

آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله ششم

پایه یازدهم

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴ تاریخ برگزاری: ۲۶/ بهمن/ ۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

بودجه بندی دروس

حسابان (۱)	آمار و احتمال	هندسه (۲)
فصل ۳ صفحه ۷۱ تا ۹۰	فصل ۲ (درس ۲، ۳ و ۴) صفحه ۴۴ تا ۶۸	فصل ۲ (درس ۱) صفحه ۳۱ تا ۴۹
فیزیک (۲)	شیمی (۲)	
فصل ۲ (از ابتدای نیروی محرکه الکتریکی و مدارها) صفحه ۶۱ تا ۸۲	فصل ۲ (از ابتدای تهیه غذای آبپز، تجربه تفاوت دما و گرما تا ابتدای جمع پذیری گرمای واکنش ها، قانون هس) صفحه ۵۸ تا ۷۴	

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
حسابان	۲۰	۱	۲۰	۳۰ دقیقه
هندسه	۱۰	۲۱	۳۰	۲۰ دقیقه
آمار و احتمال	۱۰	۳۱	۴۰	۲۰ دقیقه
فیزیک	۲۰	۴۱	۶۰	۳۰ دقیقه
شیمی	۲۰	۶۱	۸۰	۲۰ دقیقه
مجموع	۸۰ سؤال			۱۲۰ دقیقه

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفتر چه سوالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینیه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سوالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و...) در شبیه ترین حالت به دفتر چه سوالات کنکور سراسری طراحی می شود.





حسابان یازدهم

۱- چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تابع $f(x) = 3 - 2^x$ همواره صحیح است؟

الف) با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می‌یابند.

ب) برد تابع برابر با بازه $[3, +\infty)$ است.

پ) نمودار تابع از ناحیه چهارم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

ت) نمودار تابع با نمودار تابع $g(x) = \sqrt{x-4}$ هیچ نقطه تلاقی‌ای ندارد.

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۲- کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

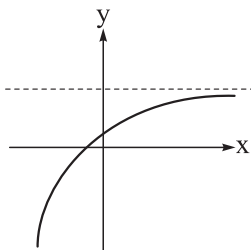
$$y = 3^x + 3^{-x+1} \quad (۴)$$

$$y = 4^{x^2} \quad (۳)$$

$$y = 2^{|x|} \quad (۲)$$

$$y = |3^{x-1}| \quad (۱)$$

۳- اگر نمودار تابع $f(x) = a - a^{-x}$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = a^x + a$ از کدام نواحی محورهای مختصات می‌گذرد؟



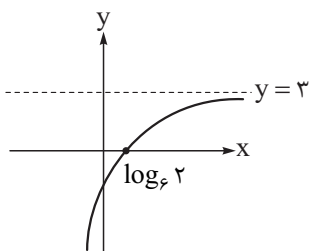
(۱) فقط اول و سوم

(۲) فقط اول و دوم

(۳) فقط اول و دوم و سوم

(۴) تمام نواحی محورهای مختصات

۴- اگر نمودار تابع $f(x) = a - 6^{b-x}$ به صورت زیر باشد، مقدار $f^{-1}(-33)$ کدام است؟



(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) -۳

(۴) ۲

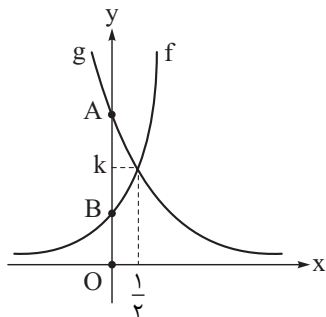
محل انجام محاسبات



۵- در تابع $f(x) = a(3)^{bx-1}$ ، اگر $f(0) = \frac{1}{e}$ و $f^{-1}(\frac{27}{4}) = 2$ باشد، مقدار $[f(1)]$ کدام است؟ []، علامت جزء صحیح است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- در شکل زیر نمودار توابع $f(x) = a.b^x$ و $g(x) = b.a^{-x}$ رسم شده‌اند. اگر $\frac{AB}{OB} = 3$ باشد، مقدار k کدام است؟



(۱) $2\sqrt{2}$

(۲) ۴

(۳) $4\sqrt{2}$

(۴) ۲

۷- حاصل ضرب جواب‌های معادله $8^{|x|} + 2^{5-3|x|} = 12$ کدام است؟

(۴) $\frac{81}{64}$

(۳) $\frac{64}{81}$

(۲) $\frac{4}{9}$

(۱) $\frac{9}{16}$

۸- برد تابع $f(x) = 3^{\sqrt{4-|x|}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۱۰

(۲) ۸

(۱) ۹

۹- اگر برد تابع $f(x) = 2^{2x} - 2^{x+1} + 3$ به صورت $(a, +\infty)$ باشد، حاصل $\log_a(7a + 2)$ کدام است؟

(۴) ۴

(۳) -۴

(۲) -۲

(۱) ۲

۱۰- اگر $\log_x 3 = 4$ و $\log_y 3 = 2$ باشد، حاصل $\log_3 xy$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{2}{3}$

۱۱- اگر $\log_5 3 = x$ و $\log_5 9 = y$ باشد، مقدار x کدام است؟

(۴) $\frac{y}{4}$

(۳) $4y$

(۲) $\frac{y}{2}$

(۱) $2y$

۱۲- حاصل عبارت $\frac{\log_{243} 27}{\log_{49} 9}$ چند برابر $\log_{25} 5 / 25 \times \log_8 8 / 2$ است؟

(۴) $-\frac{2}{9}$

(۳) $-\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{2}{9}$

محل انجام محاسبات



۱۳- حاصل عبارت $\frac{2}{\log_3 36} + \frac{1}{\log_4 36}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۴- اگر $\frac{\log_3 x}{\log_5 2} = 2 \log_3 5$ باشد، مقدار x کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۵- حاصل عبارت $z^{\log \frac{x}{y}} \cdot y^{\log \frac{z}{x}} \cdot x^{\log \frac{y}{z}}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{2}$

۱۶- مقدار x از معادله $\log_1 (\log_4 (2x+1)) = \frac{0}{3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۱۷- اگر $\log_2 (\log_x 3) = 4$ باشد، آن گاه $\log_4 (\log_3 x)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) $-\frac{3}{16}$ (۴) $2 \log_3 6$

۱۸- اگر $16^{\log_2 \sqrt{x+1}} = x^3 + x^2 + 2x - 7$ باشد، مقدار x^3 کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۱۴

۱۹- معادله $\sqrt{1+x^{\log 3} + 3^{\log x} + x^{\log 9}} = 27^{\log x} - 23$ دارد

(۱) ریشه ندارد

(۲) دو ریشه مختلف علامت دارد

(۳) یک ریشه مثبت دارد

(۴) یک ریشه منفی دارد

۲۰- نمودار دو تابع $f(x) = 2^{2x+b} - 3$ و $g(x) = \log_2 \sqrt{2x+k}$ نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند. حاصل $k - b$

کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

محل انجام محاسبات

هندسه یازدهم

۲۱- کدام یک از تبدیل‌های زیر، هیچ‌گاه نمی‌تواند یک تبدیل همانی باشد؟

- (۱) بازتاب (۲) انتقال (۳) دوران (۴) تجانس

۲۲- تحت تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{5}{4}$ ، نقطه A بر نقطه B تصویر می‌شود. هم‌چنین تحت تجانس به مرکز A و نسبت $(-\frac{3}{4})$ ، نقطه B بر نقطه C تصویر می‌گردد. طول پاره خط OB چند برابر طول پاره خط OC است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۲۳- در یک تجانس، نقطه $A'(-1, 5)$ ، مجانس نقطه $A(-1, -1)$ و نقطه $B'(-5, -4)$ ، مجانس نقطه $B(1, -4)$ است. نسبت تجانس کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) -3 (۴) ۳

۲۴- مجانس یک مثلث متساوی‌الاضلاع را نسبت به محل هم‌رسی میانه‌هایش و با نسبت (-1) رسم می‌کنیم. مساحت ناحیه محصور بین دو شکل، چه کسری از مساحت مثلث اولیه است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۵- مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ مفروض است. بزرگ‌ترین ضلع مثلث را با کوتاه‌ترین بردار ممکن انتقال می‌دهیم، به طوری که خط حاصل از نقطه هم‌رسی میانه‌های مثلث می‌گذرد. طول بردار انتقال کدام است؟

- (۱) $1/8$ (۲) $1/6$ (۳) $1/5$ (۴) $1/2$

۲۶- دو دایره به شعاع‌های ۲ و $\frac{1}{4}$ و طول خط‌المركزین $\frac{1}{4}$ مجانس یکدیگرند. مرکز تجانس مستقیم دو دایره، قطر دایره بزرگ‌تر را با چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۷- دایره $C(O, 3)$ و نقطه M در یک صفحه قرار دارند و $OM = 6$ است. دایره C را حول نقطه M به اندازه 120° دوران می‌دهیم تا دایره C' پدید آید. طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{6}$ (۳) $6\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{6}$

محل انجام محاسبات



۲۸- در لوزی ABCD، نقاط A و B به ترتیب نقاط ثابت تبدیل در بازتاب نسبت به محورهای y و x هستند. اگر عرض نقطه A برابر ۳، طول نقطه B برابر ۴ و مختصات نقطه C به صورت $(1, m)$ باشد ($m > 0$)، فاصله تصویر نقطه B تحت بازتاب نسبت به قطر AC، از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\sqrt{34}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{58}$ (۴) ۱۰

۲۹- دو خط d و D در نقطه A متقاطع اند و بایکدیگر زاویه 60° می سازند و خط Δ در نقطه A بر d عمود است. اگر M نقطه ای روی Δ به فاصله ۳ واحد از A، M' بازتاب M نسبت به D و M'' بازتاب M' نسبت به d باشد، طول پاره خط MM'' کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $4/5$ (۴) ۶

۳۰- نقاط A' و B' به ترتیب بازتاب نقاط A و B نسبت به خط d هستند و A و B در یک طرف خط d قرار دارند. اگر فاصله نقطه A از خط d و نقطه B هر کدام برابر $2\sqrt{3}$ واحد باشد و راستای AB با خط d، زاویه 30° بسازد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ کدام است؟ (A از B به محور بازتاب نزدیک تر است.)

- (۱) ۱۵ (۲) ۳۰ (۳) $15\sqrt{3}$ (۴) $30\sqrt{3}$



آمار و احتمال

۳۱- در فضای نمونه‌ای ۴ عضوی S، مقادیر احتمال پیشامدهای ساده، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل می‌دهند.

کم‌ترین مقدار احتمال یک پیشامد ۲ عضوی چه قدر است؟

- (۱) $\frac{1}{125}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{225}$ (۴) $\frac{4}{25}$

۳۲- روی شش وجه یک تاس، عددهای ۳، ۳، ۲، ۱، ۱ و ۱ نوشته شده است. این تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم

مجموع دو عدد روشده اول است، با چه احتمالی عدد روشده حداقل یکی از تاس‌ها برابر ۳ است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{19}$ (۳) $\frac{4}{19}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۳۳- اگر یک تیرانداز روحیه خوبی داشته باشد، تیرهایش با احتمال ۷۰ درصد به هدف می‌خورند، ولی اگر روحیه‌اش بد

باشد، تیرهایش با احتمال ۴۰ درصد به هدف می‌خورند. اگر تیر او به هدف بخورد، روحیه‌اش خوب می‌شود و اگر تیر او

به هدف نخورد روحیه‌اش بد می‌شود. او قرار است ۳ شلیک متوالی داشته باشد؛ اگر قبل از شلیک اول روحیه‌اش خوب

باشد، تقریباً با چه احتمالی فقط یکی از تیرهایش به هدف نمی‌خورد؟

- (۱) $\frac{1}{28}$ (۲) $\frac{2}{32}$ (۳) $\frac{3}{35}$ (۴) $\frac{4}{38}$

۳۴- سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم؛ اگر «رو» آمد دو سکه دیگر و اگر «پشت» آمد چهار سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. با چه

احتمالی همه سکه‌ها یکسان می‌آیند؟

- (۱) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{7}{16}$ (۳) $\frac{5}{32}$ (۴) $\frac{7}{32}$

۳۵- در سه ظرف A، B و C به ترتیب ۷، ۸ و ۱۰ مهره وجود دارد که به ترتیب ۲، ۳ و ۵ تا از آن‌ها سفیدند. اگر احتمال

انتخاب هر ظرف متناسب با تعداد مهره‌های سفید آن باشد، در انتخاب تصادفی یک مهره از یکی از این سه ظرف،

احتمال خروج مهره سفید کدام است؟

- (۱) $\frac{37}{112}$ (۲) $\frac{43}{112}$ (۳) $\frac{47}{112}$ (۴) $\frac{53}{112}$

۳۶- دانش‌آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. ۸۰ درصد از دانش‌آموزان مدرسه A و ۷۵ درصد از

دانش‌آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان مدرسه A، $\frac{3}{4}$ تعداد دانش‌آموزان مدرسه B باشد و

فردی به تصادف از قبول شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال، این فرد از مدرسه A است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{12}{35}$

محل انجام محاسبات



۳۷- دو کیسه داریم؛ در کیسه اول ۳ توپ آبی و ۵ توپ سفید و در کیسه دوم ۷ توپ آبی و ۳ توپ سفید وجود دارد. یک توپ به تصادف از کیسه اول داخل کیسه دوم می‌اندازیم و دو توپ به تصادف از کیسه دوم خارج می‌کنیم. اگر دو توپ خارج شده از کیسه دوم هم‌رنگ باشند، با چه احتمالی از کیسه اول توپ آبی داخل کیسه دوم انداخته‌ایم؟

$$\frac{26}{76} \text{ (۱)} \quad \frac{27}{76} \text{ (۲)} \quad \frac{29}{76} \text{ (۳)} \quad \frac{31}{76} \text{ (۴)}$$

۳۸- در آزمایش پرتاب دو تاس، سه پیشامد A، B و C به ترتیب به صورت «عدد تاس اول برابر ۴ باشد»، «مجموع اعداد رو شده دو تاس برابر ۹ باشد» و «عدد تاس اول بزرگ‌تر از عدد تاس دوم باشد» تعریف شده‌اند. کدام پیشامدها مستقل‌اند؟

$$A \text{ و } B \text{ (۱)} \quad A \text{ و } C \text{ (۲)}$$

$$B \text{ و } C \text{ (۳)} \quad \text{هیچ کدام (۴)}$$

۳۹- دو پیشامد A و B هم‌شانس و مستقل‌اند. اگر احتمال این که حداقل یکی از این دو پیشامد رخ دهد برابر $\frac{2}{3}$ باشد، با

چه احتمالی فقط پیشامد A رخ می‌دهد؟

$$\frac{\sqrt{3}+1}{3} \text{ (۱)} \quad \frac{\sqrt{3}-1}{3} \text{ (۲)}$$

$$2-\sqrt{3} \text{ (۳)} \quad \sqrt{3}-1 \text{ (۴)}$$

۴۰- نه کارت با شماره‌های ۱ تا ۹ در کیسه‌ای قرار دارند. سه کارت به طور تصادفی، پی‌درپی و بدون جای‌گذاری از کیسه

خارج می‌کنیم. با چه احتمالی کارت اول مضرب ۳، کارت دوم زوج و کارت سوم عددی اول است؟

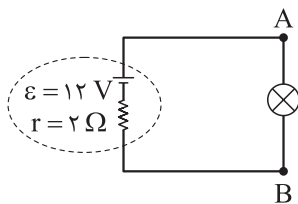
$$\frac{31}{504} \text{ (۱)} \quad \frac{37}{504} \text{ (۲)}$$

$$\frac{41}{504} \text{ (۳)} \quad \frac{43}{504} \text{ (۴)}$$



فیزیک یازدهم

۴۱- در مدار شکل زیر، مقاومت الکتریکی لامپ برابر 4Ω است. در هر دقیقه چند الکترون و در چه جهتی از لامپ عبور می‌کند؟ ($e = 1.6 \times 10^{-19} C$)



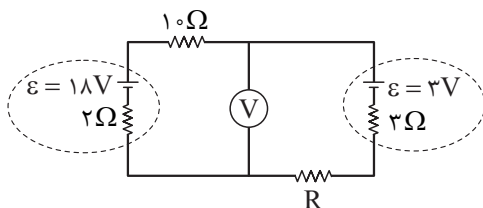
(۱) $7/5 \times 10^{20}$ از A به B

(۲) $7/5 \times 10^{20}$ از B به A

(۳) $1/5 \times 10^{20}$ از A به B

(۴) $1/5 \times 10^{20}$ از B به A

۴۲- در مدار شکل زیر، ولت‌سنج آرمانی $9V$ را نشان می‌دهد. مقاومت R چند اهم است؟



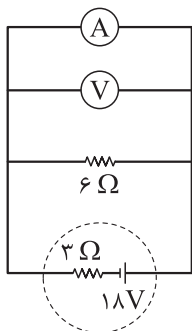
(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۴۳- در مدار شکل زیر، آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی به ترتیب از راست به چپ، چند آمپر و چند ولت را نشان می‌دهند؟



(۱) $12V, 2A$

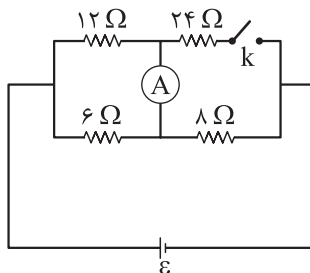
(۲) $2A$ ، صفر

(۳) $18V$ ، صفر

(۴) $6A$ ، صفر

۴۴- در مدار شکل زیر، اگر کلید را ببندیم، جریان الکتریکی عبوری از آمپرسنج آرمانی $7/0 A$ تغییر می‌کند. نیروی

محرکه مولد آرمانی چند ولت است؟



(۱) ۲۴

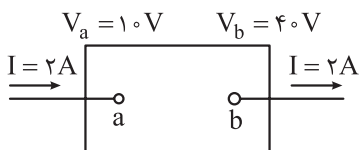
(۲) ۳۶

(۳) ۴۸

(۴) ۶۰

محل انجام محاسبات

۴۵- شکل زیر یک رسانای الکتریکی را نشان می‌دهد که در یک مدار الکتریکی قرار دارد. این رسانا در هر دقیقه چند کیلوژول انرژی الکتریکی و چگونه مبادله می‌کند؟

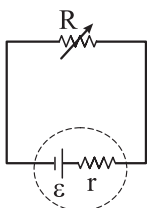


(۱) $3/6$ ، به آن وارد می‌شود.

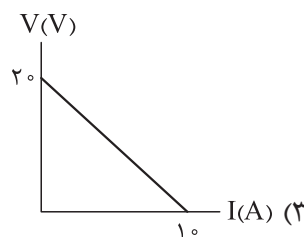
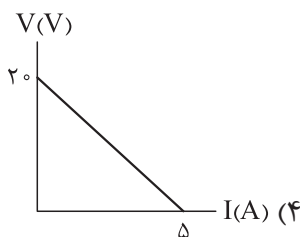
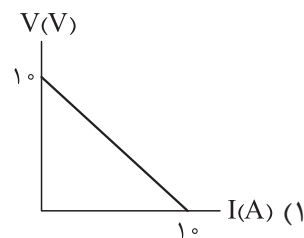
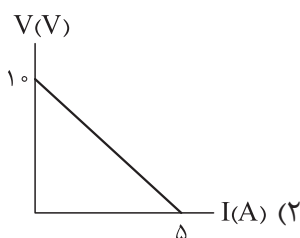
(۲) $3/6$ ، از آن خارج می‌شود.

(۳) $7/2$ ، به آن وارد می‌شود.

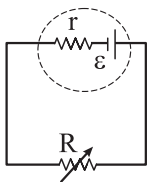
(۴) $7/2$ ، از آن خارج می‌شود.



۴۶- در شکل مقابل، یک مقاومت متغیر به یک باتری متصل است. توان خروجی باتری به ازای جریان عبوری 1 A برابر 8 W و به ازای جریان عبوری 2 A برابر 12 W است. نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر این باتری، بر حسب جریان عبوری از آن به صورت کدام شکل است؟



۴۷- در مدار شکل زیر، مقدار مقاومت الکتریکی رئوستا در حالت اول برابر $2\ \Omega$ و در حالت دوم برابر $32\ \Omega$ است. توان خروجی باتری در این دو حالت برابر می‌شود. اگر مقاومت الکتریکی رئوستا به تدریج از $10\ \Omega$ به $20\ \Omega$ برسد، توان خروجی باتری چگونه تغییر می‌کند؟



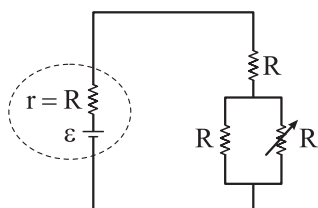
(۱) پیوسته افزایش می‌یابد.

(۲) پیوسته کاهش می‌یابد.

(۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

(۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

۴۸- در مدار شکل زیر، مقاومت رئوستا ابتدا روی مقدار R تنظیم شده است. اگر مقاومت رئوستا را دوبرابر کنیم، توان



خروجی باتری چند برابر می شود؟

$$\frac{15}{16} \quad (2)$$

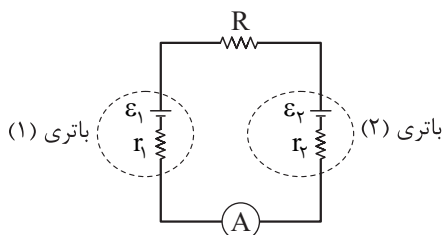
$$\frac{9}{10} \quad (1)$$

$$\frac{125}{128} \quad (4)$$

$$\frac{124}{125} \quad (3)$$

۴۹- در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می دهد برابر 2 A است. اگر توان خروجی باتری (۱) برابر 52 W

و توان ورودی باتری (۲) برابر 40 W باشد، مقاومت R چند اهم است؟



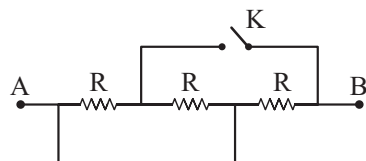
$$2 \quad (1)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$6 \quad (4)$$

۵۰- در شکل زیر، با بستن کلید K ، مقاومت معادل بین دو نقطه A و B چند برابر می شود؟



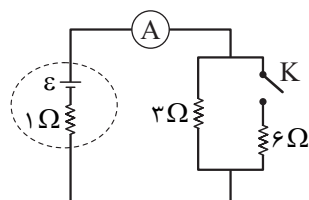
$$3 \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

۵۱- در مدار شکل زیر، با بستن کلید K ، عددی که آمپرسنج نشان می دهد 20% درصد افزایش می یابد. مقاومت الکتریکی



این آمپرسنج چند اهم است؟

$$1 \quad (2)$$

$$0/5 \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

$$1/5 \quad (3)$$

۵۲- دو لامپ رشته‌ای 100 W ، یک بخاری برقی 2000 W ، یک دستگاه پخش صوت 200 W و یک سشوار 2000 W به

پریزهای یک مدار سیم کشی خانگی 220 V مجهز به فیوز، وصل شده‌اند. اگر همه این مصرف کننده‌ها را با هم روشن کنیم،

چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) مقاومت معادل این مصرف کننده‌ها برابر $11\ \Omega$ است.

(ب) جریان کل گذرنده از شاخه اصلی سیم کشی این خانه برابر 30 A است.

(پ) اگر فیوز به کاررفته، فیوز 25 A باشد، جریان قطع خواهد شد.

$$3 \quad (4)$$

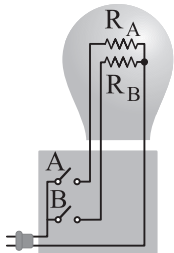
$$2 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

۵۳- یک لامپ سه راهه 200 V که دو رشته با مقاومت های الکتریکی $R_A = 400\ \Omega$ و $R_B = 200\ \Omega$ دارد، مطابق شکل برای کار در سه توان مختلف ساخته شده است. کم ترین و بیشترین توان مصرفی این لامپ به ترتیب چند وات است؟



(۱) ۲۰۰، ۱۰۰

(۲) ۳۰۰، ۱۰۰

(۳) ۱۰۰، ۵۰

(۴) ۱۵۰، ۵۰

۵۴- n لامپ مشابه را در حالت اول به طور متوالی و در حالت دوم به طور موازی به یکدیگر بسته و مجموعه آنها را در هر دو حالت به ولتاژ معین V وصل می کنیم. اگر مجموع توان مصرف شده لامپ ها در حالت دوم، ۱۶ برابر مجموع توان مصرف شده آنها در حالت اول باشد، n کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۲

۵۵- وقتی دو سر یک بخاری برقی را به اختلاف پتانسیل 220 V وصل می کنیم، جریان 12 A از آن می گذرد. اگر این بخاری به مدت ۴ ساعت در روز کار کند و قیمت برق مصرفی به ازای هر کیلووات ساعت ۵۰ تومان باشد، هزینه یک ماه (۳۰ روز) مصرف برق این بخاری چند تومان است؟

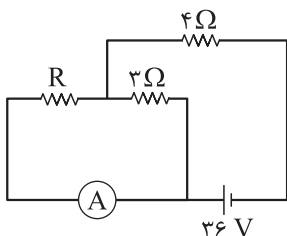
(۴) ۱۵۸۴۰

(۳) ۱۵۸۴۰۰

(۲) ۱۴۶۴۰

(۱) ۱۴۶۴۰۰

۵۶- در مدار شکل زیر، اگر مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می دهد، 2 A باشد، مقاومت R چند اهم است؟



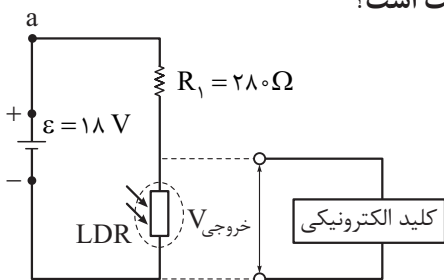
(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۶

(۴) ۱۲

۵۷- در مدار شکل زیر، با تاریک تر شدن محیط و رسیدن مقاومت الکتریکی LDR به $200\ \Omega$ ، کلید الکترونیکی فعال می شود. کمینه ولتاژ مورد نیاز برای فعال شدن این کلید الکترونیکی، چند ولت است؟



(۱) ۲ / ۵

(۲) ۵

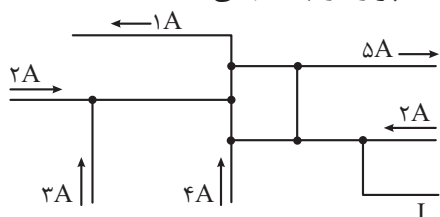
(۳) ۶

(۴) ۷ / ۵

محل انجام محاسبات



۵۸- شکل زیر، بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد، جریان الکتریکی I ، چند آمپر و در چه جهتی است؟



(۱) ۶، ←

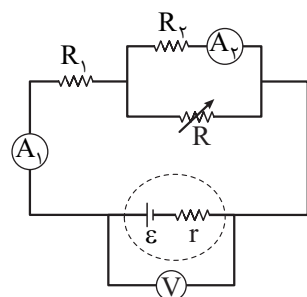
(۲) ۶، →

(۳) ۵، →

(۴) ۵، ←

۵۹- در مدار شکل زیر، مقاومت رئوستا (R) را افزایش می‌دهیم. کدامیک از عبارتهای زیر دربارهٔ مقداری که

آمپرسنج‌های آرمانی A_1 ، A_2 و ولتسنج آرمانی V نشان می‌دهند، درست است؟



الف) مقداری که آمپرسنج A_1 نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

ب) مقداری که آمپرسنج A_2 نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

پ) مقداری که ولتسنج V نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

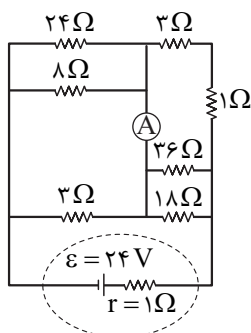
(۱) الف و ب

(۲) ب و پ

(۳) الف و پ

(۴) الف، ب و پ

۶۰- در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر است؟



(۱) ۱

(۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{5}{3}$

(۴) ۲



شیمی یازدهم

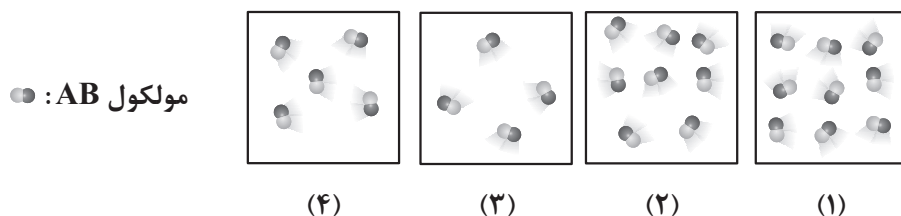
۶۱- کدام یک از انواع انرژی، در تغییر محتوای انرژی مواد شرکت کننده در یک واکنش شیمیایی در دمای ثابت، نقش اساسی ایفا می کند و چه رابطهای بین پایداری مواد با انرژی آنها وجود دارد؟

- (۱) شیمیایی - معکوس
(۲) گرمایی - مستقیم
(۳) پتانسیل - مستقیم
(۴) گرمایی - معکوس

۶۲- کدام گزینه از نظر درستی یا نادرستی، با سایر گزینهها متفاوت است؟

- (۱) فرایند همدماشدن شیر 6°C با بدن برخلاف همدماشدن بستنی 0°C با بدن، با کاهش سطح انرژی همراه است.
(۲) گرمای یک ماده را با نماد Q نشان می دهند و یکای اندازه گیری آن در SI، ژول است.
(۳) از دیدگاه شیمیایی در ساختار مولکولهای روغن برخلاف چربی، پیوندهای دوگانه دیده می شود و واکنش پذیری روغن از چربی بیشتر است.
(۴) اگر تکه ای نان و سیب زمینی با سطح و جرم یکسان و دمای 75°C در محیط اتاقی با دمای 25°C قرار گیرد، سیب زمینی به دلیل ظرفیت گرمایی بیشتر، زودتر با محیط همدمای می شود.

۶۳- اگر در شکل های زیر، مقایسه دمای ظرف ها به صورت $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$ باشد، چند مورد از عبارت های داده شده درست اند؟



- الف) مقایسه مجموع انرژی جنبشی ذره های سازنده چهار ظرف به صورت: ظرف (۱) < ظرف (۲) < ظرف (۴) < ظرف (۳) است.
ب) بر اثر تماس دو ظرف (۱) و (۳) همانند دو ظرف (۲) و (۴) با یکدیگر، انرژی گرمایی ظرفی که تعداد ذرات کمتری دارد، کاهش می یابد.
پ) بر اثر تماس این چهار ظرف با یکدیگر، پس از مدتی، میانگین انرژی جنبشی ذره های سازنده چهار ظرف، برابر می شود.
ت) گرمای ویژه ذرات سازنده این چهار ظرف، برخلاف ظرفیت گرمایی آنها، با یکدیگر برابر هستند.

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

محل انجام محاسبات



۶۴- با توجه به جدول زیر، درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب کدام است؟

- ظرفیت گرمایی ۵ گرم آب با ظرفیت گرمایی ۱۷۵ گرم طلا برابر است.
- اگر به جرم یکسانی از این مواد گرمای یکسانی بدهیم، طلا و آب به ترتیب کم‌ترین و بیشترین تغییر دما را دارند.
- گرمای ویژه ۵ گرم نقره از گرمای ویژه ۱ گرم آلومینیم کم‌تر است.
- برای افزایش دمای دو گرم اتانول به میزان 1°C ، $4/8$ ژول گرما نیاز است.

ماده	آب	اتانول	آلومینیم	نقره	طلا
گرمای ویژه ($\text{J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$)	۴/۲	۲/۴	۰/۹	۰/۲۴	۰/۱۲

(۱) درست - درست - نادرست - نادرست

(۲) نادرست - نادرست - نادرست - درست

(۳) درست - نادرست - درست - درست

(۴) نادرست - درست - درست - نادرست

۶۵- اگر به مخلوطی به جرم ۲ گرم از آلومینیم و نقره، $22/8 \text{ J}$ گرما داده شود، دمای این مخلوط از 3°C به 5°C می‌رسد. درصد مولی آلومینیم در این مخلوط کدام است؟ (گرمای ویژه نقره و آلومینیم به ترتیب برابر $0/24 \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$ و $0/9 \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$ است.)

($\text{Al} = 27, \text{Ag} = 108 : \text{g.mol}^{-1}$)

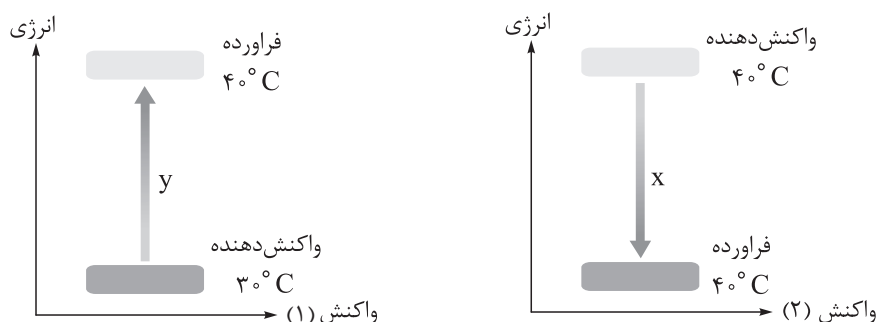
۸۰ (۴)

۶۰ (۳)

۴۰ (۲)

۲۰ (۱)

۶۶- با توجه به نمودارهای زیر، چند مورد از مطالب داده‌شده، نادرست است؟ (x و y را اعدادی مثبت در نظر بگیرید.)



الف) واکنش (۲)، گرماده و گرمای آزادشده به طور عمده به دلیل اختلاف پتانسیل واکنش دهنده و فراورده است.

ب) ΔH واکنش (۲) برابر x و فراورده پایدارتر از واکنش دهنده است.

پ) در واکنش (۱) همانند واکنش (۲)، انرژی جنبشی فراورده‌ها درست به اندازه انرژی جنبشی واکنش دهنده‌ها است.

ت) واکنش (۱) همانند هم‌دماشدن آبمیوه 1°C در بدن، فرایندی گرماگیر است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

محل انجام محاسبات



۶۷- اگر ۱۰ گرم گرافیت ۹۰ درصد خالص مطابق واکنش $C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 396 \text{ kJ}$ با اکسیژن کافی بسوزد، مقدار گرمای آزاد شده در واکنش چند کیلوژول خواهد بود و اگر به جای گرافیت از ۹ گرم الماس خالص استفاده کنیم، گرمای آزاد شده نسبت به حالت قبل چگونه تغییر می‌کند؟ ($C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$)

- (۱) ۲۹۷ - کمتر می‌شود. (۲) ۲۹۷ - بیشتر می‌شود.
(۳) ۳۳۰ - کمتر می‌شود. (۴) ۳۳۰ - بیشتر می‌شود.

۶۸- اگر A و B به ترتیب مربوط به حالت فیزیکی اتانول و آب در واکنش سوختن اتانول باشد، A و B به ترتیب از راست به چپ کدام باشند تا مقدار گرمای آزاد شده در واکنش بیشترین مقدار ممکن باشد؟

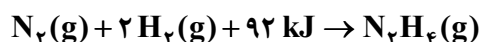
- (۱) جامد - گاز (۲) جامد - مایع (۳) گاز - مایع (۴) گاز - جامد

۶۹- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- تغییر آنتالپی هر واکنش را هم‌ارز با گرمایی می‌دانند که در حجم ثابت با محیط پیرامون دادوستد می‌کند.
- در فتوسنتز برخلاف اکسایش گلوکز، سامانه با جذب گرما، فراورده‌هایی با سطح انرژی بالاتر از واکنش‌دهنده‌ها تولید می‌کند.
- در تبدیل اکسیژن به اوزون، گرما آزاد و مولکول‌های پرانرژی‌تر اوزون تولید می‌شوند.
- در یخچال صحرایی که برای نگهداری مواد غذایی استفاده می‌شود، فرایند $H_2O(l) \rightarrow H_2O(g) + 44/1 \text{ kJ}$ انجام می‌شود.

- (۱) نادرست - درست - نادرست - درست (۲) نادرست - نادرست - درست - نادرست
(۳) نادرست - درست - نادرست - نادرست (۴) درست - درست - نادرست - نادرست

۷۰- اگر اختلاف آنتالپی پیوند نیتروژن - نیتروژن در مولکول‌های نیتروژن و هیدرازین، برابر ۷۸۲ کیلوژول و میانگین آنتالپی پیوند $N-H$ ، ۸/۰ آنتالپی پیوند $H-H$ باشد، با توجه به واکنش زیر، برای تجزیه ۱/۷ گرم گاز آمونیاک به اتم‌های گازی نیتروژن و هیدروژن، چند کیلوژول گرما نیاز است؟ ($N = 14, H = 1: \text{g.mol}^{-1}$)



- (۱) ۹۲ (۲) ۴۶ (۳) ۱۳۸ (۴) ۱۸۴

۷۱- در کدام گزینه، آنتالپی پیوند یا میانگین آنتالپی پیوند به درستی مقایسه نشده است؟

- (۱) کربن - کربن (سیکلوهگزان) > کربن - کربن (اتیلن)
(۲) کربن - اکسیژن (بنزآلدهید) < کربن - اکسیژن (اتانول)
(۳) کربن - نیتروژن (هیدروژن سیانید) < نیتروژن - هیدروژن (هیدرازین)
(۴) کربن - اکسیژن (کربن مونواکسید) > کربن - اکسیژن (۲- هپتانون)

محل انجام محاسبات



۷۲- کدام دو ترکیب ایزومر یکدیگر هستند و کدام ترکیب، دارای گروه عاملی کتوننی است؟



(۱) «پ» و «ت» - «الف»

(۲) «الف» و «ب» - «الف»

(۳) «پ» و «ت» - «ب»

(۴) «الف» و «ب» - «ب»

۷۳- کدام گزینه درست است؟

(۱) گروه عاملی موجود در ترکیب ، هیدروکسید نام داشته و هر مولکول از این ترکیب برای سیر شدن به ۲ مولکول هیدروژن نیاز دارد.

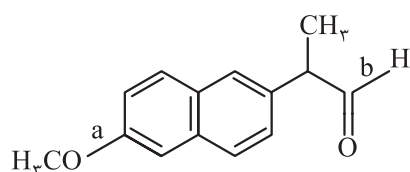
(۲) ساده‌ترین عضو خانواده کتون‌ها برخلاف آلدهیدها، سه اتم کربن داشته و فرمول مولکولی آن C_3H_6O است.

(۳) اگر در ترکیب ، همه گروه‌های متیل با هیدروژن جایگزین شوند، گروه عاملی موجود در ترکیب، برخلاف فرمول مولکولی تغییر نمی‌کند.

(۴) خواص فیزیکی و شیمیایی برخلاف سطح انرژی دو ترکیب زیر، یکسان است.



۷۴- چند مورد از موارد زیر درباره ترکیبی با ساختار مقابل، درست است؟



- اگر به جای هیدروژن در پیوند b، اتم کربن قرار دهیم، گروه عاملی مشابه گروه عاملی موجود در میخک ایجاد می‌شود.
- در حالت گازی برای شکسته شدن پیوند a نسبت به پیوند b در شرایط یکسان، انرژی بیشتری لازم است.
- ترکیب، فاقد گروه عاملی موجود در رازیانه بوده و دارای گروه‌های عاملی کربونیل است.
- نسبت شمار پیوندهای اشتراکی به شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در این ترکیب، ۵ / ۴ برابر شمار گروه‌های متیل است.

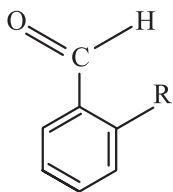
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

محل انجام محاسبات



۷۵- با توجه به ساختار مقابل، کدام گزینه درست است؟ (R یک گروه فرضی است.)

- (۱) اگر گروه R را با اتم هیدروژن جایگزین کنیم، ترکیب آلی حاصل، ایزومر بنزآلدهید است.
 (۲) اگر R، گروه هیدروکربنی و در ساختار ترکیب در مجموع ۸ اتم کربن وجود داشته باشد، این ترکیب، ایزومر ۲-اوکتانول خواهد بود.

- (۳) اگر این ترکیب با ترکیبی به فرمول $C_{12}H_{14}O_2$ ایزومر باشد، در گروه R به یقین گروه عاملی کربونیل وجود دارد.
 (۴) در صورت وجود یک گروه عاملی اتری در زنجیر سیرشده R، اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن R با بقیه ساختار، تابعی از تعداد اتم‌های کربن در گروه R است.

۷۶- با توجه به جدول زیر، مقدار آنتالپی واکنش سوختن کامل ۱- بوتن چند کیلوژول بر مول و ارزش سوختی آن

برحسب کیلوژول بر گرم کدام عدد می‌تواند باشد؟ ($H = 1, C = 12 : g \cdot mol^{-1}$)

ماده آلی	آنتالپی سوختن ($kJ \cdot mol^{-1}$)
$C_2H_2(g)$	-۱۳۰۰
$C_2H_4(g)$	-۱۵۶۰
$C_2H_6(g)$	-۱۴۱۰
$C_3H_6(g)$	-۲۰۵۸

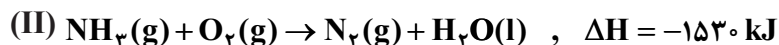
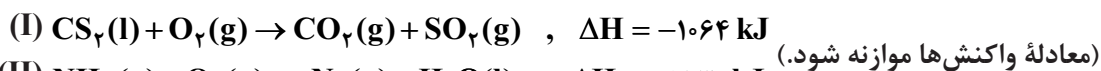
$$(1) 48/3 - 2706$$

$$(2) 46/5 - 2607$$

$$(3) 46/5 - 2706$$

$$(4) 48/3 - 2607$$

۷۷- با توجه به واکنش‌های زیر:



گرمای سوختن هر گرم آمونیاک چند برابر گرمای سوختن هر گرم کربن دی‌سولفید است و اگر از سوختن مقادیر مختلفی از کربن دی‌سولفید و آمونیاک، گرمای یکسانی آزاد شده باشد، تعداد مول گاز تولیدشده در سوختن آمونیاک، به تقریب چند برابر تعداد مول گاز گوگرد دی‌اکسید تولیدشده در سوختن کربن دی‌سولفید است؟

$$(S = 32, N = 14, C = 12, H = 1 : g \cdot mol^{-1})$$

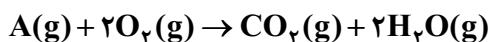
$$(1) 1/6, 1/7, 2/2, 1/6$$

$$(2) 2/2, 1/6, 1/7$$

$$(3) 1/6, 1/7, 2/2$$

$$(4) 2/2, 1/6, 1/7$$

۷۸- با توجه به جدول زیر، اختلاف آنتالپی سوختن ترکیب‌های A و B، چند کیلوژول بر مول است؟



پیوند	$C \equiv C$	$C-H$	$O=O$	$C=O$	$O-H$
آنتالپی ($kJ \cdot mol^{-1}$)	۸۵۰	۴۱۵	۴۹۵	۸۰۰	۴۶۵

$$811/4$$

$$805/3$$

$$402/5/2$$

$$405/2/1$$

محل انجام محاسبات



۷۹- یک ورزشکار برای دویدن صبحگاهی نیاز به مقداری انرژی دارد که در زمان محدود برای تأمین آن، چهار ماده غذایی را به او پیشنهاد داده‌ایم. ورزشکار برای ۱۵ دقیقه دویدن صبحگاهی، کدام خوراکی را انتخاب می‌کند؟

A	B	C	D	خوراکی مقدار ماده غذایی در ۱۰۰ گرم
۲۵	۵۰	۱۰	۲۰	چربی (گرم)
-	-	-	-	کلسترول (میلی گرم)
۵۰	۲۰	۴۰	۳۰	کربوهیدرات (گرم)
۷	۳۰	۰/۳	۱/۵	پروتئین (گرم)

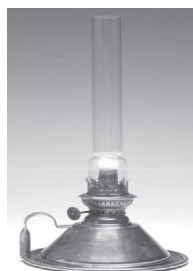
D (۴)

C (۳)

B (۲)

A (۱)

۸۰- در یک چراغ پیه‌سوز از پیه حیوانی (مخلوطی از انواع چربی‌ها با ارزش سوختی 38 kJ.g^{-1} و جرم مولی میانگین 360 g.mol^{-1}) به عنوان سوخت استفاده می‌شود (شکل زیر). آنتالپی سوختن پیه حیوانی چند کیلوژول بر مول است و اگر حجم مخزن سوخت این چراغ، 250 میلی‌لیتر باشد، با مصرف کامل سوخت درون مخزن، به تقریب دمای چند کیلوگرم آب از 20°C به 80°C می‌رسد؟ (چگالی سوخت 0.9 g.mL^{-1} است و بازده کلی فرایند را 80% درصد در نظر بگیرید.
 $(\text{C}_{\text{H}_2\text{O}} = 4/2 \text{ J.g}^{-1} . ^\circ\text{C}^{-1})$



$$13/6 - 13680 (2)$$

$$13/6 - 8850 (1)$$

$$27/1 - 13680 (4)$$

$$27/1 - 8850 (3)$$

محل انجام محاسبات

مهم ترین ویژگی های آزمون های خیلی سبز در پایه های دهم و یازدهم:

- ۱- برگزاری دست کم یک آزمون در ماه بر اساس روال تدریس در مدرسه
- ۲- برگزاری آزمون های ویژه برای زمان های خاص (میان ترم، ترم، پس از عیدو...)
- ۳- امکان جبران عقب ماندگی ها یا دوره مطالب برای تثبیت آن ها

پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.

پاسخ نامہ آزمون آزمائشی خیلی سبز



مرحله ششم

پایه یازدهم

تاریخ برگزاری: ۲۶/ بهمن/ ۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	فرشاد حسن زاده - سجاد داوطلب - مجید رفعتی - علی شهبازی - میلاد منصوری - حسین نادری - محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - محمدطاهر شعاعی - حسین هاشمی طاهری - صبا مهدوی
آمار و احتمال	مسعود شفیعی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - نوید شاهی
شیمی	یاسر راش - علی رفیعی - امیرحسین مسلمی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	محمدرضا راسخ	عادل حسینی	سعید خان بابائی منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری
هندسه	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	فرزانه خاکپاش	فرزانه خاکپاش	زهره جالینوسی مهدی خوشنویس منصور زرکش اصفهانی ماهان فنی فر
آمار و احتمال	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	مسعود شفیعی	امیرحسین ابومحبوب سعید قندچی	علیرضا کاظمی بقا فرزانه خاکپاش ماهان فنی فر
فیزیک	نوید شاهی	یاشار انگوتی	علیرضا عبداللہی	علیرضا عبداللہی	ماهان فنی فر نیما فیض آقایی محمد مهدی یوسفی چهرقانی
شیمی	یاسر عبداللہی	امیرحسین مسلمی	امیرحسین مسلمی	یاسر عبداللہی آرمین عظیمی	سیدعلی حسین زاده صدرا عبادی

سرپرست محتوایی: فاطمه آقاجانپور



Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمائشی خلی سبز

الناز علی یاری زاده	سرپرست تولید
نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - راضیه سادات خلدی نسب زہرا صفری - فاطمہ علی اکبری - محیا غنی فرد زہرا فرہادی مہر - محمد محمودی - مریم مسلمی زاده نادرہ نازآوری - ساعدہ نمازی	ویراستاران فنی
مونا آندستا ندا فخاری سارا گنجی آزادپور	رسم
سحر ازلی تاش - مریم حسین زاده - زہرا داراخانی سپیدہ سخایی - الہام سہرابی - طاہرہ صادق نژاد مائدہ صبری - نیلوفر فرخجستہ - مہدیہ گل پور دریا لطفی - لیلا نعمت پور	صفحہ آرائی



ریاضیات

۱

چه تعداد از گزاره‌های زیر در مورد تابع $f(x) = 3 - 2^x$ همواره صحیح است؟

(الف) با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می‌یابند.

(ب) برد تابع برابر با بازه $(3, +\infty)$ است.

(پ) نمودار تابع از ناحیه چهارم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

(ت) نمودار تابع با نمودار تابع $g(x) = \sqrt{x-4}$ هیچ نقطه تلاقی‌ای ندارد.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)



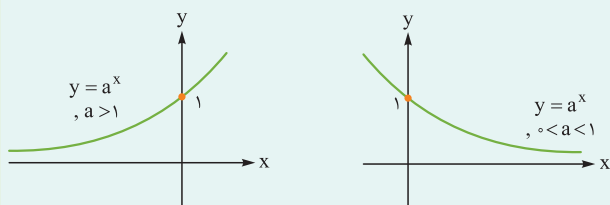
نمودار رو رسم کن!

Hint

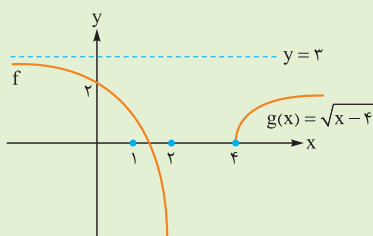
درس Box

تابع نمایی: هر تابع با ضابطه $y = a^x$ که در آن a عددی مثبت و مخالف ۱ است را یک تابع نمایی می‌نامیم.

نمودار تابع نمایی: نمودار تابع نمایی $y = a^x$ به یکی از شکل‌های زیر است:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



گام دوم: با توجه به نمودار، درستی یا نادرستی عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم.

(الف) با افزایش مقدار x ، مقادیر f کاهش می‌یابند.

(ب) برد تابع برابر با بازه $(-\infty, 3)$ است.

(پ) نمودار تابع از ناحیه سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

(ت) با توجه به شکل بالا، نمودار تابع g با نمودار تابع f هیچ نقطه تلاقی‌ای ندارد.

کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

۲

$$y = |3^{x-1}| \quad (۱)$$



$$y = 4^{x^2} \quad (۳)$$

$$y = 2^{|x|} \quad (۲)$$

$$y = 3^x + 3^{-x+1} \quad (۴)$$

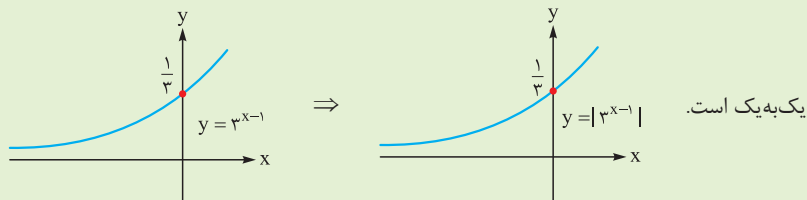
سعی کن نمودار رو رسم کنی، اگر نشد، از مثال نقض (عددگذاری) استفاده کن!

Hint

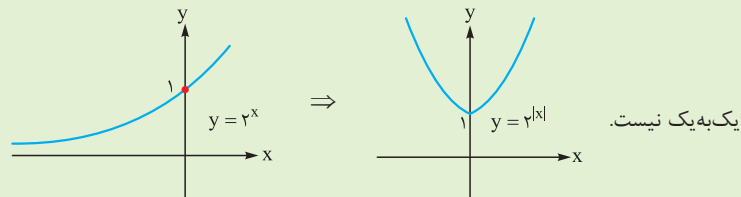
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: اگر تابعی یک به یک باشد، هر خط موازی محور Xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند، نمودار توابع داده شده در گزینه های (۱) و (۲) را رسم می کنیم.

(۱)



(۲)



گام دوم: در توابعی که رسم نمودار آنها دشوار است، باید از تساوی $f(x_1) = f(x_2)$ به تساوی $x_1 = x_2$ برسیم.

$$(۳) \quad f(x) = 4^{x^2} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4^{x_1^2} = 4^{x_2^2} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \quad \text{یک به یک نیست.}$$

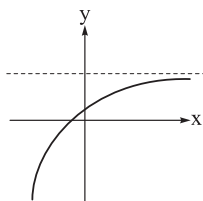
گام سوم: در آخر توابعی که به روش جبری نیز ثابت کردن یک به یک بودن یا نبودن دشوار است، از مثال نقض استفاده می کنیم.

$$(۴) \quad f(x) = 3^x + 3^{-x+1}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} f(0) = 4 \\ f(1) = 4 \end{matrix} \Rightarrow f(0) = f(1), \quad 0 \neq 1 \quad \text{یک به یک نیست.}$$

ریاضیات

۳ اگر نمودار تابع $f(x) = a - a^{-x}$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = a^x + a$ از کدام نواحی محورهای مختصات می‌گذرد؟



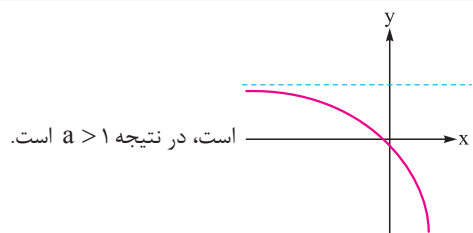
(۱) فقط اول و سوم

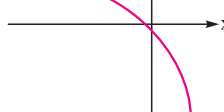
(۲) فقط اول و دوم

(۳) فقط اول و دوم و سوم

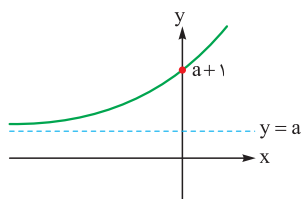
(۴) تمام نواحی محورهای مختصات

Hint از روی نمودار محدوده‌ای برای a پیدا کن!



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار تابع f به صورت  است، در نتیجه $a > 1$ است.

گام دوم: حال نمودار تابع $g(x) = a^x + a$ را با فرض $a > 1$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع g فقط از نواحی اول و دوم محورهای مختصات عبور می‌کند.

ریاضیات

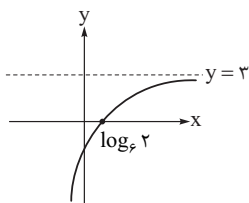
۴ اگر نمودار تابع $f(x) = a - e^{b-x}$ به صورت زیر باشد، مقدار $f^{-1}(-33)$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) -۳

(۴) ۲



Hint با توجه به برد تابع، a رو پیدا کن!

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: برد تابع f را از روی ضابطه به دست می آوریم و با برد تابع به دست آمده روی نمودار که $(-\infty, 3)$ است، مقایسه می کنیم:

$$e^{b-x} > 0 \Rightarrow -e^{b-x} < 0 \Rightarrow a - e^{b-x} < a \Rightarrow R_f = (-\infty, a) \Rightarrow a = 3$$

گام دوم: نقطه $(\log_e 2, 0)$ روی نمودار تابع f قرار دارد؛ بنابراین:

$$f(x) = 3 - e^{b-x}$$

$$\xrightarrow{(\log_e 2, 0) \in f} 3 - e^{b - \log_e 2} = 0 \Rightarrow \frac{e^b}{e^{\log_e 2}} = 3 \Rightarrow \frac{e^b}{2} = 3 \Rightarrow e^b = 6 \Rightarrow b = 1$$

گام سوم: در نتیجه ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 3 - e^{1-x}$ است و برای محاسبه مقدار $f^{-1}(-33)$ داریم:

$$f^{-1}(-33) = t \Rightarrow f(t) = -33 \Rightarrow 3 - e^{1-t} = -33 \Rightarrow e^{1-t} = 36 \Rightarrow e^{1-t} = 6^2 \Rightarrow 1-t = 2 \Rightarrow t = -1$$

ریاضیات

در تابع $f(x) = a(3)^{bx-1}$ ، اگر $f(0) = \frac{1}{6}$ و $f^{-1}(\frac{27}{3}) = 2$ باشد، مقدار $[f(1)]$ کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



Hint نقاط داده شده در ضابطه تابع صدق می کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به این که $f(0) = \frac{1}{6}$ ، داریم:

$$f(0) = a(3)^{-1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

گام دوم: چون $f^{-1}(\frac{27}{3}) = 2$ ، در نتیجه $f(2) = \frac{27}{3}$ و داریم:

$$f(x) = \frac{1}{2}(3)^{bx-1}$$

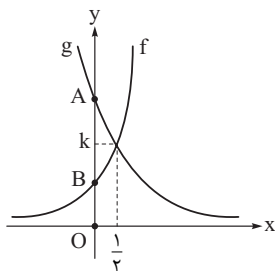
$$\Rightarrow f(2) = \frac{1}{2}(3)^{2b-1} = \frac{27}{3} \Rightarrow 3^{2b-1} = 27 = 3^3 \Rightarrow 2b-1=3 \Rightarrow b=2$$

گام سوم: بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \frac{1}{2}(3)^{2x-1}$ است و داریم:

$$f(1) = \frac{1}{2} \times 3^1 = \frac{3}{2} \Rightarrow [f(1)] = \left[\frac{3}{2} \right] = 1$$

نکته اگر $(a, b) \in f$ ، آن گاه $(b, a) \in f^{-1}$.

در شکل زیر نمودار توابع $f(x) = a \cdot b^x$ و $g(x) = b \cdot a^{-x}$ رسم شده‌اند. اگر $\frac{AB}{OB} = 3$ باشد، مقدار k کدام است؟ ۶



$$2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$4\sqrt{2} \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$



Hint با توجه به عرض از مبدأ نمودارهای توابع نمایی، رابطه بین a و b را پیدا کن!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** با توجه به نمودارهای y_1 و y_2 ، عرض نقطه B برابر a و عرض نقطه A برابر b می‌باشد، در نتیجه:

$$\frac{AB}{OB} = 3 \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AB + OB}{OB} = 4 \Rightarrow \frac{b}{a} = 4 \Rightarrow b = 4a$$

گام دوم: با جای گذاری رابطه به دست آمده و طول نقطه تلاقی دو نمودار، داریم:

$$4a \times a^{-x} = a(4a)^x \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} 4a \times \frac{1}{\sqrt{a}} = a \times \sqrt{4a} \xrightarrow{a \neq 0} 4a = 2a^2 \Rightarrow a = 2, b = 8$$

گام سوم: حال با قراردادن $x = \frac{1}{2}$ در ضابطه یکی از نمودارها، مقدار k را به دست می‌آوریم:

$$y = 2 \times 8^x \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} k = 2 \times \sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

ریاضیات

۷ حاصل ضرب جواب‌های معادله $8^{|x|} + 2^{5-3|x|} = 12$ کدام است؟

۷



$$\frac{81}{64} \quad (4)$$

$$\frac{64}{81} \quad (3)$$

$$\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$\frac{9}{16} \quad (1)$$

پایه‌ها رو یکسان کن و تغییر متغیر بزن!

Hint

درس‌Box

ویژگی‌های توان‌های حقیقی: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و هم‌چنین X و Y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم:

$$1) a^0 = b^0 = 1 \quad 2) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$3) a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad 4) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$5) (ab)^x = a^x b^x \quad 6) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$7) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(2^3)^{|x|} + \frac{2^5}{2^{3|x|}} = 12 \Rightarrow 2^{3|x|} + \frac{32}{2^{3|x|}} = 12$$

گام دوم: با تغییر متغیر $t = 2^{3|x|}$ داریم:

$$t + \frac{32}{t} = 12$$

$$\xrightarrow{\times t} t^2 - 12t + 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow 2^{3|x|} = 2^2 \Rightarrow |x| = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3} \\ t = 8 \Rightarrow 2^{3|x|} = 2^3 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

گام سوم: در نتیجه حاصل ضرب جواب‌های معادله برابر است با:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times (1) \times (-1) = \frac{4}{9}$$

ریاضیات

برد تابع $f(x) = 3\sqrt{4-|x|}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۹ (۱)



۸ (۲)

(۴) بی شمار

۱۰ (۳)

Hint به کمک نامساوی‌ها محدوده $f(x)$ رو پیدا کن!



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به برد تابع $y = 4 - |x|$ داریم:

$$4 - |x| \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{4 - |x|} \leq 2$$

$$0 \leq \sqrt{4 - |x|} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 3\sqrt{4 - |x|} \leq 3 \cdot 2$$

$$0 \leq f(x) \leq 6 \Rightarrow R_f = [0, 6]$$

گام دوم: حال برای به دست آوردن برد تابع f داریم:

گام سوم: بنابراین برد تابع f برابر است با:

این بازه شامل ۹ عدد صحیح است.

ریاضیات

۹ اگر برد تابع $f(x) = 2^{2x} - 2^{x+1} + 3$ به صورت $[a, +\infty)$ باشد، حاصل $\log_a(7a+2)$ کدام است؟

۴ (۴)

-۴ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

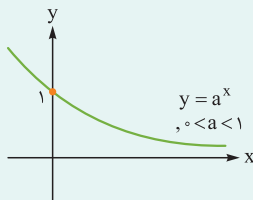
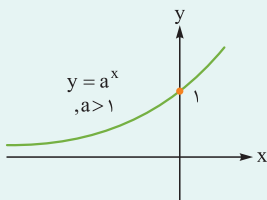


Hint از برد تابع درجه دوم استفاده کن!

درس Box

دامنه و برد تابع نمایی: با توجه به نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ داریم:

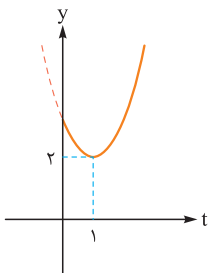
$$R_f = (0, +\infty), \quad D_f = \mathbb{R}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با در نظر گرفتن $t = 2^x$ داریم:

$$f(x) = t^2 - 2t + 3, \quad t \in (0, +\infty)$$

گام دوم: نمودار تابع درجه دوم $y = f(t)$ را رسم کرده و برد آن را با دامنه $(0, +\infty)$ به دست می آوریم:



$$\Rightarrow R_f = [2, +\infty) \Rightarrow a = 2$$

گام سوم: حال حاصل عبارت خواسته شده را محاسبه می کنیم:

$$\log_a(7a+2) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4$$

ریاضیات

۱۰ اگر $\log_x 3 = 4$ و $\log_y 3 = 2$ باشد، حاصل $\log_3 xy$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} (4)$$

$$\frac{4}{3} (3)$$

$$\frac{3}{4} (2)$$

$$\frac{2}{3} (1)$$



Hint ✨ لگاریتم حاصل ضرب رو به جمع دو لگاریتم تبدیل کن!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به ویژگی $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ داریم:

$$\log_x 3 = 4 \Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} = 4 \Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{4}, \quad \log_y 3 = 2 \Rightarrow \frac{1}{\log_3 y} = 2 \Rightarrow \log_3 y = \frac{1}{2}$$

گام دوم: حال به کمک ویژگی $\log_c a + \log_c b = \log_c ab$ داریم:

$$\log_3 xy = \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$





ریاضیات

اگر $\log_3 x = y$ و $\log_9 y = x$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱۱

$\frac{y}{4}$ (۴)

$4y$ (۳)

$\frac{y}{2}$ (۲)

$2y$ (۱)



Hint لامپ: y رو ساده کن تا به x برسی.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$y = \log_9 y \Rightarrow y = \log_3 y^2 \Rightarrow y = 2 \log_3 y \Rightarrow y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$





ریاضیات

۱۲ حاصل عبارت $\log_{25} 2 / 25 \times \log_8 2 / 2$ چند برابر $\frac{\log_{243} 27}{\log_{64} 9}$ است؟

$\frac{2}{9} (1)$ $\frac{1}{3} (2)$ $-\frac{1}{3} (3)$ $-\frac{2}{9} (4)$

Hint

مبنا و عدد جلوی لگاریتم‌ها رو یکسان کن!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به کمک ویژگی $\log_b a^m = \frac{m}{n} \log_b a$ داریم:

$$\log_{25} 2 / 25 \times \log_8 2 / 2 = \log_{5^2} 2^{-2} \times \log_{2^3} 2^{-1} = (-\log_5 2)(-\frac{1}{3} \log_2 5) = \frac{1}{3}$$

گام دوم:

$$\frac{\log_{243} 27}{\log_{64} 9} = \frac{\log_{3^5} 3^3}{\log_{2^6} 2^2} = \frac{\log_3 3}{\log_2 2} = 1$$

گام سوم: حال نسبت خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\log_{25} 2 / 25 \times \log_8 2 / 2}{\log_{243} 27} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$



ریاضیات

۱۳ حاصل عبارت $\frac{2}{\log_3 36} + \frac{1}{\log_4 36}$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

 $\frac{1}{4}$ (۱)

Hint از ویژگی تغییر مبنا استفاده کن!

درتس Box

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

تغییر مبنا در لگاریتم: اگر a و b و c اعداد حقیقی مثبت و $c \neq 1$ باشند، داریم:

تبدیل جمع به ضرب: اگر a و b و c اعداد حقیقی مثبت و $c \neq 1$ باشند، داریم:

$$\log_c a + \log_c b = \log_c ab$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: عبارت‌های لگاریتمی داده شده را با تغییر مبنا، در مبنای ۳۶ می‌نویسیم.

$$\frac{2}{\log_{36} 36} + \frac{1}{\log_{36} 36} = 2 \log_{36} 3 + \log_{36} 4$$

گام دوم: با یکسان کردن ضرایب پشت عبارت‌های لگاریتمی، مجموع دو عبارت لگاریتمی را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم.

$$2 \log_{36} 3 + \log_{36} 4 = \log_{36} 3^2 + \log_{36} 4 = \log_{36} 9 \times 4 = \log_{36} 36 = 1$$





ریاضیات

اگر $\frac{\log_2 x}{\log_5 2} = 2 \log_3 5$ باشد، مقدار x کدام است؟ **۱۴**

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



Hint همه رو تو مبنای ۵ بنویس!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با استفاده از ویژگی‌های $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ و $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ داریم:

$$\frac{\log_5 x}{\log_5 2} = \frac{2}{\log_5 3} \Rightarrow \frac{\log_5 x}{\log_5 2 \times \log_5 3} = \frac{2}{\log_5 3} \Rightarrow \frac{\log_5 x}{\log_5 2} = 2$$

گام دوم: با استفاده از ویژگی $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_b a$ داریم:

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$





ریاضیات

۱۵ حاصل عبارت $x^{\log \frac{y}{z}} \cdot y^{\log \frac{z}{x}} \cdot z^{\log \frac{x}{y}}$ کدام است؟

۴ $\sqrt{2}$

۳ ۲

۲ ۱

۱ صفر



Hint جای پایه و مبنا رو عوض کن!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: به کمک ویژگی $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$ داریم:

$$x^{\log y - \log z} \cdot y^{\log z - \log x} \cdot z^{\log x - \log y} = \frac{x^{\log y}}{x^{\log z}} \cdot \frac{y^{\log z}}{y^{\log x}} \cdot \frac{z^{\log x}}{z^{\log y}}$$

گام دوم: حال با استفاده از ویژگی $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ ، حاصل عبارت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{x^{\log y}}{x^{\log z}} \cdot \frac{y^{\log z}}{y^{\log x}} \cdot \frac{z^{\log x}}{z^{\log y}} = 1$$



ریاضیات

۱۶

مقدار x از معادله $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(2x+1)) = 0$ کدام است؟

$\frac{3}{2} (4)$

$\frac{3}{4} (3)$

$\frac{7}{2} (2)$

$\frac{1}{2} (1)$



Hint رابطه تابع نمایی و لگاریتمی چی بود؟ $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$.

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

تعریف تابع لگاریتمی:

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به رابطه $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ داریم:

$$\log_4(2x+1) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow \log_4(2x+1) = 1 \Rightarrow 2x+1 = 4 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$



۱۸

پایه یازدهم ریاضی
بیست و هشتم بهمن ماه ۱۴۰۳
مرحله ششم



ریاضیات

۱۷ اگر $\log_7(\log_x 3) = 4$ باشد، آن گاه $\log_7(\log_3 x)$ کدام است؟

- (۲) -۲
(۴) $2\log_3 6$

- (۱) ۱
(۳) $-\frac{3}{16}$

Hint

x رو از تعریف تابع لگاریتمی پیدا کن!

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به تعریف تابع لگاریتمی داریم:

$$\log_7(\log_x 3) = 4 \Rightarrow \log_x 3 = 16 \Rightarrow x^{16} = 3 \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt[16]{3}$$

گام دوم: حال حاصل عبارت خواسته شده را حساب می کنیم:

$$\xrightarrow{x = \sqrt[16]{3}} \log_7(\log_3 x) = \log_7(\log_3 3^{\frac{1}{16}}) = \log_7 \frac{1}{16} = \log_7 4^{-2} = -2$$

به کمک ویژگی های لگاریتم از روی عبارت داده شده، عبارت خواسته شده را می سازیم:

$$\log_7(\log_x 3) = 4 \Rightarrow \frac{1}{7} \log_7(\log_x 3) = 2 \Rightarrow \log_7(\log_x 3) = 2 \Rightarrow -\log_7(\log_x 3) = -2$$

$$\Rightarrow \log_7(\log_x 3)^{-1} = -2 \Rightarrow \log_7(\log_3 x) = -2$$

په جور دیگه

ریاضیات

۱۸ اگر $16^{\log_2 \sqrt{x+1}} = x^3 + x^2 + 2x - 7$ باشد، مقدار x^3 کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)



Hint پایه و مبنای لگاریتم رو یکسان کن!

تعویض پایه و آرگومان: اگر a, b, c اعداد حقیقی مثبت و $a, b, c \neq 1$ داریم:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

توانها: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و $a \neq 1$ داریم:

$$\log_b a^m = \frac{m}{n} \log_b a$$

درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: سمت چپ تساوی را به کمک ویژگی‌های لگاریتم به صورت ساده‌تر می‌نویسیم.

$$16^{\log_2 \sqrt{x+1}} = (2^4)^{\log_2 \sqrt{x+1}} = 2^{4 \log_2 \sqrt{x+1}} = 2^{\log_2 (\sqrt{x+1})^4} = (x+1)^2$$

گام دوم: حال عبارت را بازنویسی می‌کنیم و مقدار x^3 را به دست می‌آوریم.

$$(x+1)^2 = x^3 + x^2 + 2x - 7 \Rightarrow x^3 + 2x + 1 = x^3 + x^2 + 2x - 7 \Rightarrow x^3 = 8$$

ریاضیات

معادله $19 \quad \sqrt{1 + x^{\log 3} + 3^{\log x} + x^{\log 9}} = 2\sqrt{\log x} - 23$

(۱) ریشه ندارد

(۲) دو ریشه مختلف‌العلامت دارد

(۳) یک ریشه مثبت دارد

(۴) یک ریشه منفی دارد



Hint با کمک ویژگی‌های لگاریتم، زیر رادیکال را دو مربع کامل کن!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** به کمک ویژگی $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ سمت چپ تساوی را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم.

$$\sqrt{1 + 3^{\log x} + 3^{\log x} + 3^{2 \log x}} = \sqrt{(3^{\log x})^2 + 2 \times 3^{\log x} + 1} = \sqrt{(3^{\log x} + 1)^2} = 3^{\log x} + 1$$

گام دوم: حال معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$3^{\log x} + 1 = 3^{2 \log x} - 23$$

گام سوم: با فرض $t = 3^{\log x}$ داریم:

$$t + 1 = t^2 - 23 \Rightarrow t^2 - t - 24 = 0$$

با حدس‌زدن، $t = 3$ یکی از جواب‌های این معادله است؛ پس $(t - 3)$ یکی از عامل‌های آن است و داریم:

$$(t - 3)(t^2 + 3t + 8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow 3^{\log x} = 3 \Rightarrow x = 1 \\ t^2 + 3t + 8 = 0 \quad \Delta < 0 \end{cases}$$

بنابراین معادله فقط یک ریشه مثبت دارد.

برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن با رجوع به مقدار متغیر جدید، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.



ریاضیات

۲۰ نمودار دو تابع $f(x) = 2^{2x+b} - 3$ و $g(x) = \log_2 \sqrt{2x+k}$ نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند. حاصل $k - b$ کدام است؟

وارون یکدیگرند.

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



Hint قرینه نسبت به خط $y = x$ یعنی f و g وارون یکدیگرند!

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با توجه به این که نمودار توابع f و g نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند، پس f و g وارون هم هستند، ضابطه وارون یکی را حساب کرده و با دیگری مقایسه می کنیم.

$$y = \log_2 \sqrt{2x+k} \Rightarrow 2^y = \sqrt{2x+k} \Rightarrow 2^{2y} = 2x+k \Rightarrow 2^{2y} - k = 2x \Rightarrow \frac{2^{2y} - k}{2} = x$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2^{2x}}{2} - \frac{k}{2}$$

گام دوم: ضابطه تابع g^{-1} را با ضابطه تابع f مقایسه می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} g^{-1}(x) &= 2^{2x-1} - \frac{k}{2} \\ f(x) &= 2^{2x+b} - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{k}{2} = 3 \Rightarrow k = 6, b = -1 \Rightarrow k - b = 6 - (-1) = 7$$

ریاضیات

۲۱ کدام یک از تبدیل های زیر، هیچ گاه نمی تواند یک تبدیل همانی باشد؟

(۱) بازتاب

(۲) انتقال

(۳) دوران

(۴) تجانس

مشاوره این سؤال براساس فعالیت صفحه های ۴۷ و ۴۸ کتاب درسی هندسه (۲) و با استفاده از جملات متن کتاب درسی طراحی شده است و می تواند به عنوان سؤال جای خالی و یا تشخیص درست یا نادرست در امتحان نهایی مطرح شود.

Hint

درس Box

تبدیل همانی

تبدیل T را تبدیل همانی گوئیم، هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$. به عبارت دیگر، تبدیل همانی، هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می کند.

گزینه ها را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می دهیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): در بازتاب به جز نقاطی که روی محور بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مانند A ، نقطه ای مثل A' است که در طرف دیگر محور بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب، هیچ گاه تبدیل همانی نیست.

گزینه (۲): در صورتی که بردار انتقال، بردار صفر باشد، تمام نقاط صفحه بر خودشان منطبق می شوند؛ پس در این حالت، انتقال یک تبدیل همانی است.

گزینه (۳): در صورتی که زاویه دوران مضربی از 360° باشد، تمام نقاط صفحه بر خودشان منطبق می شوند؛ پس در این حالت ها، دوران یک تبدیل همانی است.

گزینه (۴): در صورتی که نسبت تجانس $k = 1$ باشد، تمام نقاط صفحه بر خودشان منطبق می شوند؛ پس به ازای این حالت، تجانس یک تبدیل همانی است.

۲۲

تحت تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{5}{4}$ ، نقطه A بر نقطه B تصویر می‌شود. هم‌چنین تحت تجانس به مرکز A و نسبت $(-\frac{3}{4})$ ، نقطه B بر نقطه C تصویر می‌گردد. طول پاره‌خط OB چند برابر طول پاره‌خط OC است؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)



مشاوره این سؤال براساس تعریف تجانس طراحی شده است و هر دو مفهوم تجانس مستقیم و معکوس را در بر می‌گیرد.

Hint

درس‌Box

تجانس

اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت k گوئیم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

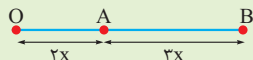
الف) سه نقطه M ، O و M' روی یک خط راست باشند.

ب) $OM' = |k| OM$

پ) اگر k مثبت باشد، M' روی نیم‌خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.



اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

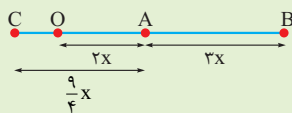


پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

ابتدا مجانس نقطه A به مرکز O و نسبت $k_1 = \frac{5}{4}$ را مشخص می‌کنیم و آن را B می‌نامیم. برای راحتی کار OA را برابر $2x$ در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$|k_1| = \frac{OB}{OA} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{OB}{2x} \Rightarrow OB = 5x$$

$$AB = OB - OA = 5x - 2x = 3x$$



گام دوم:

حال مجانس نقطه B را به مرکز A و نسبت تجانس $k_2 = -\frac{3}{4}$ مشخص می‌کنیم و آن را نقطه C می‌نامیم. چون نسبت تجانس در این مرحله منفی است، پس نقاط B و C در دو طرف نقطه A قرار دارند. با توجه به نسبت تجانس داریم:

$$|k_2| = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{AC}{3x} \Rightarrow AC = \frac{9}{4}x$$

گام سوم: با توجه به اندازه‌های روی شکل، داریم:

$$OC = AC - OA = \frac{9}{4}x - 2x = \frac{1}{4}x$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{5x}{\frac{1}{4}x} = 20$$

ریاضیات

۲۳ در یک تجانس، نقطه $A'(-1, 5)$ ، مجانس نقطه $A(-1, -1)$ و نقطه $B'(5, -4)$ ، مجانس نقطه $B(1, -4)$ است. نسبت تجانس کدام است؟

۳ (۴)

-۳ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)



برای تشخیص مثبت یا منفی بودن نسبت تجانس، نقاط داده شده را در دستگاه مختصات رسم کنید.

 Hint

اگر نقاط A' و B' به ترتیب مجانس نقاط A و B در تجانس به مرکز O و نسبت k باشند، آن گاه داریم:
(۱) قدرمطلق نسبت تجانس برابر نسبت طول پاره خط $A'B'$ به طول پاره خط AB است.

$$|k| = \frac{A'B'}{AB}$$

(۲) مرکز تجانس محل برخورد امتداد پاره خطهای AA' و BB' است.

بعد از مشخص شدن مرکز تجانس، می توان مستقیم یا معکوس بودن تجانس را تعیین کرد.

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه در صفحه باشند، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

 نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با تعیین طول پاره خطهای AB و $A'B'$ ، قدرمطلق نسبت تجانس را مشخص می کنیم.

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$A'B' = \sqrt{(-1-5)^2 + (5+4)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

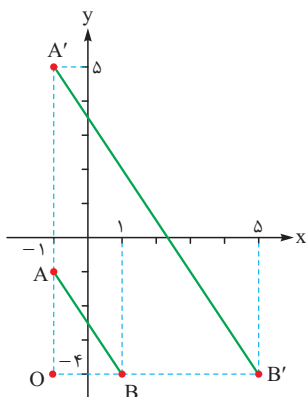
$$|k| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 3$$

گام دوم: نقاط داده شده را در دستگاه مختصات مشخص می کنیم.

مطابق شکل دو خط AA' (به معادله $x = -1$) و BB' (به معادله $y = -4$)

در نقطه $O(-1, -4)$ تلاقی می کنند و O مرکز تجانس است. با توجه به شکل

تجانس مستقیم و نسبت تجانس $k = 3$ است.



مجانس یک مثلث متساوی الاضلاع را نسبت به محل همرسی میانه‌هایش و با نسبت (۱-) رسم می‌کنیم. مساحت ناحیه محصور بین دو شکل،

چه کسری از مساحت مثلث اولیه است؟

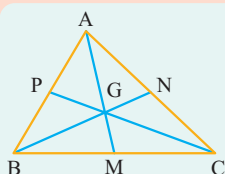
(۱)

(۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

مشاوره محاسبه مساحت ناحیه محصور بین یک چندضلعی و تصویر آن تحت یک تبدیل، یکی از مهم‌ترین تیپ‌های مسائل فصل تبدیل‌های هندسی محسوب می‌شود و سؤالی مشابه در کنکور ریاضی داخل ۱۴۰۰ نیز طرح شده است.

Hint

درس‌Box



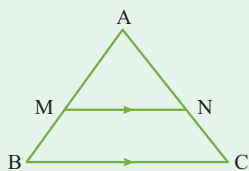
میانه‌های مثلث در یک نقطه درون مثلث هم‌رس‌اند. فاصله نقطه همرسی میانه‌ها از هر رأس مثلث، برابر $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس و فاصله آن از وسط هر ضلع مثلث برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر آن ضلع است.

به عنوان مثال داریم:

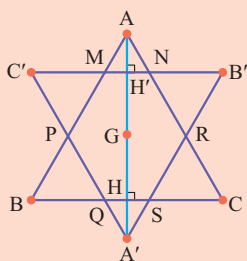
$$AG = \frac{2}{3} AM, GM = \frac{1}{3} AM$$

(۱) اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

(۲) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مربع نسبت تشابه است.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2$$



گام اول: مجانس مثلث ABC را نسبت به نقطه G مرکز ثقل (نقطه همرسی میانه‌ها) این مثلث رسم می‌کنیم. می‌دانیم $AG = \frac{2}{3} AH$ ؛ پس داریم:

$$AH' = AA' - A'H' = 2AG - AH = 2 \times \frac{2}{3} AH - AH \Rightarrow AH' = \frac{1}{3} AH$$

گام دوم: می‌دانیم تجانس، شیب خط‌ها را حفظ می‌کند؛ پس داریم:

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AH'}{AH}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{9} S_{ABC}$$

گام سوم: با توجه به هم‌نهشتی مثلث‌ها داریم:

$$S_{AMN} = S_{BPQ} = S_{CRS} = \frac{1}{9} S_{ABC}$$

بنابراین مساحت ناحیه محصور بین دو مثلث ABC و A'B'C' برابر است با:

$$S_{ABC} - 3S_{AMN} = S_{ABC} - \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{2}{3} S_{ABC}$$

ریاضیات

۲۵

مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ مفروض است. بزرگ‌ترین ضلع مثلث را با کوتاه‌ترین بردار ممکن انتقال می‌دهیم، به طوری که خط حاصل از نقطه همرسی میانه‌های مثلث می‌گذرد. طول بردار انتقال کدام است؟

$$۱/۶ \quad (۲)$$

$$۱/۸ \quad (۱)$$

$$۱/۲ \quad (۴)$$

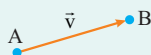
$$۱/۵ \quad (۳)$$



کوتاه‌ترین بردار انتقال، برداری است که از نقطه همرسی میانه‌ها بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث عمود می‌شود.

Hint

درس‌Box



انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیلی است که در آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحه P،

نقطه‌ای مانند B از همین صفحه است، به طوری که $\vec{AB} = \vec{v}$ باشد.

مهم‌ترین ویژگی‌های انتقال عبارت‌اند از:

(۱) انتقال تبدیلی طولی است.

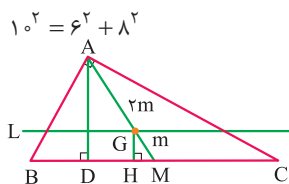
(۲) انتقال شیب خط‌ها را حفظ می‌کند.

(۳) انتقال اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

(۴) انتقال جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.

(۵) بردارهایی که هر نقطه از شکل را به تصویر آن تحت انتقال وصل می‌کنند، همگی با هم برابرند.

گام اول: با توجه به عکس قضیه فیثاغورس، مثلثی با اضلاع ۶، ۸، ۱۰، یک مثلث قائم‌الزاویه است. ✓ پاسخ خیلی تشریحی



انتقال شیب خط‌ها را حفظ می‌کند. بنا به فرض تصویر، خط BC، خطی مانند

L موازی BC است که از نقطه G (نقطه همرسی میانه‌ها) می‌گذرد. کوتاه‌ترین

بردار انتقال، بردار $\vec{HG}$ است، به طوری که: $\vec{GH} \perp BC$.

گام دوم: طبق قضیه تالس در مثلث AMD داریم:

$$GH \parallel AD \Rightarrow \frac{GH}{AD} = \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow GH = \frac{1}{3} AD$$

گام سوم: طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC، داریم:

$$AD \times BC = AB \times AC \Rightarrow AD \times 10 = 6 \times 8 \Rightarrow AD = 4/8 \Rightarrow GH = \frac{1}{3} \times 4/8 = 1/6$$

دو دایره به شعاع‌های ۲ و $\frac{1}{2}$ و طول خط‌المركزین $\frac{1}{2}$ مجانس یکدیگرند. مرکز تجانس مستقیم دو دایره، قطر دایره بزرگ‌تر را با چه نسبتی

تقسیم می‌کند؟

$$\frac{3}{4} (4)$$

$$\frac{2}{3} (3)$$

$$\frac{1}{2} (2)$$

$$\frac{1}{3} (1)$$



ابتدا وضعیت دو دایره نسبت به یکدیگر را مشخص کنید.

Hint

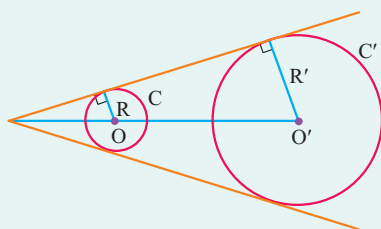
درس‌Box

دو دایره در هر حال مجانس یکدیگرند.

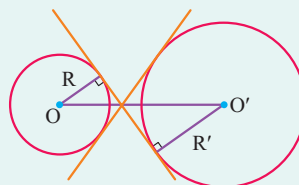
(۱) اگر دو دایره نابرابر و دارای مماس مشترک خارجی باشند، محل تلاقی این مماس مشترک با امتداد خط‌المركزین دو دایره، مرکز تجانس مستقیم دو دایره و نسبت تجانس، برابر نسبت شعاع‌های دو دایره است.

(۲) اگر دو دایره دارای مماس مشترک داخلی باشند، محل تلاقی این مماس مشترک با خط‌المركزین دو دایره، مرکز تجانس معکوس دو دایره و قدرمطلق نسبت تجانس، برابر نسبت شعاع‌های دو دایره است.

(۳) اگر هیچ‌کدام از خطوط مماس مشترک داخلی و خارجی قابل رسم نباشند، قدرمطلق نسبت تجانس، برابر نسبت شعاع‌های دو دایره است، ولی مرکز تجانس نقطه‌ای روی خط‌المركزین دو دایره است که می‌توان آن را با توجه به وضعیت دو دایره نسبت به هم به دست آورد.



تجانس مستقیم با نسبت $\frac{R'}{R}$



تجانس معکوس با نسبت $-\frac{R'}{R}$

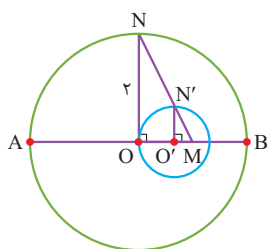
پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** ابتدا وضعیت دو دایره را مشخص می‌کنیم. با فرض $R = 2$ و $R' = \frac{1}{2}$ و $d = \frac{1}{2}$ داریم:

$$d < |2 - \frac{1}{2}| \Rightarrow d < |R - R'| \Rightarrow \text{دو دایره متداخل‌اند.}$$

گام دوم: مطابق شکل مرکز تجانس مستقیم دو دایره روی امتداد خط‌المركزین

دو دایره است که آن را با M نمایش می‌دهیم. اگر $MO' = x$ باشد، آن‌گاه طبق

تعمیم قضیه تالس، داریم:



$$O'N' \parallel ON \Rightarrow \frac{MO'}{MO} = \frac{O'N'}{ON} \Rightarrow \frac{x}{x + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{2}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4x = x + \frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

گام سوم: با توجه به موقعیت نقطه M، طول قطعات MA و MB را و سپس نسبت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$MA = AO + OO' + MO' = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$$

$$MB = AB - MA = 2 \times 2 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2}$$

ریاضیات

۲۷

دایره $C(O, 3)$ و نقطه M در یک صفحه قرار دارند و $OM = 6$ است. دایره C را حول نقطه M به اندازه 120° دوران می‌دهیم تا

دایره C' پدید آید. طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

(۱) $6\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{6}$

(۳) $6\sqrt{3}$

(۴) $3\sqrt{6}$

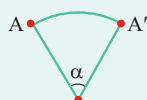
مشاوره سؤالات ترکیبی انواع تبدیلی‌ها با مباحث مختلف دایره به ویژه مماس مشترک دو دایره، روابط طولی در دایره و چندضلعی‌های محیطی از سؤالات مورد توجه طراحان آزمون‌های تستی و تشریحی محسوب می‌شود.

Hint

درسی Box

دقت کنید که دوران تبدیلی طولی است و شعاع دایره در حین دوران ثابت می‌ماند.

دوران



دوران به مرکز O و زاویه α تبدیلی است که در آن نقطه A بر نقطه A' تصویر می‌شود، به طوری که:

$$\begin{cases} OA = OA' \\ \angle AOA' = \alpha \end{cases}$$

مهم‌ترین ویژگی‌های دوران عبارت‌اند از:

- (۱) دوران یک تبدیل طولی است.
- (۲) دوران اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.
- (۳) دوران در حالت کلی شیب خط‌ها را حفظ نمی‌کند. (مگر این‌که زاویه دوران مضربی از 180° باشد).
- (۴) دوران جهت شکل‌ها را حفظ می‌کند.

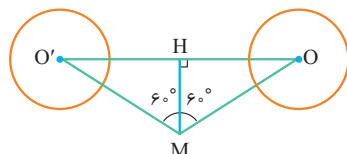
دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با طول خط‌المركزین $OO' = d$ را در نظر بگیرید.

(۱) طول مماس مشترک داخلی دو دایره از رابطه $\sqrt{d^2 - (R + R')^2}$ به دست می‌آید.

(۲) طول مماس مشترک خارجی دو دایره از رابطه $\sqrt{d^2 - (R - R')^2}$ به دست می‌آید.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:



می‌دانیم دوران تبدیلی طولی است، پس تصویر دایره $C(O, 3)$ تحت دوران

120° حول نقطه M ، دایره $C'(O', 3)$ است، به گونه‌ای که $\angle MO' = 120^\circ$

باشد. از طرفی، $O'M = OM = 6$ است.

گام دوم: از نقطه M ، عمود MH را بر OO' رسم می‌کنیم. مثلث MOO' متساوی‌الساقین است، پس ارتفاع MH ، میانه نظیر

ضلع OO' و نیمساز زاویه داخلی M است؛ بنابراین داریم:

$$\angle OHM : \angle OMH = 60^\circ \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} OM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \Rightarrow OO' = 2OH = 6\sqrt{3}$$

گام سوم: طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر است با:

$$\sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - (3 + 3)^2} = \sqrt{108 - 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

در لوزی ABCD، نقاط A و B به ترتیب نقاط ثابت تبدیل در بازتاب نسبت به محورهای Y و X هستند. اگر عرض نقطه A برابر ۳، طول نقطه B برابر ۴ و مختصات نقطه C به صورت (l, m) باشد ($m > 0$)، فاصله تصویر نقطه B تحت بازتاب نسبت به قطر AC، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱۰ (۴)

$\sqrt{58}$ (۳)

$5\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{34}$ (۱)



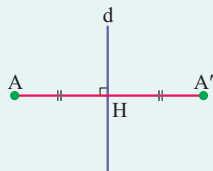
مشاوره این سؤال براساس مفهوم بازتاب نقطه نسبت به خط و مشابه سؤال‌هایی از کنکورهای ریاضی داخل و خارج ۱۴۰۱ طراحی شده است.

قطرهای لوزی، عمودمنصف یکدیگرند.

Hint

بازتاب

درس‌Box



نقطه A' را بازتاب نقطه A نسبت به خط d گوئیم، هرگاه d عمودمنصف پاره خط AA' باشد. خط d را محور بازتاب می‌نامیم و در صورتی که A روی محور بازتاب باشد، تصویر A بر خود A منطبق می‌شود.

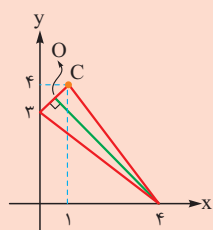
مهم‌ترین ویژگی‌های بازتاب عبارت‌اند از:

(۱) بازتاب یک تبدیل طولیا است.

(۲) بازتاب اندازه زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

(۳) بازتاب جهت شکل‌ها را حفظ نمی‌کند.

(۴) بازتاب در حالت کلی شیب خط‌ها را حفظ نمی‌کند. (مگر این که محور بازتاب موازی با خط یا عمود بر خط باشد).



گام اول: مطابق شکل نقاط $A(0, 3)$ و $B(4, 0)$ دو رأس مجاور این لوزی هستند و نقطه $C(1, m)$ رأس دیگری از این لوزی است. مختصات نقطه O (محل برخورد قطرهای لوزی به صورت زیر است:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{m+3}{2}$$

گام دوم: قطرهای لوزی بر هم عمودند؛ پس داریم:

$$m_{OA} = \frac{\frac{m+3}{2} - 3}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{\frac{m-3}{2}}{\frac{1}{2}} = m-3$$

$$m_{OB} = \frac{\frac{m+3}{2} - 0}{\frac{1}{2} - 4} = \frac{\frac{m+3}{2}}{-\frac{7}{2}} = \frac{m+3}{-7}$$

$$m_{OA} \times m_{OB} = -1 \Rightarrow (m-3)\left(\frac{m+3}{-7}\right) = -1 \Rightarrow m^2 - 9 = 7 \Rightarrow m^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ غ ق}$$

گام سوم: نقطه O وسط BD است؛ پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} x_O = \frac{x_B + x_D}{2} &\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = -3 \\ y_O = \frac{y_B + y_D}{2} &\Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{0 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(-3, 7)$$

$$\text{فاصله D از مبدأ مختصات} = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}$$

ریاضیات

۲۹

دو خط d و D در نقطه A متقاطع اند و با یکدیگر زاویه 60° می سازند و خط Δ در نقطه A بر d عمود است. اگر M نقطه ای روی Δ به فاصله ۳ واحد از A ، M' بازتاب M نسبت به D و M'' بازتاب M' نسبت به d باشد، طول پاره خط MM'' کدام است؟

۶ (۴)

۴/۵ (۳)

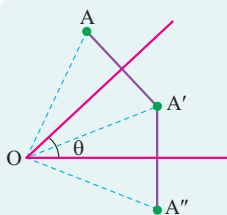
 $۳\sqrt{۳}$ (۲) $۳\sqrt{۲}$ (۱)

Hint

دانش Box

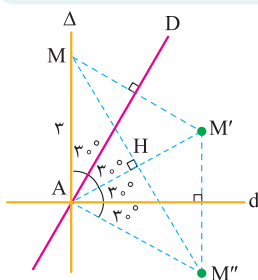
نقطه M'' تصویر M تحت یک دوران به مرکز A است.

ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع که با یکدیگر زاویه θ می سازند، یک دوران به مرکز نقطه تلاقی دو خط و با زاویه 2θ است.



$$OA = OA' = OA''$$

$$\angle AOA'' = 2\theta$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: بازتاب تبدیلی طولی است؛ پس: $AM = AM' = AM'' = ۳$. از طرفی،

می دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، یک دوران حول نقطه برخورد دو محور است و زاویه دوران دو برابر زاویه بین دو خط است.

گام دوم: مطابق شکل AH ارتفاع وارد بر قاعده در مثلث متساوی الساقین AMM'' است؛ پس داریم:

$$\triangle AMH : MH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} AM = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$MM'' = ۲MH = ۳\sqrt{۳}$$

ریاضیات

۳۰

نقاط A' و B' به ترتیب بازتاب نقاط A و B نسبت به خط d هستند و A و B در یک طرف خط d قرار دارند. اگر فاصله نقطه A از خط d و نقطه B هر کدام برابر $2\sqrt{3}$ واحد باشد و راستای AB با خط d زاویه 30° بسازد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ کدام است؟ (A از B به محور بازتاب نزدیک تر است).

مشاوره این سؤال ترکیبی از مبحث بازتاب و ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه است.

(۲) ۳۰

(۱) ۱۵

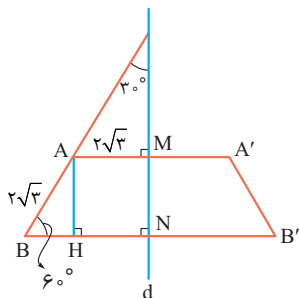
(۴) $30\sqrt{3}$ (۳) $15\sqrt{3}$ 

Hint دقت کنید که چهارضلعی حاصل، یک دوزنقه متساوی‌الساقین است.

نیمساز یک زاویه، محور بازتابی است که یک ضلع آن زاویه را بر ضلع دیگر تصویر می‌کند.

نکته

پاسخ خیلی تشریحی



گام اول: بازتاب نقاط A و B را نسبت به خط d رسم می‌کنیم و سپس از A عمود AH را بر BB' رسم می‌نماییم. چهارضلعی $ABB'A'$ یک دوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌های AA' و BB' و ارتفاع AH است.

گام دوم: مطابق شکل $AM = AB = 2\sqrt{3}$ و $\hat{B} = 60^\circ$ است. می‌دانیم اندازه اضلاع روبه‌رو به زوایای 30° و 60° در یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است، پس داریم:

$$\hat{B} = 60^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$$

$$\hat{BAH} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow BN = 3\sqrt{3}$$

گام سوم: طول قاعده‌های دوزنقه $ABB'A'$ برابر است با:

$$\begin{cases} AA' = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\ BB' = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

حال مساحت دوزنقه را محاسبه می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} AH(AA' + BB') = \frac{1}{2} \times 3(4\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) = 15\sqrt{3}$$

در فضای نمونه‌ای ۴ عضوی S، مقادیر احتمال پیشامدهای ساده، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل می‌دهند. کم‌ترین مقدار احتمال یک پیشامد ۲ عضوی چه قدر است؟

$$۰/۱۲۵ (۱)$$

$$۰/۲ (۲)$$

$$۰/۲۲۵ (۳)$$

$$۰/۲۵ (۴)$$



درتس Box

پیشامد ساده: هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم.

فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای S احتمال نابرابر داشته باشند، S را یک فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (۱)$$

$$P(S) = P(s_1) + P(s_2) + P(s_3) + \dots + P(s_n) = 1 \quad (۲)$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (۳)$$

گام اول: S فضای نمونه‌ای چهارعضوی است؛ پس می‌توانیم آن را به صورت $S = \{a, b, c, d\}$ فرض کنیم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: پیشامدهای ساده این فضای نمونه‌ای $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{c\}$ و $\{d\}$ هستند که احتمال آن‌ها به ترتیب برابر $P(a)$ ، $P(b)$ ، $P(c)$ و $P(d)$ است.

گام سوم: مقادیر احتمال این پیشامدهای ساده، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل می‌دهند؛ پس می‌توانیم فرض کنیم:

$$P(a) = x$$

$$P(b) = \frac{1}{4}x$$

$$P(c) = \frac{1}{4^2}x$$

$$P(d) = \frac{1}{4^3}x$$

گام چهارم: مجموع احتمال پیشامدهای ساده برابر ۱ است:

$$P(S) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4^2}x + \frac{1}{4^3}x = 1 \Rightarrow \frac{15}{4}x = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{15}$$

گام پنجم: کم‌ترین مقدار احتمال یک پیشامد ۲ عضوی مربوط به پیشامد $\{c, d\}$ است که احتمال رخ دادن آن برابر است با:

$$P(\{c, d\}) = P(c) + P(d) = \frac{1}{4^2}x + \frac{1}{4^3}x = \frac{3}{4^3}x = \frac{3}{4^3} \times \frac{4}{15} = \frac{1}{20}$$

ریاضیات

۳۲

روی شش وجه یک تاس، عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نوشته شده است. این تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع دو عدد رو شده اول است، با چه احتمالی عدد رو شده حداقل یکی از تاس‌ها برابر ۳ است؟

$\frac{1}{5} (4)$

$\frac{4}{19} (3)$

$\frac{3}{19} (2)$

$\frac{1}{3} (1)$



Hint

کافیست تعداد حالاتی که مجموع اعداد رو شده در دو بار پرتاب تاس، اول است را در مخرج و تعداد حالاتی که مجموع اعداد رو شده در دو بار پرتاب تاس اول است و عدد رو شده حداقل یکی از تاس‌ها برابر ۳ است را در صورت قرار دهید.

درس‌Box

● **احتمال شرطی:** احتمال رخ دادن پیشامد A به شرطی که بدانیم پیشامد B رخ داده است را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

تاس اول تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱						
۲						
۳						
۴						
۵						
۶						

● **پرتاب دو تاس - دو بار پرتاب یک تاس:** برای حل سؤالاتی که در آن‌ها دو تاس پرتاب می‌شود (یا یک تاس دو بار پرتاب می‌شود) و احتمال رخ دادن یک پیشامد خاص را می‌خواهیم، روش‌های مختلفی وجود دارد؛ اما بهترین روش این است که جدولی به شکل مقابل رسم کنیم و حالات مطلوب را در آن مشخص کنیم.

تذکر: ممکن است اعداد روی تاس‌ها به جای اعداد ۱ تا ۶، اعداد دیگری باشند که در این صورت، در جدول آن اعداد را قرار می‌دهیم.

تاس اول تاس دوم	۱	۱	۱	۲	۳	۳
۱	○	○	○	○		
۱	○	○	○	○		
۱	○	○	○	○		
۲	○	○	○		○	○
۳				○		
۳				○		

گام اول: در جدول مقابل، حالاتی که مجموع اعداد رو شده دو بار پرتاب تاس اول است را با دایره مشخص می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: با توجه به جدول بالا، در ۱۹ حالت، مجموع اعداد رو شده دو بار پرتاب تاس، برابر عددی اول است.

تاس اول تاس دوم	۱	۱	۱	۲	۳	۳
۱	○	○	○	○		
۱	○	○	○	○		
۱	○	○	○	○		
۲	○	○	○		⊗	⊗
۳				⊗		
۳				⊗		

گام سوم: در میان این ۱۹ حالت، در چهار حالت مشخص شده با ضربدر، عدد رو شده حداقل یکی از دو بار پرتاب تاس برابر ۳ است؛ پس جواب برابر $\frac{4}{19}$ می‌شود.

اگر یک تیرانداز روحیه خوبی داشته باشد، تیرهایش با احتمال ۷۰ درصد به هدف می‌خورند، ولی اگر روحیه‌اش بد باشد، تیرهایش با احتمال ۴۰ درصد به هدف می‌خورند. اگر تیر او به هدف بخورد، روحیه‌اش خوب می‌شود و اگر تیر او به هدف نخورد روحیه‌اش بد می‌شود. او قرار است ۳ شلیک متوالی داشته باشد؛ اگر قبل از شلیک اول روحیه‌اش خوب باشد، تقریباً با چه احتمالی فقط یکی از تیرهایش به هدف نمی‌خورد؟

$$۰/۳۸ \quad (۴)$$

$$۰/۳۵ \quad (۳)$$

$$۰/۳۲ \quad (۲)$$

$$۰/۲۸ \quad (۱)$$



قانون ضرب احتمال

درس‌Box

تعریف احتمال شرطی، با یک محاسبه ساده به عبارتی تبدیل می‌شود که به آن «قانون ضرب احتمال» گفته می‌شود:

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A) > 0$ ، آنگاه $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$.

از این قانون، معمولاً وقتی استفاده می‌شود که بخواهیم عبارت سمت چپ تساوی را حساب کنیم.

قانون ضرب احتمال را می‌توان برای سه پیشامد نیز نوشت:

اگر A_1, A_2 و A_3 پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند، آنگاه:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: می‌خواهیم از میان ۳ شلیک متوالی، فقط یکی به هدف نخورد، پس سه حالت داریم:

● حالت اول: دو شلیک اول به هدف بخورند ولی شلیک سوم به هدف نخورد.

شلیک اول به احتمال ۷۰ درصد (یا همان $\frac{7}{10}$) به هدف می‌خورد. (چون طبق گفته سؤال، قبل از شلیک اول، روحیه او خوب است.)

$$P(A_1) = \frac{7}{10}$$

شلیک اول به هدف خورده و حالا روحیه تیرانداز خوب است، پس شلیک دوم به احتمال ۷۰ درصد (یا همان $\frac{7}{10}$) به هدف می‌خورد.

$$P(A_2|A_1) = \frac{7}{10}$$

شلیک دوم هم به هدف خورده و حالا باز هم روحیه تیرانداز خوب است، پس شلیک سوم به احتمال ۷۰ درصد به هدف می‌خورد

و به احتمال ۳۰ درصد (یا همان $\frac{3}{10}$) به هدف نمی‌خورد.

$$P(A_3|(A_1 \cap A_2)) = \frac{3}{10}$$

بنابراین در این حالت جواب برابر است با:

دومی به هدف بخورد

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2)) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = 0/147$$

اولی به هدف بخورد سومی به هدف نخورد

● حالت دوم: شلیک اول و سوم به هدف بخورند، ولی شلیک دوم به هدف نخورد.

شلیک اول به احتمال ۷۰ درصد (یا همان $\frac{7}{10}$) به هدف می‌خورد. (چون طبق گفته سؤال، قبل از شلیک اول، روحیه او خوب است.)

$$P(A_1) = \frac{7}{10}$$

شلیک اول به هدف خورده و حالا روحیه تیرانداز خوب است، پس شلیک دوم به احتمال ۷۰ درصد به هدف می‌خورد و به احتمال

۳۰ درصد (یا همان $\frac{3}{10}$) به هدف نمی‌خورد.

$$P(A_2|A_1) = \frac{3}{10}$$

شلیک دوم به هدف نخورده و حالا روحیه تیرانداز بد است، پس شلیک سوم به احتمال ۴۰ درصد (یا همان $\frac{4}{10}$) به هدف می‌خورد.

$$P(A_3|(A_1 \cap A_2)) = \frac{4}{10}$$

بنابراین در این حالت، جواب برابر است با:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} = 0.084$$

↑ دومی به هدف نخورد
↓ اولی به هدف بخورد

● حالت سوم: شلیک دوم و سوم به هدف بخورند، ولی شلیک اول به هدف نخورد.

قبل از شلیک اول، روحیه تیرانداز خوب است، پس شلیک اول به احتمال ۷۰ درصد به هدف می‌خورد و به احتمال ۳۰ درصد (یا همان $\frac{3}{10}$) به هدف نمی‌خورد.

$$P(A_1) = \frac{3}{10}$$

شلیک اول به هدف نخورده و حالا روحیه تیرانداز بد است، پس شلیک دوم به احتمال ۴۰ درصد (یا همان $\frac{4}{10}$) به هدف می‌خورد.

$$P(A_2 | A_1) = \frac{4}{10}$$

شلیک دوم به هدف خورده و حالا روحیه تیرانداز خوب است، پس شلیک سوم به احتمال ۷۰ درصد (یا همان $\frac{7}{10}$) به هدف می‌خورد.

$$P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) = \frac{7}{10}$$

بنابراین در این حالت جواب برابر است با:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} \times \frac{7}{10} = 0.084$$

↑ دومی به هدف بخورد
↓ اولی به هدف بخورد

گام دوم: بنابراین جواب برابر است با:

$$0.147 + 0.084 + 0.084 = 0.315 \xrightarrow{\text{تقریباً}} 0.32$$

ریاضیات

۳۴

سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم؛ اگر «رو» آمد دو سکه دیگر و اگر «پشت» آمد چهار سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی همه سکه‌ها

یکسان می‌آیند؟

$$\frac{5}{16} \quad (۱)$$

$$\frac{7}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{32} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{32} \quad (۴)$$



برای حل سؤالات قانون احتمال کل، کافی است از نمودار درختی کمک بگیرید.

Hint

درس Box

فضای نمونه‌ای پرتاب n سکه 2^n عضو (حالت) دارد.

در آزمایش تصادفی پرتاب n سکه، با احتمال $\frac{1}{2^n}$ همه سکه‌ها «رو» و با احتمال $\frac{1}{2^n}$ همه سکه‌ها «پشت» می‌آیند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: سکه پرتاب شده با احتمال $\frac{1}{2}$ «رو» و با احتمال $\frac{1}{2}$ «پشت» می‌آید.

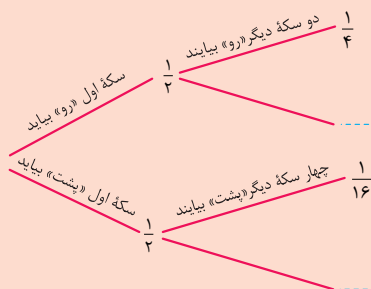
گام دوم: اگر سکه اول «رو» بیاید، دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. حالا می‌خواهیم همه سکه‌ها یکسان باشند، پس این دو سکه باید

«رو» بیایند که احتمال آن $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ است.

گام سوم: اگر سکه اول «پشت» بیاید، چهار سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. حالا می‌خواهیم همه سکه‌ها یکسان باشند، پس این چهار

سکه باید «پشت» بیایند که احتمال آن $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ است.

گام چهارم: نمودار درختی رسم می‌کنیم:



گام پنجم: بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

ریاضیات

۳۵

در سه ظرف A، B و C به ترتیب ۷، ۸ و ۱۰ مهره وجود دارد که به ترتیب ۲، ۳ و ۵ تا از آن‌ها سفیدند. اگر احتمال انتخاب هر ظرف متناسب با تعداد مهره‌های سفید آن باشد، در انتخاب تصادفی یک مهره از یکی از این سه ظرف، احتمال خروج مهره سفید کدام است؟

$$\frac{37}{112} \quad (1)$$

$$\frac{43}{112} \quad (2)$$

$$\frac{47}{112} \quad (3)$$

$$\frac{53}{112} \quad (4)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: تعداد کل مهره‌های سفید برابر $2 + 3 + 5 = 10$ تا است. حالا نسبت مهره‌های سفید در ظرف‌های A، B و C به کل

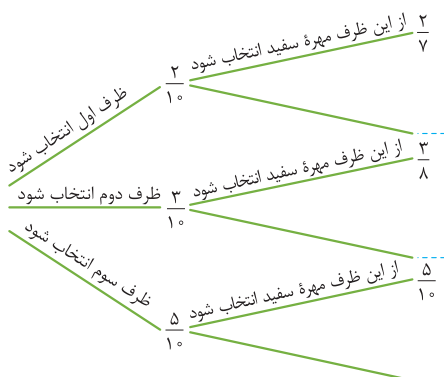
مهره‌های سفید به ترتیب برابر $\frac{2}{10}$ ، $\frac{3}{10}$ و $\frac{5}{10}$ است که احتمال انتخاب هر کدام از این سه ظرف هم برابر همین اعداد است.

گام دوم: در ظرف اول ۷ مهره وجود دارد که ۲ تا از آن‌ها سفید است، پس احتمال انتخاب مهره سفید از ظرف اول $\frac{2}{7}$ است.

در ظرف دوم ۸ مهره وجود دارد که ۳ تا از آن‌ها سفید است، پس احتمال انتخاب مهره سفید از ظرف دوم $\frac{3}{8}$ است.

در ظرف سوم ۱۰ مهره وجود دارد که ۵ تا از آن‌ها سفید است، پس احتمال انتخاب مهره سفید از ظرف سوم $\frac{5}{10}$ است.

گام سوم: نمودار درختی رسم می‌کنیم:



گام چهارم: بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{2}{10} \times \frac{2}{7} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{2}{35} + \frac{9}{80} + \frac{1}{4} = \frac{32 + 63 + 140}{560} = \frac{235}{560} = \frac{47}{112}$$

دانش آموزان دو مدرسه A و B در یک آزمون شرکت کرده‌اند. ۸۰ درصد از دانش آموزان مدرسه A و ۷۵ درصد از دانش آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش آموزان مدرسه A، $\frac{3}{4}$ تعداد دانش آموزان مدرسه B باشد و فردی به تصادف از قبول شدگان انتخاب شود، با کدام احتمال، این فرد از مدرسه A است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{4}{9}$
(۳) $\frac{5}{9}$
(۴) $\frac{12}{35}$

Hint

درس Box

با رسم نمودار درختی و استفاده از قانون بیز به سادگی به جواب می‌رسید.

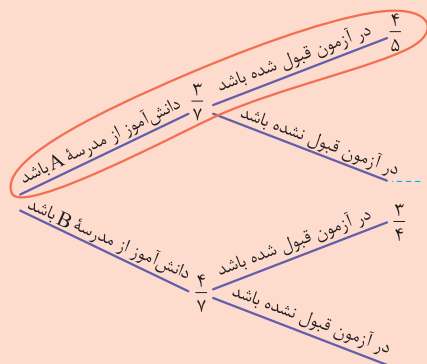
قانون بیز: به شرطی شدن قانون احتمال کل، قانون بیز می‌گوییم.

برای حل سؤالات قانون بیز، ابتدا نمودار درختی را رسم کرده و احتمال کل را محاسبه می‌کنیم و در مخرج قرار می‌دهیم. حالا با قراردادن احتمال رخ دادن شاخه‌های مطلوب در صورت، جواب حاصل می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: تعداد دانش آموزان مدرسه A، $\frac{3}{4}$ تعداد دانش آموزان مدرسه B است، پس می‌توانیم تعداد دانش آموزان مدرسه‌های A و B را به ترتیب $3x$ و $4x$ فرض کنیم.

گام دوم: تعداد کل دانش آموزان در این حالت برابر $3x + 4x = 7x$ می‌شود؛ بنابراین احتمال انتخاب یک دانش آموز از مدرسه A برابر $\frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$ و احتمال انتخاب یک دانش آموز از مدرسه B برابر $\frac{4x}{7x} = \frac{4}{7}$ است.

گام سوم: ۸۰ درصد (یا همان $\frac{4}{5}$) دانش آموزان مدرسه A و ۷۵ درصد (یا همان $\frac{3}{4}$) دانش آموزان مدرسه B در آزمون قبول شده‌اند. **گام چهارم:** نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



گام پنجم: با توجه به نمودار درختی رسم‌شده، احتمال این که یک دانش آموز در آزمون قبول شده باشد، برابر است با:

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{4}$$

گام ششم: از طرفی احتمال این که یک دانش آموز در آزمون قبول شده باشد و از مدرسه A باشد (شاخه مشخص شده)، برابر است با:

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{5}$$

گام هفتم: بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{\frac{3}{7} \times \frac{4}{5}}{\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{12}{35}}{\frac{12}{35} + \frac{3}{7}} = \frac{\frac{12}{35}}{\frac{12+15}{35}} = \frac{\frac{12}{35}}{\frac{27}{35}} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$

۳۷

دو کیسه داریم: در کیسه اول ۳ توپ آبی و ۵ توپ سفید و در کیسه دوم ۷ توپ آبی و ۳ توپ سفید وجود دارد. یک توپ به تصادف از کیسه اول داخل کیسه دوم می‌اندازیم و دو توپ به تصادف از کیسه دوم خارج می‌کنیم. اگر دو توپ خارج شده از کیسه دوم هم‌رنگ باشند، با چه احتمالی از کیسه اول توپ آبی داخل کیسه دوم انداخته‌ایم؟

$$\frac{31}{76} (4)$$

$$\frac{29}{76} (3)$$

$$\frac{27}{76} (2)$$

$$\frac{26}{76} (1)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در کیسه اول ۳ توپ آبی و ۵ توپ سفید وجود دارد، پس احتمال انتخاب توپ آبی از کیسه اول برابر $\frac{3}{8}$ و احتمال انتخاب توپ سفید از آن برابر $\frac{5}{8}$ است.

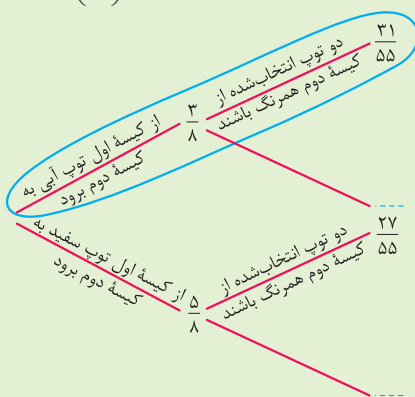
گام دوم: اگر از کیسه اول توپ آبی انتخاب شود و به کیسه دوم برود، کیسه دوم به صورت $\begin{pmatrix} 8 \text{ آبی} \\ 3 \text{ سفید} \end{pmatrix}$ می‌شود. اگر از این کیسه دو توپ انتخاب کنیم، احتمال این که دو توپ هم‌رنگ باشند، برابر است با:

$$\frac{\overbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\text{هر دو آبی}} + \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\text{هر دو سفید}}}{\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{28 + 3}{55} = \frac{31}{55}$$

گام سوم: اگر از کیسه اول توپ سفید انتخاب شود و به کیسه دوم برود، کیسه دوم به صورت $\begin{pmatrix} 7 \text{ آبی} \\ 4 \text{ سفید} \end{pmatrix}$ می‌شود. اگر از این کیسه دو توپ انتخاب کنیم، احتمال این که دو توپ هم‌رنگ باشند، برابر است با:

$$\frac{\overbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\text{هر دو آبی}} + \overbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\text{هر دو سفید}}}{\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{21 + 6}{55} = \frac{27}{55}$$

گام چهارم: نمودار درختی را رسم می‌کنیم:



گام پنجم: با توجه به نمودار درختی رسم شده، احتمال این که دو توپ انتخاب شده از کیسه دوم هم‌رنگ باشند، برابر است با:

$$\frac{3}{8} \times \frac{31}{55} + \frac{5}{8} \times \frac{27}{55}$$

گام ششم: از طرفی، احتمال این که دو توپ انتخاب شده از کیسه دوم هم‌رنگ باشند و از کیسه اول توپ آبی داخل کیسه دوم رفته باشد (شاخه مشخص شده) برابر است با:

$$\frac{3}{8} \times \frac{31}{55}$$

گام هفتم: بنابراین جواب برابر است با:

$$\frac{\frac{3}{8} \times \frac{31}{55}}{\frac{3}{8} \times \frac{31}{55} + \frac{5}{8} \times \frac{27}{55}} = \frac{\frac{93}{440}}{\frac{93}{440} + \frac{135}{440}} = \frac{\frac{93}{440}}{\frac{228}{440}} = \frac{93}{228} = \frac{31}{76}$$

ریاضیات

۳۸

در آزمایش پرتاب دو تاس، سه پیشامد A ، B و C به ترتیب به صورت «عدد تاس اول برابر ۴ باشد»، «مجموع اعداد رو شده دو تاس برابر ۹ باشد» و «عدد تاس اول بزرگتر از عدد تاس دوم باشد» تعریف شده‌اند. کدام پیشامدها مستقل‌اند؟

 A و C (۲) A و B (۱)

(۴) هیچ کدام

 B و C (۳)

پیشامدهای A و B را مستقل می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند.

دستی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: در جدول زیر، اعضای پیشامدهای A ، B و C را به ترتیب با دایره، تیک و ضربدر مشخص کرده‌ایم:

تاس دوم \ تاس اول	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱		×	×	⊗	×	×
۲			×	⊗	×	×
۳				⊗	×	×
۴				○	×	×
۵				⊗		×
۶			✓	○		

$$n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

گام دوم: بنابراین:

$$n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$n(C) = 15 \Rightarrow P(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$n(A \cap C) = 3 \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$n(B \cap C) = 2 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

گام سوم: حالا دقت کنید که:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \text{دو پیشامد } A \text{ و } B \text{ وابسته‌اند.}$$

$$\frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$$

$$P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C) \Rightarrow \text{دو پیشامد } A \text{ و } C \text{ وابسته‌اند.}$$

$$\frac{1}{12} \neq \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{72}$$

$$P(B \cap C) \neq P(B) \cdot P(C) \Rightarrow \text{دو پیشامد } B \text{ و } C \text{ وابسته‌اند.}$$

$$\frac{1}{18} \neq \frac{1}{9} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{108}$$

بنابراین هیچ کدام از پیشامدها مستقل نیستند.

دو پیشامد A و B هم‌شانس و مستقل‌اند. اگر احتمال این‌که حداقل یکی از این دو پیشامد رخ دهد برابر $\frac{2}{3}$ باشد، با چه احتمالی فقط پیشامد A رخ می‌دهد؟

$$P(A) = P(B)$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{3} \quad (۲)$$

$$2-\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$\sqrt{3}-1 \quad (۴)$$



درتس Box

احتمال این‌که هر دو پیشامد A و B رخ دهند برابر است با:

$$P(A \cap B)$$

احتمال این‌که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد برابر است با:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال این‌که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد برابر است با:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = P(B) = x$$

گام اول: طبق تعبیر، $P(A) = P(B)$ است. حالا می‌توانیم فرض کنیم:

گام دوم: دو پیشامد A و B مستقل‌اند؛ پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = x \cdot x = x^2$$

گام سوم: احتمال این‌که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد، برابر $\frac{2}{3}$ است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = x + x - x^2 = \frac{2}{3}$$

احتمال رخ دادن حداقل

یکی از دو پیشامد A و B

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0 \xrightarrow{\Delta = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2 + \sqrt{\frac{8}{3}}}{2} = \frac{2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \quad \times \text{ غ ق چون } x \text{ بزرگتر از ۱ است.} \\ x = \frac{2 - \sqrt{\frac{8}{3}}}{2} = \frac{2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \quad \checkmark \end{array} \right.$$

گام چهارم: احتمال این‌که فقط A رخ دهد (یا به عبارت دیگر A رخ دهد و B رخ ندهد) برابر است با:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = x - x^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} - \frac{9+3-6\sqrt{3}}{9}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{3} - \frac{4-2\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}-4+2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{3}$$

ریاضیات

۴۰. نه کارت با شماره‌های ۱ تا ۹ در کیسه‌ای قرار دارند. سه کارت به طور تصادفی، پی‌درپی و بدون جای‌گذاری از کیسه خارج می‌کنیم. با چه احتمالی کارت اول مضرب ۳، کارت دوم زوج و کارت سوم عددی اول است؟

$$\frac{37}{504} \quad (2)$$

$$\frac{31}{504} \quad (1)$$

$$\frac{43}{504} \quad (4)$$

$$\frac{41}{504} \quad (3)$$



Hint

چون در بین اعداد مضرب ۳، اعداد زوج و اعداد اول، اعداد مشترک داریم، باید حالت بندی کنیم:

اعداد مضرب ۳: ۳، ۶، ۹

اعداد زوج: ۲، ۴، ۶، ۸

اعداد اول: ۲، ۳، ۵، ۷

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: اعداد مضرب ۳، اعداد زوج و اعداد اول به شکل مقابل‌اند:

گام دوم: عدد کارت اول می‌تواند برابر ۳، ۶ یا ۹ باشد. حالا سه حالت در نظر می‌گیریم:

● حالت اول: اگر عدد کارت اول ۳ باشد، برای عدد کارت دوم دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) عدد کارت دوم برابر ۲ باشد.

ب) عدد کارت دوم برابر ۴، ۶ یا ۸ باشد.

در این حالت، جواب برابر است با:

$$\begin{aligned} & \text{عدد کارت سوم } 5, 7 \text{ یا } 9 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت اول } 3 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت دوم } 2 \text{ باشد} \\ & \left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{2}{7} \right) + \left(\frac{1}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} \right) \\ & \text{عدد کارت دوم } 4, 6 \text{ یا } 8 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت سوم } 5 \text{ یا } 7 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت اول } 3 \text{ باشد} \\ & = \frac{2}{504} + \frac{9}{504} = \frac{11}{504} \end{aligned}$$

● حالت دوم: اگر عدد کارت اول ۶ باشد، برای عدد کارت دوم دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) عدد کارت دوم برابر ۲ باشد.

ب) عدد کارت دوم برابر ۴ یا ۸ باشد.

در این حالت، جواب برابر است با:

$$\begin{aligned} & \text{عدد کارت سوم } 5, 7 \text{ یا } 9 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت اول } 6 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت دوم } 2 \text{ باشد} \\ & \left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{7} \right) + \left(\frac{1}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{4}{7} \right) \\ & \text{عدد کارت دوم } 4 \text{ یا } 8 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت سوم } 5, 7 \text{ یا } 9 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت اول } 6 \text{ باشد} \\ & = \frac{3}{504} + \frac{8}{504} = \frac{11}{504} \end{aligned}$$

● حالت سوم: اگر عدد کارت اول ۹ باشد، برای عدد کارت دوم دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) عدد کارت دوم برابر ۲ باشد.

ب) عدد کارت دوم برابر ۴، ۶ یا ۸ باشد.

در این حالت، جواب برابر است با:

$$\begin{aligned} & \text{عدد کارت سوم } 5, 7 \text{ یا } 9 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت اول } 9 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت دوم } 2 \text{ باشد} \\ & \left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{7} \right) + \left(\frac{1}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{4}{7} \right) \\ & \text{عدد کارت دوم } 4 \text{ یا } 8 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت سوم } 5, 7 \text{ یا } 9 \text{ باشد} \quad \text{عدد کارت اول } 9 \text{ باشد} \\ & = \frac{3}{504} + \frac{12}{504} = \frac{15}{504} \end{aligned}$$

$$\frac{11}{504} + \frac{11}{504} + \frac{15}{504} = \frac{37}{504}$$

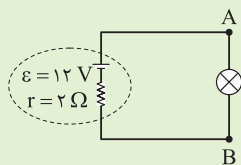
گام سوم: بنابراین جواب برابر است با:

فیزیک

۴۱

در مدار شکل زیر، مقاومت الکتریکی لامپ برابر 4Ω است. در هر دقیقه چند الکترون و در چه جهتی از لامپ عبور می‌کند؟

$$(e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$$



(۱) 7.5×10^{20} ، از A به B

(۲) 7.5×10^{20} ، از B به A

(۳) 1.5×10^{20} ، از A به B

(۴) 1.5×10^{20} ، از B به A



درس Box

کوانتیده بودن بار الکتریکی؛ همواره بار الکتریکی یک جسم، مضرب درستی از یک مقدار پایه (بار بنیادی e) است و هر مقدار دلخواهی نمی‌تواند داشته باشد:

$$q = \pm n e, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

تعداد الکترون مبادله شده

علامت +: برای جسمی که الکترون از دست داده است.

علامت -: برای جسمی که الکترون گرفته است.

آهنگ شارش بار الکتریکی در رسانا، معادل با متوسط جریان الکتریکی عبوری از آن است.

$$\bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \text{کولن} = \frac{\text{آمپر}}{\text{ثانیه}}$$

I : جریان الکتریکی متوسط برحسب آمپر (A)

Δq : بار الکتریکی خالص عبوری برحسب کولن (C)

Δt : مدت زمان برحسب ثانیه (s)

جریان عبوری از یک مدار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

I : جریان مدار (A)

ε : نیرو محرکه خالص (V)

(منظور از خالص برای زمانی است که در مدار دو مولد داریم و یکی از آن‌ها کوچک‌تر و خلاف جهت جریان است. در این شرایط آن را از نیروی محرکه بزرگ‌تر کم می‌کنیم.)

R_{eq} : مقاومت معادل مقاومت‌های مدار (Ω)

r : مجموع مقاومت‌های درونی مولدها (Ω)

جهت جریان عبوری در مدار همواره به صورت قراردادی در خلاف جهت حرکت الکترون‌ها است. درون سیم رسانا یک میدان الکتریکی از سر مثبت مولد به سر منفی آن ایجاد می‌شود، الکترون‌ها خلاف جهت میدان حرکت می‌کنند، اما به صورت قراردادی جهت جریان را از قطب مثبت به قطب منفی باتری در نظر می‌گیریم.

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \Rightarrow I = \frac{12}{4 + 2} = 2 \text{ A}$$

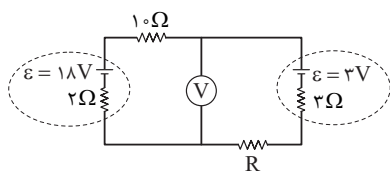
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

$$q = It = ne \Rightarrow 2 \times 60 = n \times 1.6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = 7.5 \times 10^{19} = 7.5 \times 10^{20}$$

گام دوم: با توجه به این که جهت جریان از قطب مثبت باتری خارج شده و درون مدار از A به B است، جهت حرکت الکترون‌ها در خلاف جهت جریان، یعنی از B به A می‌باشد.

فیزیک

۴۲ در مدار شکل زیر، ولت‌سنج آرمانی ۹V را نشان می‌دهد. مقاومت R چند اهم است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

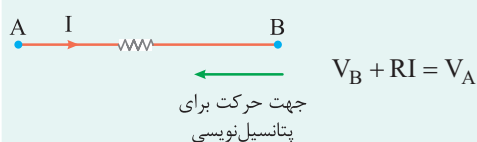
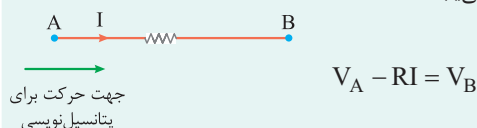
۵ (۳)

۶ (۴)



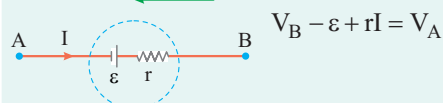
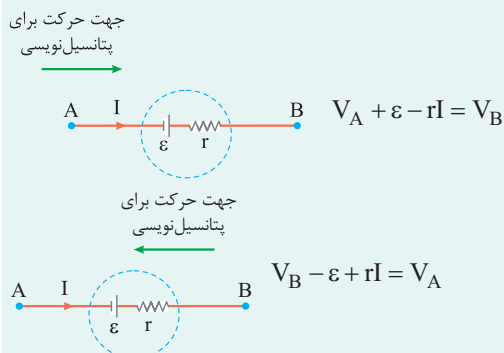
درس‌Box

هرگاه در مدار در جهت جریان از مقاومت R یا r بگذریم، پتانسیل الکتریکی به اندازه RI یا rI کاهش می‌یابد و اگر در خلاف جهت جریان حرکت کنیم پتانسیل الکتریکی به همان اندازه افزایش می‌یابد:

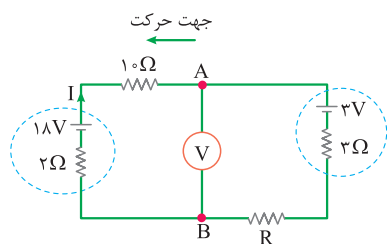


در هنگام عبور از درون باتری و از قطب منفی به مثبت، پتانسیل الکتریکی به اندازه نیروی محرکه افزایش می‌یابد و بالعکس؛ بنابراین در پتانسیل‌نویسی بین دو نقطه هنگامی که به قطب منفی باتری رسیدیم علامت مثبت گذاشته و بالعکس.

توجه کنید که این موضوع از جهت جریان مستقل است و در عملیات پتانسیل‌نویسی، با مقاومت درونی باتری، مانند یک مقاومت خارجی رفتار می‌کنیم.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ اختلاف پتانسیل دو نقطه A و B در شکل زیر همان عدد ولت‌سنج آرمانی است؛ بنابراین:



$$V_A + 10I - 18 + 2I = V_B$$

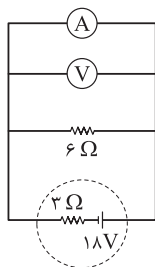
$$V_A - V_B = 18 - 12I = 9 \Rightarrow I = \frac{3}{4} A$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{18 - 3}{2 + 2 + 10 + R} = \frac{3}{4} \Rightarrow R = 5 \Omega$$

فیزیک

۴۳

در مدار شکل زیر، آمپرسنج آرمانی و ولتسنج آرمانی به ترتیب از راست به چپ، چند آمپر و چند ولت را نشان می‌دهند؟



(۱) ۱۲V، ۲A

(۲) ۲A، صفر

(۳) ۱۸V، صفر

(۴) ۶A، صفر



درس‌Box

آمپرسنج در مدار به صورت سری بسته می‌شود و جریان شاخه مدار را نشان می‌دهد.

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$$

مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است؛ بنابراین اگر اشتباهاً آن را در مدار به صورت موازی ببندیم مانند اتصال کوتاه عمل می‌کند و شاخه‌ای از مدار که به آن بسته شده از مدار حذف می‌شود.

ولتسنج در مدار به صورت موازی به هر جزء بسته می‌شود. اگر ولتسنج به مقاومت متصل شود عدد RI را نشان می‌دهد و اگر به مولد متصل شود در صورتی که جریان در مدار برقرار نباشد نیروی محرکه مولد (ε) را نشان می‌دهد و اگر جریان در مدار برقرار باشد، ولتسنج عدد $V = \varepsilon \mp rI$ (برای مولد منفی و برای ضدمولد مثبت) را نشان می‌دهد. اگر اشتباهاً ولتسنج آرمانی را در مدار به صورت سری ببندیم به دلیل این که مقاومت آن بی‌نهایت است جریان در آن شاخه صفر می‌شود.

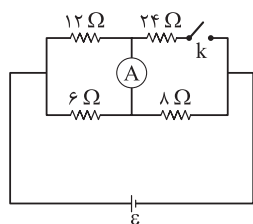
مقاومت ۶ اهمی، ولتسنج آرمانی و آمپرسنج آرمانی به صورت موازی به هم متصل شده‌اند؛ بنابراین با توجه به این که مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است، کل جریان از آن عبور می‌کند؛ بنابراین مقاومت ۶ اهمی و در نتیجه ولتسنج از مدار حذف می‌شوند که ولتسنج عدد صفر را نشان خواهد داد. عدد آمپرسنج نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \Rightarrow I = \frac{18}{3} = 6A$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در مدار شکل زیر، اگر کلید را ببندیم، جریان الکتریکی عبوری از آمپرسنج آرمانی 7 A تغییر می‌کند. نیروی محرکه مولد آرمانی

چند ولت است؟



(۱) ۲۴

(۲) ۳۶

(۳) ۴۸

(۴) ۶۰



اتصال مقاومت‌ها به یکدیگر:

درس Box

(۱) **اتصال سری (متوالی):** در این حالت شدت جریان عبوری از هر یک از مقاومت‌ها با یکدیگر یکسان است و مقاومت معادل عبارت است از:

$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

• اگر n مقاومت مشابه R را به طور سری (متوالی) به یکدیگر متصل کنیم، مقاومت معادل آن‌ها عبارت است از:

$$R_T = nR$$

• در این حالت مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌ها بزرگ‌تر است.

• از یک مقاومت سری (متوالی) به مدار اضافه شود مقاومت معادل افزایش می‌یابد و اگر از مدار کم شود، مقاومت معادل کاهش می‌یابد.

(۲) **اتصال موازی:** در این حالت، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌ها با یکدیگر یکسان است و مقاومت معادل عبارت است از:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

• اگر n مقاومت مشابه R را به صورت موازی ببندیم، مقاومت معادل مدار عبارت است از:

$$R_T = \frac{R}{n}$$

• اگر دو مقاومت R_1 و R_2 را به صورت موازی متصل کنیم، مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

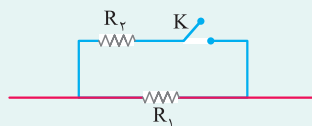
$$R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

• در حالت موازی، مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌ها کوچک‌تر است.

• اگر یک مقاومت را به صورت موازی به مدار اضافه کنیم، مقاومت معادل کاهش می‌یابد و بالعکس.

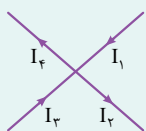
بسته‌شدن کلید در یک مدار می‌تواند یک مقاومت را به مدار اضافه کند:

در شکل مقابل، با بستن کلید K مقاومت R_2 به مدار اضافه می‌شود.



قاعده انشعاب جریان:

طبق این قانون مجموع جریان‌های ورودی به هر گره برابر است با مجموع جریان‌های خروجی از همان گره.

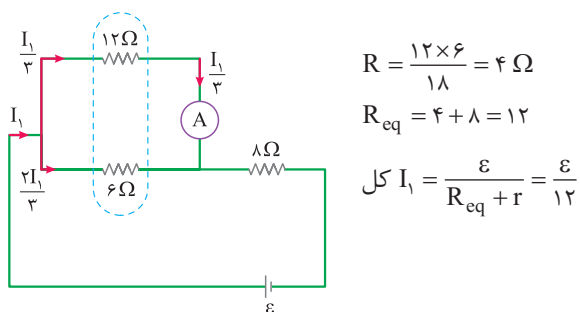


$$I_1 + I_2 = I_3$$

فیزیک

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در حالت اول که کلید باز است مقاومت ۲۴ اهمی از مدار حذف می‌شود؛ بنابراین جریان به صورت شکل زیر در مدار برقرار خواهد بود:

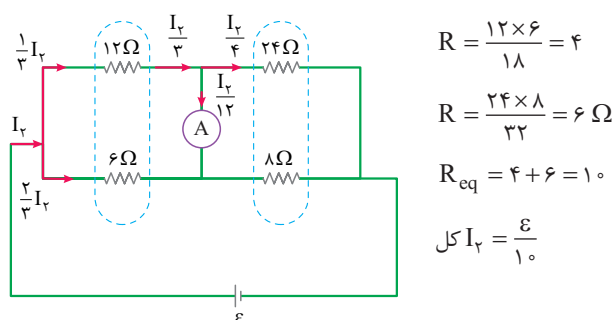


جریان عبوری از مقاومت ۱۲ اهمی: $\frac{12}{6} = \frac{I_6}{I_{12}} \rightarrow 12I_{12} = 6I_6 \Rightarrow I_6 = 2I_{12}$

که این همان جریان عبوری از آمپرسنج است: $I_6 + I_{12} = I_1 \Rightarrow I_{12} = \frac{I_1}{3}$

عدد آمپرسنج A_1 : $\frac{I_1}{3} = \frac{\varepsilon}{12} \times \frac{1}{3} = \frac{\varepsilon}{36}$

در حالت دوم که کلید بسته است، مقاومت‌های ۱۲ و ۶ اهمی با هم موازی و مقاومت‌های ۲۴ و ۸ اهمی نیز با هم موازی هستند و معادل آن‌ها با یکدیگر سری می‌باشند.



(قبلاً نسبت آن را محاسبه کرده‌ایم): $\frac{I_2}{3}$: جریان عبوری از مقاومت ۱۲ اهمی

جریان عبوری از مقاومت ۲۴ اهمی: $\frac{24}{8} = \frac{I_8}{I_{24}} \Rightarrow 24I_{24} = 8I_8 \Rightarrow I_{24} = \frac{I_8}{3}$

$I_8 + I_{24} = I_2 \Rightarrow I_{24} = \frac{I_2}{4}$

با توجه به قاعده انشعاب: $A_2 = \frac{I_2}{3} - \frac{I_2}{4} = \frac{I_2}{12} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{12} \times \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{120}$

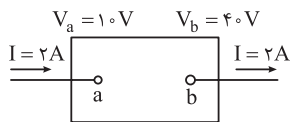
$\Delta A = \frac{\varepsilon}{36} - \frac{\varepsilon}{120} = \frac{7\varepsilon}{360} = 0.7 \Rightarrow \varepsilon = 36V$

فیزیک

۴۵

شکل زیر یک رسانای الکتریکی را نشان می‌دهد که در یک مدار الکتریکی قرار دارد. این رسانا در هر دقیقه چند کیلوژول انرژی

الکتریکی و چگونه مبادله می‌کند؟



(۱) $3/6$ ، به آن وارد می‌شود.

(۲) $3/6$ ، از آن خارج می‌شود.

(۳) $7/2$ ، به آن وارد می‌شود.

(۴) $7/2$ ، از آن خارج می‌شود.



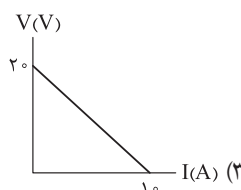
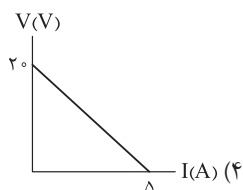
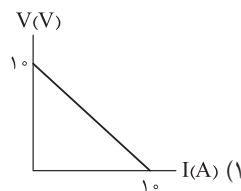
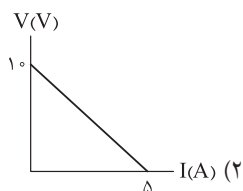
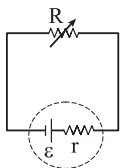
پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به جهت جریان که از پتانسیل بیشتر خارج شده است، نتیجه می‌گیریم که انرژی الکتریکی نیز از آن خارج می‌شود (بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند). حال برای محاسبه انرژی خروجی از رسانا داریم:

$$P = \Delta VI \rightarrow P = (40 - 10) \times 2 = 60 \text{ W}$$

$$U = P \times \Delta t \rightarrow U = 60 \times 60 = 3600 \text{ J} \rightarrow U = 3/6 \text{ kJ}$$



در شکل زیر، یک مقاومت متغیر به یک باتری متصل است. توان خروجی باتری به ازای جریان عبوری ۱ A برابر ۸ W و به ازای جریان عبوری ۲ A برابر ۱۲ W است. نمودار اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر این باتری، بر حسب جریان عبوری از آن به صورت کدام شکل است؟



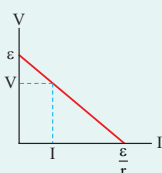
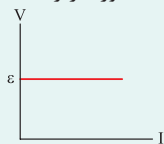
درس‌Box

$$P_{\text{خروجی}} = \varepsilon I - r I^2$$

توان تلف‌شده توان تولیدی

توان خروجی باتری برابر است با توان تولیدی آن منهای توان تلف‌شده توسط مقاومت درونی باتری:

نمودار ولتاژ دو سر باتری بر حسب شدت جریان عبوری از آن در دو حالت باتری ایده‌آل ($r=0$) و غیرایده‌آل ($r \neq 0$) به صورت زیر است:



$$r=0 \Rightarrow \text{ولتاژ دو سر باتری } V = \varepsilon$$

$$r \neq 0 \Rightarrow \text{ولتاژ دو سر باتری } V = \varepsilon - rI$$

$$\text{شیب نمودار} = \frac{\varepsilon - V}{-I} = \frac{rI}{-I} = -r$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا از رابطه توان خروجی مولد مقدار مقاومت درونی و نیروی محرکه مولد را به دست می‌آوریم:

$$P = \varepsilon I - rI^2$$

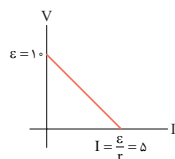
$$\text{حالت اول: } I=1, P=8 \Rightarrow 8 = \varepsilon - r$$

$$\text{حالت دوم: } I=2, P=12 \Rightarrow 12 = 2\varepsilon - 4r$$

$$-4 \times \begin{cases} 8 = \varepsilon - r \\ 12 = 2\varepsilon - 4r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -32 = -4\varepsilon + 4r \\ 12 = 2\varepsilon - 4r \end{cases}$$

$$-20 = -2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 10, r = 2$$

گام دوم: حال نمودار $V-I$ را برای این مولد به صورت مقابل رسم می‌کنیم:



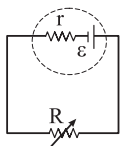
در مدار شکل زیر، مقدار مقاومت الکتریکی رئوستا در حالت اول برابر $2\ \Omega$ و در حالت دوم برابر $32\ \Omega$ است. توان خروجی باتری در این دو حالت برابر می‌شود. اگر مقاومت الکتریکی رئوستا به تدریج از $10\ \Omega$ به $20\ \Omega$ برسد، توان خروجی باتری چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) پیوسته افزایش می‌یابد.

(۲) پیوسته کاهش می‌یابد.

(۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

(۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

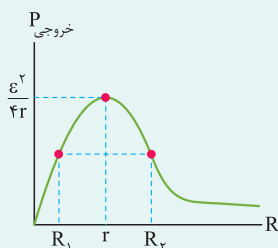


تغییرات توان خروجی باتری بر حسب مقاومت معادل مدار:

در مدار ساده شکل زیر، می‌خواهیم ببینیم با تغییر مقاومت R ، توان خروجی از باتری چگونه تغییر می‌کند. با توجه به این که توان خروجی از باتری، همان توان مصرف‌شده در مقاومت R است، می‌توان گفت:

$$\begin{cases} I = \frac{\varepsilon}{r + R} \\ P_{\text{خروجی}} = RI^2 \end{cases} \Rightarrow P_{\text{خروجی}} = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}$$

حال با توجه به این رابطه، نمودار توان خروجی را بر حسب مقاومت رسم می‌کنیم که در این نمودار نکات زیر دارای اهمیت زیادی است:



(۱) زمانی که $R = r$ است، توان خروجی باتری بیشینه می‌شود.

(۲) اگر $R < r$ باشد، نمودار به صورت صعودی است، یعنی با افزایش مقاومت R ، توان خروجی از باتری افزایش می‌یابد.

(۳) اگر $R > r$ باشد، نمودار به صورت نزولی است، یعنی با افزایش مقاومت R ، توان خروجی از باتری کاهش می‌یابد.

(۴) اگر به ازای دو مقاومت R_1 و R_2 ، توان خروجی از باتری یکسان باشد، آن‌گاه رابطه $R_1 R_2 = r^2$ یا $r = \sqrt{R_1 R_2}$ برقرار است.

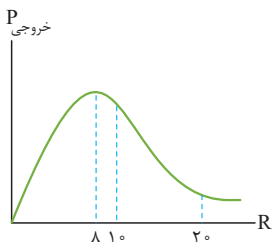
پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این که در دو مقاومت $R_1 = 2\ \Omega$ و $R_2 = 32\ \Omega$ توان خروجی باتری یکسان است؛ بنابراین در مقاومت $R = r = \sqrt{R_1 R_2}$

$$r = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} \rightarrow r = 8\ \Omega$$

توان خروجی از باتری بیشینه خواهد شد.

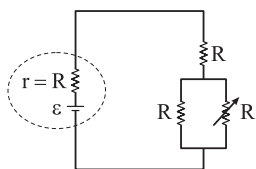
در نتیجه در نمودار توان خروجی، بر حسب مقاومت در محدوده مقاومت $10\ \Omega$ تا $20\ \Omega$ مشاهده می‌شود که توان خروجی از باتری کاهش می‌یابد.



فیزیک

۴۸

در مدار شکل زیر، مقاومت رئوستا ابتدا روی مقدار R تنظیم شده است. اگر مقاومت رئوستا را دو برابر کنیم، توان خروجی باتری چند برابر می‌شود؟



$$\frac{15}{16} \quad (2)$$

$$\frac{125}{128} \quad (4)$$

$$\frac{9}{10} \quad (1)$$

$$\frac{124}{125} \quad (3)$$



Hint

از رابطه توان خروجی مولد بر حسب مقاومت و نیروی محرکه مولد توان را در دو حالت محاسبه کنید و نسبت آن‌ها را بیابید.

$$(P = \frac{R_{eq} \times \varepsilon^2}{(r + R_{eq})^2})$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}, \quad P = \varepsilon I - rI^2 \Rightarrow P = \frac{R_{eq} \varepsilon^2}{(r + R_{eq})^2}$$

$$\text{حالت اول: } R_{eq} = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R \Rightarrow P_1 = \frac{\frac{3}{2}R \times \varepsilon^2}{(\frac{5}{2}R)^2} \Rightarrow P_1 = \frac{\frac{3}{2} \times \varepsilon^2}{\frac{25}{4}R}$$

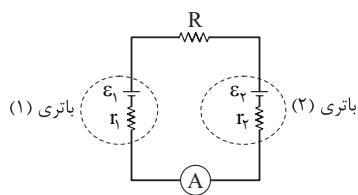
$$\text{حالت دوم: } R_{eq} = \frac{2R}{3} + R = \frac{5}{3}R \Rightarrow P_2 = \frac{\frac{5}{3}R \times \varepsilon^2}{(\frac{8}{3}R)^2} \Rightarrow P_2 = \frac{\frac{5}{3} \times \varepsilon^2}{\frac{64}{9}R}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\frac{5}{3} \varepsilon^2}{\frac{64}{9}R}}{\frac{\frac{3}{2} \varepsilon^2}{\frac{25}{4}R}} = \frac{125}{128}$$

فیزیک

۴۹

در مدار شکل زیر، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد برابر 2 A است. اگر توان خروجی باتری (۱) برابر 52 W و توان ورودی باتری (۲) برابر 40 W باشد، مقاومت R چند اهم است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶



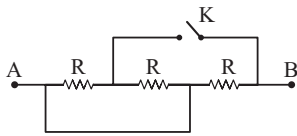
$$P_{\text{مصرفی مقاومت}} = P_{\text{مصرفی مقاومت}} + P_{\text{ورودی مولد}} \Rightarrow 52 = P_{\text{مصرفی مقاومت}} + 40 \Rightarrow P_{\text{مصرفی مقاومت}} = 12\text{ W}$$

$$P_{\text{مصرفی مقاومت}} = RI^2 \Rightarrow 12 = R \times (2)^2 \Rightarrow R = 3\ \Omega$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۵۰ در شکل زیر، با بستن کلید K، مقاومت معادل بین دو نقطه A و B چند برابر می‌شود؟



(۱) $\frac{1}{3}$

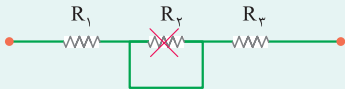
(۲) ۳

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$

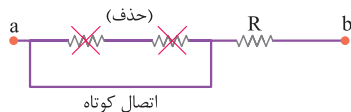
درس Box

اتصال کوتاه: هرگاه دو سر یک مقاومت توسط سیم به هم متصل شود آن مقاومت اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شود.



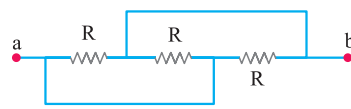
تذکر: اگر چند مقاومت سری باشند و یکی از آن‌ها اتصال کوتاه شود فقط همان مقاومت از مدار حذف می‌شود، اما اگر چند مقاومت با یکدیگر موازی باشند و یکی از آن‌ها اتصال کوتاه شود، تمامی مقاومت‌های دیگر که با آن موازی هستند نیز از مدار حذف می‌شوند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



در حالت اول:

$$R_{eq} = R$$



در حالت دوم:

$$R_{eq} = \frac{R}{3}$$

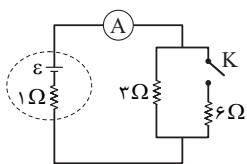
سه مقاومت موازی هستند.

$$\frac{R_{eq(2)}}{R_{eq(1)}} = \frac{\frac{R}{3}}{R} = \frac{1}{3}$$

فیزیک

۵۱

در مدار شکل زیر، با بستن کلید K، عددی که آمپرسنج نشان می‌دهد ۲۰ درصد افزایش می‌یابد. مقاومت الکتریکی این آمپرسنج چند اهم است؟



(۱) ۰/۵

(۲) ۱

(۳) ۱/۵

(۴) ۲


 Hint

در دو حالت کلید باز و کلید بسته جریان کل مدار را از رابطه $(I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r})$ محاسبه کنید و نسبت آن‌ها را $(\frac{I_2}{I_1})$ برابر با ۱/۲ قرار دهید تا مقاومت آمپرسنج محاسبه شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{مقاومت } 6\Omega \text{ حذف می‌شود.} \quad I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} \rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon}{3 + 1 + R_{\text{آمپرسنج}}} \Rightarrow I_1 = \frac{\varepsilon}{4 + R_{\text{آمپرسنج}}}$$

حالت اول (کلید باز):

$$\text{مقاومت } 3\Omega, 6\Omega \text{ موازی} \rightarrow \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\Omega \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{2 + 1 + R_{\text{آمپرسنج}}} \Rightarrow I_2 = \frac{\varepsilon}{3 + R_{\text{آمپرسنج}}}$$

حالت دوم (کلید بسته):

$$\frac{I_2}{I_1} = 1/2 = \frac{6}{5} = \frac{\frac{\varepsilon}{3 + R_{\text{آمپرسنج}}}}{\frac{\varepsilon}{4 + R_{\text{آمپرسنج}}}} \Rightarrow R_{\text{آمپرسنج}} = 2\Omega$$

فیزیک

۵۲

دو لامپ رشته‌ای 100 W ، یک بخاری برقی 2000 W ، یک دستگاه پخش صوت 200 W و یک ششوار 2000 W به پریزهای یک مدار سیم‌کشی خانگی 220 V مجهز به فیوز، وصل شده‌اند. اگر همه این مصرف‌کننده‌ها را با هم روشن کنیم، چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

- الف) مقاومت معادل این مصرف‌کننده‌ها برابر 11Ω است.
 ب) جریان کل گذرنده از شاخه اصلی سیم‌کشی این خانه برابر 3 A است.
 پ) اگر فیوز به کاررفته، فیوز 25 A باشد، جریان قطع خواهد شد.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳



پاسخ خیلی تشریحی ✓ الف) درست؛

$$P_{\text{کل}} = P_{\text{ششوار}} + P_{\text{دستگاه پخش صوت}} + P_{\text{بخاری برقی}} + P_{\text{لامپ‌ها}}$$

$$P_{\text{کل}} = 2(100) + 2000 + 200 + 2000 = 4400\text{ W}$$

$$P_{\text{کل}} = \frac{V_{\text{کل}}^2}{R_{\text{eq}}} \Rightarrow 4400 = \frac{220^2}{R_{\text{eq}}} \Rightarrow R_{\text{eq}} = 11\Omega$$

(ب) نادرست؛

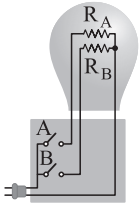
$$P_{\text{کل}} = V_{\text{کل}} I_{\text{کل}} \Rightarrow 4400 = 220 \times I_{\text{کل}} \Rightarrow I_{\text{کل}} = 20\text{ A}$$

(پ) نادرست؛ در قسمت «ب» محاسبه کردیم که جریان کل عبوری از کنتور وسایل 20 A است؛ بنابراین فیوز 25 آمپر مناسب است و قطع نمی‌شود.

فیزیک

۵۳

یک لامپ سه راهه $200V$ که دو رشته با مقاومت‌های الکتریکی $R_A = 400\Omega$ و $R_B = 200\Omega$ دارد، مطابق شکل برای کار در سه توان مختلف ساخته شده است. کم‌ترین و بیشترین توان مصرفی این لامپ به ترتیب چند وات است؟

(۱) $200, 100$ (۲) $300, 100$ (۳) $100, 50$ (۴) $150, 50$ 

Hint

توان مصرفی را در سه حالت از طریق رابطه $P = \frac{V^2}{R}$ محاسبه کنید و بیشترین و کم‌ترین آن را تعیین نمایید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

سه حالت برای روشنایی این لامپ داریم:

(۱) حالتی که فقط کلید A متصل باشد.

(۲) حالتی که فقط کلید B متصل باشد.

(۳) حالتی که هر دو کلید A و B متصل باشند؛ بنابراین:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

$$P_A = \frac{200^2}{400} = 100W, \quad P_B = \frac{200^2}{200} = 200W, \quad P_{A||B} = 100 + 200 = 300W$$

$$P_{\min} = 100W, \quad P_{\max} = 300W$$

فیزیک

۵۴

n لامپ مشابه را در حالت اول به طور متوالی و در حالت دوم به طور موازی به یکدیگر بسته و مجموعه آنها را در هر دو حالت به ولتاژ معین V وصل می‌کنیم. اگر مجموع توان مصرف‌شده لامپ‌ها در حالت دوم، ۱۶ برابر مجموع توان مصرف‌شده آنها در حالت اول باشد،

n کدام است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{در حالت اول: } R_{eq} = nR, \quad P = \frac{V^2}{R_{eq}} \Rightarrow P_1 = \frac{V^2}{nR}$$

$$\text{در حالت دوم: } R_{eq} = \frac{R}{n} \Rightarrow P_2 = \frac{V^2}{\frac{R}{n}} = \frac{nV^2}{R}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 16 \Rightarrow \frac{\frac{nV^2}{R}}{\frac{V^2}{nR}} = 16 \Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4$$

فیزیک

۵۵

وقتی دو سر یک بخاری برقی را به اختلاف پتانسیل ۲۲۰۷ وصل می‌کنیم، جریان ۱۲A از آن می‌گذرد. اگر این بخاری به مدت ۴ ساعت در روز کار کند و قیمت برق مصرفی به ازای هر کیلووات ساعت ۵۰ تومان باشد، هزینه یک ماه (۳۰ روز) مصرف برق این بخاری چند تومان است؟

(۱) ۱۴۶۴۰۰

(۲) ۱۴۶۴۰

(۳) ۱۵۸۴۰۰

(۴) ۱۵۸۴۰



Hint

ابتدا از رابطه $P = VI$ توان مصرفی را محاسبه کنید و آن را به کیلووات تبدیل کرده، سپس مدت‌زمان کل مصرف را در توان و قیمت ضرب کنید تا هزینه کل به دست آید.

$$P = VI \Rightarrow P = 220 \times 12 = 2640 \text{ W} = 2.64 \text{ kW}$$

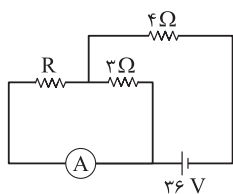
$$\text{تومان هزینه مصرفی} = 2.64 \times 4 \times 30 \times 50 = 15840$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فیزیک

۵۶

در مدار شکل زیر، اگر مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، $2A$ باشد، مقاومت R چند اهم است؟



۲ (۱)

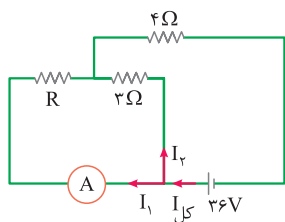
۳ (۲)

۶ (۳)

۱۲ (۴)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به شکل، دو مقاومت 3Ω و R موازی هستند و جریان کل بین آن‌ها تقسیم می‌شود.



$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R}{3} \Rightarrow I_2 = \frac{3I_1}{R} \Rightarrow I_1 = \frac{3}{R} (I_3 - I_1) \Rightarrow I_1 = \frac{3}{R+3} I_3$$

$$I_3 = \frac{36}{\frac{3R}{3+R} + 4} \Rightarrow 2 = \frac{3}{R+3} \times \frac{36}{\frac{3R}{3+R} + 4} \Rightarrow 2 = \frac{3}{R+3} \times \frac{36(R+3)}{3R+12} \Rightarrow 2 = \frac{3 \times 36}{3R+12}$$

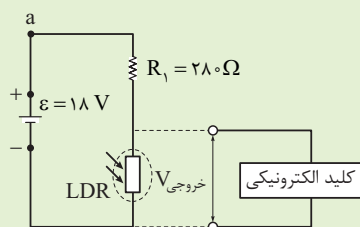
$$\Rightarrow 3R+12 = 54 \Rightarrow 3R = 42$$

$$R = 14\Omega$$

فیزیک

۵۷

در مدار شکل زیر، با تاریک تر شدن محیط و رسیدن مقاومت الکتریکی LDR به $200\ \Omega$ ، کلید الکترونیکی فعال می شود. کمینه ولتاژ مورد نیاز برای فعال شدن این کلید الکترونیکی، چند ولت است؟



(۱) ۲/۵

(۲) ۵

(۳) ۶

(۴) ۷/۵



$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_L} \Rightarrow I = \frac{18}{280 + 200} \Rightarrow I = 0.0375\text{ A}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا جریان عبوری را محاسبه می کنیم:

حال می توانیم کمینه ولتاژ مورد نیاز برای فعال شدن کلید الکترونیکی را به صورت زیر محاسبه کنیم:

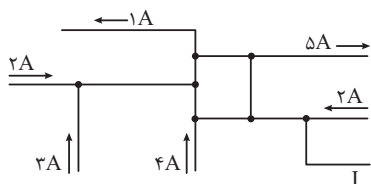
$$V = R_L \times I \Rightarrow V = 200 \times 0.0375 \Rightarrow V = 7.5\text{ V}$$

دقت کنید که در صورت سؤال گفته شده با رسیدن مقاومت LDR به $200\ \Omega$ کلید فعال می شود، یعنی همین مقدار مقاومت، کمینه جریان را عبور می دهد.

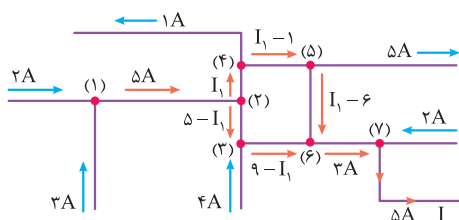
فیزیک

۵۸

شکل زیر، بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد، جریان الکتریکی I ، چند آمپر و در چه جهتی است؟

(۱) I ، ←(۲) I ، →(۳) I ، →(۴) I ، ←

پاسخ خیلی تشریحی ✓



در گره (۱) دو جریان $2A$ و $3A$ ورودی هستند؛ بنابراین جریان $5A$ خروجی خواهد بود.

در گره (۲) جریان $5A$ ورودی و جریان‌های I_1 و $5 - I_1$ خروجی هستند.

در گره (۳) جریان $4A$ به همراه جریان $5 - I_1$ ورودی؛ در نتیجه جریان $9 - I_1$ خروجی خواهد بود.

در گره (۴) جریان I_1 ورودی و جریان‌های $1A$ و $I_1 - 1$ خروجی خواهند بود.

در گره (۵) جریان $I_1 - 1$ ورودی؛ در نتیجه $5A$ و $I_1 - 6$ خروجی هستند.

در گره (۶) جریان $I_1 - 6$ و $9 - I_1$ ورودی؛ در نتیجه جریان $3A$ خروجی است.

در گره (۷) $2A$ و $3A$ ورودی و جریان $5A$ در جهت نشان داده شده خروجی است.

$$(2 + 3 = 5)$$

$$(5 - I_1 + I_1 = 5)$$

$$(4 + 5 - I_1 = 9 - I_1)$$

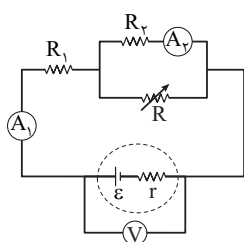
$$(I_1 - 1 + 1 = I_1)$$

$$(I_1 - 6 + 5 = I_1 - 1)$$

$$(9 - I_1 + I_1 - 6 = 3A)$$

$$(2 + 3 = 5)$$

در مدار شکل زیر، مقاومت رئوستا (R) را افزایش می‌دهیم. کدام یک از عبارات‌های زیر دربارهٔ مقداری که آمپرسنج‌های آرمانی A_1 ، A_2 و ولت‌سنج آرمانی V نشان می‌دهند، درست است؟



- (الف) مقداری که آمپرسنج A_1 نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.
 (ب) مقداری که آمپرسنج A_2 نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.
 (پ) مقداری که ولت‌سنج V نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

(۱) الف و ب

(۲) ب و پ

(۳) الف و پ

(۴) الف، ب و پ



پاسخ خیلی تشریحی ✓

(الف) نادرست؛ با افزایش مقاومت رئوستا مقاومت معادل مدار افزایش می‌یابد؛ بنابراین جریان کل مدار کاهش می‌یابد.

$$\downarrow I = \frac{\varepsilon}{\uparrow R_{eq} + r}$$

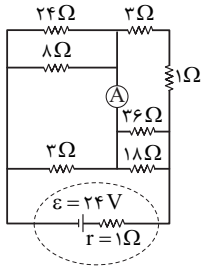
(ب) درست؛ جریان کل کم می‌شود اما اختلاف پتانسیل دو سر مدار زیاد می‌شود؛ اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 کم شده است (زیرا جریان گذرنده از آن، که همان جریان کل مدار است کاهش یافته است)؛ در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_2 و جریان گذرنده از آن باید افزایش یابد.

(پ) درست؛ ولت‌سنج متصل به مولد $V = \varepsilon - rI$ را نشان می‌دهد. همان‌طور که در قسمت (الف) بیان شد، جریان کل مدار کاهش می‌یابد؛ بنابراین عدد ولت‌سنج افزایش می‌یابد.

$$\uparrow V = \varepsilon - rI \downarrow$$

فیزیک

۶۰. در مدار شکل روبه‌رو، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، چند آمپر است؟



۱ (۱)

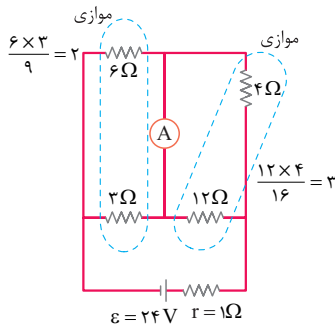
۴ (۲)

۵ (۳)

۲ (۴)



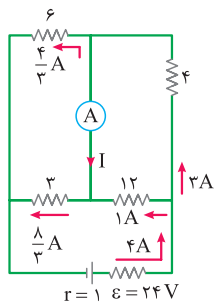
پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا مدار را به صورت زیر ساده می‌کنیم تا مقاومت معادل و جریان کل مدار را محاسبه کنیم:



$$R_{eq} = 3 + 2 = 5 \Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{24}{5 + 1} = 4 A$$

گام دوم: جریان کل را به صورت زیر بین مقاومت‌ها تقسیم می‌کنیم:



$$I = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} A$$

کدام یک از انواع انرژی، در تغییر محتوای انرژی مواد شرکت کننده در یک واکنش شیمیایی در دمای ثابت، نقش اساسی ایفا می کند و چه رابطه ای بین پایداری مواد با انرژی آن ها وجود دارد؟

- (۱) شیمیایی - معکوس
(۲) گرمایی - مستقیم
(۳) پتانسیل - مستقیم
(۴) گرمایی - معکوس



مواد واکنش دهنده و فراورده در یک واکنش شیمیایی دارای دو نوع انرژی هستند:

- (۱) انرژی گرمایی **تعریف** ← مجموع انرژی جنبشی ذره ها در دمای ثابت، تفاوت چشمگیری بین انرژی گرمایی واکنش دهنده ها و فراورده ها وجود ندارد. ← گرمای مبادله شده طی یک واکنش، به دلیل تفاوت در انرژی گرمایی مواد نیست.
- (۲) انرژی پتانسیل **تعریف** ← انرژی ناشی از نیروهای نگهدارنده ذره های سازنده یک ماده با انجام واکنش و تغییر در شیوه اتصال اتم ها به یکدیگر، انرژی پتانسیل مواد تغییر می کند. ← گرمای مبادله شده طی یک واکنش، به دلیل تفاوت در انرژی پتانسیل مواد واکنش دهنده و فراورده است.

✓ پاسخ خیلی تشریحی

در یک واکنش شیمیایی گرماده یا گرماگیر، تغییر محتوای انرژی مواد به انرژی شیمیایی (پتانسیل) و انرژی گرمایی وابسته است که در یک واکنش با عدم تغییر محسوس دما، این انرژی مبادله شده به طور عمده به انرژی شیمیایی وابسته است. هر چه سطح انرژی یک ماده بیشتر باشد، پایداری آن کم تر است، یعنی سطح انرژی با پایداری، رابطه معکوس دارند.

کدام گزینه از نظر درستی یا نادرستی، با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟



(۱) فرایند هم‌دماشدن شیر 6°C با بدن برخلاف هم‌دماشدن بستنی 0°C با بدن، با کاهش سطح انرژی همراه است.

(۲) گرمای یک ماده را با نماد Q نشان می‌دهند و یکای اندازه‌گیری آن در SI، ژول است.

(۳) از دیدگاه شیمیایی در ساختار مولکول‌های روغن برخلاف چربی، پیوندهای دوگانه دیده می‌شود و واکنش پذیری روغن از چربی بیشتر است.

(۴) اگر تکه‌ای نان و سیب‌زمینی با سطح و جرم یکسان و دمای 75°C در محیط اتاقی با دمای 25°C قرار گیرد، سیب‌زمینی

به دلیل ظرفیت گرمایی بیشتر، زودتر با محیط هم‌دم می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت اول درست و سایر عبارت‌ها نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

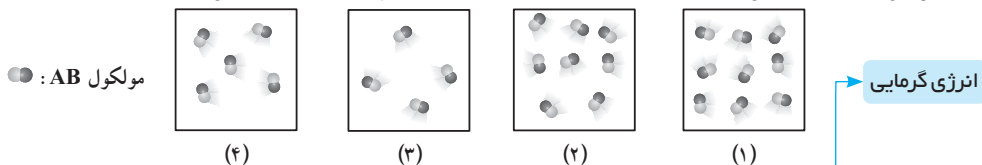
گزینه (۱): فرایند هم‌دماشدن شیر 6°C با بدن با کاهش سطح انرژی و بستنی 0°C ، با افزایش دما و سطح انرژی همراه است.

گزینه (۲): گرما ویژگی ماده نیست و برای توصیف ماده استفاده نمی‌شود بلکه برای توصیف یک فرایند به کار می‌رود.

گزینه (۳): در مولکول‌های روغن و چربی پیوند دوگانه وجود دارد، ولی تعداد پیوندهای دوگانه روغن از چربی بیشتر است.

گزینه (۴): سیب‌زمینی میزان آب بیشتری از نان دارد و ظرفیت گرمایی بیشتری نیز دارد، بنابراین تغییرات دمایی آن کندتر از نان است و نان زودتر از سیب‌زمینی با محیط هم‌دم می‌شود.

اگر در شکل‌های زیر، مقایسه دمای ظرف‌ها به صورت $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$ باشد، چند مورد از عبارت‌های داده شده درست‌اند؟



الف) مقایسه مجموع انرژی جنبشی ذره‌های سازنده چهار ظرف به صورت: ظرف (۱) < ظرف (۲) < ظرف (۴) < ظرف (۳) است.

ب) بر اثر تماس دو ظرف (۱) و (۳) همانند دو ظرف (۲) و (۴) با یکدیگر، انرژی گرمایی ظرفی که تعداد ذرات کم‌تری دارد، کاهش می‌یابد.

پ) بر اثر تماس این چهار ظرف با یکدیگر، پس از مدتی، میانگین انرژی جنبشی ذره‌های سازنده چهار ظرف، برابر می‌شود.

ت) گرمای ویژه ذرات سازنده این چهار ظرف، برخلاف ظرفیت گرمایی آن‌ها، با یکدیگر برابر هستند.

تعیین‌کننده دما

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



انرژی گرمایی و ظرفیت گرمایی برخلاف دما و ظرفیت گرمایی ویژه، به جرم ماده وابسته است.



عبارت‌های «پ» و «ت» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی همه موارد:

الف) نادرست؛ انرژی گرمایی هم به تعداد ذرات و هم به دما بستگی دارد. ظرف (۱) به دلیل دارا بودن بیشترین تعداد ذرات و هم‌چنین دمای بالاتر، قطعاً بیشترین انرژی گرمایی را دارد. ظرف (۳) هم کم‌ترین تعداد ذرات و البته دما را دارد، پس کم‌ترین انرژی گرمایی را دارد. اما بین ظرف‌های (۲) و (۴)، به دلیل این‌که یکی تعداد بیشتری دارد و دیگری دمای بیشتر، نمی‌توان به طور دقیق مقایسه انجام داد.

ب) نادرست؛ انرژی گرمایی همواره از ماده‌ای با دمای بالاتر به ماده‌ای با دمای پایین‌تر جاری می‌شود؛ پس انرژی گرمایی از ظرف (۱) به ظرف (۳) و از ظرف (۴) به ظرف (۲) جاری می‌شود. به همین دلیل بر اثر تماس این ظرف‌ها به صورت دوه‌دو، انرژی گرمایی ظروف (۱) و (۴) کاهش می‌یابد. ظرف (۱) نسبت به ظرف (۳) تعداد ذرات بیشتری دارد، پس این هم غلطه!

پ) درست؛ میانگین انرژی جنبشی ذره‌ها، معیاری برای دما است. در اثر تماس این چهار ظرف، بالاخره این ظروف با یکدیگر هم‌دما می‌شوند. ت) درست؛ گرمای ویژه برای همه ذرات سازنده چهار ظرف با یکدیگر برابر است؛ چراکه همه از یک نوع هستند. در حالی که ظرفیت گرمایی، علاوه بر نوع مواد، به مقدار آن‌ها هم بستگی دارد که در ظرف‌های داده شده، برابر نیست.

با توجه به جدول زیر، درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب کدام است؟

- ظرفیت گرمایی ۵ گرم آب با ظرفیت گرمایی ۱۷۵ گرم طلا برابر است.
- اگر به جرم یکسانی از این مواد گرمای یکسانی بدهیم، طلا و آب به ترتیب کمترین و بیشترین تغییر دما را دارند.
- گرمای ویژه ۵ گرم نقره از گرمای ویژه ۱ گرم آلومینیم کمتر است.
- برای افزایش دمای دو گرم اتانول به میزان 1°C ، $4/8$ ژول گرما نیاز است.

ماده	آب	اتانول	آلومینیم	نقره	طلا
گرمای ویژه ($\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$)	۴/۲	۲/۴	۰/۹	۰/۲۴	۰/۱۲

(۱) درست - درست - نادرست - نادرست

(۲) نادرست - نادرست - نادرست - درست

(۳) درست - نادرست - درست - درست

(۴) نادرست - درست - درست - نادرست



پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های اول، سوم و چهارم، درست و عبارت دوم، نادرست است.

عبارت اول (ظرفیت گرمایی از حاصل ضرب جرم در گرمای ویژه به دست می‌آید):

$$\text{ظرفیت گرمایی} = \text{جرم} \times \text{گرمای ویژه} \Rightarrow \underbrace{5 \times 4/2}_{\text{آب}} = \underbrace{175 \times 0/12}_{\text{طلا}} = 21$$

عبارت دوم) در بین مواد داده شده، آب بیشترین و طلا کمترین گرمای ویژه را دارد؛ بنابراین در شرایط یکسان، آب کمترین و طلا بیشترین تغییر دما را دارد (به ازای جرم و گرمای یکسان، تغییر دما با گرمای ویژه رابطه وارونه دارد!)

عبارت سوم) گرمای ویژه به جرم بستگی ندارد؛ بنابراین گرمای ویژه ۵ گرم (یا هر چند گرم) نقره برابر با $0/24$ و گرمای ویژه ۱ گرم آلومینیم برابر با $0/9$ است.

عبارت چهارم) گرمای ویژه یعنی گرمای مورد نیاز برای افزایش دمای ۱ گرم ماده به اندازه 1°C که برای اتانول برابر با $2/4$ است؛ پس برای افزایش دمای ۲ گرم اتانول به اندازه 1°C ، $4/8 = 2 \times 2/4$ ژول گرما نیاز است.

۶۵

اگر به مخلوطی به جرم ۲ گرم از آلومینیم و نقره، $22/8 \text{ J}$ گرما داده شود، دمای این مخلوط از 3°C به 5°C می‌رسد. درصد مولی آلومینیم در این مخلوط کدام است؟ (گرمای ویژه نقره و آلومینیم به ترتیب برابر $0/24 \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$ و $0/9 \text{ J.g}^{-1}.\text{C}^{-1}$ است.)

$$(Al = 27, Ag = 108 : \text{g.mol}^{-1})$$

$$\frac{\text{مول Al}}{\text{مول Al} + \text{مول Ag}} \times 100$$

۸۰ (۴)

۶۰ (۳)

۴۰ (۲)

۲۰ (۱)



مقدار انرژی گرمایی مورد نیاز برای افزایش دمای ماده‌ای به جرم m به صورت $Q = m.c.\Delta\theta$ است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول:** اگر در این مخلوط جرم Ag را x گرم و جرم Al را $(2-x)$ گرم در نظر بگیریم، گرمای لازم برای افزایش دمای هر یک به اندازه 2°C برابر است با:

$$Q_{Ag} = m_{Ag} \cdot c_{Ag} \cdot \Delta\theta_{Ag} = 0/24 \frac{\text{J}}{\text{g}.\text{C}} \times 2^\circ\text{C} \times x \text{ g} = 4/8x \text{ J}$$

$$Q_{Al} = m_{Al} \cdot c_{Al} \cdot \Delta\theta_{Al} = 0/9 \frac{\text{J}}{\text{g}.\text{C}} \times 2^\circ\text{C} \times (2-x) \text{ g} = (36-18x) \text{ J}$$

$$\Rightarrow Q_{Ag} + Q_{Al} = 4/8x + 36 - 18x = 22/8 \Rightarrow x = 1 \text{ g}$$

جرم نقره = 1 g

جرم آلومینیم = 1 g



$$Q = m.c.\Delta\theta \Rightarrow 22/8 = 2 \text{ g} \times c_{\text{آلیاژ}} \times 2^\circ\text{C} \Rightarrow c_{\text{آلیاژ}} = 0/57 \frac{\text{J}}{\text{g}.\text{C}}$$

$$c_{\text{آلیاژ}} = \frac{m_{Al} \cdot c_{Al} + m_{Ag} \cdot c_{Ag}}{m_{Al} + m_{Ag}}$$

اگر در این مخلوط جرم Ag را x گرم و جرم Al را $(2-x)$ گرم در نظر بگیریم:

$$0/57 = \frac{m_{Al} \cdot c_{Al} + m_{Ag} \cdot c_{Ag}}{m_{Al} + m_{Ag}} = \frac{(2-x) \times 0/9 + x \times 0/24}{2} = 0/57$$

$$\Rightarrow 1/8 - 0/9x + 0/24x = 1/14 \Rightarrow x = 1 \text{ g}$$

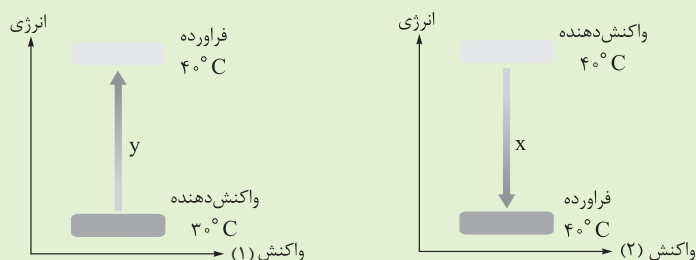
گام دوم: با توجه به جرم نقره و آلومینیم، مول آن‌ها و درصد مولی آلومینیم را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{mol Al} = 1 \text{ g Al} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} = \frac{1}{27}$$

$$\text{mol Ag} = 1 \text{ g Ag} = \frac{1 \text{ mol Ag}}{108 \text{ g Ag}} = \frac{1}{108}$$

$$\text{درصد مولی Al در مخلوط اولیه} = \frac{\text{mol Al}}{\text{mol Al} + \text{mol Ag}} \times 100 = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{27} + \frac{1}{108}} \times 100 = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{5}{108}} \times 100 = 40\%$$

با توجه به نمودارهای زیر، چند مورد از مطالب داده شده، نادرست است؟ (X و Y را اعدادی مثبت در نظر بگیرید.)



الف) واکنش (۲)، گرماده و گرمای آزاد شده به طور عمده به دلیل اختلاف پتانسیل واکنش دهنده و فرآورده است.

ب) ΔH واکنش (۲) برابر X و فرآورده پایدارتر از واکنش دهنده است.

پ) در واکنش (۱) همانند واکنش (۲)، انرژی جنبشی فرآورده ها درست به اندازه انرژی جنبشی واکنش دهنده ها است.

ت) واکنش (۱) همانند همدماشدن آبمیوه 10°C در بدن، فرایندی گرماگیر است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



واکنش (۱) با افزایش سطح انرژی و واکنش (۲) با کاهش سطح انرژی همراه است؛ بنابراین واکنش (۱)، گرماگیر و واکنش (۲)، گرماده است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت های «ب» و «پ» نادرست هستند.

بررسی عبارت ها:

الف) در واکنش (۲) که واکنشی گرماده است. به دلیل عدم تغییر دمای واکنش دهنده و فرآورده ها، می توان نتیجه گرفت که عمده

گرمای مبادله شده به دلیل اختلاف پتانسیل واکنش دهنده ها و فرآورده ها است.

ب) ΔH واکنش (۲) برابر $-X$ است، زیرا X مثبت و ΔH واکنش منفی است.

پ) واکنش (۱) برخلاف واکنش (۲)، با تغییر دما و تغییر انرژی جنبشی مواد همراه است.

ت) واکنش (۱) و همدماشدن آبمیوه 10°C ، گرماگیر و با افزایش سطح انرژی همراه اند.

۶۷

اگر ۱۰ گرم گرافیت ۹۰ درصد خالص مطابق واکنش $C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 396 \text{ kJ}$ با اکسیژن کافی بسوزد، مقدار گرمای آزاد شده در واکنش چند کیلوژول خواهد بود و اگر به جای گرافیت از ۹ گرم الماس خالص استفاده کنیم، گرمای آزاد شده نسبت به حالت قبل چگونه تغییر می کند؟ ($C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$)

(۲) ۲۹۷ - بیشتر می شود.

(۱) ۲۹۷ - کم تر می شود.

(۴) ۳۳۰ - بیشتر می شود.

(۳) ۳۳۰ - کم تر می شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: گرمای آزاد شده به ازای سوختن ۱۰ گرم گرافیت ۹۰٪ خالص به صورت زیر است:

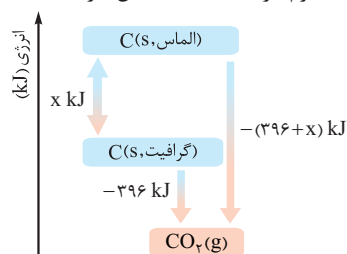
$$10 \text{ g گرافیت} \times \frac{90 \text{ g خالص}}{100 \text{ g ناخالص}} \times \frac{396 \text{ kJ}}{12 \text{ g گرافیت}} = 297 \text{ kJ}$$

به جور دیگه

$$\frac{\text{درصد خلوص} \times \text{جرم}}{100} = \frac{Q}{\frac{\Delta H}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب گرافیت}}}$$

$$\frac{10 \times \frac{90}{100}}{1 \times 12} = \frac{Q}{396} \Rightarrow Q = 396 \times \frac{3}{4} = 297 \text{ kJ}$$

گام دوم: سطح انرژی الماس از گرافیت بالاتر است و به ازای سوختن مقدار یکسانی از دو ماده با مول یکسان، ماده با سطح انرژی بالاتر، گرمای بیشتری آزاد می کند. دقت کنید که ۹ گرم الماس خالص مول برابری با ۱۰ گرم گرافیت ۹۰٪ خالص دارد.



۶۸

اگر A و B به ترتیب مربوط به حالت فیزیکی اتانول و آب در واکنش سوختن اتانول باشد، A و B به ترتیب از راست به چپ کدام باشند تا مقدار گرمای آزاد شده در واکنش بیشترین مقدار ممکن باشد؟

(۱) جامد - گاز

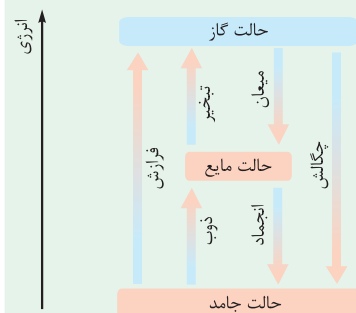
(۲) جامد - مایع

(۳) گاز - مایع

(۴) گاز - جامد



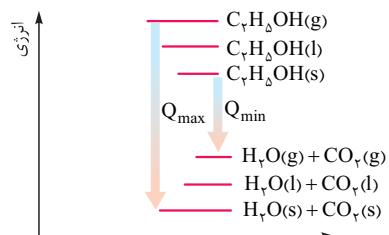
نکته: به نمودار مقابل توجه کنید:



مقایسه سطح انرژی یک ماده با حالت‌های فیزیکی متفاوت به صورت: گاز < مایع < جامد است.

بیشترین گرمای مبادله شده، وقتی است که اتانول به حالت گاز (g) و آب به صورت جامد (s) باشد و کمترین گرمای مبادله شده وقتی است که اتانول، به صورت جامد و آب به صورت بخار باشد.

✓ پاسخ خیلی تشریحی



درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- تغییر آنتالپی هر واکنش را هم‌ارز با گرمایی می‌دانند که در حجم ثابت با محیط پیرامون دادوستد می‌کند.
- در فتوسنتز برخلاف اکسایش گلوکز، سامانه با جذب گرما، فراورده‌هایی با سطح انرژی بالاتر از واکنش‌دهنده‌ها تولید می‌کند.
- در تبدیل اکسیژن به اوزون، گرما آزاد و مولکول‌های پرانرژی‌تر اوزون تولید می‌شوند.
- در یخچال صحرایی که برای نگهداری مواد غذایی استفاده می‌شود، فرایند $\text{H}_2\text{O(l)} \rightarrow \text{H}_2\text{O(g)} + 44/1 \text{ kJ}$ انجام می‌شود.

(۱) نادرست - درست - نادرست - درست

(۲) نادرست - نادرست - درست - نادرست

(۳) نادرست - درست - نادرست - نادرست

(۴) درست - درست - نادرست - نادرست



پاسخ خیلی تشریحی ✓ فقط عبارت دوم درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: تغییر آنتالپی هر واکنش هم‌ارز با گرمای مبادله‌شده در واکنش در فشار ثابت (Q_p) است، نه حجم ثابت (Q_v).

عبارت دوم: فتوسنتز فرایندی گرماگیر و اکسایش گلوکز، فرایندی گرماده است.

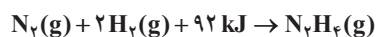
عبارت سوم: فرایند تولید اوزون از اکسیژن، گرماگیر است و مولکول‌های پرانرژی‌تر اوزون، ناپایدارتر از اکسیژن هستند.

عبارت چهارم: تبخیر آب یک فرایند گرماگیر است که با جذب گرما همراه است و معادله درست آن به صورت



۷۰

اگر اختلاف آنتالپی پیوند نیتروژن - نیتروژن در مولکول‌های نیتروژن و هیدرازین، برابر ۷۸۲ کیلوژول و میانگین آنتالپی پیوند $\text{N} \equiv \text{N}$ ، $^{\circ}/\text{۸}$ آنتالپی پیوند $\text{H} - \text{H}$ باشد، با توجه به واکنش زیر، برای تجزیه $۱/۷$ گرم گاز آمونیاک به اتم‌های گازی نیتروژن و هیدروژن، چند کیلوژول گرما نیاز است؟ ($\text{N} = ۱۴$, $\text{H} = ۱: \text{g.mol}^{-۱}$)



۱۸۴ (۴)

۱۳۸ (۳)

۴۶ (۲)

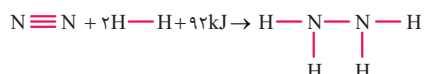
۹۲ (۱)



آنتالپی واکنش با استفاده از آنتالپی پیوند مواد شرکت‌کننده در واکنش از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها}]$$

گام اول: ابتدا پیوندهای موجود در واکنش را مشخص کرده و رابطه محاسبه ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند را می‌نویسیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی



$$\Delta H = \underbrace{\Delta H (\text{N} \equiv \text{N})}_a + \underbrace{۲\Delta H (\text{H} - \text{H})}_d - \underbrace{۴\Delta H (\text{N} - \text{H})}_c - \underbrace{\Delta H (\text{N} - \text{N})}_b$$

$$\Rightarrow ۹۲ = a - b + ۲d - ۴c \quad \left\{ \begin{array}{l} a - b = ۷۸۲ \\ c = ۰/۸d \end{array} \right. \Rightarrow ۷۸۲ - ۱/۲d = ۹۲ \Rightarrow ۶۹۰ = ۱/۲d \Rightarrow d = ۵۷۵$$

$$\Rightarrow \Delta H (\text{N} - \text{H}) = ۰/۸ \times ۵۷۵ = ۴۶۰ \text{ kJ}$$

گام دوم: واکنش تجزیه آمونیاک به اتم‌های سازنده به صورت $\text{NH}_3 \rightarrow \text{N} + ۳\text{H}$ است که آنتالپی واکنش ذکر شده، سه برابر آنتالپی پیوند $\text{N} - \text{H}$ است، بنابراین داریم:

$$۱/۷ \text{ g NH}_3 \times \frac{۱ \text{ mol NH}_3}{۱۷ \text{ g NH}_3} \times \frac{۳ \times ۴۶۰ \text{ kJ}}{۱ \text{ mol NH}_3} = ۱۳۸ \text{ kJ}$$



در کدام گزینه، آنتالپی پیوند یا میانگین آنتالپی پیوند به درستی مقایسه نشده است؟

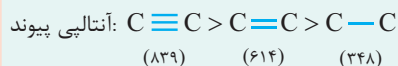
- (۱) کربن - کربن (سیکلو هگزان) > کربن - کربن (اتیلن)
- (۲) کربن - اکسیژن (بنزآلدهید) < کربن - اکسیژن (اتانول)
- (۳) کربن - نیتروژن (هیدروژن سیانید) < نیتروژن - هیدروژن (هیدرازین)
- (۴) کربن - اکسیژن (کربن مونواکسید) > کربن - اکسیژن (۲-هپتانول)



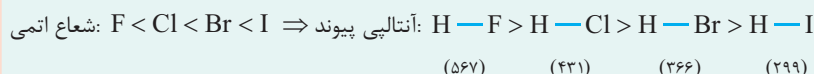
درس Box

آنتالپی پیوند با مرتبه پیوند (یگانه، دوگانه و سه گانه) رابطه مستقیم، با طول پیوند رابطه معکوس و با قطبیت پیوند (اختلاف الکترون خواهی و خصلت نافلزی دو اتم) رابطه مستقیم دارد.

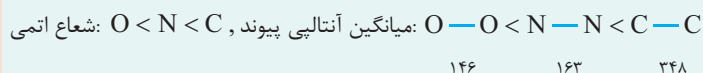
(۱) **تعداد پیوند بین دو اتم (مرتبه پیوند):** هر چه تعداد پیوند بین دو اتم بیشتر باشد، آنتالپی پیوند بیشتر است. به عبارت دیگر آنتالپی پیوند سه گانه بیشتر از دوگانه و آنتالپی پیوند دوگانه بیشتر از یگانه است.



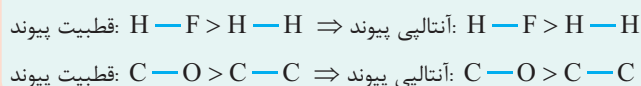
(۲) **شعاع اتم‌های تشکیل دهنده پیوند:** به طور کلی هر چه شعاع اتم‌های تشکیل دهنده پیوند کوچک‌تر باشد، انرژی لازم برای شکستن آن و در نتیجه آنتالپی بیشتر می‌شود.



بچه‌ها مراقب باشین! گفتیم به طور کلی، چون موارد استثنایی هم وجود دارد؛ یعنی با این که شعاع اتم‌های تشکیل دهنده یک پیوند کوچک‌تر است، اما آنتالپی پیوند آن بیشتر نیست! آله به جدول ۳ صفحه ۶۶ کتاب درسی به گاهی بندها این متوجه می‌شین:



(۳) **قطبیت پیوند:** یکی دیگر از عوامل مؤثر بر آنتالپی پیوند، قطبیت پیوند است، به طور ساده، هر چه تفاوت خاصیت نافلزی دو اتم شرکت کننده در پیوند بیشتر باشد، قطبیت پیوند و در نتیجه آنتالپی پیوند بیشتر است.



در کربن مونواکسید ($O \equiv C$): پیوند کربن - اکسیژن سه گانه و در ۲-هپتانول ($C_6H_{11} - \overset{O}{\parallel} C - CH_3$)، پیوند کربن - اکسیژن دوگانه است. بنابراین آنتالپی پیوند کربن - اکسیژن در کربن مونواکسید بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

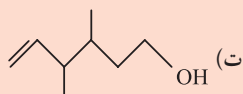
گزینه (۱): در سیکلو هگزان برخلاف اتیلن، پیوند کربن - کربن به صورت یگانه است و آنتالپی پیوند $C - C$ از $C = C$ کم‌تر است.

گزینه (۲): در بنزآلدهید پیوند کربن - اکسیژن به صورت ($C = O$) و در اتانول به صورت ($C - O$) است و آنتالپی پیوند $C = O$ از $C - O$ بیشتر است.

گزینه (۳): پیوند کربن - نیتروژن در HCN به صورت $C \equiv N$ و پیوند نیتروژن - هیدروژن در N_2H_4 به صورت $N - H$ است.

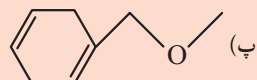
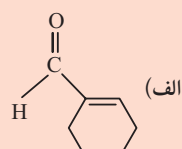
پاسخ خیلی تشریحی ✓

۷۲ کدام دو ترکیب ایزومر یکدیگر هستند و کدام ترکیب، دارای گروه عاملی کتونی است؟



(۲) «الف» و «ب» - «الف»

(۴) «الف» و «ب» - «ب»



(۱) «پ» و «ت» - «الف»

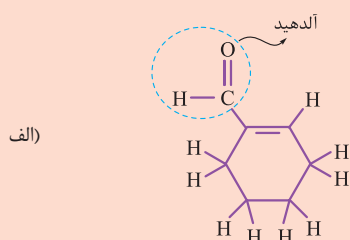
(۳) «پ» و «ت» - «ب»



دو ترکیب با فرمول مولکولی یکسان و فرمول ساختاری متفاوت، با یکدیگر ایزومر یا هم‌پار هستند.



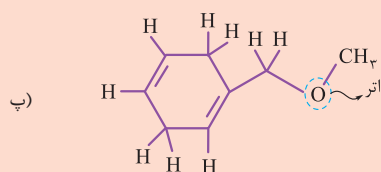
پاسخ خیلی تشریحی ✓ ترکیب‌های موجود را با هم بررسی می‌کنیم:



$C_7H_{10}O$



$C_7H_{10}O$



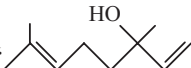
$C_8H_{10}O$



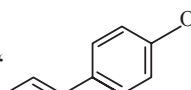
$C_8H_{16}O$

ترکیب‌های «الف» و «ب» ایزومر هستند و ترکیب «ب» دارای گروه عاملی کتونی است.

کدام گزینه درست است؟

(۱) گروه عاملی موجود در ترکیب ، هیدروکسید نام داشته و هر مولکول از این ترکیب برای سیرشدن به ۲ مولکول هیدروژن نیاز دارد.

(۲) ساده‌ترین عضو خانواده کتون‌ها برخلاف آلدهیدها، سه اتم کربن داشته و فرمول مولکولی آن C_3H_6O است.

(۳) اگر در ترکیب ، همه گروه‌های متیل با هیدروژن جایگزین شوند، گروه عاملی موجود در ترکیب، برخلاف فرمول مولکولی تغییر نمی‌کند.

(۴) خواص فیزیکی و شیمیایی برخلاف سطح انرژی دو ترکیب زیر، یکسان است.

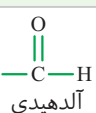
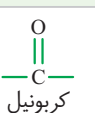
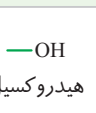
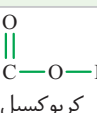


گروه‌های عاملی

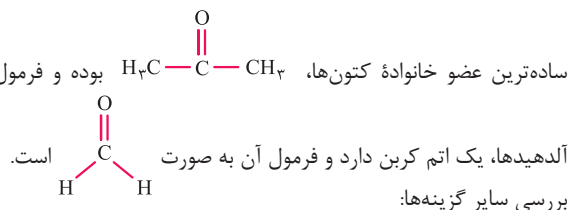
درس‌Box

بررسی مواد آلی موجود در ادویه‌ها، داروها و ... نشان می‌دهد که وجود آرایش ویژه‌ای از اتم‌ها به نام **گروه عاملی** نقش تعیین‌کننده‌ای در خواص آن‌ها دارد. به آرایش منظمی از اتم‌ها که به مولکول آلی دارای آن، خواص فیزیکی و شیمیایی منحصر به فردی می‌دهد، گروه عاملی می‌گویند.

گروه‌های عاملی که در فصل دوم شیمی یازدهم می‌فونین رو در جدول زیر براتون آوردیم!

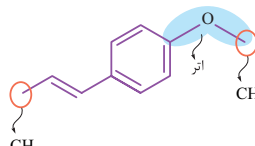
نام خانواده	آلدهیدها	کتون‌ها	الکل‌ها	اترها	کربوکسیلیک اسیدها
فرمول ساختاری و نام گروه عاملی					
فرمول کلی	$R-C(=O)H$ R هیدروژن یا گروه هیدروکربنی است.	$R-C(=O)-R'$ R و R' گروه هیدروکربنی هستند.	$R-OH$ R گروه هیدروکربنی است.	$R-O-R'$ R و R' گروه هیدروکربنی هستند.	$R-C(=O)OH$ R هیدروژن یا گروه هیدروکربنی است.
فرمول ساختاری ساده‌ترین عضو خانواده					

ساده‌ترین عضو خانواده کتون‌ها، $H_3C-C(=O)-CH_3$ بوده و فرمول مولکولی آن، C_3H_6O است. ساده‌ترین عضو خانواده



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): گروه عاملی موجود در ترکیب، هیدروکسیل نام دارد و برای سیرشدن آن به ازای هر پیوند $C=C$ ، یک مولکول هیدروژن نیاز است که مجموعاً در این ترکیب به ازای دو پیوند $C=C$ ، ۲ مولکول هیدروژن می‌خواهیم.

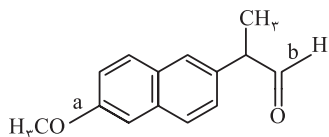
گزینه (۳): اگر در ترکیب ، به جای گروه‌های متیل مشخص شده، هیدروژن قرار گیرد، گروه عاملی اتری به هیدروکسیل تبدیل می‌شود و فرمول مولکولی ترکیب نیز تغییر خواهد کرد.

گزینه (۴): دو ترکیب نشان داده شده، دارای فرمول مولکولی یکسان هستند و ایزومر یکدیگرند، ولی به دلیل تفاوت در نوع پیوندها، خواص فیزیکی و شیمیایی یکسان ندارند و سطح انرژی آن‌ها متفاوت است.

توجه: (۱) آله هواستون به کلمه هیدروکسید نباشه و به راحتی ارزش عبور کنید، جمله کاملاً درست می‌شه و همین اولین گزینه رو می‌زنید و اشتباه می‌شه. هواستون باشه هیدروکسید یک آنیون (OH^-) و با هیدروکسیل $(-OH)$ فرق داره.

گول نخوری

چند مورد از موارد زیر درباره ترکیبی با ساختار مقابل، درست است؟



- اگر به جای هیدروژن در پیوند **b**، اتم کربن قرار دهیم، گروه عاملی مشابه گروه عاملی موجود در میخک ایجاد می‌شود.
- در حالت گازی برای شکسته شدن پیوند **a** نسبت به پیوند **b** در شرایط یکسان، انرژی بیشتری لازم است.
- ترکیب، فاقد گروه عاملی موجود در رازیانه بوده و دارای گروه‌های عاملی کربونیل است.
- نسبت شمار پیوندهای اشتراکی به شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در این ترکیب، $4/5$ برابر شمار گروه‌های متیل است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ فقط عبارت اول درست است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول) اگر به جای هیدروژن در $\text{C}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{H}$ اتم کربن قرار گیرد، ساختار $\text{C}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{C}$ ایجاد می‌شود که گروه عاملی کتون دارد که مشابه گروه عاملی موجود در میخک است.

عبارت دوم) پیوند **a** ($\text{C}-\text{O}$) و پیوند **b** ($\text{C}-\text{H}$) است و از آنجایی که طول پیوند $\text{C}-\text{H}$ از $\text{C}-\text{O}$ کم‌تر است، آنتالپی پیوند و میزان انرژی مورد نیاز برای شکستن آن بیشتر است.

عبارت سوم) ترکیب داده شده دارای گروه عاملی اتری و آلدهیدی است در صورتی که رازیانه نیز دارای گروه عاملی اتری می‌باشد. برای به دست آوردن شمار پیوندهای اشتراکی یک ترکیب آلی می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(2 \times \text{تعداد اتم‌های O}) + (1 \times \text{تعداد اتم‌های H}) + (4 \times \text{تعداد اتم‌های C})}{2}$$

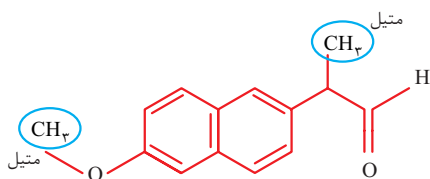
عبارت چهارم) فرمول مولکولی ترکیب داده شده، $\text{C}_{14}\text{H}_{14}\text{O}_2$ است که شمار پیوندهای اشتراکی آن برابر است با:

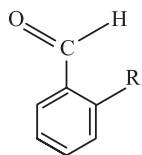
$$\frac{(14 \times 4) + 14 + (2 \times 2)}{2} = 37$$

و شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی که فقط مربوط به اتم‌های اکسیژن است، برابر $(2 \times 2 = 4)$ می‌باشد.

گروه‌های متیل در ساختار آن به صورت زیر است که برابر با ۲ می‌باشد.

$$\frac{37}{4} = \frac{37}{8} \neq 4/5$$





با توجه به ساختار مقابل، کدام گزینه درست است؟ (R یک گروه فرضی است).

(۱) اگر گروه R را با اتم هیدروژن جایگزین کنیم، ترکیب آلی حاصل، ایزومر بنزآلدهید است.

(۲) اگر R، گروه هیدروکربنی و در ساختار ترکیب در مجموع ۸ اتم کربن وجود داشته باشد، این ترکیب،

ایزومر ۲-اوکتانول خواهد بود.

(۳) اگر این ترکیب با ترکیبی به فرمول $C_{12}H_{14}O_2$ ایزومر باشد، در گروه R به یقین گروه عاملی کربونیل وجود دارد.

(۴) در صورت وجود یک گروه عاملی اتری در زنجیر سیرشده R، اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن R با بقیه ساختار، تابعی از تعداد

اتم‌های کربن در گروه R است.



گزینه (۱): ترکیب آلی به دست آمده خود بنزآلدهید است و نه ایزومرش!

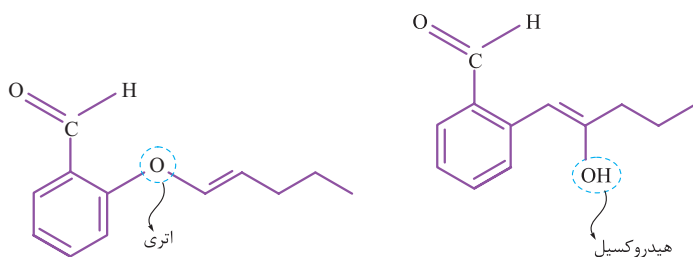
گزینه (۲): برای این که ساختار مجموعاً ۸ کربن داشته باشد، باید بخش R به صورت CH_3 باشد و فرمول مولکولی ترکیب حاصل

به صورت $C_8H_{10}O$ خواهد بود، در صورتی که ۲-اوکتانول دارای فرمول $C_8H_{16}O$ می‌باشد.

فرمول مولکولی کتون‌های سیرشده با نام n -آلکانون به صورت $C_nH_{2n}O$ می‌باشد.

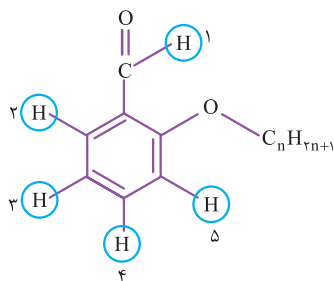
گزینه (۳): فرمول ترکیب داده شده به صورت C_7H_8OR است و اگر بخواید با $C_{12}H_{14}O_2$ ایزومر باشد، فرمول بخش R باید

به صورت C_5H_6O باشد که می‌تواند گروه عاملی هیدروکسیل، اتری و یا کتونی داشته باشد.



گزینه (۴): اگر بخش R سیرشده و دارای گروه عاملی اتری باشد، اختلاف شمار اتم‌های هیدروژن R با بقیه ساختار، به صورت

زیر به دست می‌آید:



تابعی از شمار کربن‌های (n)R $2n + 1 - 5 = 2n - 4 \Rightarrow$

با توجه به جدول زیر، مقدار آنتالپی واکنش سوختن کامل ۱- بوتن چند کیلوژول بر مول و ارزش سوختی آن بر حسب کیلوژول بر گرم کدام عدد می‌تواند باشد؟ ($H = 1, C = 12 : g \cdot mol^{-1}$)

ماده آلی	آنتالپی سوختن ($kJ \cdot mol^{-1}$)
$C_2H_2(g)$	-۱۳۰۰
$C_2H_4(g)$	-۱۵۶۰
$C_2H_6(g)$	-۱۴۱۰
$C_3H_6(g)$	-۲۰۵۸

$$۱) ۲۷۰۶ - ۴۸/۳$$

$$۲) ۲۶۰۷ - ۴۶/۵$$

$$۳) ۲۷۰۶ - ۴۶/۵$$

$$۴) ۲۶۰۷ - ۴۸/۳$$

نکته

اگر آنتالپی سوختن چند عضو از خانواده‌ای از هیدروکربن‌ها مشخص باشد، می‌توان آنتالپی سوختن عضوهای دیگر را به روش زیر محاسبه و پیش‌بینی کرد:

ماده آلی	آنتالپی واکنش سوختن
عضو x	a
عضو x + ۱	a + c
عضو x + ۲	a + ۲c

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به نکته بالا آنتالپی واکنش سوختن، ۱- بوتن برابر است با:

ماده آلی	آنتالپی واکنش سوختن
C_2H_4	-۱۴۱۰
C_3H_6	-۲۰۵۸
C_4H_8	-۲۷۰۶

۶۴۸ (

) CH_2

۶۴۸ (

) CH_2

نکته

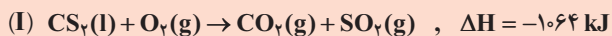
ارزش سوختی یک ماده برابر است با:

$$| \text{آنتالپی سوختن} (kJ \cdot mol^{-1}) | = \frac{\text{ارزش سوختی} (kJ \cdot g^{-1})}{\text{جرم مولی} (g \cdot mol^{-1})}$$

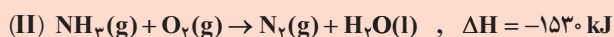
آنتالپی واکنش سوختن ۱- بوتن برابر است با:

$$\text{ارزش سوختی} (C_4H_8) = \frac{۲۷۰۶}{۵۶} = ۴۸/۳ \text{ kJ}$$

با توجه به واکنش‌های زیر:



(معادله واکنش‌ها موازنه شود.)



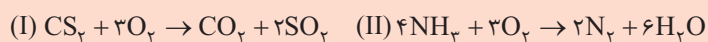
گرمای سوختن هر گرم آمونیاک چند برابر گرمای سوختن هر گرم کربن دی‌سولفید است و اگر از سوختن مقادیر مختلفی از کربن دی‌سولفید و آمونیاک، گرمای یکسانی آزاد شده باشد، تعداد مول گاز تولیدشده در سوختن آمونیاک، به تقریب چند برابر تعداد مول گاز گوگرد دی‌اکسید تولیدشده در سوختن کربن دی‌سولفید است؟

$$0/7, 2/2 (2)$$

$$0/7, 1/6 (1)$$

$$1, 2/2 (4)$$

$$1, 1/6 (3)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ اول موازنه واکنش‌ها:

$$\text{CS}_2 \text{ گرمای سوختن } 1 \text{ g CS}_2 \times \frac{1 \text{ mol CS}_2}{76 \text{ g CS}_2} \times \frac{1064 \text{ kJ}}{1 \text{ mol CS}_2} = 14 \text{ kJ}$$

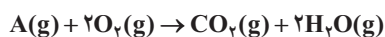
$$\text{NH}_3 \text{ گرمای سوختن } 1 \text{ g NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol NH}_3}{17 \text{ g NH}_3} \times \frac{1530 \text{ kJ}}{4 \text{ mol NH}_3} = 22/5 \text{ kJ}$$

$$\frac{\text{NH}_3 \text{ گرمای سوختن هر گرم}}{\text{CS}_2 \text{ گرمای سوختن هر گرم}} = \frac{22/5}{14} \approx 1/6$$

برای قسمت دوم سؤال، فرض می‌کنیم در هر واکنش، Q kJ گرما آزاد شده است و مول SO_2 و N_2 تولیدشده را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{SO}_2 \text{ مول: } Q \text{ kJ} \times \frac{2 \text{ mol SO}_2}{1064 \text{ kJ}} &= \frac{2Q}{1064} \text{ mol SO}_2 \\ \text{N}_2 \text{ مول: } Q \text{ kJ} \times \frac{2 \text{ mol N}_2}{1530 \text{ kJ}} &= \frac{2Q}{1530} \text{ mol N}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\text{N}_2 \text{ مول}}{\text{SO}_2 \text{ مول}} = \frac{1064}{1530} \approx 0/7$$

با توجه به جدول زیر، اختلاف آنتالپی سوختن ترکیب‌های A و B، چند کیلوژول بر مول است؟



پیوند	$C \equiv C$	$C-H$	$O=O$	$C=O$	$O-H$
آنتالپی $(kJ.mol^{-1})$	۸۵۰	۴۱۵	۴۹۵	۸۰۰	۴۶۵

۸۱۱/۴

۸۰۵/۳

۴۰۲/۵ (۲)

۴۰۵/۲ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا باید به کمک موازنه معادله‌ها، فرمول مولکولی A و B را پیدا کنیم.

در هر دو معادله، اتم‌های اکسیژن در دو طرف موازنه هستند، بنابراین در ساختار A و B، اتم اکسیژن وجود ندارد و این دو ترکیب، هیدروکربن هستند.

با توجه به موازنه اتم‌های کربن و هیدروژن در این دو معادله، می‌فهمیم که A و B به ترتیب همان متان (CH_4) و اتین (C_2H_2) هستند.

حالا به کمک آنتالپی‌های پیوند، ΔH دو واکنش را حساب می‌کنیم:

مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها - مجموع آنتالپی پیوند واکنش‌دهنده‌ها = ΔH

$$\Delta H_{\text{سوختن متان}} = 4\Delta H_{C-H} + 2\Delta H_{O=O} - 2\Delta H_{C=O} - 4\Delta H_{O-H}$$

توجه کنید که آنتالپی سوختن به ازای یک مول واکنش‌دهنده می‌باشد؛ بنابراین، ΔH سوختن ۱ مول اتین به صورت زیر است:

$$\Delta H_{\text{سوختن اتین}} = 2\Delta H_{C-H} + \Delta H_{C \equiv C} + \frac{5}{2}\Delta H_{O=O} - 4\Delta H_{C=O} - 2\Delta H_{O-H}$$

بنابراین اختلاف آنتالپی دو واکنش برابر است با:

$$\Delta H_{\text{سوختن اتین}} - \Delta H_{\text{سوختن متان}} = \Delta H_{C \equiv C} + \frac{1}{2}\Delta H_{O=O} - 2\Delta H_{C-H} - 2\Delta H_{C=O} + 2\Delta H_{O-H}$$

$$= 850 + \frac{495}{2} - (2 \times 415) - (2 \times 800) + (2 \times 465) = -402/5 \text{ kJ}$$

یک ورزشکار برای دویدن صبحگاهی نیاز به مقداری انرژی دارد که در زمان محدود برای تأمین آن، چهار ماده غذایی را به او پیشنهاد داده‌ایم. ورزشکار برای ۱۵ دقیقه دویدن صبحگاهی، کدام خوراکی را انتخاب می‌کند؟

A	B	C	D	خوراکی
				مقدار ماده غذایی در ۱۰۰ گرم
۲۵	۵۰	۱۰	۲۰	چربی (گرم)
—	—	—	—	کلسترول (میلی گرم)
۵۰	۲۰	۴۰	۳۰	کربوهیدرات (گرم)
۷	۳۰	۰/۳	۱/۵	پروتئین (گرم)

D (۴)

C (۳)

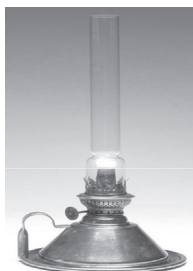
B (۲)

A (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ باید ماده‌ای را انتخاب کنیم که کربوهیدرات بیشتری دارد که انرژی معین را در زمان کوتاه‌تری در اختیار فرد ورزشکار قرار دهد.

در یک چراغ بیه سوز از بیه حیوانی (مخلوطی از انواع چربی‌ها با ارزش سوختی 38 kJ.g^{-1} و جرم مولی میانگین 360 g.mol^{-1}) به عنوان سوخت استفاده می‌شود (شکل زیر). آنتالپی سوختن بیه حیوانی چند کیلوژول بر مول است و اگر حجم مخزن سوخت این چراغ، 250 میلی‌لیتر باشد، با مصرف کامل سوخت درون مخزن، به تقریب دمای چند کیلوگرم آب از 2°C به 80°C می‌رسد؟ (چگالی سوخت 0.9 g.mL^{-1} است و بازده کلی فرایند را 80% در نظر بگیرید. $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4/2 \text{ J.g}^{-1} . ^\circ \text{C}^{-1}$)



$$13/6 - 8850 \quad (1)$$

$$13/6 - 13680 \quad (2)$$

$$27/1 - 8850 \quad (3)$$

$$27/1 - 13680 \quad (4)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: بین ارزش سوختی و آنتالپی سوختن، رابطه $|\Delta H| = \frac{|\Delta H|}{\text{جرم مولی}}$ ارزش سوختی، برقرار است، بنابراین داریم:

$$\Delta H = 38 \times 360 = 13680 \text{ kJ}$$

گام دوم: با توجه به رابطه $Q = m.c.\Delta\theta$ داریم:

$$\text{سوخت } 250 \text{ mL (Q) گرمای سوختن } = 250 \times \frac{0.9}{1000} \times 38 \times \frac{80}{100} = 25 \times 38 \times 9 \times 0.8 \text{ kJ}$$

↑ چگالی
↑ بازده
↓ حجم
↓ ارزش سوختی

گرمای آزادشده از سوختن سوخت با گرمای جذب شده توسط آب برابر است:

$$Q = m.c.\Delta\theta = m \times 4/2 \times 60 = 38 \times 9 \times \frac{25 \times 0.8}{100}$$

$$\Rightarrow m = \frac{38 \times 9 \times 2 \times 9}{60 \times 4 \times 2} = \frac{38}{1/4} = 27/1 \text{ kg}$$

تیزبازی در محاسبات این سؤال نیازی به این‌که حاصل همه ضرب‌ها را در هر مرحله محاسبه کنیم، نیست. می‌تونیم با نگاه داشتن اعداد و ساده‌سازی کسر آخر، به جواب درست برسیم.