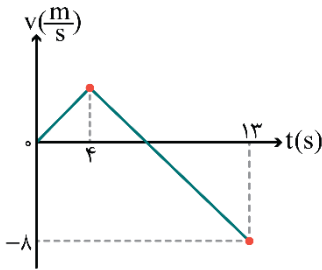
پس در دو لحظه $t_1 = 1\text{s}$ و $t_2 = 9\text{s}$ فاصله دو متحرک از یکدیگر برابر ۴۰ متر می شود و چون ما لحظه ای که پس از رسیدن دو متحرک به یکدیگر است را، می خواهیم، پس $t = 9\text{s}$ مدنظر است، بنابراین ۴ ثانیه پس از به هم رسیدن دو متحرک، فاصله آنها از یکدیگر برای دومین بار 40m می شود.

روش تستی:

با توجه به معادله مکان - زمان داده شده، سرعت B، $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ بیشتر از A است، یعنی پس از به هم رسیدن دو متحرک، در هر ثانیه، فاصله دو متحرک 10m زیاد می شود و پس از ۴ ثانیه، این فاصله به 40m می رسد. با توجه به این توضیحات، این سؤال بسیار ساده است و نیازی به محاسبه v و لحظه به هم رسیدن دو متحرک نیست.

گروه آموزشی ماز

۴۲- نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر شتاب متوسط متحرک در ۴ ثانیه اول حرکت برابر $\frac{2}{5} \frac{m}{s^2}$ باشد، تندی متوسط آن در ۱۳ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

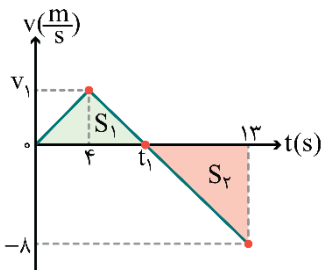


- (۱) $\frac{61}{13}$
(۲) $\frac{63}{13}$
(۳) $\frac{29}{13}$
(۴) $\frac{49}{13}$

(متوسط - نموداری - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول:



با توجه به شتاب متوسط در ۴ ثانیه اول، سرعت v_1 را روی نمودار به دست می آوریم.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{v_1 - 0}{4} \rightarrow v_1 = 1 \cdot \frac{m}{s}$$

گام دوم:

با توجه به تشابه مثلث ها، لحظه t_1 را به دست می آوریم.

می دانیم مجموع قدر مطلق مساحت های محصور بین نمودار $v.t$ و محور برابر با مسافت طی شده توسط متحرک در آن بازه زمانی است، بنابراین:

$$\frac{13 - t_1}{t_1 - 4} = \frac{8}{v_1} \rightarrow \frac{13 - t_1}{t_1 - 4} = \frac{8}{1} \rightarrow 13 - t_1 = 8(t_1 - 4) \rightarrow 13 - t_1 = 8t_1 - 32 \rightarrow 18t_1 = 162 \rightarrow t_1 = 9s$$

گام سوم:

مسافت طی شده در مدت زمان ۱۳s برابر است با:

$$\ell = |S_1| + |S_2| \rightarrow \ell = \frac{1 \times 9}{2} + \frac{4 \times 8}{2} = 61m$$

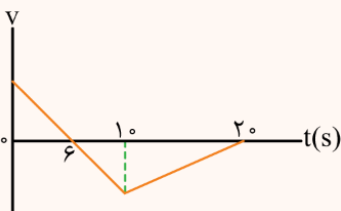
گام چهارم:

تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{61m}{13s}$$

کنکور سراسری تجربی داخل تیر ۱۴۰۲:

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر کل مسافت طی شده توسط متحرک ۱۳۸m باشد، بزرگی شتاب متوسط در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 12s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟

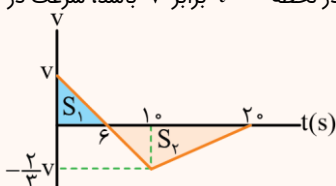


- (۱) $2/16$
(۲) $4/28$
(۳) $2/4$
(۴) $4/6$

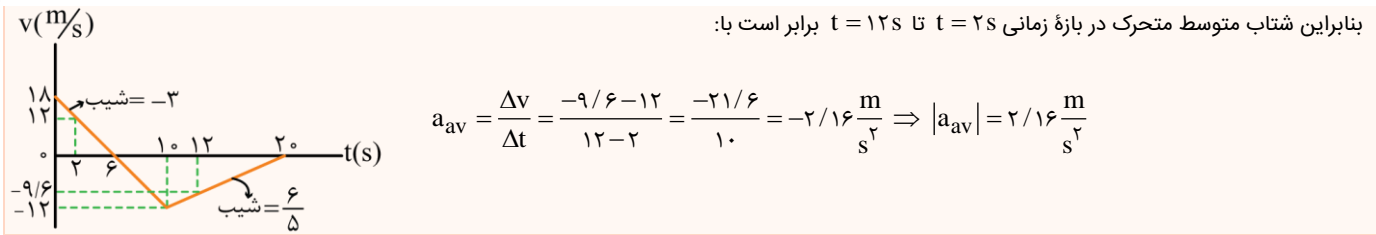
پاسخ: گزینه ۱

با توجه به این که شیب نمودار در ۱۰ ثانیه اول، ثابت است و با استفاده از تشابه مثلث ها می توان نتیجه گرفت که اگر سرعت در لحظه $t = 0$ برابر v باشد، سرعت در

لحظه $t = 10s$ برابر $-\frac{2}{3}v$ می باشد، بنابراین مسافت طی شده در کل حرکت برابر است با:

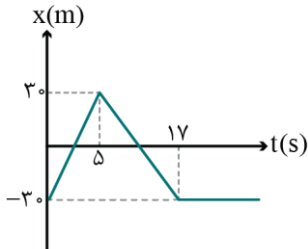


$$l = S_1 + S_2 = \frac{6v}{2} + \frac{14 \times \frac{2}{3}v}{2} = \frac{23}{3}v \rightarrow 138m = \frac{23}{3}v \Rightarrow v = 18 \frac{m}{s}$$



گروه آموزشی ماز

۴۳- شکل زیر، نمودار $x-t$ متحرکی که روی خط راست حرکت می کند را نشان می دهد. شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 9s$ برابر چند متر بر مربع ثانیه است؟



- (۱) -۶
(۲) -۹
(۳) $-\frac{17}{3}$
(۴) $-\frac{17}{6}$

(آسان - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

یادآوری

- ۱- شیب نمودار مکان - زمان در هر لحظه برابر سرعت متحرک است.
- ۲- شتاب متوسط از رابطه زیر به دست می آید:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

گام اول:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_9 - v_3}{9 - 3} = \frac{v_9 - v_3}{6}$$

شتاب متوسط در بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 9s$ برابر است با:

گام دوم:

برای به دست آوردن شتاب متوسط، باید سرعت متحرک را در لحظه های $t = 3s$ تا $t = 9s$ به دست آوریم. با توجه به اینکه نمودار $(x-t)$ در بازه زمانی $t = 0s$ تا $t = 5s$ و همچنین $t = 5s$ تا $t = 17s$ به صورت خط راست می باشد، پس در این دو بازه، حرکت متحرک با سرعت ثابت می باشد (سرعت لحظه ای با سرعت متوسط برابر است)، در نتیجه سرعت در لحظه های $t = 3s$ و $t = 9s$ به ترتیب برابر با سرعت متوسط در بازه 0 تا 5 ثانیه و سرعت متوسط در بازه 5 تا 17 ثانیه است.

$$v_3 = \text{شیب خط} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{30 - (-30)}{5 - 0} = \frac{60}{5} = 12 \frac{m}{s}$$

$$v_9 = \text{شیب خط} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-30 - (30)}{17 - 5} = \frac{-60}{12} = -5 \frac{m}{s}$$

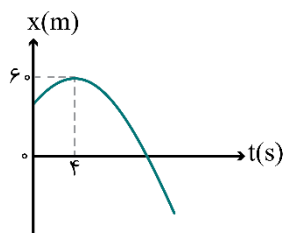
گام سوم:

$$a_{av} = \frac{v_9 - v_3}{6} = \frac{-5 - (12)}{6} = -\frac{17}{6} \frac{m}{s^2}$$

پاسخ نهایی را به دست می آوریم:

گروه آموزشی ماز

۴۴- نمودار مکان - زمان متحرکی به جرم $2kg$ که بر روی محور x ها حرکت می کند، مطابق سهمی شکل زیر است. اگر در بازه زمانی $t = 2s$ تا $t = 8s$ ، مسافت طی شده توسط متحرک برابر با $40m$ باشد، تغییرات تکانه این متحرک در این بازه زمانی چند واحد SI است؟



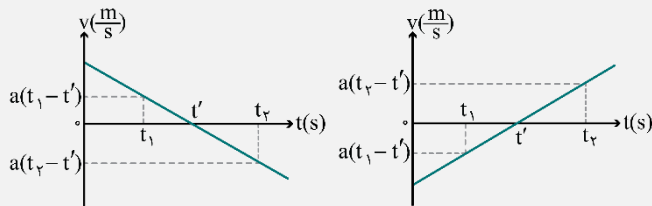
- (۱) ۳۶
(۲) ۴۸
(۳) -۴۸
(۴) -۳۶

(متوسط - نموداری و ترکیبی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

اگر در هر لحظه یک خط مماس بر نمودار $x-t$ رسم کنیم، شیب آن خط برابر با سرعت لحظه‌ای است. اگر خط مماس، افقی باشد، یعنی سرعت در آن لحظه صفر است. برای رسم نمودار $v-t$ از لحظه‌ای که سرعت صفر باشد، می‌توان کمک گرفت.



$$v = at + v_0 \xrightarrow[\text{برابر } v=0 \text{ باشد}]{\text{اگر سرعت در لحظه } t' \text{ باشد}} at' + v_0 = 0 \rightarrow v = a(t - t')$$

پاسخ شش‌پایه:

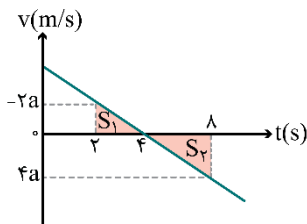
$$v = at + v_0 \xrightarrow[v=0]{t=4s} a(4) + v_0 = 0 \rightarrow v_0 = -4a$$

از نمودار مکان - زمان مشخص است که در لحظه $t = 4s$ سرعت متحرک برابر صفر است.

$$v = at - 4a = a(t - 4)$$

بنابراین خواهیم داشت:

حالا با رسم نمودار سرعت - زمان و تعیین سرعت در لحظات $t = 2s$ و $t = 8s$ داریم:



$$\begin{cases} v_2 = a(2 - 4) = -2a \\ v_8 = a(8 - 4) = 4a \end{cases}$$

مسافت طی شده در بازه زمانی $t = 2s$ تا $t = 8s$ برابر با $|S_1| + |S_2|$ است. بنابراین:

$$\ell = |S_1| + |S_2| \rightarrow 40 = \left| \frac{1}{2} \times 4 \times (-2a) \right| + \left| \frac{1}{2} \times 4 \times (4a) \right| = 10|a| \Rightarrow |a| = 4 \frac{m}{s^2} \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}$$

$$\begin{cases} v_2 = -2a = 8 \frac{m}{s} \\ v_8 = 4a = -16 \frac{m}{s} \end{cases}$$

پس سرعت در لحظات $t = 2s$ و $t = 8s$ برابر است با:

$$\Delta p = m\Delta v = 2 \times (-16 - 8) = -48 \frac{kg \cdot m}{s}$$

پس تغییرات تکانه برابر است با:

اگر...

کل کار انجام شده روی جسم را در بازه زمانی $t = 2s$ تا $t = 8s$ می‌خواستیم، پاسخ چه بود؟
پاسخ: با استفاده از قضیه کار - انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_t = \frac{1}{2} m(v_8^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times (16^2 - 8^2) = 192 J$$

گروه آموزشی ماز

۴۵ - معادله مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 2t^2 - 12t + 18$ است. مسافت طی شده توسط این متحرک در ۴

ثانیه اول حرکت، چند متر است؟

۲۴ (۴)

۲۰ (۳)

۱۸ (۲)

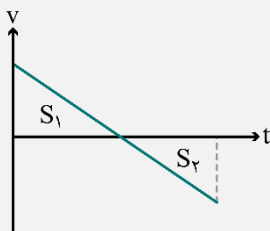
۱۶ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

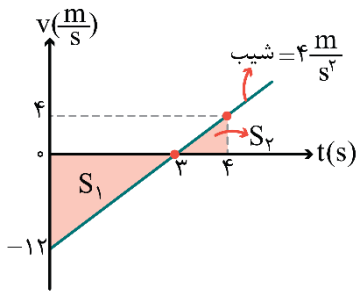
برای محاسبه مسافت طی شده، معمولاً بهترین راه رسم نمودار سرعت - زمان و استفاده از مساحت زیر آن است.



$$\ell = |S_1| + |S_2| \text{ : مسافت}$$

گام اول:

نمودار سرعت - زمان را رسم می کنیم.



$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x = 2t^2 - 12t + 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -12 \frac{m}{s} \end{cases} \rightarrow v = 4t - 12$$

گام دوم:

مسافت طی شده برابر است با:

$$\ell = |S_1| + |S_2| \rightarrow \ell = \frac{3 \times 12}{2} + \frac{1 \times 4}{2} = 20 \text{ m}$$

گروه آموزشی ماز

۴۶- متحرک A با شتاب ثابت a از حال سکون، در جهت محور x شروع به حرکت می کند. ۳ ثانیه بعد و از همان نقطه، متحرک B با شتاب ثابت $(a+2) \frac{m}{s^2}$ از حال سکون شروع به حرکت می کند. اگر در کل حرکت، به مدت ۲s فاصله دو متحرک در حال کاهش باشد، فاصله دو متحرک از یکدیگر در لحظه $t = 4s$ چند متر است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته ۱:

معادله مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت به صورت زیر است:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

در رابطه بالا، a شتاب حرکت، v_0 سرعت اولیه و x_0 مکان اولیه است.

نکته ۲:

اگر متحرک B نسبت به متحرک A با t ثانیه تأخیر شروع به حرکت کند، می توانیم زمان حرکت A را برابر t و زمان حرکت B را برابر $t - t_0$ در نظر بگیریم و معادله مکان - زمان آن ها را بنویسیم.

مثال: متحرک A با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ از حال سکون از مبدأ مختصات شروع به حرکت میکند و متحرک B، ۳ ثانیه بعد، از همان نقطه با سرعت اولیه $4 \frac{m}{s}$ و شتاب $6 \frac{m}{s^2}$ حرکت میکند. معادله مکان - زمان دو متحرک را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 \Rightarrow x_A = \frac{1}{2} \times 2 \times t^2 \Rightarrow x_A = t^2$$

$$x_B = \frac{1}{2}a_B (t - 3)^2 + v_{B0}(t - 3) \Rightarrow x_B = 3(t - 3)^2 + 4(t - 3)$$

تأخیر

نکته ۳:

اگر بخواهیم معادله فاصله دو متحرک را برحسب زمان بنویسیم، می توانیم قدر مطلق اختلاف معادله مکان آن ها را به دست آوریم.

$$d = |x_A - x_B| \text{ : فاصله دو متحرک A و B}$$

گام اول:

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 \rightarrow x_A = \frac{1}{2}at^2$$

معادله مکان - زمان دو متحرک را می نویسیم:

$$x_B = \frac{1}{2}a_B (t - 3)^2 \rightarrow x_B = \frac{1}{2}(a + 2)(t - 3)^2 = \frac{1}{2}at^2 - 3at + \frac{9}{2}a + t^2 - 6t + 9$$

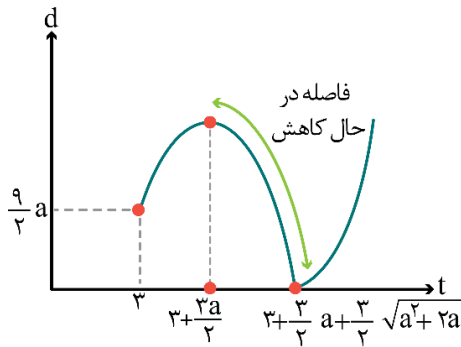
گام دوم:

$$\rightarrow x_B = \frac{1}{2}at^2 + (t^2 - (3a + 6)t + (\frac{9}{2}a + 9))$$

$$\text{فاصله : } d = |x_B - x_A| = \left| t^2 - (3a + 6)t + (\frac{9}{2}a + 9) \right|$$

فاصله دو متحرک برابر است با:

بنابراین نمودار فاصله دو متحرک بر حسب زمان به شکل زیر است:



$$t_{\text{رأس}} = \frac{3a+6}{2} = 3 + \frac{3}{2}a$$

$$\text{ریشه‌ها: } t = \frac{3a+6 \pm \sqrt{(3a+6)^2 - (18a+36)}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 + \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}\sqrt{a^2 + 2a} \\ t_2 = 3 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}\sqrt{a^2 + 2a} \end{cases}$$

دقت کنید که نمودار را از لحظه $t = 3s$ به بعد رسم کردیم که متحرک B هم راه افتاده باشد. مطابق نمودار، مدت زمان کاهش فاصله برابر $\frac{3}{2}\sqrt{a^2 + 2a}$ است.

$$\frac{3}{2}\sqrt{a^2 + 2a} = 2 \rightarrow a^2 + 2a = \frac{16}{9} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \frac{m}{s^2} \quad \checkmark \\ a = -\frac{10}{3} \frac{m}{s^2} \quad \times \end{cases}$$

بنابراین معادله فاصله دو متحرک برابر می‌شود با:

$$d = \left| t^2 - (3a+6)t + \left(\frac{9}{2}a+9\right) \right|$$

$$\xrightarrow{a = \frac{2}{3} \frac{m}{s^2}} d = \left| t^2 - 8t + 12 \right|$$

$$\xrightarrow{t=4s} d = \left| 4^2 - 8 \times 4 + 12 \right| = 4m$$

کنکور سراسری ریاضی داخل تیر ۱۴۰۲

در یک مسیر مستقیم و از یک نقطه، متحرک A در مبدأ زمان با شتاب ثابت a از حال سکون به حرکت درمی‌آید و در لحظه $t = 2s$ ، متحرک B از همان نقطه و در همان مسیر با شتاب ثابت $a + 0.5 \frac{m}{s^2}$ از حال سکون به حرکت درمی‌آید. اگر در لحظه $t = 6s$ دو متحرک به هم برسند، فاصله آن‌ها در لحظه $t = 10s$ چند متر است؟

۴/۴ (۱) ۸/۸ (۲) ۱۲/۴ (۳) ۲۴/۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

جابه‌جایی متحرک A در ۶ ثانیه، با جابه‌جایی متحرک B در مدت ۴ ثانیه ($2s < t < 6s$) برابر است، بنابراین می‌توان گفت:

$$\text{در } 0 < t < 6s \text{ در A: جابه‌جایی } \Delta x_A = \frac{1}{2} a_A t^2 = \frac{1}{2} a \times 6^2 = 18a$$

$$\text{در } 2s < t < 6s \text{ در B: جابه‌جایی } \Delta x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 = \frac{1}{2} (a + 0.5) \times 4^2 = 8a + 4$$

$$\xrightarrow{\Delta x_A = \Delta x_B} 18a = 8a + 4 \Rightarrow a = 0.5 \frac{m}{s^2}$$

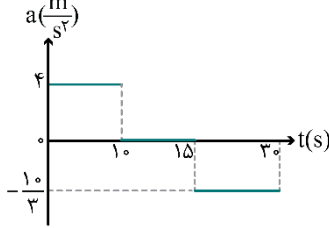
در ادامه جابه‌جایی دو متحرک را تا لحظه $t = 10s$ پیدا می‌کنیم. دقت کنید که تا لحظه $t = 10s$ ، متحرک A به مدت ۱۰s و متحرک B به مدت ۸s حرکت کرده‌اند و داریم:

$$\Delta x_A = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 10^2 = 25m$$

$$\Delta x_B = \frac{1}{2} (a + 0.5) t^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 8^2 = 32m$$

بنابراین فاصله دو متحرک برابر $32 - 25 = 7m$ است.

۴۷- نمودار شتاب - زمان متحرکی که بر روی محور x در حال حرکت است، مطابق شکل زیر می باشد. اگر در مبدأ زمان، بردار سرعت متحرک برابر $\vec{v} = (-20 \frac{m}{s}) \hat{i}$ و بردار مکان متحرک برابر $\vec{r} = (-20m) \hat{i}$ باشد، پس از عبور متحرک از مکان $\vec{r} = (+125m) \hat{i}$ ، چند ثانیه طول می کشد تا دوباره متحرک از همان مکان بگذرد؟



- (۱) ۴
(۲) ۸
(۳) ۶
(۴) ۳

(سخت - نموداری - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار شتاب - زمان داده شده:

با توجه به اینکه سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان برابر تغییرات سرعت (Δv) است، در سه بازه زمانی ۰ تا ۱۰s، ۱۰s تا ۱۵s و ۱۵s تا ۳۰s، سطح محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان را به صورت جداگانه محاسبه می کنیم:

$$\Delta v_1 = \text{مساحت مستطیل} = 4 \times 10 = 40 \frac{m}{s} \quad \text{بازه زمانی ۰ تا ۱۰s}$$

$$\Delta v_2 = 0 \quad \text{بازه زمانی ۱۰s تا ۱۵s}$$

$$\Delta v_3 = \text{مساحت مستطیل} = -\frac{10}{3} \times (30 - 15) = -50 \frac{m}{s} \quad \text{بازه زمانی ۱۵s تا ۳۰s}$$

حال سرعت در لحظه های ۱۰s، ۱۵s و ۳۰s را محاسبه می کنیم:

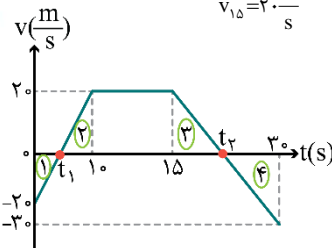
$$\Delta v_1 = v_{10} - v_0 \quad \frac{\Delta v_1 = 40 \frac{m}{s}}{v_0 = -20 \frac{m}{s}} \rightarrow 40 = v_{10} - (-20) \rightarrow v_{10} = 20 \frac{m}{s}$$

$$\Delta v_2 = v_{15} - v_{10} \quad \frac{\Delta v_2 = 0}{v_{10} = 20 \frac{m}{s}} \rightarrow 0 = v_{15} - 20 \rightarrow v_{15} = 20 \frac{m}{s}$$

$$\Delta v_3 = v_{30} - v_{15} \quad \frac{\Delta v_3 = -50 \frac{m}{s}}{v_{15} = 20 \frac{m}{s}} \rightarrow -50 = v_{30} - 20 \rightarrow v_{30} = -30 \frac{m}{s}$$

و حالا نوبت رسم نمودار سرعت - زمان است:

با استفاده از تشابه مثلث های (۱) و (۲)، لحظه t_1 را پیدا می کنیم:



$$\frac{20}{20} = \frac{10 - t_1}{t_1} \rightarrow 10 - t_1 = t_1 \rightarrow 2t_1 = 10 \rightarrow t_1 = 5s$$

با استفاده از تشابه مثلث های (۳) و (۴)، لحظه t_2 را پیدا می کنیم:

$$\frac{30}{20} = \frac{30 - t_2}{t_2 - 15} \rightarrow 3t_2 - 45 = 60 - 2t_2 \rightarrow 5t_2 = 105 \rightarrow t_2 = 21s$$

گام دوم:

رسم مسیر حرکت متحرک بر روی محور x به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان:

با توجه به اینکه سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه جایی (Δx) است، در سه بازه زمانی ۰ تا ۵s، ۵s تا ۲۱s و ۲۱s تا ۳۰s، سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان را به صورت جداگانه محاسبه می کنیم:

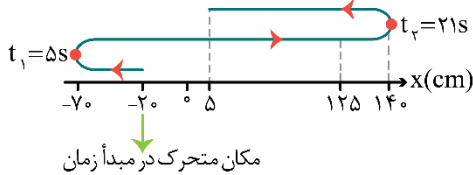
$$\Delta x_1 = \text{مساحت مثلث (۱)} = \frac{-20 \times 5}{2} = -50m \quad \text{بازه زمانی ۰ تا ۵s}$$

$$\Delta x_2 = \text{مساحت دوزنقه} = \frac{(5 + 16) \times 20}{2} = 210m \quad \text{بازه زمانی ۵s تا ۲۱s}$$

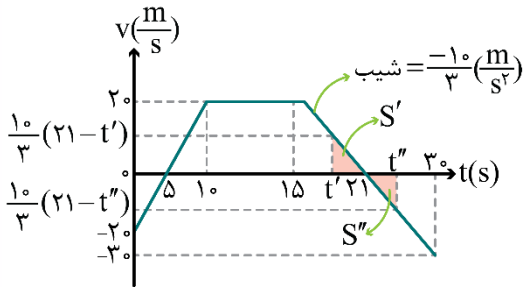
$$\Delta x_3 = \text{مساحت مثلث (۴)} = \frac{-30 \times 9}{2} = -135m \quad \text{بازه زمانی ۲۱s تا ۳۰s}$$



و حالا رسم مسیر حرکت متحرک بر روی محور X:



بنابراین متحرک یک بار قبل از لحظه $t_2 = 21s$ و یک بار پس از آن از مکان $x = 125m$ می‌گذرد. باتوجه به این که مکان متحرک در لحظه $t_2 = 21s$ برابر $x = 140m$ است، برای یافتن لحظات عبور از مکان $x = 125m$ ، کافی است در نمودار زیر، لحظات t' و t'' را به گونه‌ای پیدا کنیم که مساحت‌های S' و S'' برابر $15m$ شوند.



$$S' = 15m \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} (21 - t') = 15$$

$$\Rightarrow (21 - t')^2 = 9 \xrightarrow{t' < 21s} 21 - t' = 3 \Rightarrow t' = 18s$$

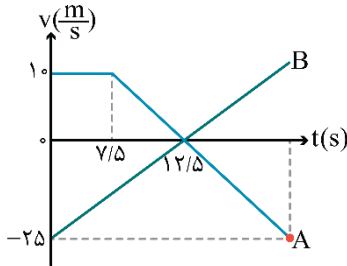
$$|S''| = 15m \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{10}{3} (21 - t'')^2 = 15$$

$$\Rightarrow (21 - t'')^2 = 9 \xrightarrow{t'' > 21s} 21 - t'' = -3 \Rightarrow t'' = 24s$$

پس فاصله زمانی بین دو عبور از مکان $x = 125m$ برابر $t'' - t' = 6s$ است.

گروه آموزشی ماز

۴۸- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که به طور همزمان در لحظه $t = 0$ از مکان $x = 0$ می‌گذرند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی که متحرک A در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است، فاصله دو متحرک از یکدیگر چگونه تغییر می‌کند؟

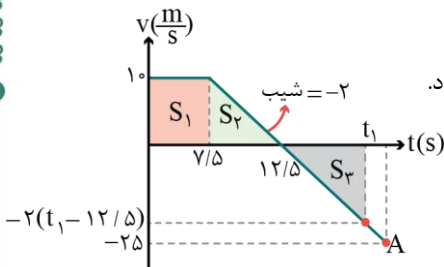


- (۱) ۲۰۰ متر کاهش می‌یابد.
- (۲) ۲۰۰ متر افزایش می‌یابد.
- (۳) ۱۵۶/۲۵ متر کاهش می‌یابد.
- (۴) ۱۵۶/۲۵ متر افزایش می‌یابد.

(متوسط - نموداری - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول:



ابتدا حرکت متحرک A را بررسی می‌کنیم تا ببینیم در چه بازه‌ای، این متحرک به مبدأ مکان نزدیک می‌شود.

متحرک A ابتدا به اندازه $S_1 + S_2$ در جهت محور X حرکت می‌کند و سپس سرعت آن منفی می‌شود و به سمت مبدأ مکان باز می‌گردد. اگر $S_1 + S_2 = |S_3|$ شود، آن‌گاه متحرک دوباره به مبدأ مکان رسیده است و مکان آن پس از لحظه t_1 منفی خواهد شد.

$$S_1 + S_2 = |S_3| \rightarrow 7 \times 10 + 25 = (t_1 - 12/5) \times 20$$

$$\rightarrow (t_1 - 12/5)^2 = 100 \rightarrow t_1 = 22/5s$$

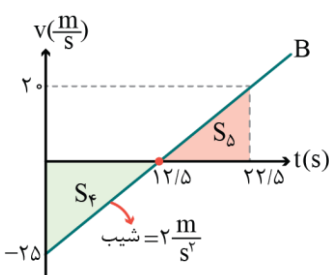


بنابراین مسیر حرکت متحرک A مطابق شکل زیر است:

پس در بازه زمانی $t = 12/5s$ تا $t = 22/5s$ ، متحرک A در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است.

گام دوم:

حال حرکت متحرک B را بررسی می‌کنیم.

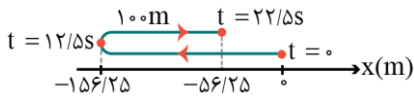


$$|S_4| = \frac{20 \times 12/5}{2} = 156/25m$$

$$|S_5| = \frac{10 \times 20}{2} = 100m$$

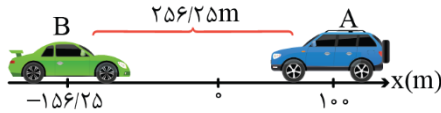


بنابراین مسیر حرکت متحرک B به شکل زیر است.

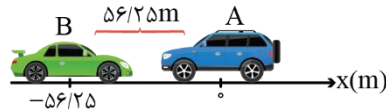


گام سوم:

اگر نتایج قسمت‌های قبل را در کنار هم قرار دهیم، به شکل‌های زیر می‌رسیم.
در لحظه $t = 12/5$ s:



در لحظه $t = 22/5$ s:



بنابراین فاصله دو متحرک ۲۰ m کاهش یافته است.

گروه آموزشی ماز

۴۹- معادله مکان جسمی که با شتاب ثابت بر روی محور X حرکت می‌کند بر حسب سرعت آن در SI به صورت $x = 0.2v^2 - 20$ است. اگر جسم در لحظه $t = 0$ ، در خلاف جهت محور X از مبدأ مکان عبور کند، در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه در فاصله ۶۰ متری مبدأ مکان خواهد بود؟

۱۲ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۱۶ (۱)

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۳۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

نکته

در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، رابطه بین سرعت و مکان به صورت زیر قابل بیان است:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad \text{معادله مستقل از زمان}$$

$$\Rightarrow x = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a} + x_0$$

بنابراین نمودار مکان - سرعت در حرکت با شتاب ثابت به شکل سهمی خواهد بود.

پاسخ تشریحی:

از معادله سرعت - جابه‌جایی داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{t=0, x_0=0} x = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a}$$

از مساوی قرار دادن این رابطه با معادله مکان - سرعت داده‌شده در صورت سؤال، داریم:

$$\frac{1}{2a} = 0.2 \rightarrow a = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

$$20 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2(2.5)} \rightarrow |v_0| = 10 \frac{m}{s} \rightarrow v_0 = -10 \frac{m}{s}$$

علامت منفی به خاطر این است که جهت حرکت اولیه در خلاف جهت محور X است.

چون می‌خواهیم مکان جسم در فاصله ۶۰ متری از مبدأ مکان باشد، پس مکان جسم می‌تواند $x = -60$ m یا $x = +60$ m باشد.

اگر $x = -60$ m باشد، داریم:

$$x = 0.2v^2 - 20 = -60 \rightarrow 0.2v^2 = -40 \rightarrow v^2 = -200$$

این نتیجه به این معنی است که مکان جسم نمی‌تواند -60 m باشد.

اگر $x = +60$ m باشد، می‌توان نوشت:

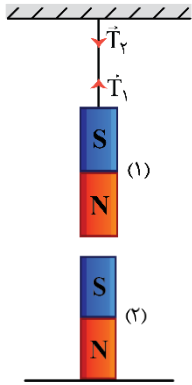
$$x = 0.2v^2 - 20 \Rightarrow 60 = 0.2v^2 - 20 \Rightarrow v^2 = 400 \Rightarrow v = \pm 20 \frac{m}{s}$$

باتوجه به معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{a=2.5, v_0=-10} v = \frac{5}{2}t - 10$$

$$\xrightarrow{v=\pm 20} \pm 20 = \frac{5}{2}t - 10 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 12s & (\checkmark) \\ t_2 = -4s & (x) \end{cases}$$

۵۰- آهنربایی توسط یک نخ، آویزان است و یک آهنربای دیگر زیر آن بر روی سطح افقی قرار دارد و مجموعه در حال تعادل است. کدام گزینه زیر نادرست است؟ (از وزن نخ صرف نظر شود).



(۱) اندازه نیروی T_2 بزرگتر از وزن آهنربای (۱) است.

(۲) نیروی عمودی سطح وارد بر آهنربای (۲) کوچکتر از وزن آن است.

(۳) واکنش نیروی T_1 به نخ وارد می شود.

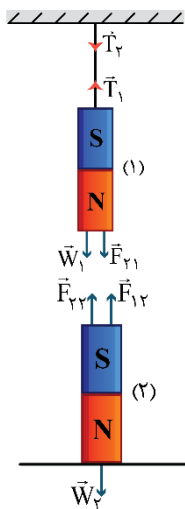
(۴) واکنش نیروی T_2 به آهنربای (۱) وارد می شود.

(آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

قطب های ناهم نام دو آهنربا در نزدیکی هم قرار گرفته اند، بنابراین آهنرباها با نیروی مغناطیسی یکدیگر را جذب می کنند. با توجه به تعادل آهنربا می توان نوشت:



$$T_1 = W_1 + F_{r1} \rightarrow T_1 > W_1$$

$$F_{N2} + F_{r2} = W_2 \rightarrow F_{N2} < W_2$$

بنابراین گزینه های (۱) و (۲) صحیح هستند.

نیروی T_1 ، نیرویی است که نخ به آهنربای (۱) وارد می کند و واکنش آن به خود نخ وارد می شود. نیروی T_2 نیرویی است که نخ به سقف وارد می کند، بنابراین واکنش آن به خود نخ وارد می شود.

با توجه به توضیحات فوق، گزینه (۴) نادرست است.

گروه آموزشی ماز

۵۱- جسمی با تندی $20 \frac{m}{s}$ بر روی سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی 0.2 پرتاب می شود. جسم پس از طی مسافت چند متر متوقف می شود؟

$$(g = 10 \frac{N}{kg})$$

(۴) ۲۰۰

(۳) ۵۰

(۲) ۱۵۰

(۱) ۱۰۰

(آسان - محاسباتی و ترکیبی - ۱۲۰۲)

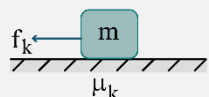
پاسخ: گزینه ۱

نکته:

هنگامی که یک جسم را روی سطح با سرعت افقی پرتاب می کنیم تا فقط تحت تأثیر اصطکاک متوقف شود، شتاب حرکت برابر است با:

$$F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = ma$$

$$\Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$$



نکته ۲:

زمان توقف جسم برابر است با:

$$t_{\text{توقف}} = \frac{v_i}{|a|} = \frac{v_i}{\mu_k g}$$

نکته ۳:

مساافتی که جسم طی میکند تا متوقف شود برابر است با:

$$\ell_{\text{توقف}} = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_k g}$$

نکته ۴:

شتاب حرکت، زمان توقف و مسافت طی شده، هیچ کدام به جرم جسم ربطی ندارند.

گام اول:

$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow -f_k = ma \rightarrow -\mu_k mg = ma$$

شتاب حرکت جسم برابر است با:

$$\rightarrow a = -\mu_k g = -0.7 \times 10 = -7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گام دوم:

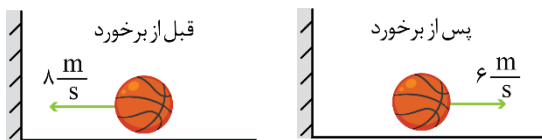
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v=0} -v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \Delta x_{\text{توقف}} = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-(20)^2}{2 \times (-7)} = 100 \text{ m}$$

مساافت توقف برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۵۲- مطابق شکل زیر، توپی به جرم 1 kg با تندی $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ به دیواری برخورد می کند و با تندی $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ برمی گردد. اگر مدت زمان تماس توپ با دیوار 0.14 s بوده

باشد، بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر توپ در این مدت چند نیوتون است؟



$$\begin{aligned} \frac{100}{7} & \quad (2) \\ \frac{200}{7} & \quad (4) \end{aligned}$$

$$100 \quad (1)$$

$$200 \quad (3)$$

(آسان - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

یادآوری:

نیروی خالص متوسط وارد بر یک جسم در یک بازه زمانی، برابر آهنگ تغییرات تکانه جسم در آن بازه زمانی است.

پاسخ تشریحی:

$$\Delta p = m\Delta v = 1 \times (6 - (-8)) = 14 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

بزرگی تغییرات تکانه توپ برابر است با:

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{14}{0.14} = 100 \text{ N}$$

بنابراین اندازه نیروی خالص متوسط برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۵۳- کلمات داده شده در کدام گزینه به ترتیب جاهای خالی متن زیر را به درستی کامل می کنند؟

«چتربازی از ارتفاع بسیار بلندی می پرد و پس از مدتی، چتر خود را باز می کند تا به تدریج تندی حرکتش کاهش یابد. پس از باز کردن چتر، نیروی مقاومت هوای وارد بر چتر باز به تدریج می یابد، شتاب حرکت او به تدریج می یابد و پس از رسیدن تندی حرکت چتر باز به تندی حدی، نیروی مقاومت هوا نیروی وزن آن است.»

- (۱) کاهش - کاهش - هم اندازه
(۲) افزایش - افزایش - کوچک تر از
(۳) کاهش - افزایش - هم اندازه
(۴) افزایش - کاهش - کوچک تر از

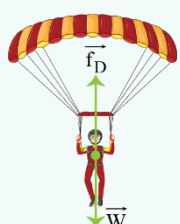
(آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

بررسی حرکت چتر باز در دو حالت

حالت اول:

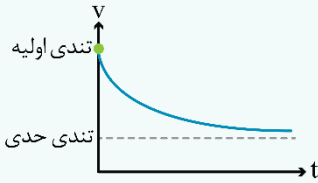
فرض کنید که چتربازی پس از مدتی سقوط در هوا، چتر خود را باز می کند و پس از باز کردن چتر، نیروی مقاومت هوا بزرگتر از وزن او باشد.



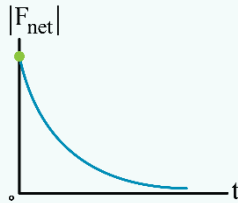
در این حالت نکات زیر دارای اهمیت است:

۱- چون در ابتدا $f_D > W$ است، نیروی خالص وارد بر چتر باز به سمت بالاست و در نتیجه طبق قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت او هم به سمت بالاست.

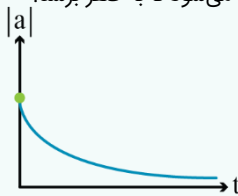
۲- جهت حرکت چتر باز به سمت پایین است، در حالی که شتاب به سمت بالاست، بنابراین حرکت چتر باز، کندشونده است و تندی حرکت او به تدریج کاهش می یابد تا به تندی حدی برسد.



۳- با کاهش تندی حرکت چتر باز، اندازه نیروی مقاومت هوا کاهش می یابد تا در نهایت در هنگامی که چتر باز به تندی حدی رسید، مقاومت هوا هم اندازه وزن او می شود، بنابراین می توان نتیجه گرفت که اندازه نیروی خالص وارد بر چتر باز به تدریج کاهش می یابد تا در نهایت به صفر برسد.

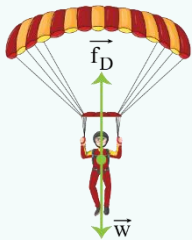


۴- طبق قانون دوم نیوتون، رفتار شتاب هم دقیقاً شبیه به رفتار نیروی خالص است، پس اندازه شتاب حرکت چتر باز به تدریج کم می شود تا به صفر برسد.



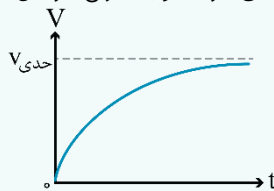
حالت دوم:

در ادامه حالتی را در نظر بگیرید که چتر باز از همان ابتدا با چتری که باز شده، از حال سکون شروع به سقوط کرده است. این حالت با حالت قبلی که تا این جا بررسی کردیم، فرق زیادی دارد. در این حالت در ابتدای حرکت که سرعت چتر باز، کم است، نیروی مقاومت هوا هم کوچک است و در نتیجه این بار در ابتدای حرکت $f_D < W$ است.

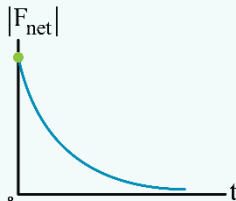


در این حالت به نکات زیر توجه کنید:

- ۱- چون در ابتدا $W > f_D$ است، نیروی خالص وارد بر چتر باز به سمت پایین و در نتیجه طبق قانون دوم نیوتون، شتاب حرکت او هم به سمت پایین می باشد.
- ۲- جهت حرکت چتر باز به سمت پایین است و شتاب هم به سمت پایین می باشد، بنابراین حرکت چتر باز، تندشونده است و تندی حرکت او به تدریج افزایش می یابد تا به تندی حدی برسد.

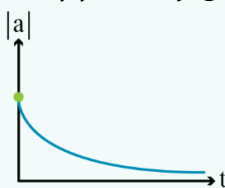


۳- با افزایش تندی حرکت چتر باز، اندازه مقاومت هوا هم افزایش می یابد تا در نهایت در هنگامی که چتر باز به تندی حدی رسید، مقاومت هوا هم اندازه وزن او می شود. بنابراین می توان نتیجه گرفت که اندازه نیروی خالص وارد بر چتر باز به تدریج کاهش می یابد تا در نهایت به صفر برسد.



دقت کنید در این حالت نیروی خالص به سمت پایین است ولی در حالت قبلی نیروی خالص به سمت بالا بود.

۴- طبق قانون دوم نیوتون، رفتار شتاب هم دقیقاً شبیه به رفتار نیروی خالص است، پس شتاب حرکت چتر باز هم به تدریج کم می شود تا به صفر برسد.



باز هم حتماً توجه کنید که در این حالت شتاب حرکت به سمت پایین است، در حالی که در حالت قبلی، شتاب حرکت چتر باز به سمت بالا بود.

با توجه به نکات فوق، گزینه (۱) صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۵۴- کارگری یک سطل محتوی مصالح به جرم 15 kg را با طناب سبکی از حال سکون با شتاب ثابت به طرف بالا می کشد. اگر سرعت متوسط سطل در 10 ثانیه

اول حرکت برابر $\frac{6}{5}\text{ m/s}$ باشد، اندازه نیروی کشش طناب چند نیوتون است؟ (از نیروی مقاومت هوای وارد بر سطل صرف نظر شود و $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



- (۱) ۱۶۸
- (۲) ۳۳۶
- (۳) ۱۴۲
- (۴) ۸۴

(متوسط - محاسباتی ترکیبی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول:

محاسبه شتاب ثابت سطل:

با توجه به اینکه سطل با شتاب ثابت از حال سکون شروع به حرکت می کند، برای محاسبه شتاب سطل می توان از روابط شتاب ثابت در فصل اول فیزیک دوازدهم استفاده کرد:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad v_{av} = \frac{6}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow 6 = \frac{\Delta x}{10} \rightarrow \Delta x = 60 \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 \quad \Delta x = 60 \text{ m}, t = 10 \text{ s} \rightarrow 60 = \frac{1}{2} a \times (10)^2 \rightarrow a = \frac{6}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



گام دوم:

رسم نیروهای وارد بر سطل و نوشتن قانون دوم نیوتون برای سطل:

به سطل دو نیروی کشش طناب (\vec{T} رو به بالا) و نیروی وزن ($\vec{W} = mg$ رو به پایین) وارد می شوند.

فرم کلی نوشتن قانون دوم نیوتون برای حل مسائل از جمله تست بالا به صورت زیر است:

$$\pm ma = \underbrace{\text{نیروهای در خلاف جهت حرکت جسم} - \text{نیروهای در جهت حرکت جسم}}_{F_{net}} \Rightarrow \begin{cases} F_{net} = +ma : \text{حرکت جسم تندشونده باشد} \\ F_{net} = -ma : \text{حرکت جسم کندشونده باشد} \end{cases}$$

با توجه به اینکه این سطل رو به بالا حرکت می کند، پس نیروی کشش طناب (\vec{T}) در جهت حرکت سطل و نیروی وزن ($\vec{W} = mg$) در خلاف جهت حرکت سطل می باشد و چون سطل از حال سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت کرده است، پس نوع حرکت سطل، تندشونده خواهد بود:

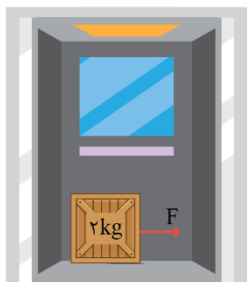
$$T - W = +ma \rightarrow T - mg = ma \rightarrow T = ma + mg \rightarrow T = m(g + a)$$

$$\frac{m=15\text{ kg}}{g=10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}, a=\frac{6}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \rightarrow T = 15 \times (10 + \frac{6}{5}) \rightarrow T = 15 \times (\frac{56}{5}) \rightarrow T = 3 \times 56 = 168 \text{ N} \rightarrow T = 168 \text{ N}$$

گروه آموزشی ماز

۵۵- مطابق شکل مقابل، جسمی به جرم 2 kg در کف آسانسور به صورت ساکن قرار دارد و نیروی افقی و ثابت F به آن وارد می شود و جسم روی سطح افقی

حرکت نمی کند. اگر آسانسور از حال سکون با شتاب ثابت به سمت بالا شروع به حرکت کند، کدام گزینه صحیح است؟



(۱) جسم روی سطح افقی حرکت نخواهد کرد.

(۲) ممکن است جسم روی سطح افقی حرکت کند.

(۳) جسم روی سطح افقی حرکت خواهد کرد.

(۴) بسته به اندازه شتاب حرکت آسانسور، هر سه گزینه می توانند صحیح باشند.

(متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ شریعی:

در ابتدا اندازه نیروی افقی \vec{F} کوچک تر یا مساوی اندازه $\vec{f}_{s,max}$ است و در نتیجه جسم روی سطح افقی حرکت نمی کند. هنگامی که با شتاب ثابت به سمت بالا شروع به حرکت می کند، نیروی عمودی سطح افزایش می یابد (چرا؟)، بنابراین طبق رابطه $\vec{f}_{s,max} = \mu_s F_N$ ، بیشینه اصطکاک ایستایی هم زیاد می شود و جسم قطعاً حرکت نخواهد کرد.

گروه آموزشی ماز

۵۶- در فاصله $4R_e$ از سطح زمین، شتاب گرانش چند درصد کوچک تر از سطح زمین است؟ (R_e شعاع زمین است).

۸۰ (۴)

۹۶ (۳)

۲۰ (۲)

۴ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

یادآوری:

برای مقایسه شتاب گرانش در ارتفاع h از سطح زمین با شتاب گرانش در سطح زمین، از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$g = G \frac{M_e}{(R_e + h)^2} \Rightarrow \frac{g}{g_0} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2$$

پاسخ شریعی:

برای مقایسه شتاب گرانش به صورت زیر عمل می کنیم:

$$G \frac{M_e}{r^2} \Rightarrow \frac{g}{g_0} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 \rightarrow \frac{g}{g_0} = \left(\frac{R_e}{R_e + 4R_e} \right)^2 = \frac{1}{25} = \frac{4}{100}$$

بنابراین شتاب گرانش، در فاصله $4R_e$ از سطح زمین، ۴ درصد شتاب گرانش در سطح زمین است، یعنی ۹۶ درصد کاهش یافته است.

گروه آموزشی ماز

۵۷- توپی را در راستای قائم از سطح زمین به سمت بالا پرتاب می کنیم. اگر نیروی مقاومت هوا در طول مسیر، ثابت و برابر $\frac{1}{5}$ نیروی وزن باشد، مدت زمان رسیدن توپ از سطح زمین به بالاترین ارتفاع از سطح زمین، چند برابر مدت زمان حرکت توپ از بالاترین ارتفاع تا رسیدن به سطح زمین است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\sqrt{\frac{2}{3}}$ (۲)

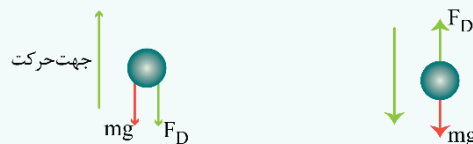
$\sqrt{\frac{3}{2}}$ (۱)

(سخت - محاسباتی و ترکیبی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

نیروی مقاومت شاره

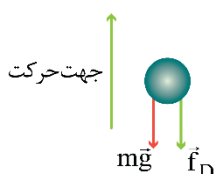
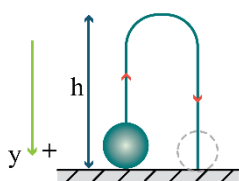
به نیرویی که به جسم در حال حرکت در شاره در خلاف جهت حرکت وارد می شود، نیروی مقاومت شاره (\vec{f}_D) می گویند که به اندازه جسم و تندی جسم بستگی دارد. وقتی جسمی رو به بالا یا پایین حرکت می کند، نیروی وزن و مقاومت شاره به صورت زیر خواهند بود:



پاسخ شریعی:

باید دو حالت را بررسی کنیم:

۱- وقتی توپ به سمت بالا می رود، با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



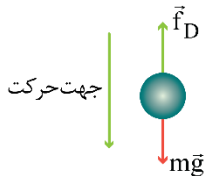
$$F_{net} = ma \rightarrow mg + f_D = mg + \frac{1}{5}mg = ma \rightarrow a = \frac{6}{5}g$$

این شتاب جسم است که رو به پایین می باشد. اگر مدت زمان بالا رفتن توپ را t فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v=0 \text{ در بالاترین نقطه}} 0 = at + v_0 \rightarrow v_0 = -at$$

$$-h = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = \frac{1}{2}at^2 + (-at)t = -\frac{1}{2}at^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}at^2 \quad (1)$$

۲- وقتی توپ به سمت پایین می آید، با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$mg - f_D = ma' \rightarrow mg - \frac{1}{5}mg = ma' \rightarrow a' = \frac{4}{5}g$$


این شتاب جسم است که رو به پایین می باشد، اگر مدت زمان لازم برای پایین آمدن توپ را t' فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$h = \frac{1}{2}a't'^2 \quad (2)$$

حالا با تقسیم رابطه (۲) بر رابطه (۱) داریم:

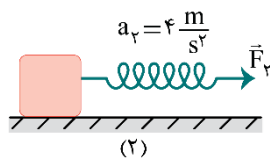
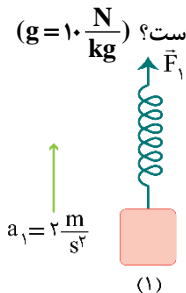
$$\frac{h}{h} = \frac{\frac{1}{2}a't'^2}{\frac{1}{2}at^2} \rightarrow \frac{t'^2}{t^2} = \frac{a'}{a}$$

$$\rightarrow \frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{a'}{a}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{5}g}{g}} = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

گروه آموزشی ماز

۵۸- مطابق شکل (۱)، به فنری وزنه‌ای به جرم $100g$ را آویزان کرده و با شتاب $\frac{2}{3}\frac{m}{s^2}$ رو به بالا آن را به حرکت درمی آوریم و طول فنر به اندازه x' نسبت به طول عادی آن افزایش می یابد. اگر مطابق شکل (۲)، از همین فنر برای کشیدن جسمی به جرم $5kg$ روی سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\frac{1}{5}$ استفاده شود، طول فنر نسبت به حالت عادی آن به اندازه x افزایش می یابد. نسبت x' به x در کدام گزینه به درستی آمده است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

- (۱) $4/0$
- (۲) $2/0$
- (۳) $5/2$
- (۴) $8/0$



(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

نیروی کشسانی فنر

$$F = kx$$

نیرویی که یک فنر کشیده یا فشرده وارد می کند برابر است با:

که k ثابت فنر است که به جنس فنر بستگی دارد و x تغییرات طول فنر نسبت به حالت تعادل است.

نمودار اندازه نیروی کشسانی فنر بر حسب تغییر طول فنر به صورت زیر است:



پاسخ تشریحی:

برای شکل (۱) داریم:

$$F_{net_1} = ma \rightarrow kx' - m_1g = m_1a_1$$

$$\rightarrow kx' = m_1(g + a_1) = 0.1 \times (10 + 2) = 1.2N \quad (1)$$

برای شکل (۲) داریم:

$$F_{\text{net},y} = m_y a_y \rightarrow kx - \mu_k m_y g = m_y a_y$$

$$\rightarrow kx = m_y (\mu_k g + a_y) = 0.5 \times \left(\frac{1}{5} \times 10 + 4 \right) = 3 \text{ N} \quad (2)$$

حال با تقسیم رابطه (۱) بر رابطه (۲) داریم:

$$\frac{kx'}{kx} = \frac{x'}{x} = \frac{1/2}{3} = 0.4$$

کنکور سراسری تجربی داخل تیر ۱۴۰۲

وزنه‌ای به جرم m را به انتهای فنری که از سقف آویزان است، می‌بندیم و طول فنر 10 cm افزایش می‌یابد. اگر به همین فنر وزنه‌ای به جرم M را ببندیم و آن را روی سطح افقی که ضریب اصطکاک جنبشی آن 0.2 است، با تندی ثابت بکشیم، افزایش طول فنر 2 cm می‌شود. $\frac{M}{m}$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

بررسی حالت اول:

$$F_e = mg \quad \text{تعادل قائم}$$

$$\Rightarrow k \Delta L = mg \Rightarrow k \times 10 = mg$$

$$\Rightarrow m = \frac{10 \cdot k}{g} \quad (1)$$

$$F_{\text{net}} = ma$$

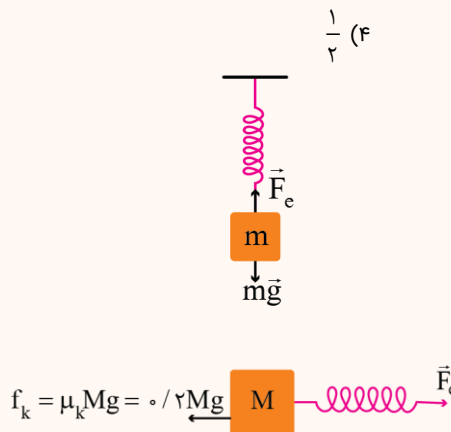
$$\Rightarrow F_e - f_k = 0$$

$$\Rightarrow k \Delta L' - 0.2 Mg = 0$$

$$\Rightarrow k \times 2 = 0.2 Mg$$

$$\Rightarrow M = \frac{10 \cdot k}{g} \quad (2)$$

$$\Rightarrow M = m \Rightarrow \frac{M}{m} = 1$$

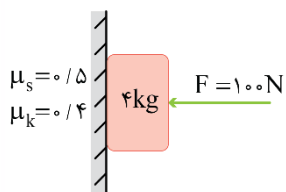


بررسی حالت دوم:

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

گروه آموزشی ماز

۵۹- مطابق شکل زیر، جسم ساکنی به جرم 4 kg با نیروی افقی \vec{F} به دیواری قائم فشرده شده است. کدام یک از عبارات‌های زیر صحیح هستند؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



الف: جسم ساکن می‌ماند.

ب: جسم با شتاب ثابت سقوط می‌کند.

ج: بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جسم برابر با 50 N است.

د: بزرگی نیروی اصطکاک وارد بر جسم برابر با 40 N است.

(۲) الف) و د)

(۴) ب) و د)

(۱) الف) و ج)

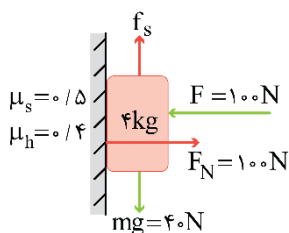
(۳) ب) و ج)

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

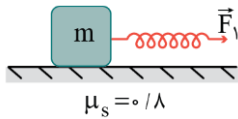
پاسخ تشریحی:

با توجه به این که نیروی محرک $mg = 40 \text{ N}$ از اندازه بیشینه اصطکاک ایستایی $f_{s,\text{max}} = \mu_s F = 0.5 \times 100 = 50 \text{ N}$ کوچک‌تر است، جسم ساکن باقی می‌ماند. در این حالت نیروی اصطکاک برابر است با:



$$f_s = mg \rightarrow f_s = 4 \times 10 = 40 \text{ N} \quad \text{تعادل قائم}$$

- ۶۰- مطابق شکل زیر، فنری به طول عادی ۱۲cm و ثابت فنر $400 \frac{N}{m}$ تحت تأثیر نیروی افقی \vec{F}_1 قرار گرفته و طول آن به ۱۴cm می‌رسد و در این لحظه جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. اگر نیروی $F_2 = 2N$ به صورت قائم و رو به بالا به جسم وارد شود، جسم با شتاب ثابت روی سطح افقی شروع به حرکت می‌کند و زاویه‌ای که نیروی سطح وارد بر جسم با راستای افقی می‌سازد، 53° درجه می‌شود. پس از جابه‌جایی ۱۶m از نقطه شروع حرکت، تندی جسم چند متر بر ثانیه خواهد شد؟ ($\sin 53^\circ = 0.4$, $g = 10 \frac{N}{kg}$)



$$\begin{aligned} & 10 \quad (2) \\ & 4\sqrt{10} \quad (4) \end{aligned}$$

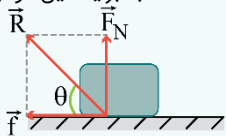
$$\begin{aligned} & 2\sqrt{10} \quad (1) \\ & 8 \quad (3) \end{aligned}$$

(سخت - محاسباتی و ترکیبی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

نیروی سطح

سطح یا تکیه‌گاهی که جسم روی آن ساکن یا در حال حرکت است، دو نیرو به جسم وارد می‌کند: نیروی عمودی سطح \vec{F}_N و نیروی اصطکاک \vec{f} ، به برابری این دو نیرو، نیروی سطح یا تکیه‌گاه می‌گویند و آن را با نماد \vec{R} نشان می‌دهند؛ چون این دو نیرو همواره برهم عمودند، داریم:



$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

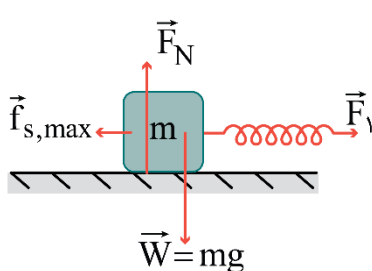
گاهی علاوه بر اندازه نیروی سطح، زاویه این بردار را با سطح هم می‌خواهند. برای محاسبه این زاویه می‌توان نوشت:

$$\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \rightarrow \tan \theta = \frac{F_N}{f}$$

اصطکاک : f

گام اول:

قبل از اینکه نیروی \vec{F}_2 به جسم وارد شود، جسم در آستانه حرکت قرار دارد، بنابراین بزرگی نیروی \vec{F}_1 با بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی $(f_{s,max})$ برابر است و در ضمن جسم در راستای قائم نیز ساکن است و در حال تعادل قرار دارد، بنابراین بزرگی نیروی عمودی سطح با بزرگی نیروی وزن وارد بر جسم برابر است:



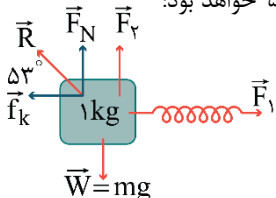
$$F_N = mg \xrightarrow{g=10 \frac{N}{kg}} F_N = 10m$$

$$F_1 = f_{s,max} \rightarrow k\Delta L = \mu_s F_N \xrightarrow{k=400 \frac{N}{m}, \Delta L = L_r - L_0 = 14 - 12 = 2cm = \frac{2}{100}m, \mu_s = 0.8, F_N = 10m} \rightarrow$$

$$400 \times \frac{2}{100} = \frac{8}{100} \times 10m \rightarrow 8 = 8m \rightarrow m = 1kg$$

گام دوم:

زمانی که نیروی \vec{F}_2 به جسم وارد می‌شود، جسم با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند، پس چون جسم در راستای افقی حرکت می‌کند، نیروی اصطکاک جنبشی (\vec{f}_k) به جسم وارد می‌شود. می‌دانیم نیروی سطح (\vec{R}) از دو مؤلفه عمودی و افقی تشکیل شده است، مؤلفه عمودی آن، نیروی عمودی سطح (\vec{F}_N) است و مؤلفه افقی آن در حالت کلی، نیروی اصطکاک است که در این سؤال، نیروی اصطکاک جنبشی (\vec{f}_k) است. پس زمانی که در صورت سؤال گفته شده نیروی سطح با راستای افقی، زاویه 53° می‌سازد، یعنی زاویه بین نیروی سطح (R) با نیروی اصطکاک جنبشی 53° خواهد بود:



جسم در راستای قائم، ساکن است و در حال تعادل قرار دارد: آزمون وی ای پی

$$F_N + F_2 = W \rightarrow F_N + F_2 = mg \xrightarrow{F_2=2N, m=1kg, g=10 \frac{N}{kg}} F_N + 2 = 1 \times 10 \rightarrow F_N = 8N$$

در ادامه اندازه نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan 53^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\sin 53^\circ}{\cos 53^\circ} = \frac{F_N}{f_k} \rightarrow \frac{0.4}{0.6} = \frac{8}{f_k} \rightarrow f_k = 6N$$

گام سوم:

شتاب حرکت جسم برابر می شود با:

$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow F_1 - f_k = ma \rightarrow k\Delta L - f_k = ma$$

$$\rightarrow 400 \times \frac{2}{100} - 6 = 1 \times a \rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

گام چهارم:

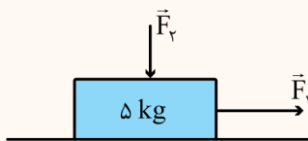
تندی جسم پس از جابه جایی ۱۶ متری برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \rightarrow v^2 - 0 = 2 \times 2 \times 16 \rightarrow v = 8 \frac{m}{s}$$

کنکور سراسری تجربی داخل تیر ۱۴۰۲:

مطابق شکل، به جسم ساکنی روی سطح افقی نیروی افقی $F_1 = 65 \text{ N}$ و نیروی عمودی $F_2 = 20 \text{ N}$ وارد می شود و جسم شروع به حرکت می کند. اگر پس از طی

مسافت ۱۲ متر، تندی جسم به $12 \frac{m}{s}$ برسد، نیرویی که سطح به جسم وارد می کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



- (۱) ۶۰
(۲) ۷۰
(۳) $30\sqrt{5}$
(۴) $35\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۴

با کمک معادله مستقل از زمان، شتاب حرکت را به دست می آوریم:

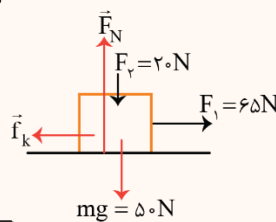
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 12^2 - 0 = 2a \times 12 \Rightarrow a = 6 \frac{m}{s^2}$$

برای محاسبه نیروی اصطکاک وارد بر جسم می توان نوشت:

توازن قائم: $F_N = mg + F_2 = 50 + 20 = 70 \text{ N}$

حرکت افقی: $F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F_1 - f_k = ma$

$$\Rightarrow 65 - f_k = 50 \times 6 \Rightarrow f_k = 35 \text{ N}$$



بنابراین اندازه نیروی سطح برابر است با:

نیروی سطح: $R = \sqrt{f_k^2 + F_N^2} = \sqrt{35^2 + 70^2} = 35\sqrt{5} \text{ N}$

گروه آموزشی ماز

۶۱- معادله مکان - زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده در SI به صورت $x = 0.04 \cos(100\pi t)$ است. چه تعداد از عبارت های زیر صحیح است؟ ($\pi^2 = 10$)

الف: طول پاره خط نوسان برابر با 0.8 cm است.

ب: در هر ثانیه، ۵۰ نوسان کامل انجام می شود.

ج: مسافت طی شده در هر دقیقه، برابر ۴۸ متر است.

د: اندازه بیشینه شتاب برابر با $400 \frac{m}{s^2}$ است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

با مقایسه معادله داده شده با فرم کلی معادله مکان - زمان در نوسان هماهنگ ساده داریم:

$$\begin{cases} x = 0.04 \cos(100\pi t) \\ x = A \cos(\omega t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega = 100\pi \frac{\text{rad}}{s} \rightarrow f = 50 \text{ Hz} \\ A = 0.04 \text{ m} = 0.4 \text{ cm} \end{cases}$$

بررسی موارد:

الف: طول پاره خط نوسان برابر با $2A = 0.8 \text{ cm}$ است. (✓)

ب: تعداد نوسان ها در هر ثانیه، همان بسامد است که برابر با 50 Hz می باشد. (✓)



ج: تعداد نوسان ها در هر دقیقه، برابر است با:

$$f = \frac{n}{t} \rightarrow 50 = \frac{n}{60} \rightarrow n = 3000$$

در هر نوسان کامل، مسافت $4A$ طی می شود، بنابراین داریم:

$$\ell = 3000 \times 4A = 3000 \times 4 \times 0.004 = 48m \quad (\checkmark)$$

د: بیشینه شتاب نوسانگر برابر است با:

$$a_{\max} = A\omega^2 = 0.004 \times (100\pi)^2 = 40\pi^2 = 40 \cdot \frac{m}{s^2} \quad (\checkmark)$$

هر چهار عبارت صحیح هستند.

گروه آموزشی ماز

۶۲- یک آونگ ساده به طول $36cm$ ، در هر دقیقه روی سطح کره زمین چند نوسان کامل انجام می دهد؟ ($\pi^2 = 10$ ، $g = 10 \frac{N}{kg}$)

۵۰ (۴)

۲۵ (۳)

۶۰ (۲)

۳۰ (۱)

(آسان - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول:

دوره تناوب آونگ ساده برابر است با:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{0.36}{10}} = 1/2s$$

گام دوم:

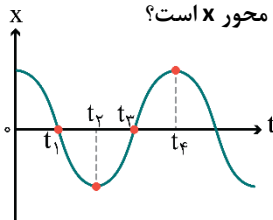
محاسبه تعداد نوسانات کامل در هر دقیقه:

$$n = \frac{t}{T} \rightarrow n = \frac{60}{1/2} = 120$$

گروه آموزشی ماز

۶۳- نمودار مکان - زمان یک نوسانگر هماهنگ ساده، مطابق شکل زیر است. در بین لحظات t_1 ، t_2 ، t_3 و t_4 ، به ترتیب از راست به چپ، در کدام لحظه

بزرگی سرعت جسم بیشینه و در جهت محور x است و در کدام لحظه، بزرگی شتاب جسم بیشینه و در خلاف جهت محور x است؟



t_2 ، t_1 (۱)

t_4 ، t_1 (۲)

t_2 ، t_3 (۳)

t_4 ، t_3 (۴)

(آسان - نموداری - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ شریعی:

برای پاسخ دادن به این سؤال به نکات زیر توجه کنید:

۱- در لحظات t_1 و t_3 ، نوسانگر از نقطه تعادل می گذرد و بزرگی سرعت آن بیشینه است. با توجه به این که شیب نمودار مکان - زمان در لحظه t_3 مثبت است، در این لحظه جهت حرکت متحرک در جهت محور x است.

۲- در لحظات t_2 و t_4 ، متحرک در نقاط بازگشتی قرار دارد و اندازه شتاب آن بیشینه است. در لحظه t_4 ، مکان نوسانگر، مثبت است و در نتیجه شتاب بیشینه، منفی خواهد بود.

گروه آموزشی ماز

۶۴- فنر قائمی با طول عادی $10cm$ از سقف یک آسانسور آویخته شده و وزنه ای به جرم m به آن متصل است. آسانسور با شتاب ثابت $4 \frac{m}{s^2}$ از حال سکون

شروع به حرکت به سمت بالا می کند و طول فنر در حال تعادل به $11/4cm$ می رسد. اگر همین وزنه را به این فنر متصل کنیم تا در اتافک ساکن آسانسور

با دامنه $2cm$ حرکت هماهنگ ساده انجام دهد، مسافت طی شده توسط نوسانگر در مدت $30s$ چند سانتی متر خواهد بود؟ ($\pi = \sqrt{10}$ ، $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۶ (۴)

۸ (۳)

۱۰ (۲)

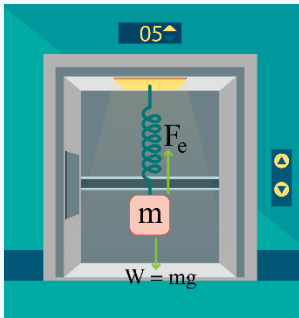
۱۲ (۱)



فنر در آسانسور



۱ - شکل زیر نیروهای وارد بر جسمی که از یک فنر درون آسانسور آویخته شده است را نشان می‌دهد.



۲ - هنگامی که شتاب حرکت آسانسور به سمت بالا است، داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow F_e - mg = ma \rightarrow F_e = m(g + a) \rightarrow k\Delta L = m(g + a)$$

۳ - هنگامی که شتاب حرکت آسانسور به سمت پایین است، داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \rightarrow mg - F_e = ma \rightarrow F_e = m(g - a) \rightarrow k\Delta L = m(g - a)$$

۴ - بنابراین به طور خلاصه نیروی فنر برابر است با:

$$F_e = m(g \pm a)$$

۵ - دقت کنید که در محاسبه نیروی فنر، جهت شتاب آسانسور اهمیت دارد و جهت حرکت آسانسور مهم نیست.

۶ - دوره متناوب و بسامد نوسانگر وزنه - فنر به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

گام اول:

مطابق نکته فوق می‌توان نوشت:

$$k\Delta L = m(g + a) \Rightarrow k \times (0.114 - 0.1) = m(10 + 4)$$

$$\rightarrow k \times 0.014 = 14m \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{14}{0.014} = 1000 \rightarrow \frac{m}{k} = \frac{1}{1000}$$

گام دوم:

با داشتن نسبت $\frac{m}{k}$ ، دوره نوسان به دست می‌آید.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{1}{1000}} = 0.2s$$

دقت کنید که m و k را نمی‌توانیم جداگانه محاسبه کنیم و فقط نسبت آن‌ها را به دست آوردیم که برای حل سؤال کافی بود.

گام سوم:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{30}{0.2} = 150$$

تعداد نوسان‌های کامل در مدت ۳۰ ثانیه برابر است با:

گام چهارم:

$$\ell = n \times 4A = 150 \times 4 \times 0.02 = 12m$$

مسافت طی شده برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۶۵ - نمودار تغییرات انرژی پتانسیل بر حسب انرژی جنبشی یک نوسانگر هماهنگ ساده به جرم ۵۰ گرم مطابق شکل زیر است. در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل

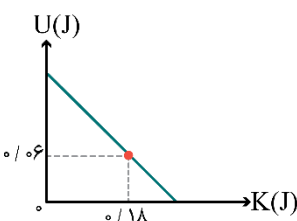
نوسانگر $0.14J$ است، اندازه تکانه آن چند واحد SI است؟ (از اتلاف انرژی صرف نظر کنید).

۱) ۱

۲) ۰.۵

۳) $0.4\sqrt{15}$

۴) $0.2\sqrt{15}$



(متوسط - نموداری - ۱۳۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار داده شده، انرژی مکانیکی نوسانگر برابر است با:
در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل برابر $U = 0.14 \text{ J}$ باشد، انرژی جنبشی برابر $K = E - U = 0.24 - 0.14 = 0.1 \text{ J}$ است و بزرگی تکانه در این لحظه برابر است با:

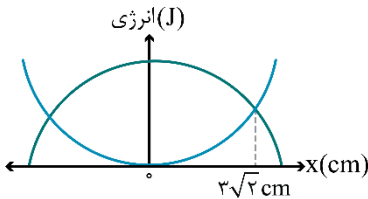
$$K = \frac{p^2}{2m} \rightarrow 0.1 = \frac{p^2}{2 \times 5 \times 10^{-3}} \rightarrow p^2 = 0.1 \rightarrow p = 0.1 \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

گروه آموزشی ماز

۶۶- جسمی به جرم $200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ گرم را به فنری با ثابت $200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ می‌بندیم تا حرکت هماهنگ ساده انجام دهد. اگر نمودار انرژی های پتانسیل و جنبشی این سامانه

مطابق شکل زیر باشد، حداکثر تکانه جسم در SI کدام است؟

- (۱) $0.24\sqrt{10}$
- (۲) $0.18\sqrt{10}$
- (۳) $0.12\sqrt{10}$
- (۴) 0.32



(متوسط - نموداری - ۱۳۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول:

در نقاط $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$ انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی، برابر است، بنابراین:

$$3\sqrt{2} \text{ cm} = \frac{\sqrt{2}}{2} A \rightarrow A = 6 \text{ cm}$$

گام دوم:

بسامد زاویه‌ای این نوسانگر را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0.2}} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

گام سوم:

حداکثر تکانه را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$p_{\max} = mv_{\max} = mA\omega = 0.2 \times 0.06 \times 10\sqrt{10} = 0.12\sqrt{10} \frac{\text{kg.m}}{\text{s}}$$

گروه آموزشی ماز

۶۷- در نوسان هماهنگ ساده یک دستگاه جرم - فنر که روی پاره‌خطی به طول 4 cm نوسان می‌کند، حداقل 125 میلی ثانیه طول می‌کشد تا انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر از بیشینه مقدار ممکن به کمینه مقدار ممکن برسد. اگر جرم جسم 250 گرم باشد، اندازه بیشینه نیروی کشسانی وارد بر

آن چند نیوتون است؟ ($\pi^2 = 10$)

(۴) $1/6$

(۳) 0.16

(۲) 0.8

(۱) 0.08

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۳۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

برای آن که نوسانگر از نقطه‌ای با بیشینه انرژی پتانسیل (نقاط بازگشتی) به نقطه‌ای با کمینه انرژی پتانسیل (نقطه تعادل) برسد، حداقل به $\frac{T}{4}$ زمان نیاز است، بنابراین داریم:

$$\frac{T}{4} = 125 \text{ ms} \rightarrow T = 500 \text{ ms} = 0.5 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

بسامد زاویه ای این نوسانگر برابر است با:

اندازه بیشینه نیرو برابر است با:

$$F_{\max} = m A \omega^2 \rightarrow F_{\max} = 0.25 \times 0.2 \times (4\pi)^2 = 0.8 \text{ J}$$

دقت کنید که دامنه نوسان نصف طول پاره خط نوسان است.

گروه آموزشی ماز

۶۸- جسمی به جرم ۹۰۰ گرم را از فنری به جرم ناچیز و با ثابت $100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ در راستای قائم آویزان کرده و از طول عادی رها می کنیم. پس از گذشت $1/10$ ثانیه،

مسافت طی شده توسط جسم و اندازه جابه جایی آن چند سانتی متر با هم اختلاف دارند؟ $(\pi = \sqrt{10}, g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

۳۶ (۴)

۶۳ (۳)

۵۴ (۲)

۴۵ (۱)

(سخت - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

گام اول:

در حالت تعادل، نیروی فنر برابر نیروی وزن جسم است، بنابراین داریم:

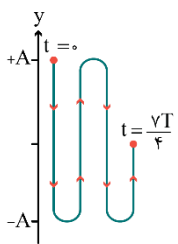
$$F_e = mg \rightarrow k \Delta L = mg \rightarrow 100 \Delta L = 0.9 \times 10 \rightarrow \Delta L = \frac{9}{100} \text{ m} = 9 \text{ cm}$$

بنابراین نقطه تعادل ۹ cm پایین تر از طول عادی فنر است و هنگامی که نوسانگر را از طول عادی رها می کنیم، با دامنه $A = 9 \text{ cm}$ نوسان می کند.

گام دوم:

دوره نوسان برابر است با:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{0.9}{100}} = 2 \times 0.3 = 0.6 \text{ s}$$



مدت زمان $\Delta t = 1/10 \text{ s}$ برابر $\frac{1}{4}T$ است. در این مدت جابه جایی و مسافت طی شده برابر هستند با:

$$\text{مسافت: } \ell = vA = 63 \text{ cm}$$

$$\text{جابه جایی: } \Delta y = -A = -9 \text{ cm}$$

$$\rightarrow \ell - |\Delta y| = 63 - 9 = 54 \text{ cm}$$

گام سوم:

گروه آموزشی ماز

۶۹- نوسانگر هماهنگ ساده ای با دوره تناوب T نوسان می کند. اختلاف حداکثر مسافتی که نوسانگر در مدت $\frac{T}{4}$ می تواند طی کند با حداقل مسافتی که در

مدت $\frac{T}{4}$ می تواند طی کند، چند برابر طول پاره خط نوسان است؟ $(\sqrt{3} \approx 1/7, \sqrt{2} \approx 1/4)$

۳/۲ (۴)

۰/۵۵ (۳)

۲/۲ (۲)

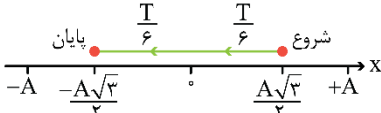
۱/۱ (۱)

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

برای اینکه در مدت $\frac{T}{4}$ ثانیه نوسانگر بیشترین مسافت را طی کند این نوسانگر باید در این مدت حداکثر سرعت ممکن را داشته باشد و می دانیم که حداکثر

سرعت ممکن در حول نقطه تعادل رخ می دهد، بنابراین در این راستا بازه زمانی $\frac{T}{4}$ را نصف و در طرفین نقطه تعادل قرار می دهیم:



$$\ell_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)A = \sqrt{3}A \approx 1/7A$$

برای اینکه در مدت $\frac{T}{4}$ ثانیه نوسانگر کمترین مسافت را طی کند این نوسانگر باید در این مدت حداقل سرعت ممکن را داشته باشد و می دانیم که حداقل

سرعت ممکن در حول نقاط بازگشتی رخ می دهد، بنابراین در این راستا بازه زمانی $\frac{T}{4}$ را نصف و در طرفین یکی از نقاط بازگشتی قرار می دهیم:



$$\ell_2 = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)A \rightarrow \ell_2 = (2 - \sqrt{2})A \approx 0.6A$$

$$\Delta \ell = |\ell_2 - \ell_1| = 1/1 \text{ A}$$

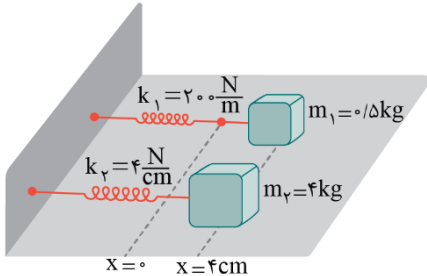
بنابراین:

حال می‌دانیم که دامنه حرکت برابر A و طول پاره خط نوسان، ۲ برابر دامنه، یعنی برابر $2A$ می‌باشد، بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{1/1 \text{ A}}{2A} = 0.55$$

گروه آموزشی ماز

۷۰- مطابق شکل، در لحظه $t=0$ ، دو نوسانگر وزنه - فنر روی سطح افقی بدون اصطکاک در کنار یکدیگر حول مبدأ محور x شروع به نوسان می‌کنند. در لحظه‌ای که فنر (۱) کمترین طول را دارد، انرژی جنبشی جسم (۲) چند ژول است؟



(۱) صفر

(۲) ۰/۱۶

(۳) ۰/۳۲

(۴) ۰/۱۶√۲

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

دوره هر نوسانگر را محاسبه می‌کنیم:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.5}{200}} = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{4}{400}} = \frac{2\pi}{10} \text{ s}$$

پس از شروع حرکت، در مدت $\frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{20} \text{ s}$ ، نوسانگر (۱) به مکان $x = -A$ می‌رود و فنر دارای کمترین طول می‌شود. اگر دقت کنید این زمان برابر $\frac{T_2}{4}$ است، یعنی در این مدت، نوسانگر (۲) از مکان $x = +A$ به نقطه تعادل می‌رسد. انرژی جنبشی جسم (۲) در نقطه تعادل برابر با انرژی مکانیکی آن است و می‌توان نوشت:

$$E_2 = \frac{1}{2} k_2 A^2 = \frac{1}{2} \times 400 \times \left(\frac{4}{100}\right)^2 = 0.32 \text{ J}$$

گروه آموزشی ماز

۷۱- در شرایط خلأ، دو جسم را از بالای برجی با فاصله زمانی ۳ ثانیه رها می‌کنیم. اگر بیشترین فاصله دو جسم از یکدیگر در طی این حرکت برابر با ۱۳۵ متر

باشد، ارتفاع برج چند متر است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

(۴) ۲۱۰

(۳) ۲۴۰

(۲) ۲۲۵

(۱) ۱۸۰

(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته:

بیشترین فاصله دو جسم زمانی رخ می‌دهد که متحرکی که زودتر حرکت کرده است، به زمین رسیده باشد.

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که مکان یک متحرک در حرکت سقوط آزاد از رابطه $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$ به دست می‌آید.

$$1 - y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + h \rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

$$2 - y_2 = -\frac{1}{2}g(t-3)^2 + h \rightarrow y_2 = -\frac{1}{2}g(t-3)^2 + h = -\frac{1}{2}gt^2 + 3t - 4.5$$

$$(2) \text{ و } (1) \text{ فاصله متحرک } d = |y_1 - y_2| = \left| -\frac{1}{2}gt^2 + h - (-\frac{1}{2}gt^2 + 3t - 4.5) \right| = |3t - 4.5| \xrightarrow{d=135\text{m}} t = 6\text{s}$$



یعنی ۶ ثانیه طول کشیده تا متحرکی که زودتر حرکت کرده کل طول برج را طی کند به سطح زمین برسد، بنابراین:

$$y_1 = -\Delta t^2 + h \xrightarrow[t=6s]{y_1=0} 0 = -5 \times 36 + h \Rightarrow h = 180 \text{ m}$$

گروه آموزشی ماز

۷۲- در شرایط خلأ، سنگی از بام ساختمانی رها می‌گردد. اگر سنگ در ۲ ثانیه آخر حرکت خود ۴۰ متر را طی کند، اندازه سرعت سنگ وقتی به نیمه مسیر حرکت خود می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

۳۰ (۴)

۱۵√۳ (۳)

۳۰√۲ (۲)

۱۵√۲ (۱)

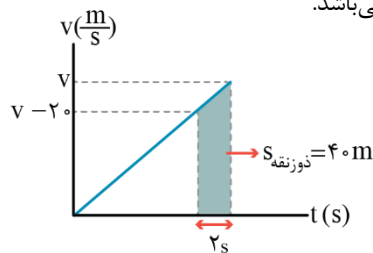
(متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱



پاسخ تشریحی:

این سؤال به راحتی توسط نمودار $v-t$ حل می‌گردد، فقط به این نکته توجه کنید که اگر اندازه سرعت نهایی سنگ برابر v باشد با توجه به این که حرکت با شتاب ثابت انجام می‌شود، بنابراین اندازه سرعت سنگ ۲ ثانیه قبل از پایان حرکت برابر با $v-20$ (متر بر ثانیه) می‌باشد.



$$S_{\text{وزنقه}} = \frac{(\text{ارتفاع}) \times (\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک})}{2}$$

$$\rightarrow S_{\text{وزنقه}} = \frac{(v-20+v) \times (2)}{2} = 40 \rightarrow 2v-20=40 \rightarrow v=30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

بنابراین ارتفاع ساختمان برابر است با:

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0) \rightarrow v^2 = 2gh \rightarrow 900 = 2 \times 10 \times h$$

$$\rightarrow h = \frac{900}{20} = 45 \text{ m}$$

نیمه مسیر زمانی است که سنگ $22/5$ متر حرکت کرده باشد، بنابراین:

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \Rightarrow v^2 = 2 \times 10 \times 22/5 \Rightarrow v = \sqrt{450} = 15\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گروه آموزشی ماز

۷۳- در شرایط خلأ، سنگی را از ارتفاع h رها می‌کنیم. اگر سنگ در ۲ ثانیه آخر حرکت خود تا قبل از برخورد به زمین ۸۰ متر را طی کند، درباره این حرکت کدام گزینه صحیح است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

$$(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$$

(۱) در ۳s ابتدایی حرکت ۵۰m طی شده است.

(۲) وقتی نصف زمان کل حرکت طی شد، اندازه سرعت سنگ برابر با $32/25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ بوده است.

(۳) اختلاف مسافت طی شده در ۳ ثانیه ابتدایی حرکت و دو ثانیه انتهایی حرکت برابر با ۳۵ متر است.

(۴) مسافت طی شده در ۲ ثانیه ابتدایی حرکت بیشتر از $\frac{1}{4}$ کل مسیر حرکت است.

(سخت - محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳



بررسی گزینه‌ها:

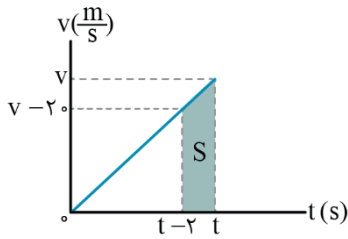
① مسافت طی شده توسط سنگ در ۳ ثانیه اول حرکت برابر است با:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow[t=3s]{} \Delta y = \frac{1}{2} \times 10 \times 3^2 = 45 \text{ m}$$

بنابراین گزینه (۱) نادرست است.



۲ اگر اندازه سرعت نهایی سنگ برابر با v باشد، با توجه به اینکه حرکت با شتاب ثابت $\frac{10}{s^2}$ انجام می‌شود، بنابراین اندازه سرعت سنگ ۲ ثانیه قبل از برخورد با سطح زمین برابر با $v - 20$ (متر برثانیه) می‌باشد، بنابراین با توجه به نمودار $v - t$ داریم:



$$S = 80 \cdot m \rightarrow \frac{(v - 20 + v) \times 2}{2} = 80 \rightarrow 2v - 20 = 80 \rightarrow v = 50 \frac{m}{s}$$

$$v = gt \rightarrow 50 = 10 \cdot t \rightarrow t = 5s$$

بنابراین کل زمان حرکت برابر است با:

بنابراین اندازه سرعت سنگ در نصف زمان حرکت، یعنی لحظه $t = 2/5s$ برابر است با:

$$v' = gt' \xrightarrow{t'=2/5} v' = 10 \times 2/5 = 2 \frac{m}{s}$$

بنابراین گزینه (۲) نادرست است.

۳ همان طور که در گزینه (۱) محاسبه کردیم، مسافت طی شده توسط سنگ در ۳ ثانیه اول حرکت برابر با $45m$ است و طبق اطلاعات داده شده در سؤال، مسافت طی شده در ۲ ثانیه آخر حرکت برابر با $80m$ است، بنابراین اختلاف این دو برابر با $35m$ است، بنابراین گزینه (۳) درست است.

۴ مسافت طی شده توسط سنگ در ۲ ثانیه ابتدایی حرکت برابر است با:

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \Delta y = \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 20 \cdot m$$

$$v^2 - v_0^2 = 2gh \rightarrow v^2 = 2gh \xrightarrow{v=50, \frac{m}{s}} 2500 = 2 \times 10 \times h \rightarrow h = 125m$$

ارتفاع برابر است با:

بنابراین $\frac{1}{4}$ مسیر حرکت برابر با $31/25m$ است، بنابراین مسافت طی شده توسط سنگ در $\frac{1}{4}$ مسیر حرکت بیشتر از ثانیه اول حرکت است، در نتیجه گزینه (۴) نادرست است.

گروه آموزشی ماز

۷۴ - متحرکی با تندی ثابت $20\pi \frac{m}{s}$ روی دایره‌ای که مساحت آن $1600\pi m^2$ می‌باشد، حرکت می‌کند. اندازه شتاب مرکزگرای این متحرک چند برابر اندازه شتاب متوسط آن در هر ثانیه است؟

$$\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2}\pi^2}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول:

مساحت دایره از رابطه $S = \pi r^2$ دایره به دست می‌آید، بنابراین:

$$1600\pi = \pi r^2 \rightarrow r = 40 \cdot m$$

گام دوم:

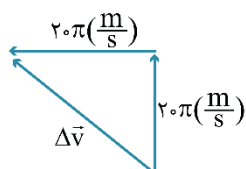
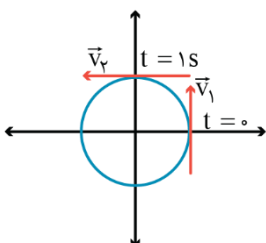
تندی متحرک از رابطه $v = \frac{2\pi r}{T}$ به دست می‌آید:

$$v = \frac{2 \times \pi \times 40}{T} = 20 \cdot \pi \rightarrow T = 4s$$

گام سوم:

شتاب مرکزگرا از رابطه $a_C = \frac{v^2}{r}$ به دست می‌آید:

$$a_C = \frac{v^2}{r} = \frac{20 \cdot \pi \times 20 \cdot \pi}{40} = 10 \cdot \pi^2 \frac{m}{s^2}$$



$$\Delta v = 20 \cdot \pi \sqrt{2} \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 \cdot \pi \sqrt{2}}{1} = 20 \cdot \pi \sqrt{2} \frac{m}{s^2}$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{a_C}{a_{av}} = \frac{10\pi^2}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۷۵- ماهواره‌ای به جرم m ، در فاصله h از سطح سیاره‌ای به جرم M و شعاع R ، به صورت یکنواخت دور سیاره می‌چرخد. چه تعداد از عبارتهای زیر صحیح است؟

الف: بسامد چرخش ماهواره به دور سیاره متناسب با $h^{-\frac{3}{2}}$ است.

ب: دوره چرخش ماهواره به دور سیاره متناسب با $(R+h)^{\frac{3}{2}}$ است.

ج: تندی چرخش ماهواره به دور سیاره متناسب با $(R+h)^{\frac{1}{2}}$ است.

د: انرژی جنبشی ماهواره از رابطه $K = \frac{GmM}{(R+h)}$ به دست می‌آید.

ه: اندازه تکانه ماهواره با جذر فاصله ماهواره از مرکز سیاره رابطه عکس دارد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سخت - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲



حرکت دایره‌ای ماهواره

در مورد حرکت دایره‌ای ماهواره‌ای به جرم m در فاصله h از سطح سیاره‌ای به جرم M و شعاع R ، خوب است روابط زیر را بتوانید به دست آورید.

۲- اندازه شتاب مرکزگرای حرکت ماهواره:

$$F_C = G \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

$$a_C = \frac{F_C}{m} = G \frac{M}{(R+h)^2}$$

۳- بسامد زاویه‌ای چرخش:

$$a_C = r\omega^2 \rightarrow G \frac{M}{(R+h)^2} = (R+h)\omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{GM}{(R+h)^3} \rightarrow \omega \propto (R+h)^{-\frac{3}{2}}$$

۴- بسامد حرکت ماهواره:

$$f \propto \omega \rightarrow f \propto (R+h)^{-\frac{3}{2}}$$

۵- دوره حرکت ماهواره:

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow T \propto (R+h)^{\frac{3}{2}}$$

۶- تندی حرکت ماهواره:

$$a_C = \frac{v^2}{r} \rightarrow G \frac{M}{(R+h)^2} = \frac{v^2}{(R+h)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}$$

۷- تکانه ماهواره:

$$p = mv \rightarrow p = m\sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}$$

۸- انرژی جنبشی ماهواره:

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2}mv^2 \\ v = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}} \end{cases} \rightarrow K = \frac{GMm}{2(R+h)}$$



با توجه به نکات فوق، عبارت‌های (ب) و (ه) صحیح هستند.

کنکور سراسری ریاضی داخل تیر ۱۴۰۲: ؟؟

فرض کنید ماهواره‌ها روی مدارهای دایره‌ای به دور زمین به طور یکنواخت می‌چرخند. کدام مورد صحیح است؟
 (۱) تندی مداری ماهواره در گردش به دور زمین، متناسب با جذر فاصله ماهواره از مرکز زمین است.
 (۲) مربع دوره گردش ماهواره به دور زمین، متناسب با مکعب فاصله ماهواره از مرکز زمین است.
 (۳) شتاب حرکت ماهواره متناسب با جذر فاصله ماهواره از مرکز زمین است.
 (۴) وزن یک ماهواره با جذر فاصله ماهواره از مرکز زمین رابطه عکس دارد.

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به نکات مطرح شده در درسنامه، عبارت صحیح برای هریک از گزینه‌ها به صورت زیر است:

گزینه (۱): تندی مداری ماهواره با جذر فاصله آن از مرکز زمین رابطه عکس دارد. (×)

گزینه (۲): مربع دوره گردش با مکعب فاصله متناسب است. (✓)

گزینه (۳): شتاب حرکت ماهواره با مربع فاصله رابطه عکس دارد. (×)

گزینه (۴): وزن ماهواره با مربع فاصله رابطه عکس دارد. (×)

گروه آموزشی ماز

جمع بندی آزمون: خب حالا بریم که تو صفحات بعدی کل مباحث این آزمون رو به صورت نمودار درختی مرور کنیم.



مفاهیم حرکت

بردار مکان (\vec{r}) ← برداری که مبدأ مختصات را به مکان جسم وصل می‌کند ← در حرکت یک‌بعدی معمولاً آن را با x نمایش می‌دهیم.

$x > 0$: بردار مکان در جهت محور x

$x < 0$: بردار مکان در خلاف جهت محور x

بردار جابه‌جایی (\vec{d}) ← برداری که نقطه ابتدایی حرکت را به نقطه انتهایی آن وصل می‌کند ← در حرکت یک‌بعدی معمولاً آن را با Δx نمایش می‌دهیم.

$\Delta x > 0$: جابه‌جایی در جهت محور x

$\Delta x < 0$: جابه‌جایی در خلاف جهت محور x

مسافت (ℓ) ← طول مسیر طی شده توسط متحرک است که کمیتی نرده‌ای است.

بردار سرعت متوسط (\vec{v}_{av}) ← جابه‌جایی در واحد زمان برابر سرعت متوسط است ← در حرکت یک‌بعدی:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

بردار سرعت لحظه‌ای (\vec{v}) ← اگر بازه زمانی در محاسبه سرعت متوسط را بسیار کوچک در نظر بگیریم، سرعت لحظه‌ای به دست می‌آید.

$v > 0$: جسم در جهت محور x حرکت می‌کند.

$v < 0$: جسم در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

تغییر علامت v به معنی تغییر جهت حرکت است.

تندی متوسط (s_{av}) ← مسافت طی شده در واحد زمان برابر تندی متوسط است ← $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ ← تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه سرعت متوسط است.

بردار شتاب متوسط (\vec{a}_{av}) ← تغییرات سرعت در واحد زمان برابر شتاب متوسط است. $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ← بردارهای شتاب متوسط و تغییرات سرعت همواره هم‌جهت هستند.

حرکت تندشونده ← تندی جسم در حال افزایش است ← a و v هم‌علامت هستند.

حرکت کندشونده ← تندی جسم در حال کاهش است ← a و v علامت مخالف هم دارند.



حرکت با سرعت ثابت

متحرک بر مسیر مستقیم بدون تغییر جهت با تندی ثابت حرکت می کند. ← اندازه و جهت بردار سرعت ثابت می ماند ← شتاب حرکت صفر است.

معادله مکان - زمان ← $x = vt + x_0$ ← نمودار مکان - زمان به شکل خطی با شیب v و عرض از مبدأ x_0 است.

مسافت و جابه جایی هم اندازه اند ← سرعت متوسط و تندی متوسط نیز هم اندازه هستند.

بردار شتاب ثابت است.

سرعت متحرک با آهنگ ثابت تغییر می کند ← $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ثابت ← در هر ثانیه، سرعت به اندازه a تغییر می کند.

$av_0 > 0$: تغییر جهت نمی دهد.

$av_0 < 0$: یک بار تغییر جهت می دهد.

متحرک حداکثر یک بار تغییر جهت می دهد.

حرکت با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم

معادله مکان - زمان ← $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ ← نمودار مکان - زمان به شکل سهمی است.

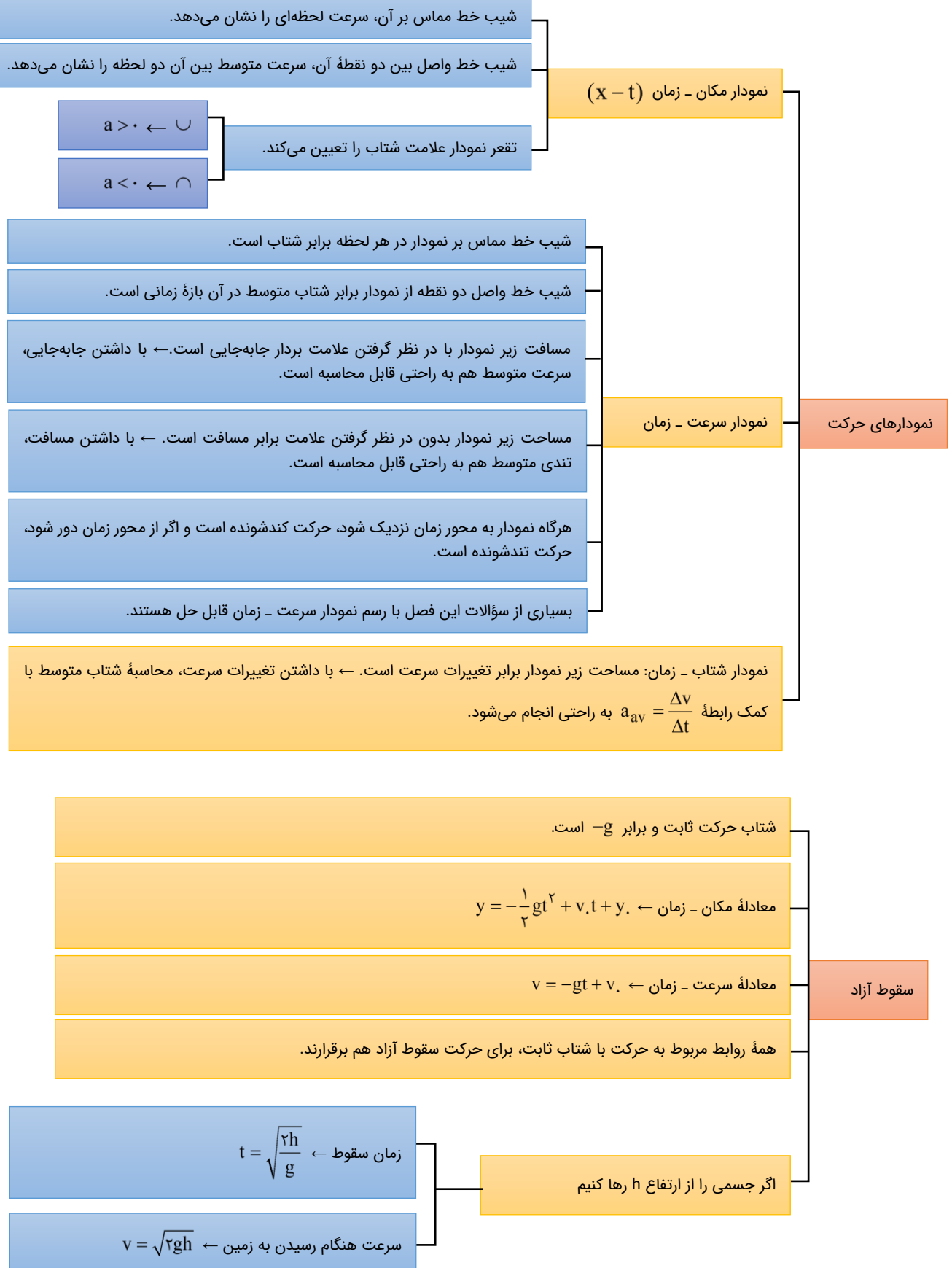
معادله سرعت - زمان ← $v = at + v_0$ ← نمودار سرعت - زمان به شکل خطی با شیب ثابت a و عرض از مبدأ v_0 است.

معادله مستقل از زمان ← $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ ← در مسائل ترمز و توقف، می توان با کمک این معادله مسافت ترمز را به دست آورد.

معادله مستقل از شتاب ← $\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t$ ← به عبارت دیگر، سرعت متوسط در هر بازه

زمانی برابر میانگین سرعت در ابتدا و انتهای آن بازه است ← $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$





قانون اول نیوتون: اگر نیروی خالصی به جسم وارد نشه (یعنی برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر بشه)، اون جسم حالت اولیه‌اش را حفظ می‌کنه، یعنی اگر جسم ساکن بوده باشه، ساکن می‌مونه و اگر در حال حرکت باشه، به حرکت یکنواخت خودش بر مسیری مستقیم و با تندی ثابت ادامه می‌ده.

قانون دوم نیوتون: اگر نیروی خالص F_{net} به جسمی به جرم m اثر کنه (یعنی چی؟ یعنی برآیند نیروهای وارد بر جسمی به جرم m ، F_{net} باشه) جسم شتابی می‌گیره که می‌تونیم ازش رابطه زیر رو نتیجه بگیریم:

$$F_{net} = ma$$

قانون سوم نیوتون: نیروهایی که دو جسم به یکدیگر وارد می‌کنن، همیشه هم‌اندازه و در خلاف جهت همدیگه هستن. به این دو نیرو «کنش یا عمل» و «واکنش یا عکس‌العمل» می‌گن. مثلاً هنگام پیاده شدن از قایق به عقب حرکت می‌کنه.

قوانین نیوتون

نیروی وزن: این نیرو، نیروی ربایشی است که از طرف مرکز کره زمین، به اجسام وارد می‌شود و آن‌ها را به طرف زمین می‌کشد.

$$W = mg$$

نیروی مقاومت شاره: وقتی جسمی در یک شاره (مایع یا گاز) قرار دارد و نسبت به آن حرکت می‌کند از طرف شاره نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم، به آن وارد می‌شود که به آن نیروی مقاومت شاره می‌گویند.

دینامیک و حرکت دایره‌ای

هرگاه جسمی را روی یک سطح قرار دهید، از طرف سطح، نیرویی عمود بر سطح و رو به بالا به جسم وارد می‌شود که با F_N نشان می‌دهیم و آن را نیروی عمودی تکیه‌گاه یا نیروی عمودی سطح می‌نامیم.

$$F_N = mg$$

اگر آسانسور با شتاب ثابت a به صورت تندشونده رو به بالا یا کندشونده رو به پایین حرکت کنه

$$F_N = m(g + |a|)$$

اگر آسانسور با شتاب ثابت a به صورت تندشونده رو به پایین یا کندشونده رو به بالا حرکت کنه

$$F_N = m(g - |a|)$$

نیروی عمودی تکیه‌گاه

معرفی برخی از نیروهای خاص

نیروی اصطکاک: وقتی جسمی روی یک سطح حرکت می‌کند، از طرف سطح، نیرویی موازی سطح و در خلاف جهت حرکت، به جسم وارد می‌شود این نیرو را اصطکاک می‌نامیم. چون جسم در حال حرکت است، گاهی به این نیرو، نیروی اصطکاک جنبشی یا لغزشی هم می‌گویند.

نیروی اصطکاک جنبشی: $f_k = \mu_k F_N$

نیروی اصطکاک ایستایی: $f_{s \max} = \mu_s F_N$

نیروی کشسانی فنر: فنر را چه از دو طرف بکشید و چه بفشارید، به دستان شما نیرو اثر می‌دهد. نیرویی که هدفش برگرداندن فنر به حالت عادی‌اش است. هر چه فنر کشیده‌تر یا فشرده‌تر شود، این نیرو هم بزرگ‌تر می‌شود یعنی اندازه نیروی فنر با میزان تغییر طول آن رابطه مستقیم دارد. $F_e = kx$

نیروی کشش طناب: برای محاسبه نیروی کشش طناب به روش زیر عمل می‌کنیم: ۱- ابتدا وضعیت کل دستگاه را مشخص کنید که در حال تعادل است یا شتاب دارد؟ ۲- نقطه‌ای را که نیروی کشش در آن‌جا خواسته شده است را به طور فرضی برش دهید. ۳- به دلخواه از محل برش یک طرف دستگاه (طرف خلوت) را نگه دارید و طرف دیگر را نادیده بگیرید. ۴- نیروی کشش را در بخش باقی‌مانده، در جهتی اثر دهید که طناب کش بیاید و سپس وضعیت کل دستگاه را برای این قسمت اعمال کنید.



تکانه: حاصل ضرب جرم جسم (m) در سرعت جسم (\vec{v})، تکانه جسم نامیده می‌شود و با \vec{p} نشان داده می‌شود:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

تکانه و قانون دوم نیوتون

قانون دوم نیوتون برحسب تکانه برای نیروی خالص ثابت: یعنی نیروی خالص وارد بر جسم برابر با تغییر تکانه آن جسم تقسیم بر مدت زمان تغییر است.

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

دوره: $T = \frac{2\pi r}{v}$

اندازه شتاب مرکزگرا: $a_c = \frac{v^2}{r}$

قانون دوم نیوتون در حرکت دایره‌ای یکنواخت: $F_{\text{net}} = m \frac{v^2}{r}$

حرکت دایره‌ای یکنواخت: بررسی حرکت جسمی که روی دایره یا بخشی از آن حرکت می‌کند.

دینامیک و حرکت دایره‌ای

هر دو ذره دلخواه به جرم‌های m_1 و m_2 که به فاصله معین (r) از هم قرار گرفته‌اند، به یکدیگر نیروی ربایشی وارد می‌کنند. این نیرو در راستای خطی است که آن دو ذره را به هم وصل می‌کنند و با حاصل ضرب جرم آن‌ها و نیز با مربع فاصله آن‌ها، متناسب است. به این قانون، قانون گرانش عمومی می‌گویند.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

نیروی گرانشی

گفتیم که وزن یک جسم، ناشی از نیروی گرانشی‌ای است که مرکز کره زمین به جسم وارد می‌کند:

$$W = G \frac{M_e m}{R_e^2}$$





نوسان دوره‌ای نوسان‌هایی را که هر دور آن دقیقاً در دوره‌های بعدی تکرار می‌شود (مانند ضربان قلب انسان در یک مدت معین، نوسان‌های دوره‌ای می‌نامیم که به هر دور آن چرخه (سیکل) گفته می‌شود. پس به نقشی که به طور منظم تکرار می‌شود، چرخه (سیکل) گفته می‌شود و به نوسان‌هایی که در آن یک چرخه عیناً تکرار می‌شود، نوسان دوره‌ای می‌گوییم.

$$x = A \cos(\omega t)$$

معادله مکان - زمان:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

بسامد زاویه‌ای:

معادله حرکت هماهنگ ساده را می‌توان به صورت سینوسی یا کسینوسی نوشت اگر در لحظه $t = 0$ نوسانگر در مکان $x = +A$ باشد، معادله حرکت آن به صورت مقابل است:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{سامانه جرم - فنر} \leftarrow \text{بسامد زاویه‌ای}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

انرژی مکانیکی سامانه جرم - فنر:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \xrightarrow{\omega=2\pi f} E = 2\pi^2 mA^2 f^2$$

انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

دوره تناوب:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

بسامد زاویه‌ای:

آونگ ساده

بسامد طبیعی: اگر جسمی را که می‌تواند نوسان کند از نقطه تعادل خارج و رها سازیم، این جسم شروع به نوسان در دو طرف نقطه تعادل می‌کند. بسامد نوسان جسم در این حالت را بسامد طبیعی می‌نامیم.

نوسان میرا: می‌دانیم که در دنیای واقعی نیروهای تلف‌کننده مثل اصطکاک و مقاومت هوا وجود دارند و به همین دلیل وقتی یک سامانه را برای نوسان آزاد می‌گذاریم، به دلیل نیروهای تلفاتی، انرژی مکانیکی پایسته نبوده و کاهش می‌یابد و دامنه نوسان رفته‌رفته کاهش می‌یابد و سرانجام نوسانگر می‌ایستد و می‌گوییم نوسان میرا می‌شود.

نوسان واداشته: حالا که نیروهای اتلافی دامنه نوسان را کاهش می‌دهند پس ما هم سامانه را برای نوسان آزاد نگذاریم و به آن یک نیروی دوره‌ای وارد کنیم. در این حال، نوسانگر با بسامدی غیر از بسامد طبیعی‌اش وادار به نوسان می‌شود. نوسان را در این حالت، نوسان واداشته می‌نامیم.

تشدید رزونانس: اگر بسامد ناشی از نیروی دوره‌ای با بسامد طبیعی نوسانگر برابر باشد، انرژی‌ای که توسط آن نیرو به نوسانگر داده می‌شود سبب جبران اتلاف انرژی ناشی از اصطکاک می‌شود.

نوسان

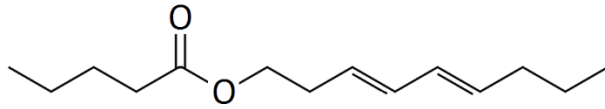
انرژی در حرکت هماهنگ ساده

آونگ ساده

تشدید

۷۶- مقدار ۱۶۶/۸ گرم از یک صابون جامد سیر شده که تعداد اتم‌های کربن در آن برابر با تعداد اتم‌های هیدروژن در الکل حاصل از آبکافت استر زیر است را در محلول حاوی ۹/۱۲ گرم مخلوط یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} حل می‌کنیم. اگر تمام صابون در واکنش با کل یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} مصرف شود، غلظت اولیه یون Ca^{2+} در محلول چند $mol.L^{-1}$ بوده و درصد جرمی یون منیزیم در مخلوط دو یون تقریباً چقدر است؟ (حجم محلول برابر ۳ لیتر است.)

($Ca = 40$ و $Mg = 24$ و $O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g.mol^{-1}$)



۴۷/۴ - ۰/۰۴ (۱)

۳۱/۶ - ۰/۰۶ (۲)

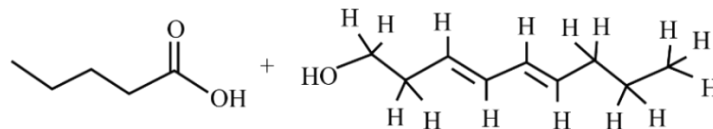
۵۲/۷ - ۰/۰۴ (۳)

۷۸/۹ - ۰/۰۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله - ۱۳۰۱)

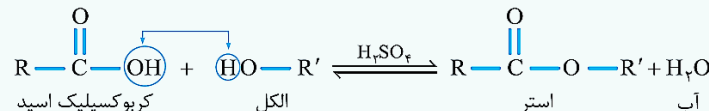
پاسخ تشریحی:

استرها در شرایط مناسب با آب واکنش داده و با شرکت در فرایند آبکافت، به اسید و الکل سازنده خود تجزیه می‌شوند. بر اثر آبکافت استر داده شده در شرایط مناسب، اسید و الکل زیر تولید می‌شوند:

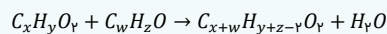


استری شدن:

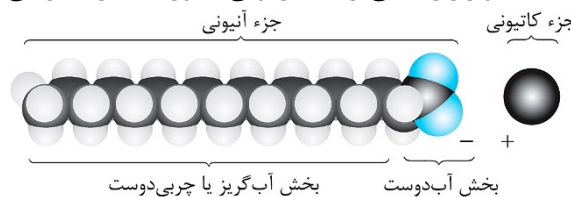
استرها را می‌توان از واکنش میان الکل‌ها ($R' - OH$) و کربوکسیلیک اسیدها ($R - COOH$) بدست آورد. فرایند انجام شده به صورت زیر است:



این واکنش، اصطلاحاً استری شدن نام دارد. با توجه به معادله نشان داده شده، کاتالیزگر واکنش مورد نظر سولفوریک اسید (H_2SO_4) است. استرها طی یک واکنش برگشت‌پذیر تولید شده و در شرایط مناسب می‌توانند به اسید و الکل سازنده خود تجزیه شوند. به واکنش استرها با مولکول‌های آب که منجر به تجزیه این مواد به الکل و اسید سازنده آن‌ها می‌شود، اصطلاحاً واکنش آبکافت گفته می‌شود. معادله کلی تولید یک ترکیب استری از یک اسید با فرمول شیمیایی $C_xH_yO_z$ و یک الکل با فرمول شیمیایی C_wH_zO به صورت زیر است:



با توجه به فرایند انجام شده، در ساختار ترکیب الکلی حاصل از این فرایند ۱۶ اتم هیدروژن وجود دارد. صابون جامد، نمک سدیم اسیدهای چرب و صابون مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب است. تصویر زیر، نمایی از ساختار نوعی صابون جامد را نشان می‌دهد:



بر این اساس، داریم:

صابون مدنظر: $C_{16}H_{31}O_2Na \rightarrow$ جرم مولی = $278 g.mol^{-1}$

در قدم بعد، شمار مول‌های صابون در نمونه داده شده را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که هر مول از کاتیون‌های منیزیم و کلسیم، با ۲ مول صابون واکنش می‌دهند. بر این اساس، داریم:

$$\frac{\text{جرم صابون}}{\text{جرم مولی صابون}} = \frac{166/8}{278} = 0/6 mol \rightarrow \text{مجموع مول کاتیون‌ها در محلول} = \frac{0/6}{2} = 0/3 mol$$

آب سخت:

به آب‌هایی مانند آب دریا که حاوی مقادیر زیادی از یون‌های کلسیم و منیزیم هستند، آب سخت گفته می‌شود. صابون‌های جامد و مایع هر دو با این یون‌ها تشکیل رسوب می‌دهند که به صورت لکه‌های سفید پس از شستن لباس با صابون روی آن‌ها باقی می‌ماند. توجه داریم که آب دریا، برخلاف یک نمونه از آب چشمه، نوعی آب سخت به شمار می‌رود، اما همانطور که می‌دانیم، قدرت پاک‌کنندگی پاک‌کننده غیرصابونی در آب‌های مختلف یکسان است؛ زیرا این پاک‌کننده‌ها با یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} موجود در آب تشکیل رسوب نمی‌دهد.

با توجه به اطلاعات بدست آمده و اطلاعات داده شده در صورت سوال، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} n_{Mg} + n_{Ca} = 0.3 \text{ mol} \\ 24n_{Mg} + 40n_{Ca} = 9.12 \text{ g} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} n_{Mg} = 0.18 \text{ mol} \\ n_{Ca} = 0.12 \text{ mol} \end{array}$$

بر این اساس، داریم:

$$[Ca^{2+}] = \frac{\text{مول یون کلسیم}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{0.12}{3} = 0.04 \text{ mol.L}^{-1}$$

در قدم آخر، درصد جرمی منیزیم بین یون‌های موجود در محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی منیزیم} = \frac{0.18 \times 24}{9.12} \times 100 \approx 47.4\%$$

با توجه به محاسبات بالا، درصد جرمی یون منیزیم در محلول مورد نظر برابر با ۴۷/۴ درصد است.

گروه آموزشی ماز

۷۷- جرم‌های برابری از استیک اسید و اوره در اختیار داریم. شمار اتم‌های هیدروژن موجود در نمونه استیک اسید، چند برابر شمار اتم‌های این عنصر در

نمونه اوره است؟ ($O = 16$ و $N = 14$ و $C = 12$ و $H = 1$: g.mol^{-1})

۰/۵ (۴)

۱ (۳)

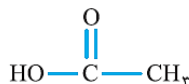
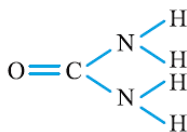
۲ (۲)

۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مساله - ۱۲۰۱)



اوره یک ترکیب آمیدی و استیک اسید، یک نوع کربوکسیلیک اسید است. چون جرم مولی اوره ($(NH_2)_2CO$) و استیک اسید (CH_3COOH) برابر و معادل با ۶۰ گرم بر مول است، پس می‌توان گفت شمار مول‌های این دو ماده در نمونه‌هایی به جرم مساوی از آن‌ها نیز برابر می‌شود. از طرفی، در هر مولکول اوره چهار اتم هیدروژن و در هر مولکول استیک اسید نیز چهار اتم هیدروژن وجود دارد؛ پس شمار اتم‌های هیدروژن موجود در نمونه استیک اسید، برابر با شمار اتم‌های این عنصر در نمونه اوره می‌شود. ساختار مولکولی اوره و استیک اسید به صورت زیر است:

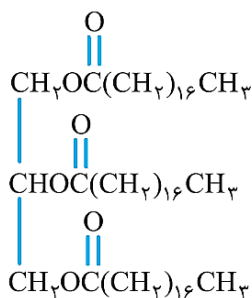


دو اسید آلی مهم:

فورمیک اسید، یک اسید ضعیف آلی با فرمول مولکولی $HCOOH$ است. اسیدهای ضعیف به طور جزئی در حضور آب یونش یافته و در محلول آن‌ها مقدار زیادی مولکول اسید یونیده نشده وجود دارد. محلول این مواد خاصیت اسیدی داشته و غلظت یون هیدروکسید نیز در آن بسیار کم است. با توجه به توضیحات داده شده، در محلول فورمیک اسید، مقایسه غلظت گونه‌ها به صورت $[HCOOH] < [HCOO^-] = [H^+] < [OH^-]$ است. توجه داریم که استیک اسید، ترکیب اسیدی دیگری با فرمول مولکولی CH_3COOH است که در ساختار خود ۲ اتم کربن دارد. در محلول استیک اسید، مقایسه غلظت گونه‌ها به صورت $[CH_3COOH] < [CH_3COO^-] = [H^+] < [OH^-]$ است.

گروه آموزشی ماز

۷۸- چند مورد از مطالب زیر، درباره ترکیبی که ساختار آن نشان داده شده، درست است؟



($O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1$: g.mol^{-1})

آ: نیروی بین مولکولی غالب در آن از نوع وان دروالسی است.

ب: این ترکیب یک اسید چرب سه عاملی را نشان می‌دهد که در هگزان حل می‌شود.

پ: در واکنش آن با سود، الکلی تولید می‌شود که درصد جرمی اکسیژن در آن تقریباً ۵۲٪ است.

ت: این ترکیب دو بخش قطبی و ناقطبی داشته و در مخلوط آب و صابون، تشکیل کلوئید می‌دهد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)



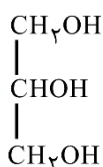
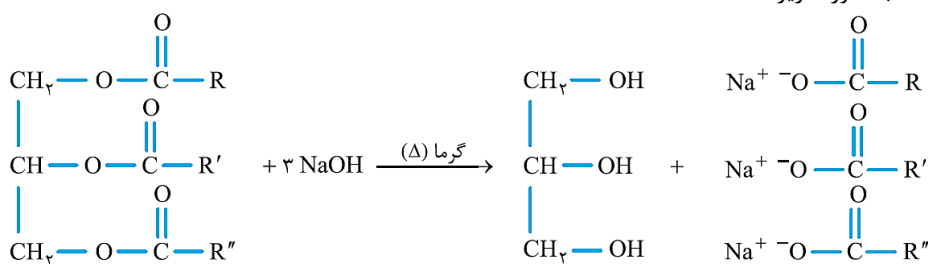
عبارت‌های (آ)، (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: چربی‌ها، مخلوطی از اسیدهای چرب (کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی و جرم مولی زیاد) و استرهای بلندزنجیر (استرهایی با جرم مولی زیاد) هستند. تصویر نشان داده شده، نوعی استر بلندزنجیر را نشان می‌دهد. این ترکیب ناقطبی است و نیروی بین مولکولی غالب در آن از نوع وان‌دروالسی است. توجه داریم که در این ترکیب، اتم هیدروژن متصل به اتم‌های O ، F و N وجود ندارد و در نتیجه پیوند هیدروژنی بین مولکول‌های آن برقرار نمی‌شود.

ب: چربی‌ها را می‌توان مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلندزنجیر (با جرم مولی زیاد) دانست. ترکیب داده شده یک استر سه عاملی است که به علت بلند بودن زنجیرهای هیدروکربنی، ناقطبی است و در هگزان که یک حلال غیرقطبی است حل می‌شود. در واقع از آن‌جا که بخش اعظم این مولکول‌ها ناقطبی است، پس بخش ناقطبی مولکول به راحتی بر بخش قطبی آن غلبه کرده و در نتیجه مولکول‌های چربی در مجموع، ناقطبی به حساب می‌آیند و در حلال‌های قطبی مانند آب حل نمی‌شوند. توجه داریم که به خاطر نامحلول بودن چربی‌ها در حلال‌های قطبی، آب به تنهایی نمی‌تواند چربی‌های موجود بر روی پوست و لباس‌ها را پاک کند و به همین دلیل، برای پاک کردن چربی‌ها باید از سایر پاک‌کننده‌ها کمک بگیریم.

پ: معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



بر اثر واکنش این استر سه عاملی با مقدار کافی سود، الکل مقابل تشکیل می‌شود:
در رابطه با این ماده، داریم:

$$C_7H_{16}O_3 \rightarrow \text{درصد جرمی اکسیژن در الکل} = \frac{(3 \times 16)}{(3 \times 16) + (3 \times 12) + 8} \times 100 \approx 52\%$$

ت: پاک‌کننده‌های صابونی، از جمله موادی هستند که از آن‌ها برای پاک کردن لکه‌ها و قطره‌های چربی استفاده می‌شود. به نمک سدیم اسیدهای چرب دراز زنجیر، صابون گفته می‌شود. با ورود ترکیب مورد نظر به مخلوطی از آب و صابون، یک نوع کلئید تشکیل خواهد شد. می‌دانیم که در حالت عادی، آب و روغن با هم مخلوط نمی‌شوند و به صورت دو لایه مجزا در ظرف باقی می‌مانند. حتی اگر این مخلوط را به هم بزنیم، پس از توقف هم‌زدن، آب و روغن مجدداً از هم جدا شده و دو لایه مجزا تشکیل می‌دهند. در این شرایط، اگر مقداری صابون را به این مخلوط اضافه کنیم و پس از آن محتویات ظرف را به هم بزنیم، یک مخلوط پایدار ایجاد می‌شود که به ظاهر همگن است و پس از توقف هم‌زدن نیز اجزای آن از هم جدا نمی‌شوند. در این شرایط، مولکول‌های صابون همانند پلی در میان مولکول‌های آب و روغن قرار گرفته و سبب پخش شدن ذرات روغن در آب می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

۷۹- مخلوطی از یک پاک‌کننده صابونی جامد و یک پاک‌کننده غیرصابونی به جرم ۴۰۰ گرم را در ۱۴۰ لیتر آب حاوی یون کلسیم حل می‌کنیم. اگر جرم رسوب تشکیل شده برابر ۳۳۰ گرم باشد، درصد جرمی پاک‌کننده غیرصابونی در مخلوط اولیه و غلظت مولی تقریبی یون سدیم در محلول نهایی کدام است؟ (تعداد اتم کربن در ساختار پاک‌کننده صابونی و غیرصابونی به ترتیب برابر ۱۶ و ۱۸ بوده و زنجیر کربنی هر دو پاک‌کننده، سیر شده است.)

$$(C_a = 40 \text{ و } O = 16 \text{ و } C = 12 \text{ و } H = 1 : g.mol^{-1})$$

$$0.05 - 21/4 \text{ (۴)}$$

$$0.01 - 21/4 \text{ (۳)}$$

$$0.05 - 16/6 \text{ (۲)}$$

$$0.01 - 16/6 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله ۱۲۰۱)

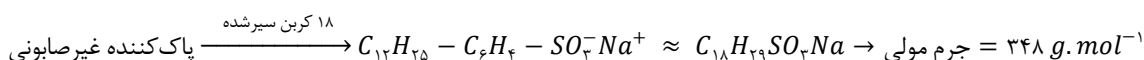
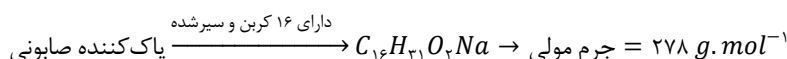
پاسخ تشریحی:

در رابطه با پاک‌کننده‌های موجود در مخلوط اولیه، داریم:

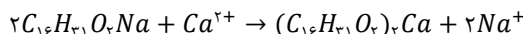
تشکیل رسوب \rightarrow کاتیون‌های کلسیم و منیزیم + پاک‌کننده صابونی

عدم تشکیل رسوب \rightarrow کاتیون‌های کلسیم و منیزیم + پاک‌کننده غیرصابونی

فرمول شیمیایی هر کدام از پاک‌کننده‌های موجود در مخلوط اولیه را بدست می‌آوریم:



معادله واکنش پاک کننده صابونی با یون های کلسیم موجود در محلول به صورت زیر است:



در این رابطه، داریم:

$$(C_{16}H_{31}O_2)_2Ca \rightarrow \text{جرم مولی} = 550 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

با توجه به معادله واکنش انجام شده، جرم صابون مصرف شده به منظور تولید ۳۳۰ گرم رسوب را محاسبه می کنیم:

$$? \text{ g } C_{16}H_{31}O_2Na = 330 \text{ g } (C_{16}H_{31}O_2)_2Ca \times \frac{1 \text{ mol } (C_{16}H_{31}O_2)_2Ca}{550 \text{ g } (C_{16}H_{31}O_2)_2Ca} \times \frac{2 \text{ mol } C_{16}H_{31}O_2Na}{1 \text{ mol } (C_{16}H_{31}O_2)_2Ca} \times \frac{278 \text{ g } C_{16}H_{31}O_2Na}{1 \text{ mol } C_{16}H_{31}O_2Na}$$

$$= 333/6 \text{ g}$$

برای محاسبه جرم صابون مصرف شده با استفاده از روش تناسب، داریم:

$$\frac{\text{جرم رسوب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم صابون}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \rightarrow \frac{330 \text{ g } (C_{16}H_{31}O_2)_2Ca}{1 \times 550} = \frac{x \text{ g } C_{16}H_{31}O_2Na}{2 \times 278} \rightarrow x = 333/6 \text{ g}$$

در قدم بعد، جرم پاک کننده غیرصابونی موجود در مخلوط و درصد جرمی این ماده را محاسبه می کنیم:

$$\text{جرم پاک کننده غیرصابونی} = 400 - 333/6 = 66/4 \text{ g}$$

$$\text{درصد جرمی پاک کننده غیرصابونی} = \frac{\text{جرم پاک کننده غیرصابونی}}{\text{جرم مخلوط}} \times 100 = \frac{66/4}{400} \times 100 = 16/6 \text{ درصد}$$

با ورود پاک کننده های صابونی و غیرصابونی به محلول، یون سدیم وارد محلول می شود. هر مول از این پاک کننده ها، یک مول کاتیون سدیم به همراه خود دارد. بر این اساس، داریم:

$$? \text{ mol } C_{16}H_{31}O_2Na = 333/6 \text{ g } C_{16}H_{31}O_2Na \times \frac{1 \text{ mol } C_{16}H_{31}O_2Na}{278 \text{ g } C_{16}H_{31}O_2Na} = 1/2 \text{ mol}$$

$$? \text{ mol } C_{18}H_{39}SO_2Na = 66/4 \text{ g } C_{18}H_{39}SO_2Na \times \frac{1 \text{ mol } C_{18}H_{39}SO_2Na}{348 \text{ g } C_{18}H_{39}SO_2Na} \approx 0/2 \text{ mol}$$

تقریباً ۱/۴ مول از این دو پاک کننده وارد محلول آبی شده است، پس می توان گفت در نهایت، ۱/۴ مول کاتیون سدیم نیز وارد این محلول شده است. بر این اساس، داریم:

$$[Na^+] = \frac{\text{مول یون سدیم}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{1/4 \text{ mol } Na^+}{140 \text{ L}} = 0/01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

پاک کننده های غیرصابونی:

پس از گسترش استفاده از صابون، شیمی دان ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک کنندگی بالا، بتوان آن ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی دان ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون ها، ساختاری دوگانه دوست (هم چربی دوست و هم آب دوست) داشته باشد. سرانجام آن ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه موجود در صنایع پتروشیمی، پاک کننده های جدیدی را تولید کنند. این مواد، به پاک کننده های غیرصابونی معروف بوده و فرمول همگانی آن ها به صورت $RC_6H_5SO_3Na$ است. پاک کننده های غیرصابونی نیز همانند پاک کننده های صابونی از یک بخش آب دوست و یک بخش چربی دوست (حلقه بنزنی و زنجیر هیدروکربنی) تشکیل شده اند. در هنگام استفاده از این پاک کننده ها، مولکول های چربی به زنجیره هیدروکربنی پاک کننده می چسبند و بخش آب دوست مولکول های پاک کننده نیز باعث پخش شدن چربی ها در آب می شود. پاک کننده های غیرصابونی، برخلاف پاک کننده های صابونی، طی واکنش های پیچیده و از مواد پتروشیمیایی تولید می شوند. این پاک کننده ها، همانند بنزن، نفتالن، بنزوتیک اسید، بنزآلدهید و ... دارای یک حلقه کربنی آروماتیک (حلقه بنزنی) در ساختار خود هستند. توجه داریم که پاک کننده های غیرصابونی، قدرت پاک کنندگی بیشتری نسبت به پاک کننده های صابونی دارند.

گروه آموزشی ماز

۸۰- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

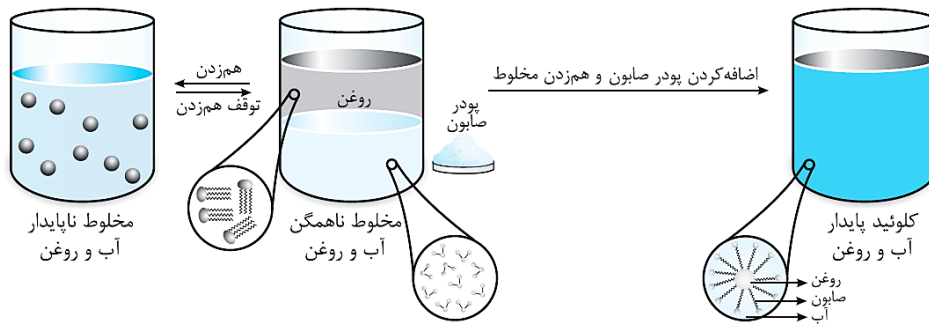
- ۱) مولکول عسل در ساختار خود تعدادی گروه هیدروکسیل داشته و توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول های آب را دارد.
- ۲) در سال های اخیر، شاخص امید به زندگی در مناطق برخوردار جهان، کمتر از مناطق کم برخوردار افزایش پیدا کرده است.
- ۳) شمار اتم های اکسیژن موجود در مولکول روغن زیتون، ۳ برابر شمار اتم های اکسیژن در هر مولکول اتیلن گلیکول است.
- ۴) مخلوطی از آب و روغن، ناپایدار بوده و با قرار دادن آن در یک محیط ثابت، نمونه آب روی سطح روغن قرار می گیرد.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی

مخلوط آب و روغن، در نبود صابون ناپایدار بوده و اگر این مخلوط را برای مدتی در یک مکان ثابت قرار بدهیم، آب و روغن موجود در آن از یکدیگر جدا شده و دو لایه ی مجزا تشکیل می شود. در چنین شرایطی، چون آب چگالی بیشتری دارد، در ته ظرف قرار گرفته و روغن روی سطح آن را می پوشاند.

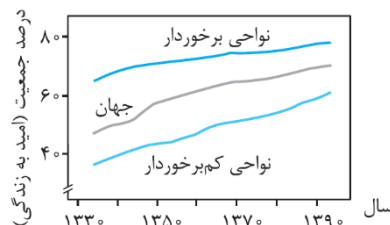
تصویر زیر، مخلوطی از آب و روغن را نشان می‌دهد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ مولکول‌های عسل در ساختار خود شمار زیادی گروه هیدروکسیل (الکلی) داشته و توانایی برقرای پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارند و به همین خاطر، عسل در آب حل می‌شود.

۲ در سال‌های اخیر، شاخص امید به زندگی در مناطق برخوردار به مقدار کمتری نسبت به مناطق کم‌برخوردار افزایش پیدا کرده است. نمودار زیر، روند تغییرات شاخص امید به زندگی در مناطق مختلف را نشان می‌دهد:

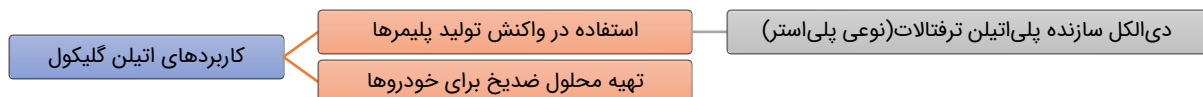


با توجه به نمودار بالا، در طول ۶۰ سال اخیر، میزان امید به زندگی هم برای مناطق برخوردار جهان و هم برای مناطق کم‌برخوردار جهان افزایش پیدا کرده است. هر چند که میزان این افزایش برای مناطق کم‌برخوردار، بیشتر از مناطق برخوردار بوده است، اما هنوز هم میزان امید به زندگی در نواحی برخوردار جهان در حدود ۲۰ سال بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است.

۳ جدول زیر، اطلاعات مربوط به روغن زیتون و اتیلن گلیکول را نشان می‌دهد:

نام ماده	فرمول شیمیایی	ساختار	نوع ماده	حلال مناسب
اتیلن گلیکول	$\text{CH}_2\text{OHCH}_2\text{OH}$	$\text{HO}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{OH}$	مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)
روغن زیتون	$\text{C}_{57}\text{H}_{104}\text{O}_6$	$ \begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{CH}_2-\text{O}-\text{C}-\text{R} \\ \\ \text{CH}-\text{O}-\text{C}-\text{R}' \\ \\ \text{CH}_2-\text{O}-\text{C}-\text{R}'' \\ \parallel \\ \text{O} \end{array} $	مولکول ناقطبی	حلال ناقطبی (هگزان)

با توجه به جدول نشان داده شده، در هر مولکول روغن زیتون، ۶ اتم اکسیژن و در هر مولکول اتیلن گلیکول نیز ۲ اتم اکسیژن وجود دارد. توجه داریم که مولکول‌های روغن زیتون از دو بخش قطبی و ناقطبی تشکیل شده‌اند؛ اما چون بخش ناقطبی این مولکول‌ها بر بخش قطبی آن‌ها غلبه می‌کند، روغن زیتون در مجموع یک ترکیب ناقطبی محسوب شده و در حلال‌های ناقطبی حل می‌شود. اتیلن گلیکول نیز یک الکل دواملی محلول در آب است که از آن در موارد زیر استفاده می‌شود:



توجه داریم که اتیلن گلیکول به هر نسبتی در آب حل شده و تهیه محلول سیرشده از آن غیرممکن است.

۸۱- چه تعداد از عبارت‌های داده شده درست است؟

- آ: چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیر بوده و نیروی بین مولکولی غالب در آن‌ها، وان‌دروالسی است.
 ب: در یک پاک‌کننده غیرصابونی، برخلاف مولکول SO_2 ، جفت الکترون‌های ناپیوندی فقط روی اتم‌های O قرار گرفته‌اند.
 پ: در واکنش مخلوط جامدی از پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، نوعی فراورده گازی ناقطبی تولید می‌شود.
 ت: به منظور جلوگیری از تشکیل رسوب در هنگام استفاده از آب سخت، به صابون نمک‌های فسفات اضافه می‌کنند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

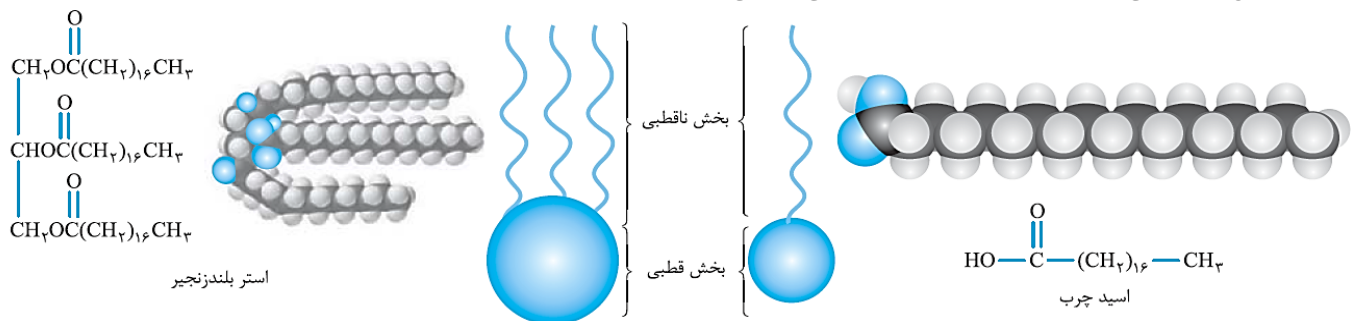
پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی

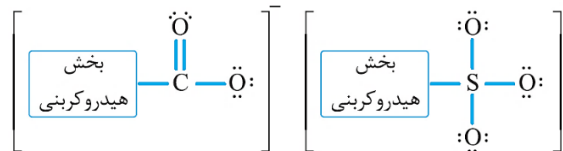
همه عبارت‌های داده شده درست هستند.

بررسی موارد

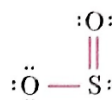
آ: چربی‌ها مخلوطی از اسیدهای چرب و استرهای بلند زنجیر هستند که بخش ناقطبی آن‌ها بر بخش قطبی غلبه دارد و در نتیجه نیروی بین مولکولی غالب در آن‌ها از نوع وان‌دروالسی است. ساختار ذرات موجود در چربی‌ها را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



ب: تصویر زیر، ساختار بخش باردار از قسمت آنیونی پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی را نشان می‌دهد:



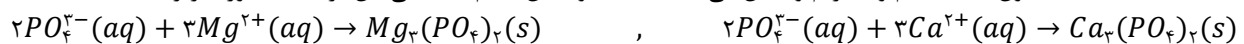
همانطور که مشخص است، اتم‌های اکسیژن موجود در این پاک‌کننده‌ها، تنها اتم‌هایی از آن‌ها هستند که جفت الکترون ناپیوندی دارند. ساختار مولکولی گوگرد دی‌اکسید نیز به صورت زیر است:



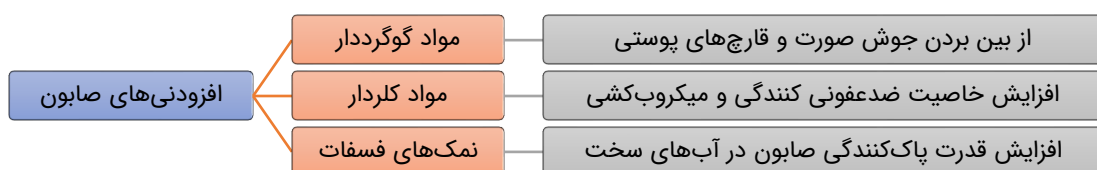
در مولکول گوگرد دی‌اکسید، اتم گوگرد دارای ۱ جفت الکترون ناپیوندی در لایه ظرفیت خود است.

پ: مخلوط جامدی از پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید، یک پاک‌کننده خورنده به شمار می‌رود که از آن برای باز کردن راه لوله‌های مسدود شده توسط چربی‌ها استفاده می‌شود. این نوع پاک‌کننده در واکنش با آب، گاز هیدروژن آزاد می‌کند. همانطور که می‌دانیم، گاز هیدروژن از مولکول‌های ناقطبی ساخته شده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نمی‌کند.

ت: نمک‌های فسفات، برای جلوگیری از تشکیل رسوب صابون با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت، به صابون اضافه می‌شوند. توجه داریم که در آب سخت، نمک‌های فسفات با یون‌های کلسیم و منیزیم واکنش می‌دهند. معادله واکنش انجام شده طی این فرایند به صورت زیر است:



تاثیر افزودنی‌های مختلف صابون‌ها به شرح زیر است:



۸۲- اگر از انحلال ۰/۵۵۲ گرم باز BOH با $K_b = 4 \times 10^{-2}$ در ۲۰۰ میلی لیتر آب، محلولی با $pH = 12/3$ به دست آید، جرم مولی این باز برابر با چند گرم است؟ (از تغییر حجم محلول طی انحلال باز چشم پوشی شود.)

۱۷۲ (۴)

۶۹ (۳)

۹۲ (۲)

۱۳۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مساله - ۱۲۰۱)



با توجه به اطلاعات داده شده، ابتدا غلظت مولی یون هیدروکسید را حساب می‌کنیم:

$$pH = -\log[H^+] \rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-12/3}$$

$$[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14} \rightarrow 10^{-12/3} \times [OH^-] = 10^{-14} \rightarrow [OH^-] = 10^{-14/3} = 2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

سپس با استفاده از K_b ، غلظت مولی اولیه باز حل شده در محلول مورد نظر را حساب می‌کنیم:

به دلیل اینکه مقدار K_b باز مورد نظر نسبتاً بزرگ است، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$K_b = \frac{[OH^-] \times [B^+]}{[BOH]_{\text{تصادلی}}} = \frac{[OH^-] \times [B^+]}{([BOH]_{\text{اولیه}} - [OH^-])} \rightarrow 4 \times 10^{-2} = \frac{2 \times 10^{-2} \times 2 \times 10^{-2}}{[BOH]_{\text{اولیه}} - 2 \times 10^{-2}} \rightarrow [BOH]_{\text{اولیه}} = 3 \times 10^{-2}$$

بنابراین غلظت باز مورد نظر برابر با ۰/۰۳ مول بر لیتر بوده است و در ۲۰۰ میلی لیتر از محلول آن، مقدار ۰/۰۰۶ مول باز وجود دارد. توجه داریم که جرم این مقدار باز، برابر با ۰/۵۵۲ گرم شده است. بر این اساس، جرم مولی باز (M) را محاسبه می‌کنیم:

$$n(\text{شمار مول باز}) = \frac{m(\text{جرم باز})}{M(\text{جرم مولی باز})} \rightarrow 0.006 = \frac{0.552}{M} \rightarrow M = 92 \text{ g.mol}^{-1}$$

گروه آموزشی ماز

۸۳- در محلولی از هیدروکلریک اسید با چگالی $1/25 \text{ g.mL}^{-1}$ ، غلظت یون کلرید برابر 568 ppm است. برای بدست آوردن ۴۰ لیتر محلول اسیدی با $pH = 3$ به چند لیتر از محلول مورد نظر نیاز داشته و هر لیتر از محلول نهایی، با چند میلی لیتر محلول سود با غلظت ۰/۲ مولار به طور کامل واکنش می‌دهد؟ ($Cl = 35/5 \text{ g.mol}^{-1}$)

۵۰ - ۲ (۴)

۵۰ - ۴ (۳)

۵۰ - ۲ (۲)

۵۰ - ۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مساله - ۱۲۰۱)



ابتدا غلظت ppm یون کلرید را به درصد جرمی تبدیل کرده و در مرحله بعد، غلظت مولی این یون را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{غلظت } ppm \Rightarrow \text{درصد جرمی یون کلرید} = \frac{568}{10000} = 5/68 \times 10^{-2}$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی}}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times (5/68 \times 10^{-2}) \times 1/25}{35/5} = 0.02 \text{ mol.L}^{-1}$$

البته، می‌توانستیم محاسبات بالا را به صورت یکپارچه و به شکل زیر نیز انجام بدهیم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{غلظت } ppm}{1000 \times \text{جرم مولی}} = \frac{568 \times 1/25}{1000 \times 35/5} = 0.02 \text{ mol.L}^{-1}$$

در محلول هیدروکلریک اسید، غلظت مولی یون کلرید با غلظت مولی یون هیدروژن برابر است، پس می‌توان گفت غلظت اسید موجود در محلول اولیه برابر با ۰/۰۲ مول بر لیتر است. در قدم بعد، غلظت هیدروکلریک اسید را در محلولی از این ماده با $pH = 3$ محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-3} = 0.001 \text{ mol.L}^{-1} \xrightarrow{\alpha=1} [HCl] = 0.001 \text{ mol.L}^{-1}$$

حالا که غلظت هیدروکلریک اسید را در محلول نهایی (محلولی با $pH = 3$) داریم، حجمی از محلول اولیه (محلول ۰/۰۲ مولار هیدروکلریک اسید) که برای تولید محلول نهایی لازم است را محاسبه می‌کنیم:

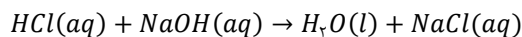
$$? L \text{ محلول اولیه} = 40 L \text{ محلول نهایی} \times \frac{0.001 \text{ mol HCl}}{1 L \text{ محلول نهایی}} \times \frac{1 L \text{ محلول اولیه}}{0.02 \text{ mol HCl}} = 2 L$$

هرگاه حجم V_a از محلول اسیدی با غلظت مولی M_a و ظرفیت n_a با حجم V_b از محلول بازی با غلظت مولی M_b و ظرفیت n_b به طور کامل واکنش بدهد، به طوری که هر دو محلول کاملاً مصرف شوند، رابطه زیر میان این دو محلول برقرار می‌شود:

$$M_a \times V_a \times n_a = M_b \times V_b \times n_b$$

به کمک این تساوی، می‌توانیم بدون استفاده از روابط استوکیومتری، مقدار اسید یا باز مورد نیاز برای خنثی کردن یک محلول را محاسبه کنیم.

در محلول نهایی، غلظت هیدروکلریک اسید برابر با ۰/۰۰۱ مول بر لیتر است. این محلول بر اساس معادله زیر با سود واکنش می دهد:



با توجه به معادله این واکنش، داریم:

$$M_a \times V_a \times n_a = M_b \times V_b \times n_b \Rightarrow 0.001 \times 1 \times 1 = 0.002 \times V_b \times 1 \Rightarrow V_b = 0.5 L = 500 mL$$

گروه آموزشی ماز

۸۴- محلول هایی از فورمیک اسید (محلول A) و نیترو اسید (محلول B) با pH برابر در اختیار داریم. غلظت مولی ذرات اسید یونیده نشده در محلول کمتر بوده و در دمای ثابت، در صورت حل کردن مقدار اندکی گاز هیدروژن کلرید در هر یک از این محلول ها، ثابت یونش اسید موجود در آن ها
 ۱) A - افزایش پیدا می کند
 ۲) A - ثابت باقی می ماند
 ۳) B - افزایش پیدا می کند
 ۴) B - ثابت باقی می ماند

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مفهومی و حفظی - ۱۲۰۱)



جدول زیر، قدرت اسیدی ترکیب های مختلف را نشان می دهد:

اسید	ثابت یونش	فراورده های حاصل از یونش	اسید	ثابت یونش	فراورده های حاصل از یونش
هیدرویدیک اسید (HI)	بسیار بزرگ	$H^+(aq) + I^-(aq)$	هیدروفلوئوریک اسید (HF)	6×10^{-4}	$H^+(aq) + F^-(aq)$
هیدروبرمیک اسید (HBr)	بسیار بزرگ	$H^+(aq) + Br^-(aq)$	نیترو اسید (HNO_3)	4×10^{-4}	$H^+(aq) + NO_3^-(aq)$
هیدروکلریک اسید (HCl)	بسیار بزرگ	$H^+(aq) + Cl^-(aq)$	فورمیک اسید (HCOOH)	1.8×10^{-4}	$H^+(aq) + HCOO^-(aq)$
سولفوریک اسید (H_2SO_4)	بسیار بزرگ	$H^+(aq) + HSO_4^-(aq)$	استیک اسید (CH_3COOH)	1.8×10^{-5}	$H^+(aq) + CH_3COO^-(aq)$
نیتریک اسید (HNO_3)	بزرگ	$H^+(aq) + NO_3^-(aq)$	هیدروسیانیک اسید (HCN)	4.9×10^{-10}	$H^+(aq) + CN^-(aq)$

↑
قدرت اسیدی

با توجه به داده های موجود در جدول بالا، نیترواسید در مقایسه با فورمیک اسید قدرت اسیدی بالاتری دارد. مقدار pH این دو محلول با هم برابر است، پس می توان گفت اسیدی که قدرت اسیدی بالاتری دارد، غلظت کمتری خواهد داشت. در چنین شرایطی، غلظت نیترواسید کمتر از غلظت فورمیک اسید بوده و به همین خاطر، می توان گفت غلظت مولی ذرات اسید یونیده نشده در محلول نیترواسید کمتر از محلول فورمیک اسید است. از طرفی، می دانیم که انحلال گاز هیدروژن کلرید در محلول های اسیدی، باعث افزایش غلظت یون هیدروژن در محلول شده و با جابه جایی تعادل به سمت برگشت، مقدار α اسید را کاهش می دهد، اما تاثیری بر ثابت یونش اسیدی نداشته و مقدار آن را تغییر نمی دهد. در واقع ثابت یونش اسیدی فقط و فقط تابع تغییر دمای محلول بوده و با تغییر هیچ عامل دیگری تغییر نمی کند.

گروه آموزشی ماز

۸۵- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- ۱) در ساختار ذره ای پاک کننده های غیرصابونی، حداقل دو اتم کربن وجود دارد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند.
- ۲) برای تهیه صابون مراغه، روغن های گیاهی مثل روغن زیتون را به همراه $NaOH$ و آب، در دیگ هایی می جوشانند.
- ۳) صابون ها خاصیت بازی داشته و در برخورد با یک قطعه کاغذ pH ، رنگ این کاغذ را از زرد به آبی تغییر می دهند.
- ۴) شیر منیزی، نوعی دارو است که به شکل یک سوسپانسیون عرضه شده و قبل از مصرف باید تکان داده شود.

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - حفظی و مفهومی - ۱۲۰۱)



صابون طبیعی، معروف به صابون مراغه، با بیش از ۱۵۰ سال قدمت، معروف ترین صابون سنتی ایران است. برای تهیه این صابون، پیه گوسفند و سود سوزآور را در دیگ های بزرگ با آب برای چندین ساعت می جوشانند و پس از قالب گیری، آن ها را در آفتاب خشک می کنند. این صابون افزودنی شیمیایی نداشته و به دلیل خاصیت بازی مناسب، برای شستن موهای چرب مناسب است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ در پاک‌کننده‌های غیرصابونی، دو اتم کربن حلقه بنزنی که به گروه آلکیل و گروه SO_3^- متصل شده‌اند؛ به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند. توجه داریم که در گروه R نیز با توجه به سیر شده بودن و یا نبودن این قسمت، می‌تواند اتم کربنی وجود داشته باشد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیست. ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی به صورت زیر است:



۳ پاک‌کننده‌های صابونی، نمک آمونیوم، پتاسیم و یا سدیم اسیدهای چرب هستند. این مواد خاصیت بازی ($pH > 7$) داشته و در برخورد با کاغذ pH، رنگ این کاغذ را از زرد به آبی تغییر می‌دهند.

۴ برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده افرادی که به بیماری‌های معده‌ای دچار هستند، از داروهایی به نام ضداسید استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن اسید معده و افزایش pH محتویات معده می‌شوند. مواد مؤثر موجود در ضداسیدهای مختلف، شامل منیزیم هیدروکسید، آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین) می‌شوند. برای مثال، شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضداسیدهای مورد استفاده به شمار می‌رود که ماده مؤثر موجود در آن، منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_2$) است. از آن‌جا که ماده موجود در این دارو انحلال پذیری بسیار کمی در آب دارد، شیر منیزی را می‌توان یک مخلوط ناهمگن و متعلق به دسته سوسپانسیون‌ها به حساب آورد. جدول زیر، ویژگی‌های سوسپانسیون‌ها، کلوئیدها و محلول‌های همگن را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذرات ریز ماده و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها

گروه آموزشی ماز

۸۶ - کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

آ: رسانایی محلول ۰/۵ مولار کربنیک اسید از رسانایی محلول ۰/۵ مولار سولفوریک اسید بیشتر است.

ب: در محلول یک اسید تک پروتون دار با K_a بسیار بزرگ، غلظت یون هیدرونیوم با غلظت اولیه اسید برابر است.

پ: پس از انحلال مقداری هیدروژن فلوئورید در آب، سرعت تولید یون فلوئورید در محلول به تدریج افزایش می‌یابد.

ت: نخستین کسی که اسیدها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد، بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی کار می‌کرد.

(۱) آ و پ (۲) آ و ت (۳) ب و پ (۴) ب و ت

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی

عبارتهای (ب) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: کربنیک اسید، طی واکنش گاز کربن دی‌اکسید با آب تولید می‌شود. کربنیک اسید (H_2CO_3)، برخلاف سولفوریک اسید یک اسید ضعیف به شمار می‌رود، بنابراین مقایسه رسانایی محلول‌ها با غلظت مولی برابر از این دو اسید به صورت زیر است:

کربنیک اسید > سولفوریک اسید : رسانایی

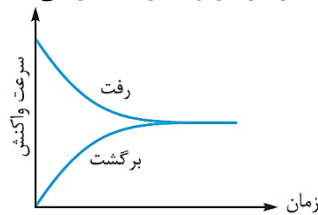
توجه داریم که هر دوی این اسیدها، دو ظرفیتی (دوپروتون‌دار) هستند.

خاصیت اسیدی باران:

در مناطق صنعتی، مقداری از گازهای گوگرد تری‌اکسید و اکسیدهای نیتروژن در آب باران حل شده و سولفوریک اسید و نیتریک اسید در این آب‌ها تولید می‌شوند. به خاطر وجود این مواد، آب باران در مناطق صنعتی خاصیت اسیدی پیدا کرده و pH آن کمتر از ۷ است. در نقطه مقابل، در آب باران‌های معمولی نیز مقداری گاز کربن دی‌اکسید حل شده و کربنیک اسید را به وجود می‌آورد. به خاطر وجود این ماده، آب باران‌های معمولی نیز خاصیت اسیدی پیدا می‌کند اما میزان اسیدی بودن آن از میزان اسیدی بودن باران‌های اسیدی کمتر خواهد بود.

ب: اگر ثابت یونش یک اسید بسیار بزرگ باشد، این اسید در محلول آبی خود به طور کامل یونیده شده و در نتیجه غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول نهایی با غلظت اولیه اسید برابر خواهد بود. در رابطه با چنین محلولی، می توان رابطه $[H^+] = M$ را نوشت. توجه داریم که در این حالت، درجه یونش اسید برابر با یک بوده و در این محلول رابطه $\alpha = \frac{[H^+]}{M} = 1$ برقرار خواهد بود.

پ: واکنش های شیمیایی را به طور کلی به دو دسته برگشت ناپذیر و برگشت پذیر تقسیم بندی می کنند. در واکنش های برگشت ناپذیر، فقط واکنش دهنده ها می توانند به فرآورده ها تبدیل شوند در حالی که در این واکنش ها امکان تبدیل فرآورده ها به واکنش دهنده ها وجود ندارد. به عبارتی، این واکنش ها فقط در جهت رفت انجام می شوند. در نقطه مقابل، واکنش های برگشت پذیر وجود دارند که در آن ها امکان انجام شدن واکنش های رفت و برگشت به صورت هم زمان وجود دارد. فرایند یونش اسیدهای ضعیف از جمله هیدروفلوئوریک اسید در آب، از جمله واکنش های برگشت پذیر است. اگر در واکنش های برگشت پذیر، واکنش های رفت و برگشت به صورت هم زمان و با سرعت های برابر انجام شوند، مقدار فرآورده ها و واکنش دهنده ها ثابت باقی می ماند و در سامانه مورد نظر تعادل برقرار می شود. در لحظه برقراری تعادل، سرعت تولید هر ماده با سرعت مصرف آن برابر است و به همین خاطر، مقدار هر ماده در سامانه ثابت می ماند و چنین به نظر می رسد که واکنش مورد نظر متوقف شده است. در این سامانه ها، قبل از برقراری تعادل، سرعت واکنش رفت در مقایسه با واکنش برگشت بیشتر است. نمودار زیر، روند تغییر سرعت واکنش های رفت و برگشت را در این واکنش ها نشان می دهد:



با توجه به نمودار بالا، پس از انحلال مقداری گاز هیدروژن فلوئورید در آب، سرعت واکنش رفت (واکنشی که منجر به تولید یون فلوئورید در محلول می شود) به تدریج کاهش می یابد.

ت: آرنیوس نخستین کسی بود که اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. او بر روی رسانایی الکتریکی محلول های آبی کار می کرد. یافته های تجربی آرنیوس نشان داد که محلول اسیدها و بازها رسانای برق هستند، اما میزان رسانایی آن ها با یکدیگر یکسان نبوده و هر محلول، رسانایی الکتریکی متفاوتی با سایر محلول ها دارد. البته، توجه داریم که شواهد تاریخی نشان می دهند پیش از آنکه ساختار اسیدها و بازها شناخته شود، شیمی دان ها افزون بر ویژگی های اسیدها و بازها، با برخی از واکنش های آن ها نیز آشنا بودند.

گروه آموزشی ماز

۸۷- محلولی از دو اسید ضعیف HX و HY به حجم ۲/۵ لیتر و با $pH = 3$ در اختیار داریم. اگر درصد یونش اسیدهای HX و HY در این محلول به ترتیب برابر با ۰/۲ و ۰/۴ درصد باشد و برای خنثی شدن کامل این محلول، ۶۸/۴ گرم باریم هیدروکسید لازم باشد، درصد جرمی HX در محلول اولیه کدام

است؟ (جرم مولی HX را 90 g.mol^{-1} و چگالی محلول اولیه را 1 g.mL^{-1} در نظر بگیرید. $H = 1$ و $O = 16$ و $Ba = 137$)

۲/۸ (۴)

۲/۵۲ (۳)

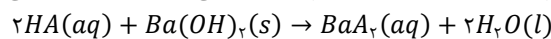
۱/۴ (۲)

۱/۲۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

یکی از رفتارهای جالب و پر کاربرد اسیدها و بازها، واکنش هایی است که بین این دو دسته از مواد انجام می شود. به این گروه از واکنش ها، به اصطلاح واکنش های خنثی شدن یا همان تیتراسیون گفته می شود. طی واکنش های خنثی شدن، یون های هیدروکسید حاصل از بازها با یون های هیدرونیوم حاصل از اسیدها بر اساس معادله $OH^-(aq) + H_3O^+(aq) \rightarrow 2H_2O(l)$ وارد واکنش شده و مولکول های آب را تولید می کنند. از آنجا که هر دو اسید HX و HY تک پروتون دار هستند و با واکنش خنثی شدن این مواد با باریم هیدروکسید سروکار داریم، برای راحتی معادله واکنش خنثی شدن را به صورت زیر می نویسیم:



بر این اساس، تعداد مول HA برابر با مجموع تعداد مول HX و HY است. داریم:

$$? \text{ mol } HA = 68/4 \text{ g } Ba(OH)_2 \times \frac{1 \text{ mol } Ba(OH)_2}{171 \text{ g } Ba(OH)_2} \times \frac{2 \text{ mol } HA}{1 \text{ mol } Ba(OH)_2} = 0/8 \text{ mol}$$

بنابراین غلظت مولی HA (معادل با مجموع غلظت مولی دو اسید در محلول مورد نظر) برابر خواهد بود با:

$$HA \text{ غلظت مولی} = \frac{\text{تعداد مول } HA}{\text{حجم محلول}} = \frac{0/8 \text{ mol}}{2/5 \text{ L}} = 0/32 \text{ mol.L}^{-1}$$

اگر غلظت اولیه HX را x مول بر لیتر در نظر بگیریم، غلظت اولیه HY برابر $0/32 - x$ مول بر لیتر خواهد شد. بر این اساس، غلظت یون H^+ تولید شده توسط هر کدام از این دو اسید را حساب می کنیم:

$$[H^+]_{HX} = n \times \alpha_{HX} \times M_{HX} = 1 \times \frac{0/2}{100} \times x = 2 \times 10^{-3} \times x$$

$$[H^+]_{HY} = n \times \alpha_{HY} \times M_{HY} = 1 \times \frac{0.4}{100} \times (0.32 - x) = 1/28 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-3} \times x$$

اما غلظت یون هیدرونیوم در محلول اولیه برابر با $10^{-3} mol.L^{-1} = 10^{-pH}$ کلی است. بر این اساس، داریم:

$$[H^+]_{کلی} = [H^+]_{HX} + [H^+]_{HY} \rightarrow 10^{-3} = (2 \times 10^{-3} \times x) + (1/28 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-3} \times x) \rightarrow 1 = 2x + 1/28 - 4x \rightarrow$$

$$x = \frac{0.28}{2} = 0.14 mol.L^{-1}$$

در نهایت، درصد جرمی اسید HX (معادل با مولفه a در رابطه زیر) را در محلول اولیه محاسبه می‌کنیم:

$$M = \frac{10 \cdot ad}{\text{جرم مولی}} \rightarrow a = \frac{0.14 \times 90}{10 \times 1} = 1/26 \text{ درصد}$$

گروه آموزشی ماز

۸۸- اگر در محلولی از سدیم هیدروکسید، غلظت یون هیدروکسید 10^6 برابر غلظت یون هیدروژن باشد، مقدار pH این محلول برابر با شده و غلظت یون سدیم در این محلول آبی در مقیاس ppm برابر با می‌شود. (چگالی محلول برابر با $1 g.mL^{-1}$ است. $Na = 23 g.mol^{-1}$)

۲۳ - ۱۱ (۴)

۲/۳ - ۱۱ (۳)

۲۳ - ۱۰ (۲)

۲/۳ - ۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مساله - ۱۲۰۱)



با توجه به نسبت میان غلظت یون هیدروکسید به غلظت یون هیدروژن در این محلول، غلظت هر کدام از این یون‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$[OH^-][H^+] = 10^{-14} \xrightarrow{[OH^-]=10^6 \times [H^+]} 10^6 \times [H^+] \times [H^+] = 10^{-14} \Rightarrow [H^+] = 10^{-10} mol.L^{-1}$$

$$[OH^-][H^+] = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-4} mol.L^{-1}$$

در قدم اول، با توجه به غلظت مولی یون هیدروژن، مقدار pH این محلول را محاسبه می‌کنیم.

$$pH = -\log[H^+] = -\log(10^{-10}) = 10$$

در محلول سدیم هیدروکسید ($NaOH$)، غلظت مولی یون سدیم با غلظت مولی یون هیدروکسید برابر است. بر این اساس، ابتدا جرم یون سدیم موجود در یک لیتر از این محلول را محاسبه می‌کنیم.

$$[OH^-] = 10^{-4} mol.L^{-1} \Rightarrow [Na^+] = 10^{-4} mol.L^{-1}$$

$$? g Na^+ = 1 L \text{ محلول} \times \frac{10^{-4} mol Na^+}{1 L \text{ محلول}} \times \frac{23 g Na^+}{1 mol Na^+} = 2/3 \times 10^{-3} g$$

چگالی محلول برابر با ۱ گرم بر میلی‌لیتر است، پس جرم هر لیتر از آن برابر با ۱۰۰۰ گرم می‌شود. بر این اساس، غلظت ppm یون سدیم را در این محلول بازی محاسبه می‌کنیم.

$$ppm = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{2/3 \times 10^{-3} g Na^+}{1000 g \text{ محلول}} \times 10^6 = 2/3$$

گروه آموزشی ماز

۸۹- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- ۱) اکسیدهای نافلزی در ساختار مولکولی خود دارای تعدادی پیوند اشتراکی بوده و همه آن‌ها از جمله اسیدهای آرنیوس هستند.
- ۲) در شرایط یکسان، اختلاف شمار ذرات اسید یونیده نشده و یون H^+ در محلول فورمیک اسید از استیک اسید بیشتر است.
- ۳) دلیل سوزش معده که درد شدیدی در ناحیه سینه ایجاد می‌کند، برگشت مقداری از محلول HCl معده، به مری است.
- ۴) در دمای اتاق، در یک نمونه آب خالص به حجم یک متر مکعب، تعداد 6.02×10^{16} یون H^+ وجود خواهد داشت.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی و مساله - ۱۲۰۱)



برخی از افراد، از سوزش سینه یا ترش شدن دهان و گلو رنج می‌برند. معده برای گوارش غذا به اسید نیاز دارد. خوردن غذا سبب می‌شود که غده‌های موجود در دیواره معده، هیدروکلریک اسید ترشح کنند. این اسید افزون بر فعال کردن آنزیم‌ها برای تجزیه مواد غذایی، جانداران ذره‌بینی موجود در غذا را نیز از بین می‌برد. دلیل سوزش معده که درد شدیدی در ناحیه سینه ایجاد می‌کند، برگشت مقداری از محتویات اسیدی معده به لوله مری است.



اغلب اکسیدهای نافلزی بر اثر حل شدن در آب یون هیدرونیوم آزاد می‌کنند و اسید آرنیوس به شمار می‌روند، اما برخی از این اکسیدها مانند گاز CO و نیتروژن مونوکسید، اکسید خنثی هستند و در هنگام حل شدن در آب، با آن واکنش نمی‌دهند.

۲ هر چه قدرت اسیدی یک اسید ضعیف بیشتر باشد، آن اسید به مقدار بیشتری یونش یافته و اختلاف شمار مولکول‌های اسید یونیده نشده و شمار یون‌های هیدرونیوم در محلول آن اسید کمتر است. بنابراین اختلاف شمار مولکول‌های اسید یونیده نشده و شمار یون‌های هیدرونیوم در محلول فورمیک اسید(اسید قوی‌تر) کمتر از محلول استیک اسید(اسید ضعیف‌تر) خواهد بود.

۴ در دمای اتاق، غلظت یون هیدروژن در یک نمونه آب خالص برابر با 10^{-7} مول بر لیتر خواهد بود. بر این اساس، داریم:

$$H^+ \text{ تعداد} = \frac{6/0.2 \times 10^{23}}{1 \text{ mol } H^+} \times \frac{10^{-7} \text{ mol } H^+}{1 \text{ L آب}} \times \frac{1000 \text{ L آب}}{1 \text{ m}^3 \text{ آب}} = 6/0.2 \times 10^{19} \text{ تعداد}$$

با توجه به محاسبات بالا، در دمای اتاق (دمای 25°C) در یک نمونه آب خالص به حجم یک متر مکعب (معادل با ۱۰۰۰ لیتر)، تعداد $6/0.2 \times 10^{19}$ یون هیدروژن وجود خواهد داشت.

گروه آموزشی ماز

۹۰ - چه تعداد از عبارات‌های داده شده درست است؟

- آ: در یک نمونه از آب گازدار، غلظت مولی یون هیدروکسید در مقایسه با یون هیدرونیوم کمتر است.
 ب: در شرایط یکسان، سرعت واکنش منیزیم با محلول هیدروسیانیک اسید بیشتر از استیک اسید است.
 پ: محتویات روده انسان، همانند خون موجود در رگ‌های انسان، خاصیت بازی داشته و دارای $pH > 7$ است.
 ت: با افزودن ۱۰۰ mL آب خالص به ۱۰ mL محلول $HCl(aq)$ با $pH = 1$ ، مقدار pH این محلول به ۲ می‌رسد.
 ث: برای باز کردن راه لوله‌های مسدود شده توسط اسیدهای چرب جامد، می‌توان از یک نمونه محلول سود استفاده کرد.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

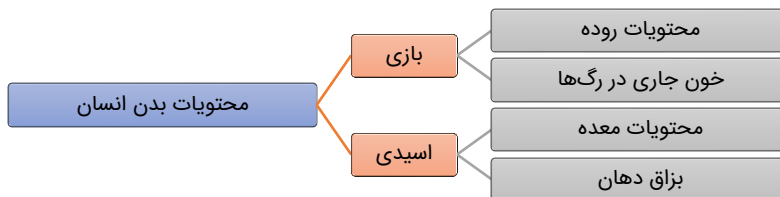
عبارات‌های (آ)، (پ) و (ث) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: گاز آب (یا همان آب گازدار)، یک محلول اسیدی به شمار می‌رود و همانطور که می‌دانیم، در محلول‌های اسیدی غلظت یون هیدروژن بیشتر از غلظت یون هیدروکسید است. توجه داریم که pH آب گازدار برابر با ۴ است.

ب: سرعت واکنش فلزها با محلول‌های اسیدی مختلف، وابسته به غلظت یون هیدروژن موجود در محلول اسیدی و میزان واکنش‌پذیری فلز مورد نظر است. چون هیدروسیانیک اسید در مقایسه با استیک اسید ثابت یونش کوچک‌تری دارد؛ پس می‌توان گفت در شرایط یکسان غلظت یون هیدروژن در محلول این ماده کمتر از غلظت یون هیدروژن در محلول استیک اسید است و به همین خاطر، فلز منیزیم با محلول استیک اسید در مقایسه با محلول هیدروسیانیک اسید با شدت بیشتری واکنش می‌دهد.

پ: نمودار زیر، وضعیت اسیدی یا بازی بودن محتویات بدن انسان را نشان می‌دهد:



البته، توجه داریم که pH بزاق موجود در دهان انسان در باره بین ۷/۱ تا ۵/۲ متغیر است؛ پس می‌توان گفت بزاق موجود در دهان گاهی خاصیت بازی و گاهی هم خاصیت اسیدی دارد.

ت: با افزودن ۱۰۰ میلی‌لیتر آب خالص به ۱۰ میلی‌لیتر از یک محلول اسیدی، حجم محلول ۱۱ برابر شده و به ۱۱۰ میلی‌لیتر می‌رسد. طی این فرایند، غلظت اسید حل شده در محلول مورد نظر $\frac{1}{11}$ برابر شده و در نتیجه، pH محلول مورد نظر به اندازه‌ی ۱/۰۵ واحد افزایش پیدا می‌کند. این درحالی است که اگر ۹۰ میلی‌لیتر آب خالص به ۱۰ میلی‌لیتر از این محلول اسیدی می‌افزودیم، غلظت اسید حل شده در محلول مورد نظر $\frac{1}{10}$ برابر شده و طی این فرایند، pH محلول مورد نظر نیز به اندازه ۱ واحد افزایش پیدا می‌کرد.

ث: چون اسیدهای چرب خاصیت اسیدی دارند، برای باز کردن راه لوله‌های مسدود شده توسط اسیدهای چرب جامد، از محلول سود(محلول سدیم هیدروکسید با خاصیت بازی) می‌توان استفاده کرد. در نقطه مقابل، برای زدودن آلودگی‌هایی که خاصیت بازی دارند، باید از محلول‌های اسیدی مثل هیدروکلریک اسید استفاده کنیم.

پاک‌کننده‌های خورنده:

پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی، با مولکول‌ها و ذرات سازنده آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی نشده و فقط براساس برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، سبب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. گروه دیگری از پاک‌کننده‌ها نیز وجود دارند که با ذرات سازنده آلودگی‌ها وارد واکنش شیمیایی شده و در کنار برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای، از این طریق نیز سبب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. به این دسته از انواع شوینده‌ها، به اصطلاح پاک‌کننده‌های خورنده گفته می‌شود. در واقع، پاک‌کننده‌های خورنده، گروهی از پاک‌کننده‌ها هستند که بر مبنای واکنش میان اسیدها و بازها عمل می‌کنند. در هنگام استفاده از این مواد، شوینده موردنظر با آلودگی‌ها وارد واکنش شده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کند. شوینده‌های خورنده را بر مبنای کاربرد آن‌ها، می‌توان به دو دسته اسیدی و بازی تقسیم‌بندی کرد. سفیدکننده‌ها، جوهر نمک و محلول سود، انواعی از پاک‌کننده‌های خورنده هستند.

گروه آموزشی ماز

۹۱- مقدار $1/8$ لیتر گاز گوگرد تری‌اکسید با چگالی $3/2 \text{ g.L}^{-1}$ را در یک لیتر آب حل کرده‌ایم. اگر نیمی از محلول حاصل در واکنش با $0/024$ مول هیدروکسید فلز M به طور کامل خنثی شود، pH محلول اسیدی اولیه چقدر بوده و نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در نمک تولید شده کدام است؟

$$(S = 32 \text{ و } O = 16 : \text{g.mol}^{-1})$$

$$2 - 1/8 \text{ (۴)}$$

$$0/66 - 1/8 \text{ (۳)}$$

$$0/66 - 0/8 \text{ (۲)}$$

$$2 - 0/8 \text{ (۱)}$$

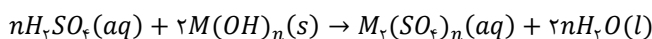
پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مساله ۱۲۰۱)



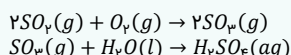
ابتدا معادله واکنش‌های انجام شده را نوشته و آن‌ها را موازنه می‌کنیم. گاز گوگرد تری‌اکسید بر اساس معادله زیر با آب واکنش می‌دهد:

$$SO_3(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2SO_4(aq)$$

سولفوریک اسید نیز بر اساس معادله زیر خنثی خواهد شد:



گوگرد تری‌اکسید، یک اکسید نافلز با خاصیت اسیدی است. این اکسید از واکنش گوگرد دی‌اکسید (گازی که جزء آلاینده‌های هوا به شمار می‌رود) با اکسیژن تولید شده و در ایجاد باران اسیدی نقش دارد. واکنش‌های انجام شده به صورت زیر هستند:



در مرحله بعدی غلظت سولفوریک اسید اولیه را بدست می‌آوریم تا به کمک آن pH محلول را حساب کنیم:

$$? \text{ mol } H_2SO_4 = 1/8 \text{ L } SO_3 \times \frac{3/2 \text{ g } SO_3}{1 \text{ L } SO_3} \times \frac{1 \text{ mol } SO_3}{80 \text{ g } SO_3} \times \frac{1 \text{ mol } H_2SO_4}{1 \text{ mol } SO_3} = 0/072 \text{ mol}$$

در نتیجه غلظت اولیه H_2SO_4 برابر خواهد بود با:

$$[H_2SO_4] = \frac{0/072 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 0/072 \text{ mol.L}^{-1}$$

بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = M \times \alpha \times n = 0/072 \times 1 \times 2 = 0/144 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log(12 \times 10^{-3}) = 3 - 2\log(12) = 3 - 2\log(2 \times 3) = 3 - 2[\log 2 + \log 3] =$$

$$3 - 2[0/6 + 0/5] = 0/8$$

در کل محلول اسیدی، $0/072$ مول اسید وجود داشته است، پس در نیمی از این محلول $0/036$ مول اسید وجود دارد. بر این اساس، تعداد مول هیدروکسید فلز را با استفاده از استوکیومتری واکنش دوم بدست می‌آوریم. بر این اساس، داریم:

$$? \text{ mol } M(OH)_n = 0/036 \text{ mol } H_2SO_4 \times \frac{2 \text{ mol } M(OH)_n}{n \text{ mol } H_2SO_4} = \frac{0/072}{n} \text{ mol } M(OH)_n$$

طبق صورت سوال

$$\Rightarrow n = \frac{0/036 \times 2}{0/072} = 3 \rightarrow \text{فرمول نمک حاصل : } M_2(SO_4)_3$$

بنابراین نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در نمک حاصل از این واکنش برابر $2/3$ است.

گروه آموزشی ماز

۹۲- در بدن یک انسان، به طور متوسط در هر دقیقه $2/5$ میلی‌لیتر شیرۀ معده با غلظت $0/02 \text{ mol.L}^{-1}$ تولید می‌شود. اگر 75 درصد جرمی داروی شیر منیزی ماده مؤثر باشد، برای خنثی کردن 25% از اسید معده، روزانه به چند گرم از این دارو نیاز است؟ ($Mg = 24$ و $O = 16$ و $H = 1 : \text{g.mol}^{-1}$)

$$1/044 \text{ (۴)}$$

$$0/696 \text{ (۳)}$$

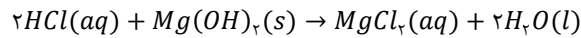
$$0/522 \text{ (۲)}$$

$$0/348 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مساله - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

واکنش شیر منیزی یا منیزیم هیدروکسید با اسید معده (HCl) به صورت زیر است:



طبق صورت سؤال، در هر دقیقه $2/5 \text{ mL}$ شیر معده تولید می‌گردد. هر ساعت معادل با 60 دقیقه و هر شبانه‌روز نیز معادل با 24 ساعت است. بنابراین در طول یک شبانه‌روز، مقدار $3/6 \text{ L}$ شیر معده تولید خواهد شد. در قدم اول، جرم منیزیم هیدروکسید خالص مورد نیاز برای خنثی کردن 25% از اسید معده را حساب می‌کنیم:

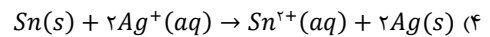
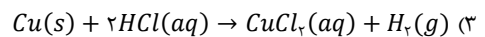
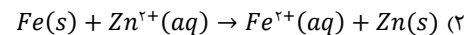
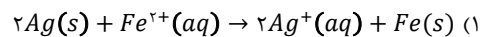
$$? \text{ g } Mg(OH)_2 = 3/6 \text{ L } HCl \times \frac{25}{100} \times \frac{0/2 \text{ mol } HCl}{1 \text{ L } HCl} \times \frac{1 \text{ mol } Mg(OH)_2}{2 \text{ mol } HCl} \times \frac{58 \text{ g } Mg(OH)_2}{1 \text{ mol } Mg(OH)_2} = 0/522 \text{ g}$$

از آنجا که درصد جرمی ماده مؤثر (یعنی منیزیم هیدروکسید) در داروی شیر منیزی 75% است، جرم داروی مورد نیاز برابر خواهد بود با:

$$\text{درصد جرمی منیزیم هیدروکسید} = \frac{\text{جرم منیزیم هیدروکسید}}{\text{جرم دارو}} \times 100 \Rightarrow \text{جرم دارو} = \frac{0/522}{75} \times 100 = 0/696 \text{ g}$$

گروه آموزشی ماز

۹۳- با توجه به موقعیت فلزها در سری الکتروشیمیایی، کدام واکنش انجام پذیر است؟



پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

در هر گزینه گونه کاهنده‌تر را مشخص می‌کنیم. اگر واکنش به صورت زیر بود، آن واکنش انجام پذیر است:

فلز دیگر + یون فلز کاهنده‌تر \rightarrow یون فلز دیگر + فلز کاهنده‌تر

سری الکتروشیمیایی:

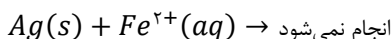
یکی از کاربردهای سری الکتروشیمیایی، بررسی انجام پذیر بودن یا نبودن واکنش‌های مختلف است. برای مثال، با وارد کردن یک تیغه از جنس آلومینیم به محلولی از مس (II) سولفات، اتم‌های آلومینیم شروع به اکسید شدن کرده و طی یک واکنش گرماده با محلول مورد نظر واکنش می‌دهند. با انجام شدن این واکنش، اتم‌های آلومینیم به شکل یون‌های Al^{3+} وارد محلول شده و دمای محلول نیز افزایش پیدا می‌کند. این در حالی است که با وارد کردن یک تیغه از جنس طلا به محلولی از مس (II) سولفات، هیچ واکنشی انجام نشده و دمای محلول نیز تغییری نمی‌کند. علاوه بر آزمایش تجربی، به کمک E° گونه‌های شرکت کننده در واکنش نیز می‌توان انجام پذیر بودن یا نبودن یک واکنش را پیش بینی کرد. برای این منظور، کافی است گونه‌های اکسند (گونه‌ای که کاهش می‌یابد) و کاهنده (گونه‌ای که اکسایش می‌یابد) را در واکنش مورد نظر مشخص کنیم و پس از آن، مقدار E° واکنش را براساس رابطه زیر محاسبه کنیم:

$$E^\circ (\text{گونه کاهنده}) - E^\circ (\text{گونه اکسند}) = E^\circ \text{ واکنش}$$

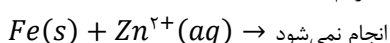
اگر مقدار E° واکنش عددی مثبت شد، آن واکنش انجام پذیر بوده و در شرایط طبیعی انجام می‌شود، در حالی که اگر E° واکنش عددی منفی شد، آن واکنش انجام پذیر نیست.

بررسی گزینه‌ها:

۱) مقایسه قدرت کاهندگی فلزها به صورت $Ag < Fe$ است، بنابراین این واکنش انجام نمی‌شود. در این رابطه، داریم:

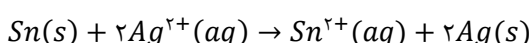


۲) مقایسه قدرت کاهندگی فلزها به صورت $Fe < Zn$ است، بنابراین این واکنش انجام نمی‌شود. در این رابطه، داریم:



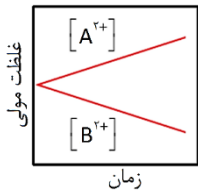
۳) فلزاتی با پتانسیل کاهشی مثبت مثل مس، نقره، طلا و پلاتین با اسیدها واکنش نمی‌دهند.

۴) مقایسه قدرت کاهندگی فلزها به صورت $Ag < Sn$ است. در واقع، قلع دارای پتانسیل کاهشی استاندارد منفی و نقره دارای پتانسیل کاهشی استاندارد مثبت است. به همین خاطر، این واکنش انجام پذیر است. در این رابطه، داریم:



گروه آموزشی ماز

۹۴- با توجه به نمودار مقابل که تغییر غلظت یون‌ها در یک سلول گالوانی را نشان می‌دهد، کدام یک از مطالب داده شده نادرست هستند؟



(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

(۲) آ و ت

(۱) آ و پ

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار داده شده، کاتیون B^{2+} در حال مصرف شدن است. بر این اساس، می‌توان گفت یون‌های A^{2+} و B^{2+} به ترتیب در سمت چپ و راست واکنش کلی سلول قرار دارند و ضرایب استوکیومتری آن‌ها نیز یکسان است. بر این اساس، واکنش کلی سلول به صورت زیر است:

$$B^{2+}(aq) + A(s) \rightarrow A^{2+}(aq) + B(s)$$

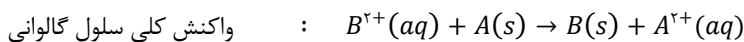
در رابطه با این سلول، عبارت‌های (آ) و (پ) نادرست هستند.

بررسی موارد:

آ: در این سلول، تیغه فلزی A آند و تیغه فلزی B کاتد است و بار کاتیون‌های آن‌ها ۲+ است. در سلول مس-نقره، فلز مس در نقش آند و فلز نقره در نقش کاتد است و بار کاتیون‌های آن‌ها به ترتیب برابر با ۲+ و ۱+ است.

ب: جهت حرکت آنیون‌ها از سمت نیم سلول کاتدی (نیم سلول B) به سمت نیم سلول آندی (نیم سلول A) است.

پ: فرض کنید که غلظت اولیه کاتیون‌های A^{2+} و B^{2+} به ترتیب n و m باشد. بر این اساس، داریم:



غلظت اولیه یون‌ها :

	m	n
--	-----	-----

غلظت یون‌ها پس از انجام واکنش :

	$m - x$	$n + x$
--	---------	---------

بنابراین مجموع غلظت کاتیون‌ها در ابتدا و انتهای واکنش سلول ثابت و برابر با $m + n$ است.

ت: در واکنش کلی سلول، کاتیون B^{2+} کاهش یافته و اتم A اکسایش می‌یابد. بنابراین قدرت اکسندگی کاتیون‌های A^{2+} کمتر از قدرت اکسندگی کاتیون‌های B^{2+} است.

گروه آموزشی ماز

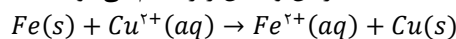
۹۵- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) ساخت قوطی محتوی مواد غذایی و لوازم آشپزی مقاوم در برابر خوردگی، در گرو بهره‌گیری از الکتروشیمی است.
- (۲) با قرار دادن یک قطعه از فلز آهن در محلولی از مس(II) سولفات، با گذشت زمان یک محلول بی‌رنگ ایجاد می‌شود.
- (۳) واکنش میان منیزیم و گاز O_2 با تولید نور سفید همراه بوده و در فراورده آن، آرایش الکترونی یون‌ها مشابه هم است.
- (۴) با فرو بردن دو تیغه جنس مس و روی در یک لیمو، می‌توان بخشی از انرژی شیمیایی را به انرژی الکتریکی تبدیل کرد.

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - مفهومی - ۱۲۲)

پاسخ تشریحی:

با قرار دادن یک قطعه آهن در محلول مس(II) سولفات، با گذشت زمان واکنش زیر انجام می‌شود:



با انجام شدن این واکنش، یون‌های آبی‌رنگ مس به صورت رسوب درآمده و از محلول خارج می‌شوند، اما یون‌های سبز رنگ آهن(II) تولید شده و وارد محلول می‌شوند، پس می‌توان گفت طی این فرایند، یک محلول سبزرنگ ایجاد می‌شود. توجه داریم که یون‌های آهن(II) و آهن(III)، در محلول‌های آبی به ترتیب رنگ‌های سبز و زرد را ایجاد می‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

① ساخت لوله‌های فلزی انتقال آب، قوطی‌های محتوی مواد غذایی، لوازم آشپزی که در برابر خوردگی مقاوم بوده و مانع از آلوده شدن آب و مواد غذایی می‌شوند و همچنین کسب اطمینان از کیفیت تولید فراورده‌های دارویی، بهداشتی و غذایی، چهره‌ای از افزایش سطح رفاه و آسایش هستند که دستیابی به آن‌ها در گرو بهره‌گیری از دانش الکتروشیمی است. در واقع، آن‌چه که شیمی و الکترونیسته را به یکدیگر پیوند داده و علم الکتروشیمی را ایجاد می‌کند،

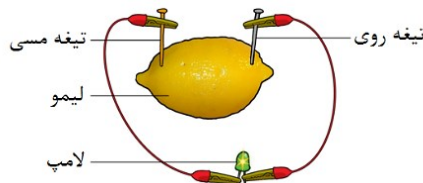
الکترون است. به عبارتی، الکتروشیمی علم استفاده از انرژی الکتریکی برای ایجاد یک تغییر شیمیایی دلخواه و یا تولید انرژی الکتریکی به کمک انجام واکنش‌های شیمیایی در سلول‌های مختلف است.

اغلب فلزها در واکنش با عناصر نافلزی، تمایل دارند یک یا چند الکترون خود را به اتم‌های نافلزی داده و ضمن اکسایش، به کاتیون تبدیل شوند. نافلزها نیز با گرفتن یک یا چند الکترون، کاهش یافته و به آنیون تبدیل می‌شوند. بر این اساس، فلزها اغلب کاهنده و نافلزها اغلب اکسنده هستند. به عنوان مثال، فلز منیزیم در واکنش با اکسیژن هوا اکسید شده و الکترون‌های خود را به اتم‌های اکسیژن انتقال می‌دهد. معادله نیم‌واکنش‌های انجام شده در این واکنش شیمیایی به صورت زیر است:



واکنش انجام‌شده به صورت: $2\text{Mg}(s) + \text{O}_2(g) \rightarrow 2\text{MgO}(s)$ است که در آن اتم‌های Mg و مولکول‌های اکسیژن به ترتیب در نقش گونه‌های کاهنده و اکسنده ظاهر می‌شوند. فرآورده‌های تولید شده در این نیم‌واکنش‌ها، هر دو دارای ۱۰ الکترون بوده و آرایش الکترونی مشابهی دارند. همان‌طور که مشخص است، طی این واکنش هر اتم منیزیم دو الکترون از دست داده و یک لایه الکترونی از اتم‌های آن کاسته می‌شود و به همین خاطر، شعاع اتم‌های این عنصر طی فرایند اکسایش، کوچک‌تر می‌شود. در گذشته از واکنش سوختن منیزیم به عنوان منبع نور در هنگام عکاسی استفاده می‌شد. طی این فرایند، فلز منیزیم با تولید نور خیره‌کننده‌ای در حضور اکسیژن می‌سوزد و به منیزیم اکسید تبدیل می‌شود.

باتری لیمویی، نوع ساده‌ای از یک سلول گالوانی است که با فروبردن یک تیغه از جنس فلز مس و یک تیغه از جنس فلز روی در یک لیمو ساخته می‌شود. به کمک این نوع باتری می‌توان یک لامپ LED را روشن کرد. تصویر زیر، نمایی از این نوع باتری را نشان می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، لیمو در نقش الکترولیت بوده و باعث برقراری جریان الکتریکی در مدار خارجی می‌شود.

گروه آموزشی ماز

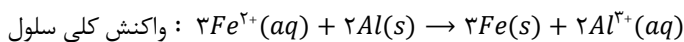
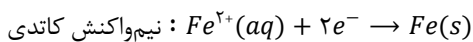
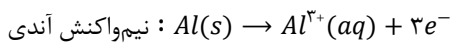
۹۶- در مدار خارجی سلول گالوانی آلومینیم-آهن که با استفاده از دو نیم‌سلول استاندارد ساخته شده، تعداد $3/612 \times 10^{23}$ الکترون جاری شده است. اگر حجم هر یک از الکترولیت‌های آندی و کاتدی بکار رفته در ساختار سلول برابر با ۲ لیتر باشد، تفاوت غلظت کاتیون در دو محلول در پایان این فرایند چقدر خواهد شد؟ (دیواره متخلخل سلول فقط به آنیون‌ها اجازه عبور می‌دهد.)

(۱) ۰/۱۵ (۲) ۰/۰۵ (۳) ۰/۳۵ (۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

ابتدا واکنش کلی سلول و نیم‌واکنش‌های آندی و کاتدی تشکیل‌دهنده‌ی آن را می‌نویسیم:



در این واکنش شیمیایی، به ازای مبادله ۶ مول الکترون بین گونه اکسنده (یون Fe^{2+}) و کاهنده (فلز Al)، مقدار ۲ مول یون آلومینیم تولید شده و ۳ مول یون آهن مصرف می‌شود. ابتدا شمار مول الکترون مبادله‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\text{شمار مول الکترون مبادله‌شده} = 3/612 \times 10^{23} e^- \times \frac{1 \text{ mol } e^-}{6/02 \times 10^{23} e^-} = 0/6 \text{ mol}$$

بنابراین مقدار یون Al^{3+} تولیدشده در نیم‌سلول آندی و مقدار یون Fe^{2+} مصرف‌شده در نیم سلول کاتدی برابر است با:

$$? \text{ mol Al}^{3+} = 0/6 \text{ mol } e^- \times \frac{2 \text{ mol Al}^{3+}}{6 \text{ mol } e^-} = 0/2 \text{ mol}$$

$$? \text{ mol Fe}^{2+} = 0/6 \text{ mol } e^- \times \frac{3 \text{ mol Fe}^{2+}}{6 \text{ mol } e^-} = 0/3 \text{ mol}$$

در ابتدای فرایند، غلظت محلول موجود در نیم‌سلول کاتدی و آندی برابر با ۱ مولار است و همچنین می‌دانیم حجم هر محلول نیز برابر با ۲ لیتر است، در نتیجه مقدار مول اولیه یون آلومینیم و آهن در هر یک از این محلول‌ها برابر با ۲ مول بوده است. با توجه به اینکه در ابتدا ۲ مول یون Al^{3+} و Fe^{2+} در محلول وجود داشته و ۰/۲ مول یون Al^{3+} دیگر تولید شده، بنابراین مقدار مول یون آلومینیم در پایان این فرایند برابر با ۲/۲ مول است. همچنین مقدار ۰/۳ مول یون

Fe^{2+} از محلول موجود در نیم سلول کاتدی مصرف شده و مقدار مول یون آهن در پایان این فرایند به $1/7$ مول می‌رسد. اکنون غلظت مولی این دو کاتیون در محلول‌های آندی و کاتدی را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{مول}}{\text{حجم (L)}} = \text{غلظت مولی} \Rightarrow \begin{cases} M(Al^{3+}) = \frac{2/2}{2} = 1/1 \text{ mol. L}^{-1} \\ M(Fe^{2+}) = \frac{1/7}{2} = 0.05 \text{ mol. L}^{-1} \end{cases}$$

با توجه به محاسبات بالا، نتیجه می‌گیریم که تفاوت غلظت کاتیون در دو محلول در پایان این فرایند برابر با 0.25 مول بر لیتر خواهد شد.

تاثیر مهم دیواره متخلخل در سلول گالوانی:

در یک سلول گالوانی، به مرور زمان فلز به‌کاررفته در آند اکسایش پیدا کرده و کاتیون‌های حاصل از این فرایند، وارد الکترولیت آندی می‌شوند. با ادامه این فرایند، کاتیون‌ها در الکترولیت آندی تجمع پیدا کرده و این محلول بار مثبت پیدا می‌کند. به طریق مشابه، با انجام شدن نیم‌واکنش کاهش در سمت کاتد، تعداد آنیون‌های موجود در محلول آندی بیشتر از تعداد کاتیون‌های موجود در آن شده و این محلول بار منفی پیدا می‌کند. با ادامه‌ی این فرایند و تجمع بار الکتریکی در نیم‌سلول‌ها، جریان الکتریکی در مدار خارجی متوقف می‌شود. دیواره متخلخل به کاتیون‌های موجود در الکترولیت آندی اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت کاتدی مهاجرت کنند و به آنیون‌های موجود در الکترولیت کاتدی نیز اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت آندی مهاجرت کنند. به این ترتیب، دیواره متخلخل با به جریان انداختن گونه‌های باردار میان محلول‌های موجود در هر نیم‌سلول، سبب خنثی‌کردن بار الکتریکی آن‌ها شده و از تجمع بار الکتریکی در این نیم‌سلول‌ها جلوگیری می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۹۷- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- (۱) در سلول روی-مس، آنیون‌های موجود در الکترولیت از خلال دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول مس مهاجرت می‌کنند.
- (۲) اگر یون Al^{3+} اکسندۀ تر از Mg^{2+} باشد، با قرار دادن آلومینیم در محلول منیزیم کلرید، دمای محلول افزایش می‌یابد.
- (۳) در سلول گالوانی روی-نقره، با گذشت زمان غلظت یون روی در محلول موجود در نیم‌سلول روی افزایش پیدا می‌کند.
- (۴) در واکنش فلز روی با محلول HCl ، فرآورده نیم‌واکنش اکسایش توسط اتم H مولکول‌های H_2O احاطه می‌شود.

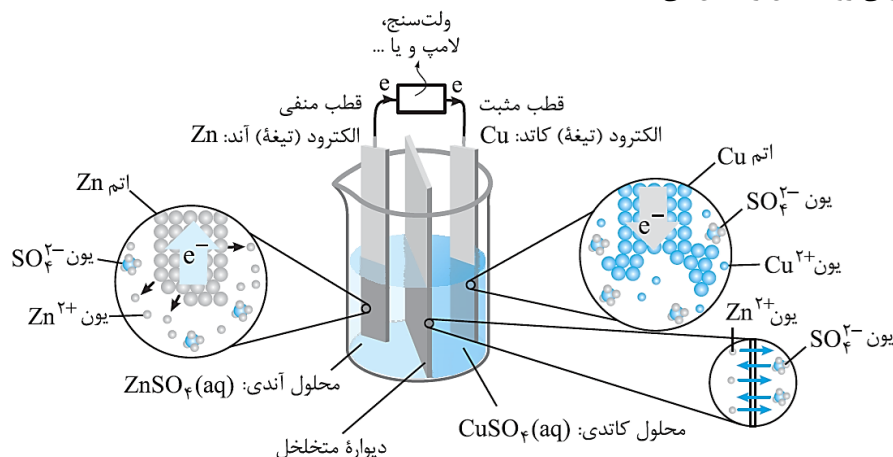
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۲)

پاسخ شش‌پایه

واکنش انجام شده در سلول گالوانی روی-نقره به صورت $Zn(s) + 2Ag^+(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2Ag(s)$ است. در این سلول گالوانی، تیغه روی در نقش آند (قطب منفی) و تیغه نقره در نقش کاتد (قطب مثبت) است. با کارکرد این سلول، یون‌های روی تولید شده در سمت آند وارد محلول الکترولیت شده و غلظت این یون در محلول افزایش پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

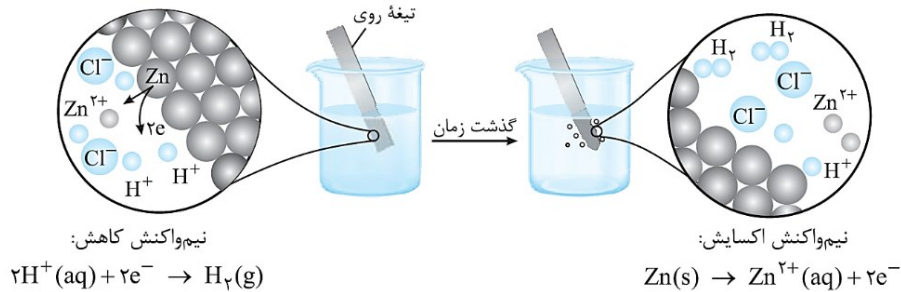
۱) در سلول روی-مس، نیم‌سلول روی در نقش آند بوده و می‌دانیم که در سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، آنیون‌ها به سمت تیغه آندی حرکت می‌کنند. بر این اساس، می‌توان گفت در سلول مورد نظر آنیون‌های موجود در الکترولیت از خلال دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول روی مهاجرت می‌کنند. تصویر زیر، نمایی از سلول گالوانی روی-مس را نشان می‌دهد:



واکنش انجام شده در سلول گالوانی روی-مس، مشابه همان واکنشی است که با وارد کردن تیغه‌ای از جنس فلز روی به محلول دارای یون‌های مس (II) انجام می‌شود. تنها تفاوت فرایندهای انجام شده در آن است که به کمک سلول گالوانی، واکنش موردنظر در یک شرایط کنترل شده انجام می‌شود و از جریان الکتریکی ایجاد شده در آن می‌توانیم به عنوان منبع تولید الکتریسیته استفاده کنیم.

۹۲ اگر یون Al^{3+} اکسندۀ تر از Mg^{2+} باشد، می‌توان گفت پتانسیل کاهش استاندارد فلز آلومینیم، بیشتر (مثبت‌تر) از پتانسیل کاهش استاندارد فلز منیزیم می‌شود. در چنین شرایطی، با قرار دادن یک قطعه فلز آلومینیم در محلولی از منیزیم کلرید، هیچ واکنشی انجام نشده و دمای محلول هیچ تغییری نمی‌کند.

۹۴ معادله واکنش فلز روی با محلول هیدروکلریک اسید به صورت زیر است:



گونه کاهنده (گونه‌ای که الکترون از دست داده و اکسید می‌شود) مصرف شده در این واکنش شیمیایی، فلز روی است، پس می‌توان گفت کاتیون روی، فراورده نیم‌واکنش اکسایش خواهد بود. چون یون روی بار الکتریکی مثبت دارد، با وارد شدن به محلول، توسط سر منفی مولکول‌های آب (اتم اکسیژن مولکول‌های آب) احاطه می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۹۸ - چه تعداد از عبارات‌های داده شده درست است؟

- آ: آزاد کردن انرژی و مبادله الکترون بین گونه‌ها، یک ویژگی بنیادی در همه انواع واکنش‌های اکسایش-کاهش است.
 ب: اندازه‌گیری پتانسیل هر نیم‌سلول به طور جداگانه ممکن نبوده و این کمیت، باید به طور نسبی اندازه‌گیری شود.
 پ: بین فلزهای آهن و مس، عنصری که تعداد کمتری الکترون با $l = 0$ دارد، کاهنده‌تر از عنصر دیگر خواهد بود.
 ت: اگر روی کاهنده‌تر از هیدروژن باشد، نیم‌سلول هیدروژن در سلول روی-هیدروژن در نقش آند قرار می‌گیرد.
 ث: واکنش سلول روی-مس مشابه واکنشی است که با ورود فلز روی به محلول مس (II) سولفات انجام می‌شود.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

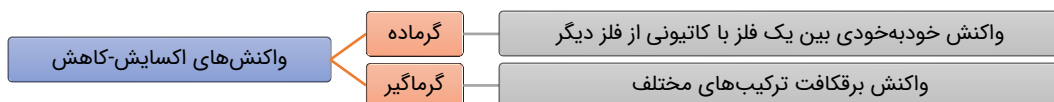
پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی

عبارات‌های (ب) و (ث) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: در همه واکنش‌های اکسایش-کاهش، بین گونه‌های شرکت‌کننده در واکنش الکترون مبادله می‌شود، اما توجه داریم که در همه این واکنش‌های شیمیایی الزاما انرژی آزاد نمی‌شود. برای مثال، در برخی از واکنش‌های اکسایش-کاهش از جمله واکنش مربوط به برق‌کافت ترکیب‌های مختلف، انرژی مصرف شده و فراورده‌هایی با سطح انرژی بالاتر و پایداری کمتر تولید می‌شوند. بر این اساس، می‌توان واکنش‌های اکسایش-کاهش را با توجه به مدل مبادله گرما در آن‌ها در دو دسته زیر قرار داد:



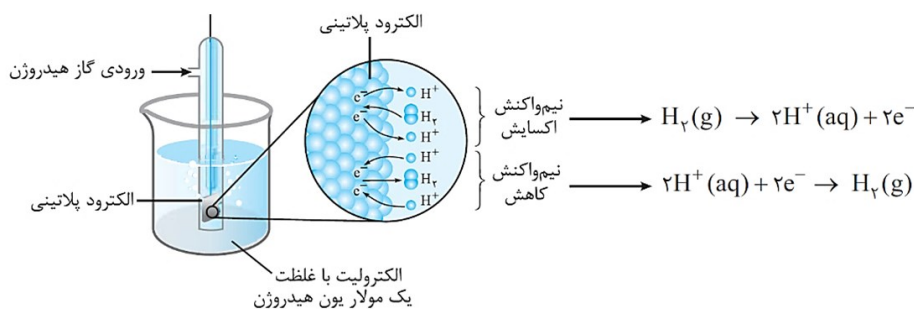
ب: اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول به طور جداگانه ممکن نبوده و باید این کمیت به طور نسبی اندازه‌گیری شود. شیمی‌دان‌ها برای دستیابی به این هدف، نیم‌سلول استاندارد هیدروژن (SHE) را به عنوان مبنا انتخاب کرده و پتانسیل آن را به طور قراردادی برابر با صفر ولت در نظر گرفتند. در این نیم‌سلول، محلولی با $pH = 0$ (محلولی که غلظت مولی یون هیدروژن در آن برابر با ۱ مول بر لیتر است) قرار داشته و گاز هیدروژن با فشار ۱ اتمسفر بر روی این محلول دمیده می‌شود. شیمی‌دان‌ها با تشکیل سلول گالوانی از هر نیم‌سلول با نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، توانستند پتانسیل الکتریکی بسیاری از نیم‌سلول‌ها را اندازه‌گیری کرده و در جدولی به نام سری الکتروشیمیایی ثبت کنند.

پ: در نیم‌واکنش کاهش، الکترون در سمت چپ (واکنش‌دهنده‌ها) و در نیم‌واکنش اکسایش، الکترون در سمت راست (فراورده‌ها) قرار دارد. در واکنش‌های اکسایش-کاهش، ماده‌ای که با گرفتن الکترون کاهش پیدا کرده و سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود، اکسندۀ نام دارد. در این واکنش‌ها، ماده‌ای که با از دست دادن الکترون اکسایش پیدا کرده و سبب کاهش گونه دیگر می‌شود، کاهنده نام دارد. فلز آهن دارای ۸ الکترون با $l = 0$ (الکترون‌های موجود در زیرلایه S) بوده و فلز مس نیز دارای ۷ الکترون با $l = 0$ است. از طرفی، می‌دانیم که پتانسیل کاهش استاندارد فلز مس بیشتر از آهن است و به همین خاطر، قدرت

کاهندگی (تمایل به از دست دادن الکترون و اکسید شدن) مس کمتر از آهن خواهد بود. تصویر زیر، نمایی از جدول پتانسیل کاهشی و برخی از عناصر مهم موجود در آن را نشان می‌دهد:

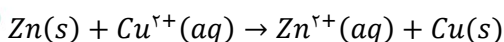
نیم واکنش کاهش			$E^\circ (V)$
گونه اکسیده	الکترون	گونه کاهنده	ولتاژ
$\text{Au}^{3+}(\text{aq})$	$+3e^- \rightarrow$	Au(s)	$+1/50$
$\text{Pt}^{2+}(\text{aq})$	$+2e^- \rightarrow$	Pt(s)	$+1/20$
$\text{Ag}^+(\text{aq})$	$+e^- \rightarrow$	Ag(s)	$+0/80$
$\text{Cu}^{2+}(\text{aq})$	$+2e^- \rightarrow$	Cu(s)	$+0/34$
$2\text{H}^+(\text{aq})$	$+2e^- \rightarrow$	$\text{H}_2(\text{g})$	$0/00$
$\text{Fe}^{2+}(\text{aq})$	$+2e^- \rightarrow$	Fe(s)	$-0/44$
$\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$	$+2e^- \rightarrow$	Zn(s)	$-0/76$
$\text{Mn}^{2+}(\text{aq})$	$+2e^- \rightarrow$	Mn(s)	$-1/18$
$\text{Al}^{3+}(\text{aq})$	$+3e^- \rightarrow$	Al(s)	$-1/66$
$\text{Mg}^{2+}(\text{aq})$	$+2e^- \rightarrow$	Mg(s)	$-2/37$

ت: تصویر زیر نمایی از نیم سلول استاندارد هیدروژن را نشان می‌دهد:



اگر روی کاهنده تر از هیدروژن باشد، پتانسیل کاهشی این عنصر کمتر از پتانسیل کاهشی هیدروژن می‌شود. در یک سلول گالوانی نیز الکترودی که پتانسیل کاهشی کمتری داشته باشد، در نقش آند (قطب منفی) قرار می‌گیرد.

ث: در هر دو مورد واکنش مقابل انجام می‌شود:



توجه داریم که واکنش در سلول گالوانی در شرایط کاملاً کنترل شده صورت می‌گیرد و الکترون‌های تولید شده از طریق مدار بیرونی جابه‌جا می‌شوند و ما می‌توانیم از این جریان الکتریکی ایجاد شده به عنوان منبع تولید الکتریسیته استفاده کنیم.

گروه آموزشی ماز

۹۹- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- آ: با افزایش مقدار پتانسیل کاهشی استاندارد آند در یک سلول گالوانی، emf این سلول نیز افزایش پیدا می‌کند.
- ب: یکی از دلایل استفاده از لیتیم در ساختن باتری‌ها، چگالی و استحکام زیاد این عنصر در مقایسه با سایر فلزها است.
- پ: پسماندهای الکترونیکی به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی بوده و به همین خاطر، نباید در طبیعت رها شوند.
- ت: در سری الکتروشیمیایی عناصر، گونه کاهنده در سمت راست و گونه اکسیده در سمت چپ نیم واکنش‌ها نوشته می‌شود.
- (۱) آ و ب (۲) ب و پ (۳) آ و ت (۴) پ و ت

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

عبارتهای (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: برای محاسبه مقدار emf سلول‌های گالوانی از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌شود:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند})$$

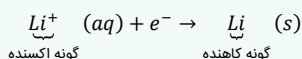
با توجه به این رابطه، در صورت افزایش E° عنصر به کار رفته در آند، تفاوت میان E° الکترودهای آندی و کاتدی کاهش پیدا کرده و به دنبال آن، مقدار emf سلول حاصل نیز کاهش پیدا می‌کند.

ب: یکی از دلایل استفاده از لیتیم در ساختن انواع باتری‌ها، چگالی کمتر این عنصر در مقایسه با سایر فلزها است. علاوه بر این، لیتیم پتانسیل کاهشی استاندارد (E°) کوچک‌تری نسبت به سایر فلزات دارد و از این ویژگی لیتیم برای ساختن باتری‌هایی با توانایی ذخیره‌ی بیشتر انرژی استفاده می‌شود.

پ: پسماندهای الکترونیکی به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی بوده و نباید در طبیعت رها یا دفن شوند؛ زیرا با رها شدن این مواد در طبیعت، محیط زیست آلوده می‌شود. از سوی دیگر، برخی از این پسماندها به دلیل داشتن مقدار قابل توجهی از مواد و فلزهای ارزشمند و گران‌قیمت، منبعی برای بازیافت این مواد به شمار می‌روند.

ت: در سری الکتروشیمیایی طبق قرارداد، نیم‌واکنش‌ها به صورت کاهشی نوشته می‌شوند؛ در نتیجه در این جدول گونه اکسند در سمت واکنش‌دهنده‌ها (سمت چپ معادله) و گونه کاهنده در سمت فراورده‌ها (سمت راست معادله) نوشته می‌شود. هرچه پتانسیل کاهشی گونه‌ای منفی‌تر باشد، گونه سمت راست معادله کاهشی آن، کاهنده قوی‌تری خواهد بود.

در سری الکتروشیمیایی، پتانسیل کاهشی مربوط به نیم واکنش‌های کاهش نوشته شده است. در این سری، گونه‌ای با پتانسیل کاهشی استاندارد منفی‌تر در پایین جدول و گونه‌ای با پتانسیل کاهشی استاندارد مثبت‌تر در بالای جدول قرار گرفته است. نیم واکنش کاهش، نیم‌واکنشی است که در آن یک ماده با گرفتن الکترون، به گونه‌ای با عدد اکسایش کمتر تبدیل می‌شود. واکنش‌پذیرترین فلز در محلول‌های آبی، لیتیم است؛ در نتیجه نیم‌واکنش زیر، کمترین (منفی‌ترین) پتانسیل کاهشی را دارد:



پتانسیل کاهشی استاندارد برای نیم واکنش بالا را به صورت $E^\circ (Li^+/Li)$ نمایش می‌دهند و مقدار آن برابر با $-3/04$ ولت است. در این نیم‌واکنش، یون تک‌اتمی Li^+ ، اکسند بوده و با جذب الکترون به گونه‌ای با عدد اکسایش کمتر (Li) تبدیل شده است. هرچه پتانسیل استاندارد کاهشی تولید یک گونه منفی‌تر باشد، گونه ذکر شده کاهنده قوی‌تری است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۰- در یون $^{79}X^{2-}$ ، تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها برابر با ۹ عدد است. حداکثر عدد اکسایش عنصر X در ترکیب‌های خود، چند برابر عدد اکسایش کربن در اکسیدی از این عنصر است که در واکنش سوختن ناقص هیدروکربن‌ها تولید می‌شود؟

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۳/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

در یون $^{79}X^{2-}$ ، تفاوت شمار الکترون‌ها و نوترون‌ها برابر با ۹ عدد است. بر این اساس، داریم:

$$N - e = 9$$

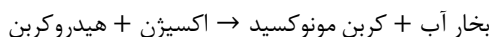
این یون دارای بار الکتریکی ۲- است، پس شمار پروتون‌های موجود در ساختار هسته آن، ۲ عدد کمتر از شمار الکترون‌ها خواهد بود. بر این اساس، می‌توان گفت در یون $^{79}X^{2-}$ ، تفاوت شمار پروتون‌ها و نوترون‌ها برابر با ۱۱ عدد است. در نقطه مقابل، با توجه به عدد جرمی این یون می‌توان گفت مجموع شمار پروتون‌ها و نوترون‌ها نیز در این یون برابر با ۷۹ عدد است. بر این اساس، داریم:

$$\begin{cases} N + P = 79 \\ N - P = 11 \end{cases} \rightarrow N = 45 \text{ و } P = 34$$

عنصری با عدد اتمی ۳۴، در گروه شماره ۱۶ از تناوب چهارم جدول دوره‌ای قرار گرفته و در آرایش الکترونی خود، ۶ الکترون ظرفیتی خواهد داشت. با توجه به شماره گروه این عنصر، می‌توان بازه تغییرات عدد اکسایش آن را پیدا کرد. جدول زیر، دامنه تغییر عدد اکسایش برخی از عناصر موجود در جدول تناوبی امروزی را نشان می‌دهد:

شماره گروه	۱	۲	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	عناصر استثنا				عناصر واسطه مهم		
							اکسیژن	فلوئور	هیدروژن	آهن	مس	منگنز	نقره
کم‌ترین عدد اکسایش	۰	۰	-۴	-۳	-۲	-۱	-۲	-۱	-۱	۰	۰	۰	۰
بالاترین عدد اکسایش	+۱	+۲	+۴	+۵	+۶	+۷	+۲	۰	+۱	+۳	+۲	+۷	+۱

با توجه به جدول بالا، عنصری که در گروه ۱۶ جدول دوره‌ای قرار گرفته می‌تواند اعداد اکسایش $+۶$ ، $+۴$ ، $+۲$ ، صفر و ۲- را داشته باشد، پس حداکثر عدد اکسایش این عنصر در ترکیب‌های آن برابر با $+۶$ می‌شود. واکنش سوختن ناقص هیدروکربن‌ها در حضور گاز اکسیژن ناکافی در محیط نیز به صورت زیر است:



عدد اکسایش اتم کربن در کربن مونوکسید برابر با $+۲$ است، پس می‌توان گفت مقدار نسبت خواسته شده برابر با ۳ می‌شود. در این رابطه، داریم:

$$\frac{\text{حداکثر عدد اکسایش عنصری که عدد اتمی ۳۴ دارد}}{\text{عدد اکسایش اتم کربن در ساختار کربن مونوکسید}} = \frac{+۶}{+۲} = ۳ \text{ برابر}$$

۱۰۱- در واکنش هیدروژن دار شدن نوعی هیدروکربن که در ساختار خود یک پیوند دوگانه و یک حلقه کربنی پنج ضلعی دارد، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن ۱/۱ برابر می‌شود. اگر ۷۷ گرم از ترکیب تولید شده طی این فرایند را در شرایط استاندارد بسوزانیم، چند لیتر فراورده گازی بدست می‌آید؟

$$(C = 12 \text{ و } H = 1 : g.mol^{-1})$$

۱۲۳/۲ (۴)

۲۴۶/۴ (۳)

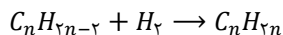
۱۴۵/۶ (۲)

۲۹۱/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - مساله - ۱۲۰۲)



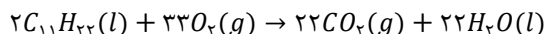
فرمول شیمیایی کلی ترکیب هیدروکربنی (ترکیبی که از اتصال اتم‌های هیدروژن و کربن به یکدیگر تشکیل شده باشد) که در ساختار خود دارای یک حلقه کربنی و یک پیوند دوگانه کربن-کربن باشد، به صورت C_nH_{2n-2} می‌شود. معادله واکنش کلی هیدروژن دار شدن این ترکیب آلی به صورت زیر است:



طی این فرایند، ترکیب اولیه به یک سیکلوالکان شاخه‌دار تبدیل می‌شود. با توجه به معادله این واکنش، داریم:

$$\begin{cases} -2n + 2 : \text{مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در ماده اولیه} \\ -2n : \text{مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در سیکلوالکان} \end{cases} \Rightarrow \frac{-2n}{-2n + 2} = 1/1 \Rightarrow n = 11$$

بنابراین تعداد اتم‌های کربن موجود در ساختار مولکولی ترکیب اولیه برابر با ۱۱ بوده و فرمول مولکولی آن نیز معادل با $C_{11}H_{20}$ است. در نتیجه فرمول مولکولی سیکلوالکان تولید شده طی واکنش هیدروژن دار شدن، به صورت $C_{11}H_{22}$ خواهد بود. معادله موازنه شده سوختن یک هیدروکربن با فرمول مولکولی $C_{11}H_{22}$ به صورت زیر است:



می‌دانیم هر مول گاز در شرایط استاندارد (STP)، حجمی معادل ۲۲/۴ لیتر داشته و H_2O تولید شده در این واکنش نیز در شرایط مورد نظر حالت مایع خواهد داشت. بنابراین مقدار گاز تولید شده به ازای سوختن ۷۷ گرم ترکیب $C_{11}H_{22}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$? L CO_2 = 77 g C_{11}H_{22} \times \frac{1 mol C_{11}H_{22}}{154 g C_{11}H_{22}} \times \frac{22 mol CO_2}{2 mol C_{11}H_{22}} \times \frac{22/4 L CO_2}{1 mol CO_2} = 123/2 L$$

با توجه به محاسبات بالا، نتیجه می‌گیریم که با سوزاندن ۷۷ گرم از ترکیب تولید شده، ۱۲۳/۲ لیتر فراورده‌ی گازی (کربن دی‌اکسید) تولید می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۰۲- الکتریسته حاصل از اکسید شدن ۳ گرم منیزیم در سلول گالوانی منیزیم-آلومینیم، چند گرم نقره را در یک سلول آبکاری نقره، به جسم موردنظر می‌تواند انتقال دهد؟ ($Ag = 108$ و $Mg = 24 : g.mol^{-1}$)

۵۴ (۴)

۳۶ (۳)

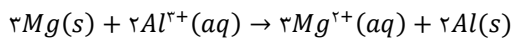
۲۷ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - مساله - ۱۲۰۲)



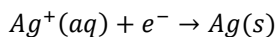
واکنش کلی در سلول منیزیم-آلومینیم به صورت مقابل است:



یعنی به ازای اکسید شدن ۳ مول Mg در سلول، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود، پس داریم:

$$? mol e^- = 3 g Mg \times \frac{1 mol Mg}{24 g Mg} \times \frac{6 mol e^-}{3 mol Mg} = 0.25 mol$$

در سلول آبکاری نقره، نیم واکنش زیر در کاتد انجام می‌شود:



حال جرم نقره منتقل شده را حساب می‌کنیم:

$$? g Ag = 0.25 mol e^- \times \frac{1 mol Ag}{1 mol e^-} \times \frac{108 g Ag}{1 mol Ag} = 27 g Ag$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- (۱) عدد اکسایش فلز واسطه در ساختار ترکیب $MgCrO_3$ با عدد اکسایش شبه فلز در ترکیب $NaAlSi_3O_8$ یکسان است.
- (۲) عدد اکسایش یکی از اتم‌های کربن موجود در ساختار پروپن با عدد اکسایش اتم گوگرد در ساختار K_2SO_3 برابر است.
- (۳) سلول‌های سوختی، نوعی از سلول‌های گالوانی بوده و استفاده از آن‌ها باعث کاهش رد پای کربن دی‌اکسید می‌شود.
- (۴) در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن با غشای مبادله‌کننده یون H^+ ، ذرات فراورده از قطب مثبت خارج می‌شوند.

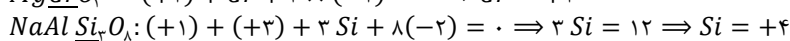
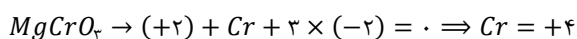
فرمول مولکولی پروپین به صورت C_3H_6 است. در مولکول‌های این ماده، هر اتم کربن حداقل به یک اتم هیدروژن متصل است؛ پس عدد اکسایش همه اتم‌های کربن موجود در این مولکول منفی می‌شود. ساختار پروپین به صورت زیر است:



عدد اکسایش اتم‌های کربن موجود در این ترکیب آلی به ترتیب برابر با ۲-، ۱- و ۳- است. در ساختار K_2SO_4 نیز یون‌های K^+ و SO_4^{2-} وجود دارند. در رابطه با آنیون سازنده این ترکیب، داریم:

$$SO_4^{2-} : S \text{ عدد اکسایش } S = +4 \implies S \text{ عدد اکسایش } S = -2 \implies S \text{ عدد اکسایش } S = -2 \implies S \text{ عدد اکسایش } S = -2 \implies S \text{ عدد اکسایش } S = -2$$

۱ عدد اکسایش کروم را در $MgCrO_4$ و Si را در $NaAlSi_3O_8$ بدست می‌آوریم:



۳ با وجود پیشرفت‌های ایجادشده در زمینه‌ی تأمین انرژی، سوخت‌های فسیلی همچنان مناسب‌ترین سوخت برای استفاده در خودروها و نیروگاه‌ها به شمار می‌روند. در رابطه با مصرف این سوخت‌ها، دو چالش عمده‌ی زیر وجود دارد:

✓ استخراج و مصرف بی‌رویه این سوخت‌ها سبب کاهش ذخایر آن‌ها شده است.

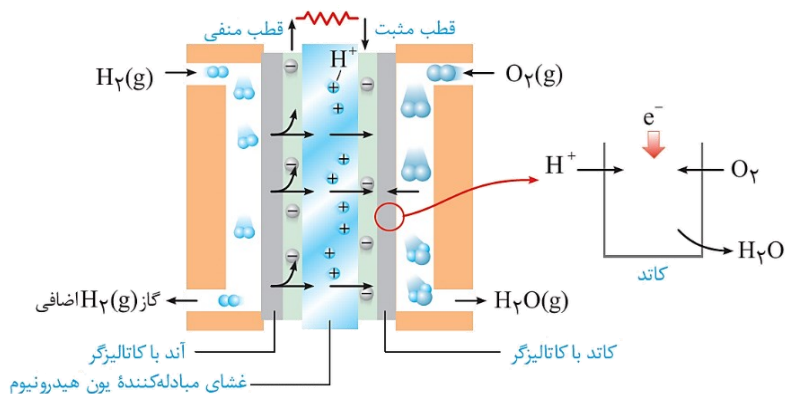
✓ افزایش استفاده از این سوخت‌ها سبب گسترش روزافزون آلودگی جهان و افزایش مقدار گازهای گلخانه‌ای شده است.

یکی از روش‌های تبدیل انرژی شیمیایی سوخت‌ها به انرژی الکتریکی، استفاده از سلول‌های سوختی است. در این روش، سوخت موردنظر به طور مستقیم وارد سلول‌های سوختی شده و انرژی شیمیایی ذخیره‌شده در آن، مستقیماً به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. از آن‌جا که در سلول‌های سوختی، انرژی شیمیایی سوخت‌ها به طور مستقیم به انرژی الکتریکی تبدیل شده و برخلاف نیروگاه‌ها، در این روش چند مرحله متوالی از تبدیل انرژی صورت نمی‌گیرد، اتلاف انرژی به صورت گرما در این روش کمتر است و درصد بیشتری از انرژی شیمیایی ذخیره‌شده در سوخت به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. مراحل تبدیل انرژی در سلول سوختی و نیروگاه‌های حرارتی به شرح زیر است:



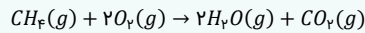
سلول سوختی، نوعی سلول گالوانی است که توسط شیمی‌دان‌ها و برای گذر از تنگنای تولید انرژی و کاهش آلودگی محیط زیست پیشنهاد می‌شود. این سلول‌ها افزون بر کارایی بیشتر، می‌توانند ردپای کربن دی‌اکسید را کاهش بدهند. رایج‌ترین سلول سوختی، سلول هیدروژن-اکسیژن است که در آن گاز هیدروژن به آرامی و تحت یک شرایط کنترل شده با گاز اکسیژن وارد واکنش شده و اکسید می‌شود. طی این فرایند، بخش زیادی از انرژی شیمیایی ذخیره شده در مولکول‌های هیدروژن به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

۴ نیم‌واکنش کاهش در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن به صورت $O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^- \rightarrow H_2O(l)$ بوده و بخار آب از سمت کاتد (قطب مثبت این سلول) خارج می‌شود. تصویر زیر، نمایی از این سلول را نشان می‌دهد:



انواع دیگر سلول‌های سوختی:

سلول‌های سوختی، یک واکنش شیمیایی در شرایط کنترل شده انجام می‌شود. هرچند که در رایج‌ترین نوع از سلول‌های سوختی، گاز هیدروژن به عنوان سوخت مصرف می‌شود، اما در برخی از انواع این سلول‌ها از سایر مواد از جمله متان نیز به عنوان سوخت استفاده می‌شود. طی این فرایند، عدد اکسایش اتم‌های کربن افزایش یافته و عدد اکسایش اتم‌های اکسیژن کاهش پیدا می‌کند. توجه داریم که این سلول‌ها با کارکرد خود، نوعی گاز آلاینده (گاز کربن دی‌اکسید) تولید کرده و وارد هوا کرده می‌کنند. معادله واکنش اکسایش گاز متان در این سلول‌ها به صورت زیر است:



طی این فرایند، عدد اکسایش اتم‌های کربن به اندازه ۸ واحد افزایش یافته و از -۴ در متان، به +۴ در کربن دی‌اکسید رسیده است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۴- چه تعداد از عبارات‌های داده شده درست است؟

- آ: در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، با انجام شدن نیم‌واکنش کاهش، فلز سدیم مذاب تولید می‌شود.
 ب: در سلول مربوط به برقکافت آب، حجم گاز تولید شده در کاتد کمتر از حجم گاز تولید شده در آنود است.
 پ: مقدار emf سلول نورالکتروشیمیایی مورد استفاده برای تولید گاز هیدروژن از آب، کوچک‌تر از صفر می‌شود.
 ت: در مراحل استخراج منیزیم از دریا، محلول هیدروکلریک اسید را پس از ذوب منیزیم هیدروکسید به آن اضافه می‌کنند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

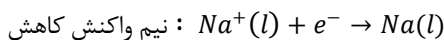
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ شریانی

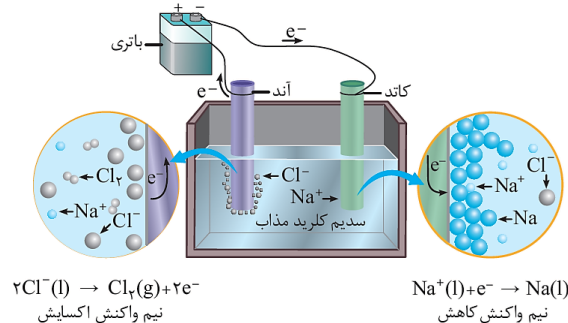
فقط عبارت (آ) درست است.

بررسی موارد

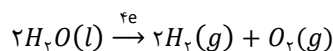
آ: در نیم‌واکنش کاهش در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، فلز سدیم مذاب تولید می‌شود. معادله نیم‌واکنش انجام شده به صورت زیر است:



تصویر زیر، نمایی از سلول الکترولیتی استفاده شده برای برقکافت سدیم کلرید را نشان می‌دهد:

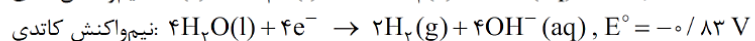
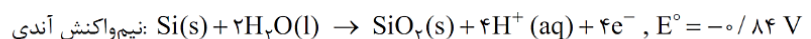
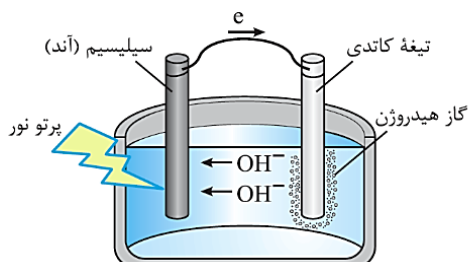


ب: در سلول مربوط به برقکافت آب، واکنش زیر انجام می‌شود:



در کاتد این سلول گاز هیدروژن و در آنود آن گاز اکسیژن تولید می‌شود. چون ضریب هیدروژن در معادله این واکنش ۲ برابر ضریب اکسیژن است، پس می‌توان گفت حجم گاز تولید شده در کاتد این سلول، حدوداً ۲ برابر حجم گاز تولید شده در آنود است. از طرفی، چون جرم مولی گاز اکسیژن ۱۶ برابر جرم مولی گاز هیدروژن است، پس می‌توان گفت در شرایط یکسان چگالی گاز تولید شده در سمت آنود این سلول (گاز اکسیژن)، ۱۶ برابر چگالی گاز تولید شده در سمت کاتد (گاز هیدروژن) آن است.

پ: تصویر زیر، نمایی از سلول نورالکتروشیمیایی استفاده شده برای تجزیه آب را نشان می‌دهد:

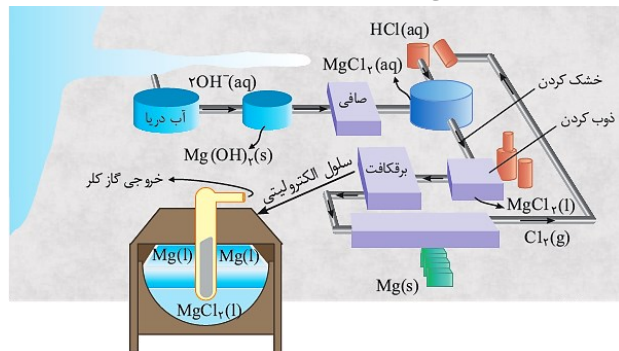


در واکنش کلی انجام شده در این سلول، سیلیسیم به عنوان گونه کاهنده (گونه‌ای که اکسید می‌شود) و آب نیز به عنوان گونه اکسنده (گونه‌ای که کاهش پیدا می‌کند) مصرف می‌شوند.

برای محاسبه emf این سلول از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$emf = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند}) = (-0.83) - (-0.84) = 0.01 \text{ V}$$

ت: تصویر زیر، مراحل استخراج فلز منیزیم از آب دریا را نشان می‌دهد:



مطابق تصویر بالا، در مراحل استخراج فلز منیزیم از دریا، محلول هیدروکلریک اسید (HCl) را پس از صاف کردن رسوب منیزیم هیدروکسید به منظور حذف ناخالصی‌ها، به آن اضافه می‌کنند.

گروه آموزشی ماز

۱۰۵- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- آ: با اتصال قطعاتی از فلز مس به لوله‌های آهنی انتقال آب، می‌توان به طور کامل جلوی خوردگی آهن را گرفت.
 ب: نیم‌واکنش اکسایش در ورق گالوانیزه خراش دیده، شبیه به نیم‌واکنش اکسایش در فرایند خوردگی آهن است.
 پ: از دومین عنصر گروه ۱۳، می‌توان برای ساخت وسایلی بهره برد که برای مدت طولانی استحکام خود را حفظ می‌کنند.
 ت: در سلول آبکاری با فلز نقره، برخلاف سلول گالوانی روی-نقره، آنیون‌های موجود در محلول به طرف تیغه نقره‌ای می‌روند.
- (۱) آ و ب (۲) ب و پ (۳) آ و ت (۴) پ و ت

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۳۰۲)

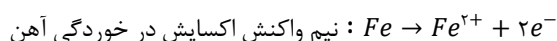
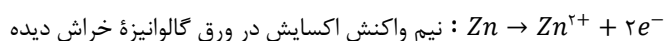
پاسخ تشریحی:

عبارتهای (پ) و (ت) درست هستند.

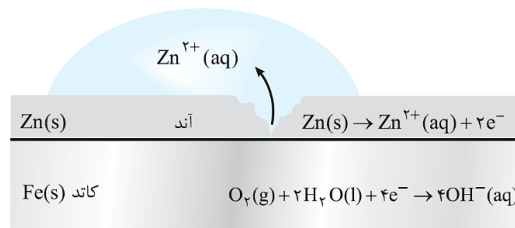
بررسی موارد:

آ: یکی از روش‌های جلوگیری از خوردگی آهن، استفاده از روش محافظت کاتدی است. در این روش، فلزی که قرار است در برابر خوردگی محافظت شود را در تماس با یک فلز دیگری قرار می‌دهند که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد. در این شرایط، فلزهای موردنظر برای از دست دادن الکترون و اکسایش یافتن با یکدیگر رقابت می‌کنند. در چنین شرایطی، فلزی که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد در نقش آند اکسید می‌شود. اما فلزی که E° بزرگ‌تری دارد در نقش کاتد ظاهر شده و در برابر خوردگی محافظت می‌شود. توجه داریم که پتانسیل کاهش مس بیشتر از پتانسیل کاهش آهن است و از این فلز نمی‌توان برای جلوگیری از خوردگی آهن استفاده کرد.

ب: در ورق گالوانیزه (ورقه‌ای از آهن که سطح آن با روی پوشانده شده است) خراش دیده، فلز روی و در خوردگی آهن، فلز آهن اکسید می‌شود:



در تصویر زیر، فرایند خوردگی ورقه گالوانیزه نشان داده شده است:

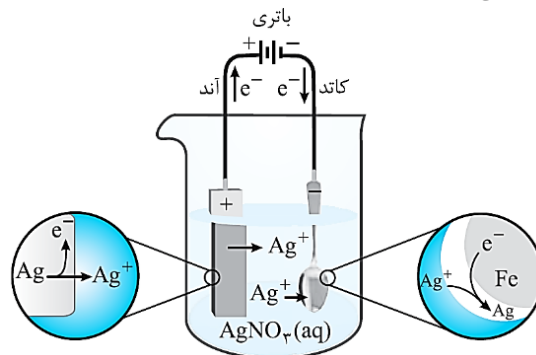


تا قبل از ایجاد هر گونه خراشی در سطح آهن گالوانیزه، فلز روی به عنوان یک پوشش محافظ از خوردگی آهن جلوگیری می‌کند. توجه داریم که در این شرایط، خود روی نیز به خاطر ایجاد شدن یک لایه متراکم از $ZnO(s)$ در سطح آن، دچار خوردگی نمی‌شود. هنگامی که خراشی در سطح آهن گالوانیزه پدید می‌آید، هر دو فلز (روی و آهن) در مجاورت با اکسیژن و رطوبت قرار می‌گیرند و برای از دست دادن الکترون (اکسایش یافتن) رقابت می‌کنند. از آنجا که E°

فلز روی از E° آهن کمتر (منفی تر) است، فلز روی در این رقابت پیروز شده و در نقش آند اکسید می شود و از آهن به عنوان یک محافظ کاتدی در مقابل خورده شدن محافظت می کند.

پ: از فلزهایی که اکسایش می یابند اما خورده نمی شوند، می توان برای ساخت وسایلی که برای مدت طولانی استحکام خود را حفظ می کنند استفاده کرد. آلومینیم (دومین عنصر موجود در گروه شماره ۱۳ جدول دوره ای)، یکی از همین عناصر فلزی است. این فلز در مجاورت با هوا، به سرعت اکسید شده و یک لایه متراکم از آلومینیم اکسید (Al_2O_3) بر روی سطح آن تشکیل می شود. این لایه از آلومینیم اکسید بسیار متراکم بوده و از رسیدن گاز اکسیژن و رطوبت به لایه های زیرین آلومینیم جلوگیری می کند. با نرسیدن اکسیژن به لایه های زیرین آلومینیم، این فلز برای مدت طولانی دست نخورده باقی می ماند و استحکام خود را حفظ می کند.

ت: در سلول گالوانی روی-نقره، تیغه روی در نقش آند و تیغه نقره در نقش کاتد بوده و به همین خاطر، آنیون های موجود در الکترولیت به سمت تیغه روی حرکت می کنند. برخلاف این سلول، در سلول مربوط به آبکاری تیغه نقره در نقش آند بوده و آنیون های موجود در محلول الکترولیت به سمت آن حرکت می کنند. تصویر زیر، نمایی از سلول آبکاری را نشان می دهد:



گروه آموزشی ماز

دوستان مازی براتون ۵ تست هدیه از این مبحث گذاشتیم که بتونید بررسی بیشتری داشته باشید 😊

۱- مقدار K_a برای اسید HA در محلول 0.4 مول بر لیتر آن برابر 0.2 است. مقدار pH این محلول اسیدی کدام بوده و با pH محلول چند گرم بر لیتر هیدروبرمیک اسید برابر است؟ ($Br = 80$ و $H = 1 \text{ g.mol}^{-1}$)

$$8/1 - 0.3 \text{ (۴)}$$

$$16/2 - 0.3 \text{ (۳)}$$

$$16/2 - 0.7 \text{ (۲)}$$

$$8/1 - 0.7 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مساله ۱۲۰۱)

پاسخ شیمی

طبق فرض سوال، مقدار K_a برای اسید HA در محلول 0.4 مول بر لیتر آن، برابر 0.2 است. با توجه به بزرگ بودن مقدار ثابت یونش این ترکیب اسیدی، باید از روابط دقیق مربوط به محاسبه K_a استفاده کنیم. بر این اساس، داریم:

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M - [H^+]} \implies 0.2 = \frac{[H^+]^2}{0.4 - [H^+]} \implies [H^+] = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

با توجه به غلظت یون هیدروژن، مقدار pH این محلول آبی را محاسبه می کنیم.

$$pH = -\log[H^+] = -\log(0.2) = 0.7$$

هیدروبرمیک اسید، یک اسید قوی است، پس غلظت یون هیدروژن در محلول آن با غلظت اولیه اسید برابر است. برای اینکه مقدار pH محلول هیدروبرمیک اسید با مقدار pH محلول اسیدی داده شده برابر شود، باید غلظت هیدروبرمیک اسید با غلظت یون هیدروژن در محلول اسیدی داده شده برابر باشد. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = [HBr] = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

علت استفاده از غلظت مولار:

هرچند که غلظت بسیاری از محلول ها در صنعت، پزشکی، داروسازی، کشاورزی و زندگی روزانه با درصد جرمی بیان می شود، اما تجربه نشان می دهد که اندازه گیری حجم یک مایع به ویژه در آزمایشگاه آسان تر از جرم آن است. از سوی دیگر، شیمی دان ها اغلب مقدار هر ماده را برحسب مول بیان می کنند و در واقع مبنای محاسبه های کمی در مباحث استوکیومتری و ... شیمی، مول است. به همین خاطر، شیمی دان ها برای بیان غلظت محلول ها از مقیاسی استفاده می کنند که در آن تعداد مول های حل شونده موجود در هر لیتر محلول نشان داده می شود. چنین غلظتی، مولار (غلظت مولی یا همان مول بر لیتر) نام دارد. نوعی دیگری از بیان غلظت بر مبنای حجم محلول وجود دارد که تعداد گرم های حل شونده در هر لیتر از محلول را نشان داده و گاهی در کنکور هم از آن سوال طرح می شود. در رابطه با این نوع از بیان غلظت داریم:

$$\text{جرم مولی حل شونده} \times \text{غلظت مولی محلول} = \frac{\text{جرم مولی حل شونده} \times \text{مول حل شونده}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{لیتر محلول}} = \text{غلظت گرم بر لیتر}$$

با توجه به توضیحات داده شده، غلظت محلول هیدروبرمیک اسید را بر مبنای گرم بر لیتر محاسبه می کنیم.

$$g \cdot L^{-1} = 16/2 = 81 \times 0/2 = \text{جرم مولی حل شونده} \times \text{غلظت مولی محلول} = \text{غلظت گرم بر لیتر}$$

گروه آموزشی ماز

۲- کدام موارد از مطالب زیر، درست هستند؟

آ: همه بازهای آرنیوس در ساختار خود، دارای یک یون چنداتیمی هستند.

ب: تعریف آرنیوس برای اسیدها یا بازها، محدود به محلول های آبی می شود.

پ: مقدار ۰/۵ مول سولفوریک اسید با ۰/۵ مول باریم هیدروکسید، خنثی می شود.

ت: معادله یونش نیتروواسید یک طرفه، ولی معادله یونش HCN در آب برگشت پذیر است.

(۴) آ و ت

(۳) ب و ت

(۲) آ و پ

(۱) ب و پ

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

عبارت های (ب) و (پ) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: یون هیدروکسید با نماد شیمیایی OH^- ، در ساختار بسیاری از مواد بازی از جمله سدیم هیدروکسید و باریم هیدروکسید وجود دارد. توجه داریم که برخی از بازهای آرنیوس مثل آمونیاک و ترکیب های آمینی مثل متیل آمین، از جمله مواد مولکولی به شمار رفته و در ساختار مولکولی خود فاقد یون هیدروکسید یا هر یون دیگری هستند.

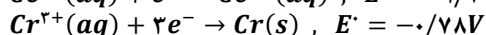
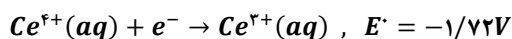
ب: آرنیوس تعریف خود از اسیدها و بازها را صرفا محدود به محلول های آبی کرد. براساس یافته های تجربی آرنیوس، هنگامی که اسیدها و بازها در آب حل می شوند، مقدار یون های موجود در آب را افزایش می دهند و به همین خاطر، محلول اسیدها و بازها رسانای جریان الکتریکی هستند. براساس نظریه آرنیوس، اسید ماده ای است که در آب حل می شود و طی انحلال خود، غلظت یون هیدروژن را در محلول افزایش می دهد. براساس این نظریه، باز ماده ای است که در آب حل می شود و طی انحلال خود، غلظت یون هیدروکسید را در محلول افزایش می دهد.

پ: سولفوریک اسید دوظرفیتی بوده و باریم هیدروکسید نیز یک باز دوظرفیتی است. با توجه به یکسان بودن ظرفیت این دو ماده، می توان گفت ۰/۵ مول از سولفوریک اسید با ۰/۵ مول باریم هیدروکسید واکنش می دهد.

ت: نیترو اسید (HNO_3)، همانند هیدروسیانیک اسید (HCN)، یک اسید ضعیف با یونش جزئی است. این دو ماده بر اساس واکنش های تعادلی در محلول خود یونش پیدا می کنند.

گروه آموزشی ماز

۳- معادله کاهشی نیم واکنش های انجام شده در یک سلول گالوانی به صورت زیر است. در رابطه با این سلول و واکنش کلی انجام شده در آن، کدام مطلب داده شده درست است؟



(۱) کاتیون $Ce^{3+}(aq)$ در این واکنش، کاهش یافته و در نقش عامل اکسنده است.

(۲) با توجه به معادله نیم واکنش های داده شده، قدرت کاهندگی $Ce^{3+}(aq)$ کمتر از اتم کروم است.

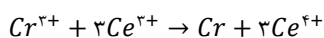
(۳) مقدار E° واکنش انجام شده در سلول برابر ۰/۹۴ ولت بوده و این واکنش به صورت طبیعی پیشرفت دارد.

(۴) مجموع ضرایب استوکیومتری مواد پس از موازنه معادله واکنش برابر ۶ بوده و ۳ الکترون در این واکنش مبادله شده است.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

چون پتانسیل کاهشی کروم بیشتر است، یون های این ماده کاهش یافته و یون های Ce^{3+} نیز اکسید می شوند. در این فرایند، اتم کروم به عنوان فراورده تولید می شود. معادله این واکنش به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، یون Ce^{3+} الکترون از دست داده است. در رابطه با این واکنش، داریم:

$$emf = E^{\circ}(\text{کاتد}) - E^{\circ}(\text{آند}) = (-0/78) - (-1/72) = 0/94V$$

بررسی سایر گزینه ها:

۱) کاتیون $Ce^{3+}(aq)$ در این واکنش، الکترون از دست می دهد. بر این اساس، می توان گفت یون مورد نظر اکسایش یافته و در نقش عامل کاهنده است.

چون یون $Ce^{3+}(aq)$ الکترون از دست داده است، پس می توان گفت قدرت کاهندگی (تمایل به از دست دادن الکترون و اکسید شدن) یون $Ce^{3+}(aq)$ بیشتر از اتم کروم است.

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادله واکنش برابر ۸ بوده و ۳ الکترون در این واکنش مبادله شده است.

گروه آموزشی ماز

۴- اگر بر اثر واکنش کامل یک قطعه ۵۰ گرمی آلیاژ منگنز و نقره با محلول سولفوریک اسید، $6/72 L$ گاز در شرایط STP تولید شود، درصد جرمی فلز با عدد اتمی کمتر در این قطعه چقدر است؟ ($Ag = 108$ و $Mn = 55 : g.mol^{-1}$)

$$E^{\circ}(Mn^{2+}/Mn) = -1/18 V \quad E^{\circ}(Ag^{+}/Ag) = +0/80 V$$

۶۶ (۴)

۵۴/۵ (۳)

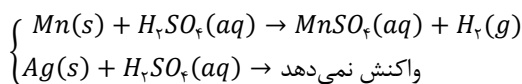
۴۹/۵ (۲)

۳۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (آسان - مساله - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

پتانسیل کاهشی استاندارد هیدروژن برابر با صفر ولت است. توجه داریم که فلزهایی با پتانسیل کاهشی مثبت، با یون هیدروژن موجود در محلول های اسیدی وارد واکنش نمی شوند. از آنجا که E° فلزهای منگنز (Mn) و نقره (Ag) به ترتیب منفی و مثبت است، تنها فلز منگنز با سولفوریک اسید واکنش می دهد و فلز نقره بدون تغییر باقی می ماند. معادله واکنش های مورد نظر به صورت زیر است:



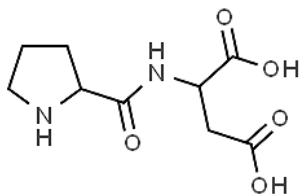
با استفاده از حجم گاز H_2 آزاد شده، جرم Mn مصرف شده را محاسبه می کنیم:

$$? g Mn = 6/72 L H_2 \times \frac{1 mol H_2}{22/4 L H_2} \times \frac{1 mol Mn}{1 mol H_2} \times \frac{55 g Mn}{1 mol Mn} = 16/5 g Mn$$

در نهایت درصد جرمی فلز با عدد اتمی کمتر (یعنی فلز منگنز) را محاسبه می کنیم:

$$\text{درصد جرمی فلز } Mn = \frac{\text{جرم } Mn}{\text{جرم آلیاژ}} \times 100 = \frac{16/5}{50} \times 100 = 33 \text{ درصد}$$

گروه آموزشی ماز



۴ (۴)

۵- چه تعداد از عبارتهای داده شده در رابطه با ترکیب مقابل درست است؟

آ: در ساختار این ماده، فقط ۲ اتم کربن با عدد اکسایش ۲- وجود دارد.

ب: انحلال پذیری این ماده در آب در مقایسه با اسیدهای چرب کمتر است.

پ: شمار اتمهای H در این ماده، ۲ برابر شمار اتمهای H در اتیلن گلیکول است.

ت: گروه عاملی موجود در ساختار مولکول اوره، در ساختار این ترکیب یافت می شود.

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

فقط عبارت (ت) درست است.

بررسی موارد:

آ: اتمهای کربنی از ترکیب داده شده که به ۲ اتم کربن و به ۲ اتم هیدروژن متصل شده اند، عدد اکسایش ۲- دارند. در ساختار این ماده، ۳ اتم کربن با عدد اکسایش ۲- وجود دارد که ۲ مورد از آن ها در ساختار حلقه کربنی قرار گرفته اند.

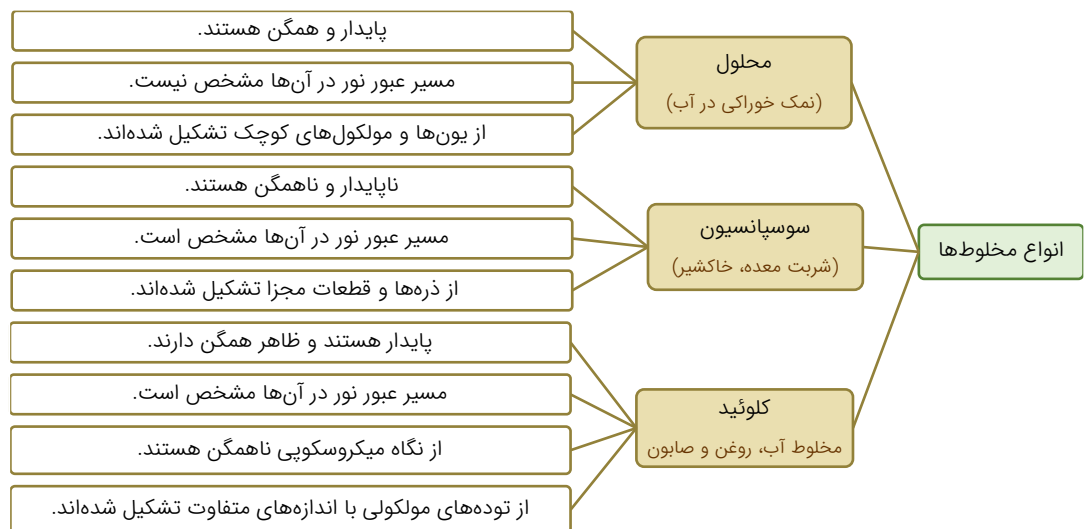
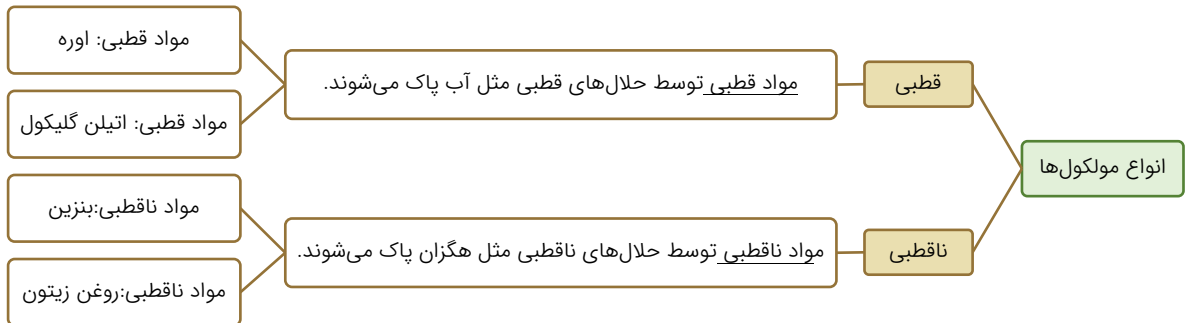
ب: در ساختار ترکیب مورد نظر، یک عاملی آمینی، یک عامل آمیدی و ۲ عامل اسیدی قرار گرفته و اتمهای موجود در ساختار این گروه های عاملی، با آب پیوند هیدروژنی برقرار می کنند. با توجه به توانایی بالای این ترکیب در برقراری پیوند هیدروژنی و کوچک بودن بخش های ناقطبی آن، این ماده به خوبی در آب حل می شود. این در حالی است که اسیدهای چرب نامحلول در آب هستند.

پ: فرمول شیمیایی ترکیب داده شده به صورت $C_4H_{14}N_2O_5$ است. همانطور که مشخص است، در ساختار این ماده ۱۴ اتم هیدروژن وجود دارد در حالی که در ساختار اتیلن گلیکول، ۶ اتم هیدروژن یافت می شود.

ت: در ساختار اوره، گروه عاملی آمیدی وجود دارد. در ساختار ترکیب داده شده نیز گروه عاملی آمیدی یافت می شود.

گروه آموزشی ماز

بریم سراغ جمع بندی از نیمسال اول دوازدهم



قدرت پاک‌کنندگی صابون

- هرچه قدر که صابون درصد چربی بیشتری را پاک کند، قدرت بیشتری دارد.
- با افزایش مقدار صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش پیدا می‌کند.
- استفاده از پارچه نخی بجای پلی‌استری، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.
- هرچه آب سختی داشته باشد، قدرت پاک‌کنندگی صابون کاهش پیدا می‌کند.
- افزافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.
- با افزایش دما، قدرت پاک‌کنندگی صابون افزایش پیدا می‌کند.

ذرات چربی با پارچه پلی‌استری پیوند قوی‌تری برقرار می‌کنند

یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت با صابون تشکیل رسوب می‌دهند.

پاک‌کننده غیرصابونی

- فرمول شیمیایی کلی این پاک‌کننده‌ها به صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است.
- در این فرمول، R معادل زنجیر هیدروکربنی بوده و به همراه حلقه بنزنی، بخش ناقطبی پاک‌کننده را تشکیل می‌دهد.
- این پاک‌کننده‌ها نسبت به صابون قدرت پاک‌کنندگی بالاتری داشته و آن را در آب سخت نیز حفظ می‌کنند.
- با استفاده از بنزن و سایر مواد اولیه، طی واکنش‌های پیچیده در صنعت تولید می‌شوند.

پاک‌کننده‌های خورنده

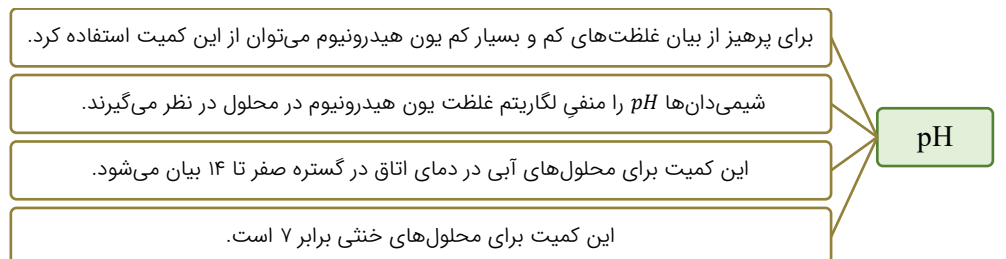
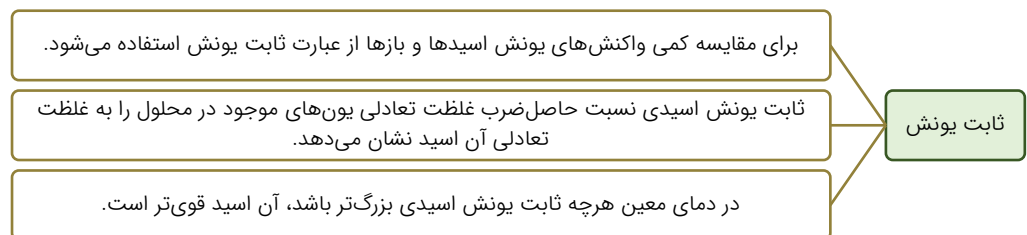
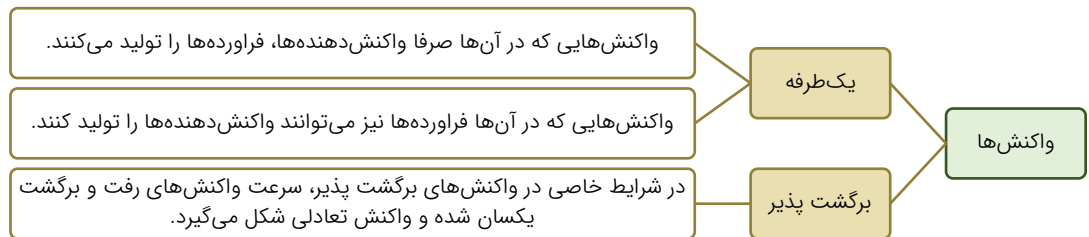
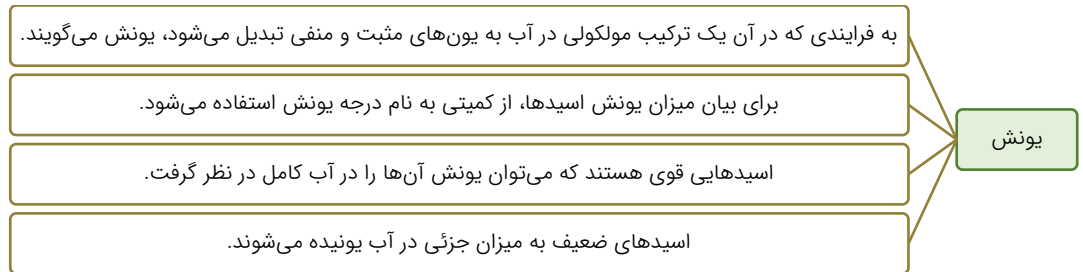
- این نوع از پاک‌کننده‌ها افزون بر برهم‌کنش با آلاینده‌ها، با آن‌ها واکنش نیز می‌دهند.
- موادی مانند هیدروکلریک اسید (جوهر نمک)، سدیم هیدروکسید (سود سوزآور) و سفیدکننده‌ها از جمله این مواد هستند.

پودر سدیم هیدروکسید و آلومینیم

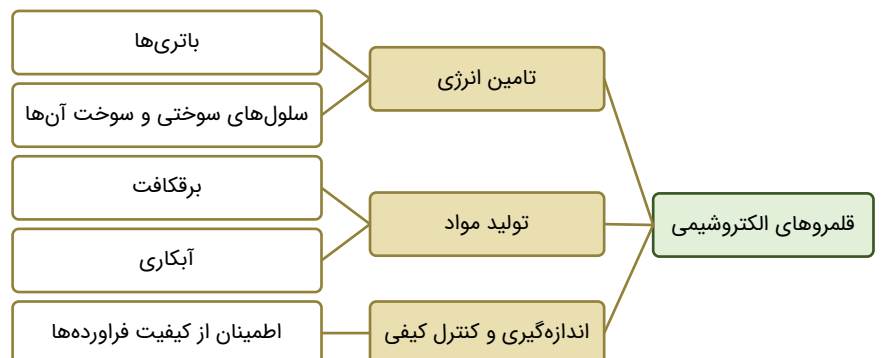
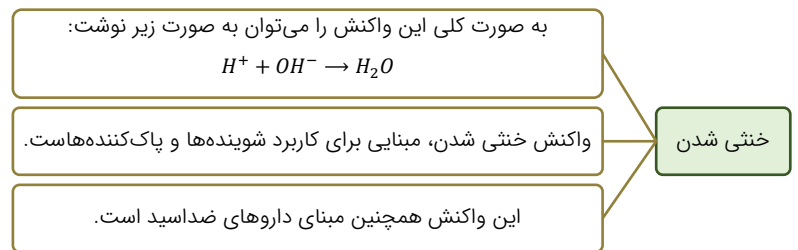
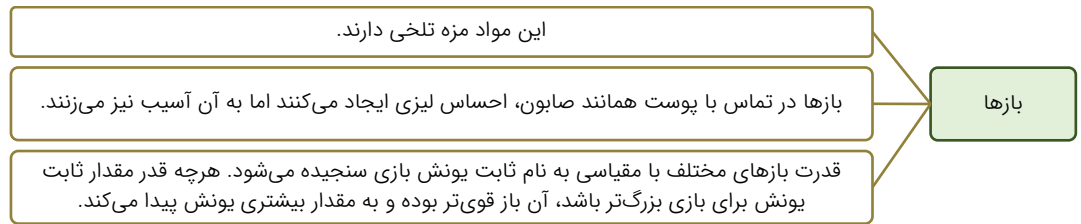
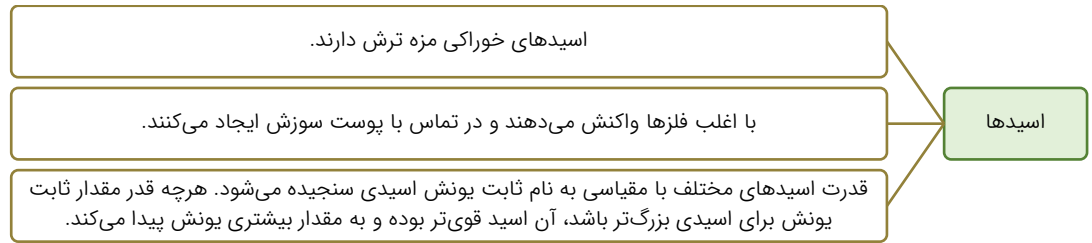
- از این پاک‌کننده که خاصیت بازی دارد، برای باز کردن مجرای مسدود شده توسط آلاینده‌هایی با خاصیت اسیدی مانند اسیدهای چرب استفاده می‌شود.
- گاز هیدروژن فراورده این واکنش است که آلاینده‌ها را با وارد کردن ضربه جدا می‌کند.
- این واکنش گرماده بوده و با تولید گرما باعث جداسازی ذرات چربی می‌شود.
- فراورده دیگر این واکنش صابون است که خود باعث حل شدن چربی‌ها می‌شود.

آرنیوس

- شیمی‌دان‌ها قبل از شناخته شدن ساختار اسید و بازها، با ویژگی‌های اسیدها و بازها و برخی واکنش‌های آن‌ها آشنا بودند.
- سوانت آرنیوس اسیدها و بازها را بر یک مبنای علمی توصیف کرد. او بر روی رسانایی الکتریکی محلول‌ها کار می‌کرد.
- هر ماده‌ای که با حل شدن در آب غلظت یون هیدرونیوم را افزایش دهد، اسید آرنیوس است.
- هر ماده‌ای که با حل شدن در آب غلظت یون هیدروکسید را افزایش دهد، باز آرنیوس به‌شمار می‌رود.
- هرچه $[H^+]$ در محلولی بیشتر باشد، آن محلول اسیدی‌تر و هرچه $[OH^-]$ در محلولی بیشتر باشد، آن محلول بازی‌تر است.



گل ادریسی	کاغذ pH		
آبی	قرمز	محیط اسیدی	رنگ مواد در محیط‌های مختلف
قرمز	آبی	محیط بازی	





سفر الکترون

- اتصال فلزها در شرایط مناسب یکی از راههای استفاده از انرژی ذخیره شده در آنهاست.
- با استفاده از دو تیغه فلزی با جنس متفاوت و لیمو می‌توان یک لامپ را روشن کرد.
- در باتری، بخشی از انرژی شیمیایی مواد به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.
- چراغ خورشیدی از لامپ، سلول خورشیدی و باتری قابل شارژ تشکیل شده است.

اکسایش-کاهش

- واکنشی که با تبادل الکترون همراه است، واکنش اکسایش-کاهش نامیده می‌شود.
- گرفتن الکترون، کاهش نام دارد.
- از دست دادن الکترون، اکسایش نام دارد.
- فرایند گرفتن و از دست دادن الکترون را به ترتیب با نیم‌واکنش کاهش و اکسایش نمایش می‌دهند.
- نیم‌واکنش‌ها باید از نظر جرم و بار الکتریکی موازنه شوند.

اکسنده-کاهنده

- گونه کاهنده در نیم‌واکنش اکسایش، الکترون از دست می‌دهد.
- گونه اکسنده در نیم‌واکنش کاهش، الکترون می‌گیرد.
- فلزها اغلب کاهنده و نافلزها اغلب اکسنده هستند.

جاری شدن انرژی

- در برخی واکنش‌های اکسایش کاهش، انرژی نیز آزاد می‌شود.
- واکنش آلومینیم و آهن با محلول حاوی $CuSO_4$
- در این واکنش‌ها دمای محلول افزایش پیدا می‌کند
- واکنش ندادن طلا با محلول حاوی $CuSO_4$
- ثابت بودن دما نشان‌دهنده انجام نشدن طبیعی واکنش است.

هرچه قدر افزایش دما بیشتر باشد قدرت کاهندگی فلز واکنش دهنده بالاتر است.

سلول گالوانی

- اگر بجای داد و ستد مستقیم الکترون، آن را از طریق یک مدار بیرونی هدایت کنیم، می‌توانیم بخشی از انرژی شیمیایی آزاد شده را استفاده کنیم.
- سلول گالوانی برای استفاده از انرژی واکنش‌های اکسایش-کاهش کاربرد دارد.
- این سلول شامل دو نیم‌سلول آند و کاتد و یک دیواره متخلخل است.
- دیواره متخلخل با کمک به عبور یون‌ها، باعث خنثی ماندن سلول می‌شود.

آند سلول گالوانی

- به دلیل تولید الکترون، نیم سلول آن را با علامت منفی نشان می دهند.
- در این نیم سلول، گونه‌ی کاهنده‌تر حضور دارد.
- در این نیم سلول، نیم واکنش اکسایش انجام می شود.
- با تبدیل شدن اتم‌های خنثی موجود در تیغه به یون‌های محلول در آب، به مرور وزن تیغه آندی کاهش پیدا می کند.
- کاتیون‌های تولید شده از طریق دیواره متخلخل به سمت نیم سلول کاتد حرکت می کنند.
- در این نیم سلول، الکترون‌های تولید شده و از طریق مدار بیرونی به سمت نیم سلول کاتد حرکت می کنند.

کاتد سلول گالوانی

- به دلیل مصرف الکترون، نیم سلول آن را با علامت مثبت نشان می دهند.
- در این نیم سلول، گونه‌ی اکسنده‌تر حضور دارد.
- در این نیم سلول، نیم واکنش کاهش انجام می شود.
- با تبدیل شدن کاتیون‌های موجود در محلول به اتم‌های فلزی، به مرور وزن تیغه کاتدی افزایش پیدا می کند.
- آنیون‌های اضافی این محلول از طریق دیواره متخلخل به سمت نیم سلول آند حرکت می کنند.
- در این نیم سلول، الکترون‌های تولید شده در نیم سلول آند مصرف می شوند.

SHE

- اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم سلول به طور جداگانه امکان ندارد پس باید نسبی اندازه‌گیری شود.
- نیم سلول استاندارد هیدروژن (SHE) به عنوان مبنا انتخاب شده است.
- پتانسیل این نیم سلول برابر صفر در نظر گرفته شده است.
- با تشکیل سلول توسط نیم سلول استاندارد هیدروژن و سایر نیم سلول‌ها، پتانسیل آن‌ها را اندازه‌گیری می کنند.
- این اندازه‌گیری در دمای اتاق و فشار یک اتمسفر و غلظت یک مولار برای محلول الکترولیت انجام می شود.
- پتانسیل استاندارد نیم سلول را با نماد E^0 نشان می دهند.

emf

- اختلاف پتانسیل دو نیم سلول، نیروی الکتروموتوری نام دارد.
- نیروی الکتروموتوری را با نماد emf نشان می دهند.
- مقدار آن را از کم کردن پتانسیل نیم سلول آند از پتانسیل نیم سلول کاتد محاسبه می کنیم.



سری الکتروشیمیایی

رتبه‌بندی فلزها برحسب E^0 آن‌ها در یک جدول، سری الکتروشیمیایی نامیده می‌شود.

در سری الکتروشیمیایی، از پایین به بالا پتانسیل استاندارد نیم سلول‌ها افزایش پیدا می‌کند.

در سری الکتروشیمیایی، نیم واکنش‌ها به صورت کاهش نوشته می‌شوند.

در سری الکتروشیمیایی، گونه اکسند و الکترون در سمت چپ نوشته می‌شوند.

در سری الکتروشیمیایی، گونه کاهنده در سمت راست نوشته می‌شود.

قدرت اکسندگی-کاهندگی

در سری الکتروشیمیایی هرچه بالاتر می‌رویم

پتانسیل استاندارد افزایش پیدا می‌کند.

قدرت اکسندگی افزایش می‌یابد

قدرت کاهندگی کاهش می‌یابد

در سری الکتروشیمیایی هرچه پایین‌تر می‌رویم

پتانسیل استاندارد کاهش پیدا می‌کند.

قدرت اکسندگی کاهش می‌یابد

قدرت کاهندگی افزایش می‌یابد.

لیتیم

در بین فلزها کم‌ترین E^0 را دارد.

در بین فلزها کم‌ترین چگالی را دارد.

برای ساخت باتری‌های سبک‌تر، کوچک‌تر و با توانایی ذخیره انرژی بیشتر کاربرد دارد.

در ساخت باتری‌های دگمه‌ای و قابل شارژ کاربرد دارد.

سلول سوختی

سلول سوختی نوعی سلول گالوانی برای تامین انرژی است.

بازده سوزاندن گاز هیدروژن حدود ۲۰ درصد است و این بازده در سلول گالوانی به حدود ۶۰ درصد می‌رسد.

اتلاف انرژی در این روش بسیار کمتر از استفاده از سوخت‌های فسیلی است.

رایج‌ترین سلول سوختی، سلول هیدروژن-اکسیژن است.

هر سلول سوختی از سه جزء اصلی تشکیل شده است.

آند

کاتد

غشای مبادله کننده



عدد اکسایش

- از کم کردن شمار الکترونهای نسبت داده شده به اتم از شمار الکترونهای ظرفیت آن بدست می آید.
- افزایش عدد اکسایش به معنای از دست دادن الکترون است.
- کاهش عدد اکسایش به معنای گرفتن الکترون است.
- عدد اکسایش اتمهای خنثی برابر صفر است.
- عدد اکسایش یونهای تک اتمی برابر بار یون الکتریکی آنهاست.

سلول الکترولیتی

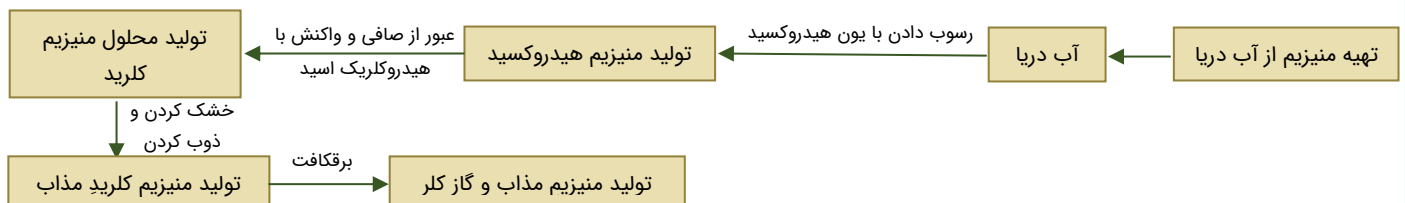
- همانند سلول گالوانی**
 - در نیم سلول کاتد، نیم واکنش کاهش انجام می شود.
 - در نیم سلول آند، نیم واکنش کاهش انجام می شود.
- برخلاف سلول گالوانی**
 - با مصرف انرژی، واکنش را در جهت دلخواه پیش می بریم.
 - آند قطب مثبت و کاتد قطب منفی سلول است.
 - الکترودها معمولا در واکنش شرکت نمی کنند.

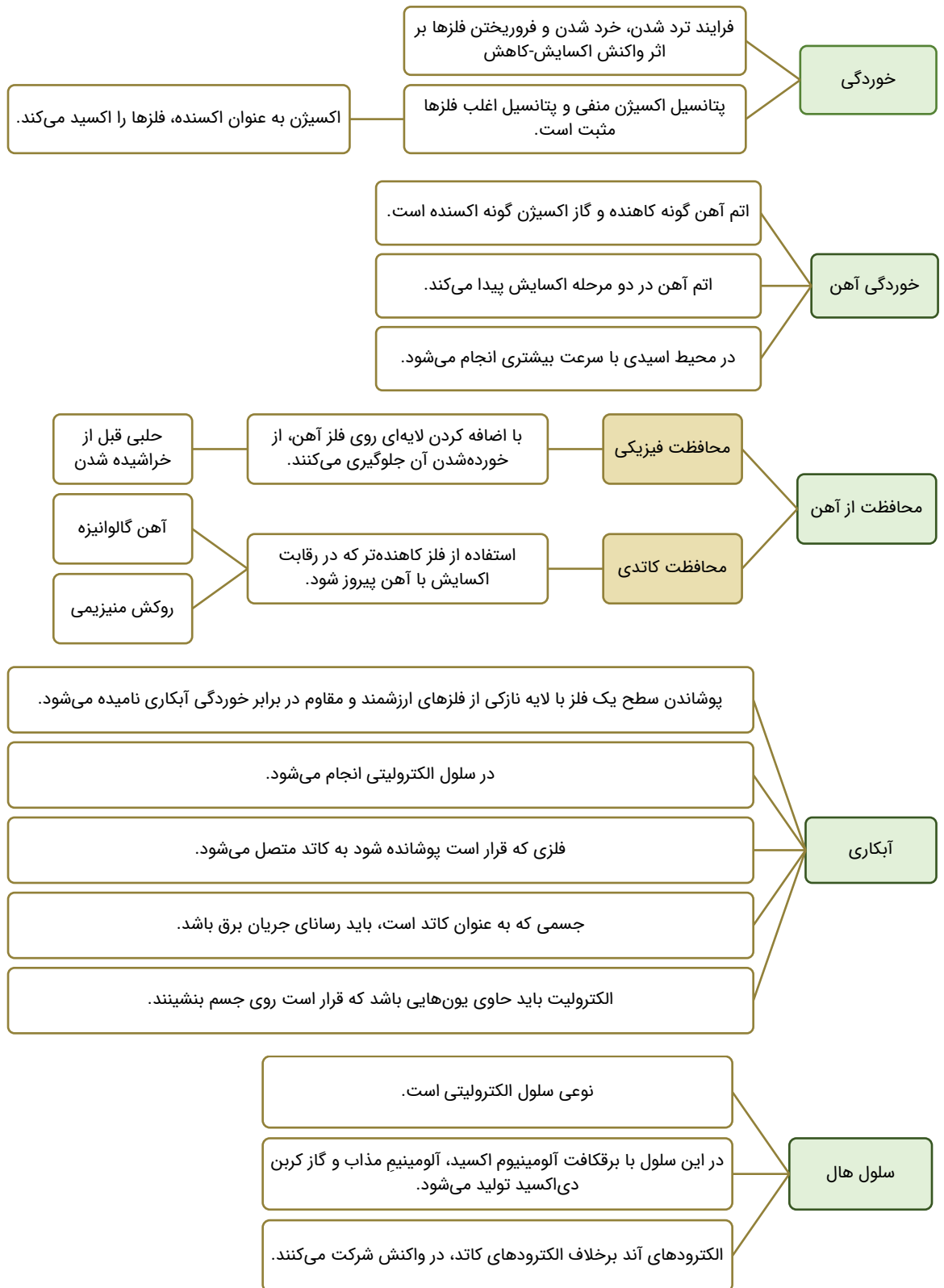
برقکافت آب

- نوعی سلول الکترولیتی است.
- در این سلول با مصرف انرژی، مولکولهای آب به عناصر سازنده خود تجزیه می شوند.
- در اطراف نیم سلول آند، گاز اکسیژن و یون هیدروژن تولید می شود.
- در اطراف نیم سلول کاتد، گاز هیدروژن و یون هیدروکسید تولید می شود.
- برای برقکافت آب باید اندکی الکترولیت به آن اضافه کنیم.

برقکافت سدیم کلرید

- نوعی سلول الکترولیتی است.
- در این سلول با مصرف انرژی، نمک سدیم کلرید مذاب به عناصر سازنده خود تجزیه می شود.
- نقطه ذوب سدیم کلرید خالص، ۸۰۱ درجه سانتی گراد است.
- پس از اضافه کردن کلسیم کلرید، نقطه ذوب آن به ۵۸۷ درجه سانتی گراد می رسد.
- برای برقکافت آب باید اندکی الکترولیت به آن اضافه کنیم.







دیجی ماز ، کتابخانه ی دیجیتال ماز

دیجی ماز به پلتفرم الکترونیکی و آموزشی که بهتون کمک میکنه در هر زمان و مکانی به کتاب های درسی و کمک درسیتون دسترسی داشته باشین و ازشون استفاده کنین .



دیجی ماز این بستر رو برات فراهم میکنه تا بتونی همه ی کتاب هات رو در یک اپلیکیشن کنار هم داشته باشی و همه جا با خودت ببریشون



تولید کمتر کاغذ به
حفظ محیط زیستمون
کمک میکنه



هزینه ی کتاب های الکترونیکی
خیلی کمتر از کتاب های
چاپ شده است



یک بار هر کتابی رو میخری
ولی با هر چاپ جدید و
آپدیت محتوای کتاب ،
بهش دسترسی
کامل داری !



سری کتاب های تاپ گان ماز منتشر شد

کامل ترین سلاح هر کنکوری

تهیه ی **کتاب تاپ گان ریاضی و فیزیک** ،

هم اکنون از طریق سایت و اپلیکیشن دیجی ماز

آشنایی بیشتر با امکانات اپلیکیشن و تهیه ی کتاب ها از طریق [سایت digimaze.org](http://digimaze.org)



[digimaze_org](https://www.instagram.com/digimaze_org)



[AzmonVIP](https://t.me/AzmonVIP)



digimaze.org

دسترسی رایگان به آرشیو آزمون های ماز در سال تحصیلی گذشته

همه دانش آموزان مازی که در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳
در آزمون ماز شرکت می کنند

برای دسترسی به آرشیو کامل سوالات و پاسخنامه آزمون های
ماز در سال گذشته، تنها کافیست سه مرحله زیر را سیری کنید

✓ اپلیکیشن دیجی ماز را از سایت دیجی ماز (digimaze.org)
دانلود کنید.

✓ با شماره تماسی که در سایت ماز حساب کاربری ایجاد کرده اید
در اپلیکیشن دیجی ماز وارد شوید. (نیاز به ثبت نام نیست)

✓ در بخش (کتاب های من) فایل آرشیو آزمون ها را دانلود و استفاده کنید.

دانلود نسخه اندروید اپلیکیشن دیجی ماز



دانلود نسخه iOS اپلیکیشن دیجی ماز



دانلود نسخه دسکتاپ اپلیکیشن دیجی ماز



<https://B2n.ir/k43352>

تذکر

برای دانش آموزانی که از این به بعد در آزمون ماز (یا هر محصول ماز که شامل آزمون ماز
هست) ثبت نام کنند، حداکثر **ظرف مدت ۵۱ روز** این آرشیو در اپلیکیشن دیجی

ماز فعال می شود.



AzmonVIP