

جمع بندی درس ریاضی و آمار ۲

رشته ی ادبیات و علوم انسانی

پایه یازدهم

آمادگی امتحان ترم دوم

استاد الهام فرهادی

آموزش و پرورش منطقه ۱۵ تهران



فصل اول

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

گزاره ها و ترکیب گزاره ها

❖ درس اول:

استدلال ریاضی

❖ درس دوم:



فصل ۱ درس ۱: گزاره ها و ترکیب گزاره ها

منطق ریاضی ، دستور زبان ریاضی است که روش درست استدلال کردن در علم ریاضی را به ما یاد می دهد.

منطق در لغت به معنای « آنچه به گفته درآمده » و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال ها تعبیر می کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال هاست. تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است.

✓ نکته: جملات سوالی، امری، عاطفی و جملاتی که نتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم، گزاره نیستند. مثل:

- شما اهل کجایید؟
- چه هوای خوبی
- درس فلسفه از درس عربی آسان تر است

در منطق ریاضی به هر جمله ی خبری که دقیقاً دارای یک ارزش درست (*True*) یا نادرست (*False*) است گزاره می گوئیم.



۱. کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

ج) عدد $(-1)^n$ عددی همواره مثبت است. $(n \in N)$ ←
گزاره با ارزش نادرست

چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش مزه تر است. ← گزاره
نیست (زیرا کلمه خوشمزه دارای مفهوم نسبی است).

ح) لطفاً تخته را پاک کن. ← گزاره نیست (جمله امری)

الف) شما چند سال دارید؟ ← گزاره نیست (جمله پرسشی)

ب) عدد ۲ عددی اول است. ← گزاره با ارزش درست

پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. ← گزاره با ارزش نادرست

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. ← گزاره با ارزش نادرست

ث) $20 = 2 + 3 \times 4$ ← گزاره با ارزش نادرست



۲. دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

دو گزاره درست مانند:

(۱) $\sqrt{2}$ عددی مثبت است.

(۲) عددی فرد است

دو گزاره نادرست مانند:

(۱) عددی اول است

(۲) ۲۵ مربع کامل نیست.

دو جمله که گزاره نباشند مانند:

(۱) کتاب را بردار!

(۲) سارا دانش آموز خوبی است.

جبر و نقیض گزاره ها

در منطق ریاضی و در جبر گزاره ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r یا ... نمایش می دهیم.

-تعداد حالت های ارزشی n گزاره را به صورت زیر می

نویسیم:

(تعداد گزاره ها) $n \rightarrow 2^n =$ تعداد حالت های n گزاره

↓

(درست و نادرست)

نقیض یک گزاره مانند p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می دهیم
برای ساختن نقیض یک گزاره بهتر است فعل جمله را نفی کنیم.



ترکیب گزاره ها و جدول ارزش ها

از ترکیب گزاره های ساده، گزاره های مرکب تولید می شود که ۴ نوع ترکیب داریم:

۱) ترکیب عطفی (\wedge) ۲) ترکیب فصلی (\vee)

۳) ترکیب شرطی (\Rightarrow) ۴) ترکیب دوشروطی (\Leftrightarrow)

گزاره های هم ارز

اگر ارزش دو گزاره p, q یکسان باشد (هر دو درست یا هر دو نادرست) به آن گزاره های هم ارز می گوئیم و می نویسیم:

$(p \equiv q)$ مثلا دو گزاره ($4 \in N$ و ۹ مربع کامل است) هم ارزند زیرا ارزش هر دو درست است.

✓ نکته: نقیض نقیض هر گزاره، هم ارز خود آن گزاره

است: $\sim(\sim p) \equiv p$



فعالیت صفحه ۵

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد		
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		
۳ و ۸ زوج است.		✓
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و	✓	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		
۶ و $۵ > ۲$		✓

ترکیب عطفی

اگر دو گزاره ساده p, q را با حرف (و) به هم ربط دهیم گزاره $(p \wedge q)$ ایجاد می‌شود که ترکیب عطفی نام دارد.

ارزش ترکیب عطفی وقتی درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشند. جدول ارزشی $(p \wedge q)$:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

$$\text{😊} \wedge \text{😊} \equiv \text{😊}$$



فعالیت صفحه ۶

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است		
۲	حضرت مهدی <small>علیه السلام</small> امام دوازدهم شیعیان است یا	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا	✓	
۴ یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.		✓
۵ یا	✓	

ترکیب فصلی

اگر دو گزاره ساده p, q را با حرف (یا) به هم ربط دهیم گزاره $(p \vee q)$ ایجاد می شود که ترکیب فصلی نام دارد.

ارزش ترکیب فصلی وقتی نادرست است که هر دو گزاره ارزش نادرست داشته باشند. جدول ارزشی $(p \vee q)$:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

☹️ \vee ☹️ \equiv ☹️



ترکیب شرطی

✓ نکته: در ترکیب شرطی اگر نادرست باشد می گوییم گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است یعنی با اینکه مقدم نادرست است ولی ارزش کل گزاره شرطی درست است.

جدول ارزشی $(p \Rightarrow q)$:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

$\text{😊} \Rightarrow \text{😞} \equiv \text{😞}$

اگر با گزاره های p, q گزاره $(p \Rightarrow q)$ را بسازیم در واقع یک ترکیب شرطی ساخته ایم و به شکل های زیر می توان آن را بیان کرد:

- اگر p آنگاه q
- p نتیجه می دهد q را
- q از p نتیجه می شود

ارزش ترکیب شرطی وقتی نادرست است که p (مقدم) ارزش درست و q (تالی) ارزش نادرست داشته باشد.



◆ مثال:

۱. گزاره‌های «اگر $۳^۲=۶$ آنگاه، ۵ اول است» و «اگر ۸ فرد است، آنگاه $۲>۴$ » هر دو به انتفای مقدم درست هستند.
۲. گزاره «اگر ۱۷ اول است آنگاه ۱۸ اول است» نادرست است.
۳. گزاره «اگر $۲^۴=۴^۲$ آنگاه $۲^۳ > ۳^۲$ » درست است.

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$ (ارزش گزاره $(q \Rightarrow p)$ به انتفای مقدم درست بوده و لذا ارزش گزاره $(q \Rightarrow p) \wedge r$ به ارزش گزاره r بستگی دارد.)

۲) $(p \vee q) \vee r$

۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$

۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$

۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

کار در کلاس
صفحه ۷

ترکیب دو شرطی

ارزش ترکیب دو شرطی وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

جدول ارزشی $(p \Leftrightarrow q)$:

P	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

→ $\text{😊} \Leftrightarrow \text{😊} \equiv \text{😊}$
→ $\text{😞} \Leftrightarrow \text{😞} \equiv \text{😊}$

از ترکیب عطفی دو گزاره $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ گزاره دو شرطی $(p \Leftrightarrow q)$ ساخته می شود

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \equiv (p \Leftrightarrow q)$$

و به شکل های زیر می توان آن را بیان کرد:

- اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p
- p نتیجه می دهد q را و q نتیجه می دهد p را
- اگر p آنگاه q و برعکس
- p اگر و تنها اگر q
- p شرط لازم و کافی است برای q



کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

$$۱) (p \Leftrightarrow q) \wedge r$$

$$۲) (\sim p \Leftrightarrow q) \vee r \quad \text{چون } \sim p \equiv q \text{ پس } (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv T \text{ و لذا ترکیب فصلی یک گزاره درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.}$$

$$۳) (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$۴) (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$۵) (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$$

$$۶) (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$۷) (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$$



تذکر: گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را عکس نقیض گزاره $(p \Rightarrow q)$ می نامیم.

: این قانون یا هم ارزی؛ یعنی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و مشابه آن؛ یعنی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ به قوانین دمورگان معروف اند.

گزاره‌هایی نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می نامیم.

قوانین جذب:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$



قانون پخشی یا توزیع پذیری:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن



سوالات امتحانی

خرداد ۴۰۲ - مرداد ۴۰۲

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید:

الف) گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که گزاره p درست و گزاره q نادرست باشد.
ب) عبارت « عدد ۱۲ یک عدد اول است. » یک گزاره می باشد.

جمله " سیب قرمز، از سیب زرد خوش مزه تر است. " یک گزاره است.

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

انقیض گزاره $p \vee \sim q$ گزاره می باشد

ارزش گزاره $(p \vee \sim p)$ ، همواره است.



گزینه صحیح را انتخاب کنید

الف) اگر p, q دو گزاره دلخواه باشند، در چه صورت ارزش گزاره مرکب $p \wedge q$ درست است؟
 (۱) p درست و q نادرست (۲) p, q هر دو درست (۳) p, q هر دو نادرست (۴) گزینه ۱ و ۳

۱-۳) کدام گزاره هم ارز گزاره $p \Rightarrow q$ است؟
 الف) $\sim p \Rightarrow \sim q$ ب) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ ج) $\sim q \Rightarrow \sim p$ د) $p \Leftrightarrow q$

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته ۷ روز دارد و	*	
۲ یا ۵ عددی زوج است.		*

جدول هم ارزی زیر را کامل کنید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$



اگر گزاره $(p \wedge \sim q)$ نادرست باشد، ارزش گزاره $(\sim p \vee q)$ را مشخص کنید.

درستی هم ارزی های زیر با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید: $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$



کار در کلاس

عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

پ) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳، بزرگتر از خودش است.

تمرین

۱. گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگتر از هفت برابر آن عدد، به علاوه پنج است.

پ) مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگتر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگتر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

ث) هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگتر یا مساوی با آن است.



استدلال استثنایی

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

یکی از انواع قیاس‌ها که در استدلال‌ات ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد، «قیاس استثنایی» است. در زیر با ذکر مثالی از این نوع قیاس آن را یادآوری می‌کنیم.

مقدمه ۱: اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

مقدمه ۲: امشب، شب چهاردهم ماه است.

نتیجه: ماه کامل است.

استدلال بالا را می‌توان به‌طور کلی به شکل زیر صورت بندی کرد.

اگر الف آنگاه ب

الف

\therefore ب



گاهی از این قیاس به شکل نادرست استفاده می‌شود و منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود. به این گونه استدلال‌ات، مغالطه می‌گویند. در زیر به مثالی از این نوع پرداخته شده است.

مثال ۱: اگر باران بیارد، زمین خیس می‌شود.

$$\frac{\frac{q \quad p}{\text{زمین خیس شده است.}}}{q}$$

∴ باران باریده است.

در استدلال فوق طبق قیاس استثنایی، مقدمه دوم باید p باشد و نه q ، پس استدلال فوق نادرست است (زمین می‌تواند به دلیل دیگری غیر از باریدن باران خیس شده باشد).

کار در کلاس

۱. با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس استثنایی $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ را نشان دهید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د



استدلال عکس نقیض

گاهی اوقات اثبات درستی گزاره شرطی $(p \Rightarrow q)$ دشوار است بنابراین برای راحتی کار می توان هم ارز آن یعنی درستی عکس نقیض آن $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را اثبات کرد

مثال ۳ صفحه ی ۱۶ کتاب درسی

یعنی نشان می دهیم اگر n زوج نباشد (یعنی فرد باشد، چون حالت دیگری وجود ندارد)، انگاه n^2 زوج

$$n \text{ فرد است} \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1 \Rightarrow n^2 = 2m + 1$$

③ عکس نقیض (اگر n^2 زوج باشد آن گاه n زوج است.) را بنویسید.

✓ حل:

عکس نقیض

$$\begin{array}{ccc} \underline{n^2 \text{ زوج است}} \Rightarrow \underline{n \text{ زوج است}} & \longrightarrow & \\ p & & q \\ \underline{n \text{ زوج نیست}} \Rightarrow \underline{n^2 \text{ زوج نیست}} & & \\ \sim q & & \sim p \end{array}$$



الف) گزاره "مجموع مکعبات دو عدد، بزرگ تر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است" را به صورت نماد ریاضی باز نویسی کنید.

ب) نام استدلال زیر چیست؟ درستی یا نادرستی آنرا بررسی کنید.
آرش معتقد است که "هر کس مرا دوست دارد، عیوب مرا به من می گوید. از طرفی سعید عیوب مرا به من گفته است، پس سعید مرا دوست دارد."



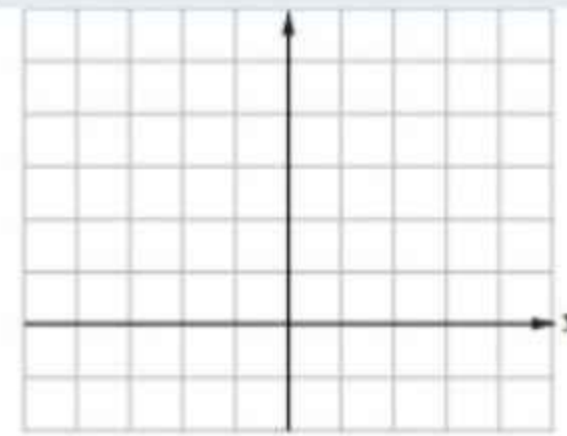
فصل ۲

- الف. نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که
- ب. نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که
- ج. نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که



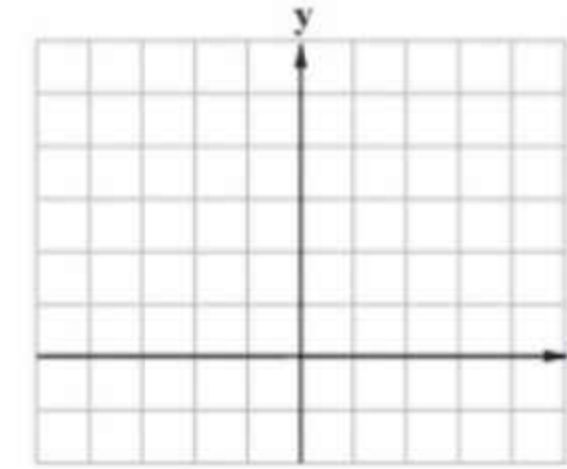
$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases}$$

$$D_f = A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad R_f = \{-1, 0, 1, 3\}$$



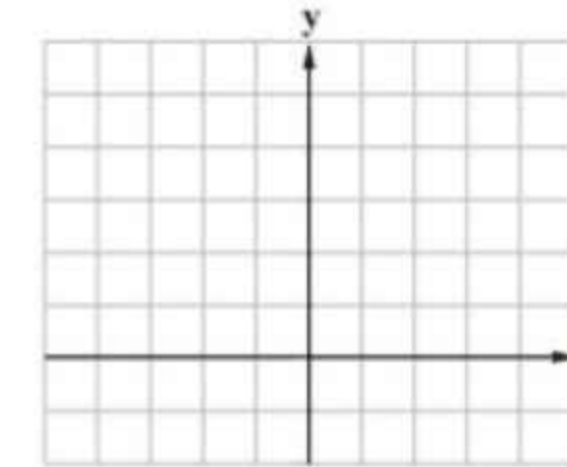
f تابعی خطی از A به B
 $f(x) =$

$$D_f = \{-\frac{1}{2}, 0, 2\} \quad R_f = \{-\frac{3}{2}, 0, 6\}$$



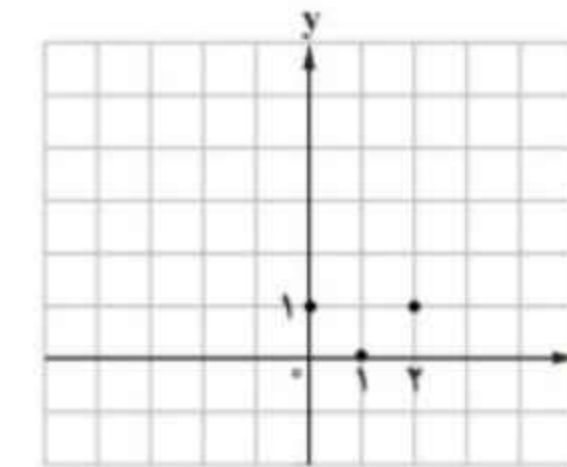
$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$D_f = \{1, 2, 5\} \quad R_f = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{1}\}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$D_f = \{1, 2, 3\} \quad R_f = \{0, 1, 4\}$$



انواع توابع (ثابت، چندضابطه‌ای و همانی)

تابع $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = c \end{cases}$ را که در آن مجموعه $R = \{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است.

مثال

اگر $A = \{(4, m+n), (m, 2), (7, m-n)\}$ ثابت باشد، مقدارهای n, m را بیابید.

اگر تابع $f = \{(2, a-1), (0, 2), (3, 2b)\}$ یک تابع ثابت باشد، حاصل $a.b$ را بدست آورید.

اگر $f = \{(7, a+3), (-1, 4), (4, b^2 - 4b)\}$ یک تابع ثابت باشد، a و b را بیابید.

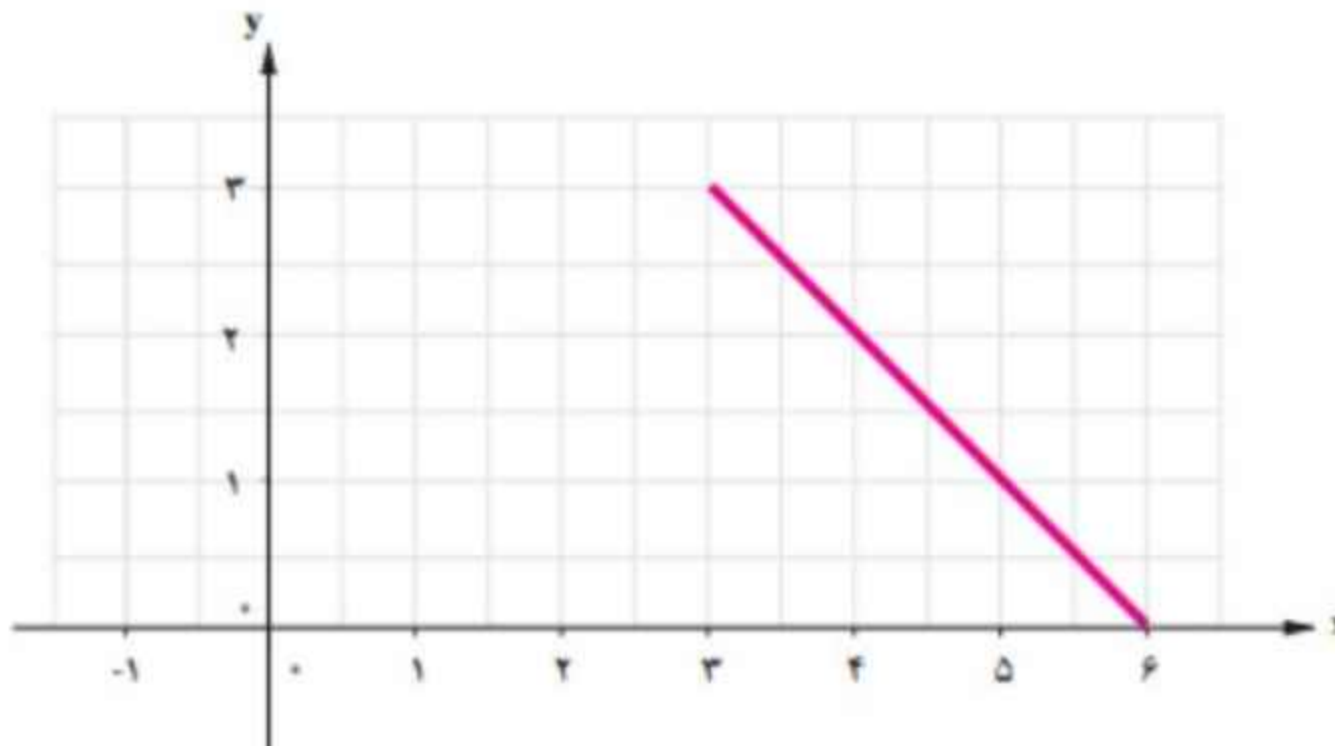


تابع چند ضابطه‌ای (Piecewise Function)

توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع چند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند؛ مثلاً اگر یک تابع از دو ضابطه پیروی کند، یک تابع دو ضابطه‌ای نامیده می‌شود.

کار در کلاس

ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.



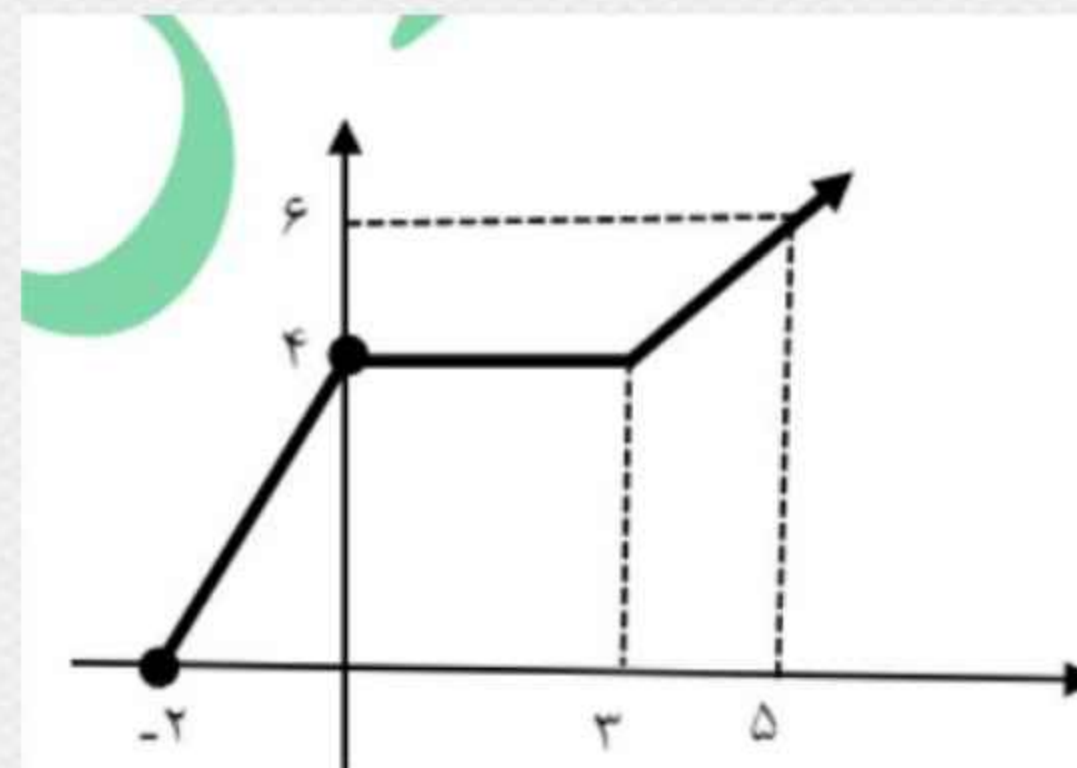
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 3 \\ \dots & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$



مثال

تابع $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq +2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس حاصل عبارت $f(\sqrt{2}) + f(2)$ را بدست آورید.

ضابطه تابع مقابل را بنویسید.

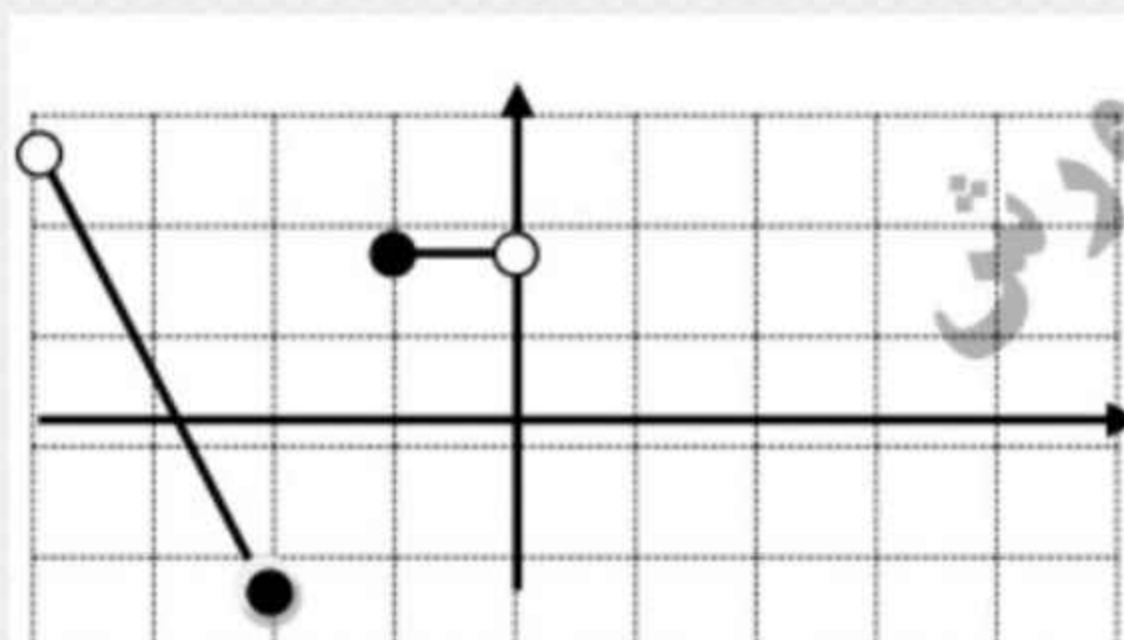


$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 1 \\ -2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

تابع چندضابطه‌ای مقابل را در نظر بگیرید :

مقادیر $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$ را حساب کنید.

ضابطه تابع و نمودار آنرا کامل کنید.



$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 0 \\ 2 & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & -4 < x \leq -2 \end{cases}$$

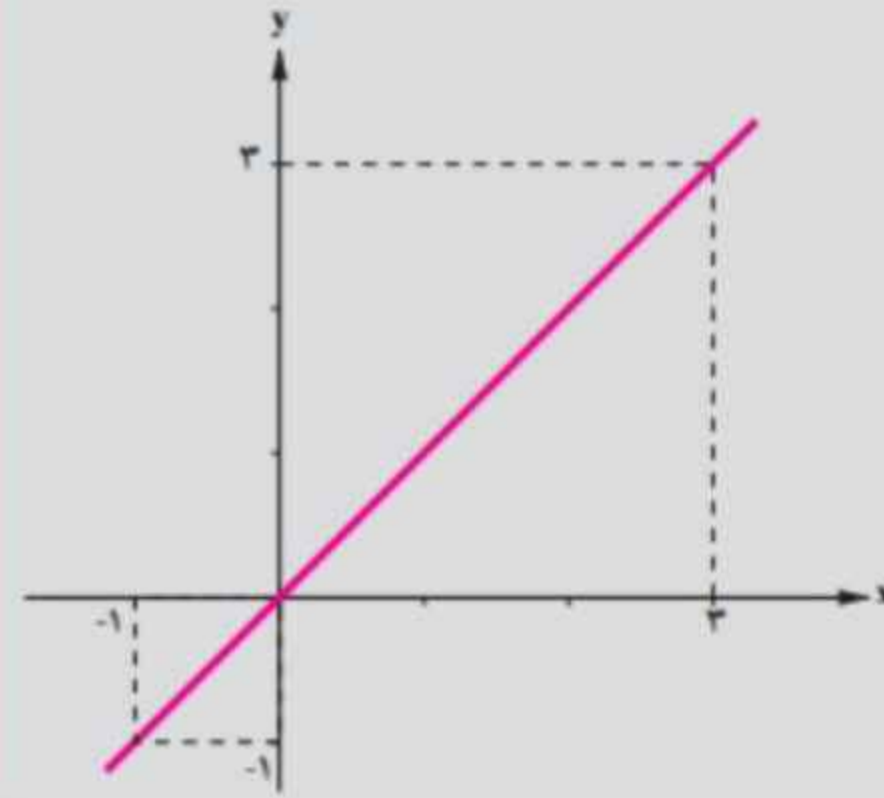
در تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ حاصل عبارات زیر را بیابید.

ب) $f(f(1))$

الف) $f(\sqrt{2})$



تابع همانی (Identity Function)



تابع با ضابطه $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند. با توجه به ضابطه تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند. از لحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم است.

$$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$$

مثال

اگر نقطه $A(-1, n^2 - 4n + 2)$ روی خط نیمساز ربع اول و سوم باشد، مقدار n را به دست آورید.



در $f = \{(-1, a), (2, b), (3, \sqrt{9}), (5, c)\}$ مقادیر a, b, c را طوری بیابید که:
الف) f تابعی ثابت باشد.
ب) f تابعی همانی باشد.

تابع $f: R \rightarrow R$ با ضابطه‌ی $f(x) = (a - 2)x^2 + bx + c + 2$ داده شده است.
a و b و c را طوری پیدا کنید که تابع f یک تابع همانی را مشخص کند.



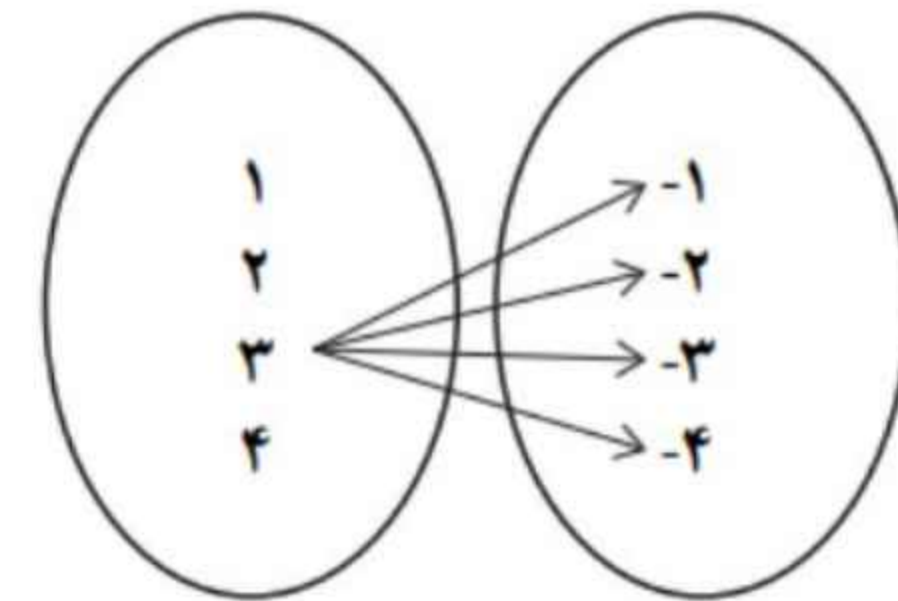
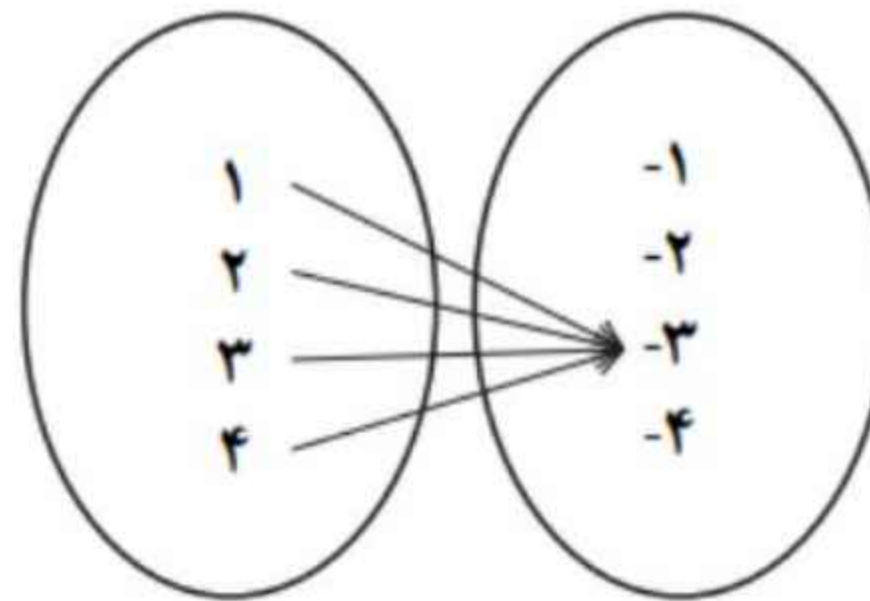
تمارين مهم صفحه ی ۳۲ کتاب درسی

۲. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟
الف. اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.
ب. اگر دامنه یک تابع همانی مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.
ج. اگر f یک تابع ثابت باشد، آن گاه $f(kx) = kf(x)$.

۳. اگر $A = \{(2, b), (a, 4), (7, a+b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

۴. اگر $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر y_1, y_2, y_3 را به دست آورید.

۵. کدام یک از نمایش‌های پیکانی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟



۶. در تابع ثابت $f(x) = c$:

الف. مقادیر $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید.

ب. اگر در این تابع $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

۷. اگر $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به دست آورید.

۸. در هر یک از زوج مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به گونه‌ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد.

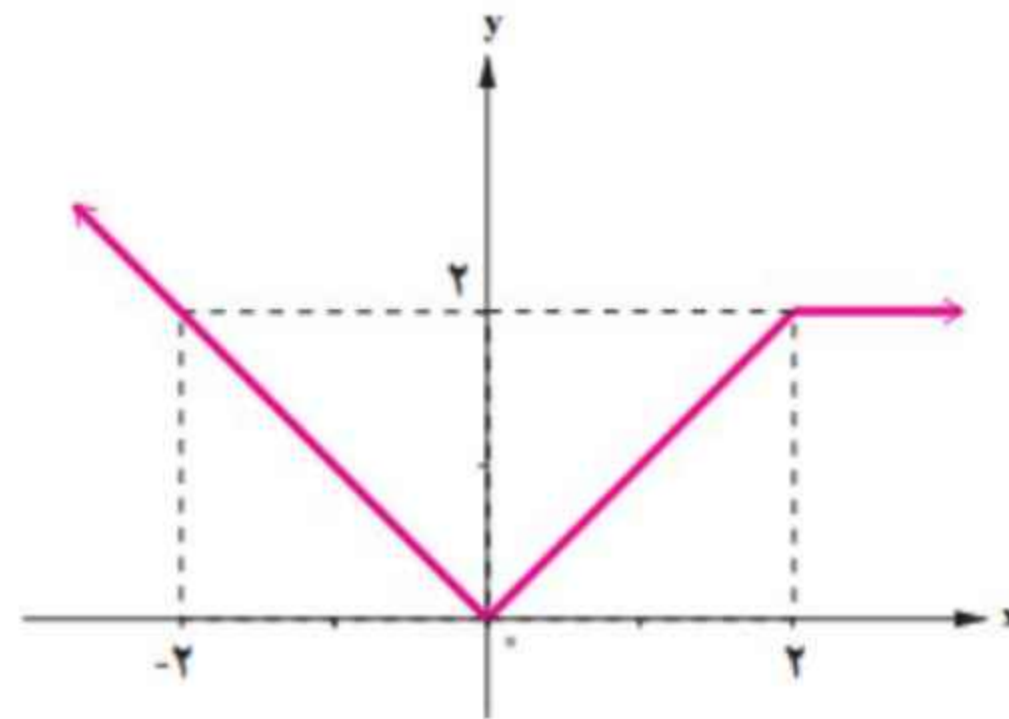
$$(2, n^2 - 3n + 4)$$

$$(-1, n^2 - 4n + 2)$$

۹. اگر f یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی و $n \in \mathbb{N}$ و m باشد، مقدار $m+t$ را به دست آورید.

$$f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-4, 3), (m+n, t)\}$$

۱۰. ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.



توابع پلکانی و قدر مطلق

تابع جزء صحیح (Greatest Integer Function)

نمودار یک تابع چندضابطه‌ای است که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است. این نوع توابع را توابع پلکانی می‌نامند.

مثال

اگر $f(x) = [x] + [-x]$ باشد، مقدار تابع را در $x = 1, 2$ به دست آورید.

۲-۳) اگر $[x] = -2$ باشد، آنگاه محدوده x کدام است؟
الف) $-2 \leq x \leq -1$ ب) $-2 \leq x < -1$ ج) $-2 < x \leq -1$ د) $-2 < x < -1$

اگر $f(x) = 3[x] - 2$ باشد، مقدار $f(1/2) - f(-2/1)$ را به دست آورید.

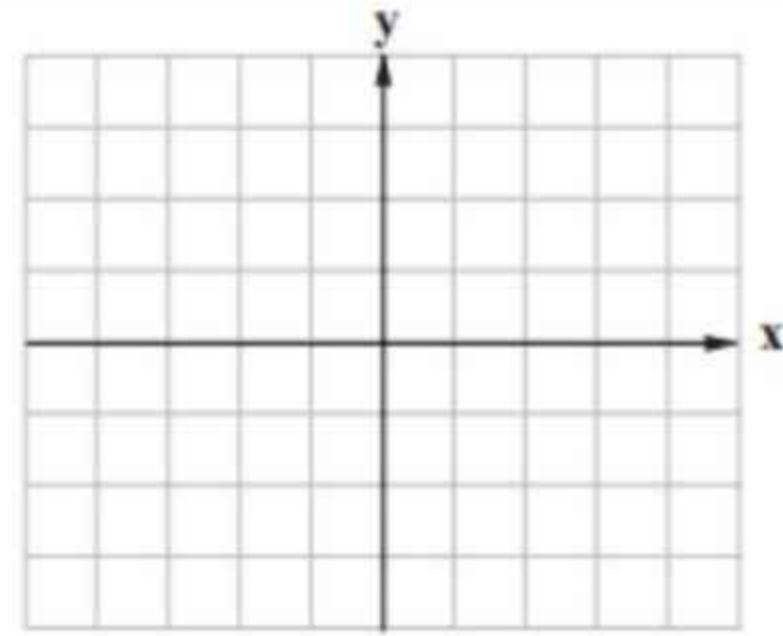
نمودار تابع $f(x) = 1 - [x]$ را در محدوده $-1 \leq x < 2$ رسم کنید.

تابع $f(x) = [x] + 2$ را در بازه $D_f = [-2, 2]$ رسم کنید.

اگر $f(x) = \begin{cases} [x] - 1 & x \leq 0 \\ x^2 - 3 & x > 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(-6/5) + f(\sqrt{2})$ را به دست آورید.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



مثال

اگر f تابع همانی و g تابع علامت باشد، در این صورت حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{f(-1) - g(1396)}{[2\sqrt{3} - 7] + g(f(0))}$$

اگر f تابع همانی و g تابع علامت باشد، مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{f(3) + \text{sign}(\sqrt{10})}{f(g(2)) + g(f(6))}$$



تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می شود و مطابق تعریف :

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = |x - 4|$$

$$y = |x + 2|$$

$$y = |x + 3| - 1$$

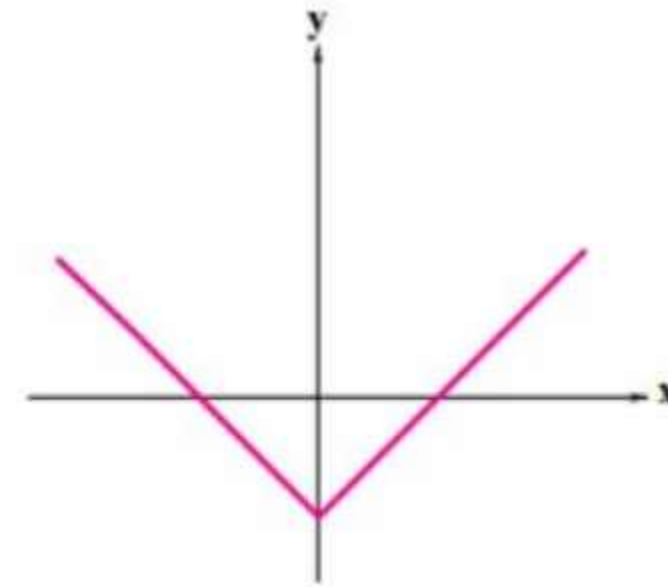
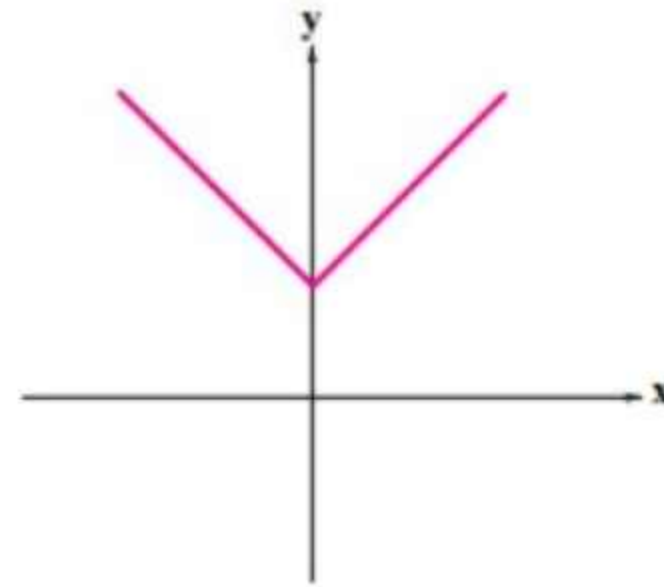


$$Y = |x + a| + b$$

۴. با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می کند؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

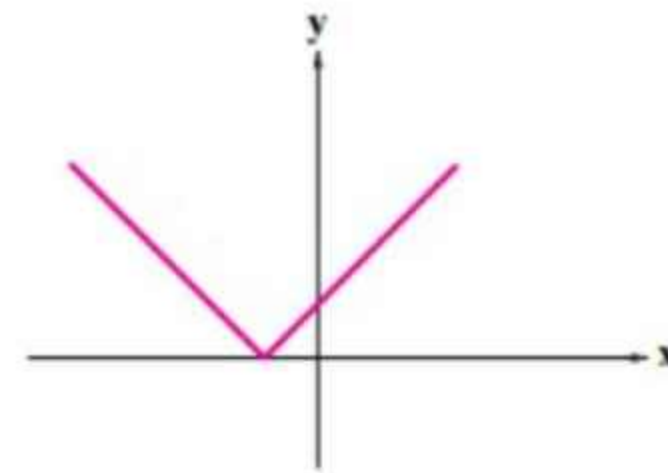
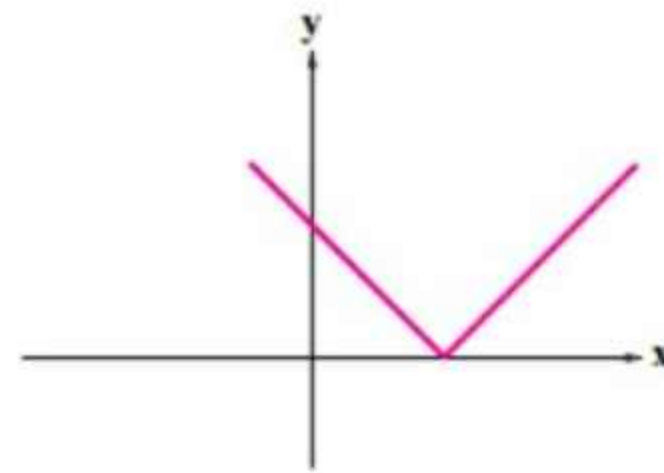
الف) $y = |x| + 2$

ب) $y = |x| - 3$



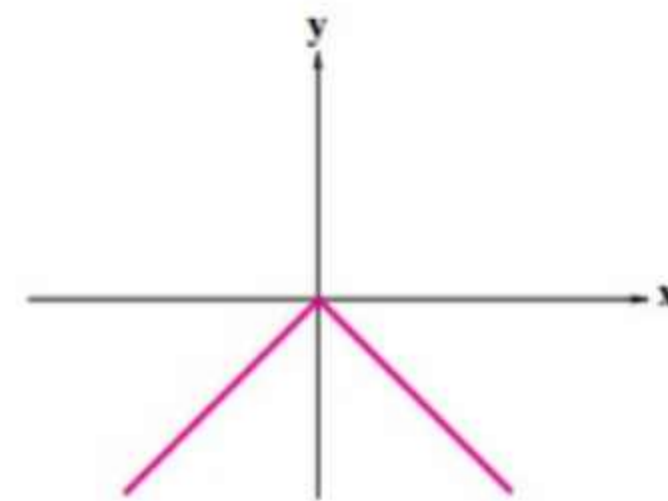
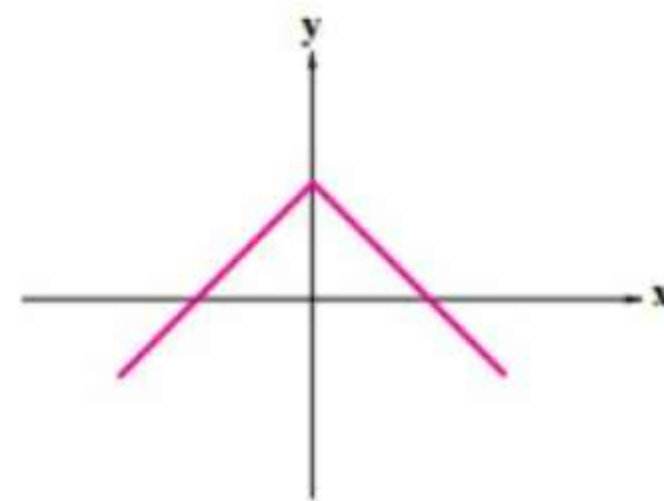
الف) $y = |x + 1|$

ب) $y = |x - 4|$



الف) $y = -|x|$

ب) $y = -|x| + 1$



عمل های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال

اگر $f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, 3)\}$ و $g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 2)\}$ باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

$$f + g =$$

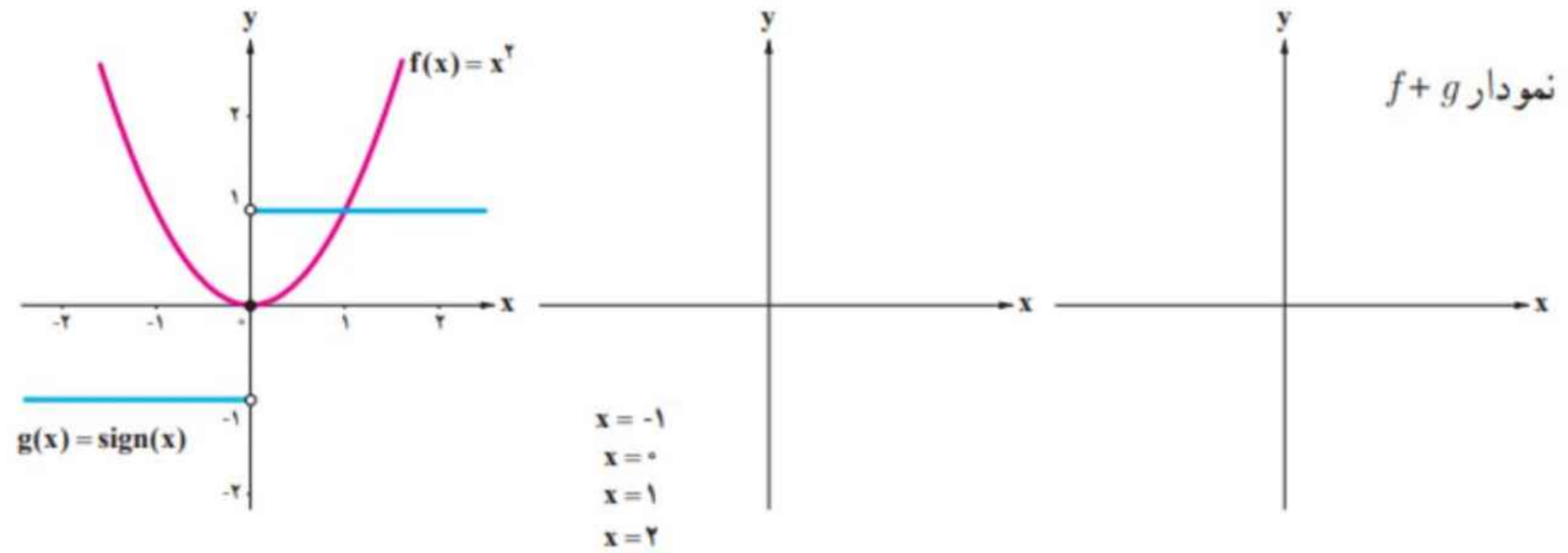
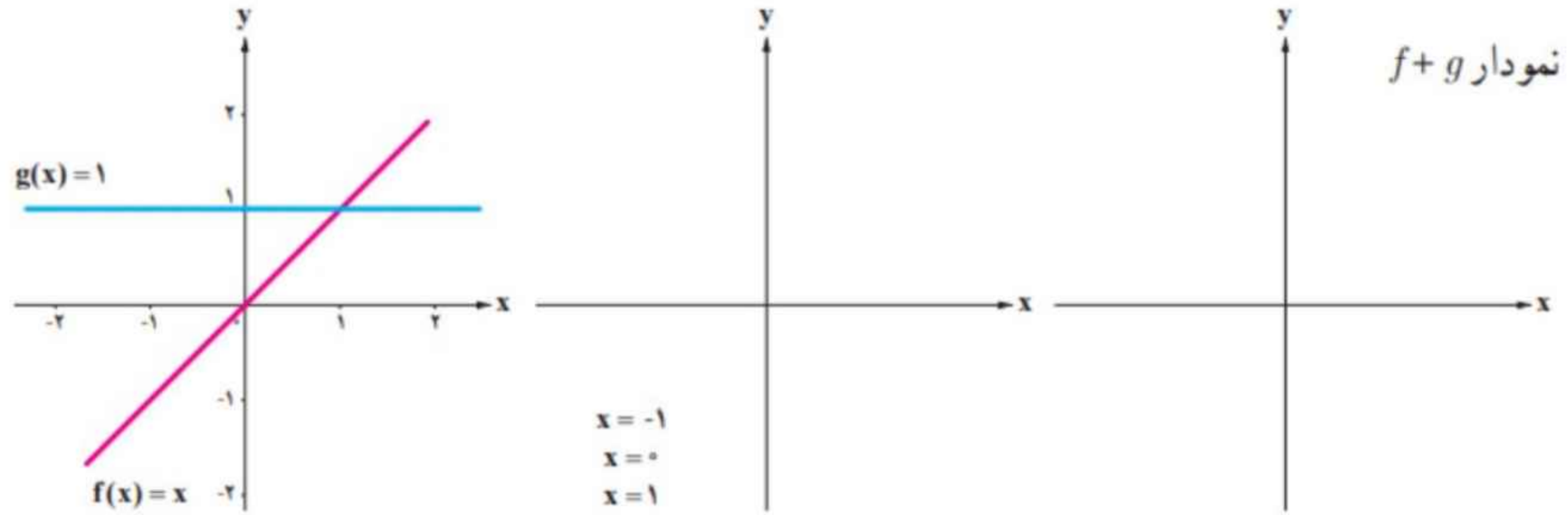
$$f \times g =$$

$$\frac{g}{f} =$$

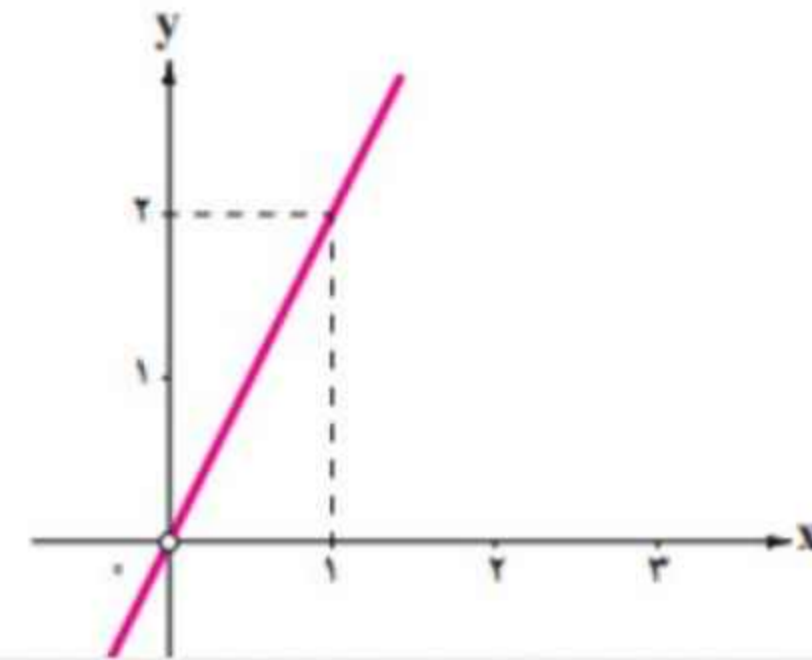
$$\frac{f}{g} =$$

$$f - g =$$

$$g - f =$$



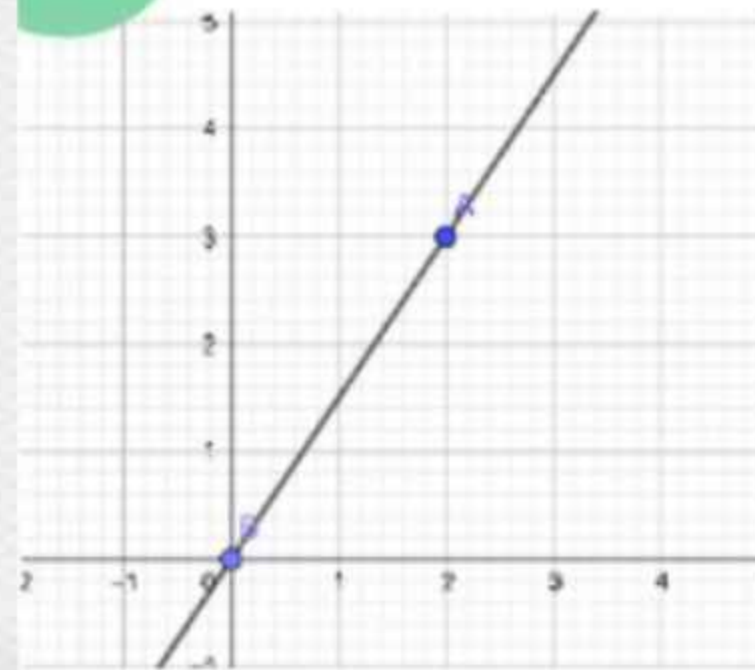
اگر $f(x) = x^2$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید؟



اگر $f(x) = x^2 + 1$ و تابع $\frac{f}{g}$ به صورت نمودار زیر باشد.

الف) ضابطه $g(x)$ را به دست آورید.

ب) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی

اگر $f = \{(-2, 1), (3, 4), (2, -5), (1, 1)\}$ و $g = \{(5, -2), (3, -7), (1, 0)\}$ باشد، آنگاه حاصل توابع زیر را بیابید.

الف) $\frac{f}{g}$
ب) $f - g$

اگر $f(x) = 3x - 1$ و $g = \{(1, 0), (-1, 2), (3, 7)\}$ باشد، آنگاه حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) D_{f-g}

ب) $(2f)(-3g)(1)$

اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = |x|$ باشد، نمودار $\frac{f}{g}$ را رسم کنید.



اگر $f(x) = x - 1$ و $g(x) = 2x^2 + 1$ باشد، مطلوبست حاصل :
الف) دامنه و ضابطه $(f + g)(x)$ را تعیین کنید.
ب) دامنه و ضابطه $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را پیدا کنید.

اگر $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = \frac{2x}{x+3}$ باشد.
الف) دامنه و ضابطه $(f + g)(x)$ را پیدا کنید.
ب) دامنه و ضابطه $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را پیدا کنید.



شاخص ها (Indices)

شاخص یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می دهد.

معمولا شاخص ها بر اساس چند آماره محاسبه می شوند و هدف ما تحلیل و تفسیر آنهاست.

یادآوری

آماره نمونه:

مشخصه ای عددی که توصیف کننده جنبه ای خاص از نمونه است و از داده های نمونه به دست می آید. به عبارت دیگر آماره عبارت است از ویژگی یا ویژگی هایی کمی که یک نمونه را توصیف می کند.

شاخص ها نه تنها مانند جداول فراوانی و نمودارها، متغیرهای داده ها را خلاصه می کنند؛ بلکه واقعیت های مفیدی را از جامعه به سادگی به ما نشان می دهند و امکان مقایسه را فراهم می کنند.

در نتیجه می توان گفت:

شاخص ها کمیت هایی هستند که با آن ها اطلاعاتی از جامعه به دست می آوریم.



یاد آوری

میانگین (Arithmetic Mean)

میانگین همان متوسط یا مرکز ثقل داده هاست و از مجموع داده ها (در مقیاس اندازه گیری شده فاصله ای یا نسبتی) تقسیم بر تعداد آنها به دست می آید.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

یعنی میانگین داده های x_1, x_2, \dots, x_n برابر است با

متداول ترین معیار گرایش به مرکز است.

یاد آوری

میانه (Median)

پس از مرتب کردن داده ها، مقداری که تعداد داده های بعد از آن با تعداد داده های قبل از آن برابر است، میانه (Q_2) است. برای تعیین میانه می بایست ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

(۱) اگر تعداد داده ها فرد باشد، آنگاه داده ای که وسط قرار می گیرد همان میانه است.

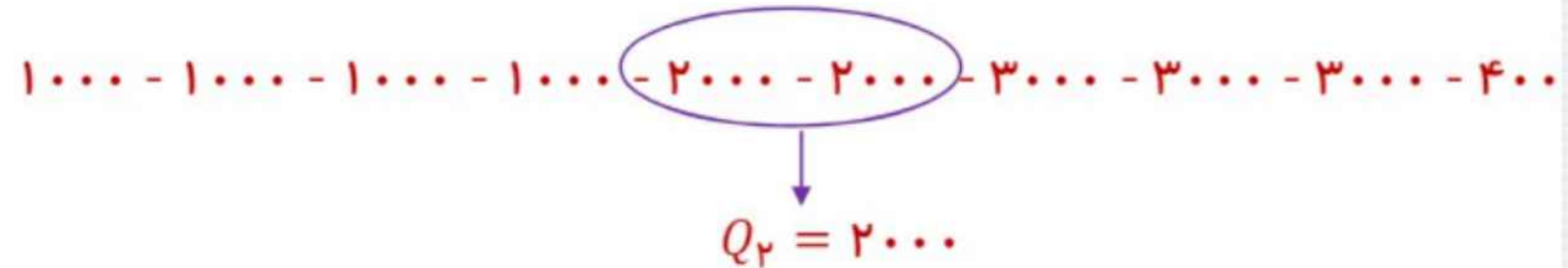
(۲) اگر تعداد داده ها زوج باشد، آنگاه میانگین دو داده ای که وسط قرار می گیرد همان میانه است.



ردیف	درآمد ماهانه (بر حسب هزار تومان)
۱	۱۰۰۰
۲	۳۰۰۰
۳	۱۰۰۰
۴	۴۰۰۰
۵	۳۰۰۰
۶	۳۰۰۰
۷	۲۰۰۰
۸	۱۰۰۰
۹	۲۰۰۰
۱۰	۱۰۰۰
مجموع	۲۱۰۰۰

فرض کنید، می‌خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مؤسسه تجاری را محاسبه کنیم. ده نفر از کارکنان را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر درآمد ماهانه ده نفر بر حسب هزار تومان به صورت مقابل باشد، میانگین و میانه درآمد آنها چه قدر است؟

$$\bar{x} = \frac{4(1000) + 2(2000) + 3(3000) + 4000}{10} = \frac{21000}{10} = 2100$$



هیئت مدیره مؤسسه تجاری تصمیم دارد به کارکنانی که درآمد کمتری دارند، یارانه پرداخت کند. به نظر شما به چه کسانی باید یارانه پرداخت شود؟

کسانی که درآمدهایشان زیر ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان است.

خط فقر کمینه درآمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه، مورد نیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین یا نصف میانه درآمد ماهانه افراد جامعه.

خط فقر شاخصی است که درآمد افرادی را که حداقل درآمد برای زندگی را ندارند، مشخص می کند.



این شاخص به ما کمک می کند در طی زمان امکان بررسی تأثیر سیاست های دولت ها برای فقرزدایی را رصد کنیم.



در فعالیت قبل، خط فقر را به دو روش ذکر شده محاسبه کنید.

$$\bar{x} = \frac{21000}{31} \cong 677/42$$

$$\text{خط فقر} = \frac{677/42}{2} = 338/71 \Rightarrow \text{نصف میانگین} = \text{خط فقر}$$

$$Q_2 = 666/7$$

$$\text{خط فقر} = \frac{666/7}{2} = 333/35 \Rightarrow \text{نصف میانه} = \text{خط فقر}$$

هیئت مدیره مؤسسه تجاری تصمیم دارد مقدار یارانه را بر اساس نصف میانه محاسبه کند. به هر یک از کارکنان،

چه مقدار یارانه بدهند که خانواده او حداقل درآمدی بیش از خط فقر داشته باشد؟

می بایست خط فقر را در تعداد اعضای خانواده ضرب کرده و حقوق را از حاصل آن کم کنیم.

به عنوان مثال برای کارمند ردیف ۸ داریم:

ردیف	درآمد ماهانه (بر حسب هزار تومان)	تعداد اعضای خانواده	متوسط درآمد هر یک از اعضای خانواده
۸	۱۰۰۰	۴	۲۵۰

$$333/35 \times 4 = 1333/4$$

$$1333/4 - 1000 = 333/4$$

مقدار یارانه پرداختی برای کارمند ردیف ۸ برابر با ۳۳۳,۴۰۰ تومان است.



مقداری متفاوت با سایر مقادیر داده هاست. معمولاً مقدار آن بسیار بزرگتر یا بسیار کوچک تر از بقیه داده هاست.

سوال ۲: فرض کنیم در یک نمونه ۲۰ تایی درآمد ماهانه افراد مختلف یک کشور؛ داده های جدول زیر بر حسب هزار دلار به دست آمده باشد. با توجه به تعریف خط فقر، تخمینی از خط فقر برای این کشور به دست آورید.

۹/۵	۵/۵	۶	۳	۰/۸	۵/۸	۶	۳/۴	۵/۲	۳/۵
۶/۵	۵	۵/۶	۴	۴	۴/۵	۳/۵	۳/۶	۳	۳/۸

وقتی با داده های دور افتاده مواجه هستیم، برای نتیجه گیری مناسب تر؛ بهتر است به جای میانگین از میانه استفاده کنیم.

$$۰/۸ - ۳ - ۳ - ۳/۴ - ۳/۵ - ۳/۵ - ۳/۶ - ۳/۸ - ۴ - ۴ - ۴/۵ - ۵ - ۵/۲ - ۵/۵ - ۵/۶ - ۵/۸ - ۶ - ۶ - ۶/۵ - ۹/۵$$

$$Q_2 = \frac{۴ + ۴/۵}{۲} = ۴/۲۵$$

$$\text{خط فقر} = \frac{۴/۲۵}{۲} = ۲/۱۲۵ \Rightarrow \text{نصف میانه} = \text{خط فقر}$$



شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی، متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف‌کنندگان برای مجموعه‌ای از تعداد زیادی کالا و خدمت در طول یک سال است. این شاخص، تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد.

- این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد. به عبارتی دیگر سطح قیمت‌ها در یک سال را اندازه می‌گیرد.

شاخص بهای کالاها و خدمات نشان می‌دهد که با پولمان چقدر می‌توانیم خرید کنیم، یا به اصطلاح قدرت خرید پولمان چقدر است.



روش محاسبه شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی

اگر مقدار مصرف کالا یا خدمات a و x_b مقدار مصرف کالا یا خدمات b و ... در سال مورد نظر و x'_a مقدار مصرف کالا یا خدمات a و x'_b مقدار مصرف کالا یا خدمات b و ... در سال پایه باشد. و از طرفی دیگر اگر y_a بهای کالا یا خدمات a و y_b بهای کالا یا خدمات b و ... در سال مورد نظر و y'_a بهای کالا یا خدمات a و y'_b بهای کالا یا خدمات b و ... در سال پایه باشد.

آنگاه شاخص بهای کالا و خدمات a و b و ... به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{x_a y_a + x_b y_b + \dots}{x'_a y'_a + x'_b y'_b + \dots} \times 100$$



مثال صفحه ۵۹ کتاب درسی

به عنوان مثال اگر سبد هزینه خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ ریال باشد و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال برسد و با فرض آن که مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب معادل ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، برای محاسبه شاخص بهای نان و گوشت در سال مورد نظر به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\text{شاخص بهای نان گوشت} = \frac{(200 \times 1500) + (80 \times 70,000)}{(200 \times 1000) + (80 \times 50,000)} \times 100 =$$

$$\frac{300,000 + 5,600,000}{200,000 + 4,000,000} \times 100 = \frac{5,900,000}{4,200,000} \times 100 \cong 140.5 \times 100 = 140.5$$



الف) جای خالی را با عبارت های مناسب تکمیل کنید.

۱) در نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات محور طول ها نشان دهنده **درصد نسبت به سال پایه** (عدد شاخص) و محور عرض ها نشان دهنده **زمان** است.

۲) شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه گیری بستگی **ندارد**.

۳) به نظر می رسد افزایش شاخص بهای کالاها و خدمات نشان دهنده **کرن** شدن هزینه اقلام خوراکی و **خدمات** است.

۴) شاخص بهای کالاها و خدمات بر اساس تعداد **۳۸۵** متغیر محاسبه می شود.

۵) اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟ **قدرت خرید خانوارها را نشان می دهد.**

ب) حال به سؤال قبل باز می گردیم. آیا پرداخت یارانه ثابت طی سال های آتی (مثلاً ۴۵۰۰۰ تومان به ازای هر نفر) می تواند در همه این مدت، درآمد خانوار را بیشتر از خط فقر نگه دارد؟ **به طور قطع و یقین خیر**



تورم (Inflation)

تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را تورم می نامند.
به عبارتی دیگر نرخ تورم، همان درصد تغییر سطح قیمت در واحد زمان است.

پدیده تورم از پرهم خوردن تعادل میان کالای موجود در جامعه با مقدار تقوینگی یا پول در گردش پدید می آید. به عبارت دیگر، وقتی کالا کمیاب و پول یا قدرت خرید برای مالکیت آن زیاد باشد، خلأ حاصل از آن را تورم می گویند.

$$\text{تورم} = \frac{\text{قیمت قبلی} - \text{قیمت فعلی}}{\text{قیمت قبلی}} \times 100$$

هرچه نرخ تورم افزایش یابد، قدرت خرید مردم کمتر می شود.



صفحه ۶۰ کتاب درسی

نرخ بیکاری (Unemployment Rate)

نرخ بیکاری عبارت است از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال.
برای بیان راحت نرخ بیکاری، معمولاً آن را در ۱۰۰ ضرب کرده و به درصد بیان می کنند.

صفحه ۶۲ کتاب درسی

تعاریف

خوانایی : خوانایی متن میزان سهولت درک متن از طریق انتخاب واژه های مناسب و رعایت دستور نگارش است.

کلمات دشوار : کلمات دو هجا بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات ترکیبی آسان است.



شاخص آموزش

یکی از شاخص های خوانایی که سال های تحصیل خواننده متون انگلیسی را تخمین می زند، به صورت زیر تعریف شده است:

$$0.4 \times (\text{درصد کلمات دشوار} + \text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله})$$

این شاخص عددی بین ۱ تا ۱۲ است که نشان دهنده پایه تحصیلی است.

سوال امتحان نهایی

برای کتابی با متوسط طول جملات ده کلمه ای و ۱۷ درصد کلمه سخت:
الف) شاخص پایه آموزش را محاسبه کنید.
ب) این کتاب مناسب چه پایه ای است؟

الف) $0.4 \times (\text{میانگین تعداد کلمات در هر جمله} + \text{درصد کلمات دشوار}) = \text{شاخص پایه آموزش}$
 $0.4 \times (10 + 17) = 0.4 \times 27 = 10.8 \approx 11$
ب) مناسب پایه یازدهم است.



شاخص پوسیدگی دندان (Decay Missing Filling Teeth Index)

شاخص پوسیدگی دندان (DMFT)، تعداد دندان کشیده شده، دندان پوسیده و دندان پر شده را نشان می دهد.

تمرین ۷ صفحه ۶۲ کتاب درسی

شاخص پوسیدگی دندان در سال ۱۳۶۰ در ایران برابر با ۳ بوده است؛ یعنی هر ایرانی به طور متوسط دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پر شده است. این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر با ۶ شده است. شاخص در سال ۱۳۵ چند درصد افزایش داشته است؟

$$\% \left(\frac{6}{3} \times 100 \right) - \% 100 = \% 100$$

در سال ۱۳۹۵ به طور متوسط هر شخص دو دندان کشیده، دو دندان پر شده و دو دندان پوسیده دارد.

این شاخص در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ چند درصد کاهش داشته است؟

$$\% \left(\frac{3}{6} \times 100 \right) - \% 100 = \% 50$$

سوالات نهایی خرداد ماه

اگر درآمد ماهیانه افراد یک شرکت بر حسب میلیون تومان بصورت زیر باشد، با توجه به تعریف خط فقر بر اساس نصف میانگین، چند نفر زیر خط فقر قرار می گیرند.

۱، ۸، ۶، ۱، ۳، ۲، ۱، ۱، ۶، ۸، ۹

$$۱۸۰۰ + ۴۰۰ = ۲۲۰۰ = \text{افراد جویای کار} + \text{افراد شاغل} = \text{جمعیت فعال}$$

$$\bar{x} = \frac{\text{جمع داده ها}}{\text{تعداد}} = \frac{۴۵}{۱۱} = ۴/۰۹$$

$$۲/۰۴ = \text{نصف میانگین} = \text{خط فقر}$$

۶ نفر از افراد شرکت زیر خط فقر قرار دارند.

در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل اند. در این منطقه ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار می باشند.

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟

ب) حداقل چند شغل باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر ۵ درصد باشد؟

$$۱۲۰۰ + ۲۰۰ = ۱۴۰۰ = \text{افراد جویای کار} + \text{افراد شاغل} = \text{جمعیت فعال} \quad \text{الف)}$$

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times ۱۰۰ (\%) = \frac{۲۰۰}{۱۴۰۰} \times ۱۰۰ (\%) = ۱۴/۲۸\%$$

ب) اگر x شغل ایجاد شود جمعیت بیکار آن $۲۰۰ - x$ خواهد بود

$$\frac{۲۰۰ - x}{۱۴۰۰} \times ۱۰۰ = ۵ \quad \rightarrow ۲۰۰ - x = ۷۰ \rightarrow x = ۱۳۰$$

۱۳۰ شغل باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری ۵ درصد باشد.

اگر سبد هزینه ی خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ ریال باشد و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب معادل ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، شاخص بهای نان و گوشت را بدست آورید.

$$\text{شاخص بهای نان و گوشت} = \frac{(1500 \times 200) + (70000 \times 80)}{(1000 \times 200) + (50000 \times 80)} \times 100 = 140/5$$

اگر درآمد ماهیانه ۹ نفر از افراد یک اداره (برحسب میلیون تومان) بصورت زیر باشد، با توجه به تعریف خط فقر بر اساس نصف میانه، چند نفر زیر خط فقر قرار دارند.

۵, ۷, ۱۰, ۸, ۵, ۶, ۱۰, ۱۱, ۱۵

ابتدا داده ها را مرتب کرده، میانه را مشخص می کنیم

۵, ۵, ۶, ۷, ۸, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۵

$$\text{میانه} = ۸ \rightarrow \text{خط فقر} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

دو نفری که حقوق ۵ میلیون دریافت می کنند زیر خط فقر قرار دارند.



در یک منطقه ۱۸۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل اند. در این منطقه ۴۰۰ نفر بالای ۱۶ سال و بیشتر جویای کار می باشند: الف) نرخ بیکاری در این منطقه چقدر است؟
 ب) حداقل چند شغل ایجاد شود تا نرخ بیکاری در این منطقه کمتر از سه درصد باشد.

الف) $۱۸۰۰ + ۴۰۰ = ۲۲۰۰$ = افراد جویای کار + افراد شاغل = جمعیت فعال

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times ۱۰۰ = \frac{۴۰۰}{۲۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۱۸/۱۸\%$$

ب) اگر x شغل ایجاد شود جمعیت بیکار آن $۴۰۰ - x$ خواهد بود

$$\frac{۴۰۰ - x}{۲۲۰۰} \times ۱۰۰ < ۳ \quad (./ ۲۵) \rightarrow ۴۰۰ - x < ۶۶ \rightarrow ۴۰۰ - ۶۶ < x \rightarrow ۳۳۴ < x$$

حداقل ۳۳۵ شغل باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری کمتر از ۳ درصد باشد.

