



کد کنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۲/۰۹/۱۶



گروه آموزشی ماز

آزمون الکترونیکی کنکوری های ریاضی - مرحله ۵

آزمون اختصاصی - دفترچه ۱

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخ گویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیر قانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+\sqrt{x}}-2}{1-\sqrt[3]{x}}$ کدام عدد است؟

- ۷/۴ (۴)
- ۷/۸ (۳)
- ۲۱/۴ (۲)
- ۲۱/۸ (۱)

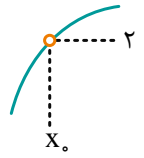
۲- اگر $f(x) = \frac{1-\cos^m 2x}{1-\cos^2 mx}$ به طوری که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ مقدار m کدام است؟

- ۱/۲ (۴)
- ۲ (۳)
- ۱/۲ (۲)
- ۲ (۱)

۳- اگر $f(x) = \left[\frac{16}{x^2} \right] - k \left[\frac{x^4}{2} \right]$ در $x=2$ دارای حد باشد، مقدار k کدام است؟

- ۲ (۴)
- ۲ (۳)
- ۱ (۲)
- ۱ (۱)

۴- قسمتی از نمودار $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+\sqrt{x+2}}$ به صورت شکل مقابل است. مقدار $a+b-x_0$ کدام است؟



- ۱۰ (۲)
- ۸ (۱)
- ۱۲ (۴)
- ۶ (۳)

۵- تابع $f(x) = \lfloor [x] - 4x + 2k \rfloor$ در $x=3$ دارای حد است. مقدار k چه عددی است؟

- ۱۹/۴ (۴)
- ۱/۴ (۳)
- ۱/۹ (۲)
- صفر (۱)

۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+b}-a}{2x^2-3x+1} = \frac{a}{4}$ مقدار $\frac{a}{b+1}$ کدام است؟

- ۳/۴ (۴)
- ۲ (۳)
- ۲/۳ (۲)
- ۱ (۱)

۷- مقادیر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+(-1)^{[x]}}{(x-2)^2}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^{[x]}}{4-x^2}$ به ترتیب کدام است؟

- ∞ و +∞ (۴)
- +∞ و -∞ (۳)
- +∞ و +∞ (۲)
- ∞ و -∞ (۱)

محل انجام محاسبات



۸- هرگاه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a \sin \frac{\pi}{4} x}{3 + 2a + a \cos \frac{\pi}{2} x} = +\infty$ ، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) a یافت نمی شود.

۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - 2a(-1)^{[x]}}{2x^2 - 3x + b} = +\infty$ ، مقدار $a + b$ کدام می تواند باشد؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۱۰- اگر $f(x) = \frac{|x|-1}{x+[-x]}$ ، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

۱۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+a}{x-b}$ را دو واحد به چپ انتقال داده، سپس نسبت به محور x ها قرینه می کنیم. ضابطه تابع حاصل به صورت $g(x) = \frac{2x+3}{3-x}$ خواهد بود. حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۲- نقطه $A(-3, 4)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. اگر خط $y = 3x + 3$ از نقطه متناظر A بر روی نمودار تابع عبور کند، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) -۶

۱۳- به ازای چند مقدار m ، تابع $y = \frac{x+m}{|x-1|+|x-3|}$ در \mathbb{R} یکنواست؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

۱۴- تابع $f(x) = ax - |3x - 6|$ غیر یکنواست. اگر مساحت ناحیه محدود به نمودار f و محور x ها در ناحیه اول برابر ۴ باشد، a کدام است؟ ($a > 0$)

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۵- اگر $f(x)$ و $1-2x$ به ترتیب خارج قسمت و باقی مانده تقسیم چند جمله ای $g(x) = x^7 - 8x^4 + x^2 + ax + b$ بر $x^2 - 3x + 2$ باشند، باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

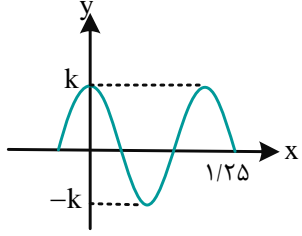
محل انجام محاسبات



۱۶- از نظر عددی، ماکزیمم مقدار تابع $y = 3 - 2\cos\frac{x}{4}$ چقدر از دوره تناوب تابع $y = \frac{\tan 2\pi x}{1 - \tan^2 2\pi x}$ بیشتر است؟

- ۳/۵ (۱)
- ۳/۷۵ (۲)
- ۴/۵ (۳)
- ۴/۷۵ (۴)

۱۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 4\sin^2(b\pi x)$ به صورت مقابل است. حاصل $a+k+|b|$ کدام است؟

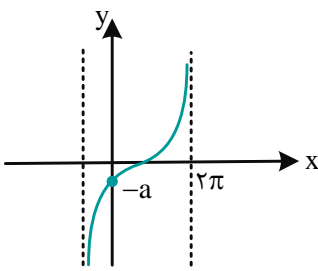


- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

۱۸- مساحت یک مثلث برابر ۲۴ و زاویه بین دو ضلع با اندازه‌های ۱۰ و ۶ برابر α است. اگر اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α برابر θ باشد، مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

- $\frac{24}{5}$ (۱)
- $\frac{24}{7}$ (۲)
- $\frac{12}{5}$ (۳)
- $\frac{12}{7}$ (۴)

۱۹- نمودار تابع $y = a \tan(\frac{x}{a} + b\pi)$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. حاصل ab کدام است؟ ($0 < b < 1$)



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- $\frac{4}{3}$ (۴)

۲۰- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x - \cos x \sin 2x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چقدر است؟

- 2π (۱)
- 3π (۲)
- 4π (۳)
- 5π (۴)

۲۱- اگر A و B ماتریس‌های 3×3 باشند، حاصل عبارت $B + A \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ کدام است؟

- $3I$ (۱)
- $AB + 3BA$ (۲)
- $AB + 3A + 3B$ (۳)
- $3AB$ (۴)

محل انجام محاسبات



۲۲- اگر ماتریس $C_{2 \times 2}$ چنان باشد که $CI = 3I$ ، $C \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ ، آن گاه اختلاف درایه های روی قطر اصلی ماتریس C کدام است؟

(۱) ۲۸ (۲) ۱۸ (۳) ۱۷ (۴) ۲۷

۲۳- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} -4 & -1-2|A| \\ 3 & |A|-3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع مقادیر ممکن برای $|A^{-1}|$ کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{15}$ (۲) $\frac{2}{15}$ (۳) $\frac{1}{15}$ (۴) $-\frac{1}{15}$

۲۴- صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نیست و با مولد سطح مخروطی هم موازی نیست. اگر صفحه از رأس سطح مخروطی عبور نکند، چه تعداد از موارد زیر می تواند سطح مقطع حاصل باشد؟

الف: دایره ب: بیضی پ: سهمی ت: هذلولی ث: یک خط ج: دو خط متقاطع

(۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۵- در مثلث ABC به اضلاع $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=6$ ، چند نقطه روی محیط مثلث موجود است که از A و B به یک فاصله قرار داشته و از C به فاصله ۳ باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) بی شمار

۲۶- از بین اعداد طبیعی سه رقمی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که مربع آن عدد در تقسیم بر ۱۲ باقی مانده ۴ داشته باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{12}$

۲۷- با توجه به نمادهای m و k م، مجموع ارقام عدد حاصل از $(8! + 7, 10^5) + [15, 15]$ کدام است؟

(۱) ۳۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۵ (۴) ۲۹

۲۸- کوچک ترین عدد طبیعی که در تقسیم بر b خارج قسمت و باقی مانده ای به ترتیب برابر q و 8 دارد و در تقسیم بر $b+1$ خارج قسمت و باقی مانده ای به ترتیب برابر $q-2$ و 11 دارد را a می نامیم. رقم دهگان a کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

۲۹- اگر اعداد $53, a-8, a+70$ دو به دو به پیمانه m که در آن m عددی طبیعی و دو رقمی است، هم نهشت باشند، آن گاه a کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

(۱) ۱۲۵ (۲) ۱۲۳ (۳) ۱۱۵ (۴) ۱۱۳

محل انجام محاسبات



۳۰- معادله سیالته خطی $63x + my = 1372$ در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد. m چه تعداد از اعداد طبیعی دو رقمی می تواند باشد؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۲۰

۳۱- در درون هر یک از دو جعبه A و B به ترتیب ۴ و ۱۰ مهره وجود دارد که از مهره های جعبه A دقیقاً ۱ مهره و از مهره های جعبه B دقیقاً ۳ مهره قرمز هستند. در هر یک از حالات زیر، مهره ها را از کدام جعبه انتخاب کنیم تا احتمال دسترسی به حداقل یک مهره قرمز بیشتر باشد؟

- I: مجاز باشیم دقیقاً دو مهره از درون جعبه برداریم. II: مجاز باشیم دقیقاً سه مهره از درون جعبه برداریم.
 (۱) I:A , II:A (۲) I:A , II:B (۳) I:B , II:A (۴) I:B , II:B

۳۲- در پرتاب دو تاس با یکدیگر پیشامد A را آن تعریف می کنیم که حداقل یکی از دو تاس عددی اول باشد. کدام یک از پیشامدهای زیر با A ناسازگار است؟

- (۱) B: پیشامد آن که مجموع دو تاس عددی اول باشد. (۲) C: پیشامد آن که حاصل ضرب دو تاس عددی اول باشد.
 (۳) D: پیشامد آن که اختلاف دو تاس ۵ واحد باشد. (۴) E: پیشامد آن که مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

۳۳- سکه ای را متوالیاً پرتاب می کنیم. احتمال آن که حداقل یکی از دو پرتاب اول یا دوم پشت بوده و نیز در ۵ پرتاب نخست، روها بیشتر از پشت ها باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{32}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{21}{64}$ (۴) $\frac{21}{32}$

۳۴- در ۴ پرتاب یک سکه، پیشامد A آن است که از دو پرتاب اول و دوم حداقل یکی رو باشد و پیشامد B آن است که تعداد روها برابر ۲ باشد. احتمال آن که A یا B رخ دهد کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$ (۲) $\frac{13}{16}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۳۵- جعبه ای شامل ۴ مهره با شماره های ۱, ۲, ۳, ۴ در اختیار است. A, B, C هر کدام یک مهره با جایگذاری از درون آن بیرون می آورند. اگر بدانیم عدد A از هر دو عدد B و C بزرگ تر است، احتمال آن که اعداد B و C مساوی باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{49}{144}$ (۲) $\frac{11}{18}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۳۶- در مسابقات دوی ۸۰۰ متر بازی های آسیایی، ۴ نفر از شرق آسیا و ۴ نفر از غرب آسیا به فینال راه پیدا کرده اند. در بازی فینال، احتمال اول شدن همه دوندگان از شرق آسیا با هم برابر بوده و دو برابر احتمال اول شدن هر یک از نفرات غرب آسیاست. در لحظه شروع مسابقات «این چون اون» از شرق آسیا خطا کرده و از دور مسابقات خارج می شود و پس از شلیک تپانچه ۷ نفر به مسابقه ادامه می دهند. احتمال آن که «تپاشی گوشه» از شرق آسیا اول شود کدام است؟

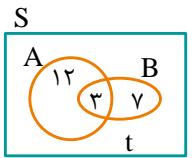
- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{1}{5}$

محل انجام محاسبات

۳۷- اگر پیشامد A به دو پیشامد A_1 و A_2 و نیز پیشامد B به دو پیشامد B_1 و B_2 افراز شده باشد، آن گاه $P(A|B)$ با کدام یک از روابط زیر برابر است؟

- (۱) $P(A_1|B) + P(A_2|B)$
- (۲) $P(A_1|B).P(A_2|B)$
- (۳) $P(A|B_1) + P(A|B_2)$
- (۴) $P(A|B_1).P(A|B_2)$

۳۸- در فضای نمونه S دو پیشامد A و B چنانند که $n(A-B)=12$ ، $n(A \cap B)=3$ و $n(B-A)=7$. مقدار t یعنی $n(A' \cap B')$ چنان است که دو پیشامد A و B مستقل شده‌اند. مجموع ارقام t کدام است؟



- (۱) ۷
- (۲) ۹
- (۳) ۱۰
- (۴) ۱۲

۳۹- در جعبه‌ای، ۴ مهره سفید و ۲ مهره قرمز است. تاسی را پرتاب کرده و به اندازه عدد رو شده، از جعبه مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که در مهره‌های بیرون آمده مهره قرمزی موجود باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{5}{6}$
- (۴) $\frac{7}{9}$

۴۰- جعبه‌های A، B، C به ترتیب شامل ۲، ۳، ۴ مهره‌اند که دقیقاً یکی از مهره‌های هر جعبه سیاه است. جعبه‌ای به تصادف انتخاب و مهره‌ای از درون آن انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مهره بیرون آمده سیاه است، احتمال آن که از جعبه C بوده باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{4}{9}$
- (۳) $\frac{3}{13}$
- (۴) $\frac{2}{7}$

محل انجام محاسبات



کد کنترل

122

A

پنجشنبه

۱۴۰۲/۰۹/۱۶



آزمون الکترونیکی کنکوری های ریاضی - مرحله ۵

آزمون اختصاصی - دفترچه ۲

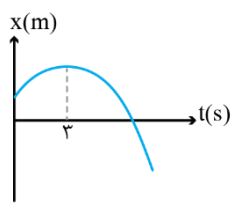
ملاحظات	زمان پاسخ گویی	تا شماره	از شماره	تعداد سوال	مواد امتحانی	ردیف
۵۵ سوال ۶۳ دقیقه	۳۳ دقیقه	۶۵	۴۱	۲۵	فیزیک	۱
	۳۰ دقیقه	۹۵	۶۶	۳۰	شیمی	۲

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیر قانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

۴۱- معادله مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = -2t^2 + 20t - 42$ است. در بازه زمانی که بردارهای مکان و سرعت خلاف جهت یکدیگر بوده و تندی متحرک در حال افزایش است، بردار سرعت متوسط آن در SI کدام خواهد بود؟

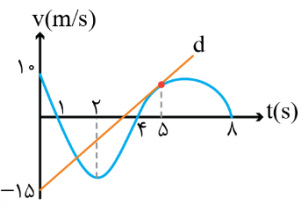
- (۱) $+14\vec{i}$
- (۲) $+4\vec{i}$
- (۳) $-14\vec{i}$
- (۴) $-4\vec{i}$

۴۲- نمودار مکان - زمان متحرکی که بر خط راست حرکت می کند به صورت سهمی شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه تغییر جهت حرکت برابر $\frac{m}{s}$ باشد، تندی متوسط متحرک در یک بازه دلخواه ۴ ثانیه ای که تندی متوسط متحرک در آن کمینه است، چند متر می باشد؟



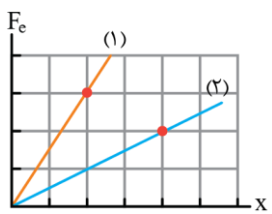
- (۱) ۴
- (۲) ۸
- (۳) ۱۶
- (۴) ۳

۴۳- نمودار سرعت - زمان جسمی به جرم 2kg که روی خط راست حرکت می کند، مانند شکل زیر است. اگر بزرگی نیروی خالص وارد بر جسم در لحظه $t = 5\text{s}$ معادل 14N باشد، بزرگی نیروی متوسط وارد بر جسم در ۵ ثانیه اول حرکت آن چند نیوتون خواهد بود؟ (خط d ، مماس بر نمودار در لحظه $t = 5\text{s}$ است.)



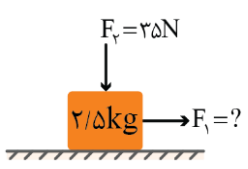
- (۱) ۱/۵
- (۲) ۶
- (۳) ۱۵
- (۴) ۶۰

۴۴- دو نیروی F_1 و F_2 مانند شکل مقابل به جسم ساکنی اثر می کنند و جسم روی سطح افقی حرکت خود را آغاز کرده و در ۴ ثانیه اول حرکت خود ۴۸ متر جابه جا می شود. اگر اندازه نیروی وارد بر جسم از طرف سطح افقی 75N باشد، اندازه نیروی F_1 بر حسب نیوتون کدام است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



- (۱) ۴۵
- (۲) ۵۰
- (۳) ۵۵
- (۴) ۶۰

۴۵- دو جسم A و B را به ترتیب توسط فنرهای (۱) و (۲) از سقف آویزان می کنیم. پس از تعادل یافتن هر دو جسم، تغییر طول فنر (۱)، نصف تغییر طول فنر (۲) می شود. اگر همین دو جسم را روی یک سطح افقی به ترتیب توسط نیروهای F_A و F_B به گونه ای حرکت دهیم که سرعت هر دو ثابت بماند، نسبت $\frac{F_A}{F_B}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) ۶
- (۴) $\frac{1}{6}$

محل انجام محاسبات

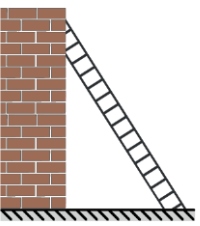
۴۶- شخصی به جرم 70 kg مانند شکل زیر، کتابی به جرم 400 g را به دیواره قائم یک آسانسور تکیه داده است و کتاب در آستانه حرکت به سمت پایین می‌باشد. اگر آسانسور در حال حرکت به سمت بالا بوده و بزرگی نیرویی که از طرف شخص به کف آسانسور وارد می‌شود 840 N باشد، بزرگی نیرویی که شخص به کتاب وارد می‌کند، چند نیوتون است؟



(ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی این کتاب و دیواره قائم به ترتیب $0/8$ و $0/6$ بوده و $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

- ۴ (۱)
- ۶ (۲)
- ۸ (۳)
- ۱۰ (۴)

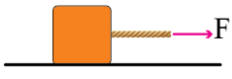
۴۷- مطابق شکل نردبانی به یک دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه داده شده و در حالت تعادل است. چه تعداد از عبارتهای زیر الزاماً صحیح است؟



الف: نیروی وزن نردبان و نیروی عمودی که سطح افقی بر نردبان وارد می‌کند برابرند.
 ب: نسبت بزرگی نیرویی که دیوار قائم بر نردبان وارد می‌کند به بزرگی وزن نردبان برابر با ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و نردبان است.
 ج: نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند بزرگ‌تر از نیرویی است که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند.
 د: برابری نیروهای وارد بر نردبان صفر است.

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

۴۸- مطابق شکل، با نیروی F و با استفاده از طنابی سبک، جسمی را از حال سکون به حرکت درمی‌آوریم. پس از مدتی، طناب پاره می‌شود و جسم به تدریج تحت تأثیر نیروی اصطکاک متوقف می‌شود. اگر مسافتی که جسم به صورت کندشونده طی می‌کند، n برابر مسافتی باشد که به صورت تندشونده طی کرده است، بزرگی نیروی F چند برابر نیروی اصطکاک بین جسم و سطح افقی است؟



- ۱ (۱)
- $n + 1$ (۲)
- n (۳)
- $\frac{n + 1}{n - 1}$ (۴)

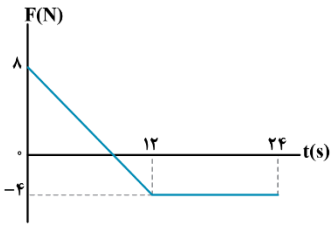
۴۹- معادلهٔ تکانه - زمان جسمی به جرم 600 گرم که روی محور x حرکت می‌کند، در SI برابر $p = t^2 - 6t + 5$ است. چه تعداد از عبارتهای زیر صحیح است؟

الف: نیروی متوسط وارد بر جسم در بازهٔ زمانی که به صورت تندشونده در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، صفر است.
 ب: جسم 2 ثانیه به صورت کندشونده حرکت کرده است.
 ج: شتاب متوسط جسم در ثانیهٔ اول حرکت برابر $\frac{5}{2}\text{ m/s}^2$ است.
 د: در مدتی که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بیشترین انرژی جنبشی آن $\frac{40}{3}\text{ J}$ است.

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

محل انجام محاسبات

۵۰- نمودار نیروی خالص متوسط وارد بر یک جسم مطابق شکل است. اگر نیروی متوسط وارد بر جسم در t_1 ثانیه اول صفر باشد،



تغییرات تکانه جسم در $\frac{t_1}{4}$ ثانیه اول چند واحد SI است؟

- (۱) ۳۲
- (۲) ۳۱/۵
- (۳) ۲۸
- (۴) ۲۸/۵

۵۱- گلوله‌ای به جرم ۲ kg در شرایط خلأ از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می‌شود. گلوله با تندی v به زمین برخورد می‌کند و با تندی $\frac{3}{5}v$ به سمت بالا برمی‌گردد. اگر مدت زمان برخورد گلوله با زمین $0/4s$ باشد، بزرگی نیروی متوسط خالص وارد بر گلوله در مدت زمان برخورد چند نیوتون است؟

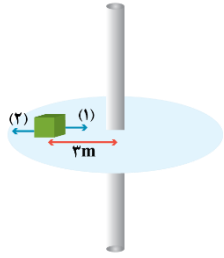
- (۱) ۶۴۰
- (۲) ۲۴۰
- (۳) ۲۸۰
- (۴) ۳۲۰

۵۲- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- الف: از آن جایی که جهت شتاب متوسط همواره با جهت تغییرات سرعت، یکسان است، بنابراین در حرکت دایره‌ای یکنواخت، جهت شتاب همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد.
- ب: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دوره تناوب (دوره) می‌نامیم.
- ج: در حرکت دایره‌ای عقربه‌های یک ساعت دیواری، دوره هر سه عقربه ثانیه‌شمار، دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار، یکسان می‌باشند.
- د: در حرکت دایره‌ای یکنواخت با تندی ثابت و معین، دوره حرکت با مجذور شعاع دوران، رابطه وارون دارد.

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۵۳- مطابق شکل، جسم کوچکی به جرم ۶۰۰ گرم روی یک صفحه دایره‌ای در فاصله ۳ متری محور قائم قرار دارد. صفحه حول محور قائم شروع به دوران می‌کند به گونه‌ای که در هر دقیقه ۱۰ دور کامل می‌زند. اگر جسم در مدت چرخش نسبت به صفحه دایره‌ای، ثابت بماند، نیروی اصطکاک وارد بر آن در کدام جهت و چند نیوتون است؟



- (۱) (۱) $\frac{\pi^2}{5}$
- (۲) (۱) $10\pi^2$
- (۳) (۲) $\frac{\pi^2}{5}$
- (۴) (۲) $10\pi^2$

۵۴- خودرویی به جرم ۴ تن در سطح افقی، مسیر دایره‌ای را با بیشینه تندی ممکن به صورت یکنواخت طی می‌کند. اگر بزرگی نیرویی که از طرف سطح زمین بر خودرو وارد می‌شود، $5 \times 10^4 N$ باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و لاستیک‌های خودرو چقدر است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

۵۵- شتاب گرانش در فاصله nR_e از سطح زمین برابر $\frac{2}{5} \frac{m}{s^2}$ و در فاصله mR_e از سطح زمین برابر $\frac{10}{625} \frac{m}{s^2}$ است. حاصل $n+m$ کدام است؟ (R_e شعاع زمین و شتاب گرانش در سطح زمین برابر $g = 10 \frac{m}{s^2}$ است.)

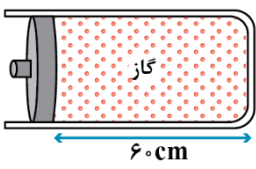
- (۱) ۵
- (۲) ۶
- (۳) ۴
- (۴) ۳

محل انجام محاسبات

۵۶- اگر تکانه ماهواره A، ۶ برابر تکانه ماهواره B و دوره حرکت آن ۸ برابر دوره حرکت ماهواره B باشد، نسبت اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره B به اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره A در حرکت دایره‌ای یکنواخت آن‌ها به دور زمین، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

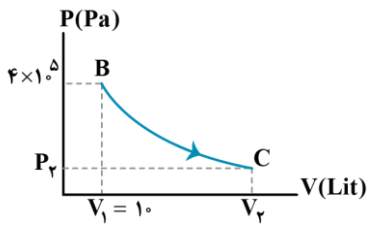
۵۷- مطابق شکل، مقداری گاز کامل درون محفظه‌ای در حالت تعادل قرار دارد. پیستونی سبک با مساحت 200 cm^2 که بدون اصطکاک می‌تواند روی ریلی حرکت کند، محفظه را از محیط بیرون جدا کرده است. از مجموعه گرما می‌گیریم و پیستون را با نیروی 40 N به سمت راست فشار می‌دهیم تا پیستون 6 cm به سمت راست جابه‌جا شود و در حضور این نیرو، مجموعه دوباره به تعادل برسد. انرژی درونی گاز در حالت نهایی، چند درصد کمتر از انرژی درونی اولیه آن است؟



- ($P_1 = 10^5 \text{ Pa}$)
 (۱) $91/8$ (۲) 90 (۳) $8/2$ (۴) 10

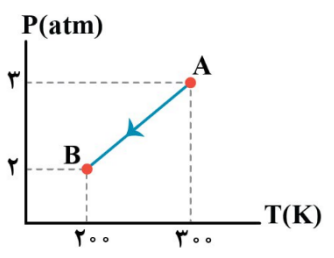
۵۸- نمودار شکل زیر برای 32 g گاز کامل O_2 است. این گاز در ظرفی به حجم 10 L و فشار $4 \times 10^5 \text{ Pa}$ زیر یک پیستون محبوس است. اگر فرایند BC هم‌دما باشد و اندازه کار انجام شده روی گاز 1200 J باشد، به ترتیب از راست به چپ دمای گاز در نقطه C چند

کلوین و گرمای دریافت شده توسط گاز در فرایند BC چند ژول است؟ ($M_{\text{O}_2} = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$)



- (۱) $1200, 500$
 (۲) $-1200, 400$
 (۳) $-1200, 500$
 (۴) $1200, 400$

۵۹- نمودار P-T کامل مطابق شکل زیر است. کار انجام شده توسط گاز بر روی محیط در فرایند AB چند ژول است؟



- ($1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$)
 (۱) 200
 (۲) -200
 (۳) صفر
 (۴) 100

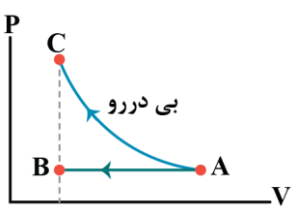
۶۰- مقداری گاز کامل درون محفظه‌ای با حجم متغیر قرار دارد و فشارسنج بوردون، فشار آن را برابر $1/4 \text{ atm}$ نشان می‌دهد. اگر در فشار ثابت، حجم گاز را از 4 L به 3 L برسانیم و انرژی درونی گاز در این فرایند به اندازه 360 J تغییر کند، گاز در این فرایند،

..... ژول گرما است. ($P_1 = 1 \text{ atm}$ و $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$)

- (۱) 600 گرفته (۲) 600 از دست داده
 (۳) 500 گرفته (۴) 500 از دست داده

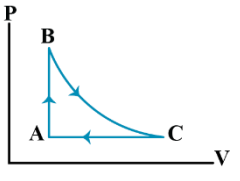
محل انجام محاسبات

۶۱- شکل مقابل نمودار P-V یک گاز کامل را در دو فرایند ترمودینامیکی نشان می دهد. کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟
 الف: اگر دمای گاز در نقاط A, B و C به ترتیب T_A , T_B و T_C باشد، آن گاه $T_C > T_A > T_B$ است.
 ب: کار انجام شده روی گاز در فرایند AB کوچک تر از اندازه گرمایی است که گاز در این فرایند از دست می دهد.
 ج: تغییر انرژی درونی گاز در فرایند AC بزرگ تر از کاری است که محیط در این فرایند روی گاز انجام می دهد.

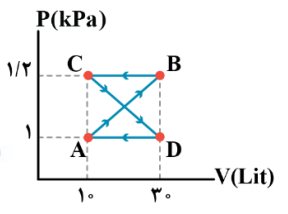


- (۱) الف) و (ب)
- (۲) فقط الف)
- (۳) (ب) و (ج)
- (۴) فقط (ج)

۶۲- شکل مقابل نمودار P-V یک چرخه ترمودینامیکی را که شامل یک فرآیند هم دما، یک فرآیند هم حجم و یک فرآیند هم فشار است نشان می دهد. گرما در فرآیند هم حجم برابر با
 (۱) اندازه تغییرات انرژی درونی در فرآیند هم فشار
 (۲) اندازه کار فرآیند هم فشار
 (۳) اندازه تغییرات انرژی درونی در فرآیند هم دما
 (۴) اندازه گرمای فرآیند هم فشار

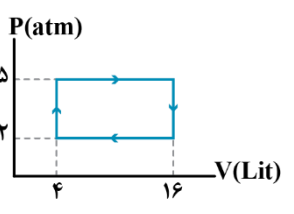


۶۳- مطابق شکل زیر، گاز کاملی فرایندی را از نقطه A شروع می کند و در نهایت دوباره به نقطه A می رسد. کل کاری که در این فرایند بر روی گاز انجام می شود، چند ژول است؟



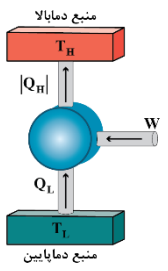
- (۱) ۱۰-
- (۲) ۱۰
- (۳) ۵
- (۴) صفر

۶۴- شکل مقابل چرخه یک ماشین گرمایی را نشان می دهد. اگر این ماشین در هر دقیقه ۲۵۲kJ گرما از منبع دمابالا بگیرد و ۱۵ چرخه را طی کند، در هر ساعت چند مگاژول گرما به منبع دماپایین می دهد؟



- (۱) ۱۱/۸۸
- (۲) ۳/۲۴
- (۳) ۱۱/۲۴
- (۴) ۳/۸۸

۶۵- شکل مقابل طرحواره ای از یک است. در این طرحواره، اگر $W=0$ باشد، قانون ترمودینامیک نقض می شود.



- (۱) یخچال - اول
- (۲) یخچال - دوم
- (۳) ماشین گرمایی - اول
- (۴) ماشین گرمایی - دوم

محل انجام محاسبات



۶۶- چند مورد از عبارات‌های زیر، درست هستند؟ (ثابت یونش بنزوئیک اسید (C_6H_5COOH) را برابر $10^{-5} mol.L^{-1}$ در نظر گرفته و چگالی هر محلول را برابر با چگالی آب خالص در نظر بگیرید. $H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$)
 آ: اگر در محلول استیک اسید، مقدار نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ چهار برابر شود، pH محلول 0.6 افزایش می‌یابد.
 ب: هرچه میزان یونش یک ماده در محلول خود بیشتر باشد، غلظت یون هیدرونیوم آن محلول بیشتر است.
 پ: اگر K_a فورمیک اسید $10^{-2} mol.L^{-1}$ باشد، غلظت $HCOO^-$ در محلول 0.2 مولار آن $270 ppm$ است.
 ت: 50 گرم محلول بنزوئیک اسید با $pH = 2/1$ ، با مقدار کافی اتانول واکنش داده و 0.5 مول ماده استری تولید می‌کند.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۷- برای تولید نوعی پاک‌کننده صابونی جامد، مقدار $99/4$ گرم اسید چرب با زنجیره هیدروکربنی سیر شده که نسبت تعداد پیوند اشتراکی به تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن برابر 14 است، استفاده می‌شود. اگر صابون تولید شده وارد 80 لیتر آب حاوی یون منیزیم با غلظت $42 ppm$ شود، چند درصد از صابون به رسوب تبدیل شده و جرم رسوب تولید شده طی این فرایند چقدر است؟ ($Mg = 24$ و $O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1$: $g.mol^{-1}$)

(۱) $82/6, 80$ (۲) $82/6, 40$ (۳) $78/4, 80$ (۴) $78/4, 40$

۶۸- کدام یک از عبارات‌های داده شده نادرست است؟

(۱) بنزین، از ذرات ناقطبی ساخته شده و نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در آن، 0.75 برابر اتیلن‌گلیکول است.
 (۲) در ساختار مولکول‌های عسل، اتم‌های اکسیژنی وجود دارد که به دو اتم متفاوت از دو عنصر مختلف متصل شده‌اند.
 (۳) ذرات سازنده موجود در کلوئیدها از ذرات سازنده محلول‌ها بزرگ‌تر و از ذرات سازنده سوسپانسیون‌ها، کوچک‌تر هستند.
 (۴) پس از استفاده از پاک‌کننده در شرایط یکسان، درصد لکه چربی باقیمانده روی پارچه پلی‌استری کمتر از پارچه نخی است.
 ۶۹- محلول‌هایی از اسیدهای ضعیف HA و HD ، به ترتیب با درصد یونش 20 و 25 درصد و با pH برابر، در دو ظرف جداگانه در اختیار داریم. نسبت $[HA]$ تعادلی به $[D^-]$ در این محلول‌ها چقدر بوده و اگر غلظت اسید HD برابر 2 مولار باشد، اختلاف pH محلول‌ها با pH محلول $2000 ppm$ سود با چگالی تقریبی 1 گرم بر سانتی‌متر مکعب چقدر است؟

($Na = 23$ و $O = 16$ و $H = 1$: $g.mol^{-1}$)

(۱) $12/4, 2$ (۲) $10/7, 2$ (۳) $10/7, 4$ (۴) $12/4, 4$

۷۰- اگر pH محلولی از اسید HA ($\alpha = 0.4$) برابر $2/4$ باشد، در $100 mL$ از این محلول، چند مول اسید وجود داشته و این محلول با چند گرم سدیم هیدروژن کربنات 21% خالص واکنش می‌دهد؟ ($H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$ و $Na = 23$)
 $NaHCO_3(s) + HA(aq) \rightarrow NaA(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$

(۱) $0.4, 10^{-3}$ (۲) $0.4, 10^{-4}$ (۳) $0.4, 10^{-3}$ (۴) $0.4, 10^{-4}$

۷۱- فرمول شیمیایی کلی یک پاک‌کننده غیرصابونی که به حلقه کربنی آن یک زنجیره هیدروکربنی سیر شده با 13 اتم کربن متصل شده است، به کدام صورت می‌باشد؟

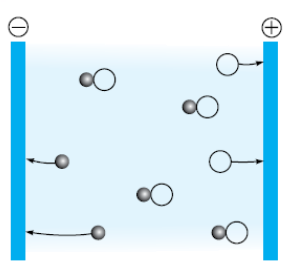
(۱) $C_{19}H_{31}SO_2Na_2$ (۲) $C_{19}H_{31}SO_3Na$ (۳) $C_{19}H_{29}SO_2Na$ (۴) $C_{19}H_{29}SO_3Na_2$

۷۲- کدام موارد از عبارات‌های داده شده درست است؟

آ: در یک نمونه از سرکه، شمار یون‌های استات در مقایسه با ذرات استیک اسید یونیده نشده کمتر خواهد بود.
 ب: یکی از روش‌های تعیین غلظت یون هیدرونیوم در محلول‌ها، سنجش رسانایی الکتریکی این محلول‌ها است.
 پ: محلولی از نیتریک اسید با $pH = 0$ ، برخلاف یک نمونه از آب خالص، فاقد یون هیدروکسید درون خود است.
 ت: با انحلال مقدار کمی پتاسیم اکسید در محلولی از نیتریک اسید، رسانایی الکتریکی این محلول افزایش پیدا می‌کند.

(۱) آ و ب (۲) آ و پ (۳) ب و پ (۴) ب و ت

محل انجام محاسبات



۷۳- با توجه به شکل مقابل که رسانایی الکتریکی محلول یک مولار اسید HA را در دمای $25^{\circ}C$ نشان می‌دهد، کدامیک از مطالب داده شده نادرست است؟
 (۱) بر این اساس، می‌توان گفت HA یک اسید آرنیوس با ثابت یونش کمتر از HI است.
 (۲) درصد یونش مولکول‌های HA در محلول آبی مورد نظر به تقریب برابر با $33/3\%$ است.
 (۳) در شرایط یکسان، مقدار pH محلول HA از محلول آبی هیدروکلریک اسید کمتر است.
 (۴) در شرایط یکسان، اسید HA الکترولیت ضعیف‌تری نسبت به یک نمونه از سولفوریک اسید است.

۷۴- در دمای اتاق، 450 میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با چگالی $1/46 g \cdot mL^{-1}$ را تا حجم 750 میلی‌لیتر رقیق کرده و به آن مقدار $5/13$ گرم باریم هیدروکسید اضافه می‌کنیم. اگر pH محلول نهایی دو برابر pH محلول غلیظ اولیه باشد، غلظت اسید در محلول اولیه بر حسب ppm چقدر می‌تواند باشد؟ ($H = 1 : g \cdot mol^{-1}$ و $O = 16$ و $Ba = 137$)
 (۱) 10000 (۲) 3500 (۳) 7500 (۴) 8000

۷۵- جدول زیر، پتانسیل کاهش استاندارد چند نیم‌سلول مختلف را نشان می‌دهد:

نیم‌سلول	Ag^+ / Ag	Al^{3+} / Al	Zn^{2+} / Zn
پتانسیل کاهش استاندارد (V)	$+0/8$	$-1/66$	$-0/76$

اگر نیم‌سلول آندی سلول گالوانی آلومینیم-روی را با نیم‌سلول نقره جایگزین کنیم، emf سلول مورد نظر به اندازه ولت تغییر کرده و از خلال دیواره متخلخل سلول جدید ایجاد شده، آنیون‌ها به سمت الکترود حرکت می‌کنند.
 (۱) $0/66$ - مثبت (۲) $0/66$ - منفی (۳) $1/56$ - مثبت (۴) $1/56$ - منفی

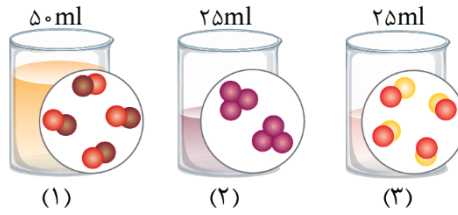
۷۶- اگر واکنش الکتروشیمیایی $2Ag^+(aq) + Pb(s) \rightarrow 2Ag(s) + Pb^{2+}(aq)$ در جهت طبیعی پیشرفت کند، چند مورد از مطالب زیر درست هستند؟ ($Pb = 207$ و $Ag = 108 : g \cdot mol^{-1}$)
 آ: مقدار E° الکترود Ag^+ / Ag از E° الکترود Pb^{2+} / Pb بیشتر است.
 ب: به ازای مبادله $10^{22} \times 4/515$ الکترون در این واکنش، $8/1$ گرم فلز نقره تولید می‌شود.
 پ: در سلول گالوانی حاصل از این دو الکترود، جهت حرکت آنیون‌ها از دیواره متخلخل به سمت فلز واسطه است.
 ت: با انجام واکنش مورد نظر در یک سلول گالوانی، به تدریج سطح تیغه فلزی از جنس سرب، دارای بار مثبت می‌شود.
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۷- مقداری دی‌نیتروژن پنتاکسید را در $10L$ آب خالص حل می‌کنیم. اگر یک لیتر از محلول تولید شده طی این فرایند با $0/6$ گرم فلز منیزیم به طور کامل واکنش بدهد، جرم دی‌نیتروژن پنتاکسید حل شده در آب برابر با چند گرم بوده و در واکنش انجام شده، چند الکترون بین گونه‌های اکسند و کاهنده مبادله شده است؟ ($Mg = 24$ و $O = 16$ و $N = 14 : g \cdot mol^{-1}$)
 (۱) $2/7 - 1/505 \times 10^{22}$ (۲) $27 - 1/505 \times 10^{22}$
 (۳) $2/7 - 3/01 \times 10^{22}$ (۴) $27 - 3/01 \times 10^{22}$

۷۸- اگر مدتی پس از شروع واکنش الکتروشیمیایی در سلول روی - مس، اختلاف جرم الکترود کاتد و الکترود آند به $2/58g$ برسد، در این مدت چند گرم از جرم الکترود آند کاسته شده است؟ (جرم دو الکترود کاتد و آند را در ابتدای واکنش الکتروشیمیایی یکسان در نظر بگیرید. $Zn = 65$ و $Cu = 64 : g \cdot mol^{-1}$)
 (۱) $0/64$ (۲) $0/65$ (۳) $1/28$ (۴) $1/3$

محل انجام محاسبات

۸۵- با توجه به شکل های زیر، چند مورد از مطالب داده شده درست اند؟ (هر ذره حل شونده نشان داده شده، هم ارز با ۰.۳ مول است.)



آ: غلظت مولی محلول (۱)، نصف غلظت مولی محلول (۳) خواهد بود.

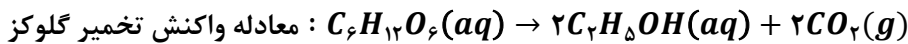
ب: درصد جرمی حل شونده در محلول های (۱) و (۲) قطعاً با هم برابر است.

پ: با افزودن ۰.۸ مول ماده حل شونده به محلول (۱)، غلظت آن به ۴ مولار می رسد.

ت: با مخلوط کردن محلول های (۲) و (۳) با یکدیگر، غلظت هر دو گونه نصف می شود.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۶- دستگاه گلوکومتر، مقدار قند خون شخصی را با عدد ۹۰ نشان می دهد. اگر مقدار گلوکز موجود در هر لیتر از خون این شخص وارد واکنش تخمیر شود، چند میلی گرم اتانول طی این فرایند تولید شده و با استفاده از این مقدار اتانول، چند لیتر محلول 5×10^{-3} مولار می توان تهیه کرد؟ ($H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$: $g \cdot mol^{-1}$)



(۱) ۲۳۰ - ۱ (۲) ۴۶۰ - ۱ (۳) ۲۳۰ - ۲ (۴) ۴۶۰ - ۲

۸۷- کدام یک از عبارات های داده شده نادرست است؟

- (۱) چون کربن دی اکسید از مولکول های ناقطبی تشکیل شده است، انحلال پذیری آن در مقایسه با گاز NO در آب کمتر است.
- (۲) بر اساس قانون هنری، شیب نمودار انحلال پذیری گاز اکسیژن در آب تندتر از شیب نمودار انحلال پذیری نیتروژن است.
- (۳) بیشتر مواد غذایی حاوی یون پتاسیم بوده و وجود این یون برای عملکرد مناسب دستگاه عصبی ضروری است.
- (۴) هگزان یک مایع بی رنگ بوده و در صورت افزودن آن به آب، نمونه هگزان روی سطح آب قرار می گیرد.

۸۸- کدام موارد از عبارات های داده شده درست است؟

- آ: گشتاور دوقطبی مولکول های هیدروژن سولفید، نزدیک به دو برابر گشتاور دو قطبی مولکول های آب است.
- ب: بنزین، نوعی محلول غیر آبی به شمار رفته و ویژگی های فیزیکی و شیمیایی در سرتاسر آن کاملاً یکسان است.
- پ: بین نمونه های گازی از HCl و HF مایع، ترکیبی با ثابت یونش اسیدی بزرگ تر، دمای جوش بالاتری خواهد داشت.
- ت: واکنش های مربوط به گوارش غذا، کنترل دما و تنفس، از واکنش های بدن هستند که در محلول های آبی انجام می شوند.

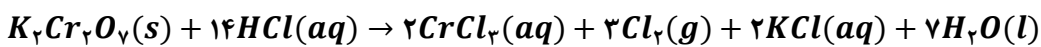
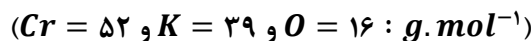
(۱) ب و ت (۲) آ و ت (۳) ب و پ (۴) آ و پ

۸۹- کدام یک از عبارات های داده شده درست است؟

- (۱) اغلب سنگ های کلیه از رسوب نمک های کلسیم داری که مقدار آن ها در ادرار بیش از انحلال پذیری آن هاست، ایجاد می شوند.
- (۲) در دمای $25^\circ C$ ، درصد جرمی محلول سیر شده ای از سدیم نترات در آب، کمتر از محلول سیر شده کلسیم سولفات است.
- (۳) گشتاور دوقطبی مولکول های سازنده گوگرد دی اکسید، همانند مولکول های کربن دی اکسید، بزرگ تر از صفر است.
- (۴) در ساختار هر ماده که از مولکول های ناقطبی ساخته شده باشد، اتم هایی با بار جزئی منفی و مثبت وجود ندارد.

محل انجام محاسبات

۹۰- انحلال پذیری ترکیب یونی $K_2Cr_2O_7$ در دماهای $60^\circ C$ و $90^\circ C$ به ترتیب برابر $40g$ و $70g$ در $100g$ آب است. اگر دمای از $212/5g$ از محلول سیر شده این ترکیب را از $90^\circ C$ تا $60^\circ C$ کاهش داده و رسوب حاصل از این فرایند مطابق معادله زیر با هیدروکلریک اسید واکنش دهد، چند لیتر گاز کلر با حجم مولی $29/4L.mol^{-1}$ آزاد خواهد شد؟



$$\begin{matrix} 11/25 & (4) & 22/5 & (3) & 33/75 & (2) & 45 & (1) \end{matrix}$$

۹۱- کدام مقایسه در مورد نیروهای بین مولکولی، میان مولکولهای CO_2 ، I_2 ، O_2 ، Br_2 درست است؟

$$O_2 < I_2 < Br_2 < CO_2 \quad (2) \quad I_2 < Br_2 < O_2 < CO_2 \quad (1)$$

$$O_2 < CO_2 < I_2 < Br_2 \quad (4) \quad O_2 < CO_2 < Br_2 < I_2 \quad (3)$$

۹۲- چند مورد از عبارتهای زیر درست است؟

آ: در صورت قرار دادن میوههای خشک در آب خالص، مولکولهای آب وارد سلولهای میوه می شوند.

ب: طی انحلال ید در هگزان، ماهیت مولکولهای حل شونده حفظ و محلولی بنفش رنگ ایجاد می شود.

پ: با افزایش درصد جرمی نمک موجود در آب دریا، انحلال پذیری گاز اکسیژن در آن افزایش پیدا می کند.

ت: نیروی جاذبه یون-دوقطبی، باعث جدا شدن یونها از بلور $NaCl$ و پوشیده شدن آنها با ذرات آب می شود.

ث: استون با فرمول شیمیایی C_3H_6O ، حلال برخی از چربیها بوده طی این فرایند، محلولهای غیرآبی ایجاد می شود.

$$\begin{matrix} 1 & (1) & 2 & (2) & 3 & (3) & 4 & (4) \end{matrix}$$

۹۳- برای تهیه محلولی به حجم 15 لیتر و چگالی $1/2g.L^{-1}$ که غلظت یون کلسیم (Ca^{2+}) در آن برابر با $600ppm$ باشد، چند میلی لیتر محلول $4/5$ مولار کلسیم نترات را باید با مقدار کافی آب مخلوط کنیم؟ ($Ca = 40 g.mol^{-1}$)

$$\begin{matrix} 45 & (1) & 60 & (2) & 450 & (3) & 600 & (4) \end{matrix}$$

۹۴- انحلال پذیری گاز اکسیژن در دمای $25^\circ C$ و فشار 9 اتمسفر برابر با $0/04$ گرم در 100 گرم آب است. اگر فشار گاز اکسیژن بر روی یک محلول سیر شده 90 کیلوگرمی از این گاز را از $6atm$ به $3atm$ برسانیم، با استفاده از گاز اکسیژن آزاد شده از محلول، چند گرم گاز متان را می توانیم به طور کامل بسوزانیم؟ ($O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g.mol^{-1}$)

$$\begin{matrix} 3 & (1) & 6 & (2) & 30 & (3) & 60 & (4) \end{matrix}$$

۹۵- کدام یک از عبارتهای داده شده نادرست است؟

(۱) ماهی با عبور آب از درون آبشش خود، اکسیژن مولکولی محلول در آب را جذب و در فرایند سوخت و ساز مصرف می کند.

(۲) در دستگاه اسمز معکوس، دو محلول مجزا با غلظت مولی مواد حل شونده یکسان از لولههای خروجی، خارج می شود.

(۳) دیواره یاختههای گیاهی فقط اجازه گذر به برخی از ذرهها و مولکولهای کوچک مثل آب و یونها را می دهد.

(۴) دستگاه اسمز معکوس، همانند صافی کربن، ترکیبهای آلی فرار را برخلاف میکروبها از آب جدا می کند.

محل انجام محاسبات

دانلود رایگان تمام آزمون‌های آزمایشی در کانال ما:

@Azmoonha_Azmayeshi

علوی

تمام پایه‌ها و رشته‌ها



آزمون‌ها آزماینتی
T.me/Azmoonha_Azmayeshi



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

آزمون‌ها آزماینتی
T.me/Azmoonha_Azmayeshi



حلقه
سنجی





کد کنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۲/۰۹/۱۶



پاسخنامه آزمون الکترونیکی کنکوری های ریاضی - مرحله ۵

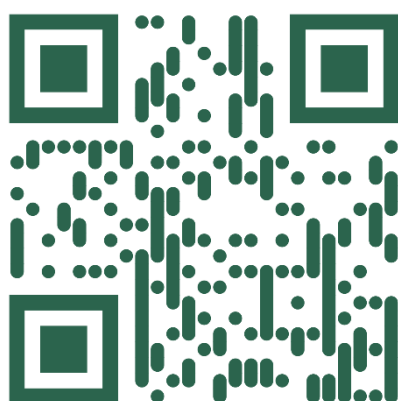
ویراستاران	طراحان	مسئول درس	درس
حمیدرضا ولی پور - رضا قانع علیرضا کاظمی بقا	حسین شفیع زاده - امیدرضا پورحسینی رسول حاجی زاده	سیدجواد نظری	ریاضیات
مروارید شاه حسینی - بنیامین بینش رضا نوذری - علیرضا ملک حسینی امیر هوشنگ کیانی قلعه سردی	سجاد صادقی زاده - میثم دشتیان کامران ابراهیمی - مهدی شریفی	سجاد صادقی زاده	فیزیک
فرهنگ امیری - سجاد سیف اللهی عالیه میرزایی - محمدرضا جمشیدی	فرشاد هادیان فرد - فرهنگ امیری - امیر بصراوی	فرشاد هادیان فرد	شیمی
مدیر آزمون: رسول خنجری			

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفاده غیر قانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



دوست مازی من، سلام!
برای اینکه ما نظرت رو در رابطه با آزمون بدونیم نیاز هست که در نظرسنجی شرکت کنی.
برای شرکت در نظرسنجی فقط کافیست روی لینک زیر بزنی یا QR کد زیر رو اسکن کنی تا صفحه
نظرسنجی برات باز بشه!
ممنون که نظرت رو به ما میگی و بهمون برای بهتر شدن آزمون‌ها کمک می‌کنی (:



<https://B2n.ir/g35714>

مازی‌ها! میدونین که جلوی هر سوال ما براتون ویژگی و آدرس اون سوال رو میذاریم، حالا
واسه اینکه کامل یادش بگیرید میخوام براتون بگم که چجوری اینا رو براتون چیدیم:

(سطح سوال - سبک سوال - آدرس سوال)
آسان - متوسط - سخت مفهومی - مساله و ... مثلاً: ۱۱۰ یعنی فصل ۱ پایه یازدهم



۱- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+\sqrt{x}}-2}{1-\sqrt{x}}$ کدام عدد است؟

$\frac{7}{4}$ (۴)

$-\frac{7}{8}$ (۳)

$\frac{21}{4}$ (۲)

$-\frac{21}{8}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۱



روش HOP:



در محاسبه حد‌های $\frac{0}{0}$ می‌توانیم به جای صورت، مشتق صورت و به جای مخرج، مشتق مخرج را قرار دهیم و حد جدید را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادآوری:



۲ اتحاد مهم در رفع ابهام حد‌های $\frac{0}{0}$ رادیکالی:

۱) مزدوج: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

۲) چاق و لاغر: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

نکته:



یک حد مهم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}$$

روش اول:

به کمک اتحاد مزدوج و چاق و لاغر و همچنین تجزیه داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+\sqrt{x}}-2}{1-\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+\sqrt{x}}-2}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{3x+\sqrt{x}}+2}{\sqrt{3x+\sqrt{x}}+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+\sqrt{x}-4}{(1-\sqrt{x}) \times 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+4)}{4(1-\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x}+4}{4} = \frac{3+4}{4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

تذکر: وقتی به حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x}-1}{4(1-\sqrt{x})}$ رسیدیم می‌توانیم از نکته گفته شده استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x}-1}{4(1-\sqrt{x})} = -\frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-1} = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$$

روش دوم:

$$HOP \Rightarrow \text{حد} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3x+\sqrt{x}}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}^2}} = \frac{\frac{3+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3x+\sqrt{x}}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x}^2}} = -\frac{3}{8}$$



۲- اگر $f(x) = \frac{1 - \cos^m 2x}{1 - \cos^2 mx}$ به طوری که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ مقدار m کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -۲ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۵)

هم ازی زب رو خوب یاد بگیرید!

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos^m ax) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{2} a^2 x^2$$

پاسخ تشریحی:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{m}{2} \times 4x^2}{\frac{m^2}{2} (x^2)} = \frac{2m}{m^2} = \frac{2}{m}$$

$$\frac{2}{m} = 4 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۳- اگر $f(x) = \left[\frac{16}{x^2} \right] - k \left[\frac{x^4}{2} \right]$ در $x=2$ دارای حد باشد، مقدار k کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۵)

پیش به سوی حد توابع جزء صحیح!

برای حد زیر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = L$$

۱) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ برابر عددی غیر صحیح شود، آن گاه $L = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$

۲) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ برابر عددی صحیح شود، حد چپ و راست باید جداگانه محاسبه گردد. یعنی $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} [f(x)]$ جداگانه محاسبه شوند.

پاسخ تشریحی:

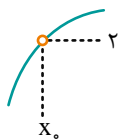
شرط آن که f در $x=2$ دارای حد باشد، $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \left[\frac{16}{4^+} \right] - k \left[\frac{16^+}{2} \right] = [4^-] - k[8^+] = 3 - 8k \text{ حد راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \left[\frac{16}{4^-} \right] - k \left[\frac{16^-}{2} \right] = [4^+] - k[8^-] = 4 - 7k \text{ حد چپ}$$

$$3 - 8k = 4 - 7k \Rightarrow k = -1$$

گروه آموزشی ماز



۴- قسمتی از نمودار $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + \sqrt{x+2}}$ به صورت شکل مقابل است. مقدار $a + b - x_0$ کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۱۲

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ سریعی:

با دقت به نمودار داده شده، داریم $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$. تابع در نقطه $x = x_0$ دارای حفره است، اما چون در این نقطه حد دارد پس x_0 ریشه مشترک صورت و مخرج است.

$$x + \sqrt{x+2} = 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} = -x \Rightarrow x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + b}{x + \sqrt{x+2}} \Rightarrow 1 - a + b = 0$$

$x = 2$ مخرج را صفر نمی‌کند، پس $x_0 = -1$ ریشه صورت و مخرج است، آن را در صورت جایگذاری می‌کنیم و سپس حد تابع را در این نقطه، مساوی ۲ قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + b}{x + \sqrt{x+2}} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\overbrace{x^2 + ax + b}^{(x+1)(x+b)}}{x + \sqrt{x+2}} \times \frac{x - \sqrt{x+2}}{x - \sqrt{x+2}} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+b)(x - \sqrt{x+2})}{(x^2 - x - 2)} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x+b)(-2)}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \frac{-2(b-1)}{-3} = \frac{2}{3}(b-1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(b-1) = 2 \Rightarrow b-1 = 3 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow a + b - x_0 = 10$$

گروه آموزشی ماز

۵- تابع $f(x) = |x - 4x + 2k|$ در $x = 3$ دارای حد است. مقدار k چه عددی است؟

$\frac{19}{4}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{9}$ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ سریعی:

تابع f در $x = 3$ دارای حد است، یعنی حد چپ و راست تابع f در این نقطه برابرند. حال مقادیر حد چپ و حد راست تابع را در $x = 3$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = |3 - 12 + 2k| = |2k - 9|$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = |2 - 12 + 2k| = |2k - 10|$$

$$|2k - 9| = |2k - 10| \Rightarrow 2k - 9 = 10 - 2k \Rightarrow 4k = 19 \Rightarrow k = \frac{19}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+b} - a}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{a}{4}$ ، مقدار $\frac{a}{b+1}$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

نکته‌های مهم و شایسته تأمل!!

اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عددی غیر صفر شود و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ باشد، پس قطعاً $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ نیز برابر صفر می‌باشد.

روش اول:

اولاً: $x = 1$ ریشه مخرج است، پس $x = 1$ ریشه صورت هم می‌باشد.

$$\sqrt{2+b} - a = 0 \Rightarrow a = \sqrt{b+2} \quad a > 0$$



ثانیاً: حد به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ رسیده، حال رفع ابهام می‌کنیم، به جای a ، $\sqrt{b+2}$ را جایگزین می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+b} - \sqrt{b+2}}{(x-1)(2x-1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+b) - (b+2)}{(x-1)(2x-1)(\sqrt{2x+b} + \sqrt{b+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(2x-1)(2\sqrt{b+2})} = \frac{1}{\sqrt{b+2}} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow a=2, b=2 \\ a=-2 \text{ غقی} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b+1} = \frac{2}{3}$$

روش دوم:

با حالت $\frac{0}{0}$ مواجهیم، برای رفع ابهام از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+b} - a}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{a}{4} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2x+b}}{4x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2x+b}} = \frac{1}{\sqrt{b+2}}$$

با توجه به روش اول $a = \sqrt{b+2}$, $a > 0$

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{4} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = +2 \\ a = -2 \text{ غقی} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow \frac{a}{b+1} = \frac{2}{3}$$

گروه آموزشی ماز

- ۷- مقادیر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+(-1)^x}{(x-2)^2}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^x}{4-x^2}$ به ترتیب کدام است؟
- (۱) $-\infty$ و $-\infty$ (۲) $+\infty$ و $+\infty$ (۳) $+\infty$ و $-\infty$ (۴) $+\infty$ و $+\infty$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۳)

واما حدهای نامتناهی!

اگر حاصل حد به یکی از ۴ صورت زیر شود، داریم:

$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$	$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$	$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$

پاسخ شریعی:

برای هر مورد، حد چپ و راست را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^x}{4-x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{4-x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^x}{4-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+(-1)^x}{(x-2)^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{(x-2)^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+(-1)^x}{(x-2)^2} = +\infty$$

گروه آموزشی ماز

- ۸- هرگاه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a \sin \frac{\pi}{4} x}{3+2a+a \cos \frac{\pi}{2} x} = +\infty$ ، مقدار a کدام است؟
- (۱) ۲ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) a یافت نمی‌شود.



پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۳)



$3 + 2a + a \cos \pi = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$ در ابتدا باید $x = 2$ ریشه مخرج باشد. به همین جهت:

$$f(x) = \frac{-3 \sin \frac{\pi}{4} x}{-3 - 3 \cos \frac{\pi}{4} x} \Rightarrow f(x) = \frac{\cancel{3} \sin \frac{\pi}{4} x}{\cancel{3} (1 + \cos \frac{\pi}{4} x)} \Rightarrow f(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{4} x}{1 + \cos \frac{\pi}{4} x}$$

مخرج در $x = 2$ از چپ و راست که به $x = 2$ نزدیک شود، برابر 0^+ می‌شود، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \frac{\pi}{4} x}{1 + \cos \frac{\pi}{4} x} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

لذا $a = -3$ قابل قبول است.

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - 2a(-1)^{[x]}}{2x^2 - 3x + b} = +\infty$ ، مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۳)



اولاً: باید $x = 2$ ریشه مخرج باشد، یعنی: $8 - 6 + b = 0$ ، پس: $b = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - 2a(-1)^{[x]}}{(x-2)(2x+1)} = +\infty$$

ثانیاً:

اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آن‌گاه مخرج مقداری مثبت است، پس باید صورت هم مثبت باشد.

$$3 - 2a(1) > 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

اگر $x \rightarrow 2^-$ ، آن‌گاه مخرج مقداری منفی است، پس باید صورت هم منفی باشد، پس:

$$3 + 2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{3}{2}$$

لذا $a < -\frac{3}{2}$ و $b = -2$ ، پس $a + b < -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2}$ و فقط گزینه ۴ در این بازه قرار دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر $f(x) = \frac{|x|-1}{x+[-x]}$ ، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۳)



حدود یک طرفه f را در همسایگی $x = 0$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|-1}{x+[-x]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|-1}{x+[-x]} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-1}{x+0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+a}{x-b}$ را دو واحد به چپ انتقال داده، سپس نسبت به محور x قرینه می‌کنیم. ضابطه تابع حاصل به صورت $g(x) = \frac{2x+3}{3-x}$

خواهد بود. حاصل $a+b$ کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

(آسان - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰)

پاسخ: گزینه ۴



به سرزمین "تبدیلات تابع" فوش آمدید!



برای تابع $f(x)$ داریم:

۱) $f(x+k)$
 $k > 0$ → واحد در جهت افقی به چپ
 $k < 0$ → $|k|$ واحد در جهت افقی به راست

۲) $f(x)+k$
 $k > 0$ → واحد در جهت عمودی به بالا
 $k < 0$ → $|k|$ واحد در جهت عمودی به پایین

۳) $kf(x)$
 $k > 1$ → انبساط عمودی با ضریب k
 $0 < k < 1$ → انقباض عمودی با ضریب k

۴) $-f(x)$ → قرینه نسبت به محور x ها

۵) $f(kx)$
 $k > 1$ → انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{k}$
 $0 < k < 1$ → انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{k}$

۶) $f(-x)$ → قرینه نسبت به محور y ها

پاسخ تشریحی:

$$f(x) = \frac{2x+a}{x-b}$$

$$\text{چپ واحد ۲: } f(x+2) = \frac{2(x+2)+a}{x+2-b}$$

$$\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها: } y = -f(x+2) = \frac{-2x-4-a}{x+2-b} = \frac{2x+4+a}{-x-2+b} = \frac{2x+3}{3-x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+a=3 \\ b-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow a+b=4$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- نقطه $A(-3, 4)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ قرار دارد. اگر خط $y=3x+3$ از نقطه متناظر A بر روی نمودار تابع $y=a-2f(2a-x)$ عبور کند، مقدار

a کدام است؟

-۶ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

-۴ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

در باب "نقاط متناظر در تابع $f(x)$ با $f(bx+c)+d$:"

اگر (α, β) نقطه‌ای روی تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطه متناظر آن روی تابع $f(bx+c)+d$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$bx+c=\alpha \Rightarrow x=\frac{\alpha-c}{b}$$

نحوه محاسبه x متناظر

$$y=af\left(b\frac{\alpha-c}{b}+c\right)+d=af(\alpha)+d$$

جایگذاری $x=\frac{\alpha-c}{b}$ در تابع $f(bx+c)+d$: نحوه محاسبه y متناظر

پس نقطه متناظر به صورت $\left(\frac{\alpha-c}{b}, af(\alpha)+d\right)$ خواهد بود.



تبدیلات افقی: برای رسم نمودار $f(2a-x)$ ، ابتدا نمودار را $2a$ واحد انتقال داده (چه $2a > 0$ و چه $2a < 0$)، به خاطر این که ضریب a مثبت است انتقال را در جهت راست در نظر می‌گیریم) سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:

$$x_A = -3 \Rightarrow x_{\text{جدید}} = \frac{-3-2a}{-1} = 3+2a$$

تبدیلات عمودی: برای رسم نمودار $a-2f(x)$ ، ابتدا عرض نقاط را -2 برابر می‌کنیم، سپس به اندازه a واحد انتقال عمودی (چه $a > 0$ و چه $a < 0$)، به خاطر این که ضریب a مثبت است انتقال را در جهت بالا در نظر می‌گیریم) می‌دهیم.

$$y_A = 4 \Rightarrow y_{\text{جدید}} = a-2 \times 4 = a-8$$

مختصات نقطه $(3+2a, a-8)$ را در معادله خط جایگزین می‌کنیم:

$$y=3x+3 \Rightarrow a-8=3(3+2a)+3 \Rightarrow a=-4$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- به ازای چند مقدار m ، تابع $y = \frac{x+m}{|x-1|+|x-3|}$ در \mathbb{R} یکنواست؟

هیچ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

خب حالا نوبت "توابع یکنوا" است.



- تابع f را نزولی گوئیم هرگاه داشته باشیم به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنه $f(x)$:

- تابع f را صعودی گوئیم هرگاه داشته باشیم به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنه $f(x)$:

- تابع f را نزولی اکید گوئیم هرگاه داشته باشیم به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنه $f(x)$:

- تابع f را صعودی اکید گوئیم هرگاه داشته باشیم به ازای هر x_1 و x_2 عضو دامنه $f(x)$:

- تابع f را غیریکنوا گوئیم هرگاه نه صعودی خالص و نه نزولی خالص باشد. یعنی در بعضی از قسمت‌های دامنه صعودی و در بعضی دیگر از قسمت‌های دامنه نزولی باشد.

نکته:

$$\text{شرط آن که تابع } y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ تابعی ثابت باشد، آن است که } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ (} x \neq -\frac{d}{c} \text{)}$$

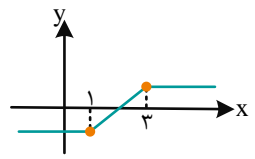


تابع را به صورت سه ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} \frac{x+m}{4-2x} & x < 1 \\ \frac{x+m}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x+m}{2x-4} & x > 3 \end{cases}$$

ضابطه اول و سوم قرینه یکدیگرند، پس نمی‌توانند از نظر یکنوایی یکسان باشند، مگر آن‌که تابع ثابت باشند، پس صورت و مخرج مضرب یکدیگر هستند.

$$y = \frac{x+m}{2x-4} \xrightarrow{\text{ثابت}} \frac{1}{2} = \frac{m}{-4} \Rightarrow m = -2$$



در این حالت، نمودار تابع به صورت مقابل است.

پس فقط به ازای یک مقدار m ، تابع یکنواست.

گروه آموزشی ماز

۱۴- تابع $f(x) = ax - |3x - 6|$ غیر یکنواست. اگر مساحت ناحیه محدود به نمودار f و محور x ها در ناحیه اول برابر ۴ باشد، a کدام است؟ ($a > 0$)

- ۲/۳ (۴)
- ۴/۳ (۳)
- ۳/۲ (۲)
- ۳/۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

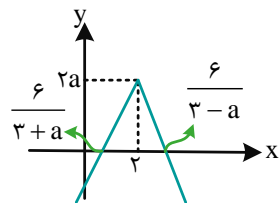


تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} (a-3)x + 6 & x \geq 2 \\ (a+3)x - 6 & x < 2 \end{cases}$$

چون $a > 0$ است، پس ضابطه دوم صعودی است، پس باید ضابطه اول نزولی باشد. در نتیجه $a - 3 < 0$ است، پس $0 < a < 3$ است. نقاط برخورد با محور x ها را پیدا می‌کنیم:

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a-3)x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{3-a} \\ (a+3)x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{3+a} \end{cases}$$



$$S = 4 = \frac{1}{2} \times 2a \left(\frac{6}{3-a} - \frac{6}{3+a} \right) = \frac{12a^2}{9-a^2} \Rightarrow 9-a^2 = 3a^2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر $f(x)$ و $2x-1$ به ترتیب خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $g(x) = x^3 - 8x^2 + x^2 + ax + b$ بر $x^2 - 3x + 2$ باشند، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ کدام است؟

- ۴ (۴)
- ۳ (۳)
- ۲ (۲)
- ۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

شما دعوتید به "قضیه تقسیم":

قضیه: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دو جمله‌ای درجه اول $(x-a)$ ، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.
نتیجه: اگر $f(a)$ برابر صفر باشد، آن‌گاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر است.



ابتدا قضیه تقسیم را می‌نویسیم و سپس به جای x ، ریشه‌های $x^2 - 3x + 2 = 0$ را قرار می‌دهیم:

$$g(x) = (x^2 - 3x + 2)f(x) + 2x - 1$$

$$\begin{cases} g(1) = 1 \\ g(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 6 = 1 \\ 2a + b + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 15 \end{cases}$$

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ برابر $f(-1)$ است، پس در قضیه تقسیم بالا، به جای x ، -1 را قرار می‌دهیم:

$$x = -1 \Rightarrow g(-1) = 6f(-1) - 3 \Rightarrow -1 - 8 + 1 + 8 + 15 = 6f(-1) - 3 \Rightarrow f(-1) = 3$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- از نظر عددی، ماکزیم مقدار تابع $y = 3 - 2\cos\frac{x}{p}$ چقدر از دوره تناوب تابع $y = \frac{\tan 2\pi x}{1 - \tan^2 2\pi x}$ بیشتر است؟

- ۴/۷۵ (۴)
- ۴/۵ (۳)
- ۳/۷۵ (۲)
- ۳/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۲)

اینم از فرمول تانژانت دو برابر کمان:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

دوره تناوب تانژانت هم که فرمولش مثل آب خوردن حفظ میشه!

دوره تناوب تابع $\tan ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

نکته:

در توابعی به فرم $y = a + b \sin cx$ یا $y = a + b \cos cx$ می توان گفت:

- ۱) $\max = |b| + a$
- ۲) $\min = -|b| + a$
- ۳) $T = \frac{2\pi}{|c|}$

پاسخ سریعی:

ماکزیمم تابع $y = 3 - 2 \cos \frac{x}{4}$ به ازای $\cos \frac{x}{4} = -1$ دست می آید، پس به کمک نکته گفته شده:

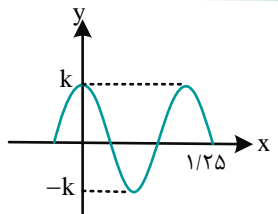
$y = 3 - 2 \cos \frac{x}{4}$ در تابع $\Rightarrow \max = |-2| + 3 = 5$

حال با توجه به فرمول $\tan 2\alpha$ و فرمول دوره تناوب که در بالا آمده اند، داریم:

$$y = \frac{\tan 2\pi x}{1 - \tan^2 2\pi x} = \frac{1}{2} \tan 4\pi x \Rightarrow T = \frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \max - T = 5 - \frac{1}{4} = 4 \frac{3}{4}$

گروه آموزشی ماز



۱۷- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 4 \sin^2(b\pi x)$ به صورت مقابل است. حاصل $a + k + |b|$ کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۲)

دوره تناوب توابع مثلثاتی باید تو مشتق باشه!

- ۱) $a \sin(bx + c) + d \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$
- ۲) $a \sin^m(bx + c) + d \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$ فرد: m
- ۳) $a \cos(bx + c) + d \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$
- ۴) $a \cos^m(bx + c) + d \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$ فرد: m
- ۵) $a \tan(bx + c) + d \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$
- ۶) $a \cot(bx + c) + d \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$

v) $a \sin^m(bx+c)+d \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$ زوج : m

λ) $a \cos^m(bx+c)+d \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$ زوج : m

پاسخ تشریحی:

از آنجا که بیشترین و کمترین مقدار $\sin^2(b\pi x)$ برابر با ۰ و ۱ است، برای یافتن ماکزیمم و مینیمم تابع f، به جای $\sin^2(b\pi x)$ مقادیر ۱ و صفر را جایگزین می کنیم:

$$\begin{cases} \sin^2(b\pi x) = 0 \Rightarrow y = a = k \\ \sin^2(b\pi x) = 1 \Rightarrow y = a - 4 = -k \end{cases} \Rightarrow a = k = 2$$

اگر هر ربع تناوب (نصف کله قند) را x در نظر بگیریم، با توجه به شکل $\Delta x = 1/25 = 5x$ پس هر ربع تناوب برابر ۲۵/۰ است، در نتیجه دوره تناوب برابر ۱ است.

$T = 1 = \frac{\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow a + k + |b| = 5$

گروه آموزشی ماز

۱۸- مساحت یک مثلث برابر ۲۴ و زاویه بین دو ضلع با اندازه های ۱۰ و ۶ برابر α است. اگر اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α برابر θ باشد، مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

$\frac{12}{7}$ (۴)

$\frac{12}{5}$ (۳)

$\frac{24}{7}$ (۲)

$\frac{24}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۲)

و اینک فرمول (تفاضل و جمع دو کمان، در تنازانت):

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \times \tan b}$$

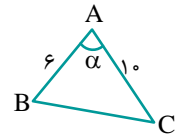
بچه ها! اینم یه نکته از مثلثات ریاضی!

مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

پاسخ تشریحی:

$S = \frac{1}{2} AB.AC.\sin \alpha \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \cdot \sin \alpha$



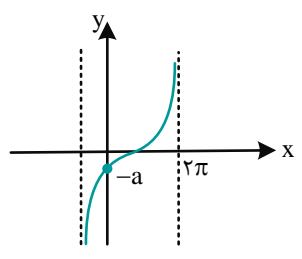
$\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \pm \frac{4}{3}$

همانطور که دیدید $\tan \alpha = \pm \frac{4}{3}$ ، پس دو جواب برای α در ناحیه اول و دوم وجود دارد که مکمل یکدیگرند. جوابها را $\alpha_1 = \beta$ و $\alpha_2 = \pi - \beta$ فرض کنید به

طوری که β حاده است. ($\tan \beta = \frac{4}{3}$)

$$\tan \theta = \tan(\pi - \beta - \beta) = -\tan 2\beta = \frac{-2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{-\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{24}{7}$$

گروه آموزشی ماز

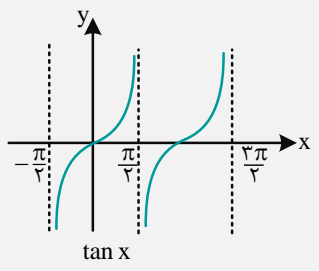


۱۹- نمودار تابع $y = a \tan\left(\frac{x}{a} + b\pi\right)$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. حاصل ab کدام است؟ ($0 < b < 1$)

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)
- $\frac{4}{3}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - ترکیبی/محاسباتی - ۱۴۰۲)

"نمودار تابع تناوبت" رو قورت بده!



A: همان طور که مشاهده می شود تابع $\tan x$ در نقاط $k\pi + \frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ تعریف نشده است.

B: تابع $\tan x$ در بازه های $\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}, \frac{(2k+3)\pi}{2}\right)$ که $k \in \mathbb{Z}$ همواره صعودی اکید است، اما به طور کلی این تابع صعودی اکید نمی باشد.

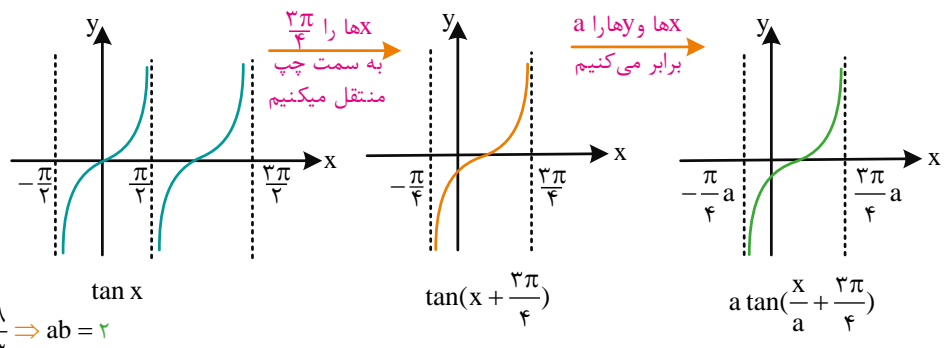
پاسخ شریقی:

در نقطه $x = 0$ مقدار تابع برابر $-a$ است.

$y(0) = -a \Rightarrow -a = a \tan(b\pi) \Rightarrow \tan(b\pi) = -1$

$0 < b < 1 \Rightarrow b\pi = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$

در نمودار داده شده می بینیم که $-a < 0$ ، پس a مثبت است، نمودار تابع را به کمک تبدیلات رسم می کنیم.



$\Rightarrow \frac{3\pi a}{4} = 2\pi \Rightarrow a = \frac{8}{3} \Rightarrow ab = 2$

گروه آموزشی ماز

۲۰- مجموع جواب های معادله مثلثاتی $\sin x - \cos x \sin 2x = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ چقدر است؟

- ۲π (۴)
- ۳π (۳)
- ۴π (۲)
- ۵π (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

بالا فره رسیدیم به "معادلات مثلثاتی":

فرمول های زیر در مورد معادلات مثلثاتی را به خاطر بسپارید.

- ۱) $\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = 2k\pi \pm \beta$
- ۲) $\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \alpha = 2k\pi + \beta, \alpha = 2k\pi + \pi - \beta$
- ۳) $\tan \alpha = \tan \beta \Rightarrow \alpha = k\pi + \beta$
- ۴) $\cot \alpha = \cot \beta \Rightarrow \alpha = k\pi + \beta$

یادآوری:

$$\begin{cases} \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \end{cases}$$

نکته:

جواب عمومی معادلات $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$ ، $\cos^2 x = \cos^2 \alpha$ ، $\tan^2 x = \tan^2 \alpha$ و $\cot^2 x = \cot^2 \alpha$ به صورت $x = k\pi \pm \alpha$ است.

روش اول:

تذکره: وقتی به معادله $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ رسیدیم می‌توانیم از نکته گفته شده استفاده کنیم:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \cos^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

با مقداردهی به k به جواب‌های $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ می‌رسیم.

$$\sin x - \cos x (\sqrt{2} \sin x \times \cos x) = 0 \Rightarrow \sin x (1 - \sqrt{2} \cos^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 - \sqrt{2} \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

در بازه $(0, 2\pi)$ فقط در $x = \pi$ ، $\sin x = 0$ و همچنین در $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ، $\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر با $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌شود.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pi \\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \text{جمع} = 5\pi \end{cases}$$

روش دوم:

$$\sin x - \cos x \frac{\sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x \cos x} = 0 \Rightarrow \sin x - \sqrt{2} \sin x \cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin x (1 - \sqrt{2} \cos^2 x) = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \Rightarrow \pi \\ \cos^2 x = 0 \rightarrow \sqrt{2}x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{جمع} = 5\pi$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر A و B ماتریس‌های 3×3 باشند، حاصل عبارت $B + A \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $3I$ (۲) $AB + 3BA$ (۳) $AB + 3A + 3B$ (۴) $3AB$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

بریم سراغ ماتریس‌ها:

خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در ماتریس‌ها:

ضرب ماتریس‌ها در جمع ماتریس‌ها از سمت چپ و راست توزیع‌پذیر است:

$$C(A + B) = CA + CB$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

عضو خنثی عمل ضرب در ماتریس‌ها:

ماتریس همانی، عضو خنثی عمل ضرب ماتریس‌ها است:

$$AI = IA = A$$



با توجه به نکته ۱، از سمت چپ A و از سمت راست، B را فاکتور می گیریم:

$$A \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} B = A \left(\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \right) B$$

$$= A \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} B = A \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} B = 3AIB \xrightarrow{\text{نکته ۲}} 3AB$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر ماتریس $C_{3 \times 2}$ چنان باشد که $3I = C \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$ ، آن گاه اختلاف درایه های روی قطر اصلی ماتریس C کدام است؟

۲۷ (۴)
۱۷ (۳)
۱۸ (۲)
۲۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۳۰۱)

خب، بگو ببینم حاصل ضرب ماتریس در وارونش چی میشه!؟

حاصل ضرب هر ماتریس مربعی وارون پذیر در وارونش، با ماتریس همانی هم مرتبه اش برابر است:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

این نکته که دیگه گفتن نداره!

وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ستون j ام ماتریس B \times سطر i ام ماتریس A $= C_{ij}$

نکته: اگر $C = AB$ باشد، آن گاه:



اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$ ، آن گاه با توجه به نکات، داریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} = 3I \Rightarrow ACB = 3I \xrightarrow{\begin{matrix} \times A^{-1} \text{ از چپ} \\ \times B^{-1} \text{ از راست} \end{matrix}} A^{-1}ACBB^{-1} = A^{-1}(3I)B^{-1} \Rightarrow ICI = 3A^{-1}IB^{-1} \Rightarrow C = 3A^{-1}B^{-1}$$

و اینک به کمک فرمول ماتریس وارون، داریم:

$$C = 3 \times \frac{1}{15-14} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{35-36} \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 43 & - \\ - & 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 129 & - \\ - & 147 \end{bmatrix}$$

$$147 - 129 = 18$$

و در نهایت، اختلاف درایه های روی قطر اصلی ماتریس C برابر است با: بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

گروه آموزشی ماز

۲۳- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} -4 & -1-2|A| \\ 3 & |A|-3 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع مقادیر ممکن برای $|A^{-1}|$ کدام است؟

- $-\frac{1}{15}$ (۴)
 $\frac{1}{15}$ (۳)
 $\frac{2}{15}$ (۲)
 $-\frac{2}{15}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

یه سری هم به نکات ماتریسی زیر برنیم!

نکته ۱:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

نکته ۲:

$$|A^T| = |A|$$

نکته ۳:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

پاسخ ششگونی:

با توجه به نکات، داریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} -4 & -1-2|A| \\ 3 & |A|-3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^T| = \begin{vmatrix} -4 & -1-2|A| \\ 3 & |A|-3 \end{vmatrix} \Rightarrow |A^T| = -4|A| + 12 + 3 + 6|A| \Rightarrow |A^T| - 2|A| - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (|A|-5)(|A|+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A|=5 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{5} \\ |A|=-3 \Rightarrow |A^{-1}| = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برای $|A^{-1}|$ برابر است با:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$$

بنابراین، گزینه ۱ پاسخ است.

گروه آموزشی ماز

۲۴- صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نیست و با مولد سطح مخروطی هم موازی نیست. اگر صفحه از رأس سطح مخروطی عبور نکند، چه تعداد از موارد زیر می تواند سطح مقطع حاصل باشد؟

- | | | | | | |
|------------|---------|---------|-----------|----------|-----------------|
| الف: دایره | ب: بیضی | پ: سهمی | ت: هذلولی | ث: یک خط | ج: دو خط متقاطع |
| ۱ (۱) | ۲ (۳) | ۴ (۲) | ۲ (۳) | ۳ (۱) | ۳ (۴) |

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

درسنامه:

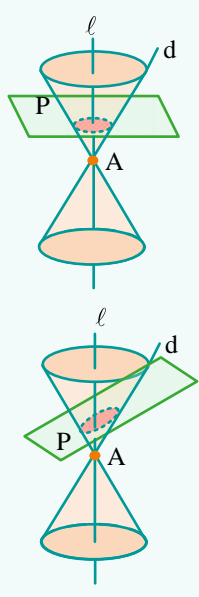
در حالتی که صفحه P:

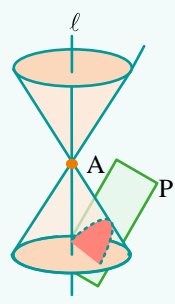
(۱) بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس عبور نکند. ← دایره

(۲) بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس عبور کند. ← نقطه

(۳) بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد هم موازی نباشد و از رأس نیز عبور نکند. ← بیضی

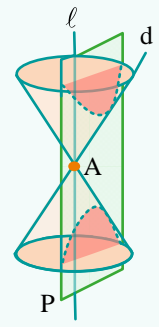
(۴) بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد هم موازی نباشد و از رأس عبور کند. ← نقطه





(۵) با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس عبور نکند. ← سهمی

(۶) با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس عبور کند. ← خط



(۷) هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و از رأس عبور نکند. ← هذلولی

(۸) هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و از رأس عبور کند. ← دو خط متقاطع

پاسخ تشریحی:

با توجه به درسنامه، سطح مقطع موردنظر فقط می تواند بیضی و هذلولی باشد. بنابراین، گزینه ۳ پاسخ است.

گروه آموزشی ماز

۲۵- در مثلث $\triangle ABC$ به اضلاع $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=6$ ، چند نقطه روی محیط مثلث موجود است که از A و B به یک فاصله قرار داشته و از C به فاصله ۳ باشد؟

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) صفر
- (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۳۰۲)

دو تا مکان هندسی معروف هم ببینید

عمودمنصف:

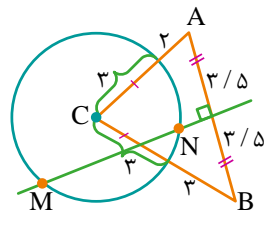
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط ثابت A و B در صفحه به فاصله یکسان باشند، عمودمنصف پاره خط AB است.

دایره:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت A در صفحه به فاصله ثابت k باشند، دایره ای است به مرکز A و شعاع k .

پاسخ تشریحی:

با توجه به نکات، عمودمنصف AB و دایره ای به مرکز C و شعاع ۳ را رسم می کنیم. مطابق شکل، این خط و دایره یکدیگر را در دو نقطه M و N قطع می کنند که هیچ کدام روی محیط مثلث نیست و در واقع هیچ نقطه ای با ویژگی های مدنظر مسئله وجود ندارد. بنابراین، گزینه ۳ پاسخ است.



گروه آموزشی ماز

۲۶- از بین اعداد طبیعی سه رقمی عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که مربع آن عدد در تقسیم بر ۱۲ باقی‌مانده ۴ داشته باشد، کدام است؟

$\frac{1}{12}$ (۴)

$\frac{1}{6}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

بچه‌ها لطفاً ویژگی‌های هم‌نهشتی "رو خوب یاد بگیرید!" ($m \in \mathbb{N}$)

۱) $a \equiv b \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c$

۲) $a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc$

۳) $a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n \quad n \in \mathbb{N}$

۴) $a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd \\ a \pm c \equiv b \pm d \end{cases}$

۵) $a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$

۶) $a \equiv b \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$

۷) $ac \equiv bc, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$

پاسخ تشریحی:

با توجه به در نظر گرفتن همه حالات و نیز قضیه تقسیم معلوم می‌شود که هر عدد طبیعی‌ای در تقسیم بر ۱۲ به یکی از ۱۲ فرم $12k + 0, 12k + 1, 12k + 2, \dots, 12k + 11$ (یا $12q - 1$) است که باقی‌مانده مربع هر کدام از آن‌ها بر ۱۲ به ترتیب برابر $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121$ می‌شود به این معناست که از ۹۰۰ عدد سه رقمی، ۳۰۰ عدد سه رقمی دارای باقی‌مانده ۴ می‌باشند. پس:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}$

گروه آموزشی ماز

۲۷- با توجه به نمادهای ب.م.م و ک.م.م، مجموع ارقام عدد حاصل از $(8! + 7, 105) + [15, 192]$ کدام است؟

۲۹ (۴)

۳۵ (۳)

۲۸ (۲)

۳۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

یادفاخرات! "روش محاسبه ب.م.م دو عدد":

برای محاسبه (a, b) هرکدام از اعداد a و b را به عوامل اولشان تجزیه کرده و عوامل مشترک با توان کمتر را به عنوان عوامل ب.م.م انتخاب می‌کنیم. حاصل ضرب آن عوامل، همان ب.م.م خواهد بود.

مثال:

$(200, 720) = ?$

جواب:

$200 = 2^3 \times 5^2$ $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1 \xrightarrow{\text{عوامل مشترک با توان کمتر}} 2^3, 5^1$

$\Rightarrow \text{ب.م.م} = 2^3 \times 5^1 = 40$

خب بعد از ب.م.م باید "روش محاسبه ک.م.م دو عدد" رو هم مرور کنیم دیگه، درسته!؟

برای محاسبه $[a, b]$ هرکدام از اعداد a و b را به عوامل اولشان تجزیه کرده و عوامل مشترک با توان بزرگتر به علاوه عوامل غیرمشترک را به عنوان عوامل ک.م.م انتخاب می‌کنیم. حاصل ضرب آن عوامل، همان ک.م.م خواهد بود.

مثال:

$$[1008, 600]$$

$$600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$$

$$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7^1$$

$$\xrightarrow{\text{عوامل مشترک}} 2^3 \times 3^2$$

با توان بزرگتر

$$\xrightarrow{\text{عوامل غیرمشترک}} 5^2 \times 7^1$$

$$\text{م.م.ک} = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^1 = 25200$$

پاسخ سریعی:

چون $105 = 3 \times 5 \times 7$ و این که عدد $8! + 7$ بر ۷ بخش پذیر است ولی به هیچ یک از اعداد ۳ و ۵ بخش پذیر نیست، معلوم می شود که $(8! + 7, 105) = 7$.
همچنین $15 = 5 \times 3$ و عدد 15192 به ۳ بخش پذیر است ولی به ۵ بخش پذیر نیست، بنابراین $[15192, 15] = 15192 \times 5$ ، پس:

$$? = 75960 + 7 = 75967 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 7 + 5 + 9 + 6 + 7 = 34$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- کوچک ترین عدد طبیعی که در تقسیم بر b خارج قسمت و باقی مانده ای به ترتیب برابر q و 8 دارد و در تقسیم بر $b+1$ خارج قسمت و باقی مانده ای به ترتیب برابر $2-q$ و 11 دارد را a می نامیم. رقم دهگان a کدام است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۱

دوستان، به "قضیه تقسیم" رسیدید!

قضیه تقسیم: اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}$ باشد، در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

پاسخ سریعی:

$$\left. \begin{array}{l} a = b \times q + 8 \quad 8 < b \\ a = (b+1)(q-2) + 11 \quad 11 < b+1 \end{array} \right\} \Rightarrow 11 \leq b \Rightarrow b_{\min} = 11$$

$$bq - 2b + q - 2 + 11 = bq + 8 \Rightarrow q = 2b - 1 \Rightarrow q_{\min} = 2 \times 11 - 1 = 21$$

$$\Rightarrow a_{\min} = 11 \times 21 + 8 = 239$$

گروه آموزشی ماز

۲۹- اگر اعداد $53, a-8, a+70$ دو به دو به پیمانه m که در آن m عددی طبیعی و دو رقمی است، هم نهشت باشند، آن گاه a کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

۱۱۳ (۴)

۱۱۵ (۳)

۱۲۳ (۲)

۱۲۵ (۱)

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

راستی بچه ها این جامی خواهیم "مفهوم و تعریف هم نهشتی" رو خدمتون توضیح دهیم.

برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b ، اگر $a - b \equiv m$ ، می گوئیم « a هم نهشت با b است به پیمانه m »؛ و می نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$. پس:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \quad (m \in \mathbb{N})$$

پاسخ سریعی:

$$a + 70 \equiv a - 8 \pmod{m} \Rightarrow 78 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow m \mid 78 \Rightarrow m = 13 \text{ یا } 26 \text{ یا } 39 \text{ یا } 78$$

$$a - 8 \equiv 53 \pmod{m} \Rightarrow a \equiv 61 \pmod{m}$$

در بین گزینه ها فقط ۱۱۳ می تواند به جای a باشد، چون $61 - 113 = -52$ مضرب ۱۳ و ۲۶ بوده و به ازای $m = 13, 26$ هم نهشتی برقرار است.

گروه آموزشی ماز

۳۰- معادله سیاله خطی $63x + my = 1372$ در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد. m چه تعداد از اعداد طبیعی دو رقمی می تواند باشد؟

۲۰ (۴)

۸۰ (۳)

۶۰ (۲)

۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۴۰۱)

معادله سیاله کی جواب داره؟

شرط لازم و کافی برای آن که معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد، آن است که $(a, b) | c$.

پاسخ شریعی:

باید رابطه $(63, m) | 1372$ برقرار باشد. چون هر دو عدد ۶۳ و ۱۳۷۲ مضرب ۷ هستند، بنابراین مضرب ۷ بودن m می تواند محقق باشد و یا نه. اما ۶۳ در تجزیه به عوامل اول عامل ۳ داشته و ۱۳۷۲ چنین عاملی را ندارد، بنابراین m نباید عامل ۳ را داشته باشد، در بین ۹۰ عدد دو رقمی دقیقاً ۳۰ عدد شامل عامل ۳ بوده و ۶۰ عدد دیگر که همگی مطلوب هستند فاقد عامل ۳ می باشند.

گروه آموزشی ماز

۳۱- در درون هر یک از دو جعبه A و B به ترتیب ۴ و ۱۰ مهره وجود دارد که از مهره های جعبه A دقیقاً ۱ مهره و از مهره های جعبه B دقیقاً ۳ مهره قرمز هستند. در هر یک از حالات زیر، مهره ها را از کدام جعبه انتخاب کنیم تا احتمال دسترسی به حداقل یک مهره قرمز بیشتر باشد؟

- I: مجاز باشیم دقیقاً دو مهره از درون جعبه برداریم. II: مجاز باشیم دقیقاً سه مهره از درون جعبه برداریم.
- (۱) I: A , II: A (۲) I: A , II: B (۳) I: B , II: A (۴) I: B , II: B

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۰۰۷)

پاسخ شریعی:

I)

$$P(A) = ? = \frac{\binom{1}{1} \binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = ? = 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

⇒ I: B

II)

$$P(A) = ? = \frac{\binom{1}{1} \binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = ? = 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

⇒ II: A

گروه آموزشی ماز

۳۲- در پرتاب دو تاس با یکدیگر پیشامد A را آن تعریف می کنیم که حداقل یکی از دو تاس عددی اول باشد. کدام یک از پیشامدهای زیر با A ناسازگار است؟

- (۱) B: پیشامد آن که مجموع دو تاس عددی اول باشد. (۲) C: پیشامد آن که حاصل ضرب دو تاس عددی اول باشد. (۳) D: پیشامد آن که اختلاف دو تاس ۵ واحد باشد. (۴) E: پیشامد آن که مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی - ۱۰۰۷)

یه نکته در مورد "پیشامدهای ناسازگار":

دو پیشامد A و B ناسازگارند، هرگاه $A \cap B = \emptyset$



$$(2, 3) \in A \cap B, (1, 5) \in A \cap C, (5, 5) \in A \cap E$$

مجموعه D فقط شامل دو زوج مرتب (1, 6) و (6, 1) است که هیچ کدام از این دو زوج مرتب در A وجود ندارند، بنابراین $A \cap D = \emptyset$ و A و D ناسازگارند.

گروه آموزشی ماز

۳۳- سکه‌ای را متوالیاً پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که حداقل یکی از دو پرتاب اول یا دوم پشت بوده و نیز در ۵ پرتاب نخست، روها بیشتر از پشت‌ها باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{32}$
 (۲) $\frac{1}{8}$
 (۳) $\frac{21}{64}$
 (۴) $\frac{21}{32}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۰۰۷)

در باب پرتاب متوالی سکه‌ای تا بی‌نهایت نکته زیر را ببین.

اگر سکه‌ای را تا بی‌نهایت بار پرتاب کنیم، احتمال آن که در پرتاب اول پیشامد A اتفاق بیفتد، مثل آن است که سکه‌ای را فقط یکبار پرتاب کنیم و احتمال آن را بسنجیم که همان پرتاب اول پیشامد A اتفاق بیفتد.

تذکر: برای n پرتاب در بی‌نهایت پرتاب هم همین نکته برقرار است. مثلاً اگر سکه‌ای را بی‌نهایت بار پرتاب کنیم، احتمال آن که در ۵ پرتاب اول پیشامد A اتفاق بیفتد مثل آن است که سکه‌ای را فقط ۵ بار پرتاب کرده‌ایم و احتمال پیشامد A را خواهیم پیدا کنیم.

مثال: اگر سکه‌ای را بی‌نهایت بار پرتاب کنیم، احتمال آن که در پرتاب اول رو و در پرتاب دوم پشت بیاید چقدر است؟
جواب: فرض می‌کنیم سکه را فقط دو بار پرتاب کرده‌ایم:

$$p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



از بین تمام ۳۲ حالتی که برای پنج بار پرتاب یک سکه می‌توان متصور شد فقط حالات زیر مطلوب هستند:

- ۱) ر ر ر ر پ ۲) ر ر ر ر پ ۳) ر ر ر پ ر
 ۴) ر پ ر ر پ ۵) پ ر ر ر پ ۶) ر ر ر ر ر
 ۷) ر ر ر پ ر ۸) ر ر ر ر ر ۹) پ ر ر ر ر

پس احتمال مورد نظر $\frac{9}{32}$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۴- در ۴ پرتاب یک سکه، پیشامد A آن است که از دو پرتاب اول و دوم حداقل یکی رو باشد و پیشامد B آن است که تعداد روها برابر ۲ باشد. احتمال آن که A یا B رخ دهد کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{8}$
 (۲) $\frac{13}{16}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) $\frac{5}{8}$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۰۰۷)

عبارت "حداقل" در سؤالات احتمال یعنی "متمم"!

اگر در سؤالات احتمال از عبارت "حداقل" استفاده شده، به احتمال بسیار زیادی باید از روش "متمم‌گیری" استفاده کنید.



$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - P(\text{هر دو پرتاب اول و دوم پشت باشند}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|\{(ر, ر, پ, پ), (پ, ر, پ, پ), (پ, پ, ر, پ), (پ, پ, پ, ر)\}|}{2^4} = \frac{5}{16}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{5}{16} = \frac{12}{16} + \frac{6}{16} - \frac{5}{16} = \frac{13}{16}$$

روشی دوم:

متمم حالت خواسته شده آن است که هر دو پرتاب اول و دوم پشت بوده و نیز هر دو پرتاب سوم و چهارم رو نباشند:

$$? = 1 - \frac{|\{(پ, پ, پ, پ), (پ, پ, پ, ر), (پ, پ, ر, پ), (پ, ر, پ, پ), (ر, پ, پ, پ)\}|}{2^4} = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

گروه آموزشی ماز

۳۵- جعبه‌ای شامل ۴ مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ در اختیار است. A، B، C هر کدام یک مهره با جایگذاری از درون آن بیرون می‌آورند. اگر بدانیم عدد A از هر دو عدد B و C بزرگ‌تر است، احتمال آن که اعداد B و C مساوی باشند، کدام است؟
Telegram : AzmonVIP

- (۱) $\frac{49}{144}$ (۲) $\frac{11}{18}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{1}{3}$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

و حالا "احتمال شرطی" وارد می‌شود:

اگر A و B دو پیشامد باشند، داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

روشی اول:

پیشامد X را آن تعریف می‌کنیم که عدد A از هر دو عدد B و C بزرگ‌تر باشد و پیشامد Y را آن تعریف می‌کنیم که اعداد B و C مساوی باشند، که در این صورت هدف سوال یافتن مقدار $P(Y|X)$ است.

$$P(X) = P(\{(1,2,3)\} \text{ یکی از اعداد } (B,C) \text{ یا } A = 4) + P(\{(1,2)\} \text{ یکی از اعداد } (B,C) \text{ یا } A = 3) + P(B = C = 1 \text{ و } A = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{14}{64}$$

$$P(X \cap Y) = \frac{3}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{6}{64}$$

$$\Rightarrow ? = P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{6}{64}}{\frac{14}{64}} = \frac{3}{7}$$

روشی دوم:

با توجه به صورت سؤال فضای نمونه‌ای را به گونه‌ای کاهش می‌دهیم که عدد A از B و C بزرگ‌تر باشد:

$$S = \{(4,1,1), (4,1,2), (4,1,3), (4,2,1), (4,2,2), (4,2,3), (4,3,1), (4,3,2), (4,3,3), (3,1,1), (3,1,2), (3,2,1), (3,2,2), (2,1,1)\}$$

از ۱۴ عضو موجود، ۶ عضو مشخص شده‌اند که مطلوب مسئله ما می‌باشند. پس پاسخ برابر است با: $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

گروه آموزشی ماز

۳۶- در مسابقات دوی ۸۰۰ متر بازی‌های آسیایی، ۴ نفر از شرق آسیا و ۴ نفر از غرب آسیا به فینال راه پیدا کرده‌اند. در بازی فینال، احتمال اول شدن همهٔ دوندگان از شرق آسیا با هم برابر بوده و دو برابر احتمال اول شدن هر یک از نفرات غرب آسیاست. در لحظهٔ شروع مسابقات «این چون اون» از شرق آسیا خطا کرده و از دور مسابقات خارج می‌شود و پس از شلیک تپانچه ۷ نفر به مسابقه ادامه می‌دهند. احتمال آن که «ناپاشی گوشه» از شرق آسیا اول شود کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{2}{9}$ (۴) $\frac{1}{5}$

(متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

این شما و این هم "احتمال غیر هم‌شانس":

اگر در سؤال، حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، باید از احتمال غیرهم‌شانس استفاده کنیم.



پاسخ تشریحی:

با حذف «این چون اون»، $P(S)$ که برابر ۱ است، بین γ و β ، α و γ (از شرق) و a ، b ، c ، d (از غرب) توزیع می‌شود:

$$p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = t$$

$$p(\alpha) = p(\beta) = p(\gamma) = 2t$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow t + t + t + t + 2t + 2t + 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{تاپاشی گوشه}) = P(\alpha) = 2t = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- اگر پیشامد A به دو پیشامد A_1 و A_2 و نیز پیشامد B به دو پیشامد B_1 و B_2 افراز شده باشد، آن‌گاه $P(A|B)$ با کدام یک از روابط زیر برابر است؟

(۲) $P(A_1|B).P(A_2|B)$

(۱) $P(A_1|B) + P(A_2|B)$

(۴) $P(A|B_1).P(A|B_2)$

(۳) $P(A|B_1) + P(A|B_2)$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ تشریحی:

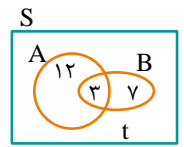
با بررسی گزینه ۱ به پاسخ درست می‌رسیم:

$$P(A_1|B) + P(A_2|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- در فضای نمونه S دو پیشامد A و B چنانند که $n(A - B) = 12$ ، $n(A \cap B) = 3$ و $n(B - A) = 7$. مقدار t یعنی $n(A' \cap B')$ چنان است که دو پیشامد

A و B مستقل شده‌اند. مجموع ارقام t کدام است؟



- ۷ (۱)
- ۹ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۱۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۲)

پیشامدها هم "استقلال" دارند، مانداشته باشیم! اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

پاسخ تشریحی:

شرط لازم و کافی برای مستقل بودن: $P(A|B) = P(A)$

$$P(A|B) = P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{15}{22+t} \Rightarrow 3t + 66 = 150 \Rightarrow 3t = 84 \Rightarrow t = 28 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام}} 2 + 8 = 10$$

گروه آموزشی ماز

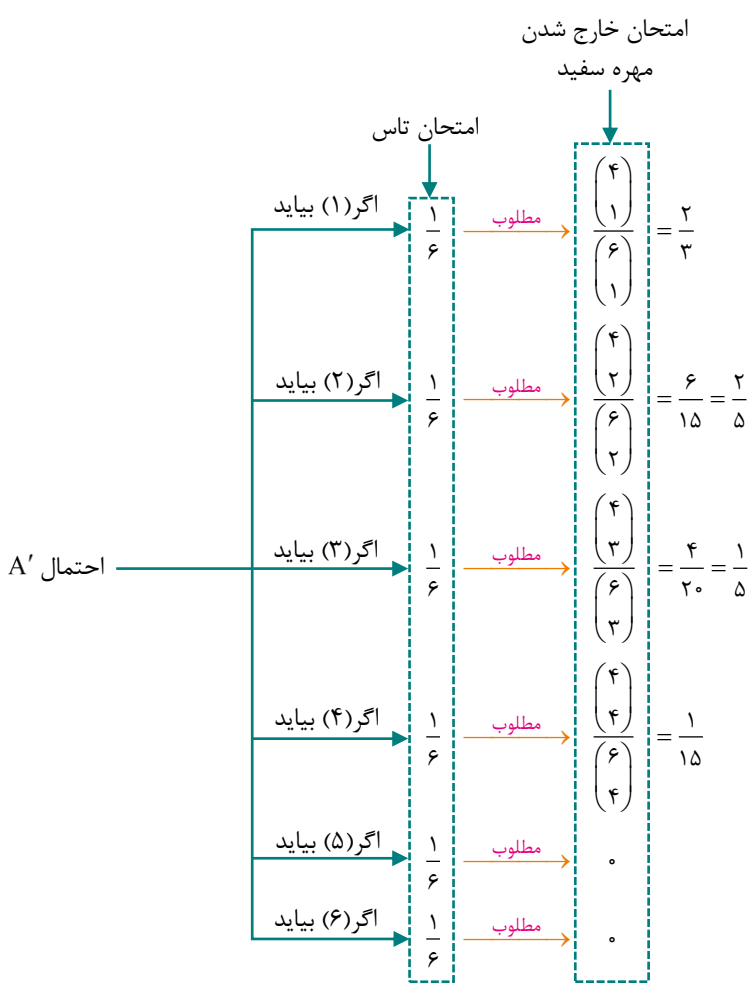
۳۹- در جعبه‌ای، ۴ مهره سفید و ۲ مهره قرمز است. تاسی را پرتاب کرده و به اندازه عدد رو شده، از جعبه مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که در مهره‌های بیرون آمده مهره قرمزی موجود باشد، کدام است؟

- $\frac{7}{9}$ (۴) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - مفهومی/محاسباتی - ۱۱۰۲)



اگر پیشامد موردنظر را A بنامیم، آن‌گاه احتمال A' (سفید بودن مهره‌های منتخب) از نمودار درختی زیر به دست می‌آید:



حالا برای به دست آوردن احتمال A' ، ستون‌های نمودار درختی را در هم ضرب می‌کنیم و ردیف‌های آن را با هم جمع می‌کنیم:

$$P(A') = \left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{6} \times 0\right) + \left(\frac{1}{6} \times 0\right)$$

$$\Rightarrow P(A') = \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{90} = \frac{10+6+3+1}{90} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$$

در نتیجه $P(A)$ برابر است با $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

گروه آموزشی ماز

۴۰- جعبه‌های A, B, C به ترتیب شامل ۲, ۳, ۴ مهره‌اند که دقیقاً یکی از مهره‌های هر جعبه سیاه است. جعبه‌ای به تصادف انتخاب و مهره‌ای از درون آن انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مهره بیرون آمده سیاه است، احتمال آن که از جعبه C بوده باشد کدام است؟

- $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{3}{13}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)



قانونی بسیار بسیار مهم و تست فیز، به نام "قانون بیز"



فرض کنید B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')}$$

پاسخ تشریحی:

$$? = P(C|\text{سیاه}) = \frac{P(C).P(\text{سیاه}|C)}{P(\text{سیاه})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{13}{36}} = \frac{3}{13}$$

گروه آموزشی ماز



۴۱- معادله مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، در SI به صورت $x = -2t^2 + 20t - 42$ است. در بازه زمانی که بردارهای مکان و سرعت خلاف جهت یکدیگر بوده و تندی متحرک در حال افزایش است، بردار سرعت متوسط آن در SI کدام خواهد بود؟
 (۱) $+4\vec{i}$ (۲) $+4\vec{i}$ (۳) $-14\vec{i}$ (۴) $-4\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - محاسباتی - ۱۲۰۱)

نکته ۱:

اگر متحرکی در یک لحظه در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان باشد، بردارهای مکان و سرعت آن در خلاف جهت یکدیگر هستند ($xv < 0$) و چنانچه متحرک در یک لحظه در حال دور شدن از مبدأ مکان باشد، بردارهای مکان و سرعت آن در جهت یکدیگر خواهند بود. ($xv > 0$)

نکته ۲:

در سؤالاتی که معادله مکان - زمان یا سرعت - زمان داده می شود و بازه ای مدنظر طراح قرار می گیرد که بیش از یک شرط برای آن مطرح می شود، در صورتی که معادله داده شده درجه اول یا درجه دوم باشد، بهترین راه رسم نمودار آن است.

نکته ۳:

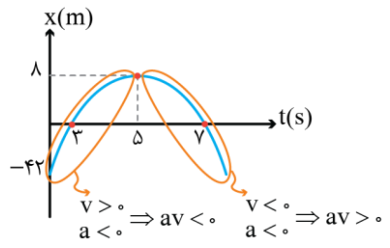
برای بررسی روند افزایش یا کاهش تندی متحرک باید به هم علامت یا مختلف علامت بودن بردارهای شتاب و سرعت توجه کنیم، به طوری که:
 (۱) \vec{v} و \vec{a} هم جهت با یکدیگر ($av > 0$) ← حرکت تندشونده ← تندی در حال افزایش
 (۲) \vec{v} و \vec{a} خلاف جهت یکدیگر ($av < 0$) ← حرکت کندشونده ← تندی در حال کاهش



ابتدا نمودار مکان - زمان متحرک را رسم می کنیم:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow x = -42m \\ x = 0 \rightarrow -2t^2 + 20t - 42 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 3s \\ t_2 = 7s \end{cases} \\ t_{راس} = \frac{-b}{2a} = 5s \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x = 8m \end{cases}$$

طبق صورت سؤال، در بازه ای که بردارهای مکان و سرعت در خلاف جهت هم هستند، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است که طبق نمودار یکی از بازه های $t_1 = 0s$ تا $t_1 = 3s$ یا $t_2 = 5s$ تا $t_2 = 7s$ است. هم چنین در بازه ای که تندی در حال افزایش است باید $av > 0$ باشد که طبق اطلاعات روی شکل، بازه $(5, +\infty)$ این شرط را دارد.

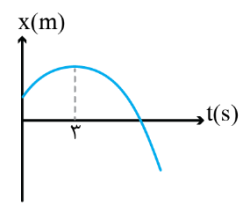


اشتراک این دو بازه، بازه $(5s, 7s)$ است و اکنون سرعت متوسط در این بازه را می یابیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} \rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{0 - 8\vec{i}}{7 - 5} = -4\left(\frac{m}{s}\right)\vec{i}$$

گروه آموزشی ماز

۴۲- نمودار مکان - زمان متحرکی که بر خط راست حرکت می کند به صورت سهمی شکل زیر است. اگر تندی متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه تغییر جهت حرکت برابر $\frac{m}{s}$ باشد، تندی متوسط متحرک در یک بازه دلخواه ۴ ثانیه ای که تندی متوسط متحرک در آن کمینه است، چند متر می باشد؟



- ۴ (۱)
- ۸ (۲)
- ۱۶ (۳)
- ۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - نموداری - ۱۴۰۱)

کمینه شدن تندى متوسط در حرکت با شتاب ثابت

در حرکت با شتاب ثابت بر روی خط راست، برای بازه‌هایی با مدت زمان مساوی، هر چه یک بازه به لحظه تغییر جهت حرکت (که در آن $v = 0$ می‌شود) نزدیک‌تر باشد، تندى متوسط متحرک در آن بازه کمتر است و اگر بازه‌های زمانی مدتی معادل T داشته باشد، نزدیک‌ترین بازه به لحظه تغییر جهت حرکت، بازه‌ای است که $\frac{T}{2}$ از آن قبل از این لحظه و $\frac{T}{2}$ از آن بعد از این لحظه قرار دارد. (در واقع این لحظه درست وسط آن بازه قرار می‌گیرد).

مثال:

معادله مکان - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند در SI به صورت $x = -2t^2 + 10t - 11$ است. تندى متوسط متحرک در کدام یک از بازه‌های زمانی زیر کمتر از سایر گزینه‌ها است؟

- ۱) ثانیه اول
 - ۲) ثانیه دوم
 - ۳) ثانیه سوم
 - ۴) ثانیه چهارم
- پاسخ: گزینه ۳

طبق معادله $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ می‌توان نوشت:

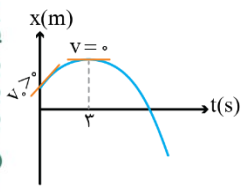
$$\begin{cases} \frac{1}{2}a = -2 \rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = 10 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$v = at + v_0 \rightarrow v = -4t + 10 \xrightarrow{v=0} -4t + 10 = 0 \rightarrow t = 2.5s$$

چون تمام بازه‌ها یک ثانیه‌ای هستند، بازه‌ای که لحظه توقف درست وسط آن قرار گیرد، نزدیک‌ترین بازه به نقطه توقف جسم بوده و کمترین مسافت در طی یک ثانیه در این بازه طی خواهد شد و بنابراین کمترین تندى متوسط را در بین بازه‌های یک ثانیه‌ای خواهد داشت. پس گزینه ۳ (بازه $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 3s$) پاسخ درست است.

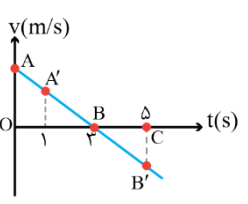
پاسخ سریعی:

www.biomaze.ir



ابتدا تلاش می‌کنیم به کمک نمودار $x-t$ ، نمودار $v-t$ این حرکت را رسم کنیم.

طبق موارد نوشته شده روی نمودار $x-t$ ، $v > 0$ و در لحظه $t = 3$ ، $v = 0$ می‌باشد. پس نمودار سرعت - زمان این حرکت مانند شکل زیر است. از طرفی اگر قرار باشد تندى متوسط در یک بازه ۴ ثانیه‌ای کمینه باشد، ۲ ثانیه ابتدایی این بازه باید قبل از لحظه توقف و ۲ ثانیه آخر این بازه باید بعد از توقف باشد تا لحظه $t = 3s$ درست وسط این بازه قرار گیرد. پس بازه موردنظر $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 5s$ می‌باشد. هم‌چنین براساس داده‌های صورت سؤال می‌توان نوشت:



$$s_{av}[0,3] = \frac{l}{\Delta t} \rightarrow 6 = \frac{l}{3} \rightarrow l = 18m$$

$$\Delta x = l = 18m$$

$$\rightarrow S_{OAB} = 18$$

و چون در این بازه تغییر جهت نداریم:

با نوشتن تشابه مثلث‌ها بین دو مثلث OAB و $BB'C$ داریم:

$$\frac{S_{BB'C}}{S_{OAB}} = \left(\frac{BC}{BO}\right)^2$$

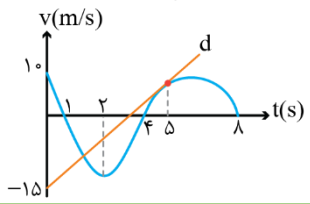
$$\rightarrow \frac{S_{BB'C}}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \rightarrow S_{BB'C} = 8 \rightarrow l_{[3,5]} = 8m$$

از طرفی به دلیل تقارن در حرکت با شتاب ثابت، چنین می‌توان نوشت:

$$l_{[1,3]} = l_{[3,5]} = 8m$$

$$\rightarrow l_{[1,5]} = 8 + 8 = 16m \rightarrow s_{av}[1,5] = \frac{l}{\Delta t} = \frac{16}{4} = 4 \frac{m}{s}$$

۴۳- نمودار سرعت - زمان جسمی به جرم 4 kg که روی خط راست حرکت می کند، مانند شکل زیر است. اگر بزرگی نیروی خالص وارد بر جسم در لحظه $t = 5\text{ s}$ معادل 14 N باشد، بزرگی نیروی متوسط وارد بر جسم در 5 ثانیه اول حرکت آن چند نیوتون خواهد بود؟ (خط d ، مماس بر نمودار در لحظه $t = 5\text{ s}$ است.)



- ۱) $1/5$
- ۲) 6
- ۳) 15
- ۴) 60

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - نموداری و ترکیبی - ۱۲۰۱)

نکته:

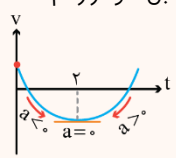
در مسائلی که حرکت شناسی و دینامیک با یکدیگر ترکیب می شوند، پل ارتباطی بین این دو فصل، کمیت شتاب است. بنابراین در این گونه از سوالات، از اطلاعات داده شده هر فصل استفاده کنید و شتاب را بدست آورید و سپس وارد فصل دیگر شوید.

ریاضی ۹۴ خارج - بانددگی تغییر:

معادله سرعت - زمان جسمی که بر خط راست حرکت می کند، در SI به صورت $v = 3t^2 - 12t + 8$ است. در لحظه ای که جهت برآیند نیروهای وارد بر جسم عوض می شود، بزرگی سرعت جسم چند $\frac{m}{s}$ است؟

- ۱) 3
 - ۲) 4
 - ۳) 8
 - ۴) 9
- پاسخ: گزینه ۲

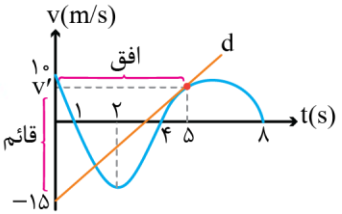
طبق رابطه $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ ، جهت دو بردار \vec{F}_{net} و \vec{a} همواره یکی است، پس لحظه ای جهت برآیند نیروها تغییر می کند که جهت شتاب تغییر کند. طبق نمودار رسم شده برای این معادله، جهت \vec{a} در رأس سهمی یعنی $t = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2 \times 3} = 2\text{ s}$ خواهد شد.



$$t = 2\text{ s} \xrightarrow{\text{در معادله}} v = 3(2)^2 - 12(2) + 8 = -4 \rightarrow |v| = 4 \frac{m}{s}$$

پاسخ تشریحی:

شیب خط d ، شتاب متحرک در لحظه $t = 5$ است. طبق قانون دوم نیوتون می توان نوشت:



$$F_{net} = ma \rightarrow 14 = 4a$$

$$\rightarrow a_{(t=5)} = 3/5 \frac{m}{s^2}$$

$$a_{(t=5)} = \text{شیب خط } d = \frac{\text{قائم}}{\text{افق}} \rightarrow 3/5 = \frac{v' - (-15)}{5} \rightarrow v' = 2/5 \frac{m}{s}$$

اکنون اگر بتوانیم شتاب متوسط در 5 ثانیه اول را بدست آوریم، سپس به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی خالص متوسط در این بازه بدست خواهد آمد:

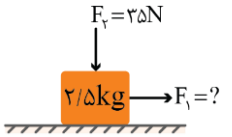
$$|a_{av[0,5]}| = \frac{|v(t=5) - v(t=0)|}{\Delta t} = \frac{|2/5 - 10|}{5} = 1/5 \frac{m}{s^2}$$

$$F_{net(av)} = ma_{(av)} = 4 \times 1/5 = 6\text{ N}$$

گروه آموزشی ماز

۴۴- دو نیروی F_1 و F_2 مانند شکل مقابل به جسم ساکنی اثر می کنند و جسم روی سطح افقی حرکت خود را آغاز کرده و در 4 ثانیه اول حرکت خود 48 متر

جابه جا می شود. اگر اندازه نیروی وارد بر جسم از طرف سطح افقی 75 N باشد، اندازه نیروی F_1 بر حسب نیوتون کدام است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

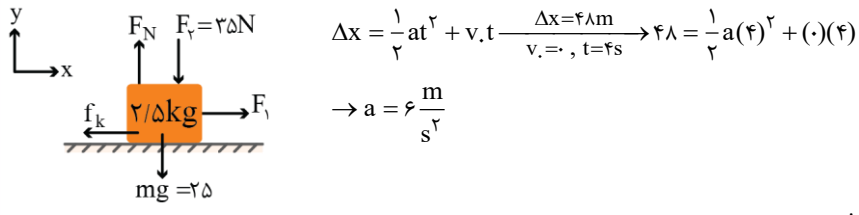


- ۱) 45
- ۲) 50
- ۳) 55
- ۴) 60

(متوسط - محاسباتی و ترکیبی - ۱۴۰۲) پاسخ: گزینه ۴



سایر نیروهای وارد بر جسم را در شکل مقابل رسم کرده ایم. ابتدا به کمک روابط حرکت شناسی، شتاب حرکت جسم را بدست می آوریم:



از طرفی، چون در راستای قائم حرکت نداریم، می توان نوشت:

$$a_{(y)} = 0 \rightarrow F_{net(y)} = 0$$

$$\rightarrow F_N = mg + F_y = 60 N$$

اکنون به کمک نیروی F_N و نیروی R می توان اندازه نیروی اصطکاک را بدست آورد:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \rightarrow 75 = \sqrt{60^2 + f_k^2} \rightarrow f_k = 45 N$$

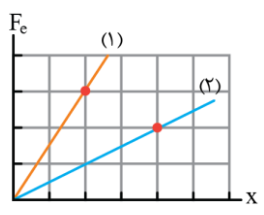
در نهایت به کمک قانون دوم نیوتون اندازه نیروی F_x بدست می آید:

$$F_{net} = ma \rightarrow F_x - f_k = ma \rightarrow F_x - 45 = 2/5 \times 6 \rightarrow F_x = 60 N$$

گروه آموزشی ماز

۴۵ - دو جسم A و B را به ترتیب توسط فنرهای (۱) و (۲) از سقف آویزان می کنیم. پس از تعادل یافتن هر دو جسم، تغییر طول فنر (۱)، نصف تغییر طول فنر (۲) می شود. اگر همین دو جسم را روی یک سطح افقی به ترتیب توسط نیروهای F_A و F_B به گونه ای حرکت دهیم که سرعت هر دو ثابت بماند، نسبت

$\frac{F_A}{F_B}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) $\frac{1}{6}$
- (۴) $\frac{1}{6}$

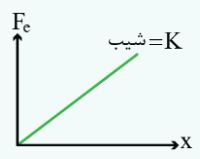
(سخت - نموداری - ۱۴۰۲) پاسخ: گزینه ۲

نیروی کشسانی فنر

اگر تغییر طول یک فنر نسبت به حالت آزاد آن را با x نشان دهیم، اندازه نیروی کشسانی در این فنر از رابطه زیر بدست می آید:

$$F_e = kx, \quad (x = l - l_0)$$

l: طول آزاد فنر



در این رابطه K را ضریب ثابت فنر می نامیم که به جنس و مشخصات ساختمانی فنر بستگی دارد و یکای آن در SI معادل $\frac{N}{m}$ است.

نکته: اگر نمودار نیروی کشسانی فنر بر حسب تغییر طول آن را رسم کنیم یک خط راست گذرنده از مبدأ مختصات خواهد بود که شیب آن معادل همان ثابت فنر است.

مثال:

یک انتهای فنری را به دیوار متصل می کنیم. اگر انتهای دیگر را با نیروی ۴۰N بکشیم طول فنر ۴۵cm و اگر این انتها را با نیروی ۴۸N بکشیم طول فنر ۵۰cm خواهد شد. طول آزاد فنر چند cm است؟

- (۱) ۱۵
 - (۲) ۲۰
 - (۳) ۲۵
 - (۴) ۳۰
- پاسخ: گزینه ۲

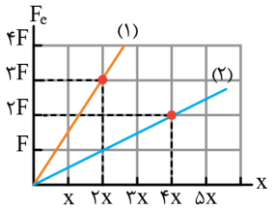
$$(1) \begin{cases} F_e = 40 N \\ l = 45 cm \end{cases} \rightarrow 40 = k(45 - l_0) \times 10^{-2} \quad (1)$$

$$(2) \begin{cases} F_e = 48 N \\ l = 50 cm \end{cases} \rightarrow 48 = k(50 - l_0) \times 10^{-2} \quad (2)$$

برای دو حالت از رابطه $F_e = k(l - l_0)$ استفاده می کنیم:

$$\frac{50 - l_0}{45 - l_0} = \frac{48}{40} = \frac{6}{5} \rightarrow 270 - 6l_0 = 250 - 5l_0 \rightarrow l_0 = 20 cm$$

اگر معادله (۲) را بر معادله (۱) تقسیم کنیم داریم:

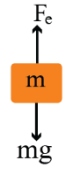


ابتدا به کمک شیب هر خط، ثابت هر فنر را بدست می آوریم:

$$k_1 = \text{شیب} = \frac{2F}{2x} = \frac{F}{x}$$

$$k_2 = \text{شیب} = \frac{F}{2x} = \frac{F}{2x}$$

$$\rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{2x}{x} = 2$$

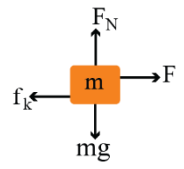


زمانی که هر یک از دو جسم در تعادل قرار می گیرند، نیروهای وارد بر آن‌ها به صورت شکل مقابل است و داریم:

$$F_{net} = 0 \rightarrow F_c = mg \rightarrow kx = mg$$

$$\rightarrow \frac{k_1}{k_2} \times \frac{x_1}{x_2} = \frac{m_A}{m_B} \xrightarrow{x_1 = \frac{1}{2}x_2} 2 \times \frac{1}{2} = \frac{m_A}{m_B} \rightarrow m_A = \frac{1}{2}m_B$$

در حالت دوم که دو جسم توسط دو نیرو با تندی ثابت روی سطح افقی حرکت می کنند، نیروهای وارد بر هر جسم به صورت شکل مقابل بوده و در این حالت می توان نوشت:

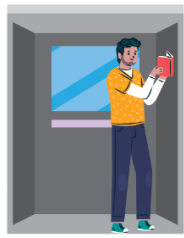


$$v = \text{ثابت} \rightarrow F_{net} = 0 \rightarrow F = f_k$$

$$F_N = mg \rightarrow f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg \rightarrow F = \mu_k mg$$

$$\xrightarrow{\mu_k \text{ ثابت}} \frac{F_A}{F_B} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز



۴۶ - شخصی به جرم 70 kg مانند شکل مقابل، کتابی به جرم 400 g را به دیواره قائم یک آسانسور تکیه داده است و کتاب در آستانه حرکت به سمت پایین می باشد. اگر آسانسور در حال حرکت به سمت بالا بوده و بزرگی نیرویی که از طرف شخص به کف آسانسور وارد می شود 840 N باشد، بزرگی نیرویی که شخص به کتاب وارد می کند، چند نیوتون است؟ (ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی این کتاب و دیواره قائم به ترتیب $0/8$ و $0/6$ بوده و $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مفهومی و محاسباتی - ۱۴۰۲)

آسانسور

اگر جسمی درون یک آسانسور حرکت کند، یعنی در راستای قائم دارای حرکت است و کافی است از قانون دوم نیوتون در راستای قائم به فرم $F_{net}(y) = ma_y$ برای آن استفاده کنیم. فقط باید به نکات زیر توجه داشت:

۱) جهت حرکت آسانسور را به عنوان جهت مثبت در نظر بگیرید و هر برداری که در این جهت قرار داشت را با علامت مثبت و هر برداری که در خلاف این جهت قرار داشت را با علامت منفی در روابط وارد کنید.

۲) اگر در سؤال مستقیماً از جهت شتاب صحبت نشده بود، براساس نوع حرکت (تندشونده یا کندشونده) آسانسور هم جهت یا خلاف جهت سرعت بودن شتاب را مشخص و سپس علامت آن را تعیین نمایید.

مثال:



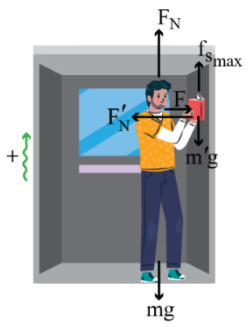
شخصی به جرم 60 kg درون یک آسانسور قرار داشته و آسانسور با شتابی به بزرگی $\frac{5}{3} \text{ m/s}^2$ در صورت تندشونده رو به بالا در حال حرکت است. بزرگی نیرویی که از طرف کف آسانسور به شخص وارد می شود چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

۱) ۳۰۰
۲) ۶۰۰
۳) ۹۰۰
۴) ۱۲۰۰

پاسخ: گزینه ۳

نیروهای وارد بر شخص در شکل روبه رو رسم شده است. جهت مثبت را به سمت بالا (جهت حرکت آسانسور) در نظر می گیریم و چون حرکت تندشونده است پس شتاب هم جهت با سرعت و رو به بالا است پس: $a = +5$

$$F_{net} = ma \rightarrow F_N - mg = ma \rightarrow F_N - 600 = 60 \times 5 \rightarrow F_N = 900 \text{ N}$$



نیروهای وارد بر شخص و کتاب را در شکل مقابل رسم کرده ایم و نیروی شخص بر کتاب را F نامیده ایم. چون آسانسور به سمت بالا حرکت می کند جهت مثبت را به سمت بالا در نظر گرفته ایم. اگر قانون دوم نیوتون را برای شخص بنویسیم:

$$F_{net} = ma \rightarrow F_N - mg = ma \rightarrow 840 - 700 = 70a \rightarrow a = +2 \frac{m}{s^2}$$

$$F_{net(y)} = ma_{(y)} \rightarrow f_{smax} - m'g = m'a$$

$$\rightarrow f_{smax} - (0.4 \times 10) = 0.4 \times 2 \rightarrow f_{smax} = 4/8 N$$

$$f_{smax} = \mu_s F_N \rightarrow 4/8 = 0.4 F_N \rightarrow F_N = 6 N$$

$$a_{(x)} = 0 \rightarrow F_{net(x)} = 0 \rightarrow F = F_N = 6 N$$

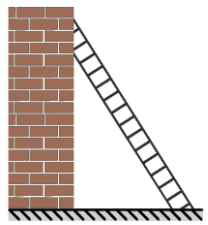
اکنون با نوشتن قانون دوم نیوتون برای کتاب در راستای y ها داریم:

اکنون از رابطه اصطکاک در آستانه حرکت استفاده کرده و F_N را بدست می آوریم:

و در نهایت چون کتاب در راستای افقی حرکت ندارد:

گروه آموزشی ماز

۴۷- مطابق شکل نردبانی به یک دیوار قائم بدون اصطکاک تکیه داده شده و در حالت تعادل است. چه تعداد از عبارتهای زیر الزاماً صحیح است؟



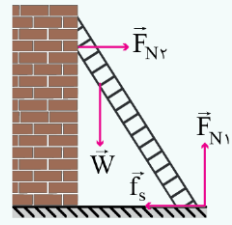
- الف: نیروی وزن نردبان و نیروی عمودی که سطح افقی بر نردبان وارد می کند برابرند.
- ب: نسبت بزرگی نیرویی که دیوار قائم بر نردبان وارد می کند به بزرگی وزن نردبان برابر با ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و نردبان است.
- ج: نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می کند بزرگ تر از نیرویی است که دیوار قائم به نردبان وارد می کند.
- د: برآیند نیروهای وارد بر نردبان صفر است.

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۴۰۲)

تعادل نردبان

مطابق شکل زیر هرگاه نردبانی به زمین و یک دیوار بدون اصطکاک تکیه داده شده باشد، از طرف هر یک از پایه های نردبان بر سطح تماس متناظرش نیرو وارد می شود؛ در این وضعیت چنانچه نردبان بدون حرکت باقی بماند، برآیند نیروهای افقی و همچنین برآیند نیروهای عمودی اش برابر صفر می باشد:



(راستای عمودی): $F_{N_l} = mg$

(راستای افقی): $F_{N_r} = f_s$

(۲) اگر نردبان در آستانه سر خوردن باشد، اصطکاک ایستایی بیشینه می شود و داریم:

$$F_{N_l} = mg$$

$$F_{N_r} = f_{smax} = \mu_s F_{N_l} \rightarrow F_{N_r} = \mu_s mg$$

بنابراین اگر نردبان در آستانه سر خوردن باشد، نسبت بزرگی نیرویی که دیوار قائم بر آن وارد می کند به وزن آن برابر ضریب اصطکاک ایستایی (μ_s) است. دقت کنید که اگر نردبان در آستانه سر خوردن نباشد، این نسبت کوچک تر از ضریب اصطکاک ایستایی خواهد بود.

(۳) اگر نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می کند را بخواهیم، باید از نیروهای f_s و F_{N_l} برآیند بگیریم.

(۱) نیروی سطح: $R = \sqrt{F_{N_l}^2 + f_s^2} = \sqrt{(mg)^2 + f_s^2}$

اگر نردبان در آستانه سر خوردن باشد $\rightarrow R_1 = \sqrt{(mg)^2 + (\mu_s mg)^2} = mg\sqrt{1 + \mu_s^2}$

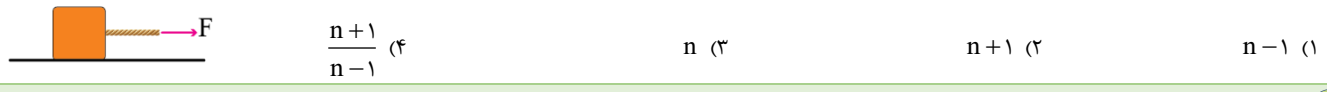
نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می کند برابر برآیند f_s و F_{N_l} است، در حالی که نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می کند هم اندازه f_s است، بنابراین حتماً نیروی سطح افقی بزرگ تر از نیروی دیوار قائم است.



مطابق توضیحات درسنامه فوق، عبارتهای (الف)، (ج) و (د) الزاماً صحیح هستند. دقت کنید عبارت (ب) فقط زمانی صحیح است که نردبان در آستانه سر خوردن باشد.

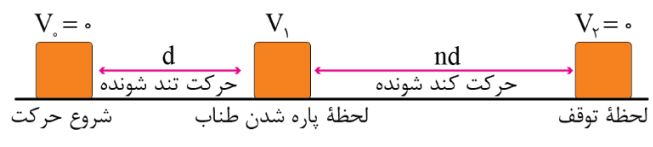
گروه آموزشی ماز

۴۸- مطابق شکل، با نیروی F و با استفاده از طنابی سبک، جسمی را از حال سکون به حرکت درمی آوریم. پس از مدتی، طناب پاره می شود و جسم به تدریج تحت تأثیر نیروی اصطکاک متوقف می شود. اگر مسافتی که جسم به صورت کندشونده طی می کند، n برابر مسافتی باشد که به صورت تندشونده طی کرده است، بزرگی نیروی F چند برابر نیروی اصطکاک بین جسم و سطح افقی است؟



پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:



گام اول: شکل ساده‌ای از چگونگی حرکت جسم رسم می کنیم:

گام دوم: با نوشتن معادله مستقل از زمان، شتاب حرکت را در دو مرحله مقایسه می کنیم:

$$\begin{cases} \text{حرکت تندشونده: } v_1^2 - v_0^2 = 2a_1 d \rightarrow a_1 = \frac{v_1^2}{2d} \\ \text{صفر} \\ \text{حرکت کندشونده: } v_2^2 - v_1^2 = 2a_2 nd \rightarrow a_2 = \frac{-v_1^2}{2nd} \\ \text{صفر} \end{cases} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = -n$$

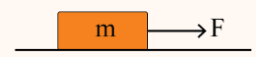
گام سوم: با کمک قانون دوم نیوتون می توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{قبل از پاره شدن نخ: } F - f_k = ma_1 \rightarrow \frac{F - f_k}{a_1} = -n \\ \text{پس از پاره شدن نخ: } -f_k = ma_2 \rightarrow \frac{-f_k}{a_2} = -n \end{cases} \rightarrow F - f_k = n f_k \rightarrow F = (n + 1) f_k$$

این سؤال براساس یکی از تست‌های کنکور ۱۴۰۲ طرح شده است که در ادامه به بررسی آن می پردازیم.

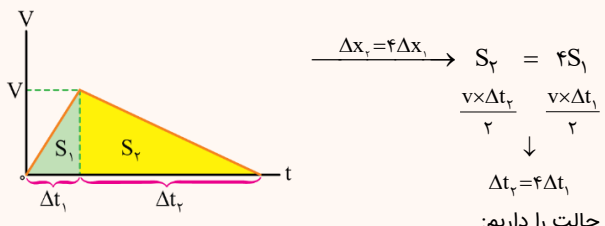
کنکور تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

مطابق شکل به جسمی روی سطح افقی دارای اصطکاک، نیروی افقی F وارد می شود و جسم از حال سکون شروع به حرکت می کند. پس از آنکه به اندازه Δx جابه‌جا شد، نیروی F در یک لحظه قطع می شود و پس از آن جسم با طی مسافت $4\Delta x$ متوقف می شود. نیروی F چند برابر نیروی اصطکاک است؟



پاسخ: گزینه ۴
۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار $v-t$ حرکت جسم را رسم می کنیم:



با توجه به نسبت بزرگی شیب $v-t$ در دو حالت، نسبت شتاب و در نتیجه نسبت نیرو در دو حالت را داریم:

$$\left| \frac{F_1}{F_2} \right| = \left| \frac{a_1}{a_2} \right| = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = 4$$

$$\left| \frac{F_1}{F_2} \right| = \frac{F - f_k}{f_k} = 4 \rightarrow F - f_k = 4f_k \rightarrow F = 5f_k$$

حال می توان نوشت:



۴۹- معادله تکانه - زمان جسمی به جرم ۶۰۰ گرم که روی محور X حرکت می کند، در SI برابر $p = t^2 - 6t + 5$ است. چه تعداد از عبارات های زیر صحیح است؟

الف: نیروی متوسط وارد بر جسم در بازه زمانی که به صورت تندشونده در خلاف جهت محور X حرکت می کند، صفر است.
 ب: جسم ۲ ثانیه به صورت کندشونده حرکت کرده است.

ج: شتاب متوسط جسم در ثانیه اول حرکت برابر $-\frac{5}{2} \frac{m}{s^2}$ است.

د: در مدتی که متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می کند، بیشترین انرژی جنبشی آن $\frac{40}{3} J$ است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مفهومی و محاسباتی - ۱۳۰۲)

تکانه

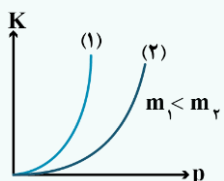
- (۱) به حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن تکانه می گویند و آن را با نماد p نشان می دهند:
 $\vec{p} = m\vec{v}$
 (۲) تکانه یک کمیت برداری است که همواره هم جهت با بردار سرعت است.
 (۳) برای یک جسم معین، با تغییر بردار سرعت، تکانه آن هم تغییر می کند:
 $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\Delta \vec{v}$
 (۴) کمیت های تکانه و انرژی جنبشی به جرم و سرعت جسم بستگی دارند، بنابراین مطابق رابطه زیر به یکدیگر مربوط می باشند:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \xrightarrow{p=mv} K = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{1}{2}m \times \frac{p^2}{m^2} \rightarrow K = \frac{p^2}{2m}$$

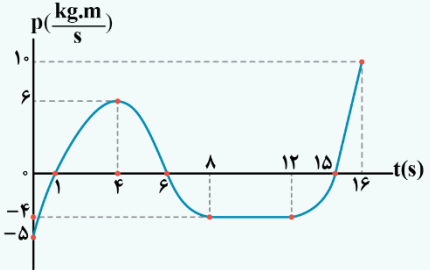
$$K = \frac{p^2}{2m} \rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \times \left(\frac{m_1}{m_2}\right)$$

برای مقایسه انرژی جنبشی دو جسم می توان نوشت:

(۵) نمودار انرژی جنبشی یک جسم بر حسب تکانه آن به شکل یک سهمی است.



(۶) در ادامه می خواهیم ببینیم که از روی نمودار تکانه - زمان می توان چه نتایج بدست آورد. نمودار تکانه - زمان زیر را به عنوان مثال در نظر بگیرید که برای جسمی به جرم ۲kg رسم شده است.



(۱) تکانه در زمان های مختلف:

ساده ترین چیزی که از نمودار تکانه - زمان می فهمیم، تکانه در لحظات مختلف است. مثلاً در نمودار داده شده، تکانه در لحظه $t = 1s$ برابر صفر و در لحظه $t = 4s$ برابر $6 \frac{kg.m}{s}$ است.

(۲) سرعت در لحظات مختلف:

اگر جرم جسم را داشته باشیم، به راحتی با استفاده از رابطه $p = mv$ ، سرعت آن را به دست می آوریم.

$$t = 1s : p = 0 \rightarrow v = 0$$

$$t = 4s : p = 6 \frac{kg.m}{s} \rightarrow v = \frac{p}{m} = \frac{6}{2} = 3 \frac{m}{s}$$

دقت کنید هرگاه سرعت مثبت باشد، متحرک در جهت محور X حرکت می کند و هرگاه سرعت منفی باشد، متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می کند.

(۳) نیروی خالص متوسط وارد بر جسم:

نیروی خالص متوسط وارد بر جسم از رابطه $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ به دست می آید که در واقع برابر شیب خط واصل دو نقطه از نمودار تکانه - زمان است. به عنوان مثال در بازه زمانی $1s \leq t \leq 4s$ داریم:

$$\begin{cases} t = 1s : p = 0 \\ t = 4s : p = 6 \frac{kg.m}{s} \end{cases} \rightarrow F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{6 - 0}{4 - 1} = 2N$$

۴) نیروی خالص وارد بر جسم در هر لحظه:

شیب خط مماس بر نمودار تکانه - زمان در هر لحظه برابر نیروی خالص وارد بر جسم در آن لحظه است. مثلاً در نمودار داده شده، نیروی خالص وارد بر جسم در بازه‌های زمانی $0 < t < 4s$ و $12s < t < 16s$ مثبت است (در جهت محور x است) و در بازه $4s < t < 8s$ منفی است (در خلاف جهت محور x است) و در بازه $8s < t < 12s$ صفر است. دقت کنید که در لحظه $t = 4s$ ، علامت شیب نمودار تغییر کرده است، یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم عوض شده است.

۵) اگر جرم جسم را داشته باشیم، علاوه بر محاسبه نیرو از نکات قبل، می‌توانیم با کمک قانون دوم نیوتون، شتاب را هم محاسبه کنیم.

۶) تندشونده و کندشونده بودن حرکت:

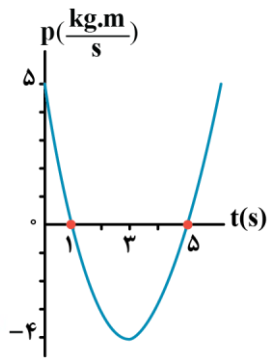
هرگاه نمودار از محور افقی دور شود، حرکت تندشونده است و هرگاه به محور افقی نزدیک شود، حرکت کندشونده می‌باشد. مثلاً در نمودار داده شده، در بازه‌های زمانی $0 < t < 4s$ و $4s < t < 6s$ و $12s < t < 15s$ حرکت کندشونده است و در بازه‌های $4s < t < 8s$ ، $8s < t < 12s$ و $15s < t < 16s$ ، حرکت تندشونده است. دقت کنید که در بازه زمانی $8s < t < 12s$ ، حرکت با سرعت ثابت انجام شده است.

۷) به طور کلی به یاد داشته باشید که اگر جرم جسم را بدانیم، می‌توانیم با تقسیم محور عمودی بر جرم، نمودار تکانه - زمان را به نمودار سرعت - زمان تبدیل کنیم و در نتیجه همه نکاتی که از نمودار سرعت - زمان قابل استنباط است را می‌توانیم بفهمیم.

۸) دقت کنید که اگر به جای نمودار تکانه - زمان، معادله تکانه - زمان را هم به ما بدهند، به طور مشابه می‌توانیم همه موارد بالا را بدست آوریم. گاهی هم می‌توانیم معادله داده شده را رسم کنیم و با کمک نمودار بدست آمده به سوالات پاسخ دهیم.

پاسخ ششگانه

نمودار تکانه - زمان را رسم می‌کنیم:



$$p = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5)$$

$$t_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3s$$

$$p_{\text{رأس}} = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = -4 \frac{\text{kg.m}}{s}$$

بررسی موارد

الف: در بازه زمانی $1s < t < 3s$ ، متحرک به صورت تندشونده در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند. نیروی متوسط در این بازه برابر است با:

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_3 - p_1}{3 - 1} = \frac{-4 - 0}{2} = -2N$$

ب: در بازه‌های زمانی $0 < t < 1s$ و $3s < t < 5s$ ، نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود و حرکت به صورت کندشونده است، بنابراین متحرک در مجموع به مدت 3s به صورت کندشونده حرکت کرده است.

ج: نیروی متوسط در ثانیه اول حرکت ($0 < t < 1s$) برابر است با:

$$F_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_1 - p_0}{1 - 0} = \frac{0 - 5}{1} = -5N$$

بنابراین شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{\text{av}} = \frac{F_{\text{av}}}{m} = \frac{-5}{0.6} = \frac{-25}{3} \frac{\text{m}}{s^2}$$

د: در بازه زمانی $1s < t < 5s$ ، تکانه جسم، منفی است و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند. متحرک در این بازه، بیشترین انرژی جنبشی را در

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(-4)^2}{2 \times 0.6} = \frac{16}{1.2} = \frac{40}{3} \text{ J}$$

لحظه $t = 3s$ دارد.

بنابراین فقط عبارت (د) صحیح است.

کنکور تجربی خارج ۱۴۰۲

معادله تکانه - زمان جسمی در SI به صورت $p = (t^2 - 5t + 6) \vec{i}$ است. بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2/5s$ چند نیوتون است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$
- (۲) $\frac{7}{4}$
- (۳) $\frac{3}{2}$
- (۴) $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\vec{p}_1 = (1)^2 - 5(1) + 6 = 2 \vec{i} \left(\frac{\text{kg.m}}{s} \right)$$

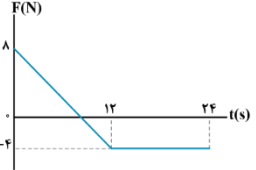
$$\vec{p}_2 = (2/5)^2 - 5(2/5) + 6 = 16/5 \vec{i} \left(\frac{\text{kg.m}}{s} \right)$$

با توجه به معادله $p - t$ تکانه جسم در دو لحظه را بدست می‌آوریم:

حال به کمک رابطه نیروی خالص متوسط با تغییر تکانه، داریم:

$$\vec{F}_{\text{av}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F}_{\text{av}} = \frac{(16/5 \vec{i}) - (2 \vec{i})}{2/5 - 1} = \frac{-2/5 \vec{i}}{-1/5} = 2 \vec{i} (N) \Rightarrow |\vec{F}_{\text{av}}| = 2N$$

۵۰- نمودار نیروی خالص متوسط وارد بر یک جسم مطابق شکل است. اگر نیروی متوسط وارد بر جسم در t_1 ثانیه اول صفر باشد، تغییرات تکانه جسم در



- (۲) $31/5$
- (۴) $28/5$

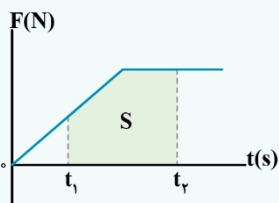
t_1 ثانیه اول چند واحد SI است؟

- (۱) ۳۲
- (۳) ۲۸

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - نموداری - ۱۴۰۲)

نمودار نیرو-زمان

سطح زیر نمودار نیرو-زمان وارد بر یک جسم در یک بازه زمانی مشخص برابر است با تغییر تکانه جسم در آن بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر است با:



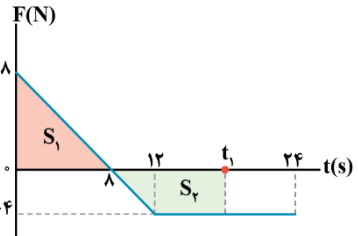
$$S(t_1, t_2) = \Delta p(t_1, t_2)$$

برای مساحت های محصور پایین محور زمان، تغییرات تکانه جسم، منفی ($\Delta p < 0$) و برای مساحت محصور در بالای محور زمان، تغییرات تکانه، مثبت ($\Delta p > 0$) است. با تقسیم Δp بر Δt ، اندازه نیروی خالص متوسط وارد شده بر جسم به دست می آید.

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{S}{\Delta t}$$

پاسخ تشریحی:

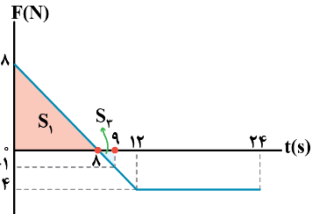
صفر شدن نیروی متوسط در t_1 ثانیه ابتدایی به معنای هم اندازه بودن مساحت های S_1 و S_2 است.



$$S_1 = S_2 \rightarrow \frac{8 \times 8}{2} = \frac{4 \times 4}{2} + 4(t_1 - 12)$$

$$\rightarrow 32 = 8 + 4(t_1 - 12) \rightarrow t_1 = 18s$$

دقت کنید که محل برخورد نمودار با محور افقی از تشابه مثلث ها برابر $t = 8s$ بدست آمده است. حال در $t_1 = 9s$ ابتدایی، مساحت زیر نمودار را محاسبه می کنیم تا تغییرات تکانه جسم بدست آید.



$$\Delta p = S_1 - S_2 = \frac{8 \times 8}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = 32 - 0.5 = 31.5 \frac{kg \cdot m}{s}$$

گروه آموزشی ماز

۵۱- گلوله ای به جرم ۲kg در شرایط خلأ از ارتفاع ۸۰ متری سطح زمین رها می شود. گلوله با تندی v به زمین برخورد می کند و با تندی $\frac{3}{5}v$ به سمت بالا برمی گردد. اگر مدت زمان برخورد گلوله با زمین $0/4s$ باشد، بزرگی نیروی متوسط خالص وارد بر گلوله در مدت زمان برخورد چند نیوتون است؟

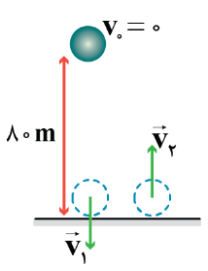
$$(g = 10 \frac{m}{s^2})$$

- (۱) ۶۴۰
- (۲) ۲۴۰
- (۳) ۲۸۰
- (۴) ۳۲۰

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - محاسباتی و ترکیبی - ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

سرعت گلوله هنگام برخورد به زمین برابر است با:



$$v_1^2 - v_2^2 = 2gh$$

$$\rightarrow v_1^2 - 0 = 2 \times 10 \times 80$$

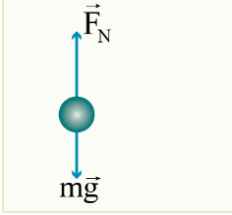
$$\rightarrow v_1 = 40 \frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_1 = \left(40 \frac{m}{s} \right) \vec{j}$$

$$v_2 = \frac{3}{5} v_1 = \frac{3}{5} \times 40 = 24 \frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}_2 = \left(24 \frac{m}{s} \right) \vec{j}$$

گلوله پس از برخورد برابر است با:

بنابراین بزرگی نیروی متوسط خالص وارد بر گلوله در مدت زمان برخورد با سطح زمین برابر است با:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} \rightarrow F_{av} = \frac{2 \times (24 - (-40))}{0.4} = 320 \text{ N}$$



اگر...

اگر بزرگی نیروی عمودی سطح متوسط وارد بر گلوله را در مدت زمان برخورد می‌خواستیم، پاسخ چه بود؟
پاسخ: نیروی خالص، برابند نیروهای وزن و نیروی عمودی سطح است، بنابراین:

$$F_{net} = F_N - mg$$

$$\rightarrow 320 = F_N - 20 \rightarrow F_N = 340 \text{ N}$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- چه تعداد از عبارتهای زیر درباره حرکت دایره‌ای درست است؟

الف: از آن جایی که جهت شتاب متوسط همواره با جهت تغییرات سرعت، یکسان است، بنابراین در حرکت دایره‌ای یکنواخت، جهت شتاب همواره مماس بر مسیر حرکت می‌باشد.

ب: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دوره تناوب (دوره) می‌نامیم.

ج: در حرکت دایره‌ای عقربه‌های یک ساعت دیواری، دوره هر سه عقربه ثانیه‌شمار، دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار، یکسان می‌باشند.

د: در حرکت دایره‌ای یکنواخت با تندی ثابت و معین، دوره حرکت با مجذور شعاع دوران، رابطه وارون دارد.

- ۱ (۲) صفر
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (آسان - مفهومی - ۱۴۰۲)

مرکز دایره‌های یکنواخت

$$T = \frac{2\pi r}{v} \text{ (دوره)}$$

(۱) در حرکت دایره‌ای یکنواخت مدت زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره دوره تناوب (دوره) نامیده می‌شود.

(۲) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اندازه سرعت ثابت است اما جهت آن دائماً تغییر می‌کند. بنا به همین دلیل این حرکت شتابدار است. جهت شتاب همواره به سمت مرکز دایره است.

$$a_C = \frac{v^2}{r}$$

$$F_{net} = \frac{mv^2}{r}$$

(۳) براساس قانون دوم نیوتون: $(F = ma)$ خواهیم داشت:

پاسخ تشریحی: بررسی موارد:

الف: در حرکت دایره‌ای یکنواخت، جهت شتاب به سمت مرکز دایره است که به آن شتاب مرکزگرا می‌گویند. دقت کنید که اگر شتاب بر مسیر حرکت مماس باشد، تندی حرکت تغییر می‌کند و حرکت دیگر یکنواخت نیست. (✗)

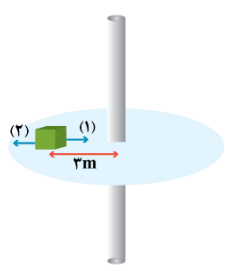
ب: دوره حرکت دایره‌ای برابر مدت زمان پیمودن یک دور کامل است. (✓)

ج: دوره عقربه‌های ساعت‌شمار، دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار متفاوت است. دوره عقربه ساعت‌شمار برابر ۱۲ ساعت، دوره عقربه دقیقه‌شمار برابر ۶۰ دقیقه و دوره عقربه ثانیه‌شمار برابر ۶۰ ثانیه است. (✗)

د: اگر تندی حرکت دایره‌ای ثابت باشد، طبق رابطه $T = \frac{2\pi r}{v}$ ، دوره حرکت با شعاع مسیر دایره‌ای رابطه مستقیم دارد. (✗)

گروه آموزشی ماز

۵۳- مطابق شکل، جسم کوچکی به جرم ۶۰۰ گرم روی یک صفحه دایره‌ای در فاصله ۳ متری محور قائم قرار دارد. صفحه حول محور قائم شروع به دوران می‌کند به گونه‌ای که در هر دقیقه ۱۰ دور کامل می‌زند. اگر جسم در مدت چرخش نسبت به صفحه دایره‌ای، ثابت بماند، نیروی اصطکاک وارد بر آن در کدام جهت و چند نیوتون است؟



- (۱) (۱) $\frac{\pi^2}{5}$
- (۲) (۳) $\frac{\pi^2}{5}$
- (۱) (۲) $10\pi^2$
- (۲) (۴) $10\pi^2$

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ سریعی:

در این مسأله، نیروی اصطکاک نقش نیروی مرکزگرا دارد. بنابراین در قسمت مشخص شده نیروی اصطکاک وارد شده بر جسم در جهت ۱ (مرکز دوران) می باشد. برای پاسخ به بخش دوم سؤال، سه گام نیاز داریم:

(۱) محاسبه دوره حرکت (T)

(۲) پیدا کردن تندی (v)

(۳) به دست آوردن اندازه نیروی اصطکاک (f_s) یا همان نیروی مرکزگرا (F_c)

گام اول:

$$T = \frac{\text{زمان}}{\text{تعداد دور}} = \frac{60}{10} = 6s$$

ابتدا دوره حرکت جسم را حساب می کنیم:

گام دوم:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \rightarrow 6 = \frac{2\pi \times 3}{v} \rightarrow v = \pi \frac{m}{s}$$

سپس تندی آن را به دست می آوریم:

گام سوم:

$$f_s = F_{net} = \frac{mv^2}{r} = \frac{0.6\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{5} N$$

در نهایت اندازه نیروی مرکزگرا که همان اصطکاک ایستایی وارد بر جسم می باشد را محاسبه می کنیم:

گروه آموزشی ماز

۵۴- خودرویی به جرم ۴ تن در سطح افقی، مسیر دایره ای را با بیشینه تندی ممکن به صورت یکنواخت طی می کند. اگر بزرگی نیرویی که از طرف سطح

زمین بر خودرو وارد می شود، $5 \times 10^4 N$ باشد، ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و لاستیک های خودرو چقدر است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

۱/۴ (۴)

۲/۳ (۳)

۳/۴ (۲)

۱/۳ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۳۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ سریعی:

$$F_{nety} = 0 \Rightarrow F_N = mg$$

با توجه به این که خودرو در سطح افقی حرکت می کند داریم:

از طرفی با توجه به این که خودرو با بیشینه تندی ممکن به صورت یکنواخت حرکت می کند، بنابراین نیروی اصطکاک بین لاستیک خودرو و سطح از انواع اصطکاک ایستایی بیشینه است:

سطح زمین نیروی \vec{R} را بر خودرو وارد می کند:

$$R = \sqrt{f_{s,max}^2 + F_N^2} \xrightarrow{F_N=mg} 5 \times 10^4 = \sqrt{f_{s,max}^2 + (mg)^2} = \sqrt{f_{s,max}^2 + 16 \times 10^8}$$

$$\rightarrow f_{s,max}^2 = 25 \times 10^8 - 16 \times 10^8 = 9 \times 10^8 \rightarrow f_{s,max} = 3 \times 10^4 N$$

$$\frac{f_{s,max} = \mu_s F_N}{F_N = mg} \rightarrow \mu_s mg = 3 \times 10^4 N \rightarrow \mu_s \times 4 \times 10^4 = 3 \times 10^4 \rightarrow \mu_s = \frac{3}{4}$$

اگر...

اگر شعاع حرکت دایره ای این خودرو ۳۰ m باشد، حداکثر تندی آن چند متر بر ثانیه است؟

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s rg} = \sqrt{\frac{3}{4} \times 30 \times 10} = 15 \frac{m}{s}$$

پاسخ:

گروه آموزشی ماز

۵۵- شتاب گرانش در فاصله nR_e از سطح زمین برابر $\frac{m}{5}$ و در فاصله mR_e از سطح زمین برابر $\frac{m}{6}$ است. حاصل $n+m$ کدام است؟ (R_e شعاع

زمین و شتاب گرانش در سطح زمین برابر $\frac{m}{s^2}$ است.)

۳ (۴)

۴ (۳)

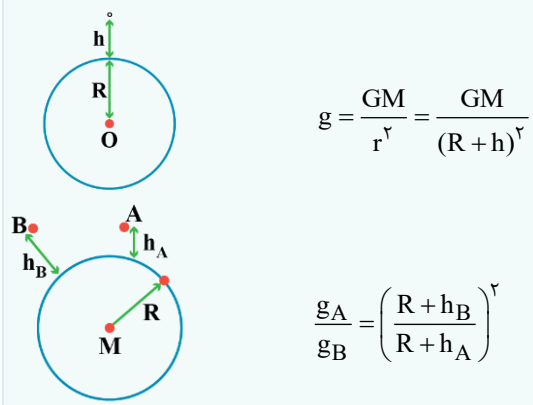
۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - محاسباتی - ۱۴۰۲)

شتاب گرانش سیاره

شتاب گرانش یک سیاره به جرم M در نقطه‌ای که به فاصله h از سطح آن قرار دارد، برابر است با:



$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$\frac{g_A}{g_B} = \left(\frac{R+h_B}{R+h_A} \right)^2$$

در رابطه بالا M جرم سیاره و R شعاع سیاره است. برای مقایسه شتاب گرانش دو نقطه می‌توان نوشت:

پاسخ تشریحی:

گام اول:

محاسبه n

$$\frac{g_1}{g} = \left(\frac{R_e}{R_e+h_1} \right)^2 = \left(\frac{R_e}{R_e+nR_e} \right)^2 = \left(\frac{1}{1+n} \right)^2$$

$$\rightarrow \frac{2/5}{10} = \left(\frac{1}{1+n} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2} \rightarrow n=1$$

گام دوم:

محاسبه m

$$\frac{g_2}{g} = \left(\frac{R_e}{R_e+h_2} \right)^2 = \left(\frac{R_e}{R_e+mR_e} \right)^2 = \left(\frac{1}{1+m} \right)^2$$

$$\rightarrow \frac{0.625}{10} = \left(\frac{1}{1+m} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{1+m} = \frac{1}{4} \rightarrow m=3$$

$$n+m=1+3=4$$

گروه آموزشی ماز

۵۶- اگر تکانه ماهواره A، ۶ برابر تکانه ماهواره B و دوره حرکت آن ۸ برابر دوره حرکت ماهواره B باشد، نسبت اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره B به اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره A در حرکت دایره‌ای یکنواخت آن‌ها به دور زمین، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ تشریحی:

نیروی مرکزگرا برای حرکت دایره‌ای یکنواخت به دور زمین، توسط نیروی گرانشی تأمین می‌شود. پس:

$$\begin{cases} F_{net} = \frac{mv^2}{r} \\ F_g = \frac{GM_e m}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{GM_e m}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \quad (1)$$

$$p = mv \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{v_A}{v_B} \quad (1)$$

با توجه به رابطه تکانه داریم:

از طرفی برای دوره تناوب گردش ماهواره به دور زمین داریم:

$$\begin{cases} T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{v^2} \\ v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_e}{r} \end{cases} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_e} \Rightarrow T^2 \propto r^3 \quad (2)$$

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \xrightarrow{T_A = 4T_B} \lambda^2 = \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^3 \rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \lambda \quad (3)$$

$$(1) \rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

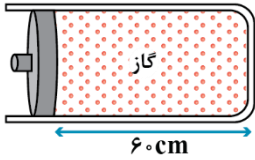
$$(2) \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \times \frac{m_A}{m_B} \rightarrow \frac{m_A}{m_B} = 12 \quad (4)$$

حال یکی از رابطه‌های F_{net} (مرکزگرا) یا F_g (گرانشی) را برمی‌گزینیم و نسبت را تشکیل می‌دهیم:

$$F_g = \frac{GM_e m}{r^2} \rightarrow \frac{F_B}{F_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 \xrightarrow{(4),(3)} \frac{F_B}{F_A} = \frac{1}{12} \times 4^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۵۷- مطابق شکل، مقداری گاز کامل درون محفظه‌ای در حالت تعادل قرار دارد. پیستونی سبک با مساحت 200 cm^2 که بدون اصطکاک می‌تواند روی ریلی



حرکت کند، محفظه را از محیط بیرون جدا کرده است. از مجموعه گرما می‌گیریم و پیستون را با نیروی 40 N به سمت راست فشار می‌دهیم تا پیستون 6 cm به سمت راست جابه‌جا شود و در حضور این نیرو، مجموعه دوباره به تعادل برسد. انرژی درونی گاز در حالت نهایی، چند درصد کمتر از انرژی درونی اولیه آن است؟ ($P_1 = 1.0^5 \text{ Pa}$)

۱۰ (۴)

۸/۲ (۳)

۹۰ (۲)

۹۱/۸ (۱)

(متوسط - مفهومی و محاسباتی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

نکته

انرژی درونی یک گاز کامل فقط تابع دمای مطلق آن است.

$$U \propto T \rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

پاسخ تشریحی:

فشار اولیه و نهایی گاز برابر است با:

$$P_1 = P = 1.0^5 \text{ Pa}$$

$$P_2 = P + \frac{F}{A} = 1.0^5 + \frac{40}{200 \times 10^{-4}} = 1/0.2 \times 1.0^5 \text{ Pa}$$

حجم اولیه و نهایی گاز برابر است با:

$$V_1 = Ah_1 = 200 \times 60 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = Ah_2 = 200 \times 54 \text{ cm}^3$$

با توجه به معادله حالت گاز کامل داریم:

$$PV \propto T \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}$$

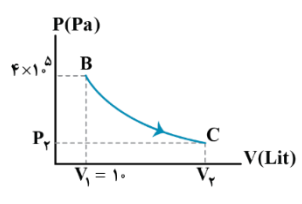
$$\rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{1/0.2 \times 1.0^5 \times 200 \times 54}{1.0^5 \times 200 \times 60}$$

$$\rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 1/0.2 \times \frac{9}{10} = 0/918 = 91/8$$

انرژی درونی گاز متناسب با دمای مطلق آن است، پس انرژی درونی گاز هم $8/2$ ٪ کاهش می‌یابد تا به $91/8$ ٪ مقدار اولیه برسد.

گروه آموزشی ماز

۵۸- نمودار شکل مقابل برای ۳۲g گاز کامل O_2 است. این گاز در ظرفی به حجم ۱۰L و فشار $4 \times 10^5 Pa$ زیر یک پیستون محبوس است. اگر فرایند BC هم‌دما باشد و اندازه کار انجام شده روی گاز ۱۲۰۰J باشد، به ترتیب از راست به چپ دمای گاز در نقطه C چند کلوین و گرمای دریافت شده توسط گاز در فرایند BC چند ژول است؟



$$(M_{O_2} = 32 \frac{g}{mol}, R = 8 \frac{J}{mol \cdot K})$$

- (۱) ۱۲۰۰ ، ۵۰۰
- (۲) -۱۲۰۰ ، ۴۰۰
- (۳) -۱۲۰۰ ، ۵۰۰
- (۴) ۱۲۰۰ ، ۴۰۰

پاسخ: گزینه ۱ (آسان - نموداری - ۱۰۰۵)

معادله حالت گاز کامل

در علم ترمودینامیک به کمیت‌های فشار، حجم و دما که وضعیت گاز در یک حالت خاص را مشخص می‌کنند، متغیرهای ترمودینامیکی گفته می‌شود. چنانچه مقدار این متغیرها معلوم باشد، می‌گوییم که حالت گاز معلوم است و اگر مقدار حداقل یکی از آن‌ها عوض شود می‌گوییم حالت گاز عوض شده است. این متغیرها مستقل از هم نیستند. به ارتباط بین این سه متغیر، معادله حالت گفته می‌شود که همان قانون گازهای کامل بوده و به صورت زیر است:

در این رابطه P فشار گاز برحسب پاسکال (Pa)، V حجم آن برحسب (m^3) ، n مقدار گاز برحسب (mol)، T دمای مطلق گاز برحسب کلوین (K) و R مقداری ثابت به نام ثابت جهانی گازها است که آزمایش‌ها نشان می‌دهد مقدار آن برابر با $\frac{8}{314} \frac{J}{mol \cdot K}$ است.

$$PV = nRT$$

نکته:

اگر جرم گاز معادل m و جرم مولی آن معادل M باشد، تعداد مول‌های گاز به این صورت بدست می‌آید:

$$n = \frac{m}{M}$$

پاسخ سبزی

تغییر انرژی درونی گاز در فرایند هم‌دما صفر است، بنابراین می‌توان نوشت:

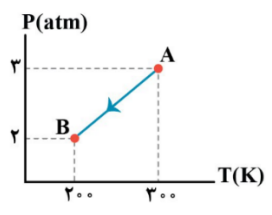
$$\Delta U = 0 \rightarrow Q + W = 0 \rightarrow \begin{cases} W = -1200 J \\ Q = +1200 J \end{cases}$$

$$PV = nRT \rightarrow T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{4 \times 10^5 \times 10 \times 10^{-3}}{\frac{32}{32} \times 8} = 500 K$$

با توجه به این که فرایند BC هم‌دماست، دما در نقطه C هم برابر ۵۰۰K است.

گروه آموزشی ماز

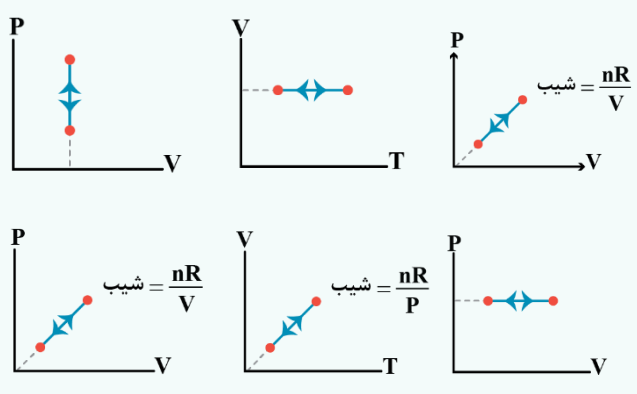
۵۹- نمودار P-T یک مول گاز کامل مطابق شکل زیر است. کار انجام شده توسط گاز بر روی محیط در فرایند AB چند ژول است؟ ($1 atm = 10^5 Pa$)



- (۱) ۲۰۰
- (۲) -۲۰۰
- (۳) صفر
- (۴) ۱۰۰

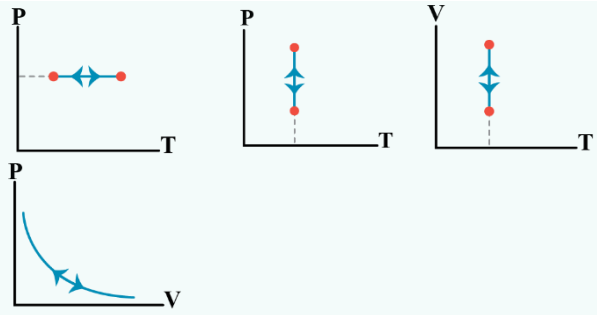
پاسخ: گزینه ۳ (آسان - نموداری - ۱۰۰۵)

فرایندهای ترمودینامیکی



(۱) حجم گاز ثابت است.
 در فرایند هم‌حجم: $W = 0$
 $\Delta U = Q$ (۳)

(۱) فشار گاز ثابت است.
 در فرایند هم‌فشار: $\Delta U = Q + W$ (۲)
 $W = -P\Delta V$ (۳)



(۱) دمای گاز ثابت است.
 در فرایند هم‌دم: $\Delta U = 0$ (۲)
 $Q = -W$ (۳)

در فرایند بی‌دررو: $Q = 0$ (۱)
 $\Delta U = W$ (۲)

طبق قانون اول ترمودینامیک، تغییر انرژی درونی گاز در یک فرایند با مجموع کار و گرمای مبادله‌شده بین گاز و محیط در آن فرایند برابر است:

$\Delta U = Q + W$

در رابطه قانون اول ترمودینامیک، گرمای Q میتواند مثبت (دستگاه گرما بگیرد) یا منفی (دستگاه گرما از دست بدهد) باشد. W نیز میتواند مثبت (محیط روی دستگاه کار انجام دهد) یا منفی (دستگاه روی محیط کار انجام دهد) باشد.



با توجه به معادله حالت گاز کامل، فرایند AB هم‌حجم است.

$$PV = nRT \rightarrow \begin{cases} P = \frac{nR}{V} T \\ y = ax \end{cases}$$

P-T شیب نمودار = $\frac{nR}{V}$

چون نموداری به صورت خطی گذرنده از مبدأ است؛ پس فرایند AB هم‌حجم است. در فرایند هم‌حجم کار صورت نمی‌گیرد.

گروه آموزشی ماز

۶۰- مقداری گاز کامل درون محفظه‌ای با حجم متغیر قرار دارد و فشارسنج بوردون، فشار آن را برابر $1/4 \text{ atm}$ نشان می‌دهد. اگر در فشار ثابت، حجم گاز را از $4L$ به $3L$ برسانیم و انرژی درونی گاز در این فرایند به اندازه $360J$ تغییر کند، گاز در این فرایند، ژول گرما است.

($P_1 = 1 \text{ atm}$ و $P_2 = 10^5 \text{ Pa}$)

- (۱) 600 ، گرفته
- (۲) 600 ، از دست داده
- (۳) 500 ، گرفته
- (۴) 500 ، از دست داده

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۵)



$W = -P\Delta V$

$|Q| > |W|$

(۱) در فرایند هم‌فشار، کار انجام‌شده بر روی گاز از رابطه مقابل بدست می‌آید.

(۲) در فرایند هم‌فشار یک گاز کامل، اندازه گرمای مبادله‌شده، همواره بزرگ‌تر از اندازه کار انجام‌شده است.

(۳) در انبساط هم‌فشار، انرژی درونی گاز افزایش می‌یابد و در انقباض هم‌فشار، انرژی درونی گاز کاهش می‌یابد.



کار انجام شده بر روی گاز برابر است با:

$W = -P\Delta V = -(1 + 1/4) \times 10^5 \times (3 - 4) \times 10^{-3} = 240J$

دقت کنید فشارسنج بوردون، فشار پیمانه‌ای را اندازه می‌گیرد و فشار مطلق گاز برابر $2/4 \text{ atm}$ است.

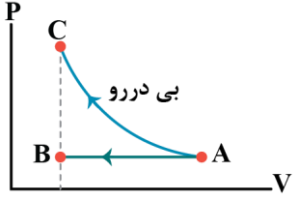
انرژی درونی گاز $360J$ کاهش یافته است (چرا؟)، بنابراین با استفاده از قانون اول ترمودینامیک می‌توان نوشت:

$\Delta U = Q + W \rightarrow -360 = Q + 240 \rightarrow Q = -600J$

گاز $600J$ گرما از دست داده است.

گروه آموزشی ماز

۶۱- شکل مقابل نمودار $P-V$ یک گاز کامل را در دو فرایند ترمودینامیکی نشان می‌دهد. کدام یک از عبارات‌های زیر صحیح است؟
 الف: اگر دمای گاز در نقاط A, B و C به ترتیب T_A, T_B و T_C باشد، آن گاه $T_C > T_A > T_B$ است.
 ب: کار انجام شده روی گاز در فرایند AB کوچک تر از اندازه گرمایی است که گاز در این فرایند از دست می‌دهد.
 ج: تغییر انرژی درونی گاز در فرایند AC بزرگ تر از کاری است که محیط در این فرایند روی گاز انجام می‌دهد.
 (۱) الف) و ب) (۲) فقط الف) (۳) ب) و ج) (۴) فقط ج)



پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - نموداری - ۱۰۰۵)

فرایند هم‌دما و بی‌دررو

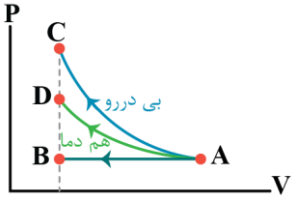
نکته: براساس معادله حالت گازهای کامل، یعنی $PV = nRT$ برای یک گاز معین می‌توان نتیجه گرفت: $PV \propto T$
 یعنی برای مقایسه دمای دو نقطه بدون داشتن مقدار دماها می‌توان از مقایسه حاصل ضرب PV در آن دو نقطه استفاده کرد به گونه‌ای که:

- ۱) $P_2 V_2 > P_1 V_1 \rightarrow T_2 > T_1 \rightarrow U_2 > U_1$ دما و انرژی درونی گاز افزایش می‌یابند.
- ۲) $P_2 V_2 = P_1 V_1 \rightarrow T_2 = T_1 \rightarrow U_2 = U_1$ دما و انرژی درونی گاز در آغاز و پایان فرایند، مساوی است
- ۳) $P_2 V_2 < P_1 V_1 \rightarrow T_2 < T_1 \rightarrow U_2 < U_1$ دما و انرژی درونی گاز کاهش می‌یابند.

در فرایند بی‌دررو:
 ۱) اگر گاز دچار انبساط شود ($V_2 > V_1$): دما و انرژی درونی گاز کاهش می‌یابند.
 ۲) اگر گاز دچار تراکم شود ($V_2 < V_1$): دما و انرژی درونی گاز افزایش می‌یابند.

پاسخ سریعی!

برای بررسی بهتر سؤال، نمودار هم‌دما را هم در کنار دو نمودار دیگر رسم می‌کنیم.



بررسی موارد

الف: نقاط B, C و D در حجم یکسانی قرار دارند، بنابراین هر کدام که فشار بیشتری داشته باشد، طبق رابطه $PV = nRT$ ، دمای بیشتری هم دارد، بنابراین $T_C > T_D > T_B$ است.

از طرفی دمای نقاط A و D هم برابر است، بنابراین: $T_C > T_D = T_A > T_B$
 ب: فرایند AB یک فرایند هم‌فشار است که در آن، حجم گاز کاهش یافته است، بنابراین $W > 0$ ، $Q < 0$ و $\Delta U < 0$ است. از طرفی طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U = Q + W \rightarrow Q = \Delta U - W$$

$$\rightarrow |Q| = |\Delta U| + |W|$$

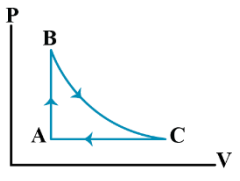
$$\rightarrow |Q| > |W|$$

بنابراین در یک انقباض هم‌فشار، اندازه کار از اندازه گرما کوچک تر است.

ج: فرایند AC بی‌دررو است، بنابراین گرما در آن مبادله نمی‌شود ($Q = 0$)، بنابراین تغییر انرژی درونی گاز و کار انجام شده روی آن در این فرایند، یکسان است. $\Delta V + Q \xrightarrow{Q=0} \Delta V = W$
 با توجه به توضیحات فوق، عبارات‌های الف) و ب) صحیح هستند.

گروه آموزشی ماز

۶۲- شکل مقابل نمودار $P-V$ یک چرخه ترمودینامیکی را که شامل یک فرآیند هم‌دما، یک فرآیند هم‌حجم و یک فرآیند هم‌فشار است نشان می‌دهد. مقدار گرمای مبادله شده توسط گاز در فرآیند هم‌حجم برابر است با



- ۱) اندازه تغییرات انرژی درونی در فرآیند هم‌فشار
- ۲) اندازه کار فرآیند هم‌فشار
- ۳) اندازه تغییرات انرژی درونی در فرآیند هم‌دما
- ۴) اندازه گرمای فرآیند هم‌فشار

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - نموداری - ۱۰۰۵)

چرخه ترمودینامیکی

یک چرخه ترمودینامیکی مجموعه‌ای از فرایندها است که طی آن گاز در نهایت به حالت اولیه خود می‌رسد. چرخه ترمودینامیکی دارای ویژگی‌های زیر است:

(۱) تغییر انرژی درونی گاز در کل چرخه صفر است.

(۲) $\Delta U = 0 \rightarrow Q_{\text{چرخه}} = -W_{\text{چرخه}}$

(۳) مساحت محصور درون چرخه برابر با قدرمطلق کار انجام شده روی گاز در طی چرخه است و برای تعیین علامت کار، به این شکل عمل می‌کنیم:

چرخه پادساعتگرد $\rightarrow W > 0$

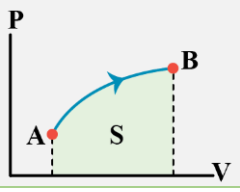
چرخه ساعتگرد $\rightarrow W < 0$

$W_{\text{چرخه}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$

$Q_{\text{چرخه}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$

(۴) در یک چرخه می‌توان نوشت:

نکته:



در هر فرایند دلخواه، سطح زیر نمودار P-V در آن فرایند برابر با قدرمطلق کار انجام شده روی گاز در آن فرایند است.

$|W_{AB}| = S$

پاسخ تشریحی:

فرایند AB یک فرایند هم‌حجم، فرایند BC یک فرایند هم‌دما و فرایند CA یک فرایند هم‌فشار است و تغییرات انرژی درونی گاز در یک چرخه برابر صفر است، بنابراین:

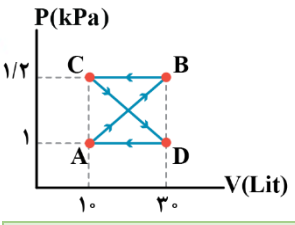
$\Delta U = 0 \rightarrow \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0 \rightarrow \frac{\Delta U_{BC} = 0}{\Delta U = Q + W} \rightarrow Q_{AB} + W_{AB} + Q_{CA} + W_{CA} = 0$

$\frac{W_{AB} = 0}{\rightarrow} Q_{AB} + Q_{CA} + W_{CA} = 0 \Rightarrow Q_{AB} + \Delta U_{CA} = 0 \Rightarrow Q_{AB} = -\Delta U_{CA} \Rightarrow |Q_{AB}| = |\Delta U_{CA}|$

گروه آموزشی ماز

۶۳- مطابق شکل زیر، گاز کاملی فرایندی را از نقطه A شروع می‌کند و در نهایت دوباره به نقطه A می‌رسد. کل کاری که در این فرایند بر روی گاز انجام

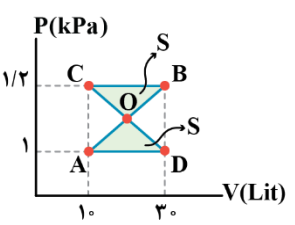
می‌شود، چند ژول است؟



- ۱) ۱۰
- ۲) ۱۰
- ۳) ۵
- ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴ (سخت - نموداری - ۱۰۰۵)

پاسخ تشریحی:



در چرخه ABCDA نمودار چرخه از دو مثلث هم‌اندازه و یکسان OBC و ODA و با مساحت‌های S تشکیل شده است. چرخه را می‌توانیم به دو چرخه کوچک‌تر تقسیم کنیم. از طرفی می‌دانیم کار انجام شده در هر چرخه برابر با مساحت سطح داخل چرخه در صفحه P-V است.

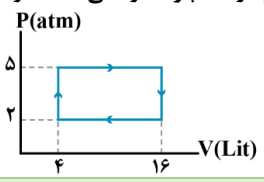
چرخه ODAO یک چرخه ساعتگرد است، پس کار انجام شده بر روی گاز در آن برابر با -S و گرمای آن برابر +S و چرخه OBCO یک چرخه پادساعتگرد است، پس کار انجام شده بر روی گاز در آن برابر با +S و گرمای آن برابر -S است.

$\begin{cases} W_{ODAO} = -S \\ W_{OBCO} = +S \end{cases}$

$\Rightarrow W_{\text{کل}} = +S - S = 0$

گروه آموزشی ماز

۶۴- شکل مقابل چرخه یک ماشین گرمایی را نشان می دهد. اگر این ماشین در هر دقیقه ۲۵۲kJ گرما از منبع دمابالا بگیرد و ۱۵ چرخه را طی کند، در هر



ساعت چند مگاژول گرما به منبع دمابالین می دهد؟ (۱atm = ۱۰^۵ Pa)

۳/۲۴ (۲) ۱۱/۸۸ (۱)
 ۳/۸۸ (۴) ۱۱/۲۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - نموداری - ۱۰۰۵)

ماشین گرمایی

یک ماشین گرمایی، گرما را از منبع دمابالا گرفته، مقداری از آن را روی محیط کار انجام داده (W) و مابقی آن را به منبع دمابالین به صورت گرما می دهد (Q_L)، بنابراین طبق قانون اول ترمودینامیک می توان نوشت:



$$Q_H = |W| + |Q_L|$$

برای ماشین های گرمایی، مفهومی به نام بازده مطرح می شود که بیانگر این موضوع است که چقدر از گرمای گرفته شده از منبع دمابالا توسط ماشین گرمایی به کار تبدیل می شود. اگر بازده ماشین گرمایی را با η نمایش دهیم، داریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H}$$

تبدیل می شود. اگر بازده ماشین گرمایی را با η نمایش دهیم، داریم:

رابطه بازده یک ماشین گرمایی را به این صورت نیز می توان نوشت:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{|W| = Q_H - |Q_L|}{Q_H} \rightarrow \eta = \frac{Q_H - |Q_L|}{Q_H} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$$

نکته:

$$P = \frac{|W|}{\Delta t}$$

اگر توان یک ماشین گرمایی P باشد، می توان نوشت:

پاسخ تشریحی:

کار انجام شده در هر چرخه برابر مساحت درون چرخه است. بنابراین در هر دقیقه، کار انجام شده بر روی گاز برابر $54 \text{ kJ} = 54000 \text{ J} = 15 \times 3600$ است. در ادامه می توان نوشت:

$$Q_H = |W| + |Q_C| \rightarrow 252 = 54 + |Q_C| \rightarrow |Q_C| = 198 \text{ kJ}$$

در هر دقیقه، ۱۹۸kJ گرما به منبع دمابالین داده می شود. برای محاسبه گرمای داده شده به منبع دما پایین در یک ساعت، برابر است با:

$$60 \times 198 = 11880 \text{ kJ} = 11/88 \text{ MJ}$$

کنکور خارج ریاضی ۱۴۰۱

ماشین گرمایی در هر چرخه، ۱۰۰J گرما از منبع دما بالا می گیرد و ۶۰J گرما به منبع دما پایین می دهد و بقیه آن تبدیل به کار می شود. اگر هر چرخه ۰/۵ طول بکشد، توان خروجی این ماشین چند وات است؟

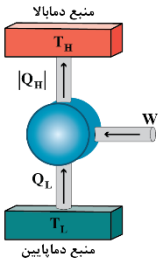
- ۱۲۰(۱) ۸۰(۲) ۵۰(۳) ۲۰(۴)
- پاسخ: گزینه ۲

$$|W| = Q_H - |Q_C| = 100 - 60 = 40 \text{ J}$$

کار انجام شده در هر چرخه برابر است با:

$$P = \frac{|W|}{\Delta t} = \frac{40}{0.5} = 80 \text{ W}$$

توان خروجی ماشین برابر است با:



۶۵- شکل مقابل طرح‌واره‌ای از یک است. در این طرح‌واره، اگر $W = 0$ باشد، قانون ترمودینامیک نقض می‌شود.

- (۱) یخچال - اول
- (۲) یخچال - دوم
- (۳) ماشین گرمایی - اول
- (۴) ماشین گرمایی - دوم

(آسان - خط به خط کتاب درسی - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۲



پاسخ سریعی؟

وسیله داده شده، با گرفتن کار از بیرون، گرما را از منبع سرد به منبع گرم منتقل کرده است، بنابراین یک یخچال است. W به معنی آن است که گرما به صورت خودبه‌خودی از دمای پایین‌تر به دمای بالاتر رفته است که قانون دوم ترمودینامیک (به بیان یخچالی) را نقض می‌کند.

گروه آموزشی ماز

- ۶۶- چند مورد از عبارات‌های زیر، درست هستند؟ (ثابت یونش بنزوئیک اسید (C_6H_5COOH) را برابر $10^{-5} mol.L^{-1}$ در نظر گرفته و چگالی هر محلول را برابر با چگالی آب خالص در نظر بگیرید. $(O = 16$ و $C = 12$ و $H = 1 : g.mol^{-1}$)
- آ: اگر در محلول استیک اسید، مقدار نسبت $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$ چهار برابر شود، pH محلول $0/6$ افزایش می‌یابد.
- ب: هرچه میزان یونش یک ماده در محلول خود بیشتر باشد، غلظت یون هیدرونیوم آن محلول بیشتر است.
- پ: اگر K_a فورمیک اسید $10^{-4} mol.L^{-1}$ باشد، غلظت $HCOO^-$ در محلول $0/2$ مولار آن $270 ppm$ است.
- ت: 50 گرم محلول بنزوئیک اسید با $pH = 2/1$ ، با مقدار کافی اتانول واکنش داده و $0/05$ مول ماده استری تولید می‌کند.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (سخت - مفهومی و مساله - ۱۳۰۱)

پاسخ تشریحی:

موارد (پ) و (ت) درست است.

بررسی موارد:

آ: در دمای $25^\circ C$ ، حاصل ضرب غلظت مولی یون‌های هیدروژن و هیدروکسید در محلول‌های آبی برابر با 10^{-14} می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$$

با توجه به رابطه بالا اگر نسبت $[OH^-]$ به $[H^+]$ در یک محلول آبی ۴ برابر شود، غلظت H^+ در محلول مورد نظر نصف شده و غلظت OH^- در این محلول ۲ برابر شده است. در این شرایط، مقدار pH به اندازه $0/3$ افزایش می‌یابد. در این رابطه، داریم:

$$pH_1 = -\log[H_1^+]$$

$$pH_2 = -\log[H_2^+] = -\log\left[\frac{1}{4}H_1^+\right] = pH_1 + 0/3$$

ب: به فرایندی که طی آن یک ترکیب مولکولی به یون‌هایی با بار مخالف تبدیل می‌شود، یونش می‌گویند. به عنوان مثال، مولکول‌های HCl به هنگام انحلال در آب براساس فرایند $HCl(aq) \rightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$ به یون‌های H^+ و Cl^- یونش پیدا می‌کنند. هر چه میزان یونش یک ماده اسیدی در محلول خود بیشتر باشد، غلظت یون هیدرونیوم در آن محلول بیشتر شده و به دنبال آن، مقدار pH محلول مورد نظر کمتر می‌شود. توجه داریم که هر چه میزان یونش یک ماده بازی نیز در محلول خود بیشتر باشد، غلظت یون هیدرونیوم در آن محلول کمتر بوده و بر این اساس، مقدار pH آن محلول بیشتر می‌شود.

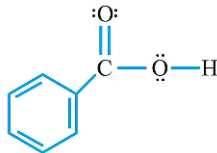
پ: ابتدا مولاریته یون هیدرونیوم و یون فورمات ($HCOO^-$) را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم. به دلیل کوچک بودن ثابت یونش اسید، از کاهش غلظت فورمیک اسید در مخرج کسر صرف نظر می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$K_a = \frac{[H^+] \times [HCOO^-]}{[HCOOH]} = \frac{[HCOO^-]^2}{[HCOOH]} \rightarrow 1/8 \times 10^{-4} mol.L^{-1} = \frac{[HCOO^-]^2}{0/2} \rightarrow [HCOO^-] = 6 \times 10^{-3}$$

سپس غلظت یون فورمات را بر حسب ppm حساب می‌کنیم:

$$غلظت یون فورمات = 270 ppm = \frac{ppm \times 1}{1000 \times 45} = \frac{ppm \times d}{1000 M} \rightarrow 6 \times 10^{-3}$$

ت: ساختار بنزوئیک اسید به صورت زیر است:

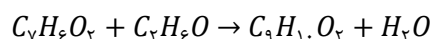


ابتدا غلظت بنزوئیک اسید ($C_6H_5O_2$) را حساب می‌کنیم. چون ثابت یونش اسید مورد نظر بسیار کوچک است، از کاهش غلظت بنزوئیک اسید در مخرج کسر صرف نظر می‌کنیم:

$$pH = -\log[H^+] \rightarrow [H^+] = 10^{-2/1} = 8 \times 10^{-3} mol.L^{-1}$$

$$K_a = \frac{[H^+] \times [C_6H_5O_2^-]}{[C_6H_5O_2]} \rightarrow 6/4 \times 10^{-5} mol.L^{-1} = \frac{8 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3}}{[C_6H_5O_2]} \rightarrow [C_6H_5O_2] = 1 mol.L^{-1}$$

واکنش بین بنزوئیک اسید و اتانول به صورت زیر است:



در 50 گرم از این محلول، مقدار $0/05$ مول بنزوئیک اسید وجود دارد. سپس مقدار فراورده تولید شده طی واکنش مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$? mol C_6H_5O_2 = 0/05 mol C_6H_5O_2 \times \frac{1 mol C_6H_5O_2C_2H_5}{1 mol C_6H_5O_2} = 0/05 mol$$

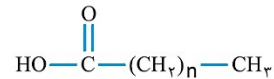
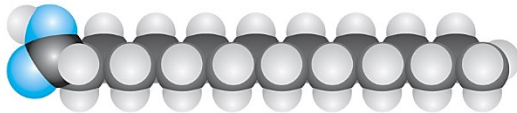
۶۷- برای تولید نوعی پاک کننده صابونی جامد، مقدار ۹۹/۴ گرم اسید چرب با زنجیره هیدروکربنی سیر شده که نسبت تعداد پیوند اشتراکی به تعداد جفت الکترون های ناپیوندی در آن برابر ۱۴ است، استفاده می شود. اگر صابون تولید شده وارد ۸۰ لیتر آب حاوی یون منیزیم با غلظت ۴۲ ppm شود، چند درصد از صابون به رسوب تبدیل شده و جرم رسوب تولید شده طی این فرایند چقدر است؟ ($H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$ و $Mg = 24$ $g \cdot mol^{-1}$)

(۱) ۸۲/۶ ، ۸۰ (۲) ۸۲/۶ ، ۴۰ (۳) ۷۸/۴ ، ۸۰ (۴) ۷۸/۴ ، ۴۰

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله - ۱۲۰۱)

پاسخ شیمی

تصویر زیر، ساختار کلی اسیدهای چرب سیر شده را نشان می دهد:

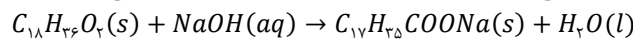


هر یک از مولکول های سازنده چربی ها (اسیدهای چرب و استرهای با جرم مولی زیاد)، از یک بخش قطبی (بخش آب دوست) و یک بخش ناقطبی (بخش چربی دوست) و یا آبگریز تشکیل شده است. از آنجا که بخش اعظم این مولکول ها ناقطبی است، پس بخش ناقطبی مولکول به راحتی بر بخش قطبی آن غلبه کرده و در نتیجه مولکول های چربی در مجموع، ناقطبی به حساب می آیند و در حلال های قطبی مانند آب حل نمی شوند. به خاطر نامحلول بودن چربی ها در حلال های قطبی، آب به تنهایی نمی تواند چربی های موجود بر روی پوست و لباس ها را پاک کند و به همین دلیل، برای پاک کردن چربی ها باید از سایر پاک کننده ها کمک بگیریم.

فرمول اسید چرب با زنجیره هیدروکربنی سیر شده، به صورت $C_nH_{2n}O_2$ است. توجه داریم که در ساختار این ماده $2 + 3n$ پیوند اشتراکی و ۴ جفت الکترون ناپیوندی (۲ جفت الکترون ناپیوندی روی هر یک از اتم های اکسیژن موجود در ساختار اسید چرب) وجود دارد. بر این اساس، ابتدا تعداد کربن اسید چرب را حساب می کنیم:

$$\frac{3n + 2}{4} = 14 \rightarrow n = 18$$

مقدار ۹۹/۴ گرم از یک اسید چرب با فرمول شیمیایی $C_{18}H_{36}O_2$ مصرف شده و صابون جامد تولید می شود. معادله این واکنش به صورت زیر است:



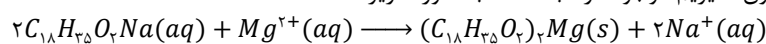
به ازای مصرف هر مول اسید چرب، یک مول صابون تولید می شود. بر این اساس، شمار مول اسید چرب مصرف شده که برابر با تعداد مول صابون تولید شده است را حساب می کنیم:

$$? \text{ mol } C_{18}H_{36}O_2 = 99.4 \text{ g } C_{18}H_{36}O_2 \times \frac{1 \text{ mol } C_{18}H_{36}O_2}{284 \text{ g } C_{18}H_{36}O_2} = 0.35 \text{ mol}$$

با توجه به محاسبات بالا، مقدار ۰/۳۵ مول صابون جامد تولید شده است. سپس مولاریته یون منیزیم را حساب می کنیم:

$$\text{مولاریته یون منیزیم} = \frac{ppm \times d}{1000M} = \frac{42 \times 1}{1000 \times 24} = 1.75 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

معادله واکنش صابون مورد نظر با یون منیزیم موجود در آب سخت به صورت زیر است:



سپس تعداد مول صابون مصرف شده طی واکنش مورد نظر را حساب می کنیم:

$$? \text{ mol } C_{18}H_{35}O_2Na = 8.0 \text{ L آب} \times \frac{1.75 \times 10^{-3} \text{ mol } Mg^{2+}}{1 \text{ L آب}} \times \frac{2 \text{ mol } C_{18}H_{35}O_2Na}{1 \text{ mol } Mg^{2+}} = 0.28 \text{ mol}$$

در قدم بعد، درصد صابون مصرف شده طی این واکنش را محاسبه می کنیم.

$$\text{درصد صابون مصرف شده} = \frac{0.28}{0.35} \times 100 = 80$$

با توجه به محاسبات بالا، ۸۰ درصد صابون اولیه مصرف شده است. سپس جرم رسوب تولید شده را حساب می کنیم:

$$? \text{ g } (C_{18}H_{35}O_2)_2Mg = 0.28 \text{ mol } C_{18}H_{35}O_2Na \times \frac{1 \text{ mol } (C_{18}H_{35}O_2)_2Mg}{2 \text{ mol } C_{18}H_{35}O_2Na} \times \frac{590 \text{ g } (C_{18}H_{35}O_2)_2Mg}{1 \text{ mol } (C_{18}H_{35}O_2)_2Mg} = 82.6 \text{ g}$$

گروه آموزشی ماز

۶۸- کدام یک از عبارات های داده شده نادرست است؟

- (۱) بنزین، از ذرات ناقطبی ساخته شده و نسبت شمار اتم های هیدروژن به کربن در آن، برابر اتیلن گلیکول است.
- (۲) در ساختار مولکول های عسل، اتم های اکسیژنی وجود دارد که به دو اتم متفاوت از دو عنصر مختلف متصل شده اند.
- (۳) ذرات سازنده موجود در کلوئیدها از ذرات سازنده محلول ها بزرگ تر و از ذرات سازنده سوسپانسیون ها، کوچک تر هستند.
- (۴) پس از استفاده از پاک کننده در شرایط یکسان، درصد لکه چربی باقیمانده روی پارچه پلی استری کمتر از پارچه نخی است.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۳۰۱)

پاسخ سئواری

میزان چسبندگی ذرات چربی روی پارچه‌های نخی (پارچه‌های ساخته شده با استفاده از پنبه) کم‌تر از پارچه‌های پلی‌استری است؛ بنابراین صابون لکه چربی را از روی پارچه نخی بهتر از پارچه پلی‌استری پاک می‌کند و در نتیجه پس از استفاده از پاک کننده در شرایط یکسان، درصد لکه چربی باقیمانده بر روی پارچه پلی‌استری بیشتر از پارچه نخی است.

صابون‌های مختلف، همه لکه‌های موجود بر روی پارچه‌ها را به یک اندازه از بین نمی‌برند. در واقع، هر چه قدر که یک پاک‌کننده صابونی بتواند مقدار بیشتری از آلاینده‌ها و چربی‌های روی لباس را بزدايد، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری دارد. قدرت پاک‌کنندگی یک صابون، به عوامل مختلفی از جمله نوع پارچه، دما، نوع آب و مقدار صابون بستگی دارد. یکی از عوامل موثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون‌ها، دمای آب است. افزایش دمای آب، موجب افزایش قدرت پاک‌کنندگی صابون و کاهش مقدار لکه‌های پاک‌نشده از روی پارچه می‌شود. در واقع، افزایش دمای آب با کاهش چسبندگی لکه‌های چرب و آلودگی به الیاف پارچه، نفوذ مولکول‌های صابون را به درون آلودگی‌ها بیشتر کرده و باعث می‌شود مقدار بیشتری از لکه‌ها پاک شوند. به عنوان مثال، افزایش دمای آب از ۳۰ درجه به ۴۰ درجه سانتی‌گراد، قدرت پاک‌کنندگی صابون‌ها را تقریباً به اندازه ۱۰ درصد افزایش می‌دهد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) بنزین، مخلوطی از آلکان‌های مختلف است که با فرمول مولکولی تقریبی $C_{18}H_{38}$ مشخص می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت بنزین از ذرات ناقطبی ساخته شده و نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در آن، $\frac{1}{2} = 0.5$ برابر اتیلن گلیکول است. توجه داریم که اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$) نیز یک الکل دو عاملی با فرمول ساختاری زیر است:



۲) عسل از مولکول‌هایی با ساختار قطبی ($\mu > 0$) تشکیل شده است که در آن‌ها شمار زیادی گروه هیدروکسیل ($-OH$) متصل به اتم‌های کربن وجود دارد. برای پاک کردن لکه‌های ایجاد شده توسط عسل، از آب می‌توان به عنوان یک پاک‌کننده کاملاً مناسب استفاده کرد؛ چراکه ذرات سازنده عسل با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کرده و بر این اساس، به راحتی از محیط زدوده می‌شوند. در ساختار گروه عاملی هیدروکسیل، یک اتم اکسیژن به اتم‌های هیدروژن و کربن متصل شده است.

۳) مقایسه اندازه ذرات سازنده مخلوط‌ها به صورت زیر است:

محلول‌ها > کلئیدها > سوسپانسیون‌ها : اندازه ذرات سازنده

توجه داریم که اندازه ذرات کلئیدها به گونه‌ای است که این ذرات با گذشت زمان ته‌نشین نمی‌شوند؛ در نتیجه می‌توان گفت که کلئیدها (همانند محلول‌ها) پایدار هستند. انواع رنگ‌ها (مانند رنگ‌های پوششی) و چسب‌ها، سرامیک‌ها، شیر، ژله و سس مایونز نمونه‌هایی از کلئیدها و شربت معده و آب گل‌آلود نمونه‌هایی از سوسپانسیون‌ها هستند. جدول زیر، ویژگی‌های انواع مواد را نشان می‌دهد:

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است	پایدار است	پایدار است
نوع ذره	ذرها و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها

در سال ۱۸۶۰ میلادی، دانشمندی به نام توماس گراهام برای توصیف ویژگی‌های برخی از مواد مثل چسب‌ها، ژلاتین و نشاسته، از واژه «کلئید» استفاده کرد. کلئیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند.

گروه آموزشی ماز

۶۹- محلول‌هایی از اسیدهای ضعیف HA و HD ، به ترتیب با درصد یونش ۲۰ و ۲۵ درصد و با pH برابر، در دو ظرف جداگانه در اختیار داریم. نسبت $[HA]$ تعادلی به $[D^-]$ در این محلول‌ها چقدر بوده و اگر غلظت اسید HD برابر ۲ مولار باشد، اختلاف pH محلول‌ها با pH محلول $2000 ppm$ سود با چگالی تقریبی ۱ گرم بر سانتی‌متر مکعب چقدر است؟

($Na = 23$ و $O = 16$ و $H = 1 : g.mol^{-1}$)

- ۱۲/۴، ۰۴ (۴)
- ۱۰/۷، ۰۴ (۳)
- ۱۰/۷، ۰۲ (۲)
- ۱۲/۴، ۰۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

مقدار pH اسیدهای داده شده با هم برابر است و بنابراین غلظت یون هیدرونیوم نیز در محلول آنها برابر است. غلظت این یون را در محلولهای داده شده برابر با x مول بر لیتر فرض می‌کنیم. با توجه به رابطه درصد یونش و غلظت یون هیدرونیوم در محلول که به صورت $[H_2O^+] = M \cdot \alpha$ است، می‌توان گفت غلظت اولیه اسیدهای HA و HD در محلولهای مجزای داده شده به ترتیب برابر با $5x$ و $4x$ مول بر لیتر می‌شود. توجه داریم که در این حالت، $[HA]$ و $[D^-]$ پس از یونش به ترتیب برابر با $4x$ و x مول بر لیتر هستند و از این رو، نسبت این دو عدد برابر با ۴ است. برای بررسی قسمت دوم مساله، با توجه به اینکه محلول ۲ مولار اسید HD با درصد یونش ۲۵ در اختیار داریم، غلظت هیدرونیوم در این محلول برابر با 0.5 مولار می‌شود. در چنین حالتی، مقدار pH این محلول برابر با $-\log(0.5) = 0.3$ است. برای محاسبه pH محلول 2000 ppm سود نیز ابتدا غلظت مولار سود را محاسبه می‌کنیم:

$$M = \frac{ppm \times d}{1000M} \rightarrow M = \frac{2000 \times 1}{1000 \times 40} = \frac{1}{20} \text{ mol.L}^{-1}$$

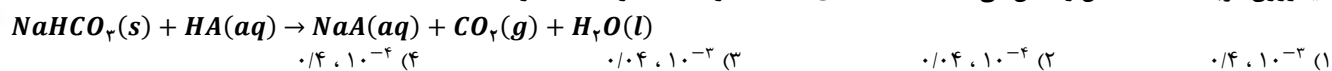
$$pH = -\log\left(\frac{10^{-14}}{[OH^-]}\right) \Rightarrow pH = 12.7$$

با توجه به محاسبات بالا، اختلاف مقدار pH محلولهای مورد نظر برابر با 12.4 است.

بازها کاربردهای گسترده‌ای در زندگی روزانه دارند که از جمله آنها می‌توان به محلول شیشه پاک‌کن (محلول آمونیاک در آب) و لوله بازکن (محلول آبی سدیم هیدروکسید در آب که نوعی پاک‌کننده قوی به شمار می‌رود) اشاره کرد. توجه داریم که در محلولهای بازی، غلظت یون هیدروکسید بیشتر از یون هیدرونیوم است.

گروه آموزشی ماز

۷۰- اگر pH محلولی از اسید HA ($\alpha = 0.4$) برابر $2/4$ باشد، در 100 mL از این محلول، چند مول اسید وجود داشته و این محلول با چند گرم سدیم هیدروژن کربنات 21% خالص واکنش می‌دهد؟ ($g \cdot mol^{-1}$: $H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$ و $Na = 23$)



پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مساله - ۱۲۰۱)

پاسخ تشریحی:

باتوجه به معادله واکنش $NaHCO_3(s) + HA(aq) \rightarrow NaA(aq) + CO_2(g) + H_2O(l)$ ، در گام اول مولاریته اولیه محلول اسیدی داده شده را بدست می‌آوریم. بر این اساس، داریم:

$$pH = -\log[H^+] \rightarrow [H^+] = 4 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{[H^+]}{[HA]_{\text{اولیه}}} \rightarrow [HA] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، غلظت اسید در محلول برابر با 0.1 مول بر لیتر می‌شود. در چنین شرایطی بدیهی است که در 100 میلی لیتر (معادل با 0.1 لیتر) از محلول اسیدی مورد نظر، 10^{-3} مول اسید HA موجود بوده است. در این رابطه، داریم:

$$? \text{ mol HA} = 0.1 \text{ L محلول} \times \frac{0.1 \text{ mol HA}}{1 \text{ L محلول}} = 10^{-3} \text{ mol}$$

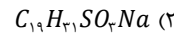
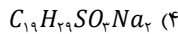
با توجه به معادله واکنش انجام شده، هر 10^{-3} مول اسید با 10^{-3} مول سدیم هیدروژن کربنات ($NaHCO_3$) با جرم مولی 84 گرم بر مول) واکنش می‌دهد، پس می‌توان گفت هر 10^{-3} مول اسید با 84×10^{-3} گرم سدیم هیدروژن کربنات واکنش می‌دهد. باتوجه به درصد خلوص سدیم هیدروژن کربنات، می‌توان گفت جرم سدیم هیدروژن کربنات ناخالص مصرف شده در این فرایند برابر با $\frac{84 \times 10^{-3}}{0.21}$ گرم، معادل با 0.4 گرم است. در این رابطه نیز داریم:

$$? \text{ g NaHCO}_3 = 10^{-3} \text{ mol HA} \times \frac{1 \text{ mol NaHCO}_3}{1 \text{ mol HA}} \times \frac{84 \text{ g NaHCO}_3}{1 \text{ mol NaHCO}_3} \times \frac{100 \text{ g NaHCO}_3}{21 \text{ g NaHCO}_3} = 0.4 \text{ g}$$

از آنجا که اضافه کردن محلول سدیم هیدروژن کربنات به یک محلول دیگر، سبب کاهش غلظت یون هیدروژن در آن محلول می‌شود، می‌توان گفت که محلول سدیم هیدروژن کربنات یک محلول بازی با pH بزرگتر از ۷ است. برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی چربی‌ها، به شوینده‌ها جوش شیرین (یا همان سدیم هیدروژن کربنات) می‌افزایند. اضافه کردن این ماده به شوینده‌ها، سبب افزایش خاصیت بازی آنها می‌شود و علاوه بر آن، در صورت استفاده از آب‌های سخت برای شست‌وشوی لباس‌ها، یون‌های HCO_3^- موجود در شوینده موردنظر با یون‌های منیزیم و کلسیم موجود در آب سخت تشکیل رسوب داده و این یون‌ها را از محلول خارج می‌کند.

گروه آموزشی ماز

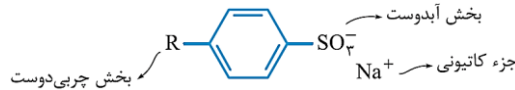
۷۱- فرمول شیمیایی کلی یک پاک‌کننده غیرصابونی که به حلقه کربنی آن یک زنجیره هیدروکربنی سیرشده با ۱۳ اتم کربن متصل شده است، به کدام صورت می‌باشد؟



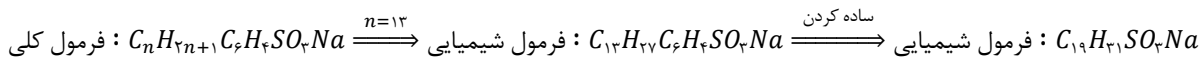
پاسخ: گزینه ۲ (آسان - مفهومی - ۱۳۰۱)



ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیرصابونی، مطابق با تصویر زیر است:



با توجه به ساختار نشان داده شده، فرمول شیمیایی کلی این نوع از پاک‌کننده‌ها را می‌توان به صورت $RC_nH_{2n+1}SO_2Na$ نوشت که در آن، گروه R معادل با یک زنجیره هیدروکربنی است. اگر گروه R کاملاً سیرشده باشد، فرمول مولکولی آن به صورت C_nH_{2n+1} می‌شود؛ پس داریم:



گروه آموزشی ماز

۷۲- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- آ: در یک نمونه از سرکه، شمار یون‌های استات در مقایسه با ذرات استیک اسید یونیده نشده کمتر خواهد بود.
 - ب: یکی از روش‌های تعیین غلظت یون هیدرونیوم در محلول‌ها، سنجش رسانایی الکتریکی این محلول‌ها است.
 - پ: محلولی از نیتریک اسید با $pH = 0$ ، برخلاف یک نمونه از آب خالص، فاقد یون هیدروکسید درون خود است.
 - ت: با انحلال مقدار کمی پتاسیم اکسید در محلولی از نیتریک اسید، رسانایی الکتریکی این محلول افزایش پیدا می‌کند.
- (۱) آ و ب (۲) آ و پ (۳) ب و پ (۴) ب و ت

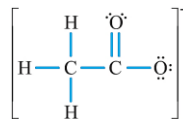
پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۳۰۱)



عبارتهای (آ) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد

آ: فورمیک اسید و استیک اسید (یا همان اتانویک اسید)، از جمله اسیدهای ضعیف هستند که به صورت جزئی در آب یونش پیدا می‌کنند. با توجه به کوچک بودن مقدار α در هنگام یونش استیک اسید، می‌توان گفت در محلولی از این ماده، غلظت یون استات (CH_3COO^-) کمتر از غلظت مولی ذرات استیک اسید یونیده نشده (CH_3COOH) خواهد بود. ساختار یون استات به صورت زیر است:



ب: خوراکی‌ها، شوینده‌ها، داروها و مواد آرایشی شامل مقادیر متفاوتی از یون‌ها به ویژه یون هیدرونیوم هستند. غلظت این یون بر روی ماندگاری این مواد و در نتیجه سلامتی تأثیر شایانی دارد. بر این اساس، می‌توان گفت در فرایند تولید مواد گوناگون اغلب تعیین و کنترل غلظت یون هیدرونیوم نقش مهمی دارد. یکی از روش‌هایی که برای تعیین غلظت یون هیدرونیوم می‌توان به کار برد، سنجش رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی است. استفاده از کاغذ pH ، روش دیگری برای محاسبه غلظت یون هیدروژن به صورت تقریبی است.

پ: در هر محلول آبی، یون‌های هیدروژن و هیدروکسید به صورت هم‌زمان وجود دارند. در محلولی از نیتریک اسید با $pH = 0$ ، غلظت یون هیدروژن برابر با ۱ مول بر لیتر بوده و بر این اساس، غلظت مولی یون هیدروکسید برابر با 10^{-14} مول بر لیتر می‌شود. هرچند که غلظت یون هیدروکسید در این محلول خیلی خیلی کم است، اما باز هم یون‌های هیدروژن و هیدروکسید در این محلول در کنار هم قرار گرفته‌اند. در یک نمونه از آب خالص نیز یون‌های هیدروکسید و هیدروژن با غلظت برابر، در کنار هم قرار دارند.

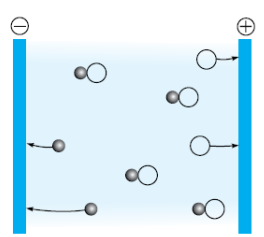
ت: با انحلال مقداری پتاسیم اکسید در محلولی از نیتریک اسید، واکنش زیر در محلول انجام می‌شود:



فرض می‌کنیم در محلول نیتریک اسید اولیه ۲ مول از این ماده وجود داشته است، پس این محلول شامل ۴ مول یون (۲ مول یون نیترات و ۲ مول یون هیدروژن) می‌شود. با توجه به معادله بالا، به ازای انحلال هر مول پتاسیم اکسید در این محلول، ۲ مول یون هیدروژن مصرف شده و بجای آن دو مول یون پتاسیم وارد محلول می‌شود، پس مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول ثابت باقی می‌ماند. بر این اساس، می‌توان گفت با انحلال مقداری پتاسیم اکسید در

محلولی از نیتریک اسید، رسانایی الکتریکی این محلول ثابت باقی می‌ماند. حتی اگر بخواهیم به طور دقیق‌تر این محلول را بررسی کنیم، با توجه به تولید آب در این واکنش و افزایش حجم محلول، رسانایی الکتریکی محلول به مقدار اندکی کاهش پیدا می‌کند.

گروه آموزشی ماز



۷۳- با توجه به شکل مقابل که رسانایی الکتریکی محلول یک مولار اسید HA را در دمای $25^{\circ}C$ نشان می‌دهد، کدامیک از مطالب داده شده نادرست است؟

- ۱) بر این اساس، می‌توان گفت HA یک اسید آرنیوس با ثابت یونش کمتر از HI است.
- ۲) درصد یونش مولکول‌های HA در محلول آبی مورد نظر به تقریب برابر با $33/3\%$ است.
- ۳) در شرایط یکسان، مقدار pH محلول HA از محلول آبی هیدروکلریک اسید کمتر است.
- ۴) در شرایط یکسان، اسید HA الکترولیت ضعیف‌تری نسبت به یک نمونه از سولفوریک اسید است.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی و مساله - ۱۴۰۱)



با توجه به یونش جزئی اسید مورد نظر در محلول خود، می‌توان گفت HA برخلاف HCl یک اسید ضعیف است و درجه یونش کوچک‌تر از یک دارد. بنابراین، در شرایط یکسان مقدار pH محلول آبی این اسید در مقایسه با هیدروکلریک اسید بیشتر بوده و رسانایی الکتریکی محلول HA نیز از رسانایی الکتریکی محلول HCl کمتر است.



۱ چون HA به طور کامل یونیده نشده است، بنابراین یک اسید آرنیوس با ثابت یونش کوچک است. این در حالی است که هیدرویدیک اسید از جمله اسیدهای قوی بوده و ثابت یونش بسیار بزرگی دارد.

۲ در محلول مورد نظر، ۲ مولکول اسیدی یونیده شده و ۴ مولکول اسیدی یونیده نشده وجود دارد. بر این اساس، درصد یونش HA برابر است با:

$$HA \text{ درصد یونش} = \frac{\text{تعداد ذرات یونیده شده}}{\text{تعداد کل ذرات}} \times 100 = \frac{2}{6} \times 100 \approx 33/3\%$$

۴ در شرایط یکسان، HA که یک اسید ضعیف است، الکترولیت ضعیف‌تری نسبت به سولفوریک اسید (H_2SO_4) که یک اسید قوی است، به شمار می‌رود. به عبارت دیگر، در شرایط یکسان رسانایی الکتریکی محلول HA کمتر از محلول سولفوریک اسید است.

گروه آموزشی ماز

۷۴- در دمای اتاق، ۴۵۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با چگالی $1/46 g \cdot mL^{-1}$ را تا حجم ۷۵۰ میلی‌لیتر رقیق کرده و به آن مقدار ۵/۱۳ گرم باریم هیدروکسید اضافه می‌کنیم. اگر pH محلول نهایی دو برابر pH محلول غلیظ اولیه باشد، غلظت اسید در محلول اولیه بر حسب ppm چقدر می‌تواند

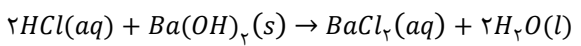
باشد؟ ($Ba = 137$ و $O = 16$ و $H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

- ۱) ۱۰۰۰۰
- ۲) ۳۵۰۰
- ۳) ۷۵۰۰
- ۴) ۸۰۰۰

پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله - ۱۴۰۱)



واکنش خنثی‌سازی انجام‌شده به صورت زیر است:



با توجه به جرم باریم هیدروکسید، مقدار هیدروکلریک اسید خنثی شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } HCl = 5/13 \text{ g } Ba(OH)_2 \times \frac{1 \text{ mol } Ba(OH)_2}{171 \text{ g } Ba(OH)_2} \times \frac{2 \text{ mol } HCl}{1 \text{ mol } Ba(OH)_2} = 0/06 \text{ mol}$$

طی این فرایند، مقدار ۰/۰۶ مول از هیدروکلریک اسید موجود در محلول اولیه خنثی شده است. توجه داریم که pH محلول پس از افزایش حجم و خنثی شدن ۰/۰۶ مول از اسید موجود در آن، دو برابر شده است. بر این اساس، داریم:

$$pH_2 = 2pH_1$$

$$pH = -\log[H^+] \rightarrow -\log[H_2^+] = -2\log[H_1^+] \rightarrow \log[H_2^+] = \log[H_1^+]^2 \rightarrow [H_2^+] = [H_1^+]^2$$

مطابق محاسبات بالا، غلظت هیدروکلریک اسید پس از افزایش حجم محلول از ۴۵۰ میلی‌لیتر به ۷۵۰ میلی‌لیتر و خنثی شدن ۰/۰۶ مول از این ماده، برابر با توان دوم غلظت اولیه این اسید شده است. تعداد مول هیدروکلریک اسید موجود در محلول اولیه را برابر با x مول در نظر می‌گیریم.

بر این اساس، داریم:

$$\frac{HCl \text{ مول}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{x}{0.145} \quad \text{و} \quad \frac{x - 0.06}{0.175} = \text{غلظت نهایی}$$

با توجه به توضیحات داده شده، غلظت نهایی را مساوی با توان دوم غلظت اولیه قرار می‌دهیم. بر این اساس، داریم:

$$\frac{x - 0.06}{0.175} = \left(\frac{x}{0.145}\right)^2 \rightarrow 100x^2 - 27x + 1162 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0.09 \text{ mol} \\ 0.118 \text{ mol} \end{cases}$$

مقدار اسید اولیه می‌تواند برابر با ۰/۰۹ یا ۰/۱۸ مول باشد، پس می‌توان گفت غلظت اسید اولیه در محلول ۴۵۰ میلی‌لیتری می‌تواند برابر با ۰/۲ یا ۰/۴ مول بر لیتر باشد. غلظت هیدروکلریک بر حسب ppm برای هر دو مقدار را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{مولاریته} &= \frac{ppm \times d}{1000 \times M} \\ 0.2 &= \frac{ppm \times 1.46}{1000 \times 36.5} \rightarrow ppm = 5000 \\ 0.4 &= \frac{ppm \times 1.46}{1000 \times 36.5} \rightarrow ppm = 10000 \end{aligned}$$

با توجه به محاسبات بالا، غلظت محلول اسید اولیه می‌تواند برابر با ۱۰۰۰۰ یا ۵۰۰۰ واحد ppm باشد.

گروه آموزشی ماز

۷۵- جدول زیر، پتانسیل کاهش استاندارد چند نیم‌سلول مختلف را نشان می‌دهد:

نیم‌سلول	Ag^+/Ag	Al^{3+}/Al	Zn^{2+}/Zn
پتانسیل کاهش استاندارد (V)	+۰/۸	-۱/۶۶	-۰/۷۶

اگر نیم‌سلول آندی سلول گالوانی آلومینیم-روی را با نیم‌سلول نقره جایگزین کنیم، emf سلول مورد نظر به اندازه ولت تغییر کرده و از خلال دیواره متخلخل سلول جدید ایجاد شده، آنیون‌ها به سمت الکتروود حرکت می‌کنند.

(۱) ۰/۶۶ - مثبت (۲) ۰/۶۶ - منفی (۳) ۱/۵۶ - مثبت (۴) ۱/۵۶ - منفی

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی و مساله - ۱۴۰۲)



نیروی الکتروموتوری (emf) در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که یک سلول می‌تواند به وجود بیاورد. مقدار این اختلاف پتانسیل را با E° نیز نشان می‌دهند. برای پیدا کردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

- ✓ نیم‌سلول‌های سازنده سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولت‌سنج اندازه‌گیری می‌کنیم.
- ✓ ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی مورد نظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند را از E° کاتد کم می‌کنیم.

چون آلومینیم نسبت به روی پتانسیل کاهش استاندارد منفی تری دارد، در صورت اتصال نیم‌سلول‌های آلومینیم و روی به یکدیگر، سلولی به وجود می‌آید که در آن آلومینیم در نقش آند و روی در نقش کاتد است. بر این اساس، مقدار نیروی الکتروموتوری سلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = (-0.76) - (-1.66) = 0.9V$$

اگر نیم‌سلول آندی (نیم‌سلول آلومینیم) این سلول را با نیم‌سلول نقره جایگزین کنیم، سلول گالوانی روی-نقره بدست می‌آید. در این سلول، فلز نقره در نقش کاتد و فلز روی در نقش آند خواهد بود. بر این اساس، داریم:

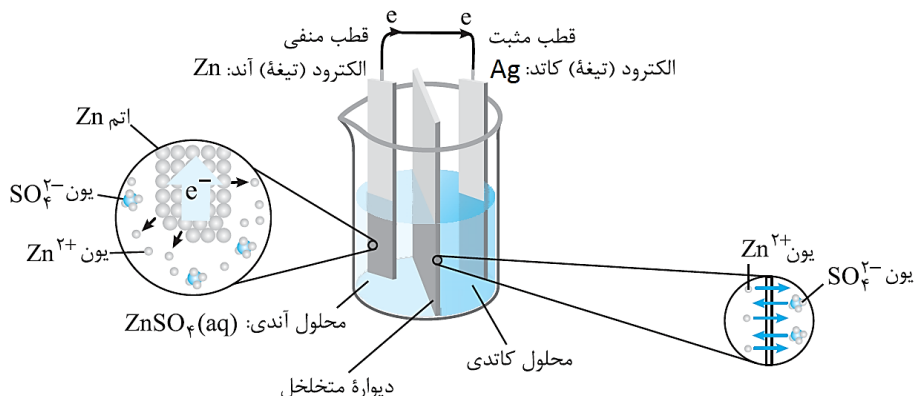
$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = (+0.8) - (-0.76) = 1.56V$$

با توجه به محاسبات انجام شده، اختلاف مقدار نیروی الکتروموتوری دو سلول را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta V = 1.56 - 0.9 = 0.66V$$

توجه داریم که مقدار emf برای سلول‌های گالوانی همواره مقداری مثبت است. چنانچه ولت‌سنج مقدار E° یک سلول را با عددی منفی نشان داد و یا این که پس از محاسبه emf سلول، یک عدد منفی به دست آوردید، فقط به این معناست که موقعیت آند و کاتد سلول را به اشتباه تشخیص داده و قطب‌های ناهم‌نام سلول گالوانی و ولت‌سنج را به یکدیگر وصل کرده‌اید.

تصویر زیر، نمایی از سلول گالوانی روی-نقره را نشان می‌دهد:



همانطور که مشخص است، از خلال دیواره متخلخل موجود در این سلول، آنیون‌ها از سمت محلول کاتدی به سمت محلول آندی رفته و به طرف قطب منفی سلول مورد نظر حرکت می‌کنند.

گروه آموزشی ماز

۷۶- اگر واکنش الکتروشیمیایی $2Ag^+(aq) + Pb(s) \rightarrow 2Ag(s) + Pb^{2+}(aq)$ در جهت طبیعی پیشرفت کند، چند مورد از مطالب زیر درست هستند؟ ($Pb = 207$ و $Ag = 108 : g \cdot mol^{-1}$)

آ: مقدار E° الکترود Ag^+/Ag از E° الکترود Pb^{2+}/Pb بیشتر است.

ب: به ازای مبادله $4/515 \times 10^{22}$ الکترون در این واکنش، ۸/۱ گرم فلز نقره تولید می‌شود.

پ: در سلول گالوانی حاصل از این دو الکترود، جهت حرکت آنیون‌ها از دیواره متخلخل به سمت فلز واسطه است.

ت: با انجام واکنش مورد نظر در یک سلول گالوانی، به تدریج سطح تیغه فلزی از جنس سرب، دارای بار مثبت می‌شود.

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۳۰۲)



عبارت‌های (آ) و (ب) درست هستند.

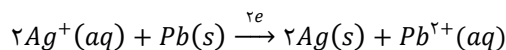


آ: در واکنش داده شده یون Ag^+ در نقش اکسنده بوده و Pb نیز نقش کاهنده را دارد. از این رو الکترود Ag^+/Ag کاتد و الکترود Pb^{2+}/Pb آند است و بر این اساس، داریم:

$$E^\circ(Ag^+/Ag) > E^\circ(Pb^{2+}/Pb)$$

کاتیون‌های فلزی موجود در یک محلول، در واکنش با اتم‌های یک عنصر فلزی دیگر که واکنش‌پذیری بیشتر (یا پتانسیل کاهش استاندارد منفی‌تر) دارند، یک یا چند الکترون از آن‌ها گرفته و کاهش پیدا می‌کنند. به عنوان مثال، هرگاه تیغه‌ای از جنس فلز روی را در محلولی از مس(II) سولفات قرار بدهیم، اتم‌های خنثای روی با از دست دادن دو الکترون به یون‌های روی اکسایش یافته و هم‌زمان با آن، هر یون مس(II) با دریافت همان دو الکترون، به اتم Cu کاهش می‌یابد. از آن‌جا که رنگ آبی محلول مس(II) سولفات به خاطر وجود یون‌های $Cu^{2+}(aq)$ در این محلول است، با گذشت زمان و کاهش غلظت این یون در محلول مورد نظر، به تدریج از شدت رنگ محلول کاسته می‌شود. با توجه به فرایند انجام شده در این واکنش، می‌توان گفت پتانسیل کاهش استاندارد روی منفی‌تر از مس است.

ب: معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



به ازای مبادله ۲ مول الکترون در این واکنش، ۲ مول فلز نقره تولید می‌شود. بر این اساس داریم:

$$? g Ag = 4/515 \times 10^{22} e^- \times \frac{1 \text{ mol } e^-}{6/02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{2 \text{ mol } Ag}{2 \text{ mol } e^-} \times \frac{108 \text{ g } Ag}{1 \text{ mol } Ag} = 8/1 \text{ g } Ag$$

پ: در سلول‌های گالوانی، همواره جهت حرکت آنیون‌ها از دیواره متخلخل، از سمت نیم‌سلول کاتدی به سمت نیم‌سلول آندی است. بنابراین در این سلول، آنیون‌ها به سمت الکترود فلز سرب که یک فلز اصلی است، حرکت می‌کنند.

ت: با انجام واکنش در این سلول گالوانی، به تدریج سطح الکترود کاتد یعنی سطح تیغه نقره، دارای بار مثبت شده و سطح تیغه سرب دارای بار منفی می‌شود. به همین خاطر است که تیغه نقره، قطب مثبت این سلول را تشکیل می‌دهد.

گروه آموزشی ماز

۷۷- مقداری دی‌نیتروژن پنتاکسید را در ۱۰L آب خالص حل می‌کنیم. اگر یک لیتر از محلول تولید شده طی این فرایند با ۰/۶ گرم فلز منیزیم به طور کامل واکنش بدهد، جرم دی‌نیتروژن پنتاکسید حل شده در آب برابر با چند گرم بوده و در واکنش انجام شده، چند الکترون بین گونه‌های اکسند و کاهنده

مبادله شده است؟ ($g \cdot mol^{-1}$: $N = 14$ و $O = 16$ و $Mg = 24$)

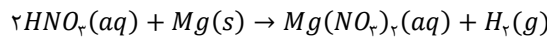
$$1/5.05 \times 10^{22} - 27 \quad (1) \quad 2/7 \quad 1/5.05 \times 10^{22}$$

$$3/0.1 \times 10^{22} - 27 \quad (3) \quad 3/0.1 \times 10^{22}$$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۴۰۲)

پاسخ شریعی

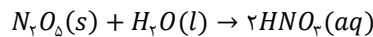
با انحلال دی‌نیتروژن پنتاکسید در آب، محلول نیتریک اسید بدست می‌آید. واکنش میان نیتریک اسید و فلز منیزیم به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، مقدار مول‌های نیتریک اسید مصرف شده را محاسبه می‌کنیم.

$$? \text{ mol } HNO_3 = 0.6 \text{ g } Mg \times \frac{1 \text{ mol } Mg}{24 \text{ g } Mg} \times \frac{2 \text{ mol } HNO_3}{1 \text{ mol } Mg} = 0.5 \text{ mol}$$

در ۱ لیتر از محلول مورد نظر، ۰/۰۵ مول نیتریک اسید وجود داشته است، پس می‌توان گفت در ۱۰ لیتر از محلول اسیدی تولید شده، ۰/۵ مول نیتریک اسید موجود بوده است. معادله واکنش تولید نیتریک اسید به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش شیمیایی، جرم دی‌نیتروژن پنتاکسید مصرف شده را محاسبه می‌کنیم.

$$? \text{ g } N_2O_5 = 0.5 \text{ mol } HNO_3 \times \frac{1 \text{ mol } N_2O_5}{2 \text{ mol } HNO_3} \times \frac{108 \text{ g } N_2O_5}{1 \text{ mol } N_2O_5} = 27 \text{ g}$$

در معادله $2HNO_3(aq) + Mg(s) \rightarrow Mg(NO_3)_2(aq) + H_2(g)$ ، به ازای مصرف شدن هر مول فلز منیزیم، دو مول الکترون مبادله شده و یک مول یون منیزیم تولید می‌شود. بر این اساس، تعداد الکترون‌های مبادله شده در واکنش را محاسبه می‌کنیم.

$$? e^- \text{ تعداد} = 0.6 \text{ g } Mg \times \frac{1 \text{ mol } Mg}{24 \text{ g } Mg} \times \frac{2 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol } Mg} \times \frac{6/0.2 \times 10^{22} e^-}{1 \text{ mol } e^-} = 3/0.1 \times 10^{22}$$

اغلب فلزها با محلول‌های اسیدی واکنش داده و منجر به تولید گاز هیدروژن و محلولی از یون‌های آبیوشیده می‌شوند. به عنوان مثال، اگر تیغه‌ای از جنس فلز روی را در محلولی از هیدروکلریک اسید قرار بدهیم، اتم‌های خنثای روی با از دست دادن دو الکترون به یون‌های Zn^{2+} اکسایش پیدا کرده و الکترون‌های خود را به یون‌های هیدروژن موجود در محلول انتقال می‌دهند. یون‌های هیدروژن نیز پس از گرفتن الکترون، کاهش یافته و به مولکول‌های هیدروژن تبدیل می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

۷۸- اگر مدتی پس از شروع واکنش الکتروشیمیایی در سلول روی - مس، اختلاف جرم الکتروود کاتد و الکتروود آند به $2/58 \text{ g}$ برسد، در این مدت چند گرم

از جرم الکتروود آند کاسته شده است؟ (جرم دو الکتروود کاتد و آند را در ابتدای واکنش الکتروشیمیایی یکسان در نظر بگیرید.)

($Zn = 65$ و $Cu = 64$: $g \cdot mol^{-1}$)

$$1/3 \quad (4)$$

$$1/28 \quad (3)$$

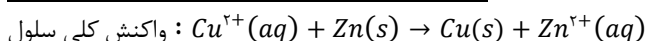
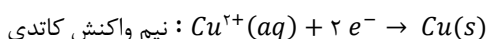
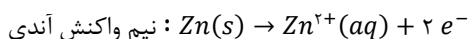
$$0.65 \quad (2)$$

$$0.64 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مساله - ۱۴۰۲)

پاسخ شریعی

در سلول گالوانی مورد نظر، اتم‌های روی اکسید شده و یون‌های مس کاهش پیدا خواهند کرد. ابتدا واکنش کلی انجام شده در سلول و نیم‌واکنش‌های تشکیل‌دهنده آن را می‌نویسیم:



با شروع واکنش از جرم الکتروود آند کاسته شده و بر جرم الکتروود کاتد افزوده می‌شود، بنابراین در زمان موردنظر داریم:

$$2/58 \text{ g} = \text{جرم الکتروود آند} - \text{جرم الکتروود کاتد} = \text{اختلاف جرم الکتروودها}$$

اگر جرم ابتدایی الکتروودها برابر m گرم باشد و در بازه زمانی موردنظر، x مول Zn به صورت Zn^{2+} وارد نیم سلول آندی شود، $65x$ گرم از جرم آند کاسته شده و در طول همین بازه زمانی، $64x$ گرم بر جرم کاتد مسی افزوده می‌شود. پس داریم:

$$(m + 64x) - (m - 65x) = 129x = 2/58 \text{ g} \Rightarrow x = \frac{2/58}{129} = 0.2 \text{ mol}$$

بنابراین جرم کاسته شده از آند برابر است با:

$$? g Zn = 0.02 \text{ mol Zn} \times \frac{65 g Zn}{1 \text{ mol Zn}} = 1.3 g Zn$$

توجه داریم که در سلول مورد نظر، تیغه آندی به مرور لاغرتر شده و تیغه کاتدی به مرور چاقتر می شود. تصویر زیر، نمایی از الکترودهای سازنده این سلول گالوانی را نشان می دهد:



گروه آموزشی ماز

۷۹- کدام یک از عبارتهای داده شده درست است؟

- ۱) اگر قدرت کاهندگی Al بیشتر از Sn باشد، با ورود تیغه Sn به محلول آلومینیم سولفات، دمای محلول افزایش می یابد.
- ۲) یک تیغه روی، در مقایسه با یک تیغه از جنس آهنی، دمای محلول مس (II) سولفات را به مقدار کمتری افزایش می دهد.
- ۳) در سلول گالوانی منیزیم-مس، الکترونهای موجود در مدار خارجی به تدریج به سمت تیغه Mg جریان پیدا می کنند.
- ۴) نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن-نقره، کمتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن-نقره است.

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ تشریحی:

نیروی الکتروموتوری (emf) در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که یک سلول می تواند به وجود بیاورد. اگر کاتد دو سلول گالوانی یکسان باشد، سلولی که E^0 آند آن کوچکتر (منفی تر) است، نیروی الکتروموتوری بیشتری نیز خواهد داشت. چون آهن در مقایسه با هیدروژن پتانسیل کاهشی کوچکتری دارد، پس می توان گفت نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن-نقره، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن-نقره است.

بررسی سایر گزینه ها:

۱) اگر قدرت کاهندگی (تمایل به از دست دادن الکترون و اکسید شدن) Al بیشتر از Sn باشد، پس از ورود تیغه Sn به محلول آلومینیم سولفات، واکنشی انجام نشده و دمای محلول ثابت می ماند.

۲) روی و آهن، از جمله فلزهایی هستند که با محلول حاوی کاتیون مس (II) واکنش می دهند. چون روی در مقایسه با آهن کاهنده تر بوده و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون (اکسید شدن) دارد، در شرایط یکسان یک تیغه روی، در مقایسه با یک تیغه آهنی، دمای محلول مس (II) سولفات را به مقدار بیشتری افزایش می دهد.

برای مقایسه تمایل فلزهای مختلف به از دست دادن الکترون، می توانیم از واکنش این عناصر با یک محلول خاص در شرایط یکسان استفاده کنیم. هر فلزی که با محلول موردنظر با شدت بیشتری واکنش داده و دمای محلول را به مقدار بیشتری افزایش دهد، تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون خواهد داشت. به عنوان مثال، اگر تیغه های مجزایی از عناصر روی و منیزیم را وارد محلول های یکسانی از مس (II) سولفات با دمای $20^{\circ}C$ کنیم، دمای محلولی که تیغه منیزیم به آن وارد شده است، به مقدار بیشتری افزایش پیدا می کند؛ پس می توان گفت تمایل اتم های منیزیم به اکسید شدن و از دست دادن الکترون، بیشتر از اتم های روی است.

۳) چون منیزیم در مقایسه با مس پتانسیل کاهشی منفی تری دارد، این فلز در نقش آند سلول قرار می گیرد. بر این اساس، می توان گفت در سلول گالوانی منیزیم-مس، الکترون های موجود در مدار خارجی به سمت تیغه کاتدی (تیغه مسی) جاری می شوند.

گروه آموزشی ماز

۸۰- چه تعداد از عبارتهای داده شده نادرست است؟

- آ: در سری الکتروشیمیایی عناصر، عنصر لیتیم در موقعیت پایین تری در مقایسه با عنصر روی قرار دارد.
- ب: در سلول آلومینیم-مس، با گذشت زمان، شدت رنگ محلول موجود در نیم سلول کاتدی افزایش می یابد.
- پ: دیواره متخلخل سلول های گالوانی، کمک می کند تا محلول های آندی و کاتدی از نظر بار الکتریکی خنثی بمانند.
- ت: در سری الکتروشیمیایی، با حرکت به سمت بالای جدول، تمایل کاتیون های فلزی برای کاهش یافتن افزایش می یابد.
- ث: با استفاده از نیم سلول های نقره، مس و منگنز، می توان ۵ نوع سلول گالوانی با نیروی الکتروموتوری متفاوت ایجاد کرد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

دانلود رایگان تمام آزمون‌های آزمایشی در کانال ما:

@Azmoonha_Azmayeshi

علوی

تمام پایه‌ها و رشته‌ها



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

آزمون‌ها آزماینتی
T.me/Azmoonha_Azmayeshi



حلقه
سنجی



پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی - ۱۲۰۲)

پاسخ سبزی

عبارت‌های (ب) و (ث) نادرست هستند.

بررسی موارد

آ: پتانسیل کاهشی لیتیم در مقایسه با سایر عناصر فلزی کمتر بوده و به همین خاطر، در سری الکتروشیمیایی عناصر فلزی، عنصر لیتیم در موقعیت پایین‌تری در مقایسه با عنصر روی و سایر فلزات قرار دارد.

با افزایش تقاضا برای باتری‌های لیتیمی، این فلز جایگاه ممتازی را در تأمین انرژی جهان پیدا کرده است. به طوری که سالانه از میلیاردها باتری لیتیمی برای ساختن دستگاه‌های الکترونیکی استفاده می‌شود. این دستگاه‌ها سرانجام به همراه باتری‌های به‌کاررفته در ساختار آن‌ها دور ریخته می‌شوند و به این ترتیب، حجم بزرگی از پسماندهای الکترونیکی تولید می‌شود. این پسماندها به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی بوده و رها کردن آن‌ها در طبیعت موجب آلودگی محیط زیست می‌شود. از طرف دیگر، در برخی از این پسماندها مقدار قابل توجهی از مواد و فلزهای ارزشمند و گران‌قیمت وجود دارد که آن‌ها را به منبع مناسبی برای بازیافت تبدیل می‌کند.

ب: فلز مس، در نقش کاتد سلول مورد نظر است. با گذشت زمان، کاتیون‌های موجود در نیم‌سلول مس (کاتیون‌های Cu^{2+}) مصرف شده و به همین خاطر، از شدت رنگ محلول موجود در این نیم‌سلول به مرور کاسته می‌شود.

پ: در یک سلول گالوانی، به مرور زمان فلز به‌کاررفته در آند اکسایش پیدا کرده و کاتیون‌های حاصل از این فرایند، وارد الکترولیت آندی می‌شوند. با ادامه این فرایند، کاتیون‌ها در الکترولیت آندی تجمع پیدا کرده و این محلول بار مثبت پیدا می‌کند. به طریق مشابه، با انجام شدن نیم‌واکنش کاهش در سمت کاتد، تعداد آنیون‌های موجود در محلول کاتدی بیشتر از تعداد کاتیون‌های موجود در آن شده و این محلول بار منفی پیدا می‌کند. با ادامه این فرایند و تجمع بار الکتریکی در نیم‌سلول‌ها، جریان الکتریکی در مدار خارجی متوقف می‌شود. دیواره متخلخل به کاتیون‌های موجود در الکترولیت آندی اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت کاتدی مهاجرت کنند و به آنیون‌های موجود در الکترولیت کاتدی نیز اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت آندی مهاجرت کنند. به این ترتیب، دیواره متخلخل با به جریان انداختن گونه‌های باردار میان محلول‌های موجود در هر نیم‌سلول، سبب خنثی کردن بار الکتریکی آن‌ها شده و از تجمع بار الکتریکی در این نیم‌سلول‌ها جلوگیری می‌کند.

ت: شیمی‌دان‌ها پس از آن که پتانسیل الکترونی استاندارد نیم‌سلول‌های مختلف را اندازه‌گیری کردند، مقادیر حاصل را در یک جدول قرار داده و نام آن را سری الکتروشیمیایی گذاشتند. در سری الکتروشیمیایی، هرچه پتانسیل الکترونی (E°) یک نیم‌سلول منفی‌تر باشد، نیم‌واکنش کاهشی انجام‌شده در آن نیم‌سلول در موقعیت پایین‌تری از جدول قرار می‌گیرد و هرچه پتانسیل الکترونی یک نیم‌سلول مثبت‌تر باشد، نیم‌واکنش کاهشی انجام‌شده در آن نیم‌سلول در موقعیت بالاتری از جدول قرار می‌گیرد. در هر نیم‌واکنش مربوط به عناصر فلزی که E° بزرگ‌تری داشته باشد، کاتیون فلزی تمایل بیشتری به گرفتن الکترون (کاهش یافتن) دارد.

اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول به طور جداگانه ممکن نبوده و باید این کمیت به طور نسبی اندازه‌گیری شود. شیمی‌دان‌ها برای دستیابی به این هدف، نیم‌سلول استاندارد هیدروژن (SHE) را به عنوان مبنا انتخاب کرده و پتانسیل آن را برابر صفر ولت در نظر گرفتند. در این نیم‌سلول، محلولی با $pH = 0$ (محلولی که غلظت مولی یون هیدروژن در آن برابر با ۱ مول بر لیتر است) قرار داشته و گاز هیدروژن با فشار ۱ اتمسفر بر روی این محلول دمیده می‌شود. شیمی‌دان‌ها با تشکیل سلول گالوانی از هر نیم‌سلول با نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، توانستند پتانسیل الکتریکی بسیاری از نیم‌سلول‌ها را اندازه‌گیری کرده و در جدولی به نام سری الکتروشیمیایی ثبت کنند.

ث: با استفاده از این نیم‌سلول‌ها، می‌توان ۳ سلول گالوانی $Cu - Ag$ ، $Cu - Mn$ و $Mn - Ag$ با نیروی الکتروموتوری (emf) متفاوت ایجاد کرد. توجه داریم که اگر n نیم‌سلول مختلف داشته باشیم، می‌توانیم $\frac{n(n-1)}{2}$ سلول گالوانی مختلف بسازیم.

گروه آموزشی ماز

۸۱- مخلوطی از منیزیم نیترات و سدیم نیترات جامد را در اختیار داریم. این مخلوط را در مقدار کافی آب حل می‌کنیم. اگر غلظت مولی یون نیترات در محلول ایجاد شده $3/2$ برابر غلظت مولی یون منیزیم باشد، درصد جرمی اتم‌های منیزیم در مخلوط اولیه چقدر بوده است؟

($g \cdot mol^{-1}$: $N = 14$ و $O = 16$ و $Na = 23$ و $Mg = 24$)

۱۹/۲ (۴)

۹/۶ (۳)

۱۸ (۲)

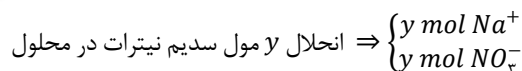
۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مساله - ۱۰۰۳)

پاسخ سبزی

فرمول شیمیایی منیزیم نیترات و سدیم نیترات به ترتیب معادل با $Mg(NO_3)_2$ و $NaNO_3$ است. اگر شمار مول‌های منیزیم نیترات و سدیم نیترات حل شده در محلول را به ترتیب معادل با x و y مول در نظر بگیریم، تعداد ذرات ایجاد در محلول، به صورت زیر می‌شود:

انحلال x مول منیزیم نیترات در محلول $\Rightarrow \begin{cases} x \text{ mol } Mg^{2+} \\ 2x \text{ mol } NO_3^- \end{cases}$



بر این اساس، می‌توان گفت در محلول مورد نظر مجموعاً $2x + y$ مول یون نیترات وجود دارد. با توجه به مقدار یون‌های آزاد شده در محلول و اطلاعات داده شده در صورت سوال، داریم:

$$\frac{\text{غلظت یون نیترات}}{\text{غلظت یون منیزیم}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\text{مقدار مول یون نیترات موجود در محلول}}{\text{مقدار مول یون منیزیم موجود در محلول}} = \frac{2x + y}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x = 2x + y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

با توجه به نسبت محاسبه شده، می‌توان گفت تعداد مول‌های سدیم نیترات موجود در مخلوط اولیه $1/2$ برابر تعداد مول‌های منیزیم نیترات موجود در این مخلوط بوده است. بر این اساس، تعداد مول‌های سدیم نیترات و منیزیم نیترات را به ترتیب معادل با $1/2m$ و m مول در نظر می‌گیریم و جرم هر ماده را در مخلوط اولیه محاسبه می‌کنیم.

$$? g NaNO_3 = \frac{1}{2}m \text{ mol } NaNO_3 \times \frac{85 g NaNO_3}{1 \text{ mol } NaNO_3} = 1.02m g$$

$$? g Mg(NO_3)_2 = m \text{ mol } Mg(NO_3)_2 \times \frac{148 g Mg(NO_3)_2}{1 \text{ mol } Mg(NO_3)_2} = 148m g$$

در قدم بعد، جرم منیزیم موجود در مخلوط اولیه را بدست آورده و سپس درصد جرمی این ماده را محاسبه می‌کنیم.

$$? g Mg = m \text{ mol } Mg(NO_3)_2 \times \frac{1 \text{ mol } Mg}{1 \text{ mol } Mg(NO_3)_2} \times \frac{24 g Mg}{1 \text{ mol } Mg} = 24m g$$

$$\text{درصد جرمی منیزیم} = \frac{\text{جرم منیزیم}}{\text{جرم مخلوط}} \times 100 = \frac{24m g}{1.02m g + 148m g} \times 100 = \frac{24}{250} \times 100 = 9.6\%$$

با توجه به محاسبات انجام شده، درصد جرمی منیزیم در مخلوط اولیه برابر با 9.6% بوده است.

گروه آموزشی ماز

۸۲- در محلولی از منیزیم کلرید با چگالی $1.2 g \cdot mL^{-1}$ ، تفاوت غلظت ppm یون‌های منیزیم و کلرید برابر با 2350 واحد است. هر لیتر از این محلول آبی، با چند میلی‌لیتر محلول 0.2 مولار نقره پرکلرات به طور کامل واکنش می‌دهد؟ (فرمول شیمیایی یون پرکلرات به صورت ClO_4^- است.)

$$(Ag = 108 \text{ و } Cl = 35.5 \text{ و } Mg = 24 \text{ و } O = 16 \text{ و } N = 14 : g \cdot mol^{-1})$$

۴۰۰ (۴)

۲۰۰ (۳)

۶۰۰ (۲)

۳۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مساله - ۱۰۰۳)



نمونه‌ای از محلول منیزیم کلرید ($MgCl_2$) به حجم ۱ لیتر را در نظر می‌گیریم که x مول منیزیم کلرید در آن حل شده است. جرم این محلول برابر با ۱۲۰۰ گرم بوده و شمار مول یون‌های منیزیم و کلرید موجود در این محلول نیز به ترتیب برابر با x و $2x$ مول می‌شود. بر این اساس، غلظت ppm هریک از یون‌ها را محاسبه می‌کنیم.

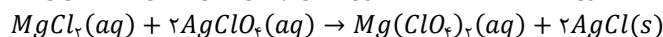
$$\text{یون منیزیم: } \begin{cases} ? g Mg^{2+} = x \text{ mol } Mg^{2+} \times \frac{24 g Mg^{2+}}{1 \text{ mol } Mg^{2+}} = 24x g \\ ppm = \frac{\text{جرم یون منیزیم}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{24x}{1200} \times 10^6 = 2x \times 10^4 \end{cases}$$

$$\text{یون کلرید: } \begin{cases} ? g Cl^- = 2x \text{ mol } Cl^- \times \frac{35.5 g Cl^-}{1 \text{ mol } Cl^-} = 71x g \\ ppm = \frac{\text{جرم یون کلرید}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 = \frac{71x}{1200} \times 10^6 = \frac{71x \times 10^4}{12} \end{cases}$$

تفاوت غلظت ppm یون‌های داده شده برابر با 2350 واحد است. بر این اساس، داریم:

$$\text{غلظت یون منیزیم} - \text{غلظت یون کلرید} = \left(\frac{71x \times 10^4}{12} \right) - (2x \times 10^4) = \frac{47x \times 10^4}{12} = 2350 \text{ ppm} \Rightarrow x = 0.06 \text{ mol}$$

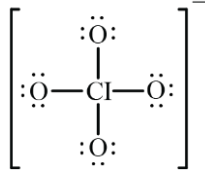
با توجه به مقدار x ، می‌توان گفت در هر لیتر از محلول اولیه 0.06 مول منیزیم کلرید وجود داشته است، پس غلظت مولی محلول اولیه برابر با 0.06 مول بر لیتر می‌شود. فرمول شیمیایی نقره پرکلرات به صورت $AgClO_4$ است. محلول منیزیم کلرید بر اساس معادله زیر با محلول نقره پرکلرات واکنش می‌دهد:



با توجه به معادله واکنش نوشته شده، حجم محلول نقره پرکلرات را محاسبه می‌کنیم:

$$? L = \frac{1 L \text{ محلول نقره پرکلرات}}{0.2 \text{ mol AgClO}_4} \times \frac{2 \text{ mol AgClO}_4}{1 \text{ mol MgCl}_2} \times \frac{0.6 \text{ mol MgCl}_2}{1 \text{ L محلول منیزیم کلرید}} = 0.6 L$$

بر این اساس، می‌توان گفت در فرایند مورد نظر مقدار ۰/۶ لیتر (معادل با ۶۰۰ میلی‌لیتر) محلول آبی نقره پرکلرات مصرف شده است. ساختار یون پرکلرات به صورت زیر است:



گروه آموزشی ماز

۸۳- درباره انحلال چند مورد از ترکیب‌های داده شده در آب، رابطه زیر برقرار است؟

(میانگین قدرت پیوند یونی در ترکیب داده شده و پیوند هیدروژنی در آب > نیروی جاذبه یون-دوقطبی در محلول)

آ: منیزیم هیدروکسید ب: آهن (II) کلرید پ: باریم کلرید

ت: مس (II) سولفات ث: آمونیم نیترات ج: پتاسیم نیترات

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی و حفظی - ۱۰۰۳)



برخی حل‌شونده‌ها در برخی حلال‌ها حل می‌شوند و محلول تشکیل می‌دهند، در حالی که برخی دیگر مخلوط ناهمگن می‌سازند. برای نمونه، افزودن استون به آب یا اندکی ید به هگزان، منجر به تشکیل محلول می‌شود، اما افزودن هگزان به آب، مخلوطی ناهمگن پدید می‌آورد. هنگامی که میانگین قدرت پیوند یونی در ترکیب داده شده و پیوند هیدروژنی در آب کمتر از نیروی جاذبه یون-دوقطبی در محلول باشد، ترکیب مورد نظر در آب حل می‌شود. به اصطلاح، چنین ترکیب‌هایی محلول در آب هستند. از بین ۶ ترکیب داده شده، موارد (ب)، (پ)، (ت)، (ث) و (ج) در آب حل می‌شوند. توجه داریم که مورد (آ) نادرست است زیرا منیزیم هیدروکسید در آب محلول نیست. این ترکیب در مراحل استخراج فلز منیزیم از آب دریا تولید می‌شود. بجز منیزیم هیدروکسید، کلسیم فسفات، نقره کلرید و باریم سولفات، از جمله نمک‌های نامحلول معرفی شده در کتاب درسی هستند.

در هر ماده خالص، بین ذرات سازنده نیروی بین مولکولی مناسب برقرار شده است. در این حالت، ذرات سازنده آن ماده در کنار هم قرار گرفته‌اند. پس از مخلوط کردن دو ماده، آن دو ماده به شرطی در یکدیگر حل می‌شوند که بین ذرات سازنده آن‌ها نیروی بین مولکولی مناسب برقرار شود. در غیر این صورت، دو ماده جدا از هم باقی مانده و در یکدیگر حل نمی‌شوند. در واقع، مراحل حل شدن دو ماده در یکدیگر را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱- شکستن پیوندهای موجود بین ذرات حل‌شونده

۲- شکستن پیوندهای موجود بین ذرات حلال

۳- پخش شدن ذرات حل‌شونده بین ذرات حلال و برقراری جاذبه مناسب بین ذرات

گروه آموزشی ماز

۸۴- چند مورد از عبارت‌های زیر در مورد مولکول NF_3 و اکسیدی از گوگرد با جرم مولی بیشتر، درست است؟

آ: نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در اکسید گوگرد، بیشتر از مولکول NF_3 است.

ب: هر دو مولکول گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر داشته و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.

پ: نیروی بین مولکولی غالب در بین مولکول‌های هر کدام از این ترکیب‌ها از نوع وان‌دروالسی است.

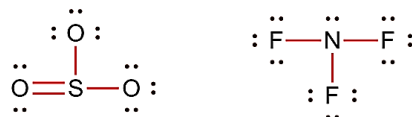
ت: در ۱/۴ لیتر از اکسید گوگرد در شرایط استاندارد، مقدار ۰/۵ مول جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)



ترکیب‌های SO_2 و SO_3 ، اکسیدهای گوگرد هستند. از بین این دو ترکیب، SO_3 جرم مولی بیشتری دارد. آرایش الکترون-نقطه‌ای هر دو مولکول را در زیر مشاهده می‌کنید:



بر این اساس، عبارت‌های (آ)، (پ) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: در مولکول SO_3 ، ۴ جفت الکترون پیوندی و ۸ جفت الکترون ناپیوندی وجود داشته و در مولکول NF_3 ، ۳ جفت الکترون پیوندی و ۱۰ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. نسبت شمار جفت الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی در مولکول SO_3 و NF_3 به ترتیب برابر $0/5$ و $0/3$ است؛ در نتیجه این نسبت در مولکول SO_3 بیشتر است.

ب: مولکول SO_3 بخاطر ساختار متقارن خود، ناقطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

برای تعیین قطبیت مولکول‌ها از قواعد زیر استفاده می‌کنیم:

✓ برای تعیین قطبیت مولکول‌های دو اتمی کافی است بدانیم اگر دو اتم مولکول یکسان باشد (مانند F_2 ، N_2 و ...)، ناقطبی و اگر یکسان نباشد (مانند CO ، HF و ...)، قطبی است.

✓ برای تعیین قطبیت مولکول‌های چند اتمی کافی است ساختار لوویس مولکول‌ها رسم شود. اگر اتم مرکزی جفت الکترون ناپیوندی داشته باشد (مانند SO_2 ، NH_3 و ...)، قطبی است. اگر اتم مرکزی جفت الکترون ناپیوندی نداشته باشد دو حالت زیر ایجاد می‌شود:

حالت اول) اگر اتم‌های جانبی یکسان باشند (مانند CH_4 ، SO_3 و ...)، ناقطبی است.

حالت دوم) اگر اتم‌های جانبی یکسان نباشند (مانند CH_3Cl ، CSO و ...)، قطبی است.

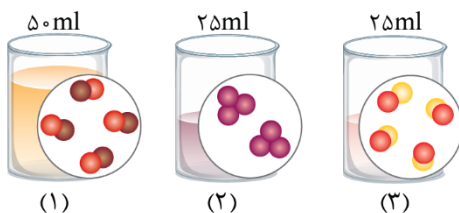
پ: نیروی بین مولکولی غالب در بین مولکول‌های هر کدام از این ترکیبات، از نوع واندروالس است؛ چون هیچ کدام از این مولکول‌ها اتم هیدروژن متصل به یکی از سه اتم O ، F و N را ندارند.

ت: در یک مول از مولکول‌های SO_3 ، مقدار ۸ مول جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. با این توصیف، می‌توان نوشت:

$$? \text{ mol} = \frac{1 \text{ mol } SO_3}{22/4 \text{ L } SO_3} \times \frac{8 \text{ mol جفت الکترون ناپیوندی}}{1 \text{ mol } SO_3} = 0/5 \text{ mol}$$

گروه آموزشی ماز

۸۵- با توجه به شکل‌های زیر، چند مورد از مطالب داده شده درست‌اند؟ (هر ذره حل‌شونده نشان داده شده، هم‌ارز با $0/03$ مول است.)



آ: غلظت مولی محلول (۱)، نصف غلظت مولی محلول (۳) خواهد بود.

ب: درصد جرمی حل‌شونده در محلول‌های (۱) و (۲) قطعاً با هم برابر است.

پ: با افزودن $0/08$ مول ماده حل‌شونده به محلول (۱)، غلظت آن به ۴ مولار می‌رسد.

ت: با مخلوط کردن محلول‌های (۲) و (۳) با یکدیگر، غلظت هر دو گونه نصف می‌شود.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی و مساله - ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

بجز عبارت (ب)، همه عبارت‌های داده شده درست‌اند.

بررسی موارد:

آ: غلظت مولی را در دو محلول حساب می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولی : محلول (۱)} = \frac{4 \times 0/03 \text{ mol}}{0/050 \text{ L}} = 2/4 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{غلظت مولی : محلول (۳)} = \frac{4 \times 0/03 \text{ mol}}{0/025 \text{ L}} = 4/8 \text{ mol.L}^{-1}$$

البته، توجه داریم که نیاز به انجام این محاسبات نبود. تعداد ذرات در دو محلول مساوی ولی حجم محلول (۳)، نصف حجم محلول (۱) است؛ بنابراین می‌توان فهمید که غلظت مولی محلول (۱)، نصف غلظت مولی محلول (۳) است.

ب: تعداد مول ذرات و حجم محلول در ظرف (۲)، نصف این مقادیر در ظرف (۱) است؛ بنابراین غلظت مولی دو محلول (۱) و (۲) با هم برابر است. اما از آنجا که این دو محلول از دو مولکول متفاوت تشکیل شده‌اند که به احتمال زیاد جرم مولی متفاوتی نیز دارند، نمی‌توان گفت که همواره درصد جرمی حل‌شونده در این دو محلول با هم برابر است.

پ: در محلول اولیه، ۰/۱۲ مول حل شونده وجود داشته است. با توجه به اطلاعات داده شده، غلظت مولی محلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$(۱) \quad \text{غلظت مولی نهایی محلول} = \frac{(۴ \times ۰/۰۳ + ۰/۰۸)}{۰/۰۵ L} = ۴ \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

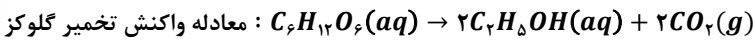
ت: با مخلوط کردن دو محلول (۲) و (۳) با یکدیگر، شمار ذرات سازنده هر یک از گونه‌ها ثابت باقی می‌ماند، اما حجم محلول ۲ برابر می‌شود؛ در نتیجه غلظت مولی هر دو گونه نصف می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۸۶- دستگاه گلوکومتر، مقدار قندخون شخصی را با عدد ۹۰ نشان می‌دهد. اگر مقدار گلوکز موجود در هر لیتر از خون این شخص وارد واکنش تخمیر شود،

چند میلی گرم اتانول طی این فرایند تولید شده و با استفاده از این مقدار اتانول، چند لیتر محلول $۱۰^{-۳} \times ۵$ مولار می‌توان تهیه کرد؟

$$(H = ۱ \text{ و } C = ۱۲ \text{ و } O = ۱۶ : g \cdot mol^{-1})$$



۲ - ۴۶۰ (۴)

۲ - ۲۳۰ (۳)

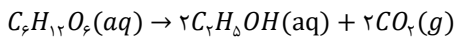
۱ - ۴۶۰ (۲)

۱ - ۲۳۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (آسان - مساله - ۱۰۰۳)



با توجه به داده‌های سوال، واکنش تخمیر گلوکز به صورت زیر است:



دستگاه گلوکومتر، مقدار میلی گرم گلوکز را در هر دسی لیتر خون نشان می‌دهد، بنابراین عدد ۹۰ نشان داده شده بر روی دستگاه بدین معنا است که در هر دسی لیتر یا به عبارتی هر ۱۰۰ میلی لیتر از خون این فرد، ۹۰ میلی گرم گلوکز وجود دارد. پس در هر لیتر از خون فرد مورد نظر، ۹۰۰ میلی گرم یا ۰/۹ گرم گلوکز وجود دارد. حال مقدار اتانول تولید شده طی این فرایند را بدست می‌آوریم:

$$? \text{ mg } C_2H_5OH = ۰/۹ \text{ g } C_6H_{12}O_6 \times \frac{۱ \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{۱۸۰ \text{ g } C_6H_{12}O_6} \times \frac{۲ \text{ mol } C_2H_5OH}{۱ \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{۴۶ \text{ g } C_2H_5OH}{۱ \text{ mol } C_2H_5OH} \times \frac{۱۰۰۰ \text{ mg } C_2H_5OH}{۱ \text{ g } C_2H_5OH} = ۴۶۰ \text{ mg}$$

پس طی این فرایند، مقدار ۴۶۰ میلی گرم اتانول تولید می‌شود. برای محاسبه تعداد مول اتانول تولید شده نیز می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$? \text{ mol } C_2H_5OH = ۰/۹ \text{ g } C_6H_{12}O_6 \times \frac{۱ \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{۱۸۰ \text{ g } C_6H_{12}O_6} \times \frac{۲ \text{ mol } C_2H_5OH}{۱ \text{ mol } C_6H_{12}O_6} = ۰/۰۱ \text{ mol}$$

در قدم آخر، حجم محلول ۰/۰۵ مولار اتانول که با استفاده از ۰/۰۱ مول از این ماده تهیه می‌شود را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ L محلول} = ۰/۰۱ \text{ mol } C_2H_5OH \times \frac{۱ \text{ L محلول}}{۰/۰۰۵ \text{ mol } C_2H_5OH} = ۲ \text{ L}$$

گروه آموزشی ماز

۸۷- کدام یک از عبارتهای داده شده نادرست است؟

- (۱) چون کربن دی‌اکسید از مولکول‌های ناقطبی تشکیل شده است، انحلال پذیری آن در مقایسه با گاز NO در آب کمتر است.
- (۲) بر اساس قانون هنری، شیب نمودار انحلال پذیری گاز اکسیژن در آب تندتر از شیب نمودار انحلال پذیری نیتروژن است.
- (۳) بیشتر مواد غذایی حاوی یون پتاسیم بوده و وجود این یون برای عملکرد مناسب دستگاه عصبی ضروری است.
- (۴) هگزان یک مایع بی‌رنگ بوده و در صورت افزودن آن به آب، نمونه هگزان روی سطح آب قرار می‌گیرد.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

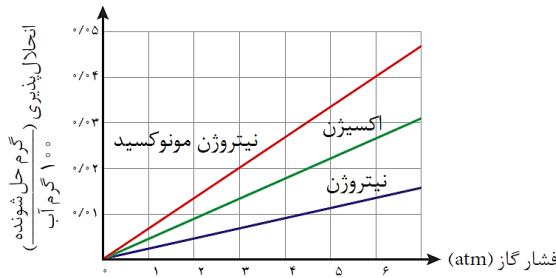


واکنش دادن گازهای مختلف با آب، منجر به افزایش مقدار انحلال پذیری آن‌ها در آب در مقایسه با سایر مواد گازی می‌شود. چون گاز کربن دی‌اکسید بر اساس معادله $CO_2(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2CO_3(aq)$ با آب واکنش داده و کربنیک اسید تولید می‌کند، انحلال پذیری این ترکیب در مقایسه با انحلال پذیری گاز NO در آب بیشتر می‌شود.



۲ طبق قانون هنری، انحلال پذیری گازهای مختلف در آب، با فشار این گازها رابطه مستقیم دارد. در واقع، اگر گاز X با آب واکنش ندهد، با n برابر شدن فشار این گاز، انحلال پذیری آن نیز در آب n برابر می‌شود. بر اساس این قانون، اگر در شرایط یکسان انحلال پذیری یک گاز از گاز دیگر در آب بیشتر باشد، تاثیر تغییر فشار بر انحلال پذیری این گاز نیز بیشتر می‌شود.

نمودار زیر، بیانی از قانون هنری را در رابطه با چند گاز مختلف نشان می‌دهد:



یکی از مهم‌ترین یون‌های موجود در الکترولیت‌های بدن، یون پتاسیم (K^+) است. نیاز روزانه بدن ما به یون پتاسیم، دو برابر یون سدیم است. از آنجا که بیشتر مواد غذایی حاوی یون پتاسیم هستند، کمبود این یون به ندرت در بدن احساس می‌شود. وجود یون پتاسیم برای تنظیم و عملکرد مناسب دستگاه عصبی بسیار ضروری است؛ به طوری که انتقال پیام‌های عصبی بدون وجود این یون، امکان‌پذیر نیست. در واقع، اختلال در حرکت این یون از خلال غشای سلول‌های عصبی، مانع از انتقال پیام‌های عصبی و گاهی در موارد شدید منجر به مرگ می‌شود.

هگزان با فرمول شیمیایی C_6H_{14} ، یک مایع بی‌رنگ بوده و بخاطر ناقطبی بودن، به عنوان حلال مواد ناقطبی و رقیق‌کننده رنگ کاربرد دارد. چون هگزان در مقایسه با آب چگالی کمتری دارد، در صورت افزودن مقداری از آن به آب، نمونه هگزان روی سطح آب قرار می‌گیرد. توجه داریم که علاوه بر هگزان، گشتاور دو قطبی اغلب هیدروکربن‌ها ناچیز و در حدود صفر است.

گروه آموزشی ماز

۸۸- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- آ: گشتاور دوقطبی مولکول‌های هیدروژن سولفید، نزدیک به دو برابر گشتاور دو قطبی مولکول‌های آب است.
 ب: بنزین، نوعی محلول غیرآبی به شمار رفته و ویژگی‌های فیزیکی و شیمیایی در سرتاسر آن کاملاً یکسان است.
 پ: بین نمونه‌های گازی از HCl و HF مایع، ترکیبی با ثابت یونش اسیدی بزرگ‌تر، دمای جوش بالاتری خواهد داشت.
 ت: واکنش‌های مربوط به گوارش غذا، کنترل دما و تنفس، از واکنش‌های بدن هستند که در محلول‌های آبی انجام می‌شوند.
- (۱) ب و ت (۲) آ و ت (۳) ب و پ (۴) آ و پ

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)

پاسخ تشریحی:

عبارتهای (ب) و (ت) درست هستند.

بررسی موارد:

آ: چون خاصیت نافلزی اکسیژن بیشتر از خاصیت نافلزی گوگرد است، گشتاور دو قطبی مولکول‌های آب، نزدیک به دو برابر گشتاور دو قطبی مولکول‌های هیدروژن سولفید (H_2S) می‌شود.

ذرات سازنده مواد قطبی در میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کنند اما شدت این جهت‌گیری در مواد مختلف، متفاوت از یکدیگر است. شدت جهت‌گیری مولکول‌های سازنده یک ماده در حضور میدان الکتریکی، مبنای اندازه‌گیری کمیتی به نام گشتاور دوقطبی (μ) است. گشتاور دوقطبی مواد مختلف، با یکای دبی (D) نشان داده می‌شود. طبیعی است که با افزایش میزان قطبیت مواد، مقدار گشتاور دوقطبی آن‌ها نیز افزایش پیدا می‌کند. برای مثال، چون خاصیت نافلزی اکسیژن بیشتر از خاصیت نافلزی گوگرد است، گشتاور دوقطبی ذرات آب و هیدروژن سولفید به ترتیب برابر با $1/85$ و $97/0$ دبی می‌شود.

ب: بنزین، همانند محلول پد در هگزان، نوعی محلول غیرآبی همگن به شمار می‌رود. در محلول‌های همگن، ویژگی‌های فیزیکی (مثل رنگ، دمای جوش و غلظت) و شیمیایی (مثل ترکیب شیمیایی) در سرتاسر محلول یکسان است. برخلاف محلول‌های همگن، در ساختار کلوئیدها (مثل رنگ‌های پوششی)، سوسپانسیون‌ها (مثل خاکشیر) و مخلوط‌های ناهمگن (مثل سالاد)، ویژگی‌های فیزیکی و شیمیایی در سرتاسر محلول یکسان نیست.

پ: پیوند هیدروژنی، قوی‌ترین نوع نیروی بین مولکولی به شمار می‌رود. چون در ساختار مولکولی هیدروژن فلوئورید، اتم فلوئور متصل به هیدروژن وجود دارد، بین ذرات سازنده این ماده پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود. این در حالی است که بین ذرات سازنده هیدروژن کلرید، پیوند هیدروژنی برقرار نمی‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت بین نمونه‌هایی از HCl و HF مایع، نمونه هیدروژن فلوئورید قدرت نیروهای بین مولکولی بیشتر و به دنبال آن، دمای جوش بالاتری خواهد داشت. توجه داریم که هیدروژن فلوئورید یک اسید ضعیف بوده و هیدروژن کلرید، یک اسید قوی به شمار می‌رود.

ت: اغلب محلول‌های موجود در بدن انسان، محلول‌های آبی هستند. محلول‌هایی که بیشتر واکنش‌های شیمیایی درون بدن از جمله گوارش غذا، کنترل دمای بدن، تنفس و جلوگیری از خشکی پوست در آن‌ها انجام می‌شود. با این توصیف بخش عمده جرم بدن را آب تشکیل می‌دهد. بیش از نیمی از این آب در درون یاخته‌ها و باقی آن در مایع‌های برون سلولی جریان دارد. این مایع‌ها مواد مغذی و مواد زائد را بین سلول‌ها و دستگاه گردش خون جابه‌جا می‌کند. آب موجود در بدن، با خوردن مواد غذایی، میوه‌ها و نوشیدنی‌ها جبران می‌شود.

۸۹- کدام یک از عبارات‌های داده شده درست است؟

- ۱) اغلب سنگ‌های کلیه از رسوب نمک‌های کلسیم‌داری که مقدار آن‌ها در ادرار بیش از انحلال‌پذیری آن‌هاست، ایجاد می‌شوند.
- ۲) در دمای 25°C ، درصد جرمی محلول سیرشده‌ای از سدیم نیترات در آب، کمتر از محلول سیرشده کلسیم سولفات است.
- ۳) گشتاور دوقطبی مولکول‌های سازنده گوگرد دی‌اکسید، همانند مولکول‌های کربن دی‌اکسید، بزرگ‌تر از صفر است.
- ۴) در ساختار هر ماده که از مولکول‌های ناقطبی ساخته شده باشد، اتم‌هایی با بار جزئی منفی و مثبت وجود ندارد.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۰۰۳)

پاسخ شریعی:

نزدیک به ۳ درصد از جمعیت کشورمان سنگ کلیه دارند. این بیماری افزون بر زمینه ژن‌شناختی (ژنتیکی) می‌تواند به دلیل تغذیه نامناسب، کم‌تحركی، مصرف بیش از حد نمک خوراکی، نوشیدن کم آب، مصرف پروتئین حیوانی و لبنیات و نیز اختلالات هورمونی ایجاد شود. اغلب سنگ‌های کلیه از رسوب برخی نمک‌های کلسیم دار در کلیه‌ها تشکیل می‌شوند. مقدار این نمک‌ها در ادرار افراد سالم از انحلال‌پذیری آن‌ها کمتر است، پس در ادرار این افراد رسوب تشکیل نمی‌شود. در نقطه مقابل، در افرادی که به سنگ کلیه مبتلا می‌شوند، مقدار این نمک‌ها در ادرار از انحلال‌پذیری آن‌ها بیشتر است و به همین خاطر، در ادرار این افراد سنگ کلیه بر اثر رسوب نمک‌ها ایجاد می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) در دمای 25°C ، سدیم نیترات (NaNO_3) یک نمک محلول در آب (مقدار انحلال‌پذیری 92 گرم در هر 100 گرم آب) بوده و کلسیم سولفات (CaSO_4) یک نمک کم‌محلول در آب (مقدار انحلال‌پذیری 0.23 گرم در هر 100 گرم آب) است. چون در این شرایط، انحلال‌پذیری سدیم نیترات بیشتر از کلسیم سولفات است، پس می‌توان گفت درصد جرمی محلول سیرشده‌ای از سدیم نیترات در آب، حتماً بیشتر از محلول سیرشده کلسیم سولفات است. توجه داریم، نمک‌هایی که انحلال‌پذیری آن‌ها بین 0.1 تا 1 گرم در 100 گرم آب است، در دسته نمک‌های کم‌محلول در آب قرار می‌گیرند. طبق مطالب ارائه شده در کتاب درسی، کلسیم سولفات یک نمک کم‌محلول در آب بوده و کلسیم فسفات، نقره کلرید، منیزیم هیدروکسید، آهن (II) هیدروکسید، آهن (III) هیدروکسید، منیزیم فسفات و باریوم سولفات، از جمله نمک‌های نامحلول در آب به شمار می‌روند.

۳) مولکول گوگرد دی‌اکسید، یک جفت الکترون ناپیوندی بر روی اتم مرکزی خود دارد و به همین خاطر، گشتاور دو قطبی این مولکول بزرگ‌تر از صفر می‌شود. در نقطه مقابل، مولکول کربن دی‌اکسید دارای یک ساختار متقارن بوده و گشتاور دوقطبی آن برابر با صفر می‌شود. ساختار لوویس این دو ترکیب مولکولی به صورت زیر است:

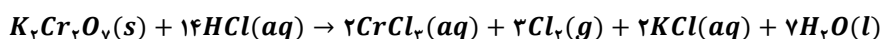


۴) در مولکول‌ها، صرف نظر از قطبی یا ناقطبی بودن آن‌ها، اتمی که تمایل بیشتری برای جذب الکترون داشته باشد، دارای بار جزئی منفی و اتمی که تمایل کمتری برای جذب الکترون داشته باشد، دارای بار جزئی مثبت می‌شود. به عنوان مثال، در ترکیب CF_4 که ناقطبی است، اتم‌های فلوئور دارای بار جزئی منفی و اتم‌های کربن، دارای بار جزئی مثبت هستند.

گروه آموزشی ماز

۹۰- انحلال‌پذیری ترکیب یونی $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ در دماهای 60°C و 90°C به ترتیب برابر 40g و 70g در 100g آب است. اگر دمای $212/5\text{g}$ از محلول سیرشده این ترکیب را از 90°C تا 60°C کاهش داده و رسوب حاصل از این فرایند مطابق معادله زیر با هیدروکلریک اسید واکنش دهد، چند لیتر گاز کلر با حجم مولی $29/4\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}$ آزاد خواهد شد؟

($\text{Cr} = 52$ و $\text{K} = 39$ و $\text{O} = 16$: $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)



۱۱/۲۵ (۴)

۲۲/۵ (۳)

۳۳/۷۵ (۲)

۴۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مساله - ۱۰۰۳)

پاسخ شریعی:

ابتدا با توجه به مقادیر انحلال‌پذیری این ترکیب یونی، جرم رسوب تشکیل شده را حساب می‌کنیم. اگر در دمای 90°C ، مقدار 70g از این ترکیب را در 100g آب خالص حل کنیم، یک محلول سیرشده به جرم 170g بدست می‌آید و اگر این محلول را تا دمای 60°C سرد کنیم، جرم محلول سیرشده به 140g رسیده و طی این فرایند، مقدار $30\text{g} = 140 - 170$ رسوب تشکیل می‌شود.

بنابراین داریم:

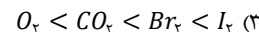
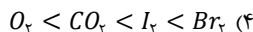
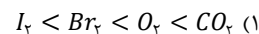
$$37/5 \text{ g رسوب} = \frac{30 \text{ g رسوب}}{\text{محلول سیرشده در دمای اولیه } 170 \text{ g}} \times \text{محلول سیرشده در دمای اولیه } 212/5 \text{ g رسوب} = ? \text{ g}$$

از بین فراورده‌های تولید شده در این واکنش، تنها کلر به حالت گاز است. طبق فرض سوال، هر مول گاز کلر در شرایط آزمایش ۲۹/۴ لیتر حجم اشغال می‌کند. با توجه به معادله واکنش داده شده، خواهیم داشت:

$$? \text{ L گاز} = 37/5 \text{ g } K_2Cr_2O_7 \times \frac{1 \text{ mol } K_2Cr_2O_7}{294 \text{ g } K_2Cr_2O_7} \times \frac{3 \text{ mol } Cl_2}{1 \text{ mol } K_2Cr_2O_7} \times \frac{29/4 \text{ L } Cl_2}{1 \text{ mol } Cl_2} = 11/25 \text{ L}$$

گروه آموزشی ماز

۹۱- کدام مقایسه در مورد نیروهای بین مولکولی، میان مولکول‌های CO_2 ، I_2 ، O_2 ، Br_2 درست است؟



پاسخ: گزینه ۳ (آسان - مفهومی - ۱۰۰۳)



در دمای اتاق، حالت فیزیکی ید به صورت جامد و برم به صورت مایع بوده و کربن دی‌اکسید و اکسیژن نیز به صورت گاز وجود دارند؛ پس می‌توان گفت نیروهای بین مولکولی در ید قوی‌تر از برم و در برم نیز قوی‌تر از دو گاز دیگر است. از جمله عوامل موثر بر نیروی بین مولکولی، جرم و حجم مولکول‌ها است؛ به این صورت که با افزایش جرم مولی و حجم مولکول‌ها، نیروی بین مولکولی نیز افزایش می‌یابد. بر این اساس، می‌توان گفت نیروی بین مولکولی در کربن دی‌اکسید از اکسیژن قوی‌تر است.

عوامل موثر بر نیروی بین مولکولی (نیروی وان‌دروالس) به شرح زیر هستند:

۱- قطبیت مولکول: هر چه قطبیت بیشتر ← نیروی بین مولکولی بیشتر ← نقطه جوش بیشتر

مثال: HCl قطبی و N_2 ناقطبی است، بنابراین نیروی بین مولکولی و نقطه جوش HCl بیشتر است.

۲- جرم و حجم مولکول: هر چه جرم و حجم بیشتر ← نیروی بین مولکولی بیشتر ← نقطه جوش بیشتر

مثال: I_2 جرم و حجم بیشتر نسبت به Br_2 دارد، بنابراین نیروی بین مولکولی قوی‌تر و نقطه جوش بالاتری دارد.

توجه داریم که بین مواد گازی با دمای جوش پایین‌تر از صفر، هر چه نقطه جوش یک گاز بالاتر باشد (به صفر نزدیک‌تر باشد)، آن ماده راحت‌تر به مایع تبدیل می‌شود.

به عبارتی هر چه نقطه جوش یک گاز بالاتر باشد، میعان آن در دماهای بالاتری انجام می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۹۲- چند مورد از عبارتهای زیر درست است؟

آ: در صورت قرار دادن میوه‌های خشک در آب خالص، مولکول‌های آب وارد سلول‌های میوه می‌شوند.

ب: طی انحلال ید در هگزان، ماهیت مولکول‌های حل‌شونده حفظ و محلولی بنفش رنگ ایجاد می‌شود.

پ: با افزایش درصد جرمی نمک موجود در آب دریا، انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در آن افزایش پیدا می‌کند.

ت: نیروی جاذبه یون-دوقطبی، باعث جدا شدن یون‌ها از بلور $NaCl$ و پوشیده شدن آن‌ها با ذرات آب می‌شود.

ث: استون با فرمول شیمیایی C_3H_6O ، حلال برخی از چربی‌ها بوده طی این فرایند، محلول‌های غیرآبی ایجاد می‌شود.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی - ۱۰۰۳)



عبارتهای (آ)، (ب)، (ت) و (ث) درست هستند.

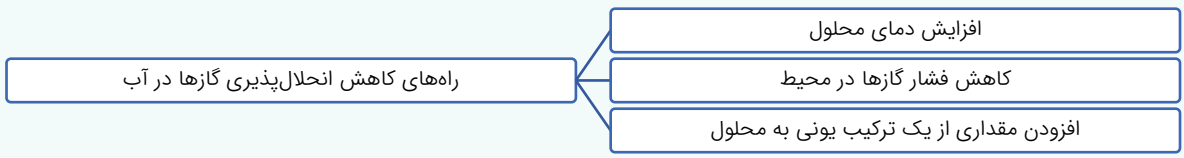
بررسی موارد:

آ: دیوارهٔ یاخته‌ها در گیاهان روزنه‌هایی بسیار ریزی دارد که ذره‌های سازنده برخی از مواد می‌توانند از آن گذر کنند؛ به گونه‌ای که این روزنه‌ها فقط اجازه گذر به برخی از ذره‌ها و مولکول‌های کوچک مانند آب و یون‌ها را می‌دهند و از گذر مولکول‌های درشت‌تر جلوگیری می‌کنند. این دیواره‌ها غشای نیمه تراوا نامیده می‌شوند. هنگامی که میوه‌های خشک مانند مویز درون آب قرار می‌گیرند، مولکول‌های آب به صورت خود به خود از محیط رقیق (آب موجود در اطراف مویز) با گذر از روزنه‌های دیواره سلولی به محیط غلیظ (درون سلول‌های مویز) می‌روند. در نتیجه چنین فرایندی، میوه آبدار و متورم می‌شود. گذرندگی یا اسمز، نامی است که به این فرایند داده‌اند. در این فرایند، برخی نمک‌ها و ویتامین‌ها نیز از بافت میوه خارج شده و به آب راه می‌یابد. در نقطه مقابل، اگر یک خیار را در آب شور قرار بدهیم، مولکول‌های آب از آن خارج شده و خیار در نهایت چروکیده می‌شود.

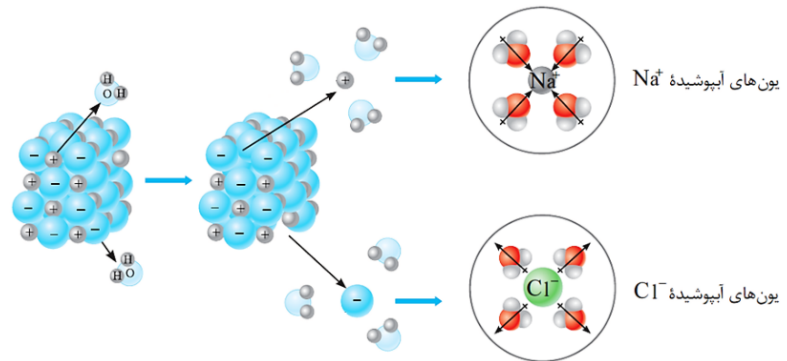
ب: انحلال ید در هگزان، نمونه‌ای از انحلال مولکولی است؛ پس می‌توان گفت طی این فرایند ماهیت مولکول‌های حل‌شونده حفظ می‌شود. در واقع با حل شدن ید در هگزان، ذرات حل‌شونده دچار تغییر نشده و با همان ساختار اولیه خود، بین مولکول‌های حلال قرار می‌گیرند. توجه داریم که محلول ید در هگزان، محلولی بنفش رنگ است.

پ: همانطور که می‌دانیم، بین یون‌های یک نمک حل شده در آب (مثلاً سدیم کلرید) و مولکول‌های آب، نیروی جاذبه قوی یون-دوقطبی برقرار می‌شود. از این رو با افزایش درصد جرمی نمک موجود در آب دریا و یا هر نمونه دیگری از آب، تمایل مولکول‌های قطبی آب به مولکول‌های ناقطبی اکسیژن کاهش یافته و انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در آب کاهش پیدا می‌کند.

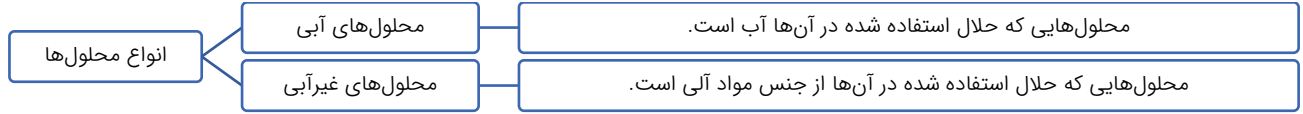
با انحلال نمک‌های مختلف در یک نمونه از آب خالص، ظرفیت آب برای حل کردن گازهای مختلف در آن کاهش پیدا می‌کند. دقیقاً به همین خاطر است که گاز اکسیژن در یک نمونه از آب دریا در مقایسه با یک نمونه‌ی خالص از آب، به مقدار کمتری حل می‌شود. به طور کلی، برای کاهش انحلال‌پذیری گازها در یک محلول، از روش‌های زیر می‌توان استفاده کرد:



ت: سدیم کلرید یک ترکیب یونی با بلورهای مکعبی است که در آن یون‌های سدیم و کلرید با آرایش منظم در سه بعد جای گرفته‌اند. هنگامی که مقداری از این ترکیب یونی جامد در آب وارد می‌شود، مولکول‌های قطبی آب از سرهای مخالف به یون‌های بیرونی بلور نزدیک شده و در نتیجه، نیروی جاذبه میان آن‌ها برقرار می‌شود. این نیروی جاذبه، نیروی یون-دوقطبی نام دارد. نیروی یون-دوقطبی، نیروی جاذبه‌ای است که باعث جدا شدن یون‌ها از شبکه شده تا با لایه‌ای از مولکول‌های آب، پوشیده شوند. یون‌های آبپوشیده تولید شده طی این فرایند، در سرتاسر محلول پراکنده خواهند شد. تصویر زیر، فرایند انحلال سدیم کلرید در آب را نشان می‌دهد:



توجه داریم که در این محلول، سر مثبت (اتم هیدروژن) از مولکول‌های آب در مجاورت با یون‌های کلرید (یون‌هایی که شعاع بزرگ‌تری دارند) قرار دارد. **ث:** آب فراوان‌ترین و رایج‌ترین حلال در طبیعت، صنعت و آزمایشگاه است، زیرا می‌تواند بسیاری از ترکیب‌های یونی و مواد مولکولی را در خود حل کند. در یک محلول، اگر از آب به عنوان حلال استفاده شود، یک محلول آبی به وجود می‌آید اما اگر از یک ماده آلی به عنوان حلال استفاده شود، یک محلول غیرآبی ایجاد می‌شود. در این رابطه، داریم:



جدول زیر، ویژگی‌های سه نوع حلال آلی را نشان می‌دهد:

نام حلال	فرمول شیمیایی	$\mu(D)$	کاربرد
اتانول	C_2H_5O	> 0	حلال در تهیه مواد دارویی، آرایشی و بهداشتی
استون	C_3H_6O	> 0	حلال برخی چربی‌ها، رنگ‌ها و لاک‌ها
هگزان	C_6H_{14}	≈ 0	حلال مواد ناقطبی و رقیق‌کننده رنگ (تینر)

با توجه به داده‌های موجود در جدول بالا، استون حلال برخی از چربی‌ها، رنگ‌ها و لاک‌ها است. در واقع، با ریختن استون بر روی این مواد، ترکیب‌های مورد نظر در استون حل می‌شوند. طی این فرایند، محلولی ایجاد می‌شود که استون حلال آن است، پس این محلول در دسته محلول‌های غیرآبی قرار می‌گیرد.

گروه آموزشی ماز

۹۳- برای تهیه محلولی به حجم ۱۵ لیتر و چگالی $1/2 g \cdot L^{-1}$ که غلظت یون کلسیم (Ca^{2+}) در آن برابر با $600 ppm$ باشد، چند میلی‌لیتر محلول $4/5$ مولار کلسیم نیترات را باید با مقدار کافی آب مخلوط کنیم؟ $(Ca = 40 g \cdot mol^{-1})$

۴۵ (۱) ۶۰ (۲) ۴۵۰ (۳) ۶۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مساله - ۱۰۰۳)



با توجه به اطلاعات داده شده در هر ۱۰^۶ گرم از محلول نهایی، ۶۰۰ گرم یون کلسیم وجود دارد. در قدم اول، شمار مول‌های یون کلسیم موجود در محلول ۱۵ لیتری را محاسبه می‌کنیم.

$$? \text{ mol } Ca^{2+} = 15 \text{ L محلول} \times \frac{1000 \text{ mL محلول}}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{1/2 \text{ g محلول}}{1 \text{ mL محلول}} \times \frac{600 \text{ g } Ca^{2+}}{10^6 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol } Ca^{2+}}{40 \text{ g } Ca^{2+}} = 0.27 \text{ mol}$$

در قدم بعد، حجم محلول ۴/۵ مولار کلسیم نیترات مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم.

$$? \text{ mL محلول} = 0.27 \text{ mol } Ca^{2+} \times \frac{1 \text{ mol } Ca(NO_3)_2}{1 \text{ mol } Ca^{2+}} \times \frac{1 \text{ L محلول}}{4/5 \text{ mol } Ca(NO_3)_2} \times \frac{1000 \text{ mL محلول}}{1 \text{ L محلول}} = 60 \text{ mL}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، می‌توان گفت برای انجام شدن این فرایند به ۶۰ میلی‌لیتر محلول کلسیم نیترات نیاز است.

گروه آموزشی ماز

۹۴- انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در دمای ۲۵°C و فشار ۹ اتمسفر برابر با ۰/۰۴ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. اگر فشار گاز اکسیژن بر روی یک محلول سیر شده ۹۰ کیلوگرمی از این گاز را از ۶ atm به ۳ atm برسانیم، با استفاده از گاز اکسیژن آزاد شده از محلول، چند گرم گاز متان را می‌توانیم به طور کامل

بسوزانیم؟ ($g \cdot mol^{-1}$: $H = 1$ و $C = 12$ و $O = 16$)

۳ (۱) ۶ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴)

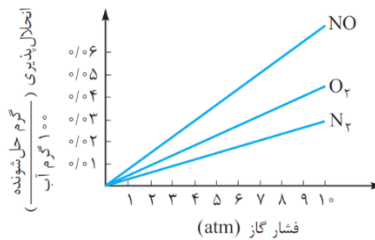
پاسخ: گزینه ۱ (سخت - مساله - ۱۰۰۳)



بر اساس قانون هنری، به شرط ثابت بودن دمای محلول، مقدار انحلال‌پذیری یک گاز معین با فشار آن گاز رابطه مستقیم دارد. رابطه کلی قانون هنری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S = K_H \times P$$

در این رابطه، مولفه S مقدار انحلال‌پذیری گاز در ۱۰۰ گرم آب، P فشار گاز بر حسب اتمسفر (atm) و K_H ثابت هنری است که برای هر گاز در دمای معین، مقدار ویژه‌ای دارد. توجه داریم که رابطه انحلال‌پذیری بالا یک معادله خطی با شیب K_H و عرض از مبدأ صفر است. با توجه به رابطه قانون هنری، در دمای ثابت (که در آن مقدار K_H ثابت است)، با n برابر کردن فشار گاز (P)، انحلال‌پذیری گاز (S) در محلول مورد نظر نیز n برابر می‌شود. نمودار زیر، بیانی از این قانون برای سه گاز مختلف را نشان می‌دهد:



با توجه به مفهوم انحلال‌پذیری، در فشار ۹ اتمسفر در هر ۱۰۰ گرم آب، ۰/۰۴ گرم گاز اکسیژن حل شده و محلولی به جرم ۱۰۰/۰۴ گرم بدست می‌آید. ابتدا تعیین می‌کنیم که در ۹۰ کیلوگرم محلول سیر شده از این گاز در دمای ۲۵°C و فشار ۹ اتمسفر، چند گرم گاز اکسیژن وجود دارد. در این رابطه، داریم:

$$? \text{ g } O_2 = 90 \text{ kg محلول} \times \frac{1000 \text{ g محلول}}{1 \text{ kg محلول}} \times \frac{0.04 \text{ g } O_2}{100.04 \text{ g محلول}} \approx 36 \text{ g}$$

حال انحلال‌پذیری گاز اکسیژن را در دمای ۲۵°C و فشار ۳ اتمسفر به دست می‌آوریم. با توجه به قانون هنری، می‌توانیم بنویسیم:

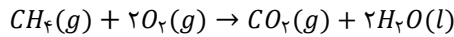
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow S_2 = S_1 \times \frac{P_2}{P_1} = 36 \times \frac{3}{9} = 12$$

اکنون به محاسبه انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در دمای ۲۵°C و فشار ۳ اتمسفر می‌پردازیم:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow S_2 = S_1 \times \frac{P_2}{P_1} = 36 \times \frac{3}{9} = 12$$

تفاوت انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در فشار ۳ اتمسفر و ۹ اتمسفر برابر با ۱۲ گرم در ۹۰ کیلوگرم محلول است، لذا می‌توان گفت اگر فشار گاز اکسیژن بر روی یک محلول سیر شده ۹۰ کیلوگرمی از این گاز را از ۶ atm به ۳ atm برسانیم، ۱۲ گرم گاز اکسیژن از محلول آزاد می‌شود. این گاز اکسیژن آزاد شده از محلول، در واکنش سوختن متان مصرف شده است.

معادله موازنه شده سوختن گاز متان در دمای اتاق به صورت زیر است:



بر اساس معادله موازنه شده سوختن گاز متان، مقداری از گاز متان را که در واکنش با ۱۲ گرم اکسیژن می‌سوزد، محاسبه می‌کنیم:

$$? g CH_4 = 12 g O_2 \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{32 g O_2} \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{2 \text{ mol } O_2} \times \frac{16 g CH_4}{1 \text{ mol } CH_4} = 3 g$$

با توجه به محاسبات انجام شده، با استفاده از گاز اکسیژن آزاد شده از محلول، ۳ گرم گاز متان را می‌توانیم به طور کامل بسوزانیم.

گروه آموزشی ماز

۹۵- کدام یک از عبارتهای داده شده نادرست است؟

- ۱) ماهی با عبور آب از درون آبشش خود، اکسیژن مولکولی محلول در آب را جذب و در فرایند سوخت‌وساز مصرف می‌کند.
- ۲) در دستگاه اسمز معکوس، دو محلول مجزا با غلظت مولی مواد حل‌شونده یکسان از لوله‌های خروجی، خارج می‌شود.
- ۳) دیواره یاخته‌های گیاهی فقط اجازه گذر به برخی از ذره‌ها و مولکول‌های کوچک مثل آب و یون‌ها را می‌دهد.
- ۴) دستگاه اسمز معکوس، همانند صافی کربن، ترکیب‌های آلی فرار را برخلاف میکروب‌ها از آب جدا می‌کند.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی و حفظی - ۱۰۰۳)

پاسخ سئواری

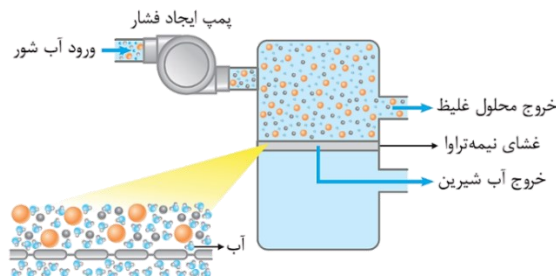
در دستگاه اسمز معکوس، یک محلول با غلظت مشخص از طریق یک ورودی و با استفاده از یک پمپ، وارد دستگاه می‌شود. در واقع، پمپ نیروی مورد نیاز برای انجام شدن فرایند اسمز معکوس را تامین می‌کند. با ورود آب تصفیه نشده به دستگاه، این محلول با استفاده از یک غشای نیمه‌تراوا به دو محلول مختلف تفکیک شده و با استفاده از خروجی‌های دستگاه خارج می‌شود. یکی از این محلول‌های خروجی آب تصفیه شده است و محلول دیگر نیز حاوی غلظت بالایی از مواد حل‌شونده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) همه جانوران از جمله ماهی‌ها برای زنده ماندن و انجام واکنش سوخت و ساز در بدن خود به گاز اکسیژن نیاز دارند. ماهی‌ها با عبور دادن آب از درون آبشش‌های خود، اکسیژن مولکولی حل شده در آب را جذب می‌کنند. با اینکه گاز اکسیژن به میزان کمی در آب حل می‌شود، اما همین مقدار کم برای زندگی آبزیان نقش حیاتی دارد. طبق داده‌های موجود در کتاب درسی، ادامه زندگی اغلب ماهی‌ها هنگامی امکان‌پذیر است که غلظت اکسیژن محلول در آب بیشتر از ۵ppm باشد. توجه داریم که در هوای گرم، انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در آب کاهش یافته و به همین خاطر، در چنین شرایطی ماهی‌ها به سطح آب می‌آیند تا بتوانند گاز اکسیژن مورد نیاز خود را از قسمت‌های سطحی تر آب که غلظت گاز اکسیژن بیشتری دارد، دریافت کنند.

۲) دیواره یاخته‌ها در گیاهان روزنه‌هایی بسیار ریز دارد که ذره‌های سازنده مواد می‌توانند از آن گذر کنند؛ به گونه‌ای که این روزنه‌ها فقط اجازه گذر به برخی از ذره‌ها و مولکول‌های کوچک مانند آب و یون‌ها را می‌دهند و از گذر مولکول‌های درشت‌تر جلوگیری می‌کنند. این دیواره‌ها غشای نیمه‌تراوا نامیده می‌شوند. بخاطر وجود همین غشای نیمه‌تراوا است که وقتی میوه‌های خشک مانند مویز درون آب قرار می‌گیرند، مولکول‌های آب، خود به خود از محیط رقیق با گذر از روزنه‌های دیواره سلولی به محیط غلیظ می‌روند. در نتیجه، میوه آبدار و متورم می‌شود.

۳) اسمز معکوس، با استفاده از یک دستگاه ویژه و یک پمپ ایجاد فشار انجام می‌شود. در فرایند اسمز معکوس، همانند روش صافی کربن، نافلزهای سمی، آلاینده‌ها، حشره‌کش‌ها، آفت‌کش‌ها و ترکیب‌های آلی فرار از آب جداسازی می‌شوند. توجه داریم که در این روش‌ها، میکروب‌ها از آب جدا نشده در آن باقی می‌مانند. تصویر زیر، نمایی از دستگاه اسمز معکوس را نشان می‌دهد:



برای جدا کردن انواع ذرات حل‌شونده موجود در یک نمونه از آب شور دریا، باید آب را تصفیه کرد. انواع روش‌های تصفیه آب، به شرح زیر هستند:

تقطیر: جداسازی نافلزها، فلزهای سمی، آلاینده‌ها، حشره‌کش‌ها و آفت‌کش‌ها
 اسمز معکوس: جداسازی نافلزها، فلزهای سمی، آلاینده‌ها، حشره‌کش‌ها و آفت‌کش‌ها و ترکیب‌های آلی فرار
 صافی کربن: مشابه اسمز معکوس، جداسازی نافلزها، فلزهای سمی، آلاینده‌ها، حشره‌کش‌ها، آفت‌کش‌ها و ترکیب‌های آلی فرار
 توجه داریم که در هر سه، روش میکروب‌ها در آب باقی می‌مانند؛ به همین دلیل قبل از مصرف به آب کلر می‌افزایند.

گروه آموزشی ماز

دسترسی رایگان به آرشیو آزمون های ماز در سال تحصیلی گذشته

همه دانش آموزان مازی که در سال تحصیلی ۱۴۰۲_۱۴۰۳

در آزمون ماز شرکت می کنند

برای دسترسی به آرشیو کامل سوالات و پاسخنامه آزمون های

ماز در سال گذشته، تنها کافیست سه مرحله زیر را سپری کنید

✓ اپلیکیشن دیجی ماز را از سایت دیجی ماز (digimaze.org)
دانلود کنید.

✓ با شماره تماسی که در سایت ماز حساب کاربری ایجاد کرده اید
در اپلیکیشن دیجی ماز وارد شوید. (نیاز به ثبت نام نیست)

✓ در بخش **(کتاب های من)** فایل آرشیو آزمون ها را دانلود و استفاده کنید.

دانلود نسخه اندروید اپلیکیشن دیجی ماز



دانلود نسخه iOS اپلیکیشن دیجی ماز



دانلود نسخه دسکتاپ اپلیکیشن دیجی ماز



<https://B2n.ir/k43352>

تذکر

برای دانش آموزانی که از این به بعد در آزمون ماز (یا هر محصول ماز که شامل آزمون ماز هست) ثبت نام کنند، حداکثر **ظرف مدت ۵ روز** این آرشیو در اپلیکیشن دیجی ماز فعال می شود.



دیجی ماز ، کتابخانه ی دیجیتال ماز

دیجی ماز به پلتفرم الکترونیکی و آموزشی که بهتون کمک میکنه در هر زمان و مکانی به کتاب های درسی و کمک درسیتون دسترسی داشته باشین و ازشون استفاده کنین .



دیجی ماز این بستر رو برات فراهم میکنه تا بتونی همه ی کتاب هات رو در یک اپلیکیشن کنار هم داشته باشی و همه جا با خودت ببری



تولید کمتر کاغذ به حفظ محیط زیستمون کمک میکنه



هزینه ی کتاب های الکترونیکی خیلی کمتر از کتاب های چاپ شده است



یک بار هر کتابی رو میخری ولی با هر چاپ جدید و آپدیت محتوای کتاب، بهش دسترسی کامل داری!



سری کتاب های تاپ گان ماز منتشر شد

کامل ترین سلاح هر کنکوری

تهیه ی کتاب تاپ گان ریاضی و فیزیک،

هم اکنون از طریق سایت و اپلیکیشن دیجی ماز

آشنایی بیشتر با امکانات اپلیکیشن و تهیه ی کتاب ها از طریق [سایت digimaze.org](http://digimaze.org)



[digimaze_org](https://www.instagram.com/digimaze_org)



[digimaze](https://www.telegram.com/digimaze)



digimaze.org

دانلود رایگان تمام آزمون‌های آزمایشی در کانال ما:

@Azmoonha_Azmayeshi

علوی

تمام پایه‌ها و رشته‌ها



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

گزینه دو



آزمون‌ها آزمایشی

T.me/Azmoonha_Azmayeshi



حلقه
سنجی

