گسسته

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$

$\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$

نظریه اعداد: بررسی خواص اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و اعداد طبیعی $\mathbb{N}$

بخش پذیری در اعداد صحیح

عاد کردن

$20=4\times5 \quad 15=3\times5 \quad 6=2\times3$

$4|20$ و $3|15$ ، $2|6$

$b|a$ (b: کوچکتر، مخالف صفر ؛ a: بزرگتر)

$a=bq$

$\exists q\in\mathbb{Z}$

- ✓ a مضرب b است.
- ✓ a بر b بخش پذیر است.
- ✓ b ، a را عاد می کند.
- ✓ باقیمانده a بر b صفر است.
- ✓ b عدد a را می شمارد.
- ✓ b یکی از مقسوم علیه a است.

- ۱۵ مضرب ۳ است.
- ۱۵ بر ۳ بخش پذیر است.
- ۳ عدد ۱۵ را عاد می کند.
- باقیمانده ۱۵ بر ۳ صفر است.
- ۳ ، ۱۵ را می شمارد.
- ۳ مقسوم علیه ۱۵ است.

نکته: $b|a \rightarrow \pm b|\pm a$

$2|6 \rightarrow 2|-6$

~~$0|2 \rightarrow 2=0\times q$~~

چرا $3\nmid 5$ ؟ $5=3\times q \rightarrow q=\frac{5}{3} \rightarrow \frac{5}{3}\notin\mathbb{Z}$

$x=a\times b \rightarrow a|x , b|x$

چرا $9|72$ ؟ زیرا $72=9\times8$

چرا $-7|42$ ؟ زیرا $42=-7\times-6$

نکته: $a^m|a^n \rightarrow m\leq n$

$a^n=a^m\times a^{n-m}$

$21=3\times7 \rightarrow 3|21$ و $7|21$

* چرا $2^3|2^7$ ← زیرا $2^7=2^3\times2^4$

مثال: $3^2|3^5$ / $3^4|3^5$

مضرب ۳: ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ....

خواص عاد کردن:

(1) $a|b \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} a|mb$ ([illegible] m)

$3|6 \xrightarrow{\times4} 3|24$ ✓

$3|6 \xrightarrow{\times4} 12|6$ ✗

$3|6 \xrightarrow{\times4} 12|24$

(1') $a|b \xrightarrow{\times m} am|bm$

(۲) $a|b \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} a|b^n$ — مثال: $2|6$ → (توان ۲) → $2|36$ ✓ ؛ $2|6$ → (توان ۲) → $4|6$ ✗

(۳) $a|b \Rightarrow a^n|b^n$ — مثال: $3|6 \rightarrow 9|36$

(۴) $a|x.y \not\Rightarrow \begin{cases} a|x \\ a|y \end{cases}$ — مثال: $6|4\times9 \rightarrow 6|4$ ✗ ، $6|9$ ✗

(٤) $a|b \not\Rightarrow b|a$ — مثال: $2|6 \rightarrow 6|2$

(۵) $a|b \xrightarrow{b\neq0} |a|\leq|b|$

(۶) $a|a$, $\pm1|a$

(۷) $a|0 \Rightarrow 0=a\times0$ — مثال: $2|0$

(۸) $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|b\pm c$ (و $b\times c$)

مثال: $3|6$ ، $3|9$ ⟹ $\begin{cases} 3|15 \\ 3|3 \\ 3|54 \end{cases}$ ، $\begin{cases} -2|2 \\ 2|-2 \end{cases}$

(۹) $a|b \Rightarrow b=aq$ ، $b|a \Rightarrow a=bq'$

$b=bqq' \Rightarrow 1=qq' \Rightarrow q=q'=\pm1$

$|a|=|b|$

(۱۰) $\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \Rightarrow$ ~~$a\pm c|b\pm d$~~ ، $ac|bd$

مثال: $2|8$ ، $3|9$ ⟹ ~~$5|17$~~ ، $6|72$

دلیل: $\begin{cases} b=aq \\ d=cq' \end{cases} \xrightarrow{\times} bd=acqq' \Rightarrow ac|bd$

(۱۱) $a|b \Rightarrow a|mb$ ، $a|c \Rightarrow a|nc$ ⟹ $a|mb\pm nc$

مثال: اگر $a\neq0$ عددی صحیح و دو عدد $8m+3$ و $11m+4$ بر a بخش‌پذیر باشند a کدام است؟

$$\begin{cases} a \mid 8m+3 \xrightarrow{\times 11} a \mid 88m+33 \\ a \mid 11m+4 \xrightarrow{\times 8} a \mid 88m+32 \end{cases} \Rightarrow a \mid 1 \rightarrow a=\pm 1$$

سوال: $a \mid 2 \rightarrow a=\pm 1, \pm 2$

$a \mid 4 \rightarrow a=\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$a \mid 6 \rightarrow a=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$a \mid 5$ ← عدد اول

$a=\pm 1, \pm 5$

P (اعداد اول): $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$

$a \mid p \rightarrow a=\pm 1, \pm p$

$a \mid 13 \rightarrow a=\pm 1, \pm 13$

دلیل: $p = a \times q \rightarrow a=\pm 1$ یا $a=\pm p$

مثال: اگر عدد طبیعی a دو عدد $5k+2$ و $9k+3$ را عاد کند مقدار a کدام است؟

$$\begin{cases} a \mid 5k+2 \xrightarrow{\times 9} a \mid 45k+18 \\ a \mid 9k+3 \xrightarrow{\times 5} a \mid 45k+15 \end{cases} \Rightarrow a \mid 3 \rightarrow a=1, 3$$

تعدی: $a \mid b,\ b \mid c \rightarrow a \mid c$

$3 \mid 15$

$15 \mid 45$

$\overline{\quad 3 \mid 45 \quad}$

دلیل:

$$\begin{cases} b=aq \\ c=bq' \end{cases} \rightarrow c=aqq' \rightarrow c=a(qq') \rightarrow a \mid c$$

مثال: اگر a عددی طبیعی باشد و دو عدد $11k+9$ و $13k+10$ را عاد کند، مقدار a کدام است؟

$$\begin{cases} a \mid 11k+9 \xrightarrow{\times 13} a \mid 143k+117 \\ a \mid 13k+10 \xrightarrow{\times 11} a \mid 143k+110 \end{cases} \Rightarrow a \mid 7 \rightarrow a=1, 7$$

مثال: اگر $a>1$ و $a \mid 7k+3$ ، $a \mid 5k-2$ ثابت کنید a عددی اول است.

$$\begin{cases} a \mid 7k+3 \xrightarrow{\times 5} a \mid 35k+15 \\ a \mid 5k-2 \xrightarrow{\times 7} a \mid 35k-14 \end{cases} \rightarrow a \mid 29 \text{ (اول)} \rightarrow a=29$$

مثال: اگر $a|b+c$ آیا $a|b$ و $a|c$ برقرار است؟ خیر

$5|\underbrace{3+7}_{10} \rightarrow 5\nmid 3,\ 5\nmid 7$ $2|\underbrace{4+6}_{10} \rightarrow 2|4,\ 2|6$

مثال: اگر $7|3k+1$ آنگاه ثابت کنید $49|9k^2+27k+8$ ♡

$7|3k+1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 49|9k^2+6k+1$

$7|3k+1 \xrightarrow{\times 7} 49|21k+7$

$\rightarrow 49|9k^2+27k+8$

مثال: اگر $a|4k+9$ و $a|9k+14$ آنگاه a را بیابید.

$\begin{cases} a|4k+9 \xrightarrow{\times 3} a|12k+27 \\ a|6k+14 \xrightarrow{\times 2} a|12k+28 \end{cases} \quad a|1 \rightarrow a=\pm 1$

مثال: اگر $a|b$ ← $n\le m$ → $a^n|b^m$

دلیل: $b=aq \xrightarrow{\text{توان } m} b^m=a^m q^m \rightarrow b^m=a^n(a^{m-n}q^m)$

مثال: اگر n عدد صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

$n^3-n=n(n-1)(n+1)$

① حالت $n=3k \rightarrow n(n-1)(n+1)=3k(3k-1)(3k+1)$

② حالت $n=3k+1 \rightarrow n(n-1)(n+1)=(3k+1)3k(3k+2)$

③ حالت $n=3k+2 \rightarrow n(n-1)(n+1)=(3k+2)(3k+1)(3k+3)$ ، $3(k+1)$

$(a,b)>0$ ب.م.م ـــ بزرگترین مقسوم علیه مشترک

$$\left.\begin{matrix} d\mid a \\ d\mid b \end{matrix}\right\} \rightarrow (a,b)=d$$

$$\left.\begin{matrix} 1\mid 8 & 2\mid 8 & 4\mid 8 \\ 1\mid 12 & 2\mid 12 & 4\mid 12 \end{matrix}\right\} (12,8)=4$$

$$(a,b)\mid a \qquad (a,b)\mid b$$

مثال $(72,48) = (2^3\times 3^2, 2^4\times 3^1) = 2^3\times 3^1 = 24$

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$$24\mid 48 \qquad 24\mid 72$$

$$m\mid a,\ m\mid b \rightarrow m\mid (a,b)$$

① $d=(a,b) \rightarrow d\mid a,\ d\mid b$

② $(a,b)=1$ ـــ نسبت به هم اولند یعنی هیچ عامل مشترکی ندارند.

$$(2,3)=1 \qquad (9,4)=1 \qquad (36,7)=1 \quad (36 = 2^2\times 3^2)$$

③ $a\mid b \rightarrow (a,b)=|a|$

$$2\mid 8 \rightarrow (2,8)=2$$
$$9\mid 36 \rightarrow (36,9)=9$$
$$m^2\mid m^3 \rightarrow (m^2,m^3)=m^2$$

④ $(m^r, m^s) = m^r \quad r<s$

مثال $(4m, 12m^3) = 4m$

$$4m \mid 12m^3$$ ($\times 3$, $\times m^2$)

$$(5m+2, 5m+3) = d = 1$$

$$\left.\begin{matrix} d\mid 5m+2 \\ d\mid 5m+3 \end{matrix}\right\} d\mid 1 \rightarrow d=1$$

مثال $(n, n+1) = d = 1$ (دو عدد متوالی) $\qquad p \neq q$ اول $(p, q) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid n+1 \\ d \mid n \end{array}\right\} \to d \mid 1 \to d = 1$$

مثال: اگر a, b نسبت به هم اول باشند، $3a+2b$ و $7a+5b$ نیز نسبت به هم اولند.

$(7a+5b, 3a+2b) = d$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 7a+5b \xrightarrow{\times 3} d \mid 21a+15b \\ d \mid 3a+2b \xrightarrow{\times 7} d \mid 21a+14b \end{array}\right\} d \mid b$$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 7a+5b \xrightarrow{\times 2} d \mid 14a+10b \\ d \mid 3a+2b \xrightarrow{\times 5} d \mid 15a+10b \end{array}\right\} d \mid a$$

$$d \mid \overbrace{(a, b)}^{1} \to d = 1$$

$$(a, b) = d \longrightarrow \begin{cases} (1)\ d \mid a,\ d \mid b \\ (2)\ m > 0 \left.\begin{array}{l} m \mid a \\ m \mid b \end{array}\right\} m \leq d \end{cases}$$

مثال $(4, -6) = (4, 6) = (2^2, 2^1 \times 3) = 2$

مثال $(5a+4, 2a+3) = d$

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 5a+4 \xrightarrow{\times 2} d \mid 10a+8 \\ d \mid 2a+3 \xrightarrow{\times 5} d \mid 10a+15 \end{array}\right\} d \mid 7 \to d = 1 \text{ یا } 7$$

ک م م کوچکترین مضرب مشترک $[a,b]$

$$(a,b) \leq a,b \leq [a,b]$$

عامل های مشترک با توان کمتر — همه عامل ها با توان بیشتر

مثال $[2,3]=6$ — مضرب ۲: $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ — مضرب ۳: $3, 6, 9, 12, 15, \dots$

$(2,3)=1$

مثال $[18,12]=[2\times 3^2, 2^2\times 3]=2^2\times 3^2=36$

$[a,b]=c$ →
1. $a|c$ و $b|c$
2. $\left.\begin{matrix} a|m \\ b|m \end{matrix}\right\} c \leq m$

$2|6$ → $(2,6)=2$ ، $[2,6]=6$

$a|b$ → $(a,b)=|a|$ ، $[a,b]=|b|$

$4|12 \longrightarrow [4,12]=12$

$r<s$: $(m^r,m^s)=m^r$ ، $[m^r,m^s]=m^s$

$$* \ (a,b)[a,b]=a\cdot b$$

مثال $(\underbrace{[m^3,m^2]}_{m^3},m^4)=m^3$

$[1,n]=n$ ، $(1,n)=1$

$[4m,12m^3]=4m\underbrace{[1,3m^2]}_{3m^2}=12m^3$

مثال $[\underbrace{(20,16)}_{4},40]=[4,40]=40$ ، $4|40$

مثال $3 \nmid a$

$$[21a^2 , 35a^3] = 3 \times 5 \times 7 \times a^3 = 105a^3$$

$3\times7a^2 \quad 7\times5a^3$

- $(1,a)=1$
- $[1,a]=a$
- $(a,a)=a$
- $[a,a]=a$
- $x \mid y$
- $(x,y)=x$
- $(x,y)=y$

مثال

$$\big(\underbrace{[a,(a,b)]}_{a}, \underbrace{(a,[a,b])}_{a}\big) = a$$

$(a,b) \mid a,b \qquad a,b \mid [a,b]$

* مثال اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد $12n+7$ و $5n-2$ نسبت به هم اول نباشند، ب.م.م این دو عدد کدام است؟

$$(5n-2, 12n+7) = d$$

$d \mid 5n-2 \xrightarrow{\times 12} d \mid 60n-24$

$d \mid 12n+7 \xrightarrow{\times 5} d \mid 60n+35$

$\Big\} \; d \mid 59 \rightarrow d = 1, 59$

* مثال دو عدد a, b نسبت به هم اول اند و $54 \mid (a+b)^2$ ، $36a = [a,36] = ?$

$(a,36)=1 \qquad 2\times3^3 \qquad (a,b)=1$

$2 \mid a+b$

$3^2 \mid a+b$

$\Big\} \; 18 \mid a+b \rightarrow a+b = 189$

عامل ۲، ۳ ندارد

$$(a,b)=1 \longrightarrow [a,b]=ab$$

مثال $\big(\overbrace{[c,1]}^{c}, \overbrace{(a,[a,b])}^{a}\big) = a \qquad a \mid c$

* مثال $b \mid n+1$ و $b \mid n^2+9n+1$ ثابت کنید $b \mid 7$

$$\begin{cases} b \mid n^2+9n+1 \\ b \mid n+1 \xrightarrow{\times n} \end{cases} \begin{cases} b \mid n^2+9n+1 \\ b \mid n^2+n \end{cases} \begin{cases} b \mid 8n+1 \\ b \mid n+1 \xrightarrow{\times 8} \end{cases} \begin{cases} b \mid 8n+1 \\ b \mid 8n+8 \end{cases}$$

$$b \mid 7$$

* مثال به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به صورت $\overbrace{25n+9 \text{ و } 11n+4}^{d}$ نسبت به هم اول هستند؟

$$\begin{cases} d \mid 25n+9 \xrightarrow{\times 11} d \mid 275n+99 \\ d \mid 11n+4 \xrightarrow{\times 25} d \mid 275n+100 \end{cases} \quad d \mid 1 \rightarrow d=1$$

۹۰ (circled) ۸۹ ۸۷ ۸۶

* مثال اگر $11 \mid a+b$ کدام گزینه صحیح است؟

$11 \mid 6a-5b$

$11 \mid 7a+4b$

$11 \mid 3a+9b$

$11 \mid a^2+b^2$

$$\begin{cases} 11 \mid 6a+6b \\ 11 \mid 11b \end{cases}$$

$$11 \mid 6a-5b$$

جلسه دوم ریاضی گسسته

قضیه تقسیم

$$a \,\big|\, \underline{b}\quad q, \qquad r$$

① $a=bq+r$

② $0\leq r<b$

مثال: $a \,\big|\, \underline{4}\quad q$ — r: ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳

$$\begin{cases} a=4q+0 = \text{مضرب } 4 & \{0,4,8,12,\dots\} \\ a=4q+1 = \text{مضرب } 4 + 1 & \{1,5,9,13,\dots\} \\ a=4q+2 = \text{مضرب } 4 + 2 & \{2,6,10,14,\dots\} \\ a=4q+3 = \text{مضرب } 4 + 3 & \{3,7,11,15,\dots\} \end{cases}$$

افراز = تقسیم

مثال: $a \,\big|\, \underline{3}\quad q$ — r: ۰ یا ۱ یا ۲

$$\begin{cases} a=3q+0 = \text{مضرب } 3 & \{0,3,6,9,12,\dots\} \\ a=3q+1 = \text{مضرب } 3 + 1 & \{1,4,7,10,13,\dots\} \\ a=3q+2 = \text{مضرب } 3 + 2 & \{2,5,8,11,14,\dots\} \end{cases}$$

همنهشتی

ساعت: $0 \overset{12}{\equiv} 12 \overset{12}{\equiv} 24 \overset{12}{\equiv} 36 \overset{12}{\equiv} 48 \overset{12}{\equiv} 60 \overset{12}{\equiv} \dots$

$12 \overset{12}{\equiv} 24$

۱۲ و ۲۴ به پیمانه ۱۲ هم‌ارزند.

۱۲ و ۲۴ به هنگ ۱۲ همنهشتند.

ساعت: $1 \overset{12}{\equiv} 13 \overset{12}{\equiv} 25 \overset{12}{\equiv} 37 \overset{12}{\equiv} \dots$ $\qquad 3 \overset{12}{\equiv} 15$

ساعت: $2 \overset{12}{\equiv} 14 \qquad 2 \overset{12}{\equiv} -10$

$1 \overset{3}{\equiv} 4 \overset{3}{\equiv} 7 \overset{3}{\equiv} 10 \overset{3}{\equiv} 13 \overset{3}{\equiv} 16 \overset{3}{\equiv} 19 \overset{3}{\equiv} 22 \overset{3}{\equiv} \dots$

$80 \overset{5}{\equiv} 75 \overset{5}{\equiv} 70 \overset{5}{\equiv} 65$

$1 \overset{4}{\equiv} 5 \qquad 1 \overset{4}{\equiv} 1+88$

$1 \overset{4}{\equiv} 1+40 = 41 \qquad a \overset{4}{\equiv} a + \text{مضرب } 4$

① تعریف $a \overset{m}{\equiv} b \longleftrightarrow m \mid b-a$

مثال: $11 \overset{7}{\equiv} 60$ $\qquad 11 \div 7 = 1,\ -7,\ 4 \qquad 60 \div 7 = 8,\ -56,\ 4$

② $a \overset{m}{\equiv} b$: اگر در تقسیم a , b بر m باقیمانده‌ها یکی گردد.

③ $a \overset{m}{\equiv} a+km$ $\qquad 1 \overset{4}{\equiv} \underbrace{1+4\times 9}_{37}$

④ $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\overset{\times}{\pm} c} a \overset{\times}{\pm} c \overset{m}{\equiv} b \overset{\times}{\pm} c$

$48 \div 5 = 9,\ -45,\ 3$

$48 \overset{5}{\equiv} 3 \xrightarrow{+3} 51 \overset{5}{\equiv} 6 \overset{5}{\equiv} 1$

$48 \overset{5}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 3} 144 \overset{5}{\equiv} 9 \overset{5}{\equiv} 4$

تقسیم درست نیست: $6 \overset{3}{\equiv} 12 \longrightarrow 2 \overset{3}{\not\equiv} 4$

⑤ $a \overset{m}{\equiv} \underbrace{0, 1, \dots, m-1}_{\text{باقیمانده‌ها بر } m}$

$41 \overset{5}{\equiv} 1$

$73 \overset{6}{\equiv} 1$

$1375 \overset{11}{\equiv} 0$

$41 \div 5 = 8,\ -40,\ 1 \qquad 73 \div 6 = 12,\ -6,\ 13,\ -12,\ 1 \qquad 1375 \div 11 = 125,\ -11,\ 27,\ -22,\ 55,\ -55,\ 0$

⑥ $a \overset{m}{\equiv} b \longrightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

$4 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 100} 4^{100} \overset{3}{\equiv} 1 \rightarrow$ باقیمانده 4^{100} بر 3 برابر ① است.

⑦ $\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{matrix}\right\} a \overset{\times}{\pm} c \overset{m}{\equiv} b \overset{\times}{\pm} d$

$41 \overset{5}{\equiv} 1,\quad 73 \overset{5}{\equiv} 3 \Longrightarrow 73 \times 41 \overset{5}{\equiv} 3$

⑧ $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\div d} \frac{a}{d} \overset{\frac{m}{(m,d)}}{\equiv} \frac{b}{d}$

$12 \overset{5}{\equiv} 2 \xrightarrow{\div 2} 6 \overset{5}{\equiv} 1$

$40 \overset{6}{\equiv} 4 \xrightarrow{\div 2} 20 \overset{3}{\equiv} 2$

$40 \overset{6}{\equiv} 4 \xrightarrow{\div 4} 10 \overset{3}{\equiv} 1$

$\frac{6}{2} = ③$

$72 \overset{27}{\equiv} 99 \xrightarrow{\div 9} 8 \overset{3}{\equiv} 11$ $\qquad \frac{27}{9}=\frac{3}{1}$

$72 \overset{27}{\equiv} 126 \xrightarrow{\div 2} 36 \overset{27}{\equiv} 53$ $\qquad \frac{27}{2}$

$72 \overset{9}{\equiv} 18 \xrightarrow{\div 2} 36 \overset{9}{\equiv} 9$ $\qquad \frac{9}{2}$

$\xrightarrow{\div 3} 24 \overset{3}{\equiv} 6$ $\qquad 9/3=\frac{3}{1}$

$\xrightarrow{\div 6} 12 \overset{3}{\equiv} 3$ $\qquad 9/6=\frac{3}{2}$

$\xrightarrow{\div 18} 4 \overset{1}{\equiv} 1$ $\qquad 9/18=1/2$

باقیمانده عدد ۱۵۴۷۱ بر ۷: $15471 \overset{7}{\equiv} 1$

$$\begin{array}{r|l} 15471 & 7 \\ \hline 14 & 2210 \\ 14 & \\ 14 & \\ 07 & \\ 7 & \\ 01 & \end{array}$$

مثال ① باقی‌مانده تقسیم $A=(1000)^{11}\times 12+25$ بر ۱۳ را بیابید.

$A \overset{13}{\equiv} ?$

$$\begin{cases} 1000 \overset{13}{\equiv} 12 \overset{13}{\equiv} -1 \\ 12 \overset{13}{\equiv} -1 \\ 25 \overset{13}{\equiv} 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 1000 & 13 \\ 91 & 76 \\ \hline 90 & \\ 78 & \\ \hline 12 & \end{array}$$

$$A=(1000)^{11}\times 12+25 \overset{13}{\equiv} (-1)^{11}\times -1+7 \overset{13}{\equiv} 8$$

مثال ② رقم یکان عدد $5\times(2^{31}+4)$ را بیابید.

$$5\times(2^{31}+4) \overset{10}{\equiv} 5\times(8+4) \overset{10}{\equiv} 60 \overset{10}{\equiv} 0$$

$$2^{5} \overset{10}{\equiv} 2 \xrightarrow{\text{توان } 6} 2^{30} \overset{10}{\equiv} 2^{6} \overset{10}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 2} 2^{31} \overset{10}{\equiv} 8$$

مثال ③ اگر دو عدد $4a+7$ و $5a-4$ رقم یکان برابر داشته باشند آنگاه رقم یکان $4a+3$ را بیابید.

$$5a-4 \overset{10}{\equiv} 4a+7 \longrightarrow a \overset{10}{\equiv} 11 \overset{10}{\equiv} 1$$

$$\times 4:\quad 4a \overset{10}{\equiv} 4 \xrightarrow{+3} 4a+3 \overset{10}{\equiv} 7$$

جواب

فاکتوریل $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$

$5! \overset{5}{\equiv} 0 \qquad 5! \overset{4}{\equiv} 0$

مثال ④ باقی‌مانده تقسیم $1!+3!+5!+\dots+99!$ بر ۱۰ را بیابید.

$$1+6 \overset{10}{\equiv} 7 \qquad (5!+\dots+99! \overset{10}{\equiv} 0)$$

یکان: $\overset{10}{\equiv}$

باقی‌مانده بر ۳ و ۹:

$$a \overset{9,3}{\equiv} \text{مجموع ارقام}$$

$$15897641 \overset{9}{\equiv} 34 \overset{9}{\equiv} 7$$

$64 \div 9$: 63، باقی‌مانده 7

جواب:

$$(1397)^{1401} \overset{3}{\equiv} (-1)^{1401} \overset{3}{\equiv} -1 \overset{3}{\equiv} 2$$

$$1397 \overset{3}{\equiv} 20 \overset{3}{\equiv} 2 \overset{3}{\equiv} -1$$

باقی‌مانده بر ۱۱:

$$a = \overline{a_n \cdots a_3 a_2 a_1} \overset{11}{\equiv} (a_1+a_3+a_5+\dots) - (a_2+a_4+\dots)$$

(ارقام مرتبه‌های فرد) − (ارقام مرتبه‌های زوج)

$$8\,7\,3\,2\,5\,1\,4 \overset{11}{\equiv} 25-10 \overset{11}{\equiv} 15$$

یکان: $a \overset{100,25,4}{\equiv}$ دو رقم اول

$a \overset{4}{\equiv}$

بخش‌پذیری بر ۲، ۵، ۱۰

" " ۴، ۲۵، ۱۰۰

$$8724514 \overset{4}{\equiv} 14 \overset{4}{\equiv} 2$$

$14 \div 4$: 12، باقی‌مانده 2

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقی‌مانده a بر ۴۲ را بیابید.

$$\begin{cases} a \overset{6}{\equiv} 3 \equiv 9 \equiv 15 \equiv 21 \equiv 27 \equiv 33 \equiv 39 \\ a \overset{7}{\equiv} 4 \equiv 11 \equiv 18 \equiv 25 \equiv 32 \equiv 39 \end{cases} \longrightarrow a \overset{42}{\equiv} 39 \qquad 42 = 6 \times 7$$

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \longrightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

مثال: باقی‌مانده $A = (23)^6 + 16$ بر (11) را بیابید.

$$23 \overset{11}{\equiv} 1 \qquad 16 \overset{11}{\equiv} 5$$

$$A \overset{11}{\equiv} (1)^6 + 5 \overset{11}{\equiv} 6$$

جواب

مثال ۳: اعداد صحیحی را بیابید که ۷ برابر آنها منهای ۳ بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

$$7x - 3 \overset{9}{\equiv} 0 \longrightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 3 \overset{9}{\equiv} 12 \overset{9}{\equiv} 21$$

$$\longrightarrow 7x \overset{9}{\equiv} 21 \xrightarrow{\div 7} x \overset{9}{\equiv} 3 \longrightarrow \boxed{x = 9K + 3}$$

$$\{\dots, -15, -6, 3, 12, 21, 30, \dots\}$$

* $2x \overset{5}{\equiv} 3 \longrightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 3 \overset{5}{\equiv} 8 \longrightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 8 \xrightarrow{} x \overset{5}{\equiv} 4 \longrightarrow x = 5K + 4$

* $5x \overset{7}{\equiv} 3 \overset{7}{\equiv} 10 \longrightarrow 5x \overset{7}{\equiv} 10 \longrightarrow x \overset{7}{\equiv} 2 \longrightarrow x = 7K + 2$

$$ax \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{زمانی جواب دارد}} (a,m) \mid b$$

$$6x \overset{8}{\equiv} 9 \xrightarrow{\div 3} 2x \overset{8}{\equiv} 3$$ جواب ندارد

$$(6,8) \mid 9 \longrightarrow 2 \nmid 9$$

$424x \overset{11}{\equiv} 79 \longrightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 2$

$(5,11) \mid 2 \longrightarrow 1 \mid 2$ ✓

$424 \div 11$: $424 - 33 = 94$, $94 - 88 = 5$ (quotient 38)

$5x \overset{11}{\equiv} \cancel{2}\ 35$

$x \overset{11}{\equiv} 7 \longrightarrow \boxed{x = 11k + 7}$

مثال: اگر باقی مانده m, n بر ۱۳ به ترتیب ۲ و ۹ باشد باقی مانده 5n-3m را بر ۱۳ به دست آورید.

$m \overset{13}{\equiv} 2 \xrightarrow{\times 3} 3m \overset{13}{\equiv} 6$

$n \overset{13}{\equiv} 9 \xrightarrow{\times 5} 5n \overset{13}{\equiv} 45 \overset{13}{\equiv} 6$

$\longrightarrow 5n - 3m \overset{13}{\equiv} 0$

مثال باقی مانده $(27)^7 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.

$27 \overset{13}{\equiv} 1$

$(27)^7 + 19 \overset{13}{\equiv} \underbrace{1 + 19}_{20} \overset{13}{\equiv} 7$

مثال باقی مانده 13^{22} را بر ۱۷ به دست آورید.

$13 \overset{17}{\equiv} -4$

$13^2 \overset{17}{\equiv} 16 \overset{17}{\equiv} -1$

توان ۱۱

$13^{22} \overset{17}{\equiv} -1 \overset{17}{\equiv} 16$

مثال باقی مانده $38^{36} + 19$ را بر ۴ به دست آورید.

$38 \overset{4}{\equiv} 2$

$38^2 \overset{4}{\equiv} 4 \overset{4}{\equiv} 0 \xrightarrow{\text{توان } 18} 38^{36} \overset{4}{\equiv} 0$

$38^{36} + 19 \overset{4}{\equiv} 3$

$8x \overset{12}{\equiv} 20 \xrightarrow{\div 4} 2x \overset{3}{\equiv} 5 \overset{3}{\equiv} 2 \xrightarrow{\div 2} x \overset{3}{\equiv} 1$

$(8,12) \mid 20 \longrightarrow 4 \mid 20$ ✓

$x = 3k + 1$

$k \in \mathbb{Z}$

باقیمانده 7^{30} را بر ۱۵ بدست آورید.

$7^2 \overset{15}{\equiv} 4$

$7^4 \overset{15}{\equiv} 16 \overset{15}{\equiv} 1$ (به توان ۷)

$7^{28} \overset{15}{\equiv} 1$

$$49 \,|\, 15 \quad -45 \quad 3 \quad 4$$

$7^{30} \overset{15}{\equiv} 7^{28} \times 7^2 \overset{15}{\equiv} 1 \times 4 \overset{15}{\equiv} 4$

$* \quad 5x \overset{11}{\equiv} 2 \longrightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 35 \; 7$

$2 \xrightarrow{+11} 13 \xrightarrow{+11} 24 \xrightarrow{+11} 35$

$\longrightarrow x \overset{11}{\equiv} 7 \longrightarrow x = 11k + 7$

$3x + 2y = 5 \; ; \quad ax + by = c$ — معادله سیاله → معادله همنهشتی

$3x + 2y \overset{3}{\equiv} 5 \longrightarrow 2y \overset{3}{\equiv} 5 \overset{3}{\equiv} 8$

$\longrightarrow y \overset{3}{\equiv} 4 \overset{3}{\equiv} 1 \longrightarrow \boxed{y = 3k + 1}$

$\longrightarrow 3x + 6k + 2 = 5 \longrightarrow 3x = -6k + 3 \longrightarrow \boxed{x = -2k + 1}$

$3x + 2y = 5 \begin{cases} x = -2k + 1 \\ y = 3k + 1 \end{cases}$

k	0	1	-1
x	1	-1	3
y	1	4	-2

$ax + by = c \begin{cases} by \overset{a}{\equiv} c \\ ax \overset{b}{\equiv} c \end{cases}$

شرط جواب:

$(a,b) \mid c$

* $7x+6y=41$ $\qquad (6,7)=1 \mid 41$ جواب دارد

$6y \overset{7}{\equiv} 41 \rightarrow -y \overset{7}{\equiv} -1 \rightarrow y \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow y=7k+1$

$7x+42k+6=41 \rightarrow 7x=-42k+35$

$x=-6k+5$

مثال: به چند طریق می‌توان ۵۱۰ کیلوگرم برنج را در کیسه‌های ۲۰ و ۳۰ کیلویی جای داد؟

$x,y \geq 0$ $\qquad$ y ، x

$20x+30y=510 \rightarrow 2x+3y=51 \rightarrow 3y \overset{2}{\equiv} 51 \rightarrow y \overset{2}{\equiv} 17 \rightarrow y \overset{2}{\equiv} 1 \rightarrow y=2k+1$

$2x+6k+3=51 \rightarrow 2x=-6k+48$

$x=-3k+24$

$x \geq 0 \rightarrow -3k+24 \geq 0 \rightarrow k \leq 8$

$y \geq 0 \rightarrow 2k+1 \geq 0 \rightarrow k \geq -0.5$

$k=0,1,2,\dots,8$ ۹ جواب

روزهای هفته

اگر ۱۴ شهریور سالی، چهارشنبه باشد، نهم دی همان سال چند شنبه است؟

۶ اول سال ۳۱ روز $\qquad$ ۶ آخر سال ۳۰

سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه
6	5	4	3	2	1	0

۱۴ شهریور $\longrightarrow$ ۹ دی

$31-14+30+30+30+9=116$

$116 \overset{7}{\equiv} 4 \rightarrow$ یکشنبه

$116 \div 7 = 16$, $\quad 116 - 7 = 46$, $\quad 46 - 42 = 4$

نشان دهید معادله سیاله $\underset{a}{6}x+\underset{b}{14}y=\underset{c}{10}$ در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد، پس آن را حل کنید.

$(a,b)|c \to (6,14)=2|10 \to$ دارای جواب

$14y \overset{6}{\equiv} 10 \to 2y \overset{6}{\equiv} 4 \to y \overset{3}{\equiv} 2 \to \boxed{y=3k+2}$

$6x+14(3k+2)=10 \to 6x=-42k-18$

$\boxed{x=-7k-3}$

$21x+15y=33 \to 7x+5y=11$

دارد $(7,5)|11$

$5y \overset{7}{\equiv} 11 \to 5y \overset{7}{\equiv} 4$

$4 \to 11 \to 18 \to 25$ (mod 7)

$5y \overset{7}{\equiv} 25 \to y \overset{7}{\equiv} 5 \to \boxed{y=7k+5}$

$7x+5(7k+5)=11 \to 7x=-35k-14$

$\boxed{x=-5k-2}$

اگر ۹ دی سال یکشنبه باشد، ۷ تیر همان سال چند شنبه است؟ سه شنبه

شنبه	جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه	یکشنبه
6	5	4	3	2	1	0

$-187 \overset{7}{\equiv} -5 \overset{7}{\equiv} 2$

$\underset{24}{(31-\overset{\text{تیر}}{7})}+31+31+30+30+30+\overset{\text{دی}}{9}=187$

$187 \div 7$: 26, 14, 47

شنبه روز اول محرم است. ۱۲ بهمن همان سال چه روزی از هفته است؟ (پنج شنبه)

جمعه	پنج شنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه
	۵	۴	۳	۲	۱	۰

محرم ۳۰-۱ ، ۳۰ ، ۳۰ ، ۳۰ ، بهمن ۱۲

$$12 + 30 + 30 + 30 + (30-1) = 131 \overset{7}{\equiv} 5$$

$$131 = 7 \times 18 + 5$$

$$5x+2y=18 \longrightarrow 2y \overset{5}{\equiv} 18 \longrightarrow y \overset{5}{\equiv} 9 \overset{5}{\equiv} 4$$

$$y = 5k+4$$

$$5x+10k+8=18$$

$$5x=-10k+10$$

$$x=-2k+2$$

$$9x+13y=7 \longrightarrow 13y \overset{9}{\equiv} 7 \longrightarrow 4y \overset{9}{\equiv} 16 \longrightarrow$$

$$y \overset{9}{\equiv} 4 \longrightarrow y=9k+4$$

$$9x+117k+52=7 \longrightarrow 9x=-117k-45$$

$$x=-13k-9$$

$$7x \overset{4}{\equiv} 1 \longrightarrow \cancel{3}x \overset{4}{\equiv} 1 \overset{4}{\equiv} 5 \overset{4}{\equiv} \cancel{9}\ 3 \longrightarrow x \overset{4}{\equiv} 3$$

$$x = 4k+3$$

$9x \overset{9}{\equiv} 11$ آیا جواب دارد؟ نه $(9,9) \mid 11 \rightarrow 3 \nmid 11$

آیا می‌توانید یک کیسه ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳، ۴ کیلویی وزن کنید؟

$3x+4y=19 \rightarrow 4y \overset{3}{\equiv} 19$ $\quad x,y \geq 0$

$\rightarrow y \overset{3}{\equiv} 1 \rightarrow \boxed{y=3k+1} \geq 0 \rightarrow k \geq \frac{-1}{3}$

$\rightarrow 3x+12k+4=19 \rightarrow 3x=-12k+15$

$\boxed{x=-4k+5} \geq 0 \rightarrow k \leq \frac{5}{4}$

$k=0,1$

$\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$

به چند طریق ۱۸۰۰۰ تومان را با اسکناس ۲۰۰۰ (x)، ۵۰۰۰ (y) تومانی می‌توان تبدیل کرد؟

$2000x+5000y=18000 \rightarrow 2x+5y=18$

$5y \overset{2}{\equiv} 18 \rightarrow y \overset{2}{\equiv} 0 \rightarrow y=2k \geq 0 \rightarrow k \geq 0$

$2x=18-10k \rightarrow x=9-5k \geq 0 \rightarrow k \leq \frac{9}{5}$

۲ حالت $\leftarrow k=0,1 \leftarrow 0 \leq k \leq \frac{9}{5}$

به چند طریق از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه می‌توان انتخاب کرد؟

$x+y=9 \rightarrow y \overset{1}{\equiv} 9 \rightarrow y=k+9 \geq 0 \rightarrow k \geq -9$

$\rightarrow x+k+9=9 \rightarrow x=-k \geq 0 \rightarrow k \leq 0$

$K = 0, -1, -2, \ldots, -9 \longrightarrow$ ۱۰ طریق

درست بتای سوالات ۷ و ۹ امتیازی هستند و شخص مجری "۷۳" امتیاز کسب کرده است. این شخص به چند طریق توانسته این امتیاز را بدست آورد؟ ۱ اینت

$7x + 9y = 73 \longrightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 73 \longrightarrow 2y \overset{7}{\equiv} 3 \overset{7}{\equiv} 10$

$y \overset{7}{\equiv} 5 \longrightarrow y = 7K + 5 \geq 0 \longrightarrow K \geq -\frac{5}{7}$

$\longrightarrow 7x + 63K + 45 = 73 \longrightarrow 7x = -63K + 28$

$x = -9K + 4 \geq 0 \longrightarrow K \leq \frac{4}{9}$

$K = 0$

$x = 4, y = 5$

$\overset{3}{\equiv} 0, 1, 2$

$[0]_3 = \{x \mid x \overset{3}{\equiv} 0\} = \{3K + 0\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

$[1]_3 = \{x \mid x \overset{3}{\equiv} 1\} = \{3K + 1\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

$[2]_3 = \{x \mid x \overset{3}{\equiv} 2\} = \{3K + 2\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

باقیمانده a بر ۹ و ۶ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقیمانده a بر ۱۸ کدام است؟

$a \overset{9}{\equiv} 5 \longrightarrow 9 \mid a - 5 \longrightarrow 18 \mid 2a - 10$

$a \overset{6}{\equiv} 3 \longrightarrow 6 \mid a - 3 \longrightarrow 18 \mid 3a - 9$

$a \overset{18}{\equiv} -1 \longleftarrow a + 1 \overset{18}{\equiv} 0 \longleftarrow 18 \mid a + 1$

$a \overset{18}{\equiv} 17$

~~-1~~

(۱۷)

۱

۵

اگر x و y جواب‌های معادله سیاله $2x+3y=6$ باشند مقدار $x-y$ کدام است؟

$y \overset{2}{\equiv} 0 \rightarrow y=2k$

$2x+6k=6 \rightarrow x=-3k-3$

$-3k \quad -2k$

$-5k-3$

$x-y \overset{5}{\equiv} -3 \overset{5}{\equiv} 2$

$5k+2$

$5k$

$-5k-2$

برابرنه

$5k-2$

اگر معادله $9x+my=6$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب باشد مجموع جواب‌های m کدام است؟

$1 \leq m \leq 9$

$(9,m) \mid 6$

$(9,m)=1 \longrightarrow m=1,2,4,5,7,8$

$(9,m)=3 \longrightarrow m=3,6$

$3x \overset{10}{\equiv} 7 \overset{10}{\equiv} 17 \overset{10}{\equiv} 27 \longrightarrow x \overset{10}{\equiv} 9 \longrightarrow x=10k+9$

$19x+4 \overset{11}{\equiv} 4x \longrightarrow 15x \overset{11}{\equiv} -4 \longrightarrow 4x \overset{11}{\equiv} -4 \longrightarrow x \overset{11}{\equiv} -1$

$x=11k-1$

$20x+12y=50 \longrightarrow 10x+6y=25$ $\quad (10,6) \nmid 25$

جواب ندارد

$13x+71y=1 \longrightarrow 71y \overset{13}{\equiv} 1 \longrightarrow 6y \overset{13}{\equiv} 1 \longrightarrow 6y \overset{13}{\equiv} 14 \longrightarrow$

$3y \overset{13}{\equiv} 7 \overset{13}{\equiv} -6 \longrightarrow y \overset{13}{\equiv} -2 \longrightarrow y=13k-2$

مثال عدد ۱۳۷۹ جزء کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟

$1379 \div 7 = 197$

$1379 \in [0]_7$

مثال: اگر بدانیم ۲۰ فروردین روز دوشنبه است. چهارمین شنبه بهمن ماه چه روزی است؟

۲۰ فروردین: دوشنبه — ۱ بهمن: ؟

$$|+30+30+30+30+31+31+31+31+31+31-20$$

$$6\times 31 + 4\times 30 - 19 \overset{7}{\equiv} 7 \overset{7}{\equiv} 0$$

($31 \to 3$ ، $30 \to 2$)

دوشنبه: ۱ بهمن

دوشنبه → ۱ بهمن
سه‌شنبه → ۲
چهارشنبه → ۳
پنجشنبه → ۴
جمعه → ۵
شنبه → ۶

شنبه: ۶ بهمن → ۱۳ بهمن → ۲۰ بهمن → ۲۷ بهمن

۲۷ام، ۲۸ام، ۲۹ام، ۳۰ام