زاویه / نسبت	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰	۳۰	۴۵	۶۰	۳۷	۵۳
sin	۰	۱	۰	۱-	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۰/۶	۰/۸
cos	۱	۰	۱-	۰	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰/۸	۰/۶
tan	۰	ت ن	۰	ت ن	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۴}{۳}$
cot	ت ن	۰	ت ن	۰	ت ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۴}$

واحدهای اندازه گیری زاویه:

درجه (D°) ، رادیان (R^{rad})

$$R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times D \qquad D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times R$$

نکته: یک رادیان تقریبا ....۵۷٫۳ درجه است. در صورتی که $\pi=۳$ باشد ....۶۰...... درجه است.

مثال۱: کمان ۳ رادیان تقریباً چند درجه است؟

$۳\times ۵۷٫۳=۱۷۱٫۹$

مثال۲: زاویه ۳۹۰- درجه را به رادیان تبدیل کنید.

$R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times(-۳۹۰)=\frac{-۱۳\pi}{۶}$

مثال۳: ((نهایی ۱۴۰۲- خرداد))

انتهای کمان زاویه $\frac{۷\pi}{۵}$ رادیان در ناحیه .... مثلثاتی است.

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم ✓　　۴) چهارم

$\frac{۷\times ۱۸۰}{۵}=۲۵۲^\circ$

مثال۴: ((کتاب معلم))

مجموع دو زاویه ۳۸۵° و تفاضل آنها $\frac{۱۳\pi}{۳۶}$ رادیان است. اندازهٔ این دو زاویه برحسب رادیان چقدر است؟

$\frac{۱۳\times ۱۸۰}{۳۶}=۶۵^\circ$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۳۸۵\\ \alpha-\beta=۶۵\end{cases}$$

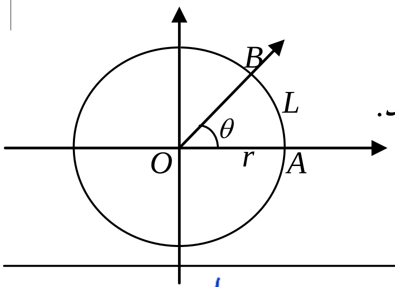
$۲\alpha=۴۵۰ \rightarrow \boxed{\alpha=۲۲۵^\circ}$

$۲۲۵-\beta=۶۵ \rightarrow \boxed{\beta=۱۶۰^\circ}$

$\alpha=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۲۲۵=\boxed{\frac{۵\pi}{۴}}$　　$\beta=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۱۶۰=\boxed{\frac{۸\pi}{۹}}$

تعریف رادیان:

دقت کن θ برحسب رادیان هستش.



نسبت طول کمان مقابل به زاویهٔ θ به طول شعاع دایره را اندازهٔ رادیان زاویهٔ θ می نامند.

$$\boxed{\theta = \frac{L}{r}}$$

مثال۵: ((نهایی ۱۴۰۲- خرداد)) ((کتاب درسی))

زاویه مرکزی روبه رو به کمانی به طول $\frac{1}{8}$ cm در دایره ای به شعاع $4cm$ برابر $\frac{1}{32}$ رادیان است.

$L=\frac{1}{8}$ ، $r=4$

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{1}} = \frac{1}{32}$$

مثال۶: ((نهایی ۱۴۰۲- خرداد))

$\theta = 1$

یک رادیان در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه مرکزی است که طول کمان روبرو به آن برابر طول شعاع است.

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow 1 = \frac{L}{r} \rightarrow L = r$$

مثال۷: ((کتاب معلم))

یک پیتزا به قطر ۲۵ سانتی‌متر را به ۸ قسمت مساوی برش می‌دهیم اندازه کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی در هر قطاع چند سانتی‌متر است؟

$\theta = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ ، $r = \frac{25}{2}$

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{L}{\frac{25}{2}} \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2L}{25} \rightarrow 8L = 25\pi \rightarrow \boxed{L = \frac{25\pi}{8}}$$

مثال۸: ((نهایی ۱۴۰۲- خرداد)) ((کتاب درسی))

$\theta = 60^\circ \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\ rad$ ، $r = 25$

طول برف پاک کن عقب خودرویی ۲۵ سانتی متر است. اگر برف پاک کن کمانی به اندازه ۶۰ درجه طی کند، آنگاه طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چند سانتی متر است؟ $(\pi \cong 3)$

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{L}{25} \xrightarrow{\pi = 3} \frac{3}{3} = \frac{L}{25} \rightarrow \boxed{L = 25}$$

مثال۹: ((کتاب درسی))

در شکل مقابل، یک تسمه، دو قرقره به شعاع های $10cm$ و $2/5cm$ را به هم وصل کرده است.بررسی کنید که وقتی قرقرهٔ بزرگتر $\frac{\pi}{2}$ رادیان می چرخد(یعنی نقطهٔ p در موقعیت p' قرار می گیرد) قرقرهٔ کوچکتر چند رادیان می چرخد.

روش ۲:

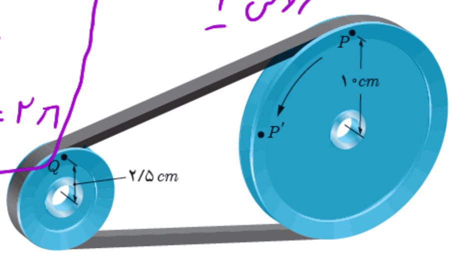
$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow$ θ و r ارتباط عکس دارند

$r_2 = 10 \xrightarrow{\div 4} r_1 = 2/5$

$\theta_2 = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\times 4} \theta_1 = 2\pi$

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta = \frac{L}{r} \\ \frac{\pi}{2} = \frac{L}{10} \\ L = 5\pi \end{array}}$$

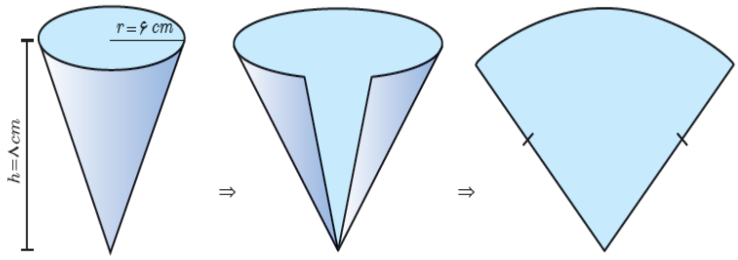
روش ۱



$$\boxed{\begin{array}{l} \theta = \frac{L}{r} \\ \theta = \frac{5\pi}{2/5} = 2\pi \end{array}}$$

*مثال۱۰: ((کتاب درسی))- $\boxed{۲۴۹۶}$ ← ویدیو ببین

شکل فضایی و نیز شکل گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعدهٔ مخروط $r=۶cm$ و ارتفاع $h=۸cm$ می باشد. اندازهٔ زاویهٔ قطاع حاصل از شکل گستردهٔ این مخروط چند رادیان است؟



نکته: دو زاویه که جمع آنها ۹۰ درجه شود را زاویه‌های ...متمم... می‌نامند.

نکته: سینوس و کسینوس دو زاویه که متمم هم هستند همواره برابر است.(مثال: $\sin ۳۰ = \cos ۶۰$)

نکته: تانژانت و کتانژانت دو زاویه که متمم هم هستند همواره برابر است.(مثال: $\tan ۳۰ = \cot ۶۰$)

مثال۱۱: حاصل $\tan ۱ \times \tan ۲ \times ... \times \tan ۸۹$ چقدر است؟

$\tan ۱ \times \tan ۲ \times ... \times \underbrace{\tan ۴۵}_{۱} \times ... \times \underbrace{\tan ۸۸}_{\cot ۲} \times \underbrace{\tan ۸۹}_{\cot ۱} = ۱$

مثال۱۲: ((کتاب درسی))

در تساوی های زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید.

$\sin x = \cos(۲۰ + x)$ جمع زاویه ها باید ۹۰° بشه. $x+۲۰+x=۹۰ \rightarrow ۲x=۷۰ \rightarrow \boxed{x=۳۵}$
$\tan(x+\frac{\pi}{۱۸}) = \cot(\frac{۲\pi}{۹}+x)$ روش ۱: $x+\frac{\pi}{۱۸}+\frac{۲\pi}{۹}+x=\frac{\pi}{۲} \rightarrow ۲x=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۸}-\frac{۲\pi}{۹} \rightarrow ۲x=\frac{۹\pi-\pi-۴\pi}{۱۸}$ $\rightarrow ۲x=\frac{۴\pi}{۱۸} \rightarrow ۲x=\frac{۲\pi}{۹} \rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{۹}}$

روش ۲: $(\pi=۱۸۰^\circ)$

$x+\frac{۱۸۰^\circ}{۱۸}+\frac{۲\times۱۸۰^\circ}{۹}+x=۹۰ \rightarrow x+۱۰+۴۰+x=۹۰ \rightarrow ۲x=۴۰ \rightarrow \boxed{x=۲۰}$

ردیف	رابطه		
۱	$\sin^{۲} x+\cos^{۲} x=۱$	$\sin^{۲} x=۱-\cos^{۲} x$	$\cos^{۲} x=۱-\sin^{۲} x$
۲	$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$	
۳	$\tan x.\cot x=۱$	$\tan x=\dfrac{۱}{\cot x}$	$\cot x=\dfrac{۱}{\tan x}$
۴	$۱+\tan^{۲} x=\dfrac{۱}{\cos^{۲} x}$	$۱+\cot^{۲} x=\dfrac{۱}{\sin^{۲} x}$	
۵	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha.\cos\beta\pm\sin\beta.\cos\alpha$		
۶	$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha.\cos\beta\mp\sin\alpha.\sin\beta$		
۷	$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha.\tan\beta}$		
۸	$\sin^{۲} x=\dfrac{۱-\cos ۲x}{۲}$	$\cos^{۲} x=\dfrac{۱+\cos ۲x}{۲}$	

فقط برای رشته ریاضی

مثال ۱۳: ((نهایی ۱۴۰۲ – خرداد))

حاصل عبارت $\tan(-۶۰۰^\circ)$ برابر با .... است.

$\tan(-۶۰۰)=-\tan۶۰۰=-\tan۲۴۰=-\tan(\underbrace{۱۸۰+۶۰}_{\text{ناحیه ۳ و تانژانت + است.}})$

$=-\tan۶۰=\boxed{-\sqrt{۳}}$

مثال ۱۴: ((کتاب معلم))

اگر $\tan۱۵^\circ=m$، حاصل عبارت $\dfrac{\sin۷۵^\circ+۳\cos۱۹۵^\circ}{\cos۱۰۵^\circ-\cos۲۸۵^\circ}$ را به‌دست آورید.

$\sin۷۵=\sin(۹۰-۱۵)=\cos۱۵$

$\cos۱۹۵=\cos(۱۸۰+۱۵)=-\cos۱۵$

$\cos۱۰۵=\cos(۹۰+۱۵)=-\sin۱۵$

$\cos۲۸۵=\cos(۲۷۰+۱۵)=\sin۱۵$

$\dfrac{\cos۱۵-۳\cos۱۵}{-\sin۱۵-\sin۱۵}=\dfrac{-۲\cos۱۵}{-۲\sin۱۵}=\dfrac{\cos۱۵}{\sin۱۵}=\cot۱۵=\dfrac{۱}{m}$

*مثال ۱۵: ((سراسری تجربی – ۹۹)) – $\boxed{۱۰۸۱}$ ← ویدیو ببین

حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰)+\tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده شده برحسب درجه هستند.)

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) ۲

مثال ۱۶: ((نهایی ۱۴۰۲– خرداد))

$\tan(\theta-\frac{\pi}{2}) = -\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = -\cot\theta$

ناحیه ! و تانژانت + است

حاصل عبارت $\tan(\theta-\frac{\pi}{2})$ کدام گزینه است.

۱) $\tan\theta$ ۲) $-\tan\theta$ ۳) $\cot\theta$ ۴) $-\cot\theta$ ✓

مثال ۱۷: ((نهایی ۱۴۰۲– خرداد))

$\sin\frac{25\pi}{3} = \sin(\frac{24\pi}{3}+\frac{\pi}{3}) = \sin(8\pi+\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید.)

$$\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \boxed{0}$$

$\cos(\frac{-5\pi}{6}) = \cos(\pi-\frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi+\frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

✲مثال ۱۸: ((قلمچی)) – $\boxed{۲۴۷۲}$ ← ویدیو ببین

حاصل عبارت $\tan(\frac{7\pi}{6})\sin(\frac{17\pi}{3}) - \tan(\frac{17\pi}{4})\cos(\frac{22\pi}{3})$ کدام است؟

۱) ۱

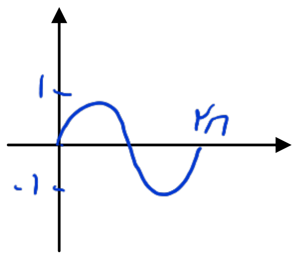
۲) ۱-

۳) ۱/۵

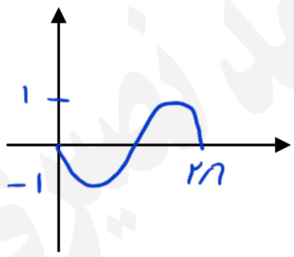
۴) صفر

نکته: نمودار توابع زیر را باید برای همیشه به خاطر سپرد و از روی آنها توابع پیچیده تر را رسم کرد.

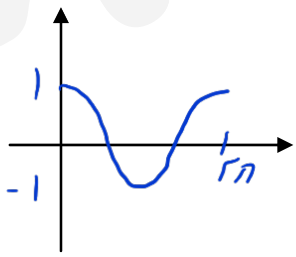
$y=\sin x$



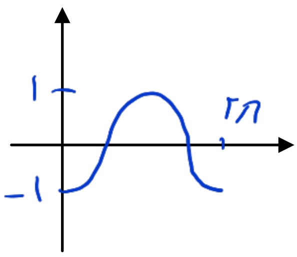
$y=-\sin x$



$y=\cos x$



$y=-\cos x$

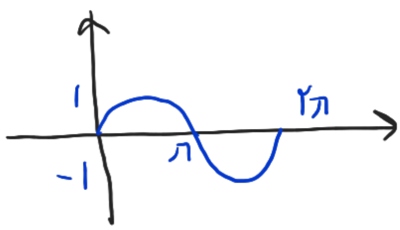


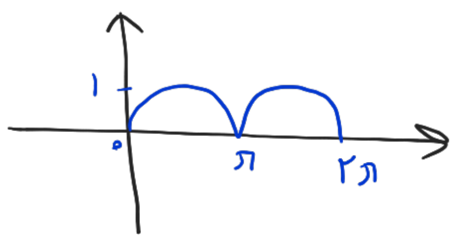
نکته: دامنه توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ ......$\mathbb{R}$...... و برد این توابع برابر ......$[-1,1]$...... است.

مثال ۱۹: ((نهایی ۱۴۰۲– خرداد))

نمودار تابع مثلثاتی $y=|\sin x|$ را در بازه $[0,2\pi]$ رسم کنید.

sinx

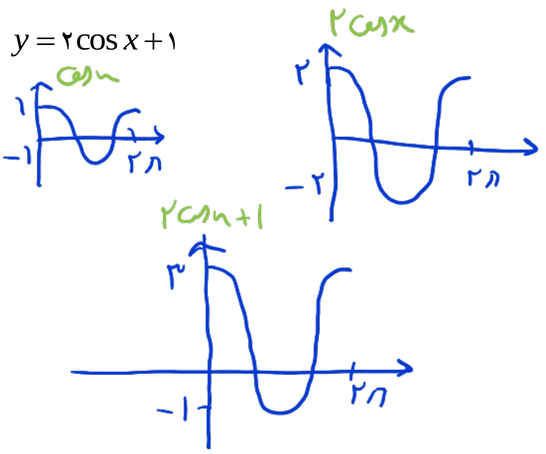




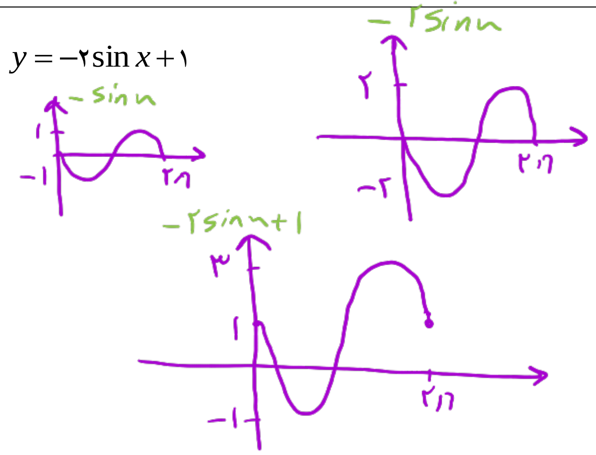
مثال۲۰: ((نهایی ۱۴۰۲ – خرداد))

نمودار توابع زیر را با استفاده از نمودار تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ رسم کنید.

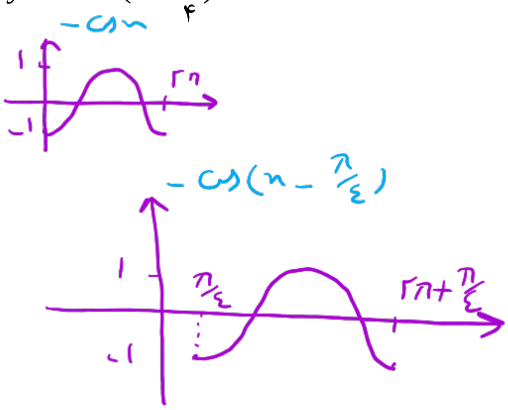
$y=۲\cos x+۱$



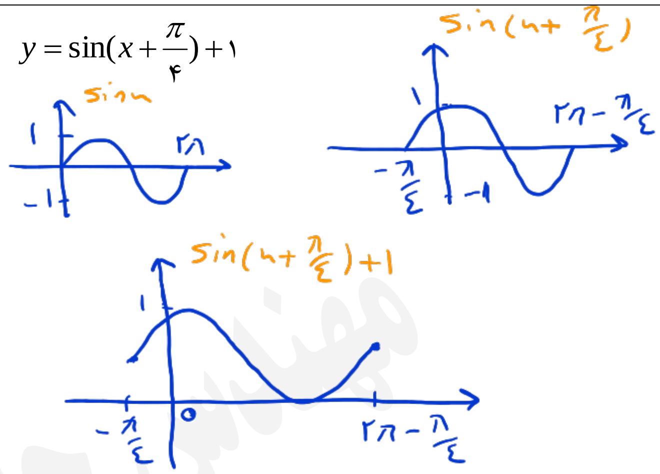
$y=-۲\sin x+۱$



$y=-\cos(x-\frac{\pi}{۴})$



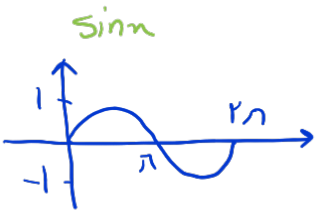
$y=\sin(x+\frac{\pi}{۴})+۱$

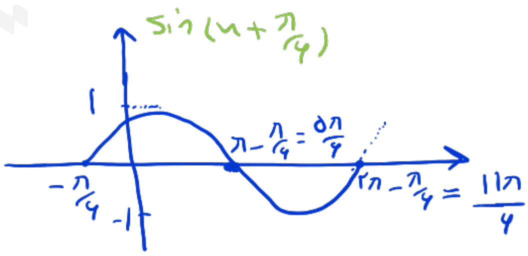


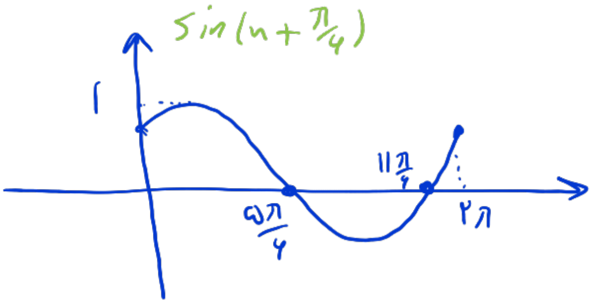
مثال۲۱: ((نهایی ۱۴۰۲ – خرداد))

الف) نمودار تابع مثلثاتی $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

ب) نمودار تابع قسمت (الف) در چه نقاطی محور x ها را قطع می کنند. $\frac{۱۱\pi}{۴}\ ,\ \frac{۵\pi}{۴}$





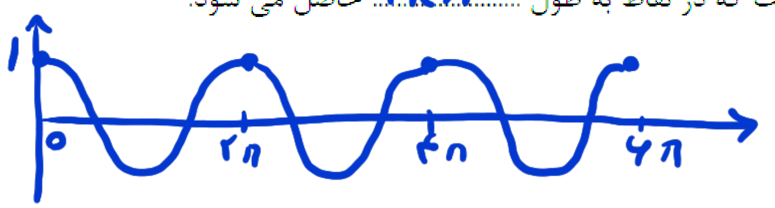


مثال۲۲: ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب توابع زیر را بدست آورید.

تابع	max	min	T	تابع	max	min	T
$y=\frac{۱}{۳}\sin \pi x$	$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲\pi}{\pi}=۲$	$y=-۳\cos x$	۳	-۳	۲π
$y=-۲\cos ۳x+۷$	۲+۷=۹	-۲+۷=۵	$\frac{۲\pi}{۳}$	$y=-۲\cos\frac{\pi}{۲}x$	۲	-۲	$\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$
$y=۳+۲\sin(۵x+۷)$	۲+۳=۵	-۲+۳=۱	$\frac{۲\pi}{۵}$	$y=۳\sin(-۵x)$	۳	-۳	$\frac{۲\pi}{۵}$

مثال۲۳: ((نهایی ۱۴۰۲- خرداد))

حداکثر مقدار تابع $f(x)=\cos x$ برابر با ...۱... است که در نقاط به طول ...$۲k\pi$... حاصل می شود.



مثال۲۴: فرض کنید $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$ و $\tan\beta=-\frac{۵}{۱۲}$ و α حاده و β منفرجه باشند، عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

$\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$　　$\sin\beta=\frac{۵}{۱۳}$

$\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$　　$\cos\beta=\frac{-۱۲}{۱۳}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=(\frac{۳}{۵})(\frac{-۱۲}{۱۳})+(\frac{۵}{۱۳})(\frac{۴}{۵})=\frac{-۳۶+۲۰}{۶۵}=\frac{-۱۶}{۶۵}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=(\frac{۴}{۵})(\frac{-۱۲}{۱۳})-(\frac{۳}{۵})(\frac{۵}{۱۳})=\frac{-۴۸-۱۵}{۶۵}=\frac{-۶۳}{۶۵}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{\frac{۳}{۴}-\frac{۵}{۱۲}}{۱-(\frac{۳}{۴})(-\frac{۵}{۱۲})}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۵}{۱۶}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲۱}{۱۶}}=\frac{۱۶}{۶۳}$

مثال۲۵: ((نهایی ۱۴۰۲- خرداد))

$\sin\beta=\frac{۵}{۱۳}$ ، $\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$

فرض کنید $\cos\beta=\frac{۱۲}{۱۳}$ و $\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم و انتهای کمان β در ربع اول باشد حاصل $\cos(\alpha-\beta)$ را بیابید.

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=(\frac{۳}{۵})(\frac{۱۲}{۱۳})+(\frac{-۴}{۵})(\frac{۵}{۱۳})=\frac{۳۶-۲۰}{۶۵}=\frac{۱۶}{۶۵}$

مثال۲۶: ((کتاب درسی))

مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

۱) $\cos 15^\circ = \cos(45-30) = \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

۲) $\tan 105^\circ = \tan(60+45) = \frac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \times \tan 45} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-(\sqrt{3})(1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$

۳) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin 15 \longrightarrow$ ویدیو ۲۷۴۷ کانال ببین

مثال۲۷: ((کتاب درسی)) ((نهایی ۱۴۰۲- خرداد))

با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$　$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$　$\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

نکته: برای نوشتن معادله ای به فرم $y = a\sin bx + c$ یا $y = a\cos bx + c$ با داشتن ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب، از روابط زیر استفاده می کنیم.

$\boxed{T = \frac{2\pi}{|b|}}$　$\boxed{c = \frac{\max+\min}{2}}$　$\boxed{|a| = \frac{\max-\min}{2}}$

مثال۲۸: ((نهایی خرداد ۹۹- خارج کشور)) ← ویدیو ۲۷۴۳ کانال حتماً ببین

تابعی سینوسی بنویسید که ماکزیمم آن ۱- و مینیمم آن ۷- و دوره تناوب آن 4π باشد.

$y = a\sin bx + c$

$|a| = \frac{-1-(-7)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow a = \pm 3$

$c = \frac{-1+(-7)}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

$T = 4\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm\frac{1}{2}$

یا:

$y = 3\sin\frac{1}{2}x - 4$

$y = -3\sin\frac{1}{2}x - 4$