بخش ۴

فرمولنامه

ریاضی، درسی مفهومی و فهمیدنی است! با این حال نمی‌توانیم از اهمیت فرمول‌ها و رابطه‌ها و البته به‌خاطرسپاریِ آن‌ها برای حل تست غفلت کنیم...

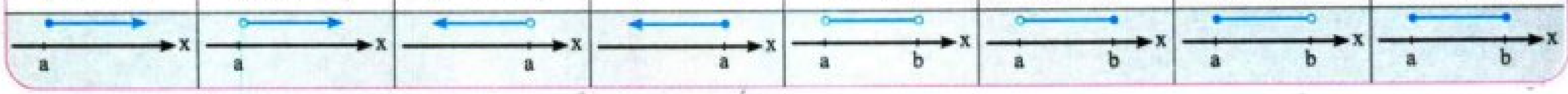
این بخش پایانی اختصاص به فرمول‌ها و رابطه‌هایی دارد که در هر فصل ریاضی کنکورتان با آن‌ها مواجه شده‌اید؛ قبل از شروع هر آزمونی می‌توانید نگاهی به فرمول‌های مرتبط آن بیندازید.

تمام فرمول‌ها و نکات مهم ریاضی تجربی کنکور، به تفکیک فصل و مناسب مرور و تثبیت...

مجموعه

۱ بازه‌ها

$[a,b]$	$[a,b)$	$(a,b]$	(a,b)	$(-\infty,a]$	$(-\infty,a)$	$(a,+\infty)$	$[a,+\infty)$



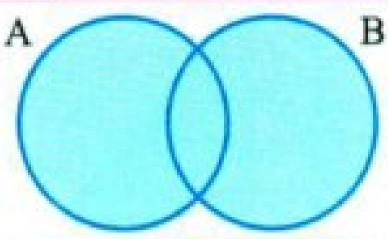
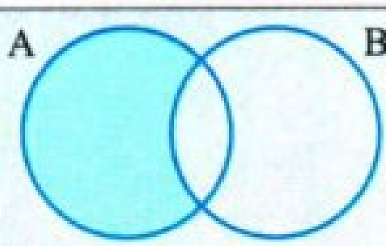
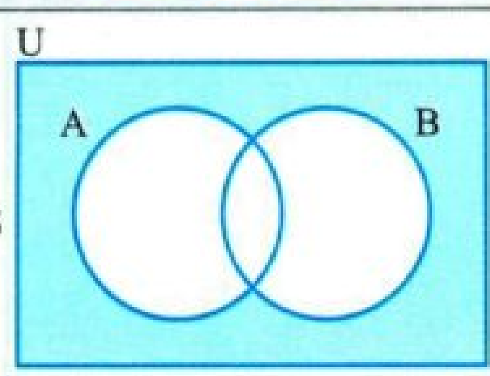
۲ مجموعه‌های اعداد

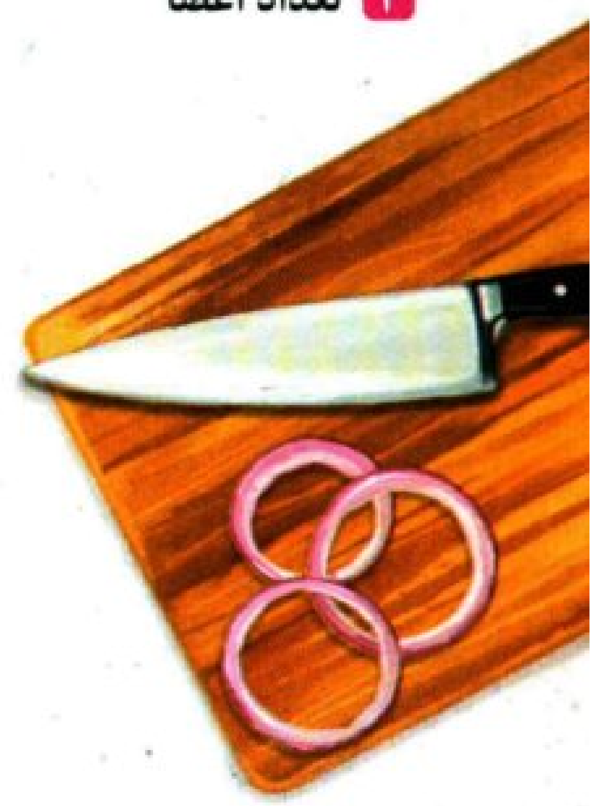
طبیعی	حسابی	صحیح	گویا	گنگ
$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$	$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$	$\mathbb{Z}=\{۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,...\}$	$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq ۰\}$	$\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

۳ فرمول‌های متمم

$A'=U-A$	$(A')'=A$	$A\cup A'=U$	$(A\cup B)'=A'\cap B'$	$A-A'=A$	$\varnothing'=U$
		$A\cap A'=\varnothing$	$(A\cap B)'=A'\cup B'$	$A'-A=A'$	$U'=\varnothing$

۴ تعداد اعضا

$n(A\cup B)$	$:n(A)+n(B)-n(A\cap B)$	 A یا B
$n(A-B)$	$:n(A)-n(A\cap B)$	 A بدون B
$n(A'\cap B')$	$:n(U)-n(A\cup B)$	 نه A نه B



دنباله

۵ فرمول‌های الگوهای معروف $(n\in\mathbb{N})$

الگوی خطی	$\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,...\Rightarrow t_n=an+b$ ؛ فاصله‌ی جملات ثابت است. $+a\quad +a\quad +a$
درجه‌ی دوم	$\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,...\Rightarrow t_n=\frac{d}{۲}n^۲+bn+c$ ؛ فاصله‌ی فاصله‌ها ثابت است. $+m\quad +n\quad +p$ $+d\quad +d$
فیبوناچی	$t_n=t_{n-۱}+t_{n-۲}$ ، $t_۱=t_۲=۱$ ؛ $۱,۱,۲,۳,۵,۸,...$
متناوب	یک در میان $-$, $+$ هستند؛ در جمله‌ی عمومی $(-۱)^n$ دارد؛ $-۱,۲,-۳,۴,-۵,...$ یک در میان $+$, $-$ هستند؛ در جمله‌ی عمومی $(-۱)^{n+۱}$ دارد؛ $۱,-۲,۳,-۴,۵,...$

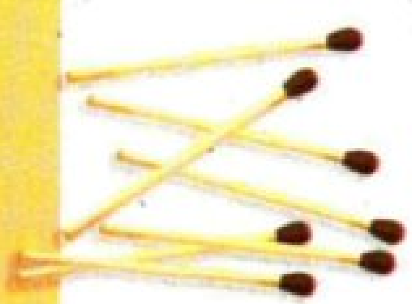
۶ دنباله‌ی حسابی و هندسی $(n \in \mathbb{N})$

سه جمله‌ی دنباله‌ی داده‌شده a, b, c	حسابی: $b=\frac{a+c}{2}$
	هندسی: $b^2=ac$
شناسایی دنباله	حسابی: $t_1 \xrightarrow{+d} t_2 \xrightarrow{+d} t_3 \xrightarrow{+d} t_4, \dots$
	هندسی: $t_1 \xrightarrow{\times r} t_2 \xrightarrow{\times r} t_3 \xrightarrow{\times r} t_4, \dots$
جمله‌ی عمومی	حسابی: $t_n=t_1+(n-1)d$
	هندسی: $t_n=t_1r^{n-1}$
دو جمله و شماره‌ی معلوم	حسابی: $t_m-t_n=(m-n)d$
	هندسی: $\frac{t_m}{t_n}=r^{m-n}$
قانون اندیس‌ها	اگر $m+n=r+s$ باشد. آن‌وقت: حسابی: $t_m+t_n=t_r+t_s$
	هندسی: $t_mt_n=t_rt_s$
درج واسطه (m تا) بین a و b $(a<b)$	حسابی: $d=\frac{b-a}{m+1}$
	هندسی: $r^{m+1}=\frac{b}{a}$

۷ فرمول‌های دیگر دنباله

❶ اگر قرار است سه جمله از دنباله‌ی حسابی را (کاملاً نامشخص و فرضی) در نظر بگیرید، آن‌ها را $a-d, a, a+d$ بگیرید و در دنباله‌ی هندسی $\frac{a}{r}, a, ar$ ... ❷ تعداد اعداد موجود در یک دنباله‌ی حسابی محدود می‌شود: $n=\frac{\text{عدد آخر}-\text{عدد اول}}{d}+1$

❸ در یک ضابطه‌ی خطی، ضریب n حتماً قدرنسبت دنباله‌ی حسابی است و در یک ضابطه‌ی نمایی $t_n=a(b)^{mn+k}$ قدرنسبت دنباله‌ی هندسی می‌شود $r=b^m$.



هندسه تحلیلی

۸ فرمول‌های فاصله

نقطه تا نقطه	$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2) \Rightarrow AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
نقطه تا مبدأ	$A(x_0,y_0) \Rightarrow OA=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$
دو نقطه‌ی هم‌طول	$A(x_0,y_1), B(x_0,y_2) \Rightarrow AB=\lvert y_1-y_2\rvert$
دو نقطه‌ی هم‌عرض	$A(x_1,y_0), B(x_2,y_0) \Rightarrow AB=\lvert x_1-x_2\rvert$
نقطه تا خط	$A(x_0,y_0)$, خط: $ax+by+c=0 \Rightarrow h=\frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
دو خط موازی	خط ۱: $ax+by+c=0$، خط ۲: $ax+by+c'=0 \Rightarrow h=\frac{\lvert c-c'\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۹ فرمول‌های شیب

	$ax+by+c=0$	$y=mx+h$	خط گذرنده از دو نقطه‌ی $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$	خطی که طول‌ازمبدأ p و عرض‌ازمبدأ q دارد.	خطی که باجهت مثبت محور xها زاویه‌ی θ می‌سازد.
شیب	$-\frac{a}{b}$	m	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$-\frac{q}{p}$	$\tan\theta$

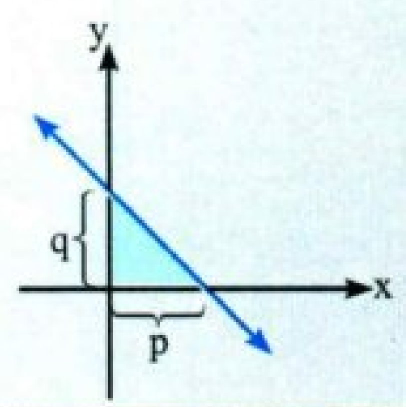
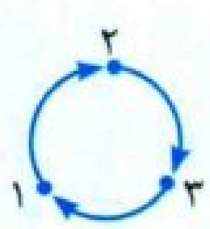
۱۰ معادله‌ی خط

با داشتن شیب m و نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$	با داشتن دو نقطه‌ی $B(x_2, y_2), A(x_1, y_1)$	با داشتن طول‌ازمبدأ p و عرض‌ازمبدأ q	موازی محور x ها	موازی محور y ها	رسم خط
$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$	$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$	$y=k$	$x=t$	دو نقطه پیدا کن

۱۱ فرمول‌های دو خط

	$y=m'x+h', y=mx+h$	$a'x+b'y+c'=0, ax+by+c=0$
موازی با هم	$m=m'$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$
منطبق بر هم	$m=m', h=h'$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$
عمود بر هم	$m'=\frac{-1}{m}$	$aa'+bb'=0$
متقاطع با هم	$m\neq m'$	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

۱۲ فرمول های مساحت مثلث

با داشتن طول‌ازمبدأ p و عرض‌ازمبدأ q	با داشتن مختصات سه رأس $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$
 $:S=\frac{1}{2}\lvert pq\rvert$	$:S=\frac{1}{2}\lvert(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\rvert$ 

۱۳ فرمول‌های دیگر

❶ اگر نقطه‌ی M، وسط دو نقطه‌ی A و B باشد، آن‌وقت: $M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$

❷ اگر $ABCD$ متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌وقت: $x_A+x_C=x_B+x_D$ ، $y_A+y_C=y_B+y_D$

❸ اگر نقطه‌ی روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم باشد، مختصاتش به فرم $A(a, a)$ در نظر گرفته می‌شود و چنانچه روی نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم باشد، مختصاتش به فرم $B(a, -a)$ ...

❹ نقطه‌ی روی محور x ها، عرضش صفر است و نقطه‌ی روی محور y ها طولش ...

عبارت‌های جبری

۱۴ فرمول های توان و رادیکال: $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}\,,\ (a > ۰)$

$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$	$a^m \times b^m = (ab)^m$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m} & \text{فرد } k \\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert^m} & \text{زوج } k \end{cases}$	$\dfrac{a^m}{b^m} = (\dfrac{a}{b})^m$
$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ \lvert a\rvert & \text{زوج } n \end{cases}$	$(a^m)^n = a^{mn}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$a^{-m} = \dfrac{۱}{a^m}$
$a\sqrt[m]{u} \pm b\sqrt[m]{u} = (a \pm b)\sqrt[m]{u}$	$au^m \pm bu^m = (a \pm b)u^m$

- خروج منفی از رادیکالِ فرجه‌ی فرد آزاد است: $\sqrt[\text{فرد}]{-u} = -\sqrt[\text{فرد}]{u}$

۱۵ مقایسه‌ی توان‌های مختلف عددِ a

۱ اعدادی که **«توان بیشترِ آن‌ها حاصل کمتری می‌دهد»** را لجباز می‌گوییم! مثل $\frac{۱}{۲}$؛ $(\frac{۱}{۲})^۳ < (\frac{۱}{۲})^۲$

۲ این‌ها لجبازها هستند: $\mathbb{R}$

برای توان فرد: $(-\infty, -۱)$ — همیشه: $(۰, ۱)$ — برای توان زوج: $(-۱, ۰)$

- برای هر عددی به جز این حالت‌ها، توان بیشتر حاصل بیشتری خواهد داد. $(a \neq ۰, \pm ۱)$

۱۶ اتحادهای جبری

۱ $(a \pm b)^۲ = a^۲ \pm ۲ab + b^۲$؛ مربع دوجمله‌ای

۲ $(a \pm b)^۳ = a^۳ \pm ۳a^۲b + ۳ab^۲ \pm b^۳$؛ مکعب دوجمله‌ای

۳ $(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$؛ مزدوج

۴ $a^۳ \pm b^۳ = (a \pm b)(a^۲ \mp ab + b^۲)$؛ چاق و لاغر

۱۷ گویاکردن مخرج $(a, b > ۰)$

۱) $\dfrac{\square}{\sqrt[n]{a^m}} \xrightarrow{\text{گویا}} \dfrac{\square \times \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^{n-m}}} = \dfrac{\square\ \sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$

۲) $\dfrac{\square}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \xrightarrow{\text{گویا}} \dfrac{\square \times (\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \dfrac{\square\ (\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a-b}$

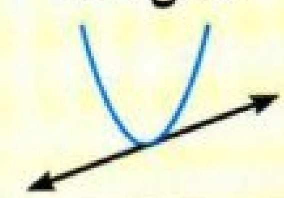
درجه ۲ و سهمی

۱۸ فرمول‌های حل معادله‌ی درجه‌ی دوم

$ax^۲ + bx + c = ۰$ (در حالت کلی)	$ax^۲ + bx = ۰$ (عدد ثابت ندارد)	$ax^۲ + bx + c = ۰$ (با شرط $a + c = b$)	$ax^۲ + bx + c = ۰$ (با شرط $a + b + c = ۰$)
$x_{۱,۲} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a}$	$x_۱ = ۰, x_۲ = -\dfrac{b}{a}$	$x_۱ = -۱, x_۲ = -\dfrac{c}{a}$	$x_۱ = ۱, x_۲ = \dfrac{c}{a}$

• اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله‌ی درجه‌ی دوم، دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد و در حالت $\Delta = ۰$ ریشه‌ی مضاعف $x = -\frac{b}{۲a}$ خواهد داشت و چنانچه $\Delta < ۰$ باشد، ریشه‌ای ندارد!

۱۹ فرمول‌های سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$

مختصات رأس	$S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ ؛ $-\frac{\Delta}{۴a}$ مقدار ماکزیمم یا مینیمم سهمی است.
تأثیر علامتِ a	$a > ۰$، سهمی دهانه‌ای روبه بالا دارد (مینیمم دارد)، برد $R = [-\frac{\Delta}{۴a}, +\infty)$
	$a < ۰$، سهمی دهانه‌ای رو به پایین دارد (ماکزیمم دارد)، برد $R = (-\infty, -\frac{\Delta}{۴a}]$
برخورد با محورها	نقطه‌ی $(۰, c)$ برخورد سهمی با محور y هاست.
	اگر $\Delta > ۰$ باشد، در دو نقطه (همان ریشه‌ها یا صفرهایش) به محور x ها برخورد می‌کند. 
	اگر $\Delta = ۰$ باشد، بر محور x ها مماس است؛ در نقطه‌ی $S(-\frac{b}{۲a}, ۰)$
	اگر $\Delta < ۰$ باشد، محور x ها را قطع نمی‌کند. — $a > ۰$ کاملاً بالای محور x هاست. / $a < ۰$ کاملاً پایین محور x هاست.
محور تقارن	$x = -\frac{b}{۲a}$ (که موازی محور y هاست و از رأس سهمی می‌گذرد.)
برخط $y = mx + h$ مماس است 	معادله‌ی $ax^{۲} + bx + c = mx + h$ را مرتب کنید و بعد Δ آن را مساوی صفر بگذارید.
نوشتن معادله‌ی سهمی	اگر $S(h, k)$ (رأس سهمی) داده شده، بنویسید: $y = a(x-h)^{۲} + k$
	اگر صفرهای سهمی ($x_۱$ و $x_۲$) داده شده، بنویسید: $y = a(x-x_۱)(x-x_۲)$
	اگر سهمی در $x = x_۰$ بر محور x ها مماس است، بنویسید: $y = a(x-x_۰)^{۲}$

۲۰ روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم (α، β ریشه‌های $ax^{۲} + bx + c = ۰$ هستند.)

رابطه‌های اصلی: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ ، $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

رابطه‌های معروف

$\alpha^{۲} + \beta^{۲}$	$\alpha^{۳} + \beta^{۳}$	$\lvert\alpha - \beta\rvert$	$\lvert\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}\rvert$
$S^{۲} - ۲P$	$S^{۳} - ۳SP$	$\sqrt{S^{۲} - ۴P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$	$\sqrt{S \pm ۲\sqrt{P}}$

رابطه‌های دیگر:

❶ اگر رابطه نسبت به α و β متقارن است، با عملیات جبری (مخرج مشترک) به معروف‌ها برسید.

❷ اگر رابطه نسبت به α و β متقارن نیست، از صدق‌کردن α و β در معادله یا حالت خاصِ S یا P در همان مسأله کمک بگیرید.

۲۱ فرمول‌های معادله‌ی گویا و رادیکالی

حل معادله‌ی گویا	مخرج مشترک بگیرید و بعد طرفین وسطین بکنید تا معادله‌ی معمولی شود؛ ریشه‌ی مخرج = غ ق ق
ساده کردن عامل	در دو حالت $\frac{\cancel{\ }\,A}{\cancel{\ }\,B}$ و $\frac{A}{\cancel{\ }}=\frac{B}{\cancel{\ }}$ با خیال راحت ساده کنید ولی برای ساده کردن عامل از صورت در حالت $\frac{\cancel{\ }}{A}=\frac{\cancel{\ }}{B}$ عامل را مساوی صفر هم بگذارید.
کاربردی‌ها	اگر اولی کاری را در A ساعت و دومی در B ساعت تمام کنند، در صورت انجام کار به طور هم‌زمان در $\frac{AB}{A+B}$ ساعت کار را تمام می‌کنند.
	زمان لازم برای طی‌کردن مسیر با مسافت d و سرعت v، می‌شود $t=\frac{d}{v}$
	برای رساندن غلظت α به β در محلولی با وزن A، مقدار ماده‌ای که باید اضافه یا کم شود (x) از رابطه‌ی $\frac{\alpha A\pm x}{A\pm x}=\beta$ به‌دست می‌آید (اضافه‌کردن با جمع و کم‌کردن با منها)
حل معادله‌ی رادیکالی	$\sqrt{f(x)}=g(x)$، هر طرف را به توان دو برسانید. اگر ریشه‌ی به‌دست آمده α باشد $f(\alpha)$ و $g(\alpha)$ نباید منفی شوند!

۲۲ نامعادله

روش حل	همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف نامساوی منتقل کنید و بعد عبارت را تعیین علامت کنید.
درجه‌ی دوم	اگر $ax^2+bx+c>0$ در این‌صورت: $a>0,\Delta<0$
	اگر $ax^2+bx+c<0$ در این‌صورت: $a<0,\Delta<0$
	اگر $ax^2+bx+c\geq 0$ در این‌صورت: $a>0,\Delta\leq 0$
	اگر $ax^2+bx+c\leq 0$ در این‌صورت: $a<0,\Delta\leq 0$
عملیات روی نامعادله	جمع و منهاکردن دو طرف با عدد ثابت ایرادی ندارد؛ دو طرف به توان فرد و فرجه‌ی فرد آزاد است، به توان زوج رساندن طرفین بررسی می‌خواهد.

۲۳ روابط تعیین علامت

چند جمله‌ای درجه‌ی اول

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

چند جمله‌ای درجه‌ی دوم

اگر $\Delta>0$ باشد، آن‌وقت:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

(x_1 و x_2 ریشه‌های $ax^2+bx+c=0$ هستند)

اگر $\Delta\leq 0$ شود، عبارت ax^2+bx+c همواره موافق علامت a می‌شود. (در حالت $\Delta=0$، در ریشه‌ی مضاعف خود $(x=-\frac{b}{2a})$ صفر هم می‌شود)

۲۴ فرمول‌های قدرمطلق و جزء صحیح

$m \le u < m+۱ \xleftrightarrow{m\in\mathbb{Z}} [u]=m$	$[u]\in\mathbb{Z}$	$\lvert u\rvert=\begin{cases} u & u\ge ۰ \\ -u & u<۰\end{cases}$	$\sqrt{u^۲}=\lvert u\rvert$	$\lvert u\rvert\ge ۰$

۲۵ فرمول‌های دستوری

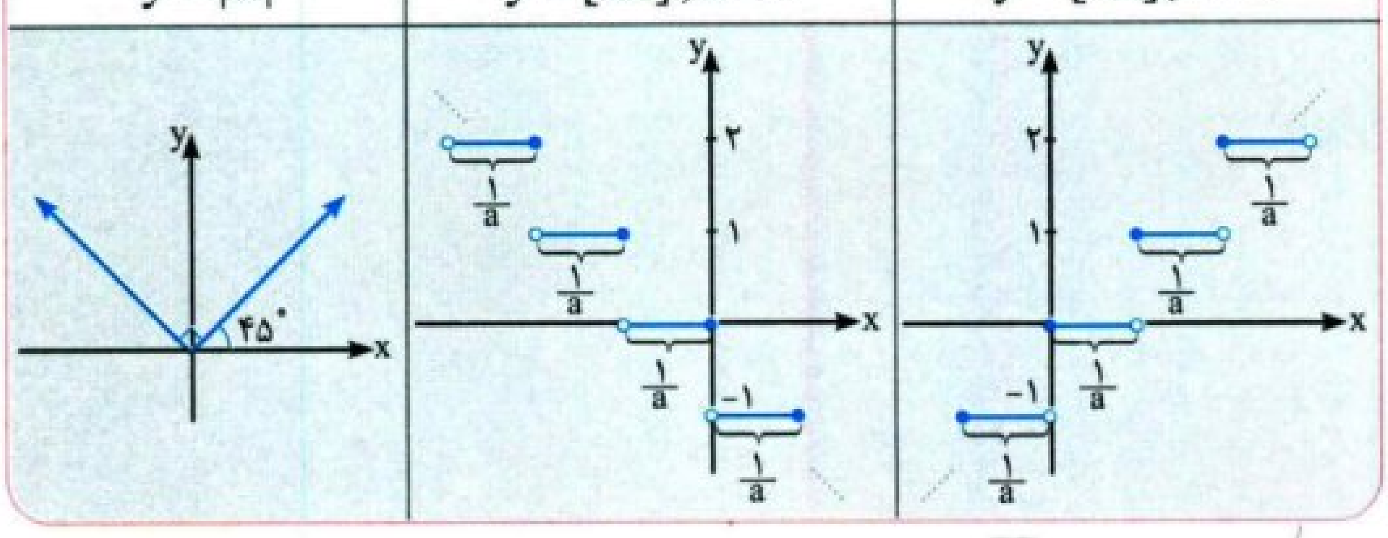
$[u]=k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le u<k+۱$	$\lvert u\rvert=k \xrightarrow{k>۰} u=\pm k$	مساوی عدد شوند.
$a\le x\le b \Rightarrow \lvert x-\frac{a+b}{۲}\rvert \le \frac{b-a}{۲}$	$\lvert u\rvert\le k \xrightarrow{k>۰} -k\le u\le k$	نامساوی‌ها
$x\ge b$ یا $x\le a \Rightarrow \lvert x-\frac{a+b}{۲}\rvert \ge \frac{b-a}{۲}$	$\lvert u\rvert\ge k \xrightarrow{k>۰} u\ge k$ یا $u\le -k$	
$[-x]=\begin{cases} -x & x\in\mathbb{Z} \\ -[x]-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$	$\lvert -u\rvert=\lvert u\rvert$	قرینه

۲۶ فرمول‌های جزء صحیح $(n\in\mathbb{Z})$

$[n^-]=n-۱, [n^+]=n$	$[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$	$۰\le x-[x]<۱$	$[x+n]=[x]+n$

۲۷ نمودارها

$y=\lvert x\rvert$	$y=[ax], a<۰$	$y=[ax], a>۰$



تابع

۲۸ فرمول‌های ابتدایی تابع

❶ $(\alpha,\beta)\in f \Rightarrow f(\alpha)=\beta \Rightarrow f^{-۱}(\beta)=\alpha$ یا (α,β) روی تابع f به معنای بودن نقطه‌ی (β,α) روی $f^{-۱}$ است.

❷ $(x_۰,y_۱)\in f$ ، $(x_۰,y_۲)\in f \Rightarrow y_۱=y_۲$ ❸ تابع‌های خاص

$f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\dots$ ؛ چندجمله‌ای	$f(x)=ax+b$ ؛ خطی	$f(x)=x$ ؛ همانی	$f(x)=c$ ؛ ثابت

۲۹ فرمول‌های دامنه و برد

برد				دامنه			
$y=a\sin(bx+c)+d$ $y=a\cos(bx+c)+d$	تابع‌های چند جمله‌ای و $y=\log_a x$	$y=a^x$	$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad\ne bc)$	$y=\tan u$	$y=\log_v u$	$y=\sqrt{u}$	$y=\frac{\text{تابع معین}}{u}$
$[-\lvert a\rvert+d, \lvert a\rvert+d]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$	$u\ne k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$u, v>۰, v\ne ۱$	$u\ge ۰$	$u\ne ۰$

• در عبارت‌های $y=a+\lvert u\rvert$ ، $y=a+u^۲$ و $y=a+\sqrt{u}$ (برای پیدا کردن برد) به کمترین مقدار **عبارت نامنفی** فکر کنید.

۳۰ فرمول‌های انتقال و کشش

فرض کنید نقطه‌ی (α , β) روی تابعی که نمودار آن را داریم، معلوم است.

رسیدن از نمودار $y=f(x)$ به نمودار $y=af(bx+c)+d$		رسیدن از نمودار $y=af(bx+c)+d$ به نمودار $y=f(x)$	
$(\alpha,\beta)\Rightarrow(\frac{\alpha-c}{b}, a\beta+d)$	اول کمان با ساز مخالف و ضریب تابع با ساز موافق! هر x منهای c و تقسیم بر b می‌شود و بعد هر y ضربدر a و بعلاوه‌ی d	$(\alpha,\beta)\Rightarrow(b\alpha+c, \frac{\beta-d}{a})$	کمان با ساز موافق و ضریب تابع با ساز مخالف! هر x ضربدر b و بعلاوه‌ی c و بعد هر y منهای d تقسیم بر a

۳۱ تابع‌های یک‌به‌یک

❶ $y=\sqrt{ax+b}$ ، $y=\sqrt[۳]{ax+b}$ ، $y=a^{mx+n}$ ، $y=\log_c(ax+b)$ و $\underbrace{y=m(ax+b)^۳+n}_{\text{فامیل‌های دخترلر}}$

❷ تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad\neq bc$

❸ تابع $y=ax^۲+bx+c$ از x رأس به بعد (یا به قبل)، $y=|ax+b|$ از $x=-\frac{b}{a}$ به بعد (یا به قبل)

۳۲ فرمول‌های وارون تابع

پیدا کردن ضابطه	جای x و y را عوض کنید و بعد y را برحسب x محاسبه نمایید.
دامنه، برد و رفتار	$D_{f^{-1}}=R_f$ ، $R_{f^{-1}}=D_f$. اگر f اکیداً صعودی (یا نزولی) باشد، f^{-1} هم همین‌طور است.
وارون تابع‌های معروف	اگر $f(x)=ax+b$ باشد، آن‌وقت $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$
	اگر $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ باشد، آن‌وقت $f^{-1}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$ ($f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ جابه‌جا، قرینه)
	اگر $f(x)=x^۲+bx+c$ باشد، آن‌وقت برای $x\geq-\frac{b}{۲}$ ؛ $f^{-1}(x)=\frac{-b+\sqrt{\Delta+۴x}}{۲}$ برای $x\leq-\frac{b}{۲}$ ؛ $f^{-1}(x)=\frac{-b-\sqrt{\Delta+۴x}}{۲}$
	اگر دو خط $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ وارون همدیگر باشند، آن‌وقت $\frac{a}{b'}=\frac{b}{a'}=\frac{c}{c'}$
ترکیب وارون تابع	$(f^{-1}of)(x)=(fof^{-1})(x)=x$
	$f^{-1}of=\{(a,a)\mid a\in D_f\}$ و $fof^{-1}=\{(b,b)\mid b\in R_f\}$
پخش‌شدن روی ترکیب	$(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$ ؛ از راست به چپ روی پرانتز ترکیب، پخش می‌شود ...!

۳۳ اعمال جبری روی f و g

ضابطه	$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$ و در نتیجه $(kf)(x)=kf(x)$	$(\frac{f+kg}{hg})(\alpha)=\frac{f(\alpha)+kg(\alpha)}{h(\alpha)g(\alpha)}$
	$(fg)(x)=f(x)g(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	
	$(fog)(x)=f(g(x))$ ، $(gof)(x)=g(f(x))$	
دامنه	$D_{f\pm g}=D_{fg}=D_f\cap D_g$ $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$	
	$D_{fog}=\{x\mid x\in D_g\ ,g(x)\in D_f\},D_{gof}=\{x\mid x\in D_f\ ,f(x)\in D_g\}$	
وجود عضو	$(a,b)\in fog\Rightarrow(a,m)\in g,(m,b)\in f$	
ترکیب دو تابع	**صعودی o صعودی و نزولی o نزولی** می‌شود تابعی صعودی ولی **صعودی o نزولی** نتیجه‌اش تابعی نزولی است.	

۳۴ تابع‌های یکنوای معروف

❶ تابع $y=ax^2+bx+c$ قبل و یا بعد از رأس خود اکیداً یکنواست (شکل بکش ...!)

❷ تابع خطی $y=ax+b$ و $y=\sqrt{ax+b}$ و $y=\sqrt[3]{ax+b}$ اکیداً یکنوا هستند (به علامت a توجه کن ...!)

❸ فامیل‌های دختر لر $y=m(ax+b)^3+n$ اکیداً یکنواست (به علامت a , m توجه کن ...!)

❹ تابع قدر مطلق خطی $y=|ax+b|$ قبل از ریشه و یا بعد آن $(x=-\frac{b}{a})$ اکیداً یکنواست (شکل بکش ...!)

❺ تابع‌های نمایی $y=a^{mx+n}$ و لگاریتمی $y=\log_c(ax+b)$ اکیداً یکنوا هستند (به علامت ضریب x توجه کنید ...!)

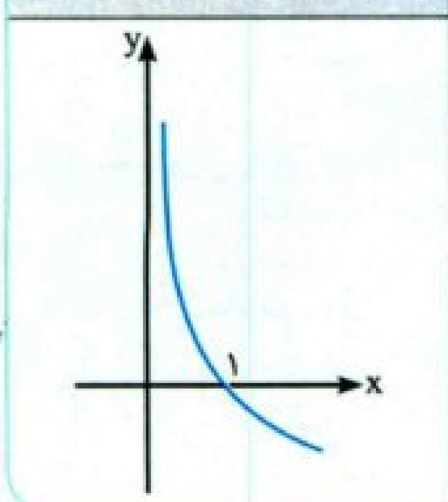
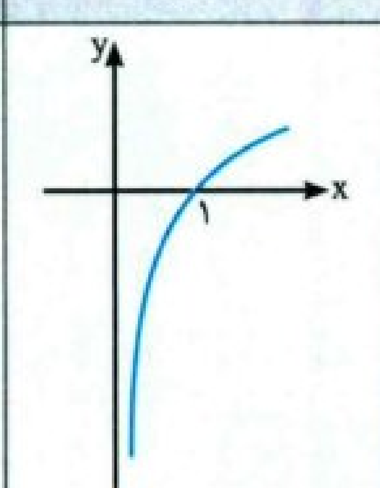
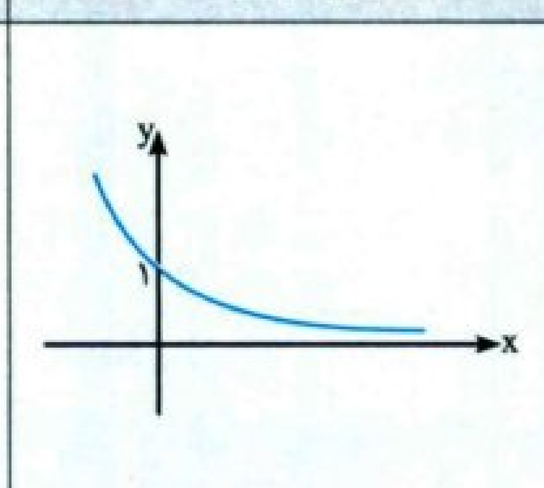
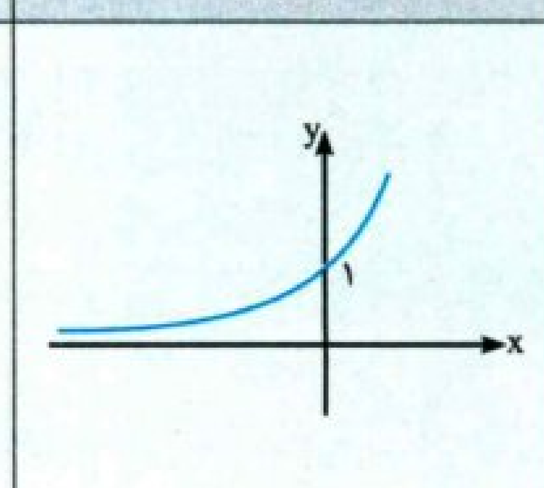
• همیشه یادتان باشد:

الف) $y=\frac{1}{\text{تابع صعودی}}$ می‌شـــود تابع نزولی و $y=\frac{1}{\text{تابع نزولی}}$ هم می‌شود صعودی ... (به شرطی که مخرج در بازه‌ی داده شده، ریشه نداشته باشد.)

ب) $y=-(\text{تابع صعودی})$ می‌شود نزولی و در نهایت $y=-(\text{تابع نزولی})$ می‌شود صعودی ...

نمایی و لگاریتم

۳۵ نمودارها

تابع لگاریتمی؛ $y=\log_b x$		تابع نمایی؛ $y=a^x$	
$0<b<1$	$b>1$	$0<a<1$	$a>1$
			

۳۶ فرمول‌های کاربردی لگاریتم: $\boxed{\log_a a=۱}$

چرخش	ضرب به جمع	کسر به منها	انتقال توان	تغییر مبنا
$\log_a u=k\Rightarrow u=a^k$	$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$	$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$	$\log_{a^n} x^m=\frac{m}{n}\log_a x$	$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$

۳۷ فرمول‌های دستوری لگاریتم

لگاریتم ۵ را به لگاریتم ۲ تبدیل می‌کنیم: $\boxed{\log ۵=۱-\log ۲}$

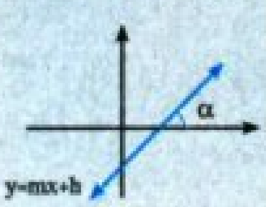
معکوس کن	لگاریتم‌ها را تبدیل به یکی کن		با لگاریتم در توان کار کن	
$\log_a x=\frac{۱}{\log_x a}$	$m\log_c a+n\log_c b=\log_c(a^m b^n)$	$m\log_c a-n\log_c b=\log_c\frac{a^m}{b^n}$	$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$	$a^{\log_a b}=b$

۳۸ معادله و نامعادله‌ی نمایی و لگاریتمی

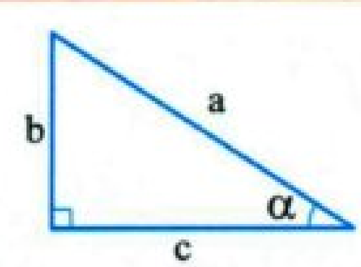
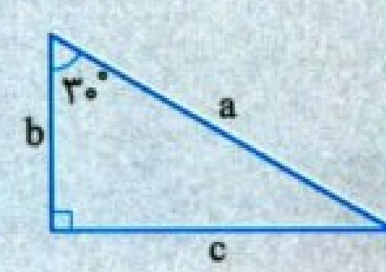
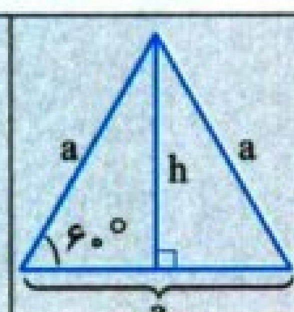
معادله‌ی توانی	تمام پایه‌ها را می‌شود به یک عدد تبدیل کرد: $a^u=a^v\Rightarrow u=v$	
	عبارت نمایی تکراری داریم؛ تغییر متغیر بدهید و نام عبارت تکراری را t بگذارید ...	
نامعادله‌ی توانی	تمام پایه‌ها را یکی کنید.	$a^x\ge a^y\xrightarrow{a>۱}x\ge y$
		$b^x\ge b^y\xrightarrow{۰<b<۱}x\le y$
نامعادله‌ی لگاریتمی	لگاریتم‌ها را تبدیل به یکی کنید.	$\log_a u\ge b\xrightarrow{a>۱}u\ge a^b$ $\log_a u\ge b\xrightarrow{۰<a<۱}u\le a^b$
		$\log_a A\ge\log_a B\xrightarrow{a>۱}A\ge B$ $\log_b A\ge\log_b B\xrightarrow{۰<b<۱}A\le B$

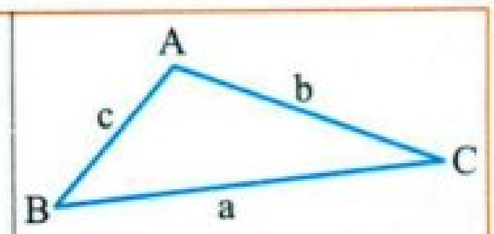
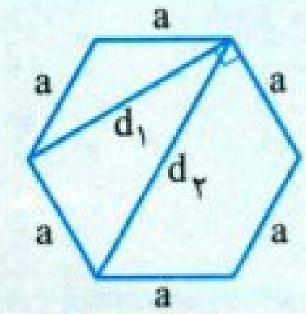
مثلثات

۳۹ فرمول‌های ابتدایی

طول کمان	تبدیل واحد درجه به رادیان	زاویه‌ی شیب	زوایای معروف		
$\ell=R\theta$ (θ به رادیان)	$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}$	$m=\tan\alpha$ 	$\sin ۴۵^\circ=\cos ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos ۳۰^\circ$	$\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}=\cos ۶۰^\circ$
			$\sin ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$ و $\cos ۱۵^\circ=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$		

۴۰ فرمول‌های مثلثاتی هندسی

	$\tan\alpha=\frac{b}{c}$ و $\cos\alpha=\frac{c}{a}$ ، $\sin\alpha=\frac{b}{a}$		
	$b=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ ، $c=\frac{a}{۲}$		$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ ، $h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B}=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$	
هر زاویه‌ی داخلی شش‌ضلعی منتظم 120° است و $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ و $d_1=\sqrt{3}a$ و $d_2=2a$	

۴۱ فرمول‌های کاربردی مثلثات: $\boxed{\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$
$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$	$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$	

۴۲ فرمول‌های فرعی مثلثات

❶ $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

❷ $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin2\alpha}$

❸ $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot2\alpha$

❹ $1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$ ، $1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha$

۴۳ فرمول‌های کمان $\frac{k\pi}{2}+\alpha$؛ در کمان به جای مضارب زوج π بگذارید صفر و به جای مضارب فرد π هم بگذارید π ...

	زاویه	sin	cos	tan	cot
۱	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

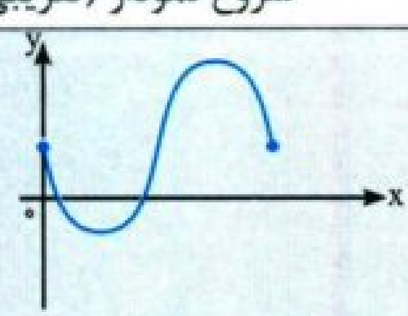
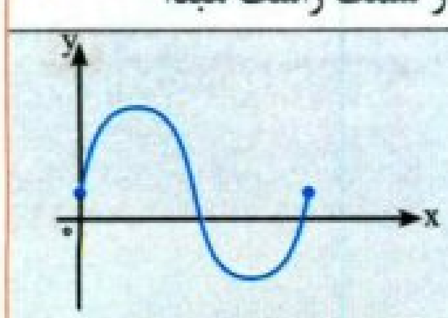
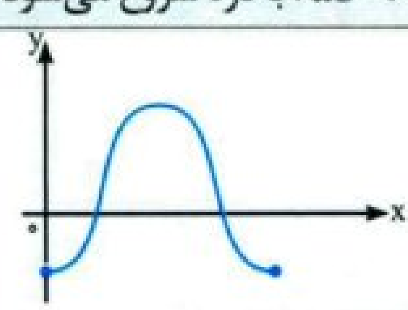
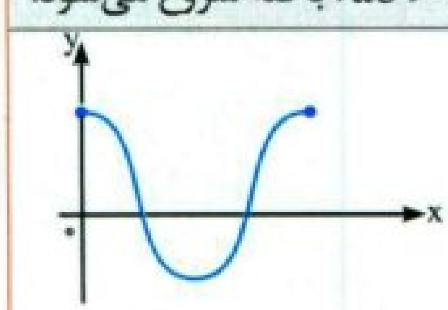
	زاویه	sin	cos	tan	cot
۲	$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
	$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

• یادتان باشد: برای دو زاویه‌ی متمم؛ سینوس این یکی، کسینوس آن یکی است و کسینوس این، سینوس آن ...!

	زاویه	sin	cos	tan	cot
۳	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$

	زاویه	sin	cos	tan	cot
۴	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$

۴۴ تابع‌های مثلثاتی

	دوره تناوب	ماکزیمم	مینیمم	دامنه	شروع نمودار (تقریبی) در سمت راست مبدأ	
$y=a\sin(bx+c)+d$	$T=\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\mathbb{R}$	 $ab<0$؛ با دره شروع می‌شود	 $ab>0$؛ با قله شروع می‌شود.
$y=a\cos(bx+c)+d$	$T=\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\mathbb{R}$	 $a<0$؛ قله‌ای شکل است.	 $a>0$؛ دره‌ای شکل است.

۴۵ دوره تناوب‌های خاص

دوره تناوب تابع‌های $f(x)=a\tan(bx+c)+d$ ، $g(x)=a\sin^{۲}(bx+c)+d$ ، $h(x)=a\cos^{۲}(bx+c)+d$ و همچنین $y=|a\sin(bx+c)|$ و $y=|a\cos(bx+c)|$ همگی $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

۴۶ فرمول‌های معادله‌های مثلثاتی

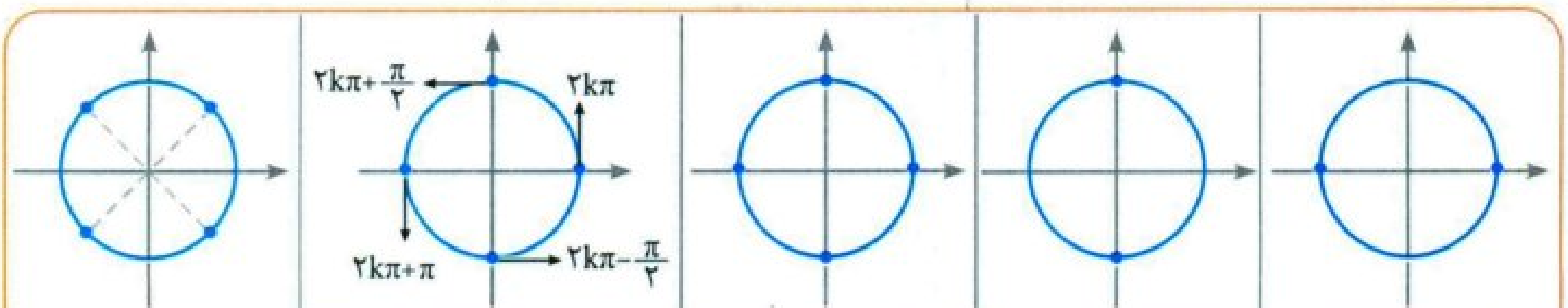
اول معادله را با روابط مثلثاتی (اصلی، $\frac{k\pi}{۲}+\alpha$ ، ۲α و طلایی) ساده کنید.

دو نسبت هم‌نام مساوی دارید.	$\sin u=\sin v \Rightarrow u=۲k\pi+v\,,\,u=۲k\pi+\pi-v$
	$\cos u=\cos v \Rightarrow u=۲k\pi\pm v$
دو نسبت غیرهم‌نام مساوی دارید.	حالت اول $\sin u=\cos v \Rightarrow \sin u=\sin(\frac{\pi}{۲}-v) \Rightarrow$ ؛ کمان یکی را متمم کنید.
خود معادله، درجه‌ی دوم است.	$a\sin^{۲}u+b\sin u+c=۰$ ؛ فرض کنید $\sin u=t$ و معادله‌ی درجه‌ی دوم را حل کنید.
	$a\cos^{۲}u+b\cos u+c=۰$ ؛ فرض کنید $\cos u=t$ و معادله‌ی درجه‌ی دوم را حل کنید.
	اگر $\sin^{۲}u$ و $\cos u$ در معادله حضور دارند، به جای $\sin^{۲}u$ بگذارید $۱-\cos^{۲}u$ و همچنین اگر $\cos^{۲}u$ و $\sin u$ با هم دیده شوند، به جای $\cos^{۲}u$ بگذارید $۱-\sin^{۲}u$ ...
ظرافت ۲α	اگر $\cos ۲u$ و $\sin u$ در معادله حضور دارند؛ به جای $\cos ۲u$ بگذار $۱-۲\sin^{۲}u$
	اگر $\cos ۲u$ و $\cos u$ در معادله حضور دارند؛ به جای $\cos ۲u$ بگذار $۲\cos^{۲}u-۱$

۴۷ جواب‌های خاص معادله‌ی مثلثاتی

	۰	۱	−۱
$\sin x$	$x=k\pi$	$x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$
$\cos x$	$x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$x=۲k\pi$	$x=۲k\pi+\pi$

۴۸ کمان‌های معروف



$x=\frac{k\pi}{۴}$		$x=\frac{k\pi}{۲}$	$x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$x=k\pi$

حد

۴۹ فرمول‌های مقدماتی

$x\to a^-$	$x\to a^+$	تابع f در $x\to a$ دارای حد است.	$f(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است.	باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر $ax+b$
$x<a$	$x>a$	$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=$ عدد	$f(-\frac{b}{a})=۰$	$r=f(-\frac{b}{a})$

۵۰ روش‌های محاسبه‌ی حد

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ و $\lim_{x\to a} g(x)=m$		$\lim_{x\to a}(f\pm g)(x)=\ell\pm m$
		$\lim_{x\to a}(fg)(x)=\ell m$ و در نتیجه $\lim_{x\to a} f^k(x)=\ell^k$, $(k\in\mathbb{N})$
		$(m\neq 0)$ $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\frac{\ell}{m}$
$f(x)=\begin{cases} g(x) & x>a \\ h(x) & x<a \end{cases}$		حد راست تابع f را از شاخه‌ی بالا (که جلوش $x>a$ است) و حد چپ را از شاخه‌ی پایینی (که جلوش $x<a$ است) پیدا کنید.
$f(x)=\lim_{x\to a}\lvert u\rvert$		اگر $x=a$ باعث صفرشدن u می‌شود، حد راست و چپ را جداگانه حساب کنید.
$f(x)=\lim_{x\to a}[u]$		اگر $x=a$ باعث عدد صحیح‌شدن u می‌شود، حد راست و چپ را جداگانه حساب کنید.
رفع ابهام $\frac{0}{0}$		در جبری‌ها، هوپیتال بزن(!) و یا صورت و مخرج را بر $x-a$ تقسیم کنید و به جای هر کدام مقسوم‌علیه تقسیم را بگذارید.
		در رادیکالی‌ها، هوپیتال بزن (!) و یا صورت و مخرج را در لنگه‌ی لازم گویاکردن ضرب کنید.
	در مثلثاتی‌ها	سعی کنید با روابط مثلثاتی عبارتی را برای ساده‌شدن از صورت و مخرج ایجاد کنید.
		اگر کمان به صفر میل می‌کند، قرار دهید $\sin^n u=u^n$ و $1-\cos^m u\sim m\frac{u^2}{2}$
حد نامتناهی		وقتی $\lim_{x\to a}\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفرحدی}}$ ایجاد شده، جواب می‌شود ∞، بعدش مخرج را در اطراف $x\to a$ تعیین علامت کنید.
حد در بی‌نهایت		به جای هر چندجمله‌ای، تنها جمله‌ای که بزرگ‌ترین توان را دارد نگه دارید و مابقی را حذف کنید. (**پرتوان**) $ax^n+bx^{n-1}+\cdots\sim ax^n$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0$ $(n\in\mathbb{N})$
$\lim_{x\to a} f(u)$		اول $\lim_{x\to a} u$ را حساب کنید اگر ℓ شد، تعیین کنید ℓ^+ است یا ℓ^- و بعد $f(\ell^\pm)$ را...

۵۱ حد کسر خاص

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\text{صفرحدی}}=$ عدد	نتیجه بگیرید $f(a)=0$ بوده و بعد کسر را رفع ابهام کنید.
$\lim_{x\to a}\frac{\text{صفر}}{f(x)}=$ عدد غیر صفر	نتیجه بگیرید $f(a)=0$ بوده و بعد کسر را رفع ابهام کنید.
$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots}=$ عدد غیر صفر	نتیجه بگیرید $m=n$ بوده است. جواب صفر کسر یعنی $m>n$ ...!
$\lim_{x\to m}\frac{\quad}{ax^2+bx+c}=+\infty$ یا $-\infty$	نتیجه بگیرید $\frac{c}{a}=m^2 , -\frac{b}{a}=2m$ ($x=m$ ریشه‌ی مضاعف مخرج بوده)

۵۲ فرمول‌های پیوستگی

f در $x=a$ پیوسته است.	 نتیجه بگیرید $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$
f در $x=a$ پیوستگی راست دارد.	 نتیجه بگیرید $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$
f در $x=a$ پیوستگی چپ دارد.	 نتیجه بگیرید $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$
$y=\dfrac{\text{تابع پیوسته}}{ax^2+bx+c}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.	نتیجه بگیرید $b^2-4ac<0$
$y=\begin{cases} g(x) & x>a \\ h(x) & x<a \\ k & x=a \end{cases}$ در $x=a$ پیوسته است.	نتیجه بگیرید $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)=k$

مشتق

۵۳ فرمول‌های مشتق‌گیری

$y=x^n$	$y=\sqrt{ax+b}$	$y=u^m$	$y=\sqrt[m]{u}$	$y=f+g$	$y=fg$	$y=\dfrac{f}{g}$	$y=f(u)$
$y'=nx^{n-1}$	$y'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$y'=mu^{m-1}u'$	$y'=\dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y'=f'+g'$	$y'=f'g+fg'$	$y'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$	$y'=u'f'(u)$

۵۴ روابط مشتق

معادله‌ی خط مماس	در نقطه‌ی $x=a$ روی تابع f: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
فرمول مشتق در نقطه	$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و یا $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
حد f دار	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\dfrac{m-n}{k}f'(a)$
تابع مرکب	$y=(fog)(x)\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=g'(x)f'(g(x))$
	$y=(gof)(x)\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=f'(x)g'(f(x))$
آهنگ تغییر	متوسط در $[a,b]$ برای تابع f می‌شود: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
	لحظه‌ای برای تابع f در نقطه‌ی $x=c$ می‌شود: $f'(c)$
هوپیتال	اگر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{A}{B}=\dfrac{0}{0}$ شود، آن‌وقت قرار می‌دهیم: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{A}{B}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{A'}{B'}$
چندضابطه‌ای	اگر $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\ge a \\ h(x) & x<a \end{cases}$، آن‌وقت $f'(x)=\begin{cases} g'(x) & x>a \\ h'(x) & x<a \end{cases}$ و بعد مشتق‌پذیری در $x=a$ را بررسی کنید.

۵۵ کاندیداهای مشتق‌ناپذیری

$y=\frac{\text{تابع مشتق‌پذیر}}{u}$	$y=\sqrt{ax+b}$	$y=\sqrt[3]{(ax+b)^2(cx+d)}$	$y=\begin{cases} f(x) & x\geq a \\ g(x) & x<a \end{cases}$	$y=[u]$	$y=\lvert ax+b\rvert$
هر جا $u=0$ شود، حتماً	در $x=-\frac{b}{a}$، حتماً	در $x=-\frac{b}{a}$, $x=-\frac{d}{c}$، حتماً	در $u=a$، شاید!	هر جا $u\in\mathbb{Z}$ شود، شاید!	در $x=\frac{-b}{a}$، حتماً

۵۶ رابطه‌ی نمودار f و f'

در نمودار f	نقطه‌ی اکسترمم	نقطه‌ی گوشه‌ای	نقطه‌ی عطف قائم و بازگشتی	فواصل صعودی	فواصل نزولی
در نمودار f'	نقطه‌ی تلاقی با محور x ها	نقطه‌ی انفصال	انفصال با حد نامتناهی در طرفین آن	بالای محور x ها	پایین محور x ها

۵۷ ترفندهای مشتق

چندضابطه‌ای	تابع $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq a \\ h(x) & x<a \end{cases}$ برای مشتق‌پذیر بودن در $x=a$ نیاز به دو شرط دارد: $f(a)=\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^-} h(x)$ و $g'_+(a)=h'_-(a)$
ترتیب عملیات	اول تابع را ساده کنید، بعد مشتق آن را بگیرید و در آخر عددگذاری کنید: $f \xrightarrow{\text{ساده}} \bigcirc \xrightarrow{\text{مشتق}} f' \xrightarrow[x=a]{\text{عددگذاری}} f'(a)$
مشتق‌های بالاتر	$f \xrightarrow{\text{مشتق}} f' \xrightarrow{\text{مشتق}} f''$

کاربرد مشتق

۵۸ تکنیک‌های کاربرد مشتق

<table>
<tr><td rowspan="3">تعیین رفتار تابع f</td><td colspan="4">از تابع مشتق بگیرید و آن را تعیین علامت کنید: $\begin{array}{c|ccccc} x & & & & & \\ \hline f' & + & \vert & - & \vert & + \end{array}$
(f پیوسته است ...)</td></tr>
<tr><td>f اکیداً صعودی
$f'>0 \Leftrightarrow$</td><td>f اکیداً نزولی
$f'<0 \Leftrightarrow$</td><td rowspan="2">اگر f چندجمله‌ای غیرثابت باشد</td><td>f اکیداً صعودی
$f'\geq 0 \Leftrightarrow$</td></tr>
<tr><td>f صعودی
$f'\geq 0 \Leftrightarrow$</td><td>f نزولی
$f'\leq 0 \Leftrightarrow$</td><td>f اکیداً نزولی
$f'\leq 0 \Leftrightarrow$</td></tr>
<tr><td>پیدا کردن اکسترمم نسبی</td><td colspan="4">در تابع پیوسته‌ی f، مشتق تابع را گرفته و تعیین علامت کنید، هر نقطه‌ای که مشتق در آن تغییر علامت دهد، اکسترمم است.</td></tr>
<tr><td>پیداکردن اکسترمم مطلق</td><td colspan="4">تمام نقطه‌های بحرانی f را پیدا کرده و عرض همه‌ی آن‌ها را یادداشت کنید. بیشترین عرض و کمترین عرض به‌ترتیب ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق هستند.
(f پیوسته است ...)</td></tr>
<tr><td>f ناپیوسته است.</td><td colspan="4">روش رسم، بهترین راه یافتن اکسترمم نسبی و مطلق است؛ برای رسم به وضعیت تابع در $\pm\infty$ و هم‌چنین رفتارش اطراف ریشه‌های مخرجش (در صورت وجود) توجه کنید ...</td></tr>
</table>

۵۹ روابط نقطه‌ی بحرانی

تعریف	نقطه‌ی $x=c$ عضو دامنه‌ی تابع f است به‌طوری‌که $f'(c)=0$ یا وجود ندارد $f'(c)=$
شناخت از روی شکل	در نقطه‌ی بحرانی به تابع f مماس افقی می‌توان کشید یا مماس قائم یا خط مماس نمی‌توان کشید.  و و و
سر و ته بازه	اگر f روی $[a,b]$ تعریف شود، $x=a$ و $x=b$ حتماً بحرانی‌اند.
روش پیداکردن	از تابع f مشتق بگیرید و صورت و مخرج آن را مساوی صفر بگذارید، ریشه‌های به‌دست آمده به شرط وجود در دامنه‌ی تابع و حضور دربازه‌ی سؤال بحرانی‌اند ...

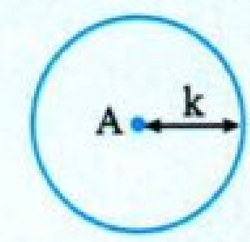
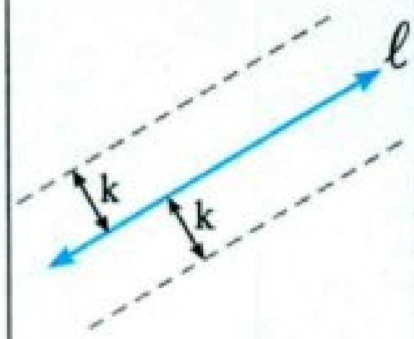
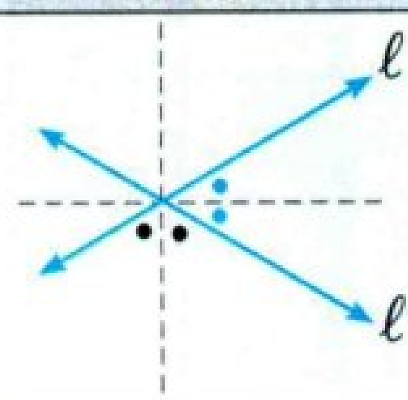
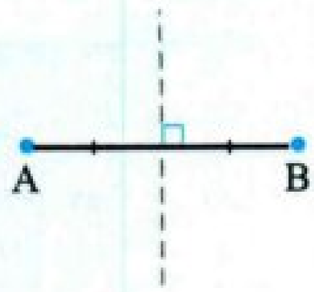
۶۰ نقطه‌های مهم در تابع‌های معروف

$y=k\|ax+b\|$	نقطه‌ی $x=-\frac{b}{a}$: اکسترمم نسبی، مطلق و بحرانی است. $(a\neq 0)$
$y=ax^2+bx+c$	نقطه‌ی $x=-\frac{b}{2a}$ اکسترمم نسبی، مطلق و بحرانی است. $(a\neq 0)$
$y=a(bx+c)^3+d$	نقطه‌ی $x=-\frac{c}{b}$ بحرانی است. $(a\neq 0)$
$y=c\sqrt{ax+b}+d$	نقطه‌ی $x=-\frac{b}{a}$ اکسترمم مطلق و بحرانی است $(a\neq 0)$
$y=\|u\|$	نقطه‌هایی که در آن‌ها $u=0$ یا $u'=0$ می‌شود، بحرانی‌اند.
$y'=(x-\alpha)^{2k}(x-\beta)^{2k'+1}$	$x=\alpha$ اکسترمم نسبی و بحرانی و $x=\beta$ بحرانی است. $(k\in\mathbb{Z})$
تابع‌های مثلثاتی	در $y=a\sin(bx+c)+d$، هر نقطه‌ای که $bx+c=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ شود، اکسترمم نسبی، اکسترمم مطلق و بحرانی است. $(a,b\neq 0)$
	در $y=a\cos(bx+c)+d$، هر نقطه‌ای که $bx+c=2k\pi+\pi$ یا $bx+c=2k\pi$ شود، اکسترمم نسبی، اکسترمم مطلق و بحرانی است. $(a,b\neq 0)$

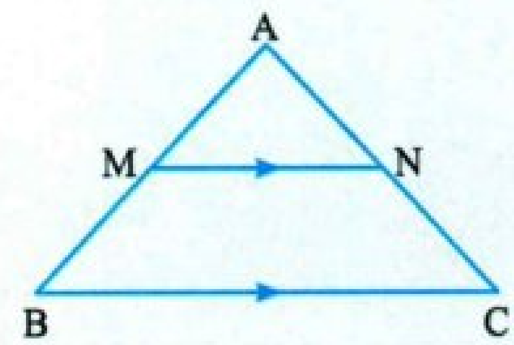
۶۱ تکنیک‌های بهینه‌سازی

روش کلی	یک شکل بکشید و عبارتی که قرار است بهینه شود را P نامیده و کاری کنید تا تنها یک مجهول داشته باشد، بعد $P'=0$ را حل کنید و مجهول واقعی را پیدا کنید ...
روش تستی $(x,y>0)$	اگر $x+y=k$ و xy ماکزیمم باشد، باید $x=y$ شود و $\max(xy)=\frac{k^2}{4}$
	اگر $xy=t$ و $x+y$ مینیمم باشد، باید $x=y$ شود و $\min(x+y)=2\sqrt{t}$
کمترین فاصله	کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی (a,b) تا تابع f: $P=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-b)^2}$ را مینیمم کنید.

۶۲ ویژگی‌های نقطه

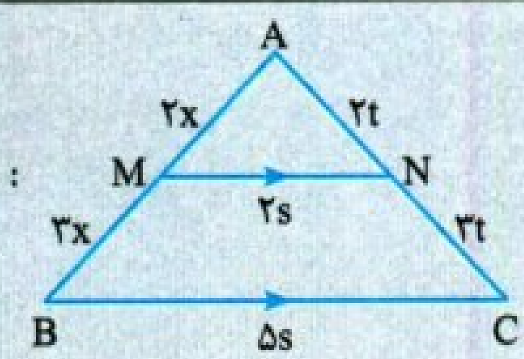
تمام نقاطی که از A به فاصله‌ی k هستند.	تمام نقاطی که از خط ℓ به فاصله‌ی k هستند.	تمام نقاطی که از دو خط تقاطع ℓ و ℓ' به یک فاصله‌اند.	تمام نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند.
دایره‌ای به مرکز A و شعاع k	دو خط موازی طرفین ℓ	نیمسازهای زاویه‌های بین ℓ و ℓ'	عمودمصنف AB
			

۶۳ فرمول‌های تالس

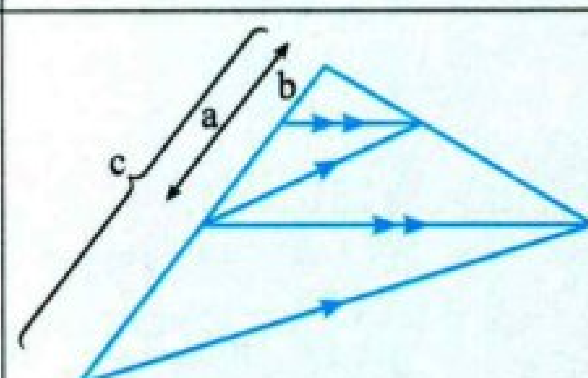


$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ و برعکس، $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ و برعکس

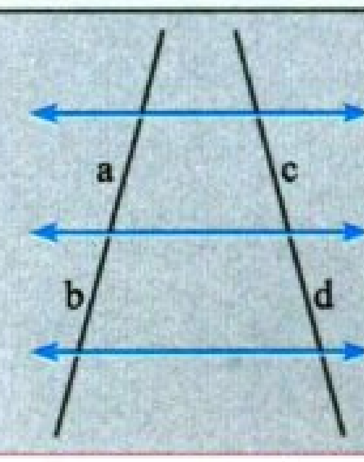
اگر $\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۳}$ (مثلاً) آن‌وقت



: تالس‌نویس سریع

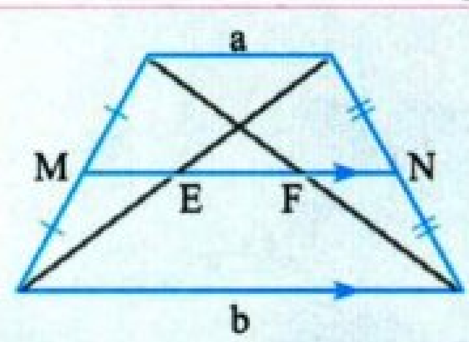


$a^۲=bc$؛ تالس تودرتو یا دیدن حرف Z در مثلث!

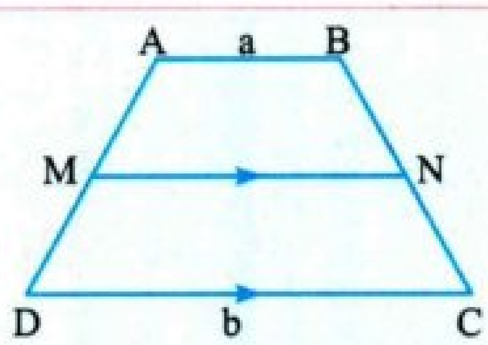


$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$؛ تالس در خطوط موازی

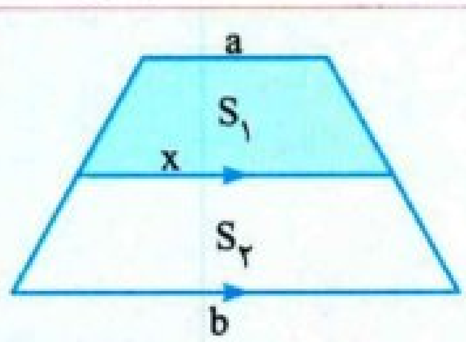
۶۴ فرمول‌های ذوزنقه؛ اگر ذوزنقه‌ای که خطی موازی قاعده‌ها دارد، دیدید؛ یاد تالس بیفتید ...!



$MN=\frac{a+b}{۲}$ $EF=\frac{|a-b|}{۲}$

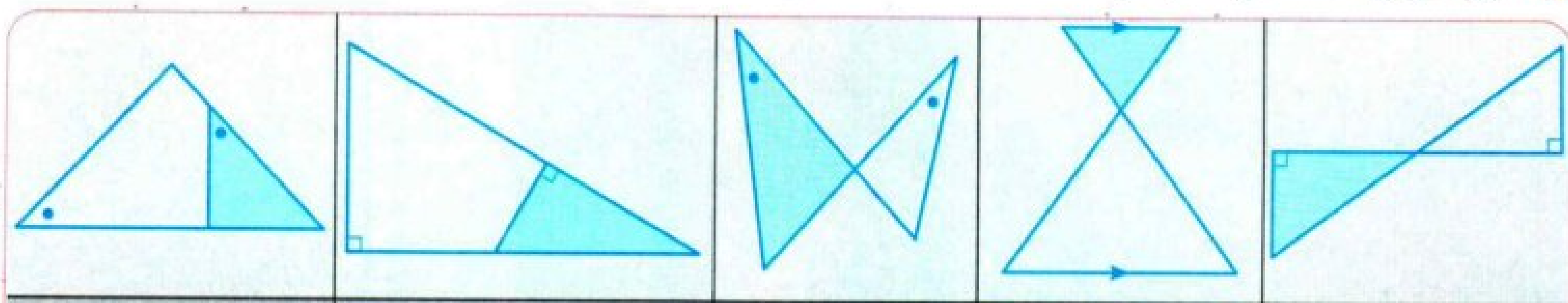


$\frac{AM}{MD}=\frac{m}{n}\Rightarrow MN=\frac{na+mb}{n+m}$



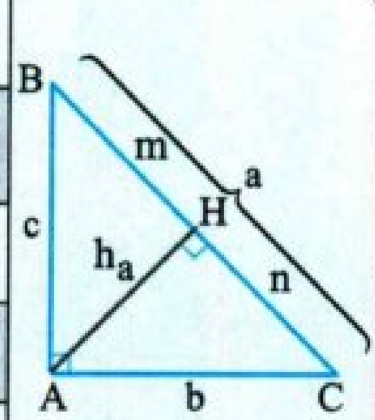
$\frac{S_۱}{S_۲}=k\Rightarrow x^۲=\frac{kb^۲+a^۲}{k+۱}$

۶۵ معروف‌ترین حالت‌های تشابه دو مثلث



دو تا پاپیون قائم الزاویه	دو تا پاپیونی که ضلع روبه‌روی موازی دارند.	دو تا پاپیونی که یک زاویه‌ی مساوی دارند.	یک قائم‌الزاویه که گوشه‌ی قائم‌الزاویه‌ی دیگری نشسته است.	یک مثلث که گوشه‌ی دیگری نشسته و یک زاویه‌ی مساوی دارند.

۶۶ فرمول های مثلث قائم‌الزاویه



$$a^2 = b^2 + c^2$$

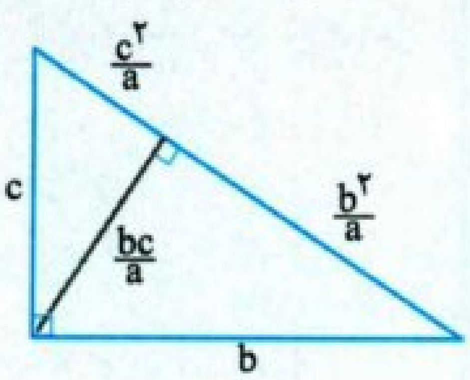
$$h_a^2 = m \cdot n$$

$$c^2 = m \cdot a$$

$$b^2 = n \cdot a$$

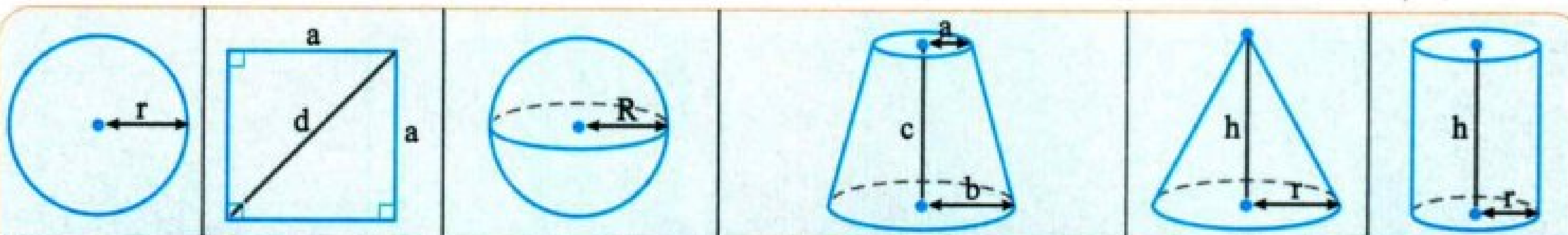
$$h_a = \frac{bc}{a}$$

اینجوری هم ببین:



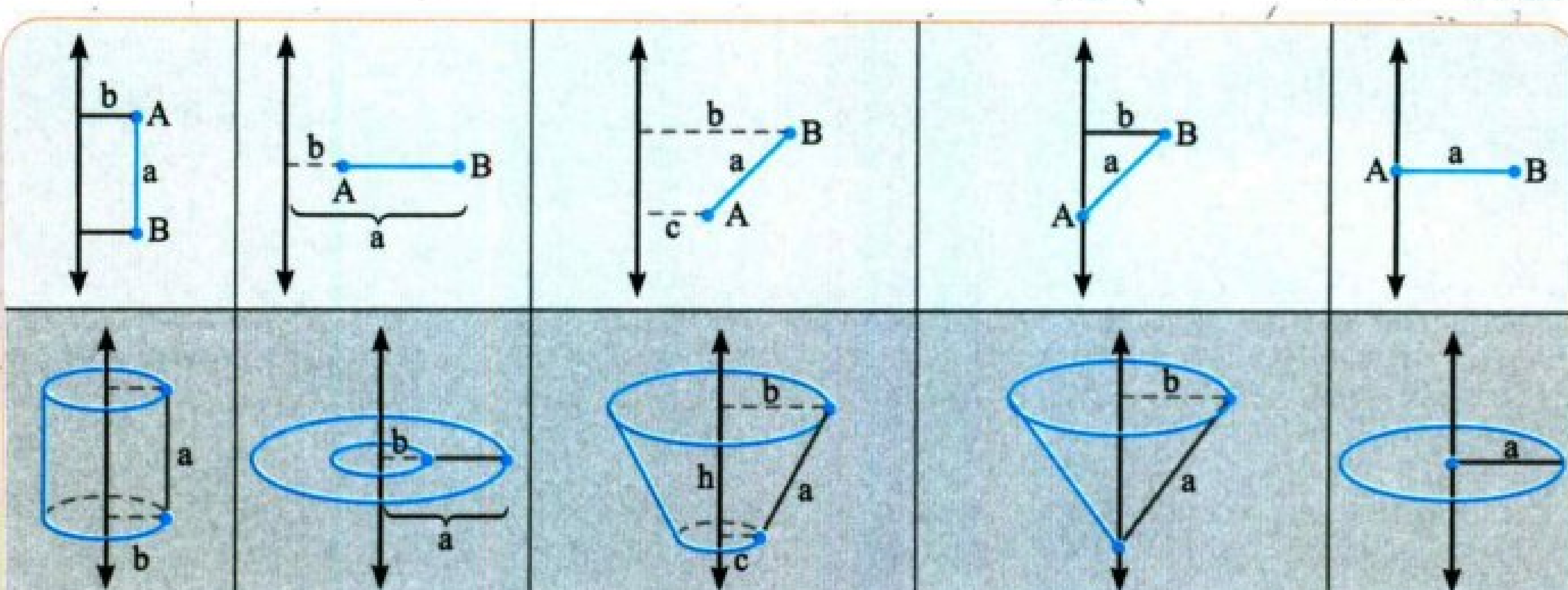
هندسه دوازدهم

۶۷ فرمول‌های حجم و مساحت



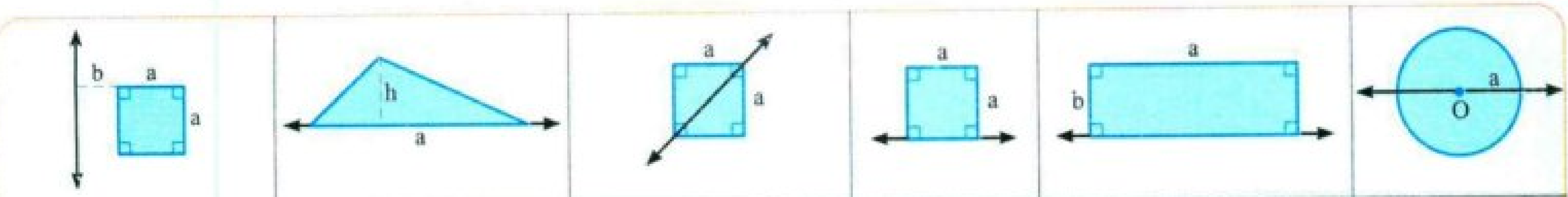
$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$V = \frac{\pi c}{3}(a^2 + b^2 + ab)$	$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3$	$S = a^2 = \frac{d^2}{2}$	$S = \pi r^2$

۶۸ دوارن پاره خط AB



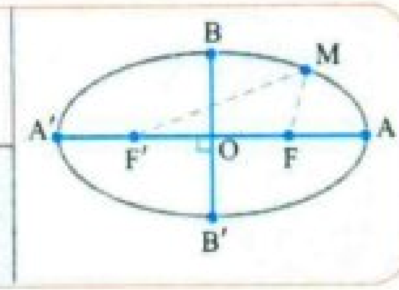
$S = \pi a^2$	$V = \frac{1}{3}\pi b^2 \sqrt{a^2 - b^2}$	$h = \sqrt{a^2 - (b-c)^2}$	$S = \pi(a^2 - b^2)$	$V = \pi b^2 a$

۶۹ حجم حاصل از دوران شکل‌های معروف



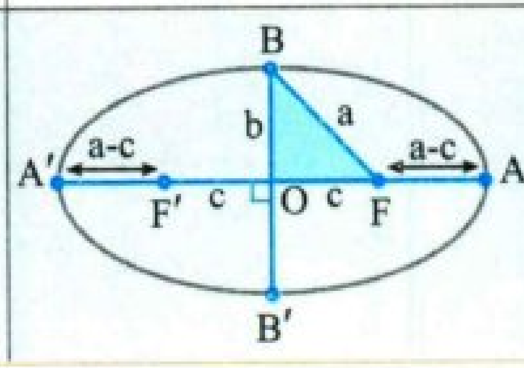
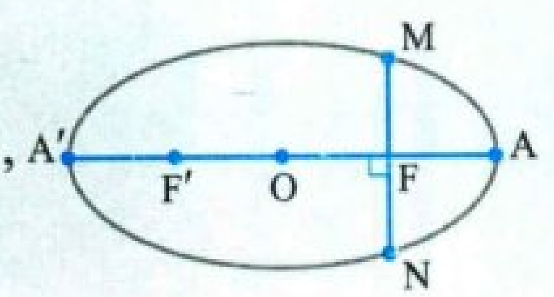
$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi a^3$	$V_{\text{استوانه}} = \pi b^2 a$	$V_{\text{استوانه}} = \pi a^3$	$V_{\text{دو مخروط}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3$	$V_{\text{دو مخروط}} = \frac{\pi}{3} a h^2$	$V_{\text{تیوب}} = \pi a^2 (a + 2b)$

۷۰ روابط اصلی بیضی

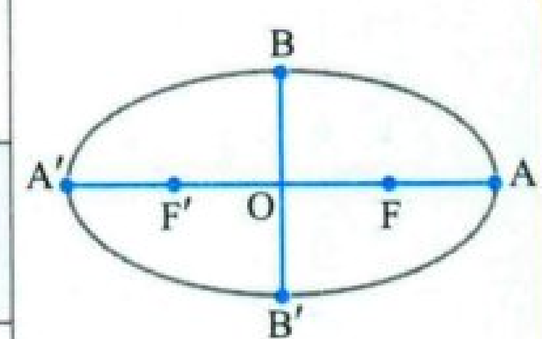


مفهوم	قطر بزرگ	قطر کوچک	فاصله‌ی کانونی	رابطه‌ی بین پارامترها	محورهای تقارن	مرکز تقارن
$MF + MF' = 2a$	$AA' = 2a$	$BB' = 2b$	$FF' = 2c$	$a^2 = b^2 + c^2$	BB', AA'	$o = \frac{F + F'}{2}$

۷۱ تمام اندازه‌ها در بیضی

خروج از مرکز	اندازه‌های مهم در شکل	وتر کانونی
$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ $(0 < e < 1)$		$MN = \frac{2b^2}{a}$, 

۷۲ مختصات نقاط مهم بیضی

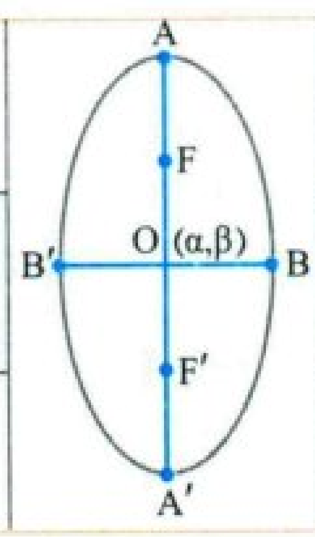


$O(\alpha, \beta)$

$F'(\alpha - c, \beta), F(\alpha + c, \beta)$

$A'(\alpha - a, \beta), A(\alpha + a, \beta)$

$B'(\alpha, \beta - b), B(\alpha, \beta + b)$



$F'(\alpha, \beta - c), F(\alpha, \beta + c)$

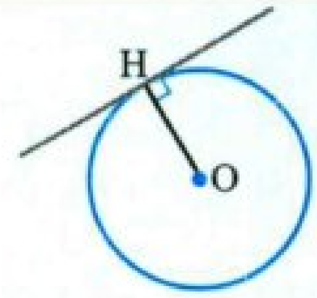
$A'(\alpha, \beta - a), A(\alpha, \beta + a)$

$B'(\alpha - b, \beta), B(\alpha + b, \beta)$

۷۳ معادله‌ی دایره

استاندارد	گسترده
مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع $r \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$

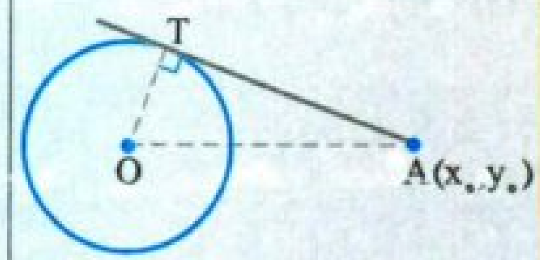
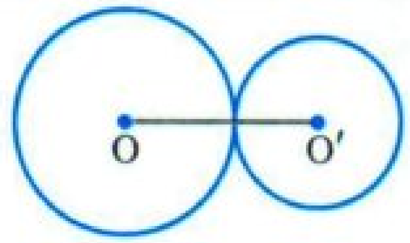
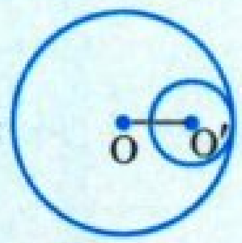
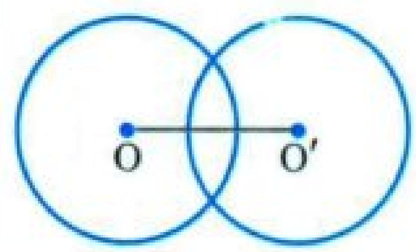
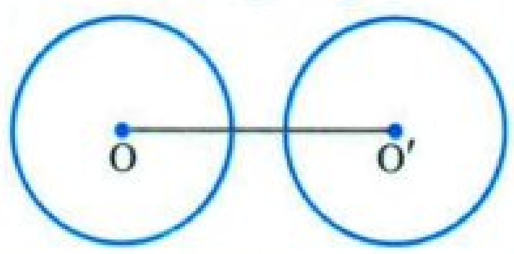
۷۴ فرمول‌های مماس



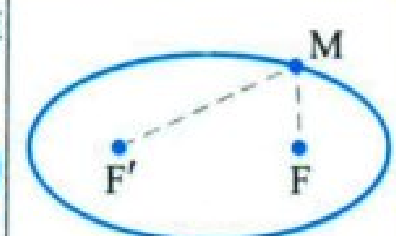
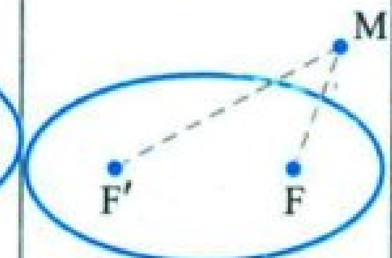
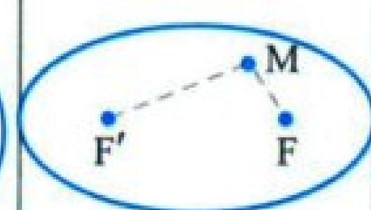
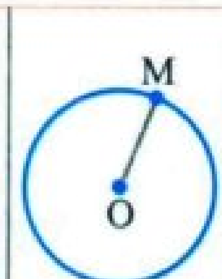
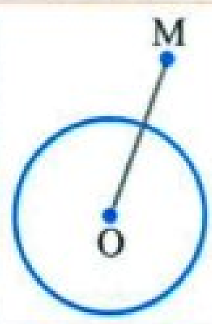
OH=r

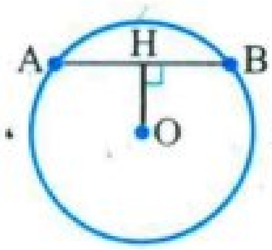
اگر خط $ax + by + c = 0$ بر دایره‌ای به مرکز (α, β) مماس باشد، آن‌وقت

$$r = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

<table>
<tr><td rowspan="3">دایره‌ی مماس بر محورها
$O(\alpha,\beta)$</td><td colspan="3">اگر دایره بر محور x ها مماس باشد، آن‌وقت: $\lvert\beta\rvert=r$</td></tr>
<tr><td colspan="3">اگر دایره بر محور y ها مماس باشد، آن‌وقت: $\lvert\alpha\rvert=r$</td></tr>
<tr><td colspan="3">اگر بر هر دو محور x ها و y ها مماس باشد، آن‌وقت: $\lvert\alpha\rvert=\lvert\beta\rvert=r$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">$AT=\sqrt{OA^2-r^2}$ و از راه معادله‌ی گسترده هم داریم:
$AT=\sqrt{x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">دو دایره‌ی مماس بر هم</td><td colspan="3">$OO'=r+r'$: </td></tr>
<tr><td colspan="3">$OO'=\lvert r-r'\rvert$: </td></tr>
<tr><td rowspan="3">دایره‌های غیرمماس</td><td>متقاطع</td><td>یکی خارج دیگری</td><td>یکی داخل دیگری</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\lvert r-r'\rvert<OO'<r+r'$</td><td>$OO'>r+r'$</td><td>$OO'<\lvert r-r'\rvert$</td></tr>
</table>

۷۵ درون و بیرون

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$MF+MF'=2a$</td><td>$MF+MF'>2a$</td><td>$MF+MF'<2a$</td><td>$OM=r$</td><td>$OM>r$</td><td>$OM<r$</td></tr>
</table>

۷۶ فرمول وتر: اگر  ، آن‌وقت: $AB=2\sqrt{r^2-OH^2}$

شمارش

۷۷ فرمول‌های کاربردی شمارش

اصل ضرب	اصل جمع	فاکتوریل	تبدیل k تایی: $P(n,k)$	ترکیب: $C(n,k)$
عمل دوم / عمل اول n حالت / m حالت تعداد حالت‌ها $= mn$	عمل مطلوب: m حالت یا n حالت تعداد حالت‌ها: $m+n$	چیدن n شیء متمایز در یک ردیف تعداد حالت‌ها $= n!$	انتخاب k شیء از میان n شیء متمایز و بعد چیدن آن‌ها تعداد حالت‌ها: $\frac{n!}{(n-k)!}$	انتخاب k شیء از میان n شیء متمایز بدون چیدن تعداد حالت‌ها: $\frac{n!}{(n-k)!k!}$

۷۸ حالت‌های خاص جایگشت:

چیدن یک‌درمیان	تعداد حالت‌های چیدن n پسر و n دختر در یک ردیف $= ۲(n!)(n!)$	د پ د پ پ د پ د
	تعداد حالت‌های چیدن n پسر و $n+۱$ دختر در یک ردیف $= n!(n+۱)!$	د پ د پ د
A قبل از B باشد.	کل اشیاء n تا بوده و A و B دو شیء خاص هستند، تعداد حالت‌ها $= \frac{n!}{۲!}$	
جایگشت دوری	تعداد حالت‌های چیدن n نفر دور یک میزگرد $= (n-۱)!$	

۷۹ فرمول‌های ترکیب

هیچی یا همه!	متمم	بالایی‌ها مساوی!	پاسکال	زیرمجموعه‌ها!
$\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$	$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$	$\binom{n}{a}=\binom{n}{b} \Rightarrow a+b=n$ یا $a=b$	$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-۱}=\binom{n+۱}{r}$	$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$

۸۰ تکنیک‌های شمارش بدون شمردن

خانه‌ی مشروط	موقع پرکردن خانه‌های شمارش حالت‌ها، اول خانه‌هایی که شرط خاصی دارند، مقدم‌اند!
شناخت اصل	نیاز به حالت‌بندی، یعنی اصل جمع! چند عمل پشت سر هم برای انجام هم‌زمان، یعنی اصل ضرب!
حداقل و حداکثر	شاید حالتِ نامطلوب بهتر باشد و معمولاً حالت‌بندی نیاز است.
کنار هم بودن	اشیایی که قرار است کنار هم باشند را طناب‌پیچ کرده و یک شیء به حساب بیاورید.

۸۱ تعداد زیرمجموعه‌های $A=\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$

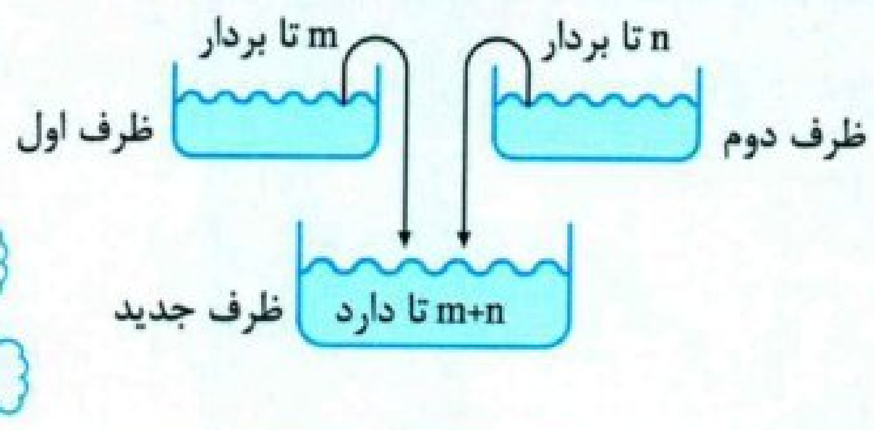
تعداد کل	فاقد t عضو خاص و شامل r عضو خاص	تعداد k عضویِ کل	k عضویِ شامل t عضو خاص	k عضویِ فاقد r عضو خاص
۲^n	۲^{n-t-r}	$\binom{n}{k}$	$\binom{n-t}{k-t}$	$\binom{n-r}{k}$

احتمال

۸۲ قوانین احتمال مقدماتی

فرمول احتمال	فرمول متمم	احتمال اجتماع (A یا B)	احتمال منها (A بله و B خیر)	نه A و نه B
$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$	$P(A')=۱-P(A)$	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$	$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$	$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)$

۸۳ قوانین احتمال پیشرفته

احتمال شرطی	$P(A\|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ = احتمال اتفاق افتادنِ A مشروط به اتفاق افتادنِ B و یا $P(A\|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
پیشامدهای مستقل	$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ ، $P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)$
پیشامدهای غیرمستقل	$P(A\cap B)=P(A)P(B\|A)$ ؛ احتمال اولی (مجزا) ضربدر احتمال دومی (با شرط این‌که اولی اتفاق افتاده باشد)
احتمال کل	در نمودارِ $\boxed{\text{اتفاق اول}}$: حالت ۱ $\rightarrow P_1 \xrightarrow{\text{حالت مطلوب اتفاق دوم}} P_3$ ، حالت ۲ $\rightarrow P_2 \xrightarrow{\text{حالت مطلوب اتفاق دوم}} P_4$ ، جواب می‌شود $P_1P_3+P_2P_4$
ساختن ظرف جدید	 نحوه‌ی کشیدن فلش‌های احتمال کل: ظرف جدید: مال اولی $\frac{m}{m+n} \xrightarrow{\text{حالت مطلوب}}$ ، مال دومی $\frac{n}{m+n} \xrightarrow{\text{حالت مطلوب}}$

۸۴ تکنیک‌های احتمال

تست‌های دختر پسری	در خانواده‌ای با n فرزند؛ احتمال داشتن k تا پسر = احتمال داشتن k تا دختر	$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$
	در پرتاب n بارِ سکه؛ احتمال آمدن k بار رو = احتمال آمدن k بار پشت	
پیشامدهای ناسازگار	$P(A\cap B)=0$ و در نتیجه: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	
مجموع دو تاس	اگر بخواهید مجموع دو تاس بشود m به‌طوری که $m\leq 7$ است؛ تعداد حالت‌ها می‌شود: $m-1$.	
	اگر بخواهید مجموع دو تاس بشود n به‌طوری که $n\geq 7$ است؛ تعداد حالت‌ها می‌شود $13-n$.	

آمار

۸۵ انواع متغیرها

کمی گسسته	کمی پیوسته	کیفی اسمی	کیفی ترتیبی
متغیر را می‌توانید بشمارید	متغیر قابل اندازه‌گیری است	فقط نوع یا وضعیت متغیر قابل بیان است	در نوع متغیر یک ترتیب طبیعی می‌بینید.

۸۶ شاخص‌های آماری

$R=\max-\min$	$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$	$\sigma^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$	$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$	$CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$
دامنه تغییرات	میانگین	واریانس	انحراف معیار	ضریب تغییرات

۸۷ حالت‌های خاص شاخص آماری

اگر داده‌ها دنباله‌ی حسابی با قدر نسبتِ d تشکیل دهند: $x_1 \xrightarrow{+d} x_2 \xrightarrow{+d} \dots \xrightarrow{+d} x_n$		اگر مجموع مجذورات داده‌ها در تست دیده شود: $M = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$
$\text{میانه} = \bar{x} = \dfrac{\text{دادهٔ آخر} + \text{دادهٔ اول}}{2}$	$\sigma^2 = \dfrac{n^2 - 1}{12} d^2$	$\sigma^2 = \dfrac{M}{n} - \bar{x}^2$

۸۸ تکنیک‌های آمار

میانه‌ی Q_2	داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: داده‌ی وسطی (n فرد) یا میانگین دو داده‌ی وسطی(n زوج) می‌شود میانه.	
داده‌ی وسط	اگر تعداد داده‌ها زیاد بود؛ برای n فرد شماره‌ی داده‌ی وسط $\dfrac{n+1}{2}$ و برای n زوج، شماره‌ی داده‌های وسطی $\dfrac{n}{2}$ و بعدی آن است.	
چارک اول Q_1	داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید و میانه را حساب کنید؛ حالا بین داده‌های کمتر از میانه مجدداً میانه بگیرید ...	
چارک سوم Q_3	داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید و میانه را حساب کنید؛ حالا بین داده‌های بیشتر از میانه مجدداً میانه بگیرید ...	
تبدیل داده‌ها	اگر داده‌ها را از $x_1, x_2, \dots, x_n$ تبدیل کنید به: $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$	میانگین از $\bar{x}$ تبدیل می‌شود به $a\bar{x} + b$
		واریانس از σ^2 تبدیل می‌شود به $a^2\sigma^2$
		انحراف معیار از σ تبدیل می‌شود به $\|a\|\sigma$
		میانه از Q_2 تبدیل می‌شود به $aQ_2 + b$
تساوی داده‌ها	اگر واریانس، انحراف معیار یا ضریب تغییرات صفر باشند، یعنی تمام داده‌ها مساوی‌اند و برعکس ...	

Certification+

دانش آموز عزیز! حالا به شما اطمینان می‌دهیم که برای شرکت در کنکور سراسری و پاسخ‌گویی به تست‌های ریاضی‌تان آماده‌اید، چراکه:

- **با مطالعه‌ی درسنامه، تمامی فصل‌ها را یادگرفته‌اید و با حل تست‌های آخر فصل به موضوع مسلط شده‌اید.**
- **با آزمون‌ها، هم فصل‌ها را مرور کرده‌اید و هم به جمع‌بندی مباحث مرتبط پرداخته‌اید.**
- **آزمون‌هایی مشابه کنکور حل کرده‌اید و فرمول‌ها را هم به خاطر سپرده‌اید...**

این گواهی تضمین موفقیت شما در درس ریاضی تجربی‌تان است؛
اگر کتاب «ریاضیات تجربی جامع» و
«آزمونیوم ریاضیات تجربی پلاس» را کار کرده باشید...

به امید ریاضی ۱۰۰٪ - مهروماه