بچه‌ی نوتروفیلی من ، سلام 💜

دیگه رسیدیم به انتهای مسیر کنکور و مثل همیشه کنارتیم،تا آخرین لحظه.یادت باشه این خونه ی آخر جمعبندی بیشتر از چیزی که فکرش رو میکنی مهمه ‼️
بازه ی جمعبندی،بازه ی جابجایی رتبه هاست.اگه مطالبی که خوندی رو خوب جمع کنی نتیجه خیلی بهتر از حد تصورت میشه.😌
حالا نوتروفیل بهترین منبع جمعبندی رو برات آماده کرده که بترکونی.با تسلط به کنکورهای اخیر میتونی یه درصد فوق العاده بگیری.🧨
این مجموعه فایل برای همه ی بچه هایی که میخوان تست های کنکور رو به صورت فصل به فصل و طبقه بندی شده در اختیار داشته باشن قابل استفاده ست؛به خصوص بچه هایی که نمیرسن تمام فصل ها رو بخونن یا آزمون های زیادی کار کنن که تمام سوالات رو ببینن.✌️
این فایل تمام سوالات رو از کنکور ۹۸ تا اردیبهشت ۴۰۳ به صورت فصل به فصل پوشش داده. 😎
در آخر یادت نره این فایل رو برای اون دوستت که بهش احتیاج داره بفرستی و جزئی از این زنجیره ی عشق و مهربونی باشی 🩷

به امید روزی که اینجا به عنوان همکار کنار خانواده ی بزرگ نوتروفیل باشی 💜

دوست همیشگی تو ، نوتروفیل

روش مطالعه :

⚠️توجه:این فایل مربوط به سوالات ریاضی پایه دوازدهمه اگه میخوای سوالات باقی مباحث رو هم داشته باشی روی لینکی که توی کپشن برات گذاشتم کلیک کن
📌بارم بندی قسمت های مختلف رو هم برات میذارم تا بدونی با کار کردن هر فایل چند درصد مباحث رو جمع کردی.👇

◀️مجموعه،الگو،دنباله:۲تست
◀️توانهای گویا و عبارتهای جبری:۱تست
◀️معادله ها و نامعادله ها:۱تست
◀️سهمی و معادله درجه دو:۱تست
◀️هندسه تحلیلی:۱تست
◀️هندسه:۲تست
◀️هندسه دوازدهم:۱تست
◀️توابع نمایی و لگاریتمی:۱تست
◀️تابع:۱تست
◀️مثلثات:۴تست
◀️حد و پیوستگی:۳تست
◀️مشتق:۲تست
◀️کاربرد مشتق:۳تست
◀️شمارش بدون شمردن:۱تست
◀️احتمال:۲تست
◀️آمار:۱تست
📌سوالات مربوط به هر فصل هم از این شماره ها شروع میشه:
◀️فصل۱دوازدهم:۱
◀️فصل۲دوازدهم:۵۸
◀️فصل۳دوازدهم:۱۰۷
◀️فصل۴دوازدهم:۱۴۰
◀️فصل۵دوازدهم:۱۸۷
◀️فصل۶دوازدهم:۲۲۱
◀️فصل۷دوازدهم:۲۴۵

ریاضی دوازدهم

۱ توابع $f(x)=\log(۲x-۵)$ و $g(x)=x+\sqrt{۲x-۴}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y=g^{-۱}of^{-۱}(x)$ محور yها را در α قطع کند، مقدار α کدام است؟

۱) $۴-\sqrt{۲}$ ۲) $۴-\sqrt{۳}$

۳) $۴+\sqrt{۲}$ ۴) $۴+\sqrt{۳}$

۲ اگر $y=\frac{x+۲}{۴}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۲}$ ضابطهٔ تابع وارون $y=ax+a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۹

۳ تابع $y=(x-۱)|x|$ در بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴ اگر $f=\{(\frac{۱}{۹},-۱),(\frac{۱}{۳},۱),(-\frac{۱}{۴},۳),(\frac{۱}{۴},-۳)\}$ ، $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ و $fog^{-۱}(a)=-۳$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۵ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{(x+۱)^۲}-|۳x-۶|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}x-۷\,,\ x\geq ۲$ ۲) $-\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\,,\ x\leq ۳$

۳) $-۲x+۱۴\,,\ x\leq ۳$ ۴) $-۲x-\frac{۱۴}{۳}\,,\ x\geq ۲$

۶ تابع $f(x)=\begin{cases} ۲-۳x & ;۲x+۳\leq ۰ \\ ۲+۲mx-x^۲ & ;۲x+۳>۰ \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱۹)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

۷ نمودار تابع $y=2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم، تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۸ اگر $f(x)=\left((\frac{1}{2})^x+\log_{0/5}x\right)^3$ باشد، مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x)<f(2^{-3x})$ زیرمجموعهٔ کدام بازه است؟ (با تغییر)

۱) $(1,\frac{11}{8})$
۲) $(1,+\infty)$
۳) $(\frac{11}{8},+\infty)$
۴) $(0,1)$

۹ اگر $f(x)=(x+\log x)^5$ باشد، مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x)<f(x^5)$ زیرمجموعهٔ کدام بازه است؟ (با تغییر)

۱) $(1,5)$
۲) $(0,1)$
۳) $(5,+\infty)$
۴) $(1,+\infty)$

۱۰ تابع $f(x)=mx^2-nx-k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعهٔ زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است؟

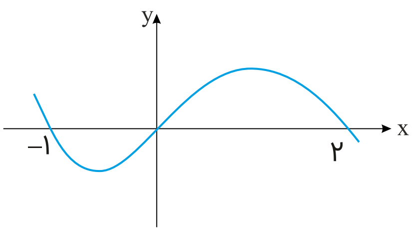
$$\{(m,n-1),(0,k),(n-1,m^2+2m-1),(3k+2,2k+1)\}$$

۱) -۱
۲) $-\sqrt{5}$
۳) ۱
۴) $\sqrt{5}$

۱۱ اگر $f(x)=2[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{5}{3})$، کدام است؟

۱) ۴
۲) -۴
۳) -۶
۴) ۶

۱۲ شکل زیر، نمودار $f(x-2)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) صفر
۴) بیش از ۴

۱۳ تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} & ;۲x-۵\geq ۰\\ -۲x^۲+ax-۲۱ & ;۲x-۵<۰\end{cases}$ روی دامنهٔ تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به ازای بزرگ‌ترین مقدار صحیح a باشد، مقدار $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱

۱۴ اگر $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=f([x-f(x)])$ باشد، $fog(-\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) -۴
۴) ۴

۱۵ تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(۲m^۲-۹m-۲)<f(m^۲-۴m+۴)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۵
۴) ۶

۱۶ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-۱}$ در دامنه محدود، خط $۵y-۱۰x=۱۲$ را در نقطه‌ای به عرض ۷/۲ قطع می‌کند. مقدار $f(\frac{۴}{m})$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۱۵}$
۴) $۲\sqrt{۱۵}$

۱۷ تابع f اکیداً نزولی و دامنهٔ آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۸ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$ در دامنهٔ محدود، خط $y=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) ۲
۴) ۱

۱۹ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)$، کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۳
۴) ۱۴

۲۰ قرینهٔ نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) -۲
۴) -۴

۲۱ اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\dfrac{۱-۲x}{x+۱}$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟

۱) $[-۱,۱)$
۲) $(-۱,۱]$
۳) $[۱,+\infty)$
۴) $(-\infty,۱]$

۲۲ فرض کنید $g(x)=\begin{cases}۱ & ;x>۰\\ ۰ & ;x=۰\\ -۱ & ;x<۰\end{cases}$ و $f(x)=۱-x^۲$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

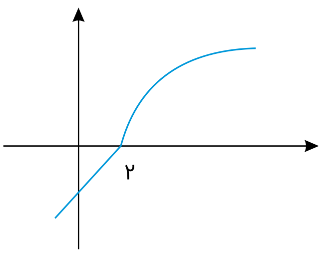
۲۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۴x-x^۲$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

۲۴ اگر $g(x)$ وارون تابع $x\geq ۱$، $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}$ باشد، $(gog)(۱)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۹
۴) صفر

۲۵ اگر $f(x)=\left|\frac{۱}{۲}x-۱\right|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادلهٔ $g(f(g(x+۲)))=۰$ چند ریشه دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

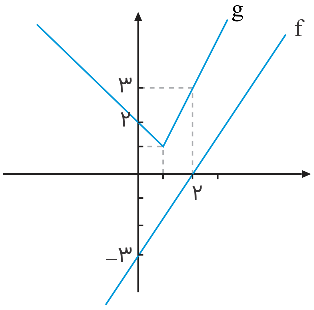
۲۶ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_۴\left(\left|x^۲-۲\right|-x\right)$، کدام است؟

۱) $(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(۲,+\infty)$
۲) $(-\infty,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$
۳) $[-۱,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$
۴) $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$

۲۷ نمودار منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x} + ۳}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام‌یک از نقاط زیر، روی نمودار منحنی به دست آمده قرار دارد؟

۱) $(۱ - \sqrt{۵}, ۰)$
۲) $(-\sqrt{۵}, ۰)$
۳) $(۰, ۱ - \sqrt{۵})$
۴) $(۰, -\sqrt{۵})$

۲۸ باتوجه‌به نمودارهای f و g در شکل زیر، حاصل $gof^{-۱}(-۲) \times gog(۰)$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۴
۳) -۴
۴) -۶

۲۹ با فرض $f(x) = x^۲ - ۴x + ۹ \; ; \; x \geq ۲$ و $g(x) = \frac{۳ - x}{۲}$، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۳۰ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{۹x + ۶}{۱ - x}$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۳۱ اگر $f(x) = \frac{۲}{۵}x - ۴$ و $g(x) = x^۳ + x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$ کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

۳۲ نمودار تابع $y = x^۲ - x - ۳$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی، سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟

۱) $(-۵, ۲)$
۲) $(-۵, ۳)$
۳) $(-۲, ۳)$
۴) $(-۲, ۵)$

۳۳ نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

۱) $(۳, ۴)$
۲) $(۲, ۵)$
۳) $(۳, ۵)$
۴) $(۲, ۶)$

۳۴ نمودار منحنی $y = \sqrt{۴ - x}$ را k واحد در راستای قائم و $k - ۲$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را یک واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به‌دست‌آمده با محور xها، کدام است؟

۱) -۴
۲) -۳
۳) ۱
۴) ۲

۳۵ اگر $f(x) = \dfrac{\sqrt{۲}x}{۳x - \sqrt{۲}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{\sqrt{۲}}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $\dfrac{۱}{۲}$

۳۶ تابع $f(x) = x^۲\sqrt{x^۲}$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\sqrt{x^۳}\,,\ x \leq ۰$
۲) $-\sqrt[۳]{x}\,,\ x \leq ۰$
۳) $-\sqrt{x^۳}\,,\ x \geq ۰$
۴) $-\sqrt[۳]{x}\,,\ x \geq ۰$

۳۷ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(۳) = ۰$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^۲f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۸ فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y = x^۳ + ۳x - ۱۲$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

۳۹ تابع $f(x) = (-۹ + k^۲)x^۳ + ۵$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k، چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۶

۴۰ اگر $gof(x) = ۵x^۲ + ۱۱$ و $f(x) = ۲x$ باشد، کمترین مقدار $g(x - ۷)$ چقدر است؟

۱) ۳
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۱۱

۴۱ نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور xها را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

۴۲ تابع $y = ۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور xها در جهت منفی و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۷}{۲}$

۴۳ اگر $f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g = \{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$، کدام است؟

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$
۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$
۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$
۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

۴۴ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -۱ & ; x < -۱ \\ x & ; -۱ \leq x \leq ۱ \\ ۱ & ; x > ۱ \end{cases}$ و $g(x) = ۱ - x^۲$، ماکزیمم مقدار تابع $gof - fog$، کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

۴۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲x \; ; (x > ۱)$، مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور xها را ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$
۲) $۶\sqrt{۲}$
۳) $۵\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

۴۶ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + ۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۱۵) + g(۳)$، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۱
۳) ۱۰
۴) ۸

۴۷ اگر $f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g = \{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $f - (g^{-۱}of)$، کدام است؟

۱) $\{-۱,۴\}$
۲) $\{۲,۳\}$
۳) $\{۳,۴\}$
۴) $\{۲,-۱\}$

۴۸ اگر $x \geq ۱ \; ; \; f(x) = x^۲ - ۲x - ۳$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x) = \frac{x - ۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۱

۴۹ فرض کنید برد تابع $f(x) = ۲\sqrt[۳]{۹\cos^۲(x) - ۱} - ۲\sqrt[۳]{۱ - ۹\cos^۲(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$
۲) $\frac{۱۵}{۴}$
۳) $\frac{۹}{۲}$
۴) $\frac{۲۱}{۴}$

۵۰ فرض کنید $f(x) = x(۱ - x^۲)$ و $g(x) = \begin{cases} ۱ & ; x > ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \\ -۱ & ; x < ۰ \end{cases}$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(fof)\,og$، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۵۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۵}$
۲) $۶\sqrt{۷}$
۳) $۴\sqrt{۱۷}$
۴) $۶\sqrt{۱۰}$

۵۲ نمودارهای دو تابع $y = |x - ۲| + |x + ۱|$ و $y = x + ۷$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۵۳ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = (x - ۱)^۲$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به‌سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

۱) $۰, ۲$
۲) $-۱, ۱$
۳) $-۱, ۲$
۴) $-۲, ۱$

۵۴ قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به‌سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

۱) $x = ۱$
۲) $x = ۱/۵$
۳) $x = ۲$
۴) $x = ۲/۵$

۵۵ اگر $f(x) = ۲x - [۲x]$ و $g(x) = -x^۲ + ۴x$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟

۱) $[۰, ۲)$

۲) $[۰, ۳)$

۳) $[۰, ۴)$

۴) $[۱, ۴)$

۵۶ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۲| + |x-۱|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty, -۲)$

۲) $(-\infty, ۱)$

۳) $(-۲, ۱)$

۴) $(۱, +\infty)$

۵۷ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۱| - |x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

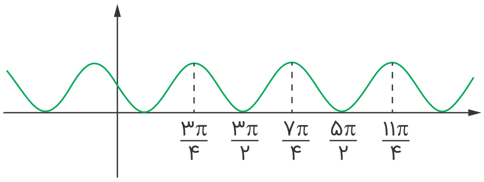
۱) $(-\infty, ۲)$

۲) $(-۱, +\infty)$

۳) $(-۱, ۲)$

۴) $(۲, +\infty)$

۵۸ شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + \sin ax$ است. دورهٔ تناوب $y = ۳\cos(\frac{x}{a})$ کدام است؟



۱) ۴π

۲) ۶π

۳) ۳π

۴) ۲π

۵۹ معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x - ۴\sin^۲ x \cos x = ۰$ چند جواب در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ دارد؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

۶۰ مجموع جواب‌های معادله $\cos ۲x + \sin^۲ x = ۰$ در بازهٔ $[-۳\pi, \pi]$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $-\pi$

۳) -۳π

۴) -۴π

۶۱ حاصل عبارت $\frac{\cos^۴\alpha + ۴\sin^۲\alpha}{۱ + \sin^۲\alpha} - \frac{\sin^۴\alpha + ۴\cos^۲\alpha}{۱ + \cos^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

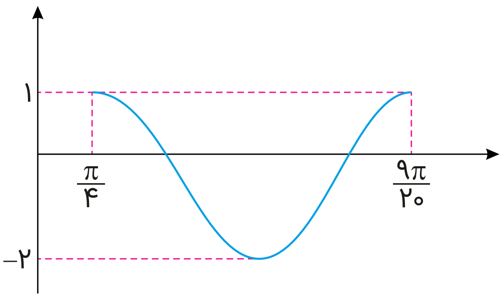
۳) $\cos ۲\alpha$

۴) $\sin ۲\alpha$

۶۲ خطوط $x+2y=3$ و $2x+ay=6$، یکدیگر را در نقطهٔ A و خط $x+y=0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیهٔ دوم واقع باشد، مقدار $\cot(B-C)$ در مثلث ABC کدام است؟

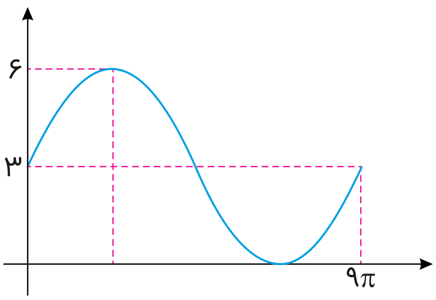
۱) $-\frac{5}{3}$
۲) $-\frac{3}{4}$
۳) $-\frac{3}{5}$
۴) $-\frac{4}{3}$

۶۳ شکل زیر، نمودار تابع $y=a\cos^2(bx-\frac{\pi}{4})+c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۱) 15
۲) -15
۳) $7/5$
۴) $-7/5$

۶۴ اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\frac{2}{a}-\frac{b}{1+\tan^2(cx-\frac{3\pi}{4})}$ باشد، مقدار $f(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟



۱) 4
۲) $4/5$
۳) $4/75$
۴) 5

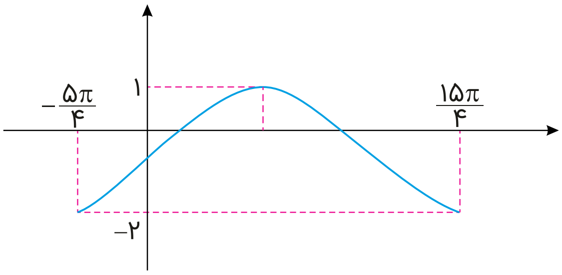
۶۵ خطوط $3y+x=-9$ و $ax-y=3$، یکدیگر را در نقطه A و خط $y-x=0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC، مقدار $\tan(B-C)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{2}{3}$

۶۶ اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin(\frac{\pi+4x}{2})}+\frac{1}{\cos(\frac{\pi+8x}{2})}=0$ در بازه $[0,\pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(2\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) $-\sqrt{3}$

۶۷ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin^2(\frac{\pi}{4} - bx) + c$ در یک بازهٔ تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۱) $-0/3$

۲) $0/3$

۳) $-0/6$

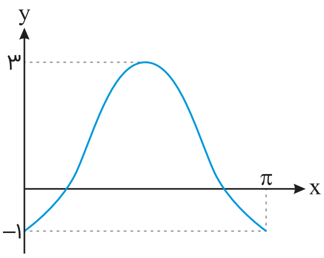
۴) $0/6$

۶۸ اگر اختلاف جواب‌های غیرصفر معادلهٔ $\cot(\frac{\pi + 4x}{2}) = \cos(\frac{\pi + 8x}{2})$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ برابر α باشد، مقدار $\cos(3\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

۶۹ اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin(cx - \frac{3\pi}{4})\cos(cx - \frac{3\pi}{4})$ در یک دورهٔ تناوب باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازهٔ $[0 , \pi]$، کدام است؟ (با تغییر)



۱) $\frac{\pi}{6}$

۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$

۴) $\frac{2\pi}{3}$

۷۰ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos(\frac{17\pi}{8} + x)\cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \cos^2(\frac{\pi}{3})$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$

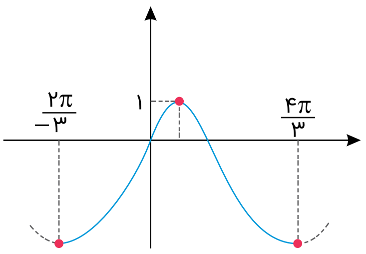
۳) $\frac{2\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۷۱ کمترین فاصلهٔ بین دو مقدار از جواب‌های معادلهٔ $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$ کدام است؟

۱) 2π ۲) π

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۷۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b\cos(cx - \frac{\pi}{۳})$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c - a)$ کدام است؟ (با تغییر)



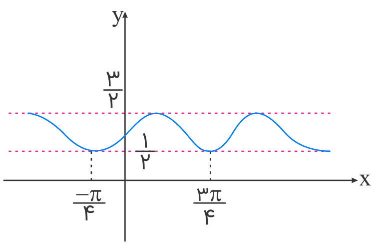
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

۷۳ شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

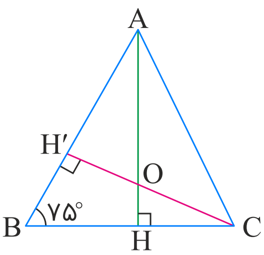
۴) ۳

۷۴ تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & ; ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۲ - x & ; ۱ < x \leq ۲ \end{cases}$ را که دورهٔ تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیهٔ محصور به منحنی f و محور xها در بازهٔ $[-۰/۷۵, ۳/۲۵]$، کدام است (دامنه تابع اعداد حقیقی است)؟ (با تغییر)

۱) ۲   ۲) ۳

۳) $۳/۵$ ۴) ۴

۷۵ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC کدام است؟ (با تغییر)



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۹}{۲(۷ + ۴\sqrt{۳})}$

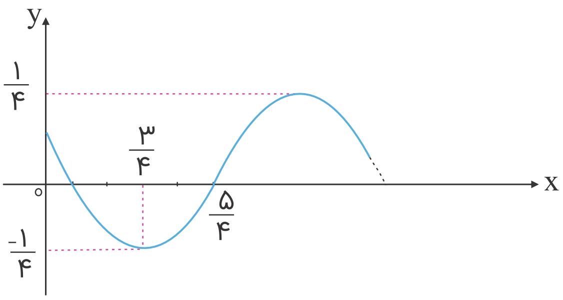
۴) $\frac{۹}{۷ + ۴\sqrt{۳}}$

۷۶ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$، با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$

۳) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

۷۷ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > ۰$ و $۰ < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۱۶}$

۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۴\pi}$

۴) π

۷۸ زاویهٔ $x\hat{O}y$ و نقطهٔ M داخل زاویه با شرط $۲M\hat{O}y = x\hat{O}M$، مفروض است. از نقطهٔ M عمودهای MN و MP را به ترتیب بر نیم‌خطهای Ox و Oy رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{MN}{MP}$، کدام است؟

۱) $\frac{OP}{ON}$

۲) $\frac{OP}{OM}$

۳) $\frac{۲OP}{ON}$

۴) $\frac{۲OP}{OM}$

۷۹ اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(۲\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(۲\alpha)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۹۶}{۱۷۵}$

۲) $\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

۳) $\frac{۹۶}{۱۷۵}$

۴) $-\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

۸۰ فرض کنید تابع f به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ نسبت به خطوط $x = ۱$ و $x = ۳$ متقارن باشد و خط تقارن دیگری به‌صورت $x = a$ در بازهٔ $(۱, ۳)$ نداشته باشد. کدام عبارت زیر درست است؟ (با تغییر)

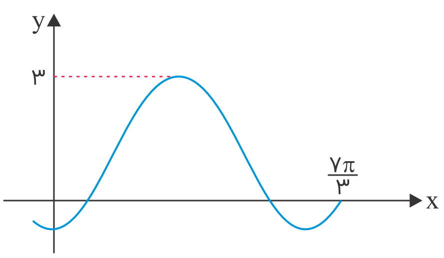
۱) f تابعی غیرمتناوب است.

۲) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۱ است.

۳) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است.

۴) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

۸۱ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ است. مقدار b، کدام است؟



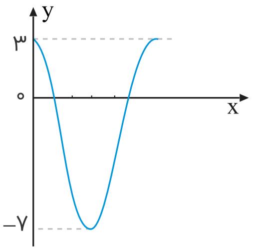
۱) ۲

۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲

۸۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos x + b$ را نشان می‌دهد، مقدار $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟



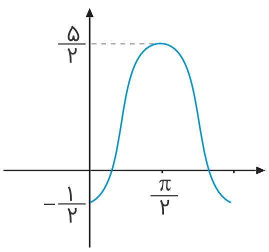
۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{11}{2}$

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) $-\frac{11}{2}$

۸۳ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a\cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار ac کدام است؟



۱) -۵

۲) -۳

۳) $-\frac{5}{2}$

۴) $-\frac{3}{2}$

۸۴ اگر $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) -۲

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۳

۸۵ تعداد جواب‌های معادله $\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{3}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۸۶ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4}) = 1$ در بازهٔ $[0 , 2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$

۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{4}$

۸۷ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $8\cos x - \tan^2 x = 1$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟

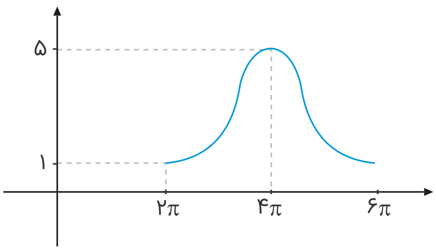
۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

۸۸ اگر $\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}-$ و $\tan(\frac{\pi}{۴} - x) = \frac{۱-m}{۲+m}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۲, ۱)$
۲) $(-۲, ۱]$
۳) $(-۱, ۲]$
۴) $(-۱, ۲)$

۸۹ شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a\cos bx$ را در یک دورهٔ تناوب، نشان می‌دهد. مقدار c کدام است؟

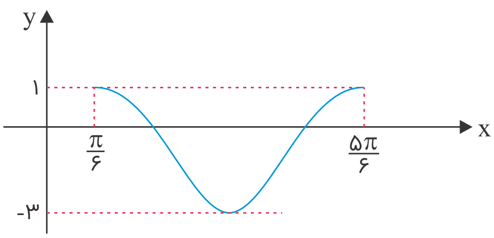


۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۱

۹۰ اگر $f(x) = ۳۲\cos^۲(x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)$، کدام است؟

۱) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$
۲) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۱۶}$
۳) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۱۶}$
۴) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۳۲}$

۹۱ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$، در یک بازهٔ تناوب است. مقادیر b و c، کدام‌اند؟



۱) $b = ۳, c = -۱$
۲) $b = ۳, c = -۲$
۳) $b = \frac{۳}{۲}, c = -۲$
۴) $b = \frac{۳}{۲}, c = -۱$

۹۲ فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha))(۱+\cos(۸\alpha)) = \frac{۱}{۸}$، در بازهٔ $[۰, \pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعهٔ A، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۷}\pi$
۲) $\frac{۶}{۷}\pi$
۳) $\frac{۷}{۹}\pi$
۴) $\frac{۸}{۹}\pi$

۹۳ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) ۳π
۳) $\frac{۷\pi}{۲}$
۴) ۴π

۹۴ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) ۳π
۳) ۴π
۴) ۵π

۹۵ جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$، با شرط $\cos x \neq ۰$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

۹۶ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۵\sin^۲(x) + ۲\cos(۳x) = -۲$ در فاصلهٔ $[-\pi, \pi]$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۵
۴) ۷

۹۷ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\frac{۱}{۸} = (۱+\cos(\alpha))(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha))$، در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ (با تغییر)

۱) ۷
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۹۸ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲(x) - \sin^۲(x)\cos(۳x) = ۱$، در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

۹۹ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin(۳x)\cos(۳x) = ۱$، در بازهٔ $\left[۰ \ , \ \frac{\pi}{۲}\right]$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

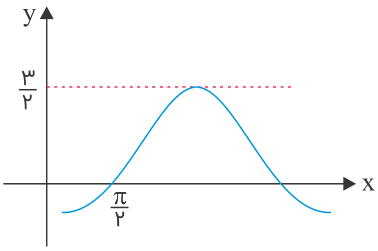
۱۰۰ اگر $f(x) = ۱۶\cos^۲(۳x)\cos^۲(۶x)\cos^۲(۱۲x)\cos^۲(۲۴x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۳۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{۶-۳\sqrt{۳}}{۱۶}$
۲) $\frac{۶-\sqrt{۳}}{۱۶}$
۳) $\frac{۶+\sqrt{۳}}{۱۶}$
۴) $\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$

۱۰۱ سادهٔشدهٔ عبارت $\frac{۱+\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{\sin(\theta)}{۱-\cos(\theta)}$، کدام است؟

۱) $\cos\left(\frac{\theta}{۲}\right)$
۲) $\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$
۳) $۲\cot\left(\frac{\theta}{۲}\right)$
۴) $۲\tan\left(\frac{\theta}{۲}\right)$

۱۰۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. مقدار a، کدام است؟



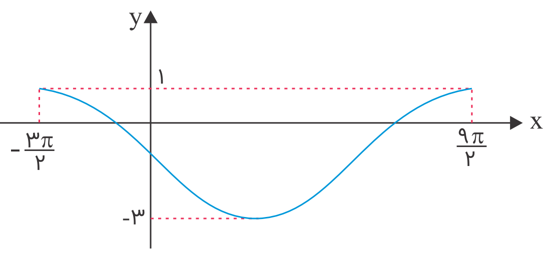
۱) -۱

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

۱۰۳ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



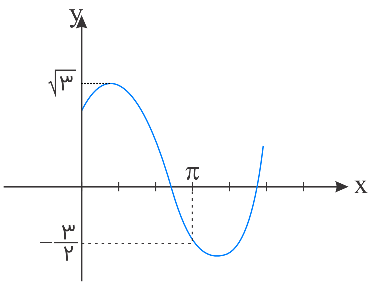
۱) -۲

۲) -۳

۳) -۴

۴) -۶

۱۰۴ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام اسـت؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

۱۰۵ دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$، کدام است؟

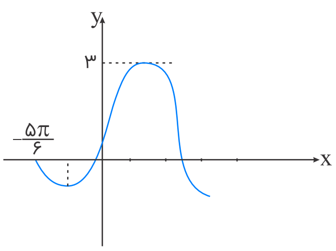
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۱

۳) ۲

۴) π

۱۰۶ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

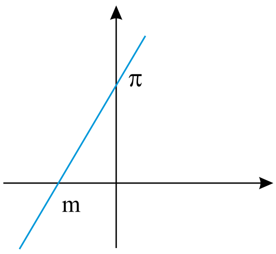
۳) ۲/۵

۴) $۱ + \sqrt{۳}$

۱۰۷ اگر $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{a+3[-x]}{1-2x} = -\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x\to \frac{1}{2}} [\frac{x}{a} - x]$ کدام است؟

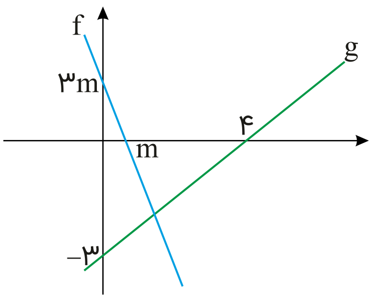
۱) صفر
۲) -2
۳) 1
۴) -1

۱۰۸ شکل زیر، نمودار تابع f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر $\lim_{x\to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



۱) $-\sqrt{\pi}$
۲) $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
۳) $-\frac{1}{\pi}$
۴) $-\pi\sqrt{\pi}$

۱۰۹ شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x\to -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟

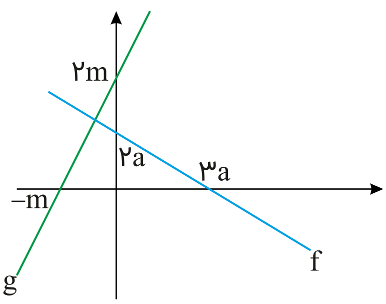


۱) ‎-۳
۲) ۳
۳) ‎-۴
۴) ۴

۱۱۰ مقدار غیرصفر حد $\lim_{x\to 8} \frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2b}{ax-b}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$
۲) $\frac{1}{6}$
۳) $\frac{1}{48}$
۴) $\frac{1}{24}$

۱۱۱ شکل زیر، نمودار توابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{3}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) -3
۴) 3

۱۱۲ مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{b\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}-b}{ax+b}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{3}$
۲) $-\dfrac{1}{3}$
۳) $-\dfrac{1}{6}$
۴) $\dfrac{1}{6}$

۱۱۳ حد عبارت $\dfrac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}$، وقتی $x\to 2$، کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{3}$
۲) $-\dfrac{1}{4}$
۳) $-\dfrac{1}{6}$
۴) $-\dfrac{1}{8}$

۱۱۴ اگر $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۱۱۵ اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{3})^+}\dfrac{ax+b}{a\cos x-\sin x}=-\infty$ باشد، کمترین مقدار صحیح b کدام است؟

۱) -4
۲) -3
۳) -2
۴) -1

۱۱۶ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+|x|}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=+\infty$
۲) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$
۳) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$
۴) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$

۱۱۷ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر x^2-1، بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x)=p(x-1)+p(1-x)$، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

۱۱۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{4x^n-6x^2+1}{ax^3+7x^2-2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$، کدام است؟

۱) $-\dfrac{4}{17}$
۲) $-\dfrac{6}{17}$
۳) $-\dfrac{5}{12}$
۴) $-\dfrac{6}{11}$

۱۱۹ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۴) $\sqrt{2}$

۱۲۰ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(a^2x^2-1)(a^4x^4-1)\dots(a^{100}x^{100}-1)}}{a^{49}x^k-1}=-1$ ، آنگاه مقادیر a و k، کدام‌اند؟

۱) $k=51\,,\ a=-1$
۲) $k=51\,,\ a=1$
۳) $k=49\,,\ a=-1$
۴) $k=49\,,\ a=1$

۱۲۱ اگر $g(x)=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}$ و $\lim\limits_{x\to1^+}(4-[x])g(x)=6$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) -۲

۱۲۲ حاصل $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{1}{2}$
۳) -۲
۴) $-\frac{3}{2}$

۱۲۳ اگر $f(x)=\sqrt{ax^2+x+1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+2}=\frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-1^-}[\frac{1}{x}]f(x)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) $\frac{1}{2}$
۴) -۱

۱۲۴ اگر $f(x)=x-\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۲۵ فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times2^{1-2n}}$ ، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $-\frac{1}{3}$
۴) -1

۱۲۶ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$، حاصل $\lim_{n \to +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$، کدام است؟

۱) $+\infty$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) 0
۴) $-\frac{1}{2}$

۱۲۷ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sin^{2n}(x)$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۱۲۸ مقدار $\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x + \left[\frac{3}{x^2}\right]}$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $-\infty$
۲) $+\infty$
۳) صفر
۴) $\frac{2}{3}$

۱۲۹ حاصل $\lim_{x \to 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$، کدام است؟

۱) -۱/۵
۲) -۱/۲
۳) -۰/۸
۴) -۰/۶

۱۳۰ مقدار $\lim_{x \to (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [-\frac{2}{x^2}]}$، کدام است؟([ ] نماد جزءصحیح است)

۱) $-\infty$
۲) صفر
۳) $\frac{5}{8}$
۴) $+\infty$

۱۳۱ حاصل $\lim_{x \to (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$، کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) -1
۳) صفر
۴) 1

۱۳۲ به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

۱) $\varnothing$
۲) $\{2\}$
۳) $2 < x < 2/5$
۴) $1/5 < x < 2$

۱۳۳ مقدار $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2+1} - x^2}{x}$ ، کدام است؟

۱) $\dfrac{3}{2}$

۲) ۱

۳) صفر

۴) -1

۱۳۴ به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$، بر $2x - 1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x + 2$، کدام است؟

۱) ۱۰-

۲) ۸-

۳) ۴

۴) ۶

۱۳۵ فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$، کدام است؟

۱) ۷

۲) ۱

۳) صفر

۴) -1

۱۳۶ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{ax - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$، کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{24}$

۲) $\dfrac{1}{18}$

۳) $\dfrac{1}{12}$

۴) $\dfrac{5}{36}$

۱۳۷ حد عبارت $\dfrac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}}$ وقتی $x \to -8$، کدام است؟

۱) ۲۴-

۲) ۱۸-

۳) ۱۲-

۴) ۶-

۱۳۸ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + 2\cos x}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}^-} f(x) = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{4\pi}{3}} f(x) = +\infty$

۱۳۹ اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -1

۲) $-\dfrac{1}{2}$

۳) $-\dfrac{1}{4}$

۴) صفر

۱۴۰ فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & ;x<-۱\\ x & ;-۱\le x\le ۱\\ ۱ & ;x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۴۱ به ازای کدام مقدار a، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x)=|۴x-۳|\sqrt{ax}$، در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۴}$ برابر $۲\sqrt{۶}$ می‌شود؟

۱) ۲
۲) ۸
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۴۲ به‌ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a، تابع $f(x)=\begin{cases}bx+c & ;x<a\\ \frac{۱}{x} & ;x\ge a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) -۲
۴) ۲

۱۴۳ اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۳-|x^۳|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[۳]{۲})f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) -۱

۱۴۴ خط به معادلهٔ $y=۳x-۵$ در نقطهٔ $x=۲$ بر نمودار تابع $y=g(x)$ مماس است. اگر $\frac{۲}{۳}=\lim\limits_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{۲x-۲}$ باشد، $(fog)'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۴۵ خط d موازی محور xها، سهمی $y=x^۲-۱$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $-\frac{۳}{۴}$

۱۴۶ اگر $f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۳}{۳۰}$ ۲) $-\dfrac{۵}{۱۲}$

۳) $\dfrac{۵}{۶}$ ۴) $-\dfrac{۱۳}{۱۵}$

۱۴۷ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=(x^۲+۱)^۳(ax+۱)$ در بازهٔ $[-۱,۰]$ برابر -۱۱ است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطهٔ $x=-۲a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۸ ۴) -۸

۱۴۸ خط $۷y-x=۵$ در ناحیهٔ اول صفحه مختصات بر منحنی $y=\dfrac{ax-۱}{۳x+۱}$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) $\dfrac{۴}{۷}$ ۴) $\dfrac{۹}{۷}$

۱۴۹ اگر $f(x)=\sqrt{x+۸}-\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x+۸}+\sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۳ ۴) ۲

۱۵۰ فرض کنید $g(x)=ax^۲+bx+c$، $(a\neq ۰)$ و $f(x)=\begin{cases} g(x) & ;x\geq k \\ g'(x) & ;x<k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۴}$ ۲) ۱

۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۱ اگر $f(x)=-\dfrac{۱}{\sqrt[۵]{x+|x|}}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x^۵+|x^۵|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۳}$

۳) -۱ ۴) ۱

۱۵۲ خط d موازی محور xها، قرینهٔ سهمی $y=x^۲+۱$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصلهٔ خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۳/۲۵

۳) ۰/۷۵ ۴) ۲/۷۵

۱۵۳ اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۵۴ خط d در نقطهٔ $(-1, 5)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{1}{2}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}f(x)$ باشد، مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $\frac{7}{6}$
۴) $\frac{13}{6}$

۱۵۵ اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) ۱

۱۵۶ در کدام نقطه از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$، خط مماس بر منحنی، بر $6y - 3x = 1$ عمود است؟

۱) $(-2, 17)$
۲) $(-1, 10)$
۳) $(1, 2)$
۴) $(2, 1)$

۱۵۷ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$، در $x = -2$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{2}{3}$

۱۵۸ در بازهٔ $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{2}$

۱۵۹ اگر $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

۱۶۰ معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y = \dfrac{x^۲ + mx + ۱}{x + ۳}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به‌صورت $۴y - ۳x = n$ است. مقدار $m + n$ چقدر است؟

۱) ۳-

۲) ۲-

۳) ۲

۴) ۳

۱۶۱ تابع f مشتق‌پذیر و با دورهٔ تناوب ۵ است. اگر $f'(-۱) = \dfrac{۳}{۲}$ و $g(x) = f(x + ۱) + f(۳x + ۱۰)$ باشد، حاصل $g'(-۲)$ کدام است؟

۱) ۳

۲) $\dfrac{۷}{۲}$

۳) ۶

۴) $\dfrac{۱۳}{۲}$

۱۶۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{۸}{ax + b} & ; x > ۲ \\ -x^۳ + ۶x & ; x \le ۲ \end{cases}$، اگر $f'(۲)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۶۳ تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به‌ترتیب -۲ و $\dfrac{۱}{۲}x + ۱$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$، کدام است؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۹

۱۶۴ مشتق تابع $f(x) = x\sqrt[۳]{\dfrac{۳x + ۱}{x + ۲}}$ در نقطهٔ $x = -۳$، کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۳}$

۲) $\dfrac{۳}{۴}$

۳) $\dfrac{۴}{۳}$

۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۱۶۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^۲ + ۶x} & ; ۰ \le x < ۴ \\ \left[\dfrac{x}{۴}\right](x^۲ - ۹x) & ; ۴ \le x < ۸ \end{cases}$، مقدار $f'(۲) - f'(۵)$، کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$

۲) $\dfrac{۱}{۲}$

۳) $\dfrac{۳}{۴}$

۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۱۶۶ فرض کنید $f(x) = (x[x^۲ + \frac{۱}{۲}])^۲ + ۱$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x = \frac{۳}{\sqrt{۸}}$، چندبرابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است؟

۱) -۴
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۶۷ باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P\,(x)$ بر $x^۲ + ۲x$ به‌ترتیب $۳x + ۱$ و $Q\,(x)$ است. اگر $Q\,(-۲) = ۳$، آنگاه مقدار باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'\,(x)$ بر $x + ۲$، کدام است؟

۱) -۶
۲) -۵
۳) -۴
۴) -۳

۱۶۸ فرض کنید $g\,(x) = ax^۲ + ۵x + b$ اگر $f\,(x) = \begin{cases} g\,(x) & ; x \leq ۲ \\ g'\,(x) & ; x > ۲ \end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a + b$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$
۲) $-\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۱۶۹ فرض کنید $f\,(x) = (x\,[x])^۳$ و $g\,(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$، مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$ چندبرابر $(-۴۸\sqrt{۵})$ است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

۱۷۰ تابع با ضابطهٔ $f\,(x) = \frac{\sqrt{x} + ۱}{\sqrt{x} - ۱}$ را در نظر بگیرید، شیب خط مماس بر منحنی $f^{-۱}\,(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۸
۳) -۸
۴) -۱۲

۱۷۱ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲ + ۲x}}{x^۲ - x}\right)^۳$، در نقطهٔ $x = ۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۵}{۴}$
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

۱۷۲ مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[۳]{\left(\frac{۲x - x^۲}{۳x + ۵}\right)^۲}$ در نقطهٔ $x = -۲$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۷۳ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^۲ + ax + b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

۱۷۴ خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \dfrac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x) = ax^۲ + bx$، در نقطهٔ $x = ۲$، مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۱۷۵ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}$ در بازهٔ $[۵ , ۶]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

۱) $۴ + \sqrt{۲}$
۲) $۳ + ۲\sqrt{۲}$
۳) $۲ + \dfrac{۳}{۲}\sqrt{۲}$
۴) $۲ + \dfrac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

۱۷۶ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \dfrac{۵x - ۴}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x = ۴$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) ۴-
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۳

۱۷۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x+۲)\sqrt{۴x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰, ۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \dfrac{۳}{۴}$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۱۰
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۲۰
۴) ۰/۲۵

۱۷۸ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} |x^۲ - ۲x| & ; x < ۲ \\ \dfrac{۱}{۲}x^۲ + ax + b & ; x \geq ۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۲$ مشتق‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۷۹ اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \dfrac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۳}$
۲) $\dfrac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

۱۸۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$، حاصل $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{9}$

۲) $\frac{5}{12}$

۳) $\frac{7}{12}$

۴) $\frac{5}{6}$

۱۸۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & ;x\geq 2\\ -x^2+ax+b & ;x<2\end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) ۲-

۲) ۱-

۳) ۱

۴) ۲

۱۸۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[1,4]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۵

۳) ۰/۴۵

۴) ۰/۷۵

۱۸۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x+1}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[0,4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{2}$، چقدر کمتر است؟

۱) ۰/۰۳

۲) ۰/۰۴

۳) ۰/۰۵

۴) ۰/۰۶

۱۸۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{4x-5}{x+1}$ و دامنهٔ $[0,8]$، خط مماس بر نمودار آن، موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲-

۲) ۱/۵-

۳) ۱-

۴) ۰/۵-

۱۸۵ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x^3-2x|}{x}$، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۸۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۸۷ کمترین فاصلهٔ نقاط واقع بر منحنی $y=-\sqrt{-x-[x^۲]}$ از خط $x-y-۱=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ‏ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$ ‏ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$

۱۸۸ حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ محاط می‌شود، کدام است؟

۱) ۳۲π ‏ ۲) ۶۴π

۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$ ‏ ۴) $\frac{۵۱۲\pi}{۳}$

۱۸۹ نمودار تابع $f(x)=(m^۲-۱)x^۲+(۲-m)x+۵\ \ ,m\in(-۱,۱)$ محور xها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β کمترین مقدار باشد، m کدام است؟ (با تغییر)

۱) $-۲+\sqrt{۵}$ ‏ ۲) $-۲+\sqrt{۳}$

۳) $۲-\sqrt{۵}$ ‏ ۴) $۲-\sqrt{۳}$

۱۹۰ تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲};x\in(-۲,۲)$، در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

۱) ۲ ‏ ۲) ۳

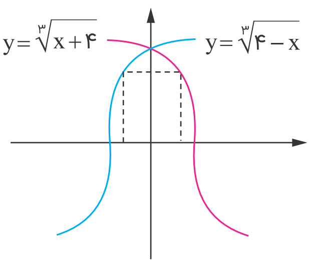
۳) ۴ ‏ ۴) ۵

۱۹۱ به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $y=\frac{mx+۲}{x-۱+m}$ روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ نزولی است؟ $(m\neq ۲)$

۱) ۱ ‏ ۲) ۲

۳) ۳ ‏ ۴) ۴

۱۹۲ مساحت بزرگ‌ترین مستطیل واقع در ناحیه‌های اول و دوم که دو رأس آن بر محور xها و دو رأس دیگر آن بر نمودارهای داده‌شده در شکل زیر قرار دارد، کدام است؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

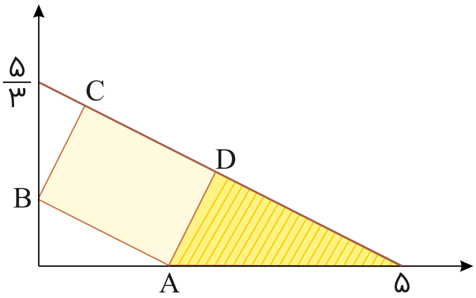
۴) ۶

۱۹۳ مقدار مینیمم نسبی تابع $y=x^۳-۱۲x+۲$ کدام است؟

۱) -۱۴ ‏ ۲) -۱۱

۳) -۹ ‏ ۴) -۷

۱۹۴ در شکل زیر، مساحت مستطیل $ABCD$ ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشورخورده چقدر است؟



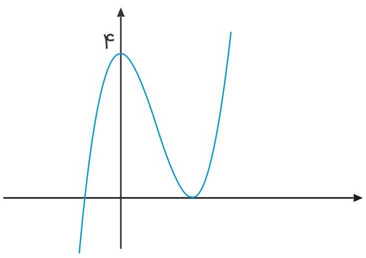
۱) $\frac{۱۵}{۸}$

۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$

۴) $\frac{۲۵}{۲۴}$

۱۹۵ نمودار تابع $f(x) = x^{۳} + ax^{۲} + bx + c$ به‌صورت زیر است. طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع، کدام است؟



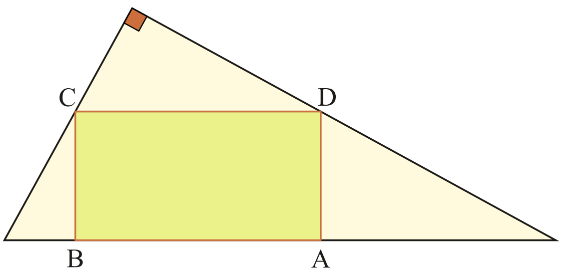
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۳

۱۹۶ در شکل زیر، یکی از اضلاع قائمه مثلث بزرگ نصف دیگری است. اگر مساحت مستطیل $ABCD$ ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟



۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۲

۴) ۲/۵

۱۹۷ کمترین فاصلهٔ نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^{۲}]}$ از خط $۲x - y + ۲ = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$

۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۰}$

۱۹۸ مجموعهٔ مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = ۳\sqrt[۳]{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

۱) $[-۱, +\infty)$ ۲) $(-\infty, \infty)$

۳) $[-۱, ۰) \cup (۰, \infty)$ ۴) $[-۳\sqrt{۳}, ۰]$

۱۹۹ کدام عبارت، برای تابع $f(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$، درست است؟

۱) تابع f در بازهٔ $(0,1)\cup(1,\infty)$ صعودی است.

۲) تابع f در بازه‌های $(1,\infty)$ و $(0,1)$ صعودی است.

۳) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(0,1)$ نزولی است.

۴) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ نزولی و در بازهٔ $(0,1)$ صعودی است.

۲۰۰ تابع $f(x)=\dfrac{x}{1-x|x|}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۰۱ حاصل‌ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{a-2x}$ برابر $\sqrt{12}$ است. اگر $a>0$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۱۲

۲۰۲ نمودار تابع $y=x^3+ax^2-2bx-4$ در نقاطی به طول صفر و ۲- دارای اکسترمم نسبی است. فاصله بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع، چقدر است؟

۱) $2\sqrt{5}$
۲) $2\sqrt{11}$
۳) $2\sqrt{15}$
۴) $2\sqrt{101}$

۲۰۳ قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x)=x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA'، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$
۲) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
۴) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

۲۰۴ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۲۰۵ کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{2x+7}$، کدام است؟

۱) ۴
۲) $4/5$
۳) ۵
۴) $3\sqrt{2}$

۲۰۶ فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{۴x-x^۲}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

۲۰۷ در ساخت قوطی‌های حلبی در باز به شکل مکعب‌مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده‌شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۲
۳) ۱۰
۴) ۸

۲۰۸ نقاط $A(۰,۰)$ و $B(۱,۱)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ هستند، حاصل ab کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۶-
۳) ۳
۴) ۶

۲۰۹ از بین مخروط‌های حاصل که از دوران کامل پاره‌خط AB با اندازهٔ $۳\sqrt{۳}$ حول خط L به دست می‌آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطهٔ A روی خط L واقع است)

۱) ۶
۲) ۳
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۳}$

۲۱۰ نقطهٔ $A(-۱,۱)$ اکسترمم نسبی تابع $y=x^۲|x|+۳ax^۲+b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) ۳
۴) $\frac{۱}{۳}$

۲۱۱ فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره‌خط AB است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۱۲ بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^۴}{x^۳-۸}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

۱) ۲
۲) $\sqrt[۳]{۴}-۱$
۳) $۲\sqrt[۳]{۴}$
۴) $۲(\sqrt[۳]{۴}-۱)$

۲۱۳ مینیمم مطلق تابع $f(x)=x\left|۳-x^۲\right|$ در بازهٔ $[-۱/۵,\sqrt{۳}]$، کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۴}$
۲) -۲
۳) $-\sqrt{۳}$
۴) $-\frac{۹}{۸}$

۲۱۴ قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{-x}$ را در دامنهٔ $[0,1]$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم صفحهٔ مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA'، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ ۲) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$

۳) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

۲۱۵ مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$، کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$

۳) $-1+\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

۲۱۶ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{2}{1}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

۲۱۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x-4|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$

۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۲۱۸ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{12-x}$ در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۲۱۹ بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴

۳) ۲۷ ۴) ۳۶

۲۲۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x|-2x$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳

۳) $3\sqrt{2}$ ۴) ۴

۲۲۱ خط $۲x + ۳y = ۹$ در نقطهٔ $(۰, ۳)$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۳x + ay = c$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) $۳/۵$ ۲) $-۳/۵$

۳) $۱/۵$ ۴) $-۱/۵$

۲۲۲ کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x = ۳$ و $x = -۳$ روی محور xها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۳}$ باشد، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

۱) $۱۵\sqrt{۲}$ ۲) $۱۲\sqrt{۲}$

۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

۲۲۳ خطی به معادله $۲x + y = ۰$ عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی نصف شعاع دیگری است. اگر معادلهٔ دایرهٔ بزرگ‌تر به صورت $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y = a$ و خط مفروض بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، مجموع طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$

۳) ۱ ۴) -۱

۲۲۴ طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-۱, ۲/۵)$ در دایره $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۶x - ۱۰y + ۱ = ۰$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۷}$

۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

۲۲۵ نقطه‌های M و N به ترتیب روی دو دایرهٔ متخارج $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = a$ و $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y + ۶a = ۰$ قرار دارند. اگر بیشترین فاصلهٔ M و N برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $۲/۵$ ۲) ۲

۳) $۱/۵$ ۴) ۱

۲۲۶ خط d به معادلهٔ $y - x = ۰$، عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط d بر دایرهٔ کوچک‌تر به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y = r$ مماس باشد، حاصل‌ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۶۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۶۵}{۶۴}$

۲۲۷ دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۳$ مفروض است. معادلهٔ دایره‌ای که با دایرهٔ قبلی مماس داخل بوده و از نقطهٔ $(۰, -۳)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایرهٔ اصلی برابر باشد، کدام است؟ (با تغییر)

۱) $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۳$ ۲) $x^۲ + y^۲ - ۴y + ۳ = ۰$

۳) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۰$ ۴) $x^۲ + y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$

۲۲۸ دو دایره $x^2+y^2+2y-4x=0$ و $x^2+y^2-2y=2$، نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

۱) مماس بیرون
۲) متقاطع
۳) متخارج
۴) متداخل

۲۲۹ طول وتری از دایرهٔ $x^2+y^2-4x+2y=1$ که روی خط $2y+x=a$ قرار دارد، برابر ۳ است. اختلاف مقادیر a چقدر است؟

۱) $\sqrt{35}$
۲) $\sqrt{38}$
۳) $3\sqrt{6}$
۴) $5\sqrt{3}$

۲۳۰ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۳/۵ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آن‌ها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایرهٔ کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۷۵
۳) ۲/۲۵
۴) ۲/۷۵

۲۳۱ در یک مکعب صفحهٔ گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعهٔ نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۲۳۲ معادلهٔ دایره‌ای که بر دو دایرهٔ $x^2-8x+y^2+15=0$ و $x^2-2x+y^2=0$ مماس خارج است و مرکزش روی یکی از محورها قرار دارد، کدام است؟

۱) $x^2+y^2+5x+6=0$
۲) $x^2+y^2-5x+6=0$
۳) $4x^2+4y^2-20x+25=0$
۴) $4x^2+4y^2+20x+25=0$

۲۳۳ نقطهٔ $(-12,0)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدأ مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟

۱) ۰/۶
۲) ۰/۸
۳) ۱/۴
۴) ۱/۸

۲۳۴ به‌ازای هر m، معادلهٔ $(m-2)x+(m+1)y=6$، معادلهٔ قطری از دایرهٔ C است. اگر نقطهٔ $A(-1,1)$ روی دایرهٔ C باشد، محیط دایرهٔ C کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}\pi$
۲) 2π
۳) 3π
۴) $2\sqrt{3}\pi$

۲۳۵ در یک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

۱) ۶۰°
۲) ۹۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۵۰°

۲۳۶ یک بیضی به قطرهای $AA' = ۱۴$ و $BB' = ۴\sqrt{۶}$ و کانون F نزدیک به نقطهٔ A، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطهٔ F، دایره به قطر AA' را در نقطهٔ M، قطع می‌کند. اندازهٔ پاره‌خط AM، کدام است؟

۱) ۷
۲) $۲\sqrt{۷}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۳۷ دایره‌های $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۳$ متقاطع‌اند. معادلهٔ وتر مشترک این دو دایره کدام است؟

۱) $x = y$
۲) $x = ۱ + y$
۳) $x = -y$
۴) $x = ۱ - y$

۲۳۸ در یک بیضی به کانون‌های $(۲, -۱)$ و $(۲, ۷)$، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) ۰/۶
۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۸

۲۳۹ در یک بیضی به اقطار $۲\sqrt{۵}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

۲۴۰ فرض کنید خطوط $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ قطرهای یک دایره و خط $۴x + ۳y + ۵ = ۰$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(۴, -۲)$ از دایره، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳} - ۱$
۲) $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۵} - ۲$

۲۴۱ کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا بر دو نقطهٔ $A(۲ , ۵)$ و $B(-۴ , ۱)$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $۱ , -۳$
۲) $۰ , -۳$
۳) $۲ , -۱$
۴) $۳ , -۲$

۲۴۲ دایره‌ای به مرکز $(۳ , ۱)$ بر روی خط راست $۵x + ۱۲y = ۱۵$، وتری به طول $۲\sqrt{۲۱}$، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$
۲) ۶
۳) $۲\sqrt{۱۵}$
۴) ۸

۲۴۳ حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با ضلع‌های قائم AB و AC، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $۲\sqrt{۶}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟

۱) ۶۰π
۲) ۷۰π
۳) ۷۵π
۴) ۸۰π

۲۴۴ نقطهٔ $A(-۱, ۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x - ۳y + ۱ = ۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = ۲$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳، -۵
۲) ۲، -۴
۳) $-۱ \pm \sqrt{۲}$
۴) $-۱ \pm \sqrt{۳}$

۲۴۵ جعبهٔ A شامل ۶ مهرهٔ آبی، ۴ مهرهٔ سبز و ۵ مهرهٔ قرمز است و جعبهٔ B شامل ۵ مهرهٔ آبی، ۳ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ قرمز است. از جعبهٔ A به‌تصادف یک مهره انتخاب کرده، در جعبهٔ B قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از جعبهٔ B انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال مهرهٔ خارج‌شده از جعبهٔ B آبی است؟

۱) $۰/۳۶$
۲) $۰/۳۲$
۳) $۰/۲۸$
۴) $۰/۲۴$

۲۴۶ در ظرف اول ۳ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد روشده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مهره آبی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۸}$
۲) $\frac{۱۱}{۳۰}$
۳) $\frac{۱۹}{۳۰}$
۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۲۴۷ احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، ۰/۴، ۰/۳۵ و ۰/۲۵ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، با احتمال ۰/۲۵، ۰/۳ و ۰/۳۵ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

۱) $۲۰/۵۵$
۲) $۲۹/۵۵$
۳) $۲۰/۲۵$
۴) $۲۹/۲۵$

۲۴۸ احتمال اینکه پارسا یکی از سه رشته A، B و C را در دانشگاه انتخاب کند، به ترتیب، ۰/۴۵، ۰/۲ و ۰/۳۵ است. اگر او یکی از سه رشته A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب با احتمال ۰/۲، ۰/۲۵ و ۰/۳ در آن رشته پذیرفته می‌شود. پارسا با کدام احتمال در رشته مورد علاقه‌اش پذیرفته می‌شود؟

۱) $۰/۲۴۵$
۲) $۰/۲۴$
۳) $۰/۱۹۵$
۴) $۰/۱۹$

۲۴۹ دو سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو سکه "رو" یا هر دو "پشت" ظاهر شوند، یک سکه دیگر می‌اندازیم، در غیراینصورت دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. در مجموع با کدام احتمال، دقیقاً دو سکه به "پشت" ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۲۵۰ سه ظرف یکسان داریم که هرکدام به‌ترتیب حاوی ۱۶، ۱۵ و ۱۴ مهره هستند. تعداد مهره‌های قرمز سه ظرف، به‌ترتیب ۴، ۶ و ۵ مهره است. احتمال انتخاب هر ظرف متناسب با تعداد مهره‌های آن ظرف است. یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و مهره‌ای بیرون می‌کشیم، با کدام احتمال، مهرهٔ انتخابی قرمز است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳۱}{۵۶۰}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۲۰}$

۲۵۱ در ظرف اول ۳ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد روشده بیشتر از ۹ باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه مهره قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵۷}{۲۷۰}$ ۲) $\frac{۱۶۵}{۲۷۰}$

۳) $\frac{۱۷۳}{۲۷۰}$ ۴) $\frac{۱۸۰}{۲۷۰}$

۲۵۲ در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به‌دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$

۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

۲۵۳ سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به‌تصادف از یک ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

۲۵۴ در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه است. دو مهره به‌صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهرهٔ دوم، سفید است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۶

۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۷۲

۲۵۵ بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بستهٔ ریاضی، ۷ بستهٔ تجربی و ۶ بستهٔ علوم انسانی، به‌تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده‌شدن در هر بستهٔ این دروس به ترتیب ۰/۷، ۰/۸ و ۰/۹ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می‌شود؟

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$

۲) $\frac{۲۹}{۳۶}$

۳) $\frac{۳۰}{۳۶}$

۴) $\frac{۳۱}{۳۶}$

۲۵۶ در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

۱) $\frac{۵}{۲۴}$

۲) $\frac{۱۱}{۴۸}$

۳) $\frac{۱۳}{۴۸}$

۴) $\frac{۷}{۲۴}$

پاسخنامه

۱ گزینه ۲

$$y = (g^{-۱}of^{-۱})(x) = g^{-۱}(f^{-۱}(x))$$

$$\xrightarrow[A(۰,\alpha)]{\text{محل تلاقی با محور y ها}} g^{-۱}(f^{-۱}(۰)) = \alpha$$

$$f^{-۱}(۰) = x \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow \log(۲x - ۵) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x - ۵ = ۱۰^{۰} \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow f^{-۱}(۰) = ۳$$

$$g^{-۱}(۳) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = ۳ \Rightarrow \alpha + \sqrt{۲\alpha - ۴} = ۳ \xrightarrow[\alpha \leq ۳]{۳-\alpha \geq ۰} ۲\alpha - ۴ = ۹ + \alpha^{۲} - ۶\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^{۲} - ۸\alpha + ۱۳ = ۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۱۳}}{۱} \Rightarrow \alpha = ۴ \pm \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۴ - \sqrt{۳}$$

۲ گزینه ۳

چون دو تابع وارون یکدیگرند، بنابراین با یک نقطه می‌توانیم a را حساب کنیم.

$$y = \frac{x + ۲}{۴} - \frac{\sqrt{x + ۱}}{۲} \xrightarrow{x=۳} y = \frac{۵}{۴} - ۱ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow (۳, \frac{۱}{۴})$$

بنابراین نقطهٔ $(۳, \frac{۱}{۴})$ روی تابع $y = ax + a\sqrt{x}$ قرار دارد.

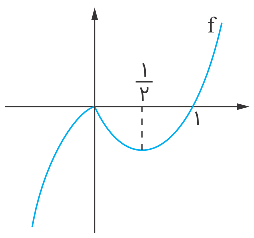
$$۳ = \frac{a}{۴} + \frac{a}{۲} \Rightarrow a = ۴$$

۳ گزینه ۲

(تذکر: صورت سوال ایراد دارد. باتوجه‌به اینکه کلید سنجش گزینهٔ "۲" است، شکل درست آن به این صورت باید باشد:
تابع $y=(x-۱)|x|$ در بزرگ‌ترین بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟)

$$y=(x-۱)|x|=\begin{cases} x^{۲}-x & ;x\geq ۰ \\ -x^{۲}+x & ;x<۰ \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع f در بزرگ‌ترین بازهٔ $[۰,\frac{۱}{۲}]$ اکیداً نزولی است، بنابراین:

$$a+b=\frac{۱}{۲}$$

۴ گزینه ۳

$$(fog^{-۱})(a)=-۳\Rightarrow f(g^{-۱}(a))=-۳\Rightarrow g^{-۱}(a)=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a=g(\frac{۱}{۴})=-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۸}$$

.

۵ گزینه ۲

$$y=|x+۱|-|۳x-۶|$$

$$\xrightarrow[\text{بازه‌بندی}]{\text{حذف قدرمطلق}} y=\begin{cases} ۲x-۷ & ;x<-۱ \\ ۴x-۵ & ;-۱\leq x<۲ \\ -۲x+۷ & ;x\geq ۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{نزولی}} y=-۲x+۷\,,\ x\geq ۲$$

وارون تابع را می‌یابیم:

$$y=-۲x+۷\Rightarrow ۲x=-y+۷\Rightarrow x=\frac{-y}{۲}+\frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow y^{-۱}=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\,,\ x\leq ۳$$

۶ گزینه ۱

f برد ضابطه اول $: R_۱ = [\frac{۱۳}{۲}, +\infty)$

f ضابطه دوم $: y_۲ = -x^۲ + ۲mx + ۲ \Rightarrow x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲m}{-۲} = m$

$\Rightarrow x_S = m$ رأس سهمی

برای اینکه $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، نباید رأس سهمی در دامنه تعریف ضابطه دوم باشد، یعنی:

$x_S = m \leq -\frac{۳}{۲}\, , m^۲ + ۲ < \frac{۱۳}{۲} \Rightarrow m = -۲ (m \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow y_۲ = -x^۲ - ۴x + ۲$

$f^{-۱}(-۱۹) = ? \Rightarrow -x^۲ - ۴x + ۲ = -۱۹ \Rightarrow x^۲ + ۴x - ۲۱ = ۰ \Rightarrow x = ۳\, , x = -۷$

چون $x > -\frac{۳}{۲}$ مورد قبول است پس $x = ۳$ پاسخ سؤال است.

۷ گزینه ۳

$y = ۲^{|\sin x|} \xrightarrow{\text{سمت راست } \frac{\pi}{۲}} y = ۲^{\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{۲}\right)\right|} = ۲^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{۳}{۲}} y = ۲^{|\cos x|} - \frac{۳}{۲}$

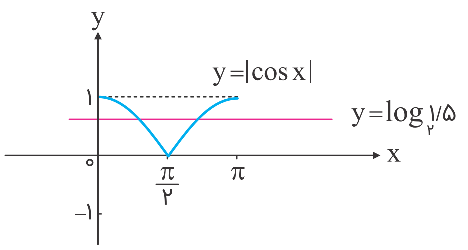
تعداد محل تقاطع نمودار با محور xها را می‌خواهیم، بنابراین تابع حاصل را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$y = ۲^{|\cos x|} - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲^{|\cos x|} = \frac{۳}{۲}$

حال از دو طرف $\log_۲$ می‌گیریم، درنتیجه:

$|\cos x| = \log_۲ \frac{۳}{۲}$

تابع $\log_۲ x$ صعودی است و $\log_۲ ۲ = ۱$ می‌باشد، بنابراین $۰ < \log_۲(۱/۵) < ۱$ است. حال نمودار $|\cos x|$ و $\log_۲(۱/۵)$ را رسم می‌کنیم:



پس معادلهٔ $|\cos x| = \log_۲ \frac{۳}{۲}$ در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ دو جواب دارد.

۸ گزینه ۴

توابع $(\frac{1}{2})^x$ و $\log_{0/5} x$ هر دو اکیداً نزولی هستند، پس مجموع آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع x^3 اکیداً صعودی است، پس ترکیب این تابع با $(\frac{1}{2})^x + \log_{0/5} x$ اکیداً نزولی خواهد بود. یعنی تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است. حال داریم:

$$(fof)(x) < f(2^{-3x}) \Rightarrow f(f(x)) < f((2^{-x})^3)$$

$$\xrightarrow{\text{f اکیداً نزولی}} f(x) > (2^{-x})^3$$

$$\Rightarrow ((\frac{1}{2})^x + \log_{0/5} x)^3 > (2^{-x})^3 = ((\frac{1}{2})^x)^3$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2})^x + \log_{0/5} x > (\frac{1}{2})^x \Rightarrow \log_{0/5} x > 0$$

$\log_{0/5} x$ در بازهٔ $(0, 1)$ مثبت است، بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(2^{-3x})$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(0, 1)$ می‌باشد.

۹ گزینه ۲

x و $\log x$ دو تابع اکیداً صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها یعنی $x + \log x$ اکیداً صعودی است.
تابع x^5 نیز اکیداً صعودی است و همچنین می‌دانیم ترکیب دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی می‌باشد، بنابراین $f(x)$ اکیداً صعودی است.

$$(fof)(x) = f(f(x)) < f(x^5) \Rightarrow f(x) < x^5 \Rightarrow (x + \log x)^5 < x^5$$

$$\Rightarrow x + \log x < x \Rightarrow \log x < 0$$

$\log x$ در بازهٔ $(0, 1)$ منفی است، بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(x^5)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(0, 1)$ می‌باشد.

۱۰ گزینه ۳

منظور سؤال این است که $f(x)$ تابع ثابت است، پس $m = n = 0$ است. حال تابع داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

$$g = \{(0, -1), (0, k), (-1, -1), (3k + 2, 2k + 1)\}$$

زوج مرتب‌های $(0, -1)$ و $(0, k)$ مولفهٔ اول برابر دارند، برای تابع بودن باید مولفهٔ دوم نیز برابر باشد. بنابراین برای آنکه g تابع باشد باید $k = -1$ باشد. تابع g به‌صورت زیر در می‌آید:

$$g = \{(0, -1), (-1, -1)\}$$

$f(x) = -k = 1$ خواهد بود و درنتیجه $f(\sqrt{5}) = 1$ می‌باشد.

۱۱ گزینه ۳

$$\mathrm{gof}(-\frac{۵}{۳}) = g(f(\frac{-۵}{۳})) = ?$$

$$f(-\frac{۵}{۳}) = ۲[-\frac{۵}{۳}] - (-\frac{۵}{۳}) = ۲(-۲) + \frac{۵}{۳} = -۴ + \frac{۵}{۳} = -\frac{۷}{۳}$$

$$f(-\frac{۷}{۳}) = ۲[-\frac{۷}{۳}] - (-\frac{۷}{۳}) = -۶ + \frac{۷}{۳} = -\frac{۱۱}{۳}$$

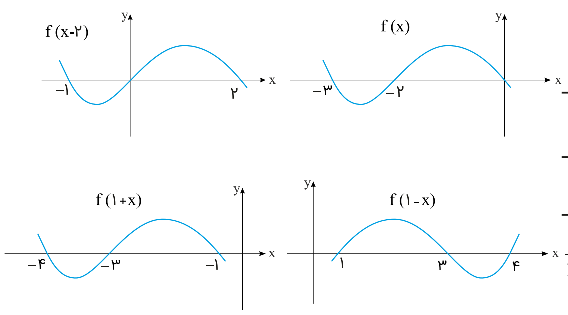
$$g(f(-\frac{۵}{۳})) = g(-\frac{۷}{۳}) = f([-\frac{۷}{۳} + f(-\frac{۷}{۳})]) = f([-\frac{۷}{۳} - \frac{۱۱}{۳}])$$

$$= f(-۶) = ۲[-۶] + ۶ = -۱۲ + ۶ = -۶$$

۱۲ گزینه ۱

$$g(x) = \sqrt{\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}} \Rightarrow \frac{f(۱-x)}{f(x+۱)} \geq ۰$$

باتوجه‌به نمودار $f(x-۲)$، توابع $f(۱-x)$ و $f(x+۱)$ را رسم می‌کنیم:



x	−∞		−۴		−۳		−۱		۱		۳		۴		+∞
f(۱−x)		−		−		−		−	۰	+	۰	−	۰	+	
f(x+۱)		+	۰	−	۰	+	۰	−		−		−		−	
$\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}$		−	ت	+	ت	−	ت	+	۰	−	۰	+	۰	−	

حال داریم:
بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)$ به‌صورت زیر است:

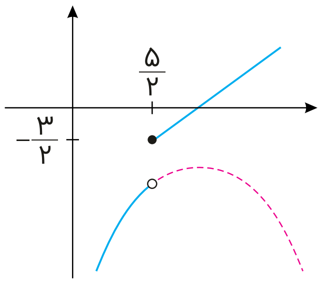
$$(-۴, -۳) \cup (-۱, ۱] \cup [۳, ۴]$$

اعداد صحیح قابل‌قبول عبارتند از:

$$x = ۰ ,\ x = ۱ ,\ x = ۳ ,\ x = ۴$$

۱۳ گزینه ۱

توابع یک‌به‌یک، وارون‌پذیرند. طول رأس تابع درجهٔ دوم باید از $x = \frac{۵}{۲}$ کمتر نباشد تا یک‌به‌یک شود.



$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b'}{۲a'} \geq \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{-a}{-۴} = \frac{a}{۴} \geq \frac{۵}{۲} \Rightarrow a \geq ۱۰$$

مقدار تابع درجهٔ دوم را در $x = \frac{۵}{۲}$ محاسبه می‌کنیم که عرض رأس سهمی و بیشترین مقدار سهمی است:

$$-۲(\frac{۵}{۲})^۲ + \frac{۵}{۲}a - ۲۱ < \frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۲}) - \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}a < ۳۲ + \frac{۵}{۴} \Rightarrow a < ۱۳/۳$$

پس بزرگ‌ترین مقدار صحیح a، ۱۳ است.

$$f^{-۱}(-۳) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -۳$$

باتوجه‌به شکل، $f(\alpha) = -۳$ در ضابطهٔ پایینی اتفاق می‌افتد، بنابراین:

$$-۲\alpha^۲ + ۱۳\alpha - ۲۱ = -۳ \Rightarrow ۲\alpha^۲ - ۱۳\alpha + ۱۸ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۴/۵ \ , \ \alpha = ۲$$

α باید از $۲/۵ = \frac{۵}{۲}$ کمتر باشد، پس $\alpha = ۲$ مورد قبول است.

۱۴ گزینه ۴

$$fog(-\frac{۱}{۳}) = f(g(-\frac{۱}{۳}))$$

$$g(-\frac{۱}{۳}) = f([-\frac{۱}{۳} - f(-\frac{۱}{۳})]) = f([-\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳}]) = f([\frac{۳}{۳}]) = f(۱) = ۲$$

$$f(-\frac{۱}{۳}) = -\frac{۱}{۳} + (-۱) = -\frac{۴}{۳}$$

$$f(g(-\frac{۱}{۳})) = f(۲) = ۴$$

۱۵ گزینه ۱

تابع f اکیداً صعودی است و دامنهٔ آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است، بنابراین داریم:

$$۲m^{۲} - ۹m - ۲ > ۰ \Rightarrow \begin{cases} m > \dfrac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴} \\ m < \dfrac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴} \end{cases} \qquad (۱)$$

$$m^{۲} - ۴m + ۴ > ۰ \Rightarrow (m-۲)^{۲} > ۰ \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{۲\} \qquad (۲)$$

$$f(۲m^{۲} - ۹m - ۲) < f(m^{۲} - ۴m + ۴)$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی اکید}} ۲m^{۲} - ۹m - ۲ < m^{۲} - ۴m + ۴$$

$$\Rightarrow m^{۲} - ۵m - ۶ < ۰ \Rightarrow (m+۱)(m-۶) < ۰ \Rightarrow m \in (-۱, ۶) \qquad (۳)$$

$$(۱) \cap (۲) \cap (۳) \Rightarrow m \in (-۱, \frac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴}) \cup (\frac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴}, ۶) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = ۵$$

در بازهٔ به‌دست‌آمده، فقط یک عدد صحیح ۵ وجود دارد.

۱۶ گزینه ۲

$$۵y - ۱۰x = ۱۲ \xrightarrow{y=۷/۲} ۵(۷/۲) - ۱۰x = ۱۲$$

$$\Rightarrow x = ۲/۴ \Rightarrow A'(۲/۴, ۷/۲) \in f^{-۱}(x) \Rightarrow (۷/۲, ۲/۴) \in f(x)$$

$$\Rightarrow f(۷/۲) = ۲/۴ \Rightarrow \sqrt{۷/۲}\sqrt{m(۷/۲) - ۱} = ۲/۴$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو}} (۷/۲)(۷/۲m - ۱) = (۲/۴)(۲/۴)$$

$$\Rightarrow ۷/۲m - ۱ = ۰/۸ \Rightarrow m = \frac{۱}{۴}$$

$$f(\frac{۴}{m}) = f(۱۶) = \sqrt{۱۶}\sqrt{(۱۶)(\frac{۱}{۴}) - ۱} = ۴\sqrt{۳}$$

۱۷ گزینه ۱

چون تابع اکیداً نزولی است، پس:

$$m^۲ - m - ۵ > -۳ + ۲m - m^۲ \Rightarrow ۲m^۲ - ۳m - ۲ > ۰$$

ریشه‌های عبارت فوق عبارت‌اند از:

$$m = \frac{۳ \pm \sqrt{۹+۱۶}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

m	$-\infty$		$\frac{-۱}{۲}$		۲		$+\infty$
P(x)		+	۰	−	۰	+	

$$p(x) > ۰ \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{۱}{۲}) \cup (۲, +\infty)$$

چون دامنه منفی است، پس:

$$m^۲ - m - ۵ < ۰ \Rightarrow m = \frac{۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۲} \xrightarrow{\sqrt{۲۱} \simeq ۴/۵} -۱/۷۵ < m < ۲/۷۵$$
$$-m^۲ + ۲m - ۳ < ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

لازم است در کل $-۱/۷۵ < m < -۰/۵$ یا $۲ < m < ۲/۷۵$ باشد، یعنی فقط $m = -۱$ قابل‌قبول است.

۱۸ گزینه ۴

نقطه به عرض ۱۰ روی خط $y = ۱۲ - x$ دارای طول زیر است:

$$۱۰ = ۱۲ - x \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow A(۲, ۱۰)$$

اگر A روی تابع وارون باشد، پس $A'(۱۰, ۲)$ روی f است، یعنی:

$$۲ = \sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۱۰m - ۱}} \Rightarrow ۴ = ۱۰ - ۲\sqrt{۱۰m - ۱} \Rightarrow \sqrt{۱۰m - ۱} = ۳$$
$$\Rightarrow ۱۰m - ۱ = ۹ \Rightarrow m = ۱$$

بنابراین:

$$f(m + ۴) = f(۵) = \sqrt{۵ - ۲\sqrt{۵ - ۱}} = \sqrt{۵ - ۴} = ۱$$

۱۹ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

$$g(۶) = f^{-1}(۶) = a \Rightarrow f(a) = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - ۲)(\sqrt{a} + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \\ \sqrt{a} = -۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۶) = ۴$$

$$g(۱۲) = f^{-1}(۱۲) = b \Rightarrow f(b) = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} + ۴)(\sqrt{b} - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = -۴ \quad \text{غ ق ق} \\ \sqrt{b} = ۳ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow g(۱۲) = ۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۶) + g(۱۲) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

۲۰ گزینه ۳

منظور سوال از قرینهٔ نمودار تابع نسبت به خط $y = x$ وارون تابع است:

$$y = ۲ + \sqrt{x - ۱} \Rightarrow y - ۲ = \sqrt{x - ۱} \Rightarrow (y - ۲)^۲ = x - ۱ \Rightarrow x = (y - ۲)^۲ + ۱$$

$$f^{-1}(x) = (x - ۲)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} (x - ۴)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} (x - ۴)^۲ + ۱ - ۳ = (x - ۴)^۲ - ۲$$

$$g(۴) = -۲$$

۲۱ گزینه ۳

نکته:

$$0 \le x - [x] < 1$$

ابتدا $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{1-2x}{x+1} = \frac{1-2x+2-2}{x+1} = \frac{-2x-2}{x+1} + \frac{1+2}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

اکنون تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -2 + \frac{3}{[x]-x+1}$$

طبق نکته داریم:

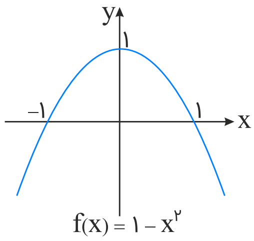
$$0 \le x - [x] < 1 \xrightarrow{\text{در } (-1) \text{ ضرب می‌کنیم}} -1 < [x] - x \le 0$$

$$\xrightarrow{+1} 0 < [x] - x + 1 \le 1 \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} 1 \le \frac{1}{[x]-x+1}$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3 \le \frac{3}{[x]-x+1} \xrightarrow{-2} 1 \le \frac{3}{[x]-x+1} - 2$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \ge 1 \Rightarrow R_{gof} = [1, +\infty)$$

۲۲ گزینه ۳

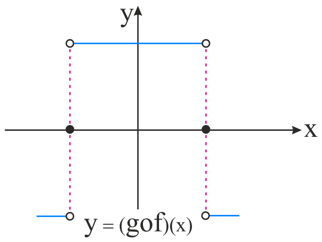


$$-۱ < x < ۱ \Rightarrow f(x) > ۰ \Rightarrow g(f(x)) = ۱$$

$$|x| > ۱ \Rightarrow f(x) < ۰ \Rightarrow g(f(x)) = -۱$$

$$\begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow g(f(x)) = ۰$$

$$(gof)(x) = \begin{cases} ۱ & ; |x| < ۱ \\ -۱ & ; |x| > ۱ \\ ۰ & ; |x| = ۱ \end{cases}$$



gof در دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ ناپیوسته است.

۲۳ گزینه ۴

$$f(x) = ۴x - x^۲$$

$$\xrightarrow[\text{منفی انتقال می‌دهیم}]{\text{۲ واحد در جهت}} f(x+۲) = ۴(x+۲) - (x+۲)^۲ = -x^۲ + ۴$$

$$f(x) = f(x+۲) \Rightarrow ۴x - x^۲ = -x^۲ + ۴ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(x) = ۴x - x^۲ \xrightarrow{x=۱} f(۱) = ۳ \Rightarrow A(۱,۳) \quad \text{نقطهٔ برخورد}$$

$$OA = \sqrt{۱^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۰}$$

۲۴ گزینه ۳

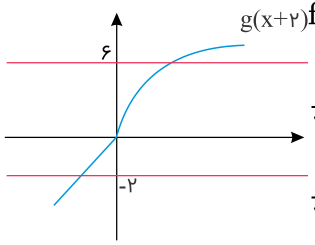
$$f(x)=y=(\sqrt{x}-۱)^{۲}\Rightarrow|\sqrt{x}-۱|=\sqrt{y}\xrightarrow{x\geq ۱}\sqrt{x}-۱=\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{y}+۱\Rightarrow x=(\sqrt{y}+۱)^{۲}$$

$$\Rightarrow g(x)=f^{-۱}(x)=(\sqrt{x}+۱)^{۲}$$

$$(gog)(۱)=g(g(۱))=g(۴)=۹$$

۲۵ گزینه ۲



$$f(g(x+۲))=۲\Rightarrow|\frac{۱}{۲}g(x+۲)-۱|=۲$$

$$\frac{۱}{۲}g(x+۲)-۱=۲\Rightarrow g(x+۲)=۶$$

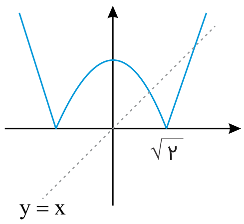
$$\frac{۱}{۲}g(x+۲)-۱=-۲\Rightarrow g(x+۲)=-۲$$

دو ریشه دارد.

۲۶ گزینه ۴

$$|x^۲ - ۲| - x > ۰ \Rightarrow |x^۲ - ۲| > x \quad (۱)$$

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که یک برخورد در بازهٔ $(۰, \sqrt{۲})$ و یک برخورد در بازهٔ $(\sqrt{۲}, +\infty)$ است:

$$۰ < x < \sqrt{۲} \ : \ |x^۲ - ۲| = ۲ - x^۲$$
$$\Rightarrow ۲ - x^۲ = x \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \xrightarrow{۰<x<\sqrt{۲}} x = ۱$$
$$x > \sqrt{۲} \ : \ |x^۲ - ۲| = x^۲ - ۲$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۲ = x \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \xrightarrow{x>\sqrt{۲}} x = ۲$$

پس جواب نامعادلهٔ (۱) که همان دامنهٔ تابع است به‌صورت زیر خواهد بود:

$$D = (-\infty, ۱) \cup (۲, +\infty)$$

۲۷ گزینه ۳

$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x} + ۳} + k \xrightarrow{g(۱)=۱} \sqrt{۱ + ۳} + k = ۱ \Rightarrow k = -۱$$
$$g(x) = \sqrt{\sqrt{x} + ۳} - ۱ \Rightarrow -g(x) = ۱ - \sqrt{\sqrt{x} + ۳} \Rightarrow -g(x + ۴) = ۱ - \sqrt{\sqrt{x + ۴} + ۳}$$
$$\xrightarrow{x=۰} y = ۱ - \sqrt{۲ + ۳} = ۱ - \sqrt{۵}$$

۲۸ گزینه ۲

$$gog(\circ) = g(g(\circ)) = g(۲) = ۳$$
$$gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲))$$

برای پیدا کردن $f^{-۱}(-۲)$، ابتدا باید ضابطهٔ تابع f را بیابیم:

$$\begin{cases} f(\circ) = -۳ \\ f(۲) = \circ \end{cases} \Rightarrow m = \frac{\circ - (-۳)}{۲ - \circ} = \frac{۳}{۲}$$

$$y - \circ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۳$$
$$f^{-۱}(-۲) = a \Rightarrow f(a) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) \ (*)$$

حال به بررسی ضابطهٔ g برای $x \leq ۱$ می‌پردازیم:

$$g(\circ) = ۲ \,,\, g(۱) = ۱ \Rightarrow m = \frac{۱ - ۲}{۱ - \circ} = -۱$$
$$y - ۱ = -۱(x - ۱) \Rightarrow y - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۲ \,;\, x \leq ۱$$
$$\Rightarrow g(\frac{۲}{۳}) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳} \ (**)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*),(**)} gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) = \frac{۴}{۳}$$

$$gof^{-۱}(-۲) \times gog(\circ) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

۲۹ گزینه ۴

داریم $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹) = f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))$. ابتدا $g^{-۱}(-۹)$ را می‌یابیم. فرض می‌کنیم $g^{-۱}(-۹) = a$ باشد، پس $g(a) = -۹$ و داریم:

$$g(x) = \frac{۳ - x}{۲} \Rightarrow g(a) = \frac{۳ - a}{۲} = -۹ \Rightarrow ۳ - a = -۱۸ \Rightarrow a = ۲۱$$

پس کافی است $f^{-۱}(۲۱)$ را حساب کنیم. فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۲۱) = b$ باشد، پس $f(b) = ۲۱$ است و داریم:

$$f(x) = x^{۲} - ۴x + ۹ \Rightarrow f(b) = b^{۲} - ۴b + ۹ = ۲۱ \Rightarrow b^{۲} - ۴b - ۱۲ = \circ$$
$$\Rightarrow (b - ۶)(b + ۲) = \circ \xrightarrow{b \geq ۲} b = ۶$$

پس $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹) = ۶$ است.

۳۰ گزینه ۱

داریم: $g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = (g^{-1}of^{-1})(۲۰)$، پس کافی است $f^{-1}(۲۰)$ را یافته و در تابع g^{-1} قرار دهیم.
فرض کنیم $f^{-1}(۲۰) = a$ باشد، پس $f(a) = ۲۰$ است و داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۶$$
$$\Rightarrow f^{-1}(۲۰) = ۱۶$$

بنابراین $g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = g^{-1}(۱۶)$. حال فرض می‌کنیم $g^{-1}(۱۶) = b$، پس $g(b) = ۱۶$ است. درنتیجه:

$$g(x) = \frac{۹x + ۶}{۱ - x} \Rightarrow g(b) = \frac{۹b + ۶}{۱ - b} = ۱۶ \Rightarrow ۹b + ۶ = ۱۶ - ۱۶b$$
$$\Rightarrow ۲۵b = ۱۰ \Rightarrow b = \frac{۱۰}{۲۵} = \frac{۲}{۵}$$
$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = g^{-1}(۱۶) = \frac{۲}{۵}$$

۳۱ گزینه ۴

$$g(x) = x^{۳} + x \quad , \quad f(x) = \frac{۲}{۵}x - ۴$$

اول $f^{-1}(۸)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}x - ۴ = ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}x = ۱۲ \Rightarrow x = ۳۰ \Rightarrow f^{-1}(۸) = ۳۰$$

حال داریم:

$$g^{-1}(f^{-1}(۸)) = g^{-1}(۳۰)$$
$$g(x) = ۳۰ \Rightarrow x^{۳} + x = ۳۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow g^{-1}(۳۰) = ۳$$

۳۲ گزینه ۱

اگر نمودار $y = x^{۲} - x - ۳$ را ۲ واحد به‌طرف xهای منفی انتقال دهیم، $f(x) = (x + ۲)^{۲} - (x + ۲) - ۳$ به دست می‌آید. حال $f(x)$ را ۹ واحد به‌طرف yهای منفی منتقل می‌کنیم، $g(x) = f(x) - ۹$ به دست می‌آید.

$$g(x) = x^{۲} + ۴x + ۴ - x - ۲ - ۳ - ۹ = x^{۲} + ۳x - ۱۰$$

حال $g(x)$ را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^{۲} + ۳x - ۱۰ < ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۵) < ۰ \Rightarrow -۵ < x < ۲$$

۳۳ گزینه ۱

راه‌حل اول:

اگر تابع $y=-x^{۲}+۲x+۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم $f(x)=-(x-۳)^{۲}+۲(x-۳)+۵$ تبدیل می‌شود و اگر تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت yهای منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطهٔ $g(x)=f(x)-۲$ خواهد بود.

$$g(x)=f(x)-۲=-(x-۳)^{۲}+۲(x-۳)+۵-۲=-\left(x^{۲}-۶x+۹\right)+۲x-۶+۵-۲$$
$$\Rightarrow g(x)=-x^{۲}+۶x-۹+۲x-۳=-x^{۲}+۸x-۱۲$$

حال باید $g(x)$ بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y=x$ قرار گیرد.

$$g(x)>x\Rightarrow -x^{۲}+۸x-۱۲>x$$
$$\Rightarrow x^{۲}-۷x+۱۲<۰\Rightarrow \underbrace{(x-۳)(x-۴)}_{h(x)}<۰\quad (*)$$

x	$-\infty$		۳		۴		$+\infty$
h(x)		+	۰	−	۰	+	

$$h(x)<۰\Rightarrow x\in(۳,۴)$$

راه‌حل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در (*) قرار دهیم $x=۴$ ، داریم: $۰<۰$ که غیرقابل‌قبول است، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

۳۴ گزینه ۳

$$g(x)=\sqrt{۴-(x-k+۲)}+k=\sqrt{-x+k+۲}+k$$

تابع $g(x)$ وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند و همچنین با فرض اینکه نقطهٔ برخورد تابع و وارونش بر روی خط $y=x$ قرار دارد، بنابراین $g(۱)=۱$. حال داریم:

$$A(۱,۱)\in g(x)\Rightarrow \sqrt{۱+k}+k=۱\Rightarrow k=۰$$
$$h(x)=y-۱\Rightarrow \sqrt{-x+۲}-۱=۰\Rightarrow x=۱$$

۳۵ گزینه ۱

از داخلی‌ترین تابع شروع می‌کنیم:

$$\mathrm{fofof}(\sqrt{۲}) = f(f(f(\sqrt{۲})))$$
$$f(\sqrt{۲}) = \frac{(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})}{۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$
$$f(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) = \frac{(\sqrt{۲})(\frac{۱}{\sqrt{۲}})}{۳(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) - \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$
$$f(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \mathrm{fofof}(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

۳۶ گزینه ۴

$$x^{۲}\sqrt{x^{۲}} = x^{۲}|x| = \begin{cases} x^{۳} & ; x \geq ۰ \quad \text{اکیداً صعودی} \\ -x^{۳} & ; x < ۰ \quad \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

پس باید وارون تابع ضابطهٔ پایینی را حساب کنیم:

$$y = -x^{۳} \Rightarrow x^{۳} = -y \Rightarrow x = \sqrt[۳]{-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\sqrt[۳]{x}$$
$$D_f = R_{f^{-۱}} \,,\, D_{f^{-۱}} = R_f$$
$$R_f = [۰\,, +\infty] = D_{f^{-۱}} \Rightarrow D_{f^{-۱}} : x \geq ۰$$

۳۷ گزینه ۴

جدول تعیین علامت g به صورت زیر است.

x		۰		۳	
$x^{۲}$	+	۰	+		+
$f(x)$	+		+	۰	−
$\sqrt{x^{۲}f(x)}$	+		+		−

$$\Rightarrow D_{\sqrt{x^{۲}f(x)}} = (-\infty, ۳]$$

$$x = ۰, ۱, ۲, ۳$$

اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ پذیرفته هستند.

۳۸ گزینه ۳

تابع داده‌شده اکیداً صعودی است و وارون خود را روی خط $y = x$ ملاقات می‌کند. بنابراین:

$$x^{۳} + ۳x - ۱۲ = x \Rightarrow x^{۳} + ۲x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

حقیقتاً ریشهٔ $x = ۲$ را حدس زدیم!

$$x^{۳} + ۳x - ۱۲ = (x - ۲)(x^{۲} + ۲x + ۶)$$

نقطهٔ $(۲ , ۲)$ محل تقاطع است. فاصله تا مبدأ برابر است با:

$$\sqrt{(۲ - ۰)^{۲} + (۲ - ۰)^{۲}} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

۳۹ گزینه ۱

تابع f اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب $x^{۳}$ منفی باشد:

$$-۹ + k^{۲} < ۰ \Rightarrow k^{۲} < ۹ \Rightarrow -۳ < k < ۳$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = ۰, \pm ۱, \pm ۲ \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } k = ۰$$

۴۰ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(۲x) = ۵x^{۲} + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x) = ۵(\frac{x}{۲})^{۲} + ۱۱ = \frac{۵}{۴}x^{۲} + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x - ۷) = \frac{۵}{۴}(x - ۷)^{۲} + ۱۱ \Rightarrow \text{حداقل } g(x - ۷) = ۱۱$$

راه‌حل دوم: برای رسیدن از ضابطهٔ $g(۲x)$ به $g(x - ۷)$، تنها دامنه تغییر می‌کند و برد ثابت می‌ماند. بنابراین کمترین مقدار $g(x - ۷)$ برابر با کمترین مقدار $g(۲x) = ۵x^{۲} + ۱۱$ است. پس برابر با ۱۱ می‌باشد.

۴۱ گزینه ۴

$$\frac{1}{x}\xrightarrow[\text{راست}]{\text{۱ واحد به سمت}}\frac{1}{x-1}\xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}}\frac{-1}{x-1}\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۲ واحد رو به}}\frac{-1}{x-1}-2$$

حالا : $\frac{1}{x}=\frac{-1}{x-1}-2\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=-2\Rightarrow\frac{x-1+x}{x^2-x}=-2$

$$-2x^2+2x=2x-1\Rightarrow 2x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه برخورد}}\begin{cases}(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})\\(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})\end{cases}\xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}}\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}-0)^2+(\sqrt{2}-0)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۴۲ گزینه ۱

$$2^{x+3+|x+3|}-2=0\Rightarrow 2^{x+3+|x+3|}=2$$

$$\Rightarrow x+3+|x+3|=1\Rightarrow |x+3|=-x-2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+3=-x-2\Rightarrow x=\frac{-5}{2}\\x+3=x+2\Rightarrow \text{فاقد جواب}\end{cases}$$

۴۳ گزینه ۱

$$f^{-1}=\{(2,1),(5,2),(4,3),(6,4)\}$$
$$g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l}2\xrightarrow{f^{-1}}1\xrightarrow{g}\times\\5\xrightarrow{f^{-1}}2\xrightarrow{g}3\\4\xrightarrow{f^{-1}}3\xrightarrow{g}1\\6\xrightarrow{f^{-1}}4\xrightarrow{g}2\end{array}\right\}\Rightarrow gof^{-1}=\{(5,3),(4,1),(6,2)\}$$

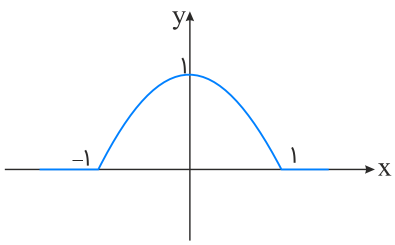
حال اگر فرض کنیم $h=gof^{-1}$ باشد، خواستهٔ مسئله $\frac{g}{h}$ است که باید دامنه‌های مشترک را در نظر بگیریم و بردها را بر هم تقسیم کنیم:

$$D_h\cap D_g=\{5,4\}$$

$$\frac{g}{h}=\left\{(5,\frac{6}{3}),(4,\frac{2}{1})\right\}=\{(5,2),(4,2)\}$$

$$(gof)(x) = g(f(x))$$
$$x < -1 \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow (gof)(x) = g(-1) = 0$$
$$-1 < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow (gof)(x) = g(x) = 1 - x^2$$
$$x > 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow (gof)(x) = g(1) = 0$$

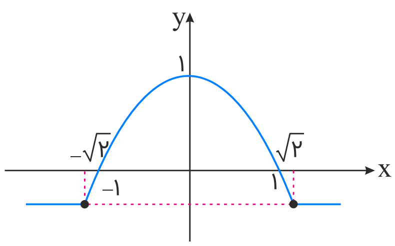
نمودار gof به صورت زیر است:



$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(1 - x^2) = \begin{cases} -1; \ 1 - x^2 < -1 \\ 1 - x^2; \ -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ 1; \ 1 - x^2 > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = \begin{cases} -1; \ |x| > \sqrt{2} \\ 1 - x^2; \ |x| \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

نمودار fog به‌صورت زیر است:



ماکزیمم در نقطه‌ای به طول $\sqrt{2}$ رخ می‌دهد:

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow \max(gof - fog) = 0 - (-1) = 1$$

۴۵ گزینه ۱

$$y = x^۲ - ۲x \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\left(x^۲ - ۲x\right) = -x^۲ + ۲x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور y ها}]{\text{۱۶ واحد انتقال در جهت}} y_۱ = -x^۲ + ۲x + ۱۶$$

حال معادلهٔ جدید را با معادلهٔ قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطهٔ برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x = -x^۲ + ۲x + ۱۶ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ & \text{ق.ق} \\ x = -۲ & (x > ۱ \text{ غ.ق.ق زیرا}) \end{cases}$$

$$x = ۴ \Rightarrow y = ۸ \Rightarrow A(۴, ۸)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{۱۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۶(۱+۴)} = ۴\sqrt{۵}$$

۴۶ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-۱}(x)$$

$$g(۳) = f^{-۱}(۳) = a \Rightarrow f(a) = ۳ \Rightarrow a + ۲\sqrt{a} = ۳ \Rightarrow a + ۲\sqrt{a} - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - ۱)(\sqrt{a} + ۳) = ۰ \begin{cases} \sqrt{a} = ۱ \Rightarrow a = ۱ \\ \sqrt{a} = -۳ & \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۳) = ۱$$

$$g(۱۵) = f^{-۱}(۱۵) = b \Rightarrow f(b) = ۱۵ \Rightarrow b + ۲\sqrt{b} = ۱۵ \Rightarrow b + ۲\sqrt{b} - ۱۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} - ۳)(\sqrt{b} + ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = ۳ \Rightarrow b = ۹ \\ \sqrt{b} = -۵ & \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۱۵) = ۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۳) + g(۱۵) = ۱ + ۹ = ۱۰$$

۴۷ گزینه ۴

$$g^{-1} = \{(۳,۲),(۲,۴),(۶,۵),(۱,۳)\}$$
$$f = \{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$

حال $g^{-1}of$ را حساب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} ۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g^{-1}} ۴ \\ ۲ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ ۳ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ ۴ \xrightarrow{f} ۶ \xrightarrow{g^{-1}} ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow g^{-1}of = \{(۱,۴),(۴,۵)\}$$

فرض می‌کنیم که $h = g^{-1}of$ باشد. خواستهٔ مسئله $h - f$ است که باید در دامنهٔ مشترک، عرض‌ها را از هم کم کنیم.

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{۱,۴\}$$
$$h - f = \{(۱,۴-۲),(۴,۵-۶)\} = \{(۱,۲),(۴,-۱)\}$$

پس برد تابع $h - f$ برابر $\{۲,-۱\}$ است.

۴۸ گزینه ۴

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = y \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = y + ۴$$
$$\Rightarrow (x-۱)^۲ = y + ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۱| = \sqrt{y+۴}$$
$$\xrightarrow{x \geq ۱} x - ۱ = \sqrt{y+۴} \Rightarrow x = \sqrt{y+۴} + ۱ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x+۴} + ۱$$

حال f^{-1} را با g قطع می‌دهیم:

$$\sqrt{x+۴} + ۱ = \frac{x-۹}{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{x+۴} = x - ۱۱ \quad (۱)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها به راحتی معلوم می‌شود که $x = ۲۱$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

۴۹ گزینه ۴

فرض می‌کنیم $\sqrt[۳]{۹\cos^۲(x) - ۱} = A$ باشد.

$$۰ \leq \cos^۲ x \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq ۹\cos^۲(x) - ۱ \leq ۸ \Rightarrow -۱ \leq A \leq ۲$$

تابع موردنظر به صورت $g(A) = ۲^A - ۲^{-A}$ است. هر دو تابع ۲^A و -۲^{-A} صعودی اکیدند، پس مجموع آن‌ها صعودی اکید خواهد بود.

$$b = g(۲) = ۲^۲ - ۲^{-۲} = ۴ - \frac{۱}{۴} = \frac{۱۵}{۴}$$
$$a = g(-۱) = ۲^{-۱} - ۲^۱ = \frac{۱}{۲} - ۲ = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow b - a = \frac{۱۵}{۴} + \frac{۳}{۲} = \frac{۲۱}{۴}$$

۵۰ گزینه ۱

به راحتی می‌توانیم $(fof)og$ را بسازیم، کافی است ورودی و خروجی‌ها را کنترل کنیم.

$$(x > ۰) \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$
$$(x = ۰) \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$
$$(x < ۰) \xrightarrow{g} -۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$

در واقع $((fof)og)(x) = ۰$ است و همواره پیوسته خواهد بود.

۵۱ گزینه ۳

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{مثبت محور x ها}]{\text{۱۲ واحد در جهت}} y = \sqrt{x - ۱۲} \xrightarrow[\text{مثبت محور y ها}]{\text{۲ واحد در جهت}} y = \sqrt{x - ۱۲} + ۲$$

حال منحنی حاصل را با $f(x) = \sqrt{x}$ برابر قرار می‌دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x - ۱۲} + ۲ = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x - ۱۲} = \sqrt{x} - ۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان۲}} \cancel{x} - ۱۲ = \cancel{x} + ۴ - ۴\sqrt{x} \Rightarrow ۴\sqrt{x} = ۱۶ \Rightarrow x = ۱۶$$

$x = ۱۶$ را در $f(x) = \sqrt{x}$ جایگذاری می‌کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(۱۶) = \sqrt{۱۶} = ۴ \quad \Rightarrow A(۱۶, ۴)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{۱۶^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۱۶(۱۶ + ۱)} = ۴\sqrt{۱۷}$$

۵۲ گزینه ۴

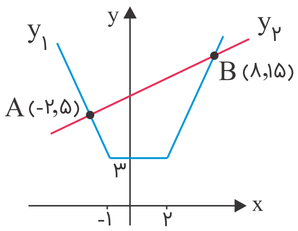
$$y_۱ = |x-۲| + |x+۱| \quad , \quad y_۲ = x+۷$$

$$y_۱ = \begin{cases} -x+۲-x-۱ & ; x \leq -۱ \\ -x+۲+x+۱ & ; -۱ < x \leq ۲ \\ x-۲+x+۱ & ; x > ۲ \end{cases} \Rightarrow y_۱ = \begin{cases} -۲x+۱ & ; x \leq -۱ \\ ۳ & ; -۱ < x \leq ۲ \\ ۲x-۱ & ; x > ۲ \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ را رسم می‌کنیم:

$$x > ۲ : ۲x-۱ = x+۷ \Rightarrow x = ۸$$

$$x < -۱ : -۲x+۱ = x+۷ \Rightarrow x = -۲$$



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۸-(-۲))^۲ + (۱۵-۵)^۲}$$
$$= \sqrt{۱۰۰+۱۰۰} = ۱۰\sqrt{۲}$$

۵۳ گزینه ۲

$$f(x) = (x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x-۱)^۲ = -(x+۱)^۲$$
$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} -(x+۱)^۲ + ۴$$

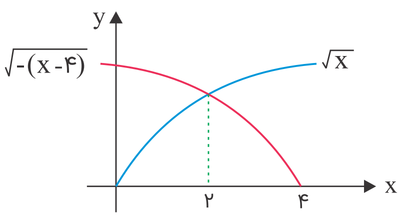
حال باید طول نقطهٔ تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$(x-۱)^۲ = -(x+۱)^۲ + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = -(x^۲ + ۲x + ۱) + ۴$$
$$\Rightarrow ۲x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \pm ۱$$

۵۴ گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}}\sqrt{-x}\xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}}\sqrt{-(x-۴)}$$

حال دو نمودار را رسم می‌کنیم:



$$\sqrt{x}=\sqrt{-(x-۴)}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}|x|=|-(x-۴)|=|x-۴|$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=x-۴\Rightarrow ۰=-۴ & \times\\ x=-x+۴\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲ & \text{ق.ق}\end{cases}$$

بنابراین $x=۲$ محور تقارن دو نمودار است.

۵۵ گزینه ۲

نکته: $۰\le x-[x]<۱$

ابتدا تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=-x^۲+۴x=-x^۲+۴x-۴+۴$$
$$=-(x^۲-۴x+۴)+۴=-(x-۲)^۲+۴$$

اکنون تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

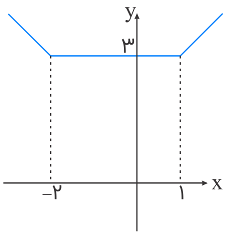
$$g(f(x))=-(۲x-[۲x]-۲)^۲+۴$$

طبق نکته داریم:

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱\xrightarrow{-۲}-۲\le ۲x-[۲x]-۲<-۱$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}۱<(۲x-[۲x]-۲)^۲\le ۴$$
$$\xrightarrow{\times(-۱)}-۴\le-(۲x-[۲x]-۲)^۲<-۱$$
$$\xrightarrow{+۴}۰\le-(۲x-[۲x]-۲)^۲+۴<۳$$
$$\Rightarrow ۰\le gof(x)<۳\Rightarrow R_{gof}=[۰,۳)$$

۵۶ گزینه ۱

$$f(x) = |x+۲| + |x-۱| = \begin{cases} ۲x+۱ & ; x > ۱ \\ ۳ & ; -۲ \le x \le ۱ \\ -۲x-۱ & ; x < -۲ \end{cases}$$



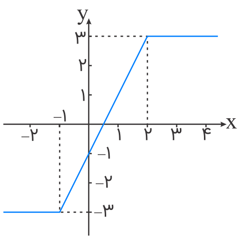
باتوجه‌به نمودار تابع گلدانی $y = |x+۲| + |x-۱|$، در فاصلهٔ $(-\infty, -۲)$ تابع نزولی اکید است.

۵۷ گزینه ۳

x		-۱		۲	
x+۱	-	o	+		+
x-۲	-		-	o	+

$$x \le -۱ : f(x) = -x-۱+x-۲ = -۳$$
$$-۱ < x \le ۲ : f(x) = x+۱+x-۲ = ۲x-۱$$
$$x > ۲ : f(x) = x+۱-x+۲ = ۳$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصلهٔ $(-۱, ۲)$ اکیداً صعودی است.

۵۸ گزینه ۱

$$T_{۱+\sin ax} = \frac{۷\pi}{۴} - \frac{۳\pi}{۴} = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = ۲$$

$$y = ۳\cos(\frac{x}{a}) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{a}|} = ۲\pi|a| = ۴\pi$$

۵۹ گزینه ۲

$$\sin ۲x - ۴\sin^۲ x\cos x = ۰ \Rightarrow \sin ۲x - ۲\sin x\sin ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow \sin ۲x(۱-۲\sin x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{۲} \\ \sin x = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \dfrac{۵\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

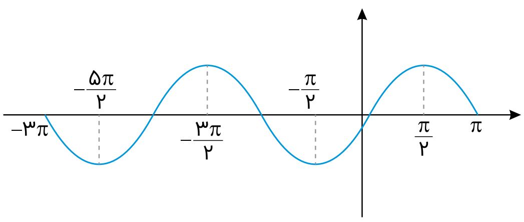
جواب‌هایی که در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ قرار دارند عبارتند از: $\{۰, \frac{\pi}{۲}, \frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\}$

۶۰ گزینه ۴

به‌جای $\cos ۲x$ عبارت برحسب $\sin x$ را قرار می‌دهیم:

$$۱ - ۲\sin^۲ x + \sin^۲ x = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x = ۱$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm ۱ \Rightarrow x = -\frac{۵\pi}{۲}, -\frac{۳\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}$$



بنابراین:

$$S = -\frac{۵\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} = -۴\pi$$

۶۱ گزینه ۳

به‌جای $\sin^۴\alpha$ و $\cos^۴\alpha$ به‌ترتیب زیر قرار می‌دهیم.

$$\frac{(۱-\cos^۲\alpha)^۲ + ۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha} - \frac{(۱-\sin^۲\alpha)^۲ + ۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$$

$$= \frac{۱+\cos^۴\alpha - ۲\cos^۲\alpha + ۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha} - \frac{۱+\sin^۴\alpha - ۲\sin^۲\alpha + ۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$$

$$= \frac{(۱+\cos^۲\alpha)^۲}{۱+\cos^۲\alpha} - \frac{(۱+\sin^۲\alpha)^۲}{۱+\sin^۲\alpha} = ۱+\cos^۲\alpha - ۱ - \sin^۲\alpha = \cos ۲\alpha$$

البته دقت شود از روش عددگذاری می‌توانستیم به‌جای xها عدد مثلاً $\frac{\pi}{۲}$ را قرار دهیم و سریع‌تر به جواب برسیم.

۶۲ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$x = ۳ - ۲y \Rightarrow ۶ - ۴y + ay = ۶ \Rightarrow y(a - ۴) = ۰$$

$$\begin{cases} y = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ a = ۴ \quad \times \end{cases} \Rightarrow A(۳, ۰)$$

$$\begin{cases} y = -x \\ x + ۲y = ۳ \end{cases} \Rightarrow B(-۳, ۳) \quad , \quad \begin{cases} y = -x \\ ۲x + ay = ۶ \end{cases} \Rightarrow C(\frac{۶}{۲ - a}, \frac{۶}{a - ۲})$$

مرکز دایره : $O(\alpha, -\alpha) \Rightarrow |\overline{OA}| = |\overline{OB}|$

$$\Rightarrow ۲(\alpha + ۳)^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲ \Rightarrow \alpha = -\frac{۱}{۲}$$

$$r^۲ = |OA| = (-\frac{۱}{۲} - ۳)^۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۲}$$

$$\Rightarrow |OC| = (-\frac{۱}{۲} - \frac{۶}{۲ - a})^۲ + (\frac{۱}{۲} - \frac{۶}{a - ۲})^۲ = \frac{۲۵}{۲}$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۳a - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \quad \checkmark \\ a = ۴ \quad \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(۲, -۲)$$

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$$

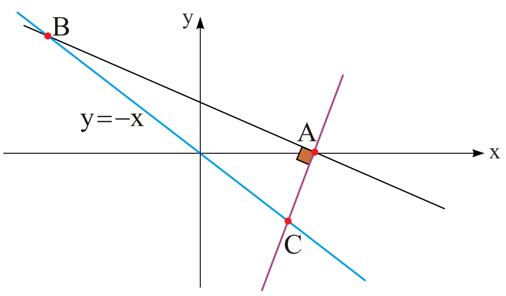
بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه است و زاویهٔ A قائمه می‌باشد.

$$\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} - \hat{C} = ۹۰^\circ - \hat{C} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = ۹۰^\circ - ۲\hat{C}$$

$$\cot(B - C) = \cot(۹۰^\circ - ۲C) = \tan(۲C)$$

$$= \frac{۲\tan C}{۱ - \tan^۲ C} = \frac{۲(۳)}{۱ - (۳)^۲} = \frac{۶}{-۸} = -\frac{۳}{۴}$$

راه‌حل دوم: چون مرکز روی خط $y = -x$ است و دو خط دیگر با این خط متقاطع هستند، پس A زاویهٔ محاطی رو به قطر و درنتیجه ۹۰ درجه است. چون A قائمهٔ است دو خط داده‌شده بر هم عمودند:



$$m = -\frac{۱}{۲} \,,\, m' = \frac{-۲}{a} \,,\, mm' = -۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

$$\begin{cases} x + ۲y = ۳ \\ ۲x - y = ۶ \end{cases} \Rightarrow A(۳, ۰)$$

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ y+x=0 \end{cases} \Rightarrow B(-3,3)$$

$$\begin{cases} 2x-y=6 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow C(2,-2)$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{1}{3} \ , \ \tan C = 3$$

$$\tan(B-C) = \frac{\tan B - \tan C}{1+\tan B \tan C} = \frac{\frac{1}{3}-3}{1+\frac{1}{3}\times 3} = \frac{-\frac{8}{3}}{2} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \cot(B-C) = -\frac{3}{4}$$

۶۳ گزینه ۱

$$T = \frac{9\pi}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5} \ , \ T = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = \pm 5$$

اگر $b=5$ باشد:

$$x = \frac{\pi}{4} : y = a\cos^2(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + c \Rightarrow a + c = 1$$

$$x = \frac{7\pi}{20} : y = a\cos^2(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + c \Rightarrow 0 + c = -2 \Rightarrow c = -2$$

$$\xrightarrow{c=-2} a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$$

$$a.b = 3 \times 5 = 15$$

اگر $b=-5$ باشد:

$$x = \frac{\pi}{4} : y = a\cos^2(-\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + c \Rightarrow c = 1$$

$$x = \frac{7\pi}{20} : y = a\cos^2(-\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + c \Rightarrow a + c = -2 \Rightarrow a = -3$$

$$a.b = 3 \times 5 = 15$$

گزینه ۲

نکته: از روابط مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$۱)\cos^۲x=\frac{۱}{۱+\tan^۲x} \qquad ۲)\cos^۲x=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲x \qquad ۳)\ \cos(x-\frac{۳\pi}{۲})=-\sin(x)$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۱+\tan^۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})}\xrightarrow{(۱)}f(x)=\frac{۲}{a}-b\cos^۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})$$
$$\xrightarrow{(۲)}f(x)=\frac{۲}{a}-b(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲(cx-\frac{۳\pi}{۴}))\xrightarrow{(۳)}f(x)=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}-\frac{b}{۲}(-\sin ۲cx)$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{b}{۲}\sin(۲cx)+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}$$

باتوجه‌به نمودار، تابع در همسایگی $x=۰$ صعودی است، بنابراین b و c باید هم‌علامت باشند.

فرض کنیم $b,c>۰$:

باتوجه‌به نمودار داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|۲c|}=۹\pi\Rightarrow|c|=\frac{۱}{۹}\xrightarrow{c>۰}c=\frac{۱}{۹}$$
$$y_{max}=|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶\xrightarrow{b>۰}a=\frac{۱}{۳}\quad(۱)$$
$$y_{min}=-|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰\xrightarrow{b>۰}b=۶\quad(۲)$$

پس تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x)=۳+۳\sin(\frac{۲}{۹}x)$$
$$f(\frac{۳\pi}{۴})=۳+۳\sin(\frac{۲}{۹}\times\frac{۳\pi}{۴})=۳+۳\sin(\frac{\pi}{۶})=۴/۵$$

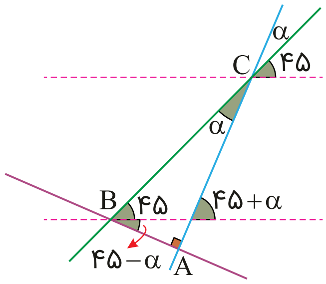
اگر $b,c<۰$:

$$T=\frac{۲\pi}{|۲c|}=۹\pi\Rightarrow|c|=\frac{۱}{۹}\xrightarrow{c<۰}c=-\frac{۱}{۹}$$
$$y_{max}=|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶\xrightarrow{b<۰}-\frac{b}{۲}+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶\Rightarrow -b+\frac{۲}{a}=۶$$
$$y_{min}=-|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰\xrightarrow{b<۰}\frac{b}{۲}+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰\Rightarrow\frac{۲}{a}=۰\ \text{غیر ممکن}$$

بنابراین این حالت اتفاق نمی‌افتد.

۶۵ گزینه ۲

چون مرکز دایره روی خط $y = x$ و در واقع روی BC قرار دارد و دایره از هر سه نقطه A و B و C باید بگذرد پس A هم روی محیط دایره و زاویه A، زاویه محاطی رو به قطر است؛ درنتیجه $\widehat{A} = ۹۰^\circ$.



اگر $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ پس دو خط $y = -\frac{۱}{۳}x - ۳$ و $y = ax - ۳$ بر هم عمودند؛ درنتیجه $a = ۳$

$$\tan(۴۵ + \alpha) = ۳ \Rightarrow \tan(۹۰ + ۲\alpha) = \frac{۲ \times ۳}{۱ + ۳^۲} = \frac{-۳}{۴}$$

$$\Rightarrow -\cot ۲\alpha = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow \cot ۲\alpha = \frac{۳}{۴}$$

$$\widehat{B} - \widehat{C} = ۹۰ - \alpha - \alpha = ۹۰ - ۲\alpha \Rightarrow \tan(B - C) = \cot ۲\alpha = \frac{۳}{۴}$$

۶۶ گزینه ۴

$$\sin(\frac{\pi + ۴x}{۲}) = \sin(\frac{\pi}{۲} + ۲x) = \cos ۲x$$

$$\cos(\frac{\pi + ۸x}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۴x) = -\sin ۴x$$

$$\frac{۱}{\cos ۲x} - \frac{۱}{\sin ۴x} = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \sin ۴x$$

$$\Rightarrow ۲\sin ۲x \cos ۲x = \cos ۲x \xrightarrow{\cos ۲x \neq ۰} ۲\sin ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{[۰,\pi]} ۲x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۱۲}, \frac{۵\pi}{۱۲}$$

$$\alpha = \frac{۵\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \tan ۲\alpha = \tan \frac{۲\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

۶۷ گزینه ۳

$$\sin^۲(\frac{\pi}{۴} - bx) = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos(۲(\frac{\pi}{۴} - bx)))$$
$$= \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲bx) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\sin(۲bx)$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{۲} - \frac{a}{۲}\sin(۲bx) + c \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{max} = \frac{a}{۲} + c + |-\frac{a}{۲}| = ۱ \\ y_{min} = \frac{a}{۲} + c - |-\frac{a}{۲}| = -۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲|\frac{a}{۲}| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

$$T = \frac{۱۵\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۴} = \frac{۲۰\pi}{۴} = ۵\pi$$
$$T = \frac{۲\pi}{|۲b|} = ۵\pi \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۵} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۵}$$

$$ab = \pm\frac{۳}{۵} \xrightarrow{ab<۰} ab = -\frac{۳}{۵} = -۰/۶$$

نکته: با توجه به نمودار مشخص است که تابع در همسایگی $x = ۰$ صعودی است، بنابراین در $(*)$ باید $-a$ و b هم‌علامت باشند، یعنی $(-a)(b) > ۰$، پس $ab < ۰$.

۶۸ گزینه ۲

$$\cot(\frac{\pi + ۴x}{۲}) = \cos(\frac{\pi + ۸x}{۲})$$

$$\cot(\frac{\pi + ۴x}{۲}) = \cot(\frac{\pi}{۲} + ۲x) = -\tan ۲x$$

$$\cos(\frac{\pi + ۸x}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۴x) = -\sin ۴x$$

$$\Rightarrow -\tan ۲x = -\sin ۴x \Rightarrow \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} = ۲\sin ۲x \cos ۲x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin ۲x(۱ - ۲\cos^۲ ۲x)}{\cos ۲x} = ۰ \Rightarrow \sin ۲x = ۰\,,\ \cos^۲ ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۲x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} : \left\{\begin{array}{l} \cos ۲x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{در بازهٔ موردنظر نیست} \\ \cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۲x = \pm\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{۸} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۸} + \frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\cos(۳\alpha) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}) = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

۶۹ گزینه ۴

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + \frac{۱}{۲}b\sin(۲cx - \frac{۳\pi}{۲}) = a - \frac{b}{۲}\sin(\frac{۳\pi}{۲} - ۲cx)$$
$$\Rightarrow f(x) = a + \frac{b}{۲}\cos(۲cx)$$

حال باتوجه‌به مقادیر max و min:

$$\begin{matrix} y_{max} = ۳ \Rightarrow a + |\frac{b}{۲}| = ۳ \\ y_{min} = -۱ \Rightarrow a - |\frac{b}{۲}| = -۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱ \\ |\frac{b}{۲}| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۴ \Rightarrow b = -۴ \end{cases}$$

نمودار بعد از $x = ۰$ صعودی است، پس b منفی می‌باشد.

دورهٔ تناوب شکل برابر $T = \pi$ است، پس:

$$T = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|۲c|} = \pi \Rightarrow c = \pm ۱$$

ضابطهٔ تابع عبارت است از:

$$f(x) = ۱ - ۲\cos ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$

مقادیر قابل‌قبول $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ هستند که:

$$\frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳}$$

۷۰ گزینه ۴

$$\cos(\frac{۱۶\pi}{۸} + \frac{\pi}{۸} + x)\cos(\frac{۳\pi}{۸} - x) = \frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۸} + x)\cos(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸} - x) = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۸} + x)\sin(\frac{\pi}{۸} + x) = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin(۲x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\begin{matrix} ۲x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲۴} \Rightarrow x_۱ = -\frac{\pi}{۲۴} \\ ۲x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۷\pi}{۲۴} \Rightarrow x_۲ = \frac{۷\pi}{۲۴} \end{matrix} \Rightarrow S = \frac{۷\pi}{۲۴} - \frac{\pi}{۲۴} = \frac{\pi}{۴}$$

۷۱ گزینه ۲

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = 1 + 2\sin x + \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x = 1 + 2\sin x + \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0\,,\ \pi\,,\ 2\pi\,,\ \ldots \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

کمترین فاصلهٔ بین جواب‌ها π واحد است.

نکته: ریشه‌های مخرج غیر قابل قبول است.

۷۲ گزینه ۳

اولاً توجه کنید که باتوجه‌به نمودار، b و c هم‌علامت هستند. حال داریم:

$$T = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow c = 1$$

$$y_{max} = 1 \Rightarrow |b| + a = 1 \xrightarrow{b>0} b + a = 1$$

$$O\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow 0 = a + b\cos(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow a = -1,\ b = 2$$

$$b(c-a) = 2(1+1) = 4$$

۷۳ گزینه ۳

تابع را کمی ساده می‌کنیم. از رابطهٔ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$y = 1 + a\sin bx\cos bx = 1 + \frac{a}{2}\sin 2bx$$

باتوجه‌به نمودار داده‌شده، ماکزیمم تابع $\frac{3}{2}$، مینیمم تابع $\frac{1}{2}$ و دورهٔ تناوب $\frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$ است. پس:

$$\begin{cases} 1 + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \\ 1 - \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a|}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

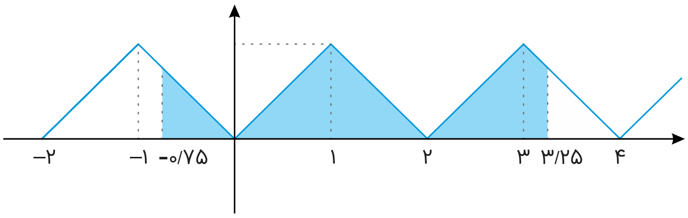
$$\frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1$$

باتوجه‌به اینکه تابع داده‌شده در سمت راست محور y صعودی است، پس $\frac{a}{2}$ و $2b$ باید هم‌علامت باشند. پس مسئله دو دسته جواب $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ یا $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$ دارد، درنتیجه $a + b = 2$ یا $a + b = -2$ صحیح است.

۷۴

گزینه ۱

نمودار تابع به‌صورت زیر خواهد بود:



$$S = ۲ \times \frac{۱ \times ۲}{۲} = ۲$$

گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\overset{\triangle}{AHC} : \cos \hat{C} = \frac{HC}{۶} \Rightarrow HC = ۶\cos ۷۵^\circ$$

$$\overset{\triangle}{OHC} : \tan ۱۵^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = ۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ$$

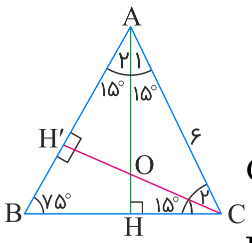
$$S_{OHC} = \frac{۱}{۲} \times (۶\cos ۷۵^\circ)(۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ) = ۱۸\cos^{۲} ۷۵^\circ(۲-\sqrt{۳})$$

$$= ۱۸ \times \frac{۱+\cos ۱۵۰^\circ}{۲}(۲-\sqrt{۳}) = ۹(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(۲-\sqrt{۳})$$

$$= \frac{۹}{۲}(۲-\sqrt{۳})^{۲} = \frac{۹}{۲}(۷-۴\sqrt{۳}) = \frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$$

راه‌حل دوم:

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $AB = AC$ و داریم:



$$\hat{C} = \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۵^\circ$$

$$\overset{\triangle}{BH'C} : \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۱۵^\circ \Rightarrow \overset{\triangle}{OHC} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{OHC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHC}}} = \left(\frac{HC}{AH}\right)^{۲} = \tan^{۲} ۱۵^\circ$$

$$= \left(۲-\sqrt{۳}\right)^{۲} = ۷-۴\sqrt{۳} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OHC}} = \left(۷-۴\sqrt{۳}\right) S_{\overset{\triangle}{AHC}} \quad (*)$$

$$S_{\overset{\triangle}{AHC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\left(\underbrace{AB}_{۶}\right)\left(\underbrace{AC}_{۶}\right)\left(\underbrace{\sin \hat{A}}_{\frac{۱}{۲}}\right)\right) = \frac{۹}{۲}$$

$$(*) \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OHC}} = \left(۷-۴\sqrt{۳}\right) \times \frac{۹}{۲} = \frac{۹\left(۷-۴\sqrt{۳}\right)}{۲}$$

تذکر: برای یافتن مقدار تانژانت می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد:

$$۱)\ \tan ۱۵^\circ = \tan(۶۰^\circ - ۴۵^\circ) = \frac{\tan ۶۰^\circ - \tan ۴۵^\circ}{۱+\tan ۶۰^\circ \tan ۴۵^\circ} = \frac{\sqrt{۳}-۱}{۱+\sqrt{۳}} = ۲-\sqrt{۳}$$

$$۲)\ \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲} \quad (\cos ۲x = ۲\cos^{۲} x - ۱)$$

$$\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲} \quad (\sin ۲x = ۲\sin x . \cos x)$$

$$\Rightarrow \tan ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}} = ۲-\sqrt{۳}$$

۷۶ گزینه ۴

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow \sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۴}))$$
$$\Rightarrow \sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶} \\ ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}+x\Rightarrow x=۲k\pi+\pi\ \ (x\neq k\pi\ \ \text{غیرقابل‌قبول زیرا}) \end{cases}$$

۷۷ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار داریم:

$$T=۲(\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۴})=۲\ ,\ T=\frac{۲\pi}{|b|}=۲$$
$$\Rightarrow |b|=\pi\xrightarrow{b>۰}b=\pi$$
$$f(\frac{۱}{۴})=۰\Rightarrow a\cos(\frac{\pi}{۴}+c)=۰\Rightarrow \frac{\pi}{۴}+c=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow c=\frac{\pi}{۴}$$

ماکزیمم تابع برابر $\frac{۱}{۴}$ است:

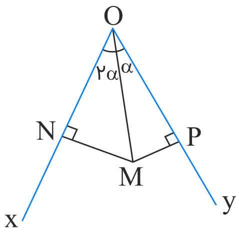
$$|a|=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۴}$$
$$f(x)=\pm\frac{۱}{۴}\cos(\pi x+\frac{\pi}{۴})$$
$$x=۰: f(۰)=\pm\frac{۱}{۴}\cos\frac{\pi}{۴}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

باتوجه‌به نمودار $f(۰)$ باید مثبت باشد، پس:

$$\frac{ac}{b}=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{\pi}{۴}}{\pi}=\frac{۱}{۱۶}$$

۷۸ گزینه ۴

فرض کنیم $M\hat{O}y = \alpha$. پس $x\hat{O}M = ۲\alpha$ و داریم:

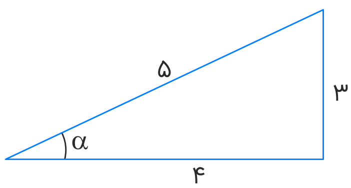


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ONM}\ : \sin ۲\alpha = \dfrac{MN}{OM} \\ \overset{\Delta}{OPM}\ : \sin \alpha = \dfrac{MP}{OM} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ اول را بر رابطهٔ دوم تقسیم می‌کنیم}} \frac{\sin ۲\alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{MP}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = ۲\cos\alpha = ۲\left(\frac{OP}{OM}\right) = \frac{۲OP}{OM}$$

۷۹ گزینه ۲



$$\tan\alpha = \frac{۳}{۴} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{۴}{۳} \quad , \quad \sin\alpha = -\frac{۳}{۵} \quad , \quad \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{\cos\left(۲\alpha - \frac{\pi}{۲}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot ۲\alpha} = \frac{\sin ۲\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{۲}} = \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{۲}}$$

$$= \frac{۲\left(-\frac{۳}{۵}\right)\left(-\frac{۴}{۵}\right) + \frac{۴}{۵}}{\frac{\frac{۴}{۳} - \frac{۳}{۴}}{۲}} = \frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۶}{۵} + ۱\right)}{\frac{۱۶ - ۹}{۲۴}} = \frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۱۱}{۵}\right)}{\frac{۷}{۲۴}} = \frac{۴(۱۱)(۲۴)}{۵(۵)(۷)} = \frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

$$\cot ۲\alpha = \frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha} = \frac{\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha}{۲\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cot\alpha - \tan\alpha}{۲}$$

۸۰ گزینه ۴

اگر تابعی نسبت به خط $x = x_0$ متقارن باشد، آنگاه: $f(x) = f(2x_0 - x)$

$f(x) = f(2 - x)$: تابع نسبت به خط $x = 1$ متقارن است

$f(x) = f(6 - x)$: تابع نسبت به خط $x = 3$ متقارن است

$$f(x) = f(6 - x) \xrightarrow{x = x+4} f(x+4) = f(6 - (x+4)) = f(2 - x)$$

پس $f(x) = f(4 + x)$، پس f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

۸۱ گزینه ۴

$$y = a + b\sin(\frac{\pi}{2} + x) = a + b\cos x$$

باتوجه‌به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = 3 \xrightarrow[b<0]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = 3 \quad (1)$$

$$(\frac{7\pi}{3}, 0) : 0 = a + b\cos(\frac{7\pi}{3}) = a + b\cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = a + b(\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} a - b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -2$$

۸۲ گزینه ۱

اختلاف max و min تابع ۱۰ واحد است. پس $|a| = 5$ خواهد بود. حال چون تابع از $x = 0$ نزولی شده، پس $a = 5$ است. همچنین تابع دو واحد پایین آمده است، پس $b = -2$ است.

$$f(x) = 5\cos x - 2 \xrightarrow{x = \frac{\pi}{3}} f(\frac{\pi}{3}) = 5\cos\frac{\pi}{3} - 2 = 5(\frac{1}{2}) - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

۸۳ گزینه ۴

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = \frac{5}{2} \\ y_{min} = -|a| + c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad |a| = \frac{3}{2} \ , \ c = 1$$

$$\Rightarrow y = 1 + a\cos bx \ ; \ y(0) = 1 + a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

پس تابع به صورت $y = 1 - \frac{3}{2}\cos bx$ می‌باشد و حاصل ac برابر است با:

$$ac = \frac{-3}{2} \times 1 = \frac{-3}{2}$$

۸۴ گزینه ۳

$$\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x=\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱+\sin ۲x=\frac{۹}{۵}\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}\Rightarrow \frac{۴}{۵}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}$$

$$\Rightarrow ۴+۴\tan^{۲}x=۱۰\tan x\Rightarrow ۴(۱+\tan^{۲}x)=۱۰\tan x$$

$$\Rightarrow ۱+\tan^{۲}x=\frac{۵}{۲}\tan x\xrightarrow{\times ۲}۲\tan^{۲}-۵\tan x+۲=۰\xrightarrow{\Delta=۹}\begin{cases}\tan x=۲\\ \tan x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

۸۵ گزینه ۲

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶})\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۳}-x))=۱$$

$$\sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۶})=۱\Rightarrow\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}\\ \sin(x+\frac{\pi}{۶})=-۱\Rightarrow x=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

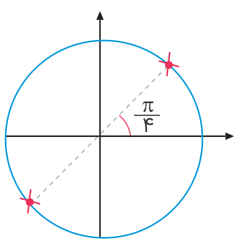
۸۶ گزینه ۲

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴}).\cos(\frac{\pi}{۴}-x)=۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۴}-x))=۱$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow \sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۴})=۱$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

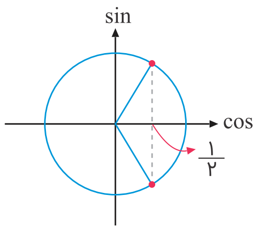
$$\Rightarrow \text{جواب‌ها}:\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\xrightarrow{\text{مجموع}}\frac{۶\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$$



۸۷ گزینه ۴

$$8\cos x - \tan^2 x = 1 \Rightarrow 8\cos x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$



$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow$ دو جواب دارد

۸۸ گزینه ۱

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} - x) > 0 \Rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0$$

m		-2		1	
$1-m$	$+$		$+$	0	$-$
$2+m$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{1-m}{2+m}$	$-$	ت ن	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow -2 < m < 1$$

۸۹ گزینه ۳

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 5 \\ \min = -|a| + c = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 3$$

۹۰

گزینه ۱

طرفین تابع را در $\sin^{۲}x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^{۲}x = ۳۲\sin^{۲}x\cos^{۲}x\cos^{۲}(۲x)\cos^{۲}(۴x)\cos^{۲}(۸x)\cos^{۲}(۱۶x)$$
$$= ۸\sin^{۲}(۲x)\cos^{۲}(۲x)\cos^{۲}(۴x)\cos^{۲}(۸x)\cos^{۲}(۱۶x)$$
$$= ۲\sin^{۲}(۴x)\cos^{۲}(۴x)\cos^{۲}(۸x)\cos^{۲}(۱۶x)$$
$$= \frac{۱}{۳۲}\sin^{۲}(۳۲x) \Rightarrow f(x) = \frac{\sin^{۲}(۳۲x)}{۳۲\sin^{۲}x}$$

$$f(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\sin^{۲}\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^{۲}(\frac{\pi}{۳})}{۳۲\sin^{۲}(\frac{\pi}{۱۲})}$$
$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\frac{۳}{۴}}{۳۲ \times \frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}$$
$$= \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲} = \frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

۹۱

گزینه ۱

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T = \frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶} = \frac{۴\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳} \\ T = \frac{۲\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max: |a| + c = ۱ \\ \min: -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -۳,\ c = -۱ \\ b = ۳,\ c = -۱ \end{cases}$$

فقط حالت $b = ۳, c = -۱$ را در گزینه‌ها داریم، پس گزینهٔ ۱ صحیح است.

گزینه ۴

در هر سه پرانتز از اتحاد $1+\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)(1+\cos 8\alpha) = \frac{1}{8} \Rightarrow (2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha\cos^2 2\alpha\cos^2 4\alpha = \frac{1}{64} \Rightarrow |\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha| = \frac{1}{8}$$

دو طرف معادلهٔ بالا را در $|\sin\alpha|$ ضرب می‌کنیم:

$$|\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha| = \frac{1}{8}|\sin\alpha|$$

حالا از اتحاد $\sin A\cos A = \frac{1}{2}\sin 2A$ سه بار استفاده می‌کنیم:

$$|\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\cos 2\alpha}_{\frac{1}{4}\sin 4\alpha}\cos 4\alpha}_{\frac{1}{8}\sin 8\alpha}| = \frac{1}{8}|\sin\alpha| \Rightarrow |\sin 8\alpha| = |\sin\alpha| \Rightarrow \begin{cases}\sin 8\alpha = \sin\alpha \\ \sin 8\alpha = \sin(-\alpha)\end{cases}$$

هر دو معادله را حل می‌کنیم و بزرگ‌ترین جواب هرکدام در بازهٔ $[0,\pi]$ را می‌نویسیم:

$$1)\ \sin 8\alpha = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{6\pi}{7} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi+\pi}{9} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{7\pi}{9}\end{cases}$$

$$2)\ \sin 8\alpha = \sin(-\alpha) \Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{8\pi}{9} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi+\pi}{7} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{5\pi}{7}\end{cases}$$

تذکر: در جواب‌ها $\alpha = \pi$ را به خاطر ضرب طرفین در $\sin\alpha$ در نظر نگرفتیم. بنابراین بزرگ‌ترین جواب، $\frac{8\pi}{9}$ است.

۹۳ گزینه ۴

می‌دانیم:

$$(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)^۲=\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$
$$\Rightarrow ۱=\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha$$
$$\Rightarrow \sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha$$

حال از رابطهٔ $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha$ کمک می‌گیریم:

$$\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin^۲ ۲x=۱$$
$$\Rightarrow \sin ۲x=\pm ۱\Rightarrow ۲x=k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۴}$$

جواب‌های موجود در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر $\left\{\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}\right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها ۴π است.

۹۴ گزینه ۴

$$۴\sin x\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱\Rightarrow ۴\sin x(-\cos x)=۱$$
$$\Rightarrow -۴\times\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۱\Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$
$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲} & (۱)\\ x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} & (۲)\end{cases}$$

تعداد جواب‌ها را در دسته‌های مختلف به دست می‌آوریم:

(۱)

k	۱	۲
x	$\pi-\frac{\pi}{۱۲}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}$

(۲)

k	۰	۱
x	$\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\pi-\frac{\pi}{۱۲}+۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۷\pi}{۱۲}+\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}=۴\pi+\pi=۵\pi$$

۹۵

گزینه ۲

$$\cos ۳x + \cos x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = -\cos x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq ۰} x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

۹۶

گزینه ۲

$$۲\cos(۳x) = -۲ - ۵\sin^۲ x$$

اگر برد دو طرف تساوی را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$-۲ \leq ۲\cos(۳x) \leq ۲ \quad , \quad -۷ \leq -۲ - ۵\sin^۲ x \leq -۲$$

پس دو طرف تساوی فقط به ازای ۲− برقرار خواهد بود.

$$\begin{cases} ۲\cos(۳x) = -۲ \Rightarrow \cos(۳x) = -۱ \Rightarrow ۳x = (۲k-۱)\pi \Rightarrow x = (۲k-۱)\frac{\pi}{۳} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ -۲ - ۵\sin^۲ x = -۲ \Rightarrow \sin^۲ x = ۰ \Rightarrow x = k'\pi \quad , \ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های مشترک دو معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\{-\pi , \frac{-\pi}{۳} , \frac{\pi}{۳} , \pi\} \cap \{-\pi , ۰ , \pi\} = \{-\pi , \pi\}$$

۹۷

گزینه ۴

به‌کمک رابطهٔ $۱ + \cos x = ۲\cos^۲\frac{x}{۲}$ معادله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$۶۴\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\cos^۲\alpha\cos^۲ ۲\alpha = ۱$$

حال طرفین رابطه را در $\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$۶۴\sin^۲\frac{\alpha}{۲}\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\cos^۲\alpha\cos^۲ ۲\alpha = \sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

$$۱۶\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha\cos^۲ ۲\alpha = \sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

$$۴\sin^۲ ۲\alpha\cos^۲ ۲\alpha = \sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

$$\sin^۲ ۴\alpha = \sin^۲\frac{\alpha}{۲} \Rightarrow ۴\alpha = k\pi \pm \frac{\alpha}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{۲k\pi}{۷} \\ \alpha = \frac{۲k\pi}{۹} \end{cases}$$

فقط توجه داشته باشید که $k\pi$ ها قابل قبول نیستند.

در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ تعداد جواب‌های $\alpha = \frac{۲k\pi}{۷}$ برابر ۶ تا و تعداد جواب‌های $\alpha = \frac{۲k\pi}{۹}$ برابر ۸ است. معادله مجموعاً ۱۴ ریشه دارد.

۹۸ گزینه ۳

$$(۱-\cos^۲ x)+\sin^۲ x\cos ۳x=۰ \Rightarrow \sin^۲ x(۱+\cos ۳x)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=۰ \Rightarrow x=k\pi \\ \cos ۳x=-۱ \Rightarrow ۳x=(۲k+۱)\pi \Rightarrow x=(۲k+۱)\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

جواب‌های بازه $[۰,۲\pi]$ برابر $\{۰,\pi,۲\pi,\frac{\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}\}$ است که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

۹۹ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱ \Rightarrow ۲\sin(۳x)\cos(۳x)=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۶x)=\frac{۱}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k=۰ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۳۶} \\ k=۱ \Rightarrow x=\frac{۱۳\pi}{۳۶} \end{cases} \\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} k=۰ \Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۳۶} \\ k=۱ \Rightarrow x=\frac{۱۷\pi}{۳۶} \end{cases} \end{cases}$$

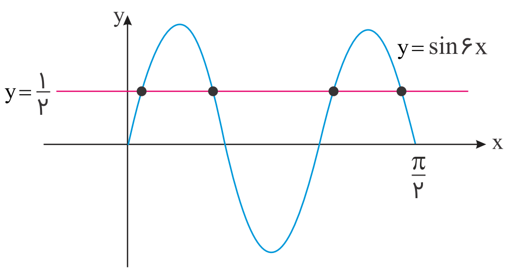
بنابراین معادله چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱ \Rightarrow \sin(۶x)=\frac{۱}{۲}$$

$$۰\le x\le \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰\le ۶x\le ۳\pi$$

باتوجه‌به شکل معادله چهار جواب دارد:



۱۰۰ گزینه ۴

طرفین رابطه را در $\sin^{۲}۳x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^{۲}۳x = ۱۶\sin^{۲}۳x\cos^{۲}۳x\cos^{۲}۶x\cos^{۲}۱۲x\cos^{۲}۲۴x$$
$$\Rightarrow f(x)\sin^{۲}۳x = ۴\sin^{۲}۶x\cos^{۲}۶x\cos^{۲}۱۲x\cos^{۲}۲۴x$$
$$= \sin^{۲}۱۲x\cos^{۲}۱۲x\cos^{۲}۲۴x$$
$$= \frac{۱}{۴}\sin^{۲}۲۴x\cos^{۲}۲۴x = \frac{۱}{۱۶}\sin^{۲}۴۸x$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^{۲}۴۸x}{۱۶\sin^{۲}۳x}$$

$$f(\frac{\pi}{۳۶}) = \frac{\sin^{۲}\frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^{۲}(\frac{\pi}{۳})}{۱۶\sin^{۲}\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۱-\cos\frac{\pi}{۶})}$$
$$= \frac{۳}{۴\times۸\times(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})} = \frac{۳}{۱۶(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۱۶}$$

۱۰۱ گزینه ۳

$$\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta} + \frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{۲\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}} + \frac{۲\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}}{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}} = \cot\frac{\theta}{۲} + \cot\frac{\theta}{۲} = ۲\cot\frac{\theta}{۲}$$

۱۰۲ گزینه ۳

$$\text{ماکزیمم} = a+|b| = \frac{۳}{۲} \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a-b = \frac{۳}{۲}$$
$$\left(\frac{\pi}{۲},۰\right): f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow a + b\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + b\cos(\frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{۲}b = ۰$$
$$\Rightarrow ۲a + b = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = \frac{۳}{۲} \\ ۲a+b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۳a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

۱۰۳ گزینه ۴

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$T=\frac{۹\pi}{۲}-(-\frac{۳\pi}{۲})=\frac{۱۲\pi}{۲}=۶\pi$$
$$\Rightarrow T=۶\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۳}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۳}$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases}\max: |a|+c=۱\\ \min: -|a|+c=-۳\end{cases}\Rightarrow ۲c=-۲\Rightarrow c=-۱\Rightarrow |a|=۲\Rightarrow a=\pm ۲$$

طبق نمودار، تابع در حوالی $x=۰$ نزولی است، بنابراین $ab<۰$، پس داریم:

$$\begin{cases}a=-۲\\ b=\frac{۱}{۳}\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}a=۲\\ b=-\frac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow \frac{a}{b}=-۶$$

۱۰۴ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار $f(\pi)=-\frac{۳}{۲}$ است، پس:

$$-\frac{۳}{۲}=a+b\sin(\pi+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow a+b(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۳}{۲}$$
$$\xrightarrow{\times ۲} ۲a-b\sqrt{۳}=-۳\quad (۱)$$

باتوجه‌به نمودار تابع $b>۰$ است و همچنین چون ماکزیمم تابع $\sqrt{۳}$ است، پس:

$$a+|b|=\sqrt{۳}\xrightarrow{b>۰} a+b=\sqrt{۳}\quad (۲)$$

با حل دستگاه داریم:

$$-۲\begin{cases}a+b=\sqrt{۳}\\ ۲a-b\sqrt{۳}=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲a-۲b=-۲\sqrt{۳}\\ ۲a-b\sqrt{۳}=-۳\end{cases}$$
$$\xrightarrow{+} -b(۲+\sqrt{۳})=-(۳+۲\sqrt{۳})\Rightarrow b=\frac{\sqrt{۳}(۲+\sqrt{۳})}{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

۱۰۵ گزینه ۱

داریم:

$$\tan\alpha - \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^{۲}\alpha - \cos^{۲}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{-\cos ۲\alpha}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha} = -۲\cot ۲\alpha$$

بنابراین $\tan\alpha - \cot\alpha = -۲\cot ۲\alpha$، پس:

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -۲\cot(۲\pi x)$$

دورهٔ تناوب تابع $\tan(ax)$ و $\cot(ax)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر $\frac{\pi}{|۲\pi|}$ است، یعنی $\frac{۱}{۲}$.

۱۰۶ گزینه ۲

$$y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = a + b\sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{۵\pi}{۶}$ صفر است. پس:

$$y(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b\sin(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b(-\frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow b = ۲a$$

بنابراین: $y = a + ۲a\sin x$. به‌علاوه باتوجه‌به اینکه $y(۰) > ۰$ می‌باشد، پس $a > ۰$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = ۱$ باشد.

$$\max = ۳ \Rightarrow a + ۲a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$
$$\Rightarrow y = ۱ + ۲\sin x$$
$$y(\frac{\pi}{۶}) = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲$$

۱۰۷ گزینه ۴

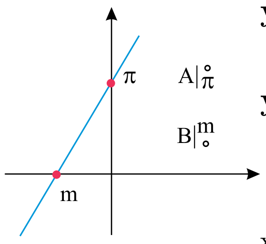
$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^+} \frac{a + ۳[-x]}{۱ - ۲x} = -\infty \Rightarrow \frac{a - ۳}{۰^-} = -\infty \Rightarrow a - ۳ > ۰ \Rightarrow a > ۳$$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} [\frac{x}{a} - x] = [\frac{۱}{۲a} - \frac{۱}{۲}]$$

$$a > ۳ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{a} < \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} ۰ < \frac{۱}{۲a} < \frac{۱}{۶} \xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}$$

$$-\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۲a} - \frac{۱}{۲} < -\frac{۱}{۳} \Rightarrow [\frac{۱}{۲a} - \frac{۱}{۲}] = -۱$$

۱۰۸ گزینه ۱



$$y-۰=\frac{۰-\pi}{m-۰}(x-m)\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{\pi}{m}x+\pi$$

$$y=-\frac{\pi}{m}x+\pi\Rightarrow\frac{\pi}{m}x=-y+\pi\Rightarrow x=-\frac{m}{\pi}y+m\Rightarrow f(x)=-\frac{m}{\pi}x+m$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x+\pi}{-\frac{m}{\pi}x+m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x}=\frac{\pi^{۲}}{m^{۲}}=\pi\Rightarrow m^{۲}=\pi\xrightarrow{m<۰}m=-\sqrt{\pi}$$

۱۰۹ گزینه ۳

$$\begin{array}{l}f(x)=-۳x\\ f(x)=\frac{۳}{۴}x\end{array}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|-۳x|}{\frac{۳}{۴}x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x}{\frac{۳}{۴}x}=-۴$$

دقت کنید وقتی $x\to-\infty$، $-۳x\to\infty$ پس: $|-۳x|=-۳x$

۱۱۰ گزینه ۲

با جاگذاری $x=۸$ در صورت کسر به صفر می‌رسیم ولی پاسخ حد باید مقداری غیرصفر باشد، پس باید مخرج هم صفر شود که رفع ابهام کسر صفر صفرم داشته باشیم:

$$۸a-b=۰\Rightarrow ۸a=b$$

$$\lim_{x\to۸}\frac{b(\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲)}{b(\frac{x}{۸}-۱)}\times\frac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}=\lim_{x\to۸}\frac{\sqrt[۳]{x}+۲-۴}{\frac{x}{۲}-۴}$$

$$=\lim_{x\to۸}\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{\frac{x}{۲}-۴}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\lim_{x\to۸}\frac{x-۸}{۶x-۴۸}=\lim_{x\to۸}\frac{x-۸}{۶(x-۸)}=\frac{۱}{۶}$$

۱۱۱ گزینه ۳

$$(۳a,۰),(۰,۲a)\in f\Rightarrow \text{شیب خط}=m=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow f(x)=-\frac{۲}{۳}x+۲a$$

$$(-m,۰),(۰,۲m)\in g\Rightarrow \text{شیب خط}=m'=۲\Rightarrow g(x)=۲x+۲m$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{|f(x)|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+m}{|-\frac{۲}{۳}x+۲a|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{-\frac{۲}{۳}x}=-۳$$

$$x\to-\infty:-\frac{۱}{۳}x\to+\infty\Rightarrow|-\frac{۱}{۳}x+a|=-\frac{۱}{۳}x+a$$

۱۱۲ گزینه ۴

صورت کسر به ازای $x = ۱$ صفر می‌شود، پس باید مخرج هم به ازای $x = ۱$ صفر شود تا حالت $\frac{۰}{۰}$ و رفع ابهام داشته باشیم.

$$a + b = ۰ \Rightarrow a = -b$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-a\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + a}{ax - a} = \lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{x - ۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{x - ۱} \times \frac{\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱ - ۲ + \sqrt[۳]{x}}{(x - ۱)(۱ + \sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۱}{۲(x - ۱)} \times \frac{(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)}{۲(x - ۱)(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x - ۱}{۲(x - ۱) \times ۳} = \frac{۱}{۶}$$

از قاعدهٔ هوپیتال هم می‌توان برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ استفاده کرد:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{x - ۱} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۱} \frac{-\frac{\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{۲\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}}}}{۱} = \frac{۱}{۶}$$

۱۱۳ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x + ۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x + ۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \lim_{x\to ۲} \frac{۸ - (۳x + ۲)}{(۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶)(۴ + ۲\sqrt[۳]{۳x + ۲} + \sqrt[۳]{(۳x + ۲)^۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{-۳(x - ۲)}{۱۲(x - ۲)(۵x - ۸)} = \frac{-۱}{۸}$$

راه‌حل دوم:

$$HOP : \lim_{x\to ۲} \frac{۰ - \frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x + ۲)^۲}}}{۱۰x - ۱۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{-۱}{(۱۰x - ۱۸)\sqrt[۳]{(۳x + ۲)^۲}}$$

$$= \frac{-۱}{۲(۴)} = \frac{-۱}{۸}$$

۱۱۴ گزینه ۲

چون $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۲x - ۵}{x^۲ + ax + b} = -\infty$ است، پس باید مخرج کسر در همسایگی $x = ۲$ مثبت و به ازای $x = ۲$ صفر شود. یعنی معادلهٔ $x^۲ + ax + b = ۰$ باید ریشهٔ مضاعف $x = ۲$ داشته باشد و درنتیجه:

$$x^۲ + ax + b = (x - ۲)^۲ = x^۲ - ۴x + ۴$$

با مقایسهٔ دو عبارت $x^۲ + ax + b$ و $x^۲ - ۴x + ۴$ نتیجه می‌شود که $a = -۴$ و $b = ۴$، پس $a + b = ۰$.

۱۱۵ گزینه ۴

$x = \frac{\pi}{۳}$ ریشه مخرج است.

$$\frac{a}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰ \Rightarrow a = \sqrt{۳} \Rightarrow f(x) = \frac{x\sqrt{۳} + b}{\sqrt{۳}\cos x - \sin x}$$

چون x از راست به $\frac{\pi}{۳}$ نزدیک می‌شود آن‌گاه $\sqrt{۳}\cos x < \sin x$ است پس مخرج از چپ به صفر نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+} \frac{x\sqrt{۳} + b}{\sqrt{۳}\cos x - \sin x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}\pi}{۳} + b}{۰^-} = -\infty \Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{۳}} + b > ۰$$

$$\Rightarrow b > \frac{-\pi}{\sqrt{۳}} \simeq -۱/۸۱ \xrightarrow{b\in\mathbb{Z}} \min(b) = -۱$$

۱۱۶ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲ - ۱}{x + |x|} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲ - ۱}{x + x} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲ - ۱}{x + |x|} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲ - ۱}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف‌نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

۱۱۷ گزینه ۲

چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲ - ۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^۲ - ۱$ برابر صفر است.

$$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱ , -۱$$

بنابراین داریم:

$$p(۱) = ۰ , p(-۱) = ۰ \quad (*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x - ۲$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - ۱) + p(۱ - x)$$

$$\xrightarrow{x=۲} Q(۲) = p(۲ - ۱) + p(۱ - ۲) = p(۱) + p(-۱)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(۲) = ۰ + ۰ = ۰$$

۱۱۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = 2$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجهٔ صورت و مخرج کسر یکی باشد. بنابراین $n = 3$ است. همچنین طبق قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{ax^3} = \frac{4}{a} = 2 \Rightarrow a = 2$$

حال $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}\left(4x^2 - 4x - 2\right)}{\cancel{\left(x - \frac{1}{2}\right)}\left(2x^2 + 8x + 4\right)} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = -\frac{6}{17}$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 6x^2 + 1 & x - \frac{1}{2} \\ \underline{-4x^3 + 2x^2} & \overline{4x^2 - 4x - 2} \\ -4x^2 + 1 & \\ \underline{4x^2 - 2x} & \\ -2x + 1 & \\ \underline{2x - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 7x^2 - 2 & x - \frac{1}{2} \\ \underline{-2x^3 + x^2} & \overline{2x^2 + 8x + 4} \\ 8x^2 - 2 & \\ \underline{-8x^2 + 4x} & \\ 4x - 2 & \\ \underline{-4x + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

روش دوم: هوپیتال

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{2x^3 + 7x^2 - 2} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{3 - 6}{\frac{17}{2}} = \frac{-6}{17}$$

۱۱۹ گزینه ۴

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x}}-\sqrt{\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۲+۱}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+x+۱}{x(x+۱)}}-\sqrt{\frac{x^۲+۱-x^۲}{x^۲(x^۲+۱)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x^۲+x}}-\sqrt{\frac{۱}{x^۴+x^۲}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x+۱}}-\sqrt{\frac{۱}{x^۳+x}}\right)=\sqrt{۲}-۰=\sqrt{۲}$$

۱۲۰ گزینه ۲

پرتوان‌ها را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[۵۰]{(a^۲x^۲)(a^۴x^۴)\dots(a^{۱۰۰}x^{۱۰۰})}}{a^{۴۹}x^k}=-۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[۵۰]{(ax)^{۲+۴+\dots+۱۰۰}}}{a^{۴۹}x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|ax|^{۵۱}}{a^{۴۹}x^k}=-۱\Rightarrow k=۵۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|ax|^{۵۱}}{a^{۴۹}x^{۵۱}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|a|^{۵۱}|x|^{۵۱}}{a^{۴۹}x^{۵۱}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|a|^{۴۹}|a|^۲(-x)^{۵۱}}{a^{۴۹}x^{۵۱}}$$

$$=-a^۲\left(\frac{|a|}{a}\right)^{۴۹}$$

حاصل عبارت فوق منفی است، بنابراین باید $a>۰$ باشد.

$$-a^۲=-۱\Rightarrow a=\pm۱\xrightarrow{a>۰}a=۱$$

توجه: از مجموع ۵۰ جملهٔ دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲ و قدر نسبت ۲ استفاده می‌کنیم:

$$۲+۴+\dots+۱۰۰=\frac{۵۰}{۲}(۲(۲)+۴۹(۲))=۲\left(\frac{۵۰\times۵۱}{۲}\right)=۵۰\times۵۱$$

۱۲۱ گزینه ۳

$$\lim_{x\to۱^+}(۴-[x])g(x)=۶\Rightarrow\lim_{x\to۱^+}۳g(x)=۶$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to۱^+}g(x)=۲$$

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}=۲$$

جواب حد یک عدد است و مخرج به ازای $x=۱$ صفر است، بنابراین باید صورت کسر نیز به ازای آن صفر باشد، حال داریم:

$$ax^۲+bx+c=a(x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}=\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{a(x-۱)^۲}}{|x-۱|}=\lim_{x\to۱^+}\frac{\sqrt{a}|x-۱|}{|x-۱|}=۲$$

$$\Rightarrow a=۴$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۴}|x-۱|}{|x-۱|}=۲$$

۱۲۲ گزینه ۴

راه حل اول:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{۳x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x}}\times\frac{\sqrt{۲x+۳}+\sqrt{۳x+۴}}{\sqrt{۲x+۳}+\sqrt{۳x+۴}}\times\frac{۱+\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}}{۱+\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{x}}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{-(x+۱)(۱+۱+۱)}{(۱+۱)(۱+x)}=-\frac{۳}{۲}$$

راه حل دوم: برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۴}}}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}}\overset{x=-۱}{=}\frac{۱-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۳}}=-\frac{۳}{۲}$$

۱۲۳ گزینه ۱

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{ax^{۲}+x+۱}}{x+۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{a}|x|}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{a}x}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to (-۱)^{-}}[\frac{۱}{x}]\times\sqrt{\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۱}=-۱\times\sqrt{\frac{۱}{۴}(-۱)^{۲}+(-۱)+۱}=-۱\times\sqrt{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

۱۲۴ گزینه ۴

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^{۲}+x}}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x-|۲x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+۲x}{x}=۳$$

۱۲۵ گزینه ۱

$$n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} 2^{1-2n} = \dfrac{1}{2^{-1+2n}} \to 0 \\ 2^{2n+1} \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times 2^{1-2n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

راه‌حل اول:
با استفاده از قاعدهٔ پرتوان، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times 2^{1-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times 2^{1-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^{1-2n}}(2^{4n}-1)}{\cancel{2^{1-2n}}(2^{4n}+3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}-1}{2^{4n}+3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2^{4n}+3)-4}{(2^{4n}+3)} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \underbrace{\frac{4}{2^{4n}+3}}_{0} = 1$$

۱۲۶ گزینه ۲

$$n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} 3^{-2n+1} = \dfrac{1}{3^{2n-1}} \to 0 \\ 3^{2n} \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n}-3^{-2n+1}}{2\times 3^{2n}+3^{-2n+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

روش اول: با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n}-3^{-2n+1}}{2\times 3^{2n}+3^{-2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n}}{2\times 3^{2n}} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n}-3^{-2n+1}}{2\times 3^{2n}+3^{-2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{-2n+1}(3^{4n-1}-1)}{3^{-2n+1}(2\times 3^{4n-1}+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{4n-1}-1}{2\times 3^{4n-1}+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{3^{4n-1}}\left(1-\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{3^{4n-1}}}}\right)}{\cancel{3^{4n-1}}\left(2+\underset{0}{\cancel{\dfrac{1}{3^{4n-1}}}}\right)} = \frac{1}{2}$$

توجه:

$$(n \to +\infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{3^{4n-1}} \to 0\right)$$

۱۲۷ گزینه ۲

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\sin^{۲n}(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(\sin^{۲}(x)\right)^{n}$$

می‌دانیم $۰\leq\sin^{۲}(x)\leq ۱$ است، پس در نقاطی که $\sin x\in[۰,۱)$ حاصل حد برابر صفر خواهد بود، زیرا اعداد بازهٔ $(۰,۱)$ را هرچه به توان بزرگ‌تر برسانیم کوچک و کوچک‌تر می‌شود:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\sin^{۲n}(x)=\begin{cases}۱ & ;x=k\pi+\dfrac{\pi}{۲}\\ ۰ & ;x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}$$

در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ تابع داده‌شده در نقاط $x=\dfrac{\pi}{۲}$ و $x=\dfrac{۳\pi}{۲}$ ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۴ نقطهٔ ناپیوستگی داریم. کلید سنجش دو نقطه است، پس ابتدا و انتهای بازه را با تعریف پیوستگی در بازه، پیوسته در نظر می‌گیریم.

۱۲۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^{+}}\left[\frac{-۲}{x^{۲}}\right]=\left[\frac{-۲}{\left(\frac{۱}{۴}\right)^{-}}\right]=\left[-(۸^{+})\right]=-۹$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^{+}}\left[\frac{۳}{x^{۲}}\right]=\left[\frac{۳}{\left(\frac{۱}{۴}\right)^{-}}\right]=\left[۱۲^{+}\right]=۱۲$$

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۲})^{+}}\frac{۱۶x+۹}{۲۴x+۱۲}=\frac{۱}{(-۱۲)^{+}+۱۲}=\frac{۱}{۰^{+}}=+\infty$$

۱۲۹ گزینه ۲

راه‌حل اول: ابهام $\frac{0}{0}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}\times\frac{2x+\sqrt{3x+1}}{2x+\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-7\sqrt{x}+5)(2x+\sqrt{3x+1})}{4x^2-3x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-5)(2x+\sqrt{3x+1})}{(x-1)(4x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(2\sqrt{x}-5)(2x+\sqrt{3x+1})}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)(4x+1)}$$
$$=\frac{-3\times 4}{2\times 5}=\frac{-12}{10}=-1/2$$

راه‌حل دوم: با استفاده از هوپیتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}=\frac{0}{0}$$
$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 1}\frac{2-\frac{7}{2\sqrt{x}}}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}=\frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{4}}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}=-\frac{6}{5}=-1/2$$

۱۳۰ گزینه ۱

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+\left[\frac{3}{x^2}\right]}{\left(16x-\left[-\frac{2}{x^2}\right]\right)}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[3\times(4)^-]}{16x-[-2\times 4^-]}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[12^-]}{16x-[(-8)^+]}$$
$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x+6}{16x+8}=\frac{-5+6}{(-8)^-+8}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

۱۳۱ گزینه ۳

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{[x]+3}{x+2}=\frac{\overbrace{[(-2)^-]}^{-3}+3}{(-2)^-+2}=\frac{0}{0^-}=0$$

۱۳۲ گزینه ۱

$$x+1<3<2x-1$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x+1<3\Rightarrow x<2\\ 2x-1>3\Rightarrow 2x>4\Rightarrow x>2\end{cases}\xrightarrow{\cap}\varnothing$$

۱۳۳ گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^2+1}-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2|+|x|-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

۱۳۴ گزینه ۱

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P\left(\frac{۱}{۲}\right)=۰$، بنابراین:

$$۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}+a\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-۳\left(\frac{۱}{۲}\right)=۰\Rightarrow ۲\left(\frac{۱}{۱۶}\right)+a\left(\frac{۱}{۸}\right)+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۸}+\frac{a}{۸}-۱=۰\Rightarrow a=۷$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر با $P(-۲)$ است، پس داریم:

$$P(x)=۲x^{۴}+۷x^{۳}+۲x^{۲}-۳x$$
$$\Rightarrow P(-۲)=۲(-۲)^{۴}+۷(-۲)^{۳}+۲(-۲)^{۲}-۳(-۲)=۳۲-۵۶+۸+۶=-۱۰$$

۱۳۵ گزینه ۱

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۴$ برابر ۳ است، پس $p(۴)=۳$.
باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$ برابر ۱ است، پس $p(-۲)=۱$.
حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^{۲})+۴p(-x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم، بنابراین $x=۲$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^{۲})+۴p(-x)=p(۲^{۲})+۴p(-۲)$$
$$=p(۴)+۴p(-۲)=۳+۴\times ۱=۷$$

۱۳۶ گزینه ۱

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{4x^n}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow n=1\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{4x}=\frac{a}{4}=\frac{1}{6}\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\frac{0}{0}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}\times\frac{\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2}{\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{8}{27}x^3-x^2+1}{(4x-12)\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\left(\frac{8}{27}x^2-\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\right)}{4\cancel{(x-3)}\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2\right)}$$

$$=\frac{\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{4\times(4+2\times 2+4)}=\frac{2}{48}=\frac{1}{24}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{8}{27}x^3-x^2+1 & x-3 \\
\cline{2-2}
\underline{-\frac{8}{27}x^3+\frac{8}{9}x^2} & \frac{8}{27}x^2-\frac{x}{9}-\frac{1}{3} \\
\quad -\frac{1}{9}x^2+1 & \\
\underline{\quad +\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x} & \\
\quad\quad -\frac{1}{3}x+1 & \\
\underline{\quad\quad +\frac{1}{3}x-1} & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(2x)(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}}{4}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۳} - ۲ \times \frac{۱}{۴}}{۴} = \frac{\frac{۴ - ۳}{۶}}{۴} = \frac{۱}{۲۴}$$

۱۳۷ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\lim_{x \to -۸} \frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۶(۲ + \sqrt[۳]{x})} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x \to -۸} \frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۶(۲ + \sqrt[۳]{x})} = \lim_{x \to -۸} \frac{(x+۸)(x+۲)(۴ - ۲\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲})}{۶(۲ + \sqrt[۳]{x})(۴ - ۲\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲})}$$

$$= \lim_{x \to -۸} \frac{(x+۸)(x+۲)(۴ - ۲\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲})}{۶(x+۸)}$$

$$= \lim_{x \to -۸} \frac{(x+۲)(۴ - ۲\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲})}{۶} = \frac{-۶ \times ۱۲}{۶} = -۱۲$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\text{HOP}: \lim_{x \to -۸} \frac{۲x + ۱۰}{۶ \times \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}} = \frac{-۱۶ + ۱۰}{۶ \times \frac{۱}{۳ \times ۴}} = -۶ \times ۲ = -۱۲$$

۱۳۸ گزینه ۱

می‌دانیم $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ و $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ و $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$. حال داریم:

$$\lim_{x \to \frac{۲\pi}{۳}^+} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^-} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{۲\pi}{۳}^-} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^+} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{۴\pi}{۳}^\pm} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^\pm} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^\pm} = \pm\infty$$

۱۳۹ گزینه ۳

راه‌حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+x}) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x+2\left|x+\frac{1}{8}\right|\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x-2\left(x+\frac{1}{8}\right)\right) = -\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

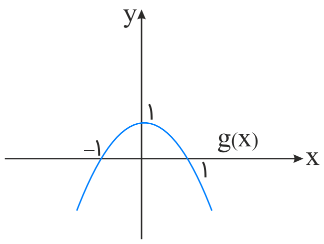
$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+x}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+\sqrt{4x^2+x})(2x-\sqrt{4x^2+x})}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(4x^2+x)}{2x-\sqrt{4x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-|2x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}$$

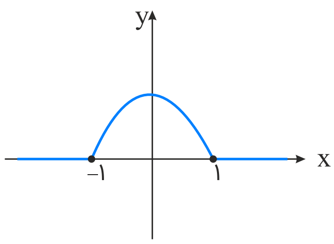
۱۴۰ گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ;x\le -1\\ x & ;-1\le x\le 1\\ 1 & ;x>1\end{cases}$$

$$g(x)=1-x^2$$



$$(gof)(x)=\begin{cases}g(-1)=0 & ;x\le -1\\ 1-x^2 & ;-1\le x\le 1\\ g(1)=0 & ;x>1\end{cases}$$

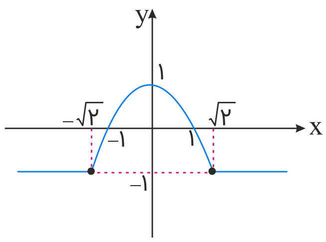


در $x=1$ و $x=-1$ نقطهٔ گوشه‌ای داریم و gof مشتق‌پذیر نیست.

$$(fog)(x)=\begin{cases}-1 & ;g(x)\le -1\\ g(x) & ;-1\le g(x)\le 1\\ 1 & ;g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}-1 & ;x\le -\sqrt{2} \text{ یا } x\ge \sqrt{2}\\ 1-x^2 & ;-\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2}\end{cases}$$

$$g(x)\le -1\Rightarrow 1-x^2\le -1\Rightarrow x^2\ge 2\Rightarrow\begin{cases}x\ge\sqrt{2}\\ \text{یا}\\ x\le -\sqrt{2}\end{cases}$$

در $x=\pm\sqrt{2}$ نقطهٔ گوشه‌ای داریم و تابع مشتق‌پذیر نیست!



۱۴۱ گزینه ۳

$$y=\begin{cases}(۴x-۳)\sqrt{ax} & ;x\geq \frac{۳}{۴}\\ -(۴x-۳)\sqrt{ax} & ;x<\frac{۳}{۴}\end{cases}$$

به دلیل جملهٔ صفرکننده $\Rightarrow \begin{cases}y'_{+}(\frac{۳}{۴})=۴\sqrt{a\times\frac{۳}{۴}}=۲\sqrt{۳a}\\ y'_{-}(\frac{۳}{۴})=-۴\sqrt{a\times\frac{۳}{۴}}=-۲\sqrt{۳a}\end{cases}$

$$۲\sqrt{۳a}-(-۲\sqrt{۳a})=۲\sqrt{۶}\Rightarrow ۴\sqrt{۳a}=۲\sqrt{۶}\Rightarrow ۴\times ۳a=۶\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

۱۴۲ گزینه ۴

لازم است تابع در $x=a$ پیوسته باشد، پس:

$$f(a)=\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)$$
$$\Rightarrow ba+c=\frac{۱}{a}\Rightarrow ba^{۲}+ac=۱\quad(۱)$$

در ضمن مشتقات چپ و راست باید باهم برابر باشند، یعنی:

$$b=-\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow b=-\frac{۱}{a^{۲}}\Rightarrow a^{۲}b=-۱$$

در رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$ba^{۲}+ac=۱\Rightarrow -۱+ac=۱\Rightarrow ac=۲$$

۱۴۳ گزینه ۳

$$g'f'(g)=(fog)'$$

$$D_g(-\infty,۰)\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{x^{۳}+x^{۳}}=\frac{۱}{۲x^{۳}}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲x^{۳}}-\left|\frac{۱}{۲x^{۳}}\right|}}\overset{g\leq ۰}{=}\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲x^{۳}}+\frac{۱}{۲x^{۳}}}}=\sqrt[۳]{x^{۳}}=x$$

$$(fog)'(x)=(x)'=۱$$

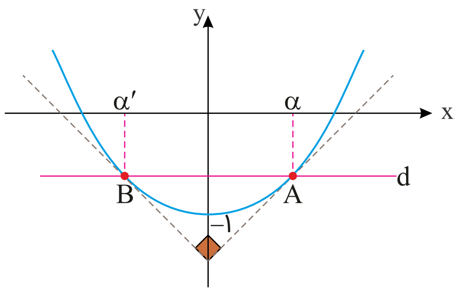
۱۴۴ گزینه ۴

چون خط $y = ۳x - ۵$ در $x = ۲$ بر $g(x)$ مماس است، پس $g'(۲) = ۳$ و $A(۲,۱) \in g$ خواهد بود.

ازطرفی چون $\lim_{x\to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{۲(x-۱)} = \frac{۲}{۳}$ است، پس:

$$\frac{۱}{۲}f'(۱) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۴}{۳}$$
$$y = (fog)(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow y'(۲) = g'(۲)f'(g(۲))$$
$$\Rightarrow y'(۲) = ۳f'(۱) = ۳ \times \frac{۴}{۳} = ۴$$

۱۴۵ گزینه ۱



نقاط تماس را $A(\alpha, \alpha^۲ - ۱)$ و $B(-\alpha, \alpha^۲ - ۱)$ فرض می‌کنیم. چون مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمود هستند، داریم:

$$f'(\alpha) \times f'(-\alpha) = -۱ \qquad (*)$$
$$f(x) = x^۲ - ۱ \Rightarrow f'(x) = ۲x$$
$$\xrightarrow{(*)} (۲\alpha) \times (-۲\alpha) = -۱ \Rightarrow ۴\alpha^۲ = ۱ \Rightarrow \alpha = \pm\frac{۱}{۲}$$
$$f(\frac{۱}{۲}) + f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴} - ۱ + \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۳}{۲}$$

۱۴۶ گزینه ۲

$$f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + (x-۴)\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$$
$$f(۵) = ۲ \quad , \quad f'(۵) = \frac{۲۵}{۱۲}$$
$$\lim_{h\to ۰} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} = \lim_{h\to ۰} \frac{(f(۵-h) - ۱)(f(۵-h) - ۲)}{h(۵-h)}$$
$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h) - ۱}{(۵-h)} \times \lim_{h\to ۰} \frac{-(f(۵-h) - ۲)}{-h}$$
$$= (\frac{f(۵) - ۱}{۵})(-f'(۵)) = \frac{۱}{۵} \times (-\frac{۲۵}{۱۲}) = \frac{-۵}{۱۲}$$

راه حل دوم: از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توان برای به دست آوردن حد استفاده کرد.

۱۴۷ گزینه ۳

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = -۱۱ \Rightarrow \frac{f(۰)-f(-۱)}{۰-(-۱)} = -۱۱ \Rightarrow ۱-۸(۱-a) = -۱۱$$

$$\Rightarrow ۸(۱-a) = ۱۲ \Rightarrow ۱-a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

$$f(x) = (x^۲+۱)^۳(۱-\frac{x}{۲})$$

$$f'(x) = ۳(۲x)(x^۲+۱)^۲(۱-\frac{x}{۲}) - \frac{۱}{۲}(x^۲+۱)^۳$$

$$f'(-۲a) = f'(۱) = ۳ \times ۲ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۱۲ - ۴ = ۸$$

۱۴۸ گزینه ۲

$$۷y - x = ۵ \Rightarrow y = \frac{x+۵}{۷}$$

$$\frac{ax-۱}{۳x+۱} = \frac{x+۵}{۷} \Rightarrow ۳x^۲ + ۱۵x + x + ۵ = ۷ax - ۷$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + (۱۶-۷a)x + ۱۲ = ۰ \quad (۱)$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (۱۶-۷a)^۲ - ۱۲^۲ = ۰ \Rightarrow (۱۶-۷a)^۲ = ۱۲^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱۶-۷a = ۱۲ \\ ۱۶-۷a = -۱۲ \end{cases}$$

باید معادلهٔ (۱) ریشهٔ مضاعف مثبت داشته باشد، بنابراین $۱۶ - ۷a < ۰$ است.

$$۱۶ - ۷a = -۱۲ \Rightarrow ۷a = ۲۸ \Rightarrow a = ۴$$

۱۴۹ گزینه ۱

ابتدا توابع f و g را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x+۸}-\sqrt{x}}{\frac{۱}{\sqrt{x+۸}+\sqrt{x}}} \Rightarrow \frac{f}{g} = x+۸-x \Rightarrow \frac{f}{g} = ۸$$

از عبارت بالا مشتق می‌گیریم:

$$\frac{f'\cdot g - g'\cdot f}{g^۲} = ۰ \Rightarrow f'\cdot g - g'\cdot f = ۰$$

یعنی حاصل عبارت خواسته شده همواره بر روی تمام نقاط صفر است.

۱۵۰ گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx+a-b & ;x\geq k \\ ۲ax+b & ;x<k \end{cases}$$

$$\lim_{x\to k} f(x)=f(k)\Rightarrow ak^{۲}+bk+a-b=۲ak+b$$

$$\Rightarrow ak^{۲}+(b-۲a)k+a-۲b=۰ \qquad (۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ax+b & ;x\geq k \\ ۲a & ;x<k \end{cases}$$

$$f'_{+}(k)=f'_{-}(k)\Rightarrow ۲ak+b=۲a \qquad (۲)$$

$$(۱)\,,\,(۲)\;:\;ak^{۲}+(۲a-۲ak-۲a)k+a-۲(۲a-۲ak)=۰$$

$$\Rightarrow ak^{۲}-۲ak^{۲}+a-۴a+۴ak=۰$$

$$\Rightarrow -ak^{۲}+۴ak-۳a=۰\Rightarrow -k^{۲}+۴k-۳=۰\Rightarrow k=۱,۳$$

۱۵۱ گزینه ۳

$$g'(x)f'(g(x))=(fog)'(x)$$

$$x>۰:g(x)=\frac{۱}{۲x^{۵}} \quad , \quad x>۰:f(x)=\frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))\overset{x>۰}{=}-\frac{۱}{\sqrt[۵]{۲(\frac{۱}{۲x^{۵}})}}=-x$$

$$(fog)'(x)=-۱\Rightarrow (fog)'(\sqrt[۵]{۳})=g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))=-۱$$

۱۵۲ گزینه ۱

خط d را به معادلهٔ $y=k$ فرض می‌کنیم. قرینهٔ سهمی نسبت به محور xها به‌صورت $y=-x^{۲}-۱$ می‌باشد. اگر خط و سهمی در دو نقطه متقاطع باشند، پس:

$$-x^{۲}-۱=k\Rightarrow x^{۲}=-k-۱\Rightarrow x=\pm\sqrt{-k-۱}$$

شیب مماس‌ها عبارت‌اند از:

$$y'=-۲x\Rightarrow m=\pm ۲\sqrt{-k-۱}$$

اگر این دو شیب بر هم عمود باشند، پس:

$$-۲\sqrt{-k-۱}\times ۲\sqrt{-k-۱}=-۱\Rightarrow ۴(-k-۱)=۱\Rightarrow -k-۱=\frac{۱}{۴}\Rightarrow k=-\frac{۵}{۴}$$

فاصلهٔ خط d یعنی $y=-\frac{۵}{۴}$ از مبدأ برابر $\frac{۵}{۴}$ یعنی ۱/۲۵ است.

۱۵۳ گزینه ۱

$$y = fog(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'(۲) = g'(۲)f'(g(۲)) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(\frac{۴+۱}{۲-۱}) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(۵) \quad (۱)$$

$$g(x) = \frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow g'(x) = \frac{۲(x-۱)-(۲x+۱)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow g'(۲) = -۳$$

$$(۱) : ۶ = -۳f'(۵) \Rightarrow f'(۵) = -۲$$

۱۵۴ گزینه ۴

اطلاعات مسئله نشان می‌دهد که $f(-۱) = ۵$ و $f'(-۱) = -\frac{۱}{۲}$ است.

$$g(x) = \sqrt[۳]{x}f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}f(x) + \sqrt[۳]{x}f'(x)$$

$$g'(-۱) = \frac{۱}{۳}f(-۱) - f'(-۱) = \frac{۱}{۳} \times ۵ + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۳}{۶}$$

۱۵۵ گزینه ۳

$x = ۱$، عرض دو تابع را مقدار یکسانی قرار می‌دهد:

$$۲ + b = \frac{۱+a}{a+۱} = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

پس توابع به صورت $y = ۲x - ۱$ و $y = \frac{x+a}{ax+۱}$ هستند و در $x = ۱$ مشتق یکسانی دارند.

$$y' = ۲$$

$$y' = \frac{۱-a^۲}{(ax+۱)^۲} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱-a^۲}{(a+۱)^۲}$$

حال داریم:

$$\frac{۱-a^۲}{(a+۱)^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{۱-a}{(a+۱)} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲a + ۲ = ۱ - a \Rightarrow ۳a = -۱ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۳}$$

$$a - b = -\frac{۱}{۳} + ۱ = \frac{۲}{۳}$$

۱۵۶ گزینه ۳

$$۶y - ۳x = ۱ \Rightarrow y = \frac{x}{۲} + \frac{۱}{۶} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۱}{۲}$$

چون خط مماس بر منحنی بر خط داده‌شده عمود است، شیب آن ۲- است. حالا داریم:

$$y' = ۲x - ۴ \Rightarrow ۲x - ۴ = -۲ \Rightarrow x = ۱ \xrightarrow{\text{نقطه}} (۱,\ ۲)$$

۱۵۷ گزینه ۳

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱) در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x = a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \to (-۲)^-} f(x) = \lim_{x \to (-۲)^+} f(x) = f(-۲)$$

$$\lim_{x \to (-۲)^-} \sqrt{۵ - ۲x} = \sqrt{۵ - ۲(-۲)} = ۳$$

$$\lim_{x \to (-۲)^+} (-\frac{۱}{۲}x^۲ + bx + c) = -\frac{۱}{۲}(-۲)^۲ + b(-۲) + c = -۲ - ۲b + c$$

$$f(-۲) = \sqrt{۵ - ۲(-۲)} = ۳$$

$$\Rightarrow -۲ - ۲b + c = ۳ \Rightarrow -۲b + c = ۵ \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(-۲) = f'_+(-۲)$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = \dfrac{-۲}{۲\sqrt{۵ - ۲x}} \Rightarrow f'_-(-۲) = \dfrac{-۲}{۲ \times ۳} = -\dfrac{۱}{۳} \\ f'_+(x) = -x + b \Rightarrow f'_+(-۲) = ۲ + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳} = ۲ + b \Rightarrow b = -\frac{۷}{۳} \xrightarrow{(*)} -۲(-\frac{۷}{۳}) + c = ۵$$

$$\Rightarrow c = ۵ - \frac{۱۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

۱۵۸ گزینه ۱

آهنگ متوسط تابع اول : $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{2\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}=\dfrac{-1-0}{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{-4}{\pi}$

آهنگ متوسط تابع دوم : $\dfrac{(\sin^4\frac{\pi}{2}-\cos^4\frac{\pi}{2})-(\sin^4\frac{\pi}{4}-\cos^4\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}$

$$=\frac{(1-0)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{4})}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

از تقسیم دو مقدار حاصل، به ۱- می‌رسیم.

۱۵۹ گزینه ۲

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2(\frac{1}{2})-1}{2(1-1)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to1}\frac{2f'(x)}{2}=\lim_{x\to1}f'(x)$$

$$f(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x^2+x-1}\xrightarrow{\text{مشتق}}f'(x)=\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(2x^2+x-1)-(4x+1)(x^{\frac{3}{2}})}{(2x^2+x-1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=1}f'(1)=\frac{\frac{3}{2}(2+1-1)-(4+1)(1)}{(2+1-1)^2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

۱۶۰ گزینه ۴

$$y'=\frac{(2x+m)(x+3)-(x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow y'(1)=\frac{(2+m)(4)-(m+2)}{16}=\frac{3m+6}{16}\quad(1)$$

$$4y-3x=n\Rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{n}{4}\Rightarrow y'(1)=\frac{3}{4}\quad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\frac{3m+6}{16}=\frac{3}{4}\Rightarrow 3m+6=12\Rightarrow 3m=6\Rightarrow m=2$$

$$y(1)=\frac{m+2}{4}\xrightarrow{m=2}y(1)=1$$

$$y-1=\frac{3}{4}(x-1)\Rightarrow 4y-3x=1\Rightarrow n=1$$

$$\Rightarrow m+n=2+1=3$$

۱۶۱ گزینه ۳

$$g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$$
$$x = -2 : g'(-2) = f'(-2+1) + 3f'(3(-2)+10)$$
$$= f'(-1) + 3f'(4)$$

تابع f دورهٔ تناوب ۵ دارد، پس $f'(-1) = f'(4)$:

$$g'(-2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

۱۶۲ گزینه ۳

تابع باید در $x = 2$ پیوسته باشد:

$$\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{8}{ax+b} = \dfrac{8}{2a+b} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-x^3+6x) = -8+12 = 4 \end{matrix} \Rightarrow \frac{8}{2a+b} = 4 \Rightarrow 2a+b = 2$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-8a}{(ax+b)^2} & ; x > 2 \\ -3x^2 + 6 & ; x \le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(2) = \dfrac{-8a}{(2a+b)^2} = \dfrac{-8a}{2^2} = -2a \\ f'_-(2) = -12+6 = -6 \end{cases} \Rightarrow -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \quad , \quad b = -4$$

۱۶۳ گزینه ۳

تابع P به‌صورت زیر است:

$$P(x) = ax^{۲} + bx + c$$

P' به‌صورت زیر است:

$$P'(x) = ۲ax + b$$

سؤال گفته اگر P را بر P' تقسیم کنیم، خارج‌قسمت $\frac{x}{۲} + ۱$ و باقی‌مانده ۲− است. اتحاد تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x) = P'(x).\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) + (-۲) \Rightarrow ax^{۲} + bx + c = (۲ax + b)\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) - ۲$$

$$\Rightarrow ax^{۲} + bx + c = ax^{۲} + \left(۲a + \frac{b}{۲}\right)x + (b - ۲)$$

ضرایب عبارات هم‌درجه را برابر قرار می‌دهیم:

$$x^{۲} \text{ ضرایب} \Rightarrow a = a$$
$$x \text{ ضرایب} \Rightarrow b = ۲a + \frac{b}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲b = ۴a + b \Rightarrow b = ۴a$$
$$\text{جملات درجه صفر} \Rightarrow c = b - ۲$$

a، b و c، سه عدد طبیعی‌اند. چون می‌خواهیم کمترین مقدار $a + b + c$ را حساب کنیم، پس باید در رابطهٔ $b = ۴a$، $a = ۱$ و $b = ۴$ باشد، پس:

$$c = b - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$$

$$\Rightarrow \min(a + b + c) = ۱ + ۴ + ۲ = ۷$$

۱۶۴ گزینه ۲

$$f(x) = x\sqrt[۳]{\frac{۳x + ۱}{x + ۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{\frac{۳x + ۱}{x + ۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۳(x + ۲) - (۳x + ۱)}{(x + ۲)^{۲}} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{\left(\frac{۳x + ۱}{x + ۲}\right)^{۲}}} \times x$$

$$= \sqrt[۳]{\frac{۳x + ۱}{x + ۲}} + \frac{۵x}{۳(x + ۲)^{۲}\sqrt[۳]{\left(\frac{۳x + ۱}{x + ۲}\right)^{۲}}} \xrightarrow{x = -۳} ۲ - \frac{۵}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

۱۶۵ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ;۰\le x<۴\\ \left[\frac{x}{۴}\right](x^۲-۹x) & ;۴\le x<۸\end{cases}$$

$$۲<۴\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^۲+۶x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}=\frac{x+۳}{\sqrt{x^۲+۶x}}\quad (I)$$

$$۵>۴\Rightarrow f(x)=\left[\frac{x}{۴}\right](x^۲-۹x)\ ,\ \left[\frac{۵}{۴}\right]=۱\Rightarrow f'(x)=۲x-۹\quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

$$\xrightarrow{(II)} f'(۵)=۱$$

پس $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$ است.

۱۶۶ گزینه ۴

می‌دانیم: $(fog(x))'=g'(x)\,f'(g(x))$

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}}{\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}=\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{-۲\times\frac{۳}{\sqrt{۸}}}{۳\sqrt[۳]{(\frac{۹}{۸}-۱)^۴}}=\frac{\frac{-۶}{\sqrt{۸}}}{۳\times\frac{۱}{۱۶}}=\frac{-۶\times ۱۶}{۳\sqrt{۸}}=\frac{-۱۶}{\sqrt{۲}}=-۸\sqrt{۲}$$

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}}=۲$$

حال باید $f'(۲)$ را حساب کنیم. در همسایگی $x=۲$ حاصل براکت ۴ می‌شود.

$$f(x)=۱۶x^۲+۱\Rightarrow f'(x)=۳۲x\Rightarrow f'(۲)=۶۴$$

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-۸\sqrt{۲}\times ۶۴=(-۱۲۸\sqrt{۲})\times ۴$$

۱۶۷ گزینه ۴

با اطلاعات مسئله داریم:

$$P(x)=(x^۲+۲x)Q(x)+۳x+۱\quad (۱)$$

از طرفین رابطهٔ (۱) مشتق می‌گیریم:

$$P'(x)=(۲x+۲)Q(x)+(x^۲+۲x)Q'(x)+۳$$

$$P'(-۲)=-۲Q(-۲)+۳=-۲(۳)+۳=-۳$$

۱۶۸ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}ax^{۲}+۵x+b & ;x\le ۲\\ ۲ax+۵ & ;x>۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲ax+۵ & ;x\le ۲\\ ۲a & ;x>۲\end{cases}$$

$$f'_{+}(۲)=f'_{-}(۲)\Rightarrow ۴a+۵=۲a\Rightarrow a=\frac{-۵}{۲}$$

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲}f(x)\Rightarrow ۴a+۱۰+b=۴a+۵\Rightarrow b=-۵$$

$$a+b=\frac{-۵}{۲}-۵=\frac{-۱۵}{۲}$$

۱۶۹ گزینه ۴

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}\Rightarrow g'(x)=\frac{۰-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}-۱}}}{x^{۲}-۱}=\frac{-x}{(x^{۲}-۱)\sqrt{x^{۲}-۱}}$$

$$g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{\frac{-\sqrt{۵}}{۲}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}}=-۴\sqrt{۵}$$

در حالتی که f' وجود داشته باشد، داریم:

$$f(x)=(x[x])^{۳}\Rightarrow f'(x)=۳(x[x])^{۲}[x]$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^{-}\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۵}{۴}^{-}-۱}}=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^{-}}}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^{-}}=۲^{+}$$

$$y=(fog)(x)\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$y'((\frac{\sqrt{۵}}{۲})^{-})=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^{-})=(-۴\sqrt{۵})f'(۲^{+})=(-۴\sqrt{۵})\times ۳(۴)^{۲}\times ۲=(-۴۸\sqrt{۵})(۸)$$

۱۷۰ گزینه ۴

راه‌حل اول: وارون تابع را حساب می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow y\sqrt{x}-y=\sqrt{x}+1\Rightarrow \sqrt{x}(y-1)=y+1\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{y+1}{y-1}$$

$$\Rightarrow x=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2\Rightarrow f^{-1}(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2=g(x)$$

$$g'(x)=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\times\frac{-2}{(x-1)^2}\Rightarrow g'(2)=2\times 3\times\frac{-2}{1}=-12$$

راه‌حل دوم: اگر نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر f^{-1} باشد، آنگاه متناظر با آن نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر f خواهد بود.

$$2=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow 2\sqrt{x}-2=\sqrt{x}+1\Rightarrow x=9$$

پس نقطهٔ $A(9,2)$ روی f قرار دارد.

$$f'(x)=\frac{-2}{(\sqrt{x}-1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(9)=\frac{-2}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{-1}{12}$$

پس شیب خط مماس بر f^{-1} در نقطهٔ $A'(2,9)$ برابر -12 است.

۱۷۱ گزینه ۴

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{(x^2+2x)'(x^2-x)^3-((x^2-x)^3)'(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$=\frac{(2x+2)(x^2-x)^3-(3(2x-1)(x^2-x)^2)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(2)=\frac{6\times\cancel{1}-3\times 3\times 4\times\cancel{1}}{\underset{8}{\cancel{64}}}=-\frac{15}{4}$$

۱۷۲ گزینه ۴

$$f(x) = \left(\frac{۲x - x^۲}{۳x + ۵}\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۲x - x^۲}{۳x + ۵}\right)^{\frac{-۱}{۳}}\left(\frac{(۲ - ۲x)(۳x + ۵) - ۳(۲x - x^۲)}{(۳x + ۵)^۲}\right)$$

$$\Rightarrow f'(-۲) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{-۴ - ۴}{-۶ + ۵}\right)^{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۶(-۱) - ۳(-۴ - ۴)}{(-۶ + ۵)^۲}\right)$$

$$= \frac{۲}{۳}(۸)^{\frac{-۱}{۳}}(-۶ + ۲۴) = \frac{۲ \times ۱۸}{۳\sqrt[۳]{۸}} = ۶$$

۱۷۳ گزینه ۴

ازآنجاکه این دو نمودار در یک نقطه بر یک خط مماس هستند، پس هم مقادیر و هم مشتق‌هایشان در این نقطه برابر است. داریم:

$$y_۱ = x\sqrt{x} \Rightarrow y'_۱ = \sqrt{x} + \frac{x}{۲\sqrt{x}}$$

$$y_۲ = x^۲ + ax + b \Rightarrow y'_۲ = ۲x + a$$

$$y'_۱(۴) = y'_۲(۴) \Rightarrow ۲ + \frac{۴}{۴} = ۸ + a \Rightarrow a = -۵$$

و نیز داریم:

$$y_۱(۴) = y_۲(۴) \Rightarrow ۸ = ۱۶ - ۵(۴) + b \Rightarrow ۸ = -۴ + b \Rightarrow b = ۱۲$$

۱۷۴ گزینه ۴

$$\begin{cases} f(۲) = \dfrac{۲ + ۲}{۲ - ۱} = ۴ \\ g(۲) = ۴a + ۲b \end{cases} \xrightarrow{f(۲)=g(۲)} ۴a + ۲b = ۴ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x - ۱ - (x + ۲)}{(x - ۱)^۲} = \dfrac{-۳}{(x - ۱)^۲} \Rightarrow f'(۲) = -۳ \\ g'(x) = ۲ax + b \Rightarrow g'(۲) = ۴a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=g'(۲)} ۴a + b = -۳ \quad (۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۴a + ۲b = ۴ \\ ۴a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow b = ۷$$

۱۷۵ گزینه ۴

$$y = \sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}$$

آهنگ متوسط در بازهٔ $[۵ , ۶]$ برابر است با:

$$\frac{f(۶) - f(۵)}{۶ - ۵} = \frac{\sqrt{۲۱ - ۳۶ + ۲۴} - \sqrt{۲۱ - ۲۵ + ۲۰}}{۱} = \frac{\sqrt{۹} - \sqrt{۱۶}}{۱} = -۱$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y' = \frac{-۲x + ۴}{۲\sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}} = \frac{\cancel{۲}(-x + ۲)}{\cancel{۲}\sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}} = \frac{-x + ۲}{\sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$$\frac{-x + ۲}{\sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x}} = -۱ \Rightarrow x - ۲ = \sqrt{۲۱ - x^۲ + ۴x} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲ - ۴x + ۴ = ۲۱ - x^۲ + ۴x \Rightarrow ۲x^۲ - ۸x - ۱۷ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۸ \pm \sqrt{۲۰۰}}{۴} = ۲ \pm \frac{۵}{۲}\sqrt{۲} \xrightarrow[(*)]{x \geq ۲} x = ۲ + \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

۱۷۶ گزینه ۳

$$f(x) = \frac{۵x - ۴}{\sqrt{x}}$$

حال $f(۴)$ و $f'(۴)$ را به دست آورده و معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$f(۴) = \frac{۵ \times ۴ - ۴}{\sqrt{۴}} = \frac{۱۶}{۲} = ۸$$

$$f'(x) = \frac{۵\sqrt{x} - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵x - ۴)}{x} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱۰ - \frac{۱}{۴}(۱۶)}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ خط مماس:

$$y - f(۴) = f'(۴)(x - ۴) \Rightarrow y - ۸ = \frac{۳}{۲}(x - ۴)$$

$$\xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}} y - ۸ = \frac{۳}{۲}(-۴) \Rightarrow y - ۸ = -۶ \Rightarrow y = ۲$$

۱۷۷ گزینه ۴

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[\text{۰},\text{۲}]$:

$$\frac{f(\text{۲})-f(\text{۰})}{\text{۲}-\text{۰}}=\frac{\text{۱۲}-\text{۲}}{\text{۲}}=\text{۵}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع، همان مشتق است:

$$f'(x)=\text{۱}\times\sqrt{\text{۴}x+\text{۱}}+\frac{\text{۴}}{\text{۲}\sqrt{\text{۴}x+\text{۱}}}(x+\text{۲})\xrightarrow{x=\frac{\text{۳}}{\text{۴}}}f'\left(\frac{\text{۳}}{\text{۴}}\right)=\frac{\text{۱۹}}{\text{۴}}$$

تفاضل مقادیر به دست آمده برابر است با:

$$\text{۵}-\frac{\text{۱۹}}{\text{۴}}=\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$$

۱۷۸ گزینه ۱

تابع f در $x=\text{۲}$ مشتق‌پذیر است، پس بایستی در $x=\text{۲}$ پیوسته باشد و همچنین مشتق چپ و راست تابع در $x=\text{۲}$ برابر باشند.

$$f(\text{۲})=\lim_{x\to\text{۲}^+}f(x)=\lim_{x\to\text{۲}^-}f(x)$$

$$\Rightarrow\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\times\text{۴}+\text{۲}a+b=|\text{۴}-\text{۴}|\Rightarrow\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\times\text{۴}+\text{۲}a+b=\text{۰}$$

$$\Rightarrow\text{۲}a+b=-\text{۲}\quad(\text{۱})$$

تابع f را در همسایگی چپ $x=\text{۲}$ (به دلیل وجود قدرمطلق) تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^{\text{۲}}-\text{۲}x=\text{۰}\Rightarrow x=\text{۰},\text{۲}$$

x		۰		۲	
$x^{\text{۲}}-\text{۲}x$	+	۰	−	۰	+

بنابراین باتوجه‌به جدول تعیین علامت اگر $\text{۰}<x<\text{۲}$ باشد، $|x^{\text{۲}}-\text{۲}x|=\text{۲}x-x^{\text{۲}}$ است.

$$f(x)=\begin{cases}x^{\text{۲}}-\text{۲}x & ;x<\text{۰}\\ -x^{\text{۲}}+\text{۲}x & ;\text{۰}\le x<\text{۲}\\ \frac{\text{۱}}{\text{۲}}x^{\text{۲}}+ax+b & ;x\ge\text{۲}\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\text{۲}x-\text{۲} & ;x<\text{۰}\\ -\text{۲}x+\text{۲} & ;\text{۰}<x<\text{۲}\\ x+a & ;x\ge\text{۲}\end{cases}$$

$$f'_+(\text{۲})=f'_-(\text{۲})\Rightarrow\text{۲}+a=-\text{۲}(\text{۲})+\text{۲}\Rightarrow a=-\text{۴}$$

$$(\text{۱})\xrightarrow{a=-\text{۴}}-\text{۸}+b=-\text{۲}\Rightarrow b=\text{۶}$$

$$\Rightarrow a+b=\text{۲}$$

۱۷۹ گزینه ۳

فرض دوم مسئله، تعریف مشتق تابع $f(x)$ در $x=۲$ است:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

$$g(۱)=۱+\sqrt{۱}=۲$$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$(fog)'(۱)=g'(۱)\times f'(g(۱))=g'(۱)\times f'(۲)=\frac{۴}{۳}g'(۱)$$

ازطرفی:

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow g'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=۱} g'(۱)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

درنتیجه:

$$(fog)'(۱)=\frac{۴}{۳}g'(۱)=\frac{۴}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۲$$

۱۸۰ گزینه ۳

$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ برابر $f'(۴)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ کافی است $f'(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)+۲(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(۵-۸)+۲(۱+۲)}{(۵-۸)^{۲}}=\frac{-\frac{۳}{۴}+۶}{۹}=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}$$

۱۸۱ گزینه ۲

زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که در $x=۲$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x=۲$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)\Rightarrow -۴+۲a+b=۱\Rightarrow ۲a+b=۵\quad (۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{(x-۱)^{۲}} & ;x\geq ۲\\ -۲x+a & ;x<۲\end{cases}$$

$$f'_{-}(۲)=f'_{+}(۲)\Rightarrow -۴+a=-۱\Rightarrow a=۳$$

$$(۱):۶+b=۵\Rightarrow b=-۱$$

۱۸۲ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=x+\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow f'(۲)=۲+\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

آهنگ تغییر متوسط : $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{\frac{۳۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{۱۱}{۴}$

اختلاف : $\frac{۱۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۲}{۴}=۰/۵$

۱۸۳ گزینه ۲

آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۰,۴]$ $=\frac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰}=\frac{(\sqrt{۹}+\frac{۱}{۵})-(\sqrt{۱}+\frac{۱}{۱})}{۴-۰}=\frac{\frac{۶}{۵}}{۴}=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}-\frac{۱}{(x+۱)^۲}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=\frac{۳}{۲}$ $=f'(\frac{۳}{۲})=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{(\frac{۵}{۲})^۲}=\frac{۱}{۲}-\frac{۴}{۲۵}=۰/۵-۰/۱۶=۰/۳۴$

$\Rightarrow$ آهنگ تغییر لحظه‌ای − آهنگ تغییر متوسط $=۰/۳۴-۰/۳=۰/۰۴$

۱۸۴ گزینه ۳

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۵\\ f(۸)=\frac{۲۷}{۹}=۳\end{cases}\Rightarrow m=\frac{۳-(-۵)}{۸-۰}=۱$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x)=\frac{۴(x+۱)-(۴x-۵)}{(x+۱)^۲}\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱\Rightarrow(x+۱)^۲=۹$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۳\Rightarrow x=۲ & \text{ق.ق}\\ x+۱=-۳\Rightarrow x=-۴ & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x=۲$ بر منحنی مماس است:

$$f(۲)=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow(۲,۱),m=۱$$

$$y-۱=۱(x-۲)\xrightarrow{x=۰}y=-۱$$

۱۸۵ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{|x|\,|x^{۲}-۲|}{x}$$

دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. تابع f در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق یعنی $\pm\sqrt{۲}$ مشتق ندارد. همچنین در ریشهٔ مخرج یعنی $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

دقت کنید که تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری روی دامنه دو نقطه و روی $\mathbb{R}$ سه نقطه است. منظور سؤال بررسی مشتق‌ناپذیری روی $\mathbb{R}$ است.

۱۸۶ گزینه ۳

حاصل $f'(\frac{۱}{۴})$ را می‌خواهیم:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}}\frac{-\frac{۱}{۲}-۱(-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

گزینه ۴

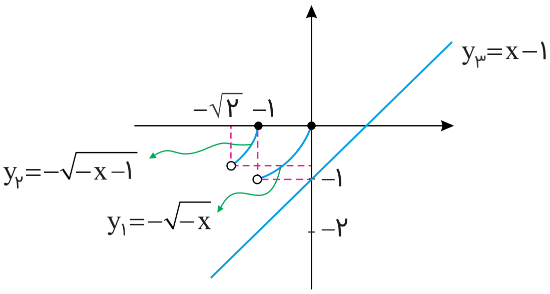
$$y=-\sqrt{-x-[x^۲]}$$

$$-x-[x^۲]\geq ۰ \Rightarrow -x\geq [x^۲]$$

$$-۱<x<۰ \Rightarrow ۰<x^۲<۱ \Rightarrow [x^۲]=۰ \Rightarrow y=-\sqrt{-x}$$

$$-\sqrt{۲}<x<-۱ \Rightarrow ۱<x^۲<۲ \Rightarrow [x^۲]=۱ \Rightarrow y=-\sqrt{-x-۱}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x} & ;x\in(-۱,۰) \\ -\sqrt{-x-۱} & ;x\in(-\sqrt{۲},-۱) \\ ۰ & ;x=۰,-۱ \end{cases}$$



کمترین فاصله را می‌خواهیم، بنابراین تنها فاصلهٔ $y_۱$ تا $y_۳$ را در نظر می‌گیریم.

نقطهٔ $A(x,-\sqrt{-x})$ را روی $y_۱$ در نظر می‌گیریم:

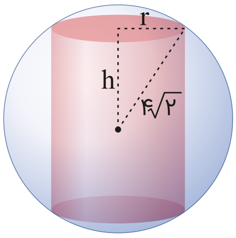
$$A(x,-\sqrt{-x}) \xrightarrow{x-y-۱=۰} AH=\frac{|x+\sqrt{-x}-۱|}{\sqrt{۱+۱}} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow AH'=\frac{|۱+\frac{-۱}{۲\sqrt{-x}}|}{\sqrt{۲}}=۰$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲\sqrt{-x}}=۰ \Rightarrow \sqrt{-x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{(*)} AH=\frac{|-\frac{۱}{۴}+\sqrt{\frac{۱}{۴}}-۱|}{\sqrt{۲}}=\frac{|-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$$

۱۸۸ گزینه ۲



$h^{۲}+r^{۲}=۳۲ \Rightarrow h=\sqrt{۳۲-r^{۲}}$

مساحت جانبی $: f=۲\pi r\times ۲h=۴\pi r\sqrt{۳۲-r^{۲}}=۴\pi\sqrt{۳۲r^{۲}-r^{۴}}$

$f'=۴\pi\times\dfrac{۶۴r-۴r^{۳}}{۲\sqrt{۳۲r^{۲}-r^{۴}}}=۰\ \begin{cases} r=۰ & \text{نادرست} \\ r=۴ & \text{درست}\end{cases}$

اگر $r=۴$ باشد $h=۴$ است.

$\max(S)=۴\pi(۴)(۴)=۶۴\pi$

۱۸۹ گزینه ۴

$\Delta_f=(۲-m)^{۲}-۲۰(m^{۲}-۱)>۰\Rightarrow ۱۹m^{۲}+۴m-۲۴<۰$

$\Rightarrow \dfrac{-۲-۲\sqrt{۱۱۵}}{۱۹}<m<\dfrac{-۲+۲\sqrt{۱۱۵}}{۱۹}\ , m\in(-۱,۱)\Rightarrow m\in(-۱,۱)$

$S=\alpha+\beta=\dfrac{m-۲}{m^{۲}-۱}\Rightarrow S'=\dfrac{m^{۲}-۱-۲m(m-۲)}{(m^{۲}-۱)^{۲}}=۰$

$\Rightarrow -m^{۲}+۴m-۱=۰\Rightarrow m^{۲}-۴m+۱=۰\Rightarrow m=\dfrac{۲\pm\sqrt{۴-۱}}{۱}=۲\pm\sqrt{۳}$

m	$-\infty$ … -۱	-۱ … ۲−√۳	۲−√۳	۲−√۳ … ۱	۱ … ۲+√۳	۲+√۳ … $+\infty$
S'		−	۰	+		
S		↘	min	↗		

$\Rightarrow m=۲-\sqrt{۳}\ ,\ \ \Delta_f>۰\ \min$

۱۹۰ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(۲x^۴-۴x^۲-x^۴+۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

x	-۲	$-\sqrt{۳}$	$-\sqrt{۲}$	-۱	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
f'	$-$ ۰ $+$ ن.ت $+$ ۰ $-$ ۰ $+$ ۰ $-$ ن.ت $-$ ۰ $+$								

در چهار بازه، تابع اکیداً نزولی است.

۱۹۱ گزینه ۲

برای نزولی بودن تابع هموگرافیک فوق لازم است $y'\leq ۰$، پس:

$$y'=\frac{m(-۱+m)-۲}{(x-۱+m)^۲}\Rightarrow m^۲-m-۲\leq ۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(m-۲)\leq ۰\Rightarrow -۱\leq m\leq ۲$$

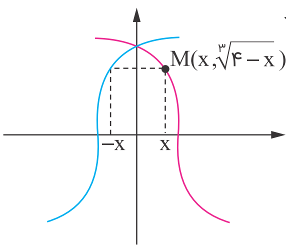
در ضمن مجانب قائم یعنی $x=۱-m$ نباید در منطقه $(۱,+\infty)$ باشد، پس:

$$۱-m\leq ۱\Rightarrow m\geq ۰$$

پس $۰\leq m\leq ۲$ و طبق صورت مسئله $m\neq ۲$، پس $m=۰\,,\,۱$، یعنی دو مقدار.

۱۹۲ گزینه ۴

نقطهٔ M را به‌صورت پارامتری روی تابع $y=\sqrt[۳]{۴-x}$ انتخاب می‌کنیم. مساحت مستطیل را تابعی از x در نظر می‌گیریم.



$$S(x)=۲x\sqrt[۳]{۴-x}=۲\sqrt[۳]{۴x^۳-x^۴}$$

کافی است $۴x^۳-x^۴$ را ماکزیمم کنیم.

$$g(x)=۴x^۳-x^۴\Rightarrow g'(x)=۱۲x^۲-۴x^۳=۰\xrightarrow{x>۰}x=۳$$

$$S_{max}=S(۳)=۲\times ۳\sqrt[۳]{۴-۳}=۶$$

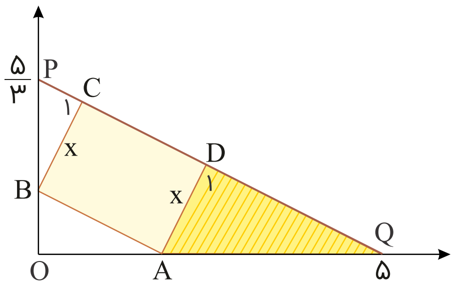
۱۹۳ گزینه ۱

$$y = x^{۳} - ۱۲x + ۲ \Rightarrow y' = ۳x^{۲} - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲$$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y		↗	۱۸	↘	-۱۴	↗	

بنابراین مقدار مینیمم نسبی برابر ۱۴− است.

۱۹۴ گزینه ۲



$$\begin{cases} C_۱ = O = ۹۰^\circ \\ \hat{P} = \hat{P} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{PBC} \sim \overset{\triangle}{OPQ} \Rightarrow \frac{PC}{OP} = \frac{BC}{OQ}$$

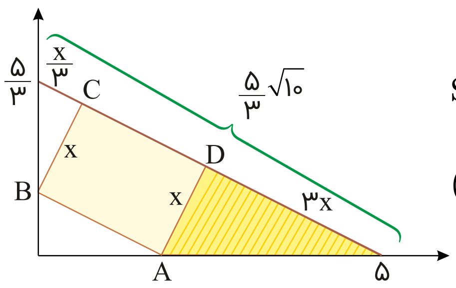
$$\Rightarrow PC = OP \times \frac{BC}{OQ} = \frac{۵}{۳} \times \frac{x}{۵} = \frac{x}{۳}$$

$$\begin{cases} D_۱ = O = ۹۰^\circ \\ \hat{Q} = \hat{Q} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADQ} \sim \overset{\triangle}{OPQ} \Rightarrow \frac{DQ}{OQ} = \frac{AD}{OP}$$

$$\Rightarrow DQ = OQ \times \frac{AD}{OP} = ۵ \times \frac{x}{\frac{۵}{۳}} = ۳x$$

$$PQ = \sqrt{۲۵ + \frac{۲۵}{۹}} = \sqrt{\frac{۱۰ \times ۲۵}{۹}} = \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}$$

$$CD = \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰} - \frac{x}{۳} - ۳x$$



$$S_{ABCD} = x \times CD = x\left(\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰} - \frac{x}{۳} - ۳x\right) = -\frac{۱۰}{۳}x^{۲} + \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}x$$

$$(S_{ABCD})' = -\frac{۲۰}{۳}x + \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰} \Rightarrow -\frac{۲۰}{۳}x + \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰} = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}}{-\frac{۲۰}{۳}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

حداکثر S در $x = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$ رخ می‌دهد، پس مساحت هاشورخورده برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}x \times ۳x = \frac{۳}{۲}x^{۲} = \frac{۳}{۲} \times \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۹۵ گزینه ۲

$$f(\circ) = ۴ \Rightarrow c = ۴$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b$$

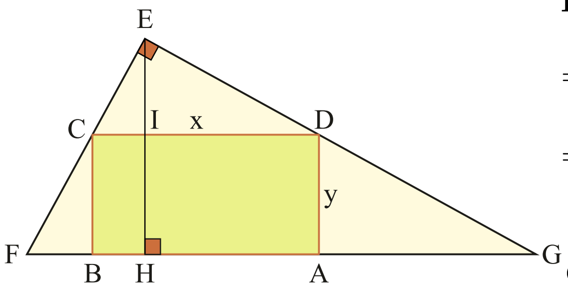
$$\Rightarrow \begin{cases} f'(\circ) = \circ \Rightarrow b = \circ \\ f'(x) = \circ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲ax = \circ \Rightarrow \begin{cases} x = \circ \\ x = -\frac{۲a}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

$$f(-\frac{۲a}{۳}) = \circ \Rightarrow (-\frac{۲a}{۳})^۳ + a(-\frac{۲a}{۳})^۲ + ۴ = \circ$$

$$-\frac{۸a^۳}{۲۷} + \frac{۴a^۳}{۹} + ۴ = \circ \Rightarrow \frac{۴a^۳}{۲۷} = -۴ \Rightarrow a^۳ = -۲۷$$

$$\Rightarrow a = -۳ \Rightarrow x_{min} = -\frac{۲a}{۳} = ۲$$

۱۹۶ گزینه ۴



$$EF = a\,,\ EG = ۲a$$

$$\Rightarrow FG = \sqrt{a^۲ + ۴a^۲} = \sqrt{۵}a$$

$$\Rightarrow EF \times EG = EH \times FG \Rightarrow EH = \frac{۲a \times a}{\sqrt{۵}a} = \frac{۲a}{\sqrt{۵}}$$

$$\frac{CD}{FG} = \frac{EI}{EH} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{۵}a} = \frac{\frac{۲a}{\sqrt{۵}} - y}{\frac{۲a}{\sqrt{۵}}} \Rightarrow \frac{۲x}{۵} = \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - y \Rightarrow y = \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - $$

$$S = xy = x(\frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۲x}{۵}) = \frac{۲ax}{\sqrt{۵}} - \frac{۲x^۲}{۵}$$

$$S' = \circ \Rightarrow \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۴x}{۵} = \circ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۵}}{۲}a \Rightarrow y = \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۲(\frac{\sqrt{۵}}{۲}a)}{۵} = \frac{a}{\sqrt{۵}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۲}a}{\frac{a}{\sqrt{۵}}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۱۹۷ گزینه ۲

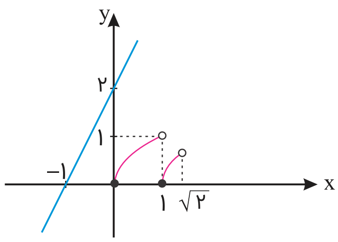
دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-[x^2]}$ به‌صورت $D_f=[0,\sqrt{2})$ است. داریم:

$$\begin{cases} 0\le x<1 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x} \\ 1\le x<\sqrt{2} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-1} \end{cases}$$

حال نمودار خط و منحنی را رسم می‌کنیم:

$$y=2x+2$$

x	0	-1
y	2	0



بنابراین به نظر می‌رسد کوتاه‌ترین فاصله مربوط به $0\le x<1$ است که منحنی به‌صورت $y=\sqrt{x}$ می‌باشد. نقطهٔ دلخواه روی منحنی به‌صورت $A(x,\sqrt{x})$ است، پس:

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2x-\sqrt{x}+2|}{\sqrt{5}}$$

قدر مطلق در $y'=0$ اثری ندارد، پس:

$$AH'=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=0\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{16}$$

پس:

$$AH_{\min}=\frac{\left|\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{5}}\times\frac{15\sqrt{5}}{8\times 5}=\frac{3\sqrt{5}}{8}$$

۱۹۸ گزینه ۱

اگر $x \geq 0$ باشد:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} + x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \geq 0 \Rightarrow x \neq 0 \quad (1)$$

اگر $x < 0$ باشد:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1$$
$$\Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\cap(x<0)} -1 \leq x < 0 \quad (2)$$

اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده $(0, +\infty) \cup [-1, 0)$ است، اما جواب درست $[-1, +\infty)$ است، زیرا $x = 0$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

۱۹۹ گزینه ۲

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

تابع f در $x = 1$ مجانب قائم دارد. پس نمی‌تواند در فاصلهٔ $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد و گزینهٔ ۱ حذف می‌شود.
برای $x > 1$ یا $0 < x < 1$، $x^2 - 1$ صعودی، درنتیجه $2\sqrt[3]{x^2 - 1}$ هم صعودی و مثبت است. $\frac{3}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ نزولی و درنتیجه $\frac{-3}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$
صعودی است. $2\sqrt{x}$ هم که صعودی است، پس $2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ هم صعودی می‌شود و گزینهٔ ۳ و ۴ حذف می‌شوند.
راه‌حل دوم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

اگر $x > 0$ باشد، $f'(x)$ همواره مثبت است.

۲۰۰ گزینه ۲

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - x^2} & ; x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1 + x^2} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} & ; x \geq 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 1 + x^2 = 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \\ \dfrac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} & ; x < 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پس فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد.
تذکر: ضابطهٔ اول y' در $x = 1$ مشتق ندارد، اما چون عضو دامنهٔ f نیست بحرانی نمی‌باشد.

۲۰۱ گزینه ۲

دامنهٔ تابع $D_f = [\circ, \frac{a}{۲}]$ است.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۲}{۲\sqrt{a-۲x}} = \circ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x}} = \frac{۲}{\sqrt{a-۲x}} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۴}{a-۲x}$$

$$\Rightarrow ۴x = a - ۲x \Rightarrow x = \frac{a}{۶} \in [\circ, \frac{a}{۲}]$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{\circ, \frac{a}{۶}, \frac{a}{۲}\}$ می‌باشد. اکنون مقادیر نقاط بحرانی را حساب می‌کنیم.

$$f(\circ) = \sqrt{a}\ ,\ f(\frac{a}{۶}) = \sqrt{\frac{a}{۶}} + \sqrt{a - \frac{a}{۳}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} + \frac{۲\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} = \frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$$

$$f(\frac{a}{۲}) = \sqrt{\frac{a}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$$

بنابراین $\max f(x) = \frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$ و $\min f(x) = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$ است. پس:

$$\frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} = \sqrt{۱۲} \Rightarrow \frac{۳a\sqrt{۳}}{۶} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow [a] = ۴$$

۲۰۲ گزینه ۱

ریشه‌های مشتق تابع باید ۲- و صفر باشد.

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax - ۲b$$

پس:

$$\xrightarrow{(\circ,\circ)} b = \circ$$

$$\xrightarrow{(-۲,\circ)} ۳(-۲)^۲ + ۲a(-۲) = \circ \Rightarrow ۱۲ - ۴a = \circ \Rightarrow a = ۳$$

حال ریشه‌های مشتق را در تابع اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$y = x^۳ + ۳x^۲ - ۴$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=\circ} (\circ, -۴) \\ \xrightarrow{x=-۲} (-۲, \circ) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله}} \sqrt{(-۲-\circ)^۲ + (\circ+۴)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲\circ} = ۲\sqrt{۵}$$

۲۰۳ گزینه ۳

A نقطه : $(a, a^۲)$

A' نقطه : $(a^۲, a)$

$y = x$ با f تقاطع $\Rightarrow x^۲ = x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases} \Rightarrow a \in (۰, ۱)$

$$AA' = \sqrt{(a^۲ - a)^۲ + (a - a^۲)^۲} = \sqrt{۲}\,|a^۲ - a|$$

$$\xrightarrow{a\in(۰,۱)} \sqrt{۲}\,(a - a^۲) = -\sqrt{۲}a^۲ + \sqrt{۲}a$$

$$\xrightarrow{\max} \frac{-\Delta}{۴a} = -\frac{\sqrt{۲}^۲ - ۰}{۴(-\sqrt{۲})} = \frac{۲}{-۴\sqrt{۲}} = -\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

چون طول پاره‌خط مدنظر است، پس مثبت درنظر می‌گیریم.

تذکر: با استفاده از مشتق AA' نیز می‌توان به جواب رسید.

۲۰۴ گزینه ۲

$$g(x) = \frac{x^۲(x^۲ - ۴)}{x^۲ - ۱} = \frac{x^۴ - ۴x^۲}{x^۲ - ۱}$$

$$g'(x) = \frac{(۴x^۳ - ۸x)(x^۲ - ۱) - ۲x(x^۴ - ۴x^۲)}{(x^۲ - ۱)^۲}$$

$$= \frac{۲x[(۲x^۲ - ۴)(x^۲ - ۱) - x^۴ + ۴x^۲]}{(x^۲ - ۱)^۲} = \frac{۲x(x^۴ - ۲x^۲ + ۴)}{(x^۲ - ۱)^۲}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & ; |x| \geq ۲ \\ -g(x) & ; |x| < ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & ; |x| > ۲ \\ -g'(x) & ; |x| < ۲ \end{cases}$$

تابع f' در سه نقطهٔ $x = ۲$، $x = -۲$ و $x = ۰$ تغییر علامت می‌دهد.

۲۰۵ گزینه ۱

نقطهٔ $B(x, \sqrt{۲x + ۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵, ۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x - ۵)^۲ + (\sqrt{۲x + ۷} - ۰)^۲}$$

$$= \sqrt{x^۲ - ۱۰x + ۲۵ + ۲x + ۷} = \sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{۲x - ۸}{۲\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}} = \frac{x - ۴}{\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}}$$

$$(AB)' = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow B(۴, \sqrt{۱۵})$$

کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. درنتیجه داریم:

$$A(۵, ۰), B(۴, \sqrt{۱۵}) \Rightarrow AB = \sqrt{(۵ - ۴)^۲ + (۰ - \sqrt{۱۵})^۲} = ۴$$

۲۰۶ گزینه ۱

$$f'(x) = 1 + \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{4x - x^2} = x - 2 \ \ (*)$$

باتوجه‌به معادله باید $x - 2 \geq 0$ باشد، یعنی: $x \geq 2$

حال معادلهٔ $(*)$ را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} & \text{قابل‌قبول} \\ x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} & (x \geq 2 \ \text{غیرقابل‌قبول زیرا}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{4(2 + \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})^2}$$

$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}) \ \ \text{ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

۲۰۷ گزینه ۲

طول ضلع قاعده را a و ارتفاع را h می‌نامیم، داریم:

$$V = a^2h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{a^2}$$

مقدار حلب برابر $4ah + a^2$ است:

$$S = 4ah + a^2 = \frac{16}{a} + a^2$$

مشتق می‌گیریم و برابر صفر می‌گذاریم:

$$S = \frac{16}{a} + a^2 \Rightarrow S' = \frac{-16}{a^2} + 2a = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow h = 1$$

$$S = 8 + 4 = 12$$

پس مقدار حلب برابر ۱۲ است.

۲۰۸ گزینه ۲

$$y' = ۰ \Rightarrow ۳ax^۲ + ۲bx + c = ۰$$

ریشه‌های این معادله ۰ و ۱ هستند، پس $c = ۰$ است. داریم:

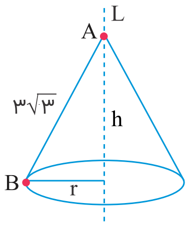
$$۳ax^۲ + ۲bx = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۳a + ۲b = ۰$$

ازطرفی چون $(۰ , ۰)$ در تابع صدق می‌کند، پس $d = ۰$ است.

$$y = ax^۳ + bx^۲ \xrightarrow{(۱,۱)} ۱ = a + b$$

$$\begin{cases} a + b = ۱ \\ ۳a + ۲b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۳ \end{cases} \Rightarrow ab = -۶$$

۲۰۹ گزینه ۲



$$r^۲ + h^۲ = (۳\sqrt{۳})^۲ = ۲۷ \Rightarrow r^۲ = ۲۷ - h^۲$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{\pi}{۳}(۲۷ - h^۲)h = \frac{\pi}{۳}(۲۷h - h^۳)$$

$$V' = ۰ \Rightarrow ۲۷ - ۳h^۲ = ۰ \Rightarrow h^۲ = ۹ \Rightarrow h = ۳$$

۲۱۰ گزینه ۱

$$A(-۱, ۱) : ۱ = (-۱)^۲|-۱| + ۳a(-۱)^۲ + b$$

$$\Rightarrow ۱ + ۳a + b = ۱ \Rightarrow ۳a + b = ۰ \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-۱) = ۰ \\ x = -۱ < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = -x^۳ + ۳ax^۲ + b$$

$$\Rightarrow f'(x) = -۳x^۲ + ۶ax \xrightarrow{x=-۱} f'(-۱) = -۳ - ۶a = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{*} ۳(\frac{-۱}{۲}) + b = ۰ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = -۳$$

۲۱۱ گزینه ۳

$$f(x) = ۲x^{۳} - ۳x^{۲} - ۱۲x + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۶x^{۲} - ۶x - ۱۲ = ۶\left(x^{۲} - x - ۲\right) = ۶(x-۲)(x+۱)$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

اکسترمم‌های تابع در $x = -۱$ و $x = ۲$ رخ می‌دهند.

$$f(-۱) = ۸ \Rightarrow \max : (-۱, ۸) \qquad f(۲) = -۱۹ \Rightarrow \min : (۲, -۱۹)$$

$$\text{AB شیب} : \frac{۸ - (-۱۹)}{-۱ - ۲} = \frac{۲۷}{-۳} = -۹$$

مشتق را برابر ۹− قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = ۶x^{۲} - ۶x - ۱۲ = -۹ \Rightarrow ۶x^{۲} - ۶x - ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰$$

۲ نقطه با این ویژگی وجود دارد.

۲۱۲ گزینه ۴

$$f(x) = \frac{x^{۴}}{x^{۳} - ۸} \Rightarrow f'(x) = \frac{۴x^{۳}(x^{۳} - ۸) - ۳x^{۲}x^{۴}}{(x^{۳} - ۸)^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^{۳}(۴x^{۳} - ۳۲ - ۳x^{۳})}{(x^{۳} - ۸)^{۲}} = \frac{x^{۳}(x^{۳} - ۳۲)}{(x^{۳} - ۸)^{۲}}$$

x	$-\infty$		۰		۲		$\sqrt[۳]{۳۲}$		$+\infty$
f′ (x)		+	۰	−	ت ن	−	۰	+	

تابع در بازه‌های $(۰, ۲)$ و $(۲, \sqrt[۳]{۳۲}]$ نزولی اکید است. طول بازه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$۲ - ۰ = ۲$$

$$\sqrt[۳]{۳۲} - ۲ = \sqrt[۳]{۸ \times ۴} - ۲ = ۲(\sqrt[۳]{۴} - ۱) \simeq ۱/۱۷$$

۲۱۳

گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع $f(x) = x|۳ - x^۲|$ را حساب می‌کنیم:

$$۳ - x^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \in D \\ x = -\sqrt{۳} \notin D \end{cases}$$

$$(x(۳ - x^۲))' = ۰ \Rightarrow (۳x - x^۳)' = ۰ \Rightarrow ۳ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \in D \\ x = -۱ \in D \end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-۱, ۱, \sqrt{۳}, -۱/۵\}$ خواهد بود.

$$f(۱) = ۲\ ,\ f(-۱) = -۲\ ,\ f(\sqrt{۳}) = ۰$$

$$f(-۱/۵) = f(-\frac{۳}{۲}) = -\frac{۳}{۲}|۳ - \frac{۹}{۴}| = \frac{-۳}{۲} \times \frac{۳}{۴} = \frac{-۹}{۸}$$

کمترین مقدار تابع ۲− خواهد بود.

۲۱۴

گزینه ۲

نقطهٔ A را $A(x, \sqrt[۳]{-x})$ با فرض $x \in [۰, ۱]$ در نظر می‌گیریم، دراین‌صورت $A'(\sqrt[۳]{x}, -x)$ خواهد بود.

$$AA' = \sqrt{(x - \sqrt[۳]{x})^۲ \times ۲} = \sqrt{۲}|\underbrace{x - \sqrt[۳]{x}}_{g(x)}|$$

$$g(x) = x - \sqrt[۳]{x}\ ,\ x \in [۰, ۱]$$

حال بیشترین مقدار $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$g'(x) = ۱ - \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = ۰ \Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x^۲} = ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲۷} \Rightarrow x = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$g(۰) = g(۱) = ۰\ ,\ g(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}) = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}} - \sqrt[۳]{\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}} = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-۲}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\max(AA') = \sqrt{۲}|\frac{-۲}{۳\sqrt{۳}}| = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$$

۲۱۵ گزینه ۱

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow (۲x+۲)\,(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \cancel{۲x^۳}+۲x+۲x^۲+۲-\cancel{۲x^۳}-۴x^۲+۶x=۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۲+۸x+۲=۰\Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۲۰\Rightarrow x=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۵}}{۲}=۲\pm\sqrt{۵}$$

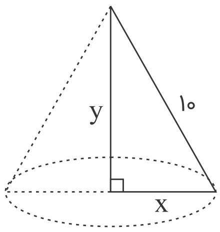
x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
f'		$-$		$+$		$-$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	$-۱+\sqrt{۵}$ max	$\searrow$	

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}$$

$$=\frac{۹+۴\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}+۱}{۹+۴\sqrt{۵}+۱}=\frac{۱۰+۶\sqrt{۵}}{۱۰+۴\sqrt{۵}}=\frac{۵+۳\sqrt{۵}}{۵+۲\sqrt{۵}}\times\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۵-۲\sqrt{۵}}=-۱+\sqrt{۵}$$

گزینه ۴

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^{۲} + y^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱۰۰ - y^{۲} \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^{۲} y \xrightarrow{(*)} V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - y^{۲})y = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰y - y^{۳})$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^{۲}) \Rightarrow \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ - ۳y^{۲} = ۰ \Rightarrow y^{۲} = \frac{۱۰۰}{۳}$$

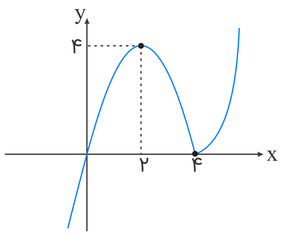
$$\Rightarrow x^{۲} = ۱۰۰ - y^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۳۰۰ - ۱۰۰}{۳} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{۲}}{y^{۲}} = \frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}} = ۲ \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{۲}$$

۲۱۷ گزینه ۴

$$f(x) = x|x-۴| = \begin{cases} x^۲ - ۴x & ; x \geq ۴ \\ ۴x - x^۲ & ; x < ۴ \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:

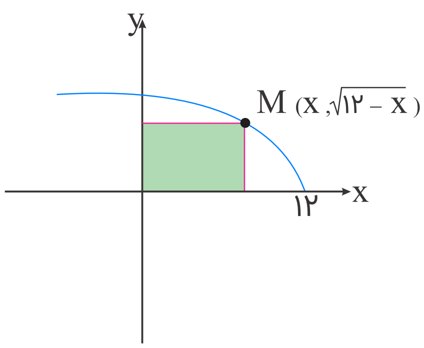


این تابع در $(۴, ۰)$ مینیمم نسبی و در $(۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(۲-۴)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۲۱۸ گزینه ۳

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



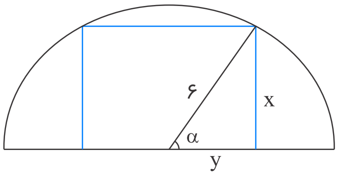
مساحت مستطیل ساخته‌شده برابر $S(x) = x\sqrt{۱۲-x}$ است.

$$S' = \sqrt{۱۲-x} - \frac{x}{۲\sqrt{۱۲-x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۲(۱۲-x)-x}{۲\sqrt{۱۲-x}} = ۰$$

$$۲۴ - ۲x - x = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow S_{max} = ۸\sqrt{۱۲-۸} = ۱۶$$

گزینه ۴

راه‌حل اول:

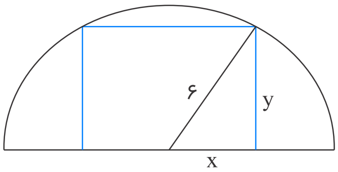


$$\sin\alpha = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۶\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{y}{۶} \Rightarrow y = ۶\cos\alpha$$

مساحت مستطیل : $S = x(۲y) = ۲(۳۶)\sin\alpha\cos\alpha = ۳۶\sin ۲\alpha$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin ۲\alpha = ۱$ باشد. بنابراین: $S_{max} = ۳۶$

راه‌حل دوم:

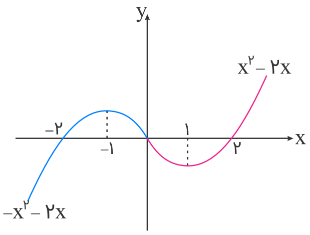


$$x^۲ + y^۲ = ۳۶ \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S = ۲xy = ۲x\sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S' = ۲\sqrt{۳۶ - x^۲} + \frac{-۴x^۲}{۲\sqrt{۳۶ - x^۲}} = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$
$$S_{max} = ۲ \times ۳\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۳۶$$

۲۲۰ گزینه ۱

$$f(x) = x|x| - ۲x = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ - ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

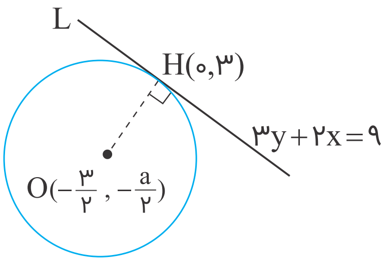


$$\begin{cases} x \geq ۰ : f'(x) = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x < ۰ : f'(x) = -۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

باتوجه‌به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-۱, ۱)$ و $(۱, -۱)$ است، پس فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

فاصله : $\sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۱+۱)^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$

۲۲۱ گزینه ۴



OH بر خط L عمود است.

$$\frac{-\frac{a}{۲} - ۳}{-\frac{۳}{۲} - ۰} \times \frac{-۲}{۳} = -۱$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{۲} + ۳}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۲} + ۳ = \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\times ۴}$$

$$۲a + ۱۲ = ۹ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲} = -۱/۵$$

۲۲۲ گزینه ۲

طبق فرض، کانون‌های این بیضی، نقاط $F(۳,۰)$ و $F'(-۳,۰)$ می‌باشند. بنابراین:

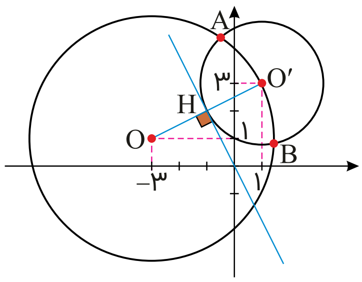
$$FF' = ۳-(-۳) = ۶ \Rightarrow ۲c = ۶ \Rightarrow c = ۳ \quad (۱)$$

$$e = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{(۱)} \frac{۳}{a} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = ۹ \quad (۲)$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{(۱),(۲)} ۸۱ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b^۲ = ۷۲ \Rightarrow b = ۶\sqrt{۲}$$

$$\text{طول قطر کوچک} = ۲b = ۲(۶\sqrt{۲}) = ۱۲\sqrt{۲}$$

۲۲۳ گزینه ۳



$$C(O,r) : O(-۳,۱)$$

$$OH = O'H = r' = \frac{|۱-۶|}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵} \Rightarrow r = ۲\sqrt{۵} \qquad (*)$$

$$x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y = a$$

$$r = \frac{\sqrt{۳۶+۴+۴a}}{۲} = \frac{\sqrt{۴۰+۴a}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۱۰+a}}{۲} = \sqrt{۱۰+a} \qquad (**)$$

$$۲\sqrt{۵} = \sqrt{۱۰+a} \Rightarrow ۱۰+a = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۰$$

$$O(-۳,۱) \xrightarrow[\text{محور تقارن}]{y=-۲x} O'(۱,۳) \ ,\ r' = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow C' : (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵$$

معادلهٔ دو دایرهٔ C و C' را برابر قرار می‌دهیم تا طول نقاط برخورد به دست آید:

$$x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y - ۱۰ = (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ - ۵$$

$$\Rightarrow ۸x + ۴y = ۱۵ \Rightarrow y = -۲x + \frac{۱۵}{۱۴}$$

این رابطه را در معادلهٔ دایرهٔ C' قرار می‌دهیم:

$$(x-۱)^۲ + \left(-۲x + \frac{۱۵}{۴} - ۳\right)^۲ - ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ - ۵x - \frac{۵۵}{۱۶} = ۰ \Rightarrow x_A + x_B = -\frac{b}{a} = +\frac{۵}{۵} = ۱$$

گزینه ۲

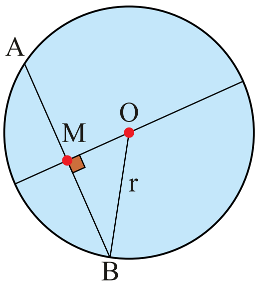
$$x^{۲} + y^{۲} - ۳x - ۵y + \frac{۱}{۲} = ۰$$

نقطه $(-۱, \frac{۵}{۲})$ را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم:

$$(-۱)^{۲} + (\frac{۵}{۲})^{۲} - ۳(-۱) - ۵(\frac{۵}{۲}) + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{۲۵}{۴} + ۳ - \frac{۲۵}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{-۷}{۴}$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = ۲\sqrt{\frac{۷}{۴}} = \sqrt{۷}$$

برای به دست آوردن طول کوتاه‌ترین وتر از روش دیگری نیز می‌توان استفاده کرد:

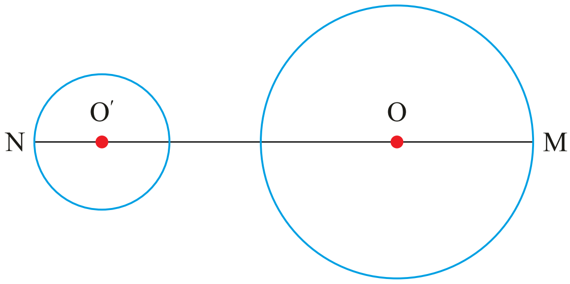


$$O(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}) \, , \, M(-۱, \frac{۵}{۲}) \Rightarrow OM = \frac{۵}{۲}$$

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۹ + ۲۵ - ۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲} \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

$$\Rightarrow AB = ۲ \times \frac{\sqrt{۷}}{۲} = \sqrt{۷}$$

گزینه ۲



$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y - a = ۰ \Rightarrow O(۱, -۱)\,,\ r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ + ۴a} = \sqrt{۲ + a}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y + ۶a = ۰$$

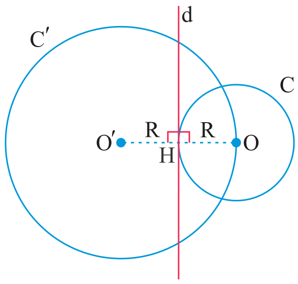
$$\Rightarrow O'(-۲, ۳)\,,\ r' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ - ۲۴a} = \sqrt{۱۳ - ۶a}$$

$$OO' = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

$$MN = ۵ + \sqrt{۲ + a} + \sqrt{۱۳ - ۶a} = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

گزینه ۱

دایرهٔ کوچک را $C(O\,,\,R)$ و دایرهٔ بزرگ را $C'(O'\,,\,۲R)$ می‌نامیم. حال داریم:



$$C : x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y - r = ۰ \Rightarrow O = (-۳\,,\,۱)\,,\, R = \sqrt{۹ + ۱ + r} = \sqrt{۱۰ + r}$$

چون خط $d : x - y = ۰$ بر دایرهٔ C مماس است، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d، برابر شعاع دایره است و داریم:

$$R = |OH| = \frac{|-۳-۱|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow C : (x+۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۸$$

چون خط d (نیمساز ربع اول و سوم) عمودمنصف OO' است، O' بازتاب O نسبت به d (نیمساز ربع اول و سوم) می‌باشد، پس $O' = (۱, -۳)$ و معادلهٔ دایرهٔ C' به‌صورت $(x-۱)^۲ + (y+۳)^۲ = ۳۲$ است. حال معادله‌های دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادلهٔ وتر مشترک آن‌ها به دست آید:

$$\left.\begin{array}{l} C : (x+۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۸ \\ C' : (x-۱)^۲ + (y+۳)^۲ = ۳۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} \text{وتر مشترک} : x - y = -۳$$

$$\Rightarrow \text{وتر مشترک} : y = x + ۳$$

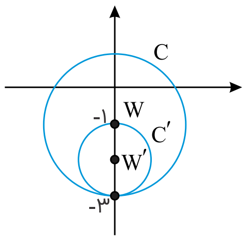
در پایان، محل برخورد وتر مشترک و دایرهٔ C را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = x + ۳ \\ (x+۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۸ \end{cases} \Rightarrow (x+۳)^۲ + (x+۲)^۲ = ۸$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ + ۱۰x + ۵ = ۰ \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \frac{۵}{۲}$$

۲۲۷ گزینه ۴

$C: x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow W(۰, -۱) \ , \ r = ۲$



درواقع چون دایرهٔ C از $(۰, -۳)$ عبور می‌کند، اگر دایرهٔ جدید بخواهد با دایرهٔ قبلی مماس داخل باشد و از این نقطه نیز بگذرد تنها حالت آن است که نقطهٔ تماس همین نقطه باشد. درنتیجه $W'(۰, -۲)$ و $r' = ۱$ خواهد بود.

$C': \ (x - ۰)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$

۲۲۸ گزینه ۲

دایرهٔ اول:

$x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x = ۰ \ \Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۵$

$O_۱(۲, -۱) \quad , \quad r_۱ = \sqrt{۵}$

دایرهٔ دوم:

$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۲ \Rightarrow x^۲ + (y - ۱)^۲ = ۳$

$O_۲(۰, ۱) \quad , \quad r_۲ = \sqrt{۳}$

$O_۱O_۲ = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow O_۱O_۲ \simeq ۲/۸$

$r_۱ + r_۲ \simeq ۳/۹$

$|r_۱ - r_۲| = ۰/۵$

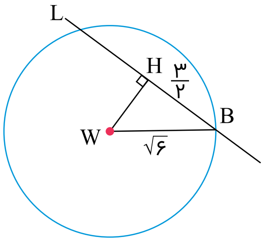
$\Rightarrow ۰/۵ < O_۱O_۲ < ۳/۹$

پس دو دایره متقاطع‌اند.

۲۲۹ گزینه ۴

مرکز و شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

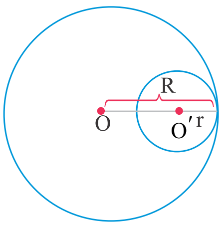
$$W(۲,-۱) \quad , \quad r=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$$



$$|WH|=\frac{|-۲+۲-a|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|a|}{\sqrt{۵}}$$

$$W\overset{\Delta}{H}B:\ ۶=\frac{۹}{۴}+\frac{a^۲}{۵}\Rightarrow\frac{a^۲}{۵}=\frac{۱۵}{۴}\Rightarrow a^۲=\frac{۷۵}{۴}\Rightarrow\begin{cases}a_۱=\dfrac{۵\sqrt{۳}}{۲}\\ a_۲=-\dfrac{۵\sqrt{۳}}{۲}\end{cases}\Rightarrow|a_۱-a_۲|=۵\sqrt{۳}$$

۲۳۰ گزینه ۱



شعاع دایرهٔ بزرگ را R و شعاع دایرهٔ کوچک را r فرض می‌کنیم. چون دایره‌ها مماس داخل‌اند، داریم:

$$\text{طول خط‌المرکزین}=R-r\xrightarrow{\text{فرض سوال}}R-r=۳/۵=\frac{۷}{۲}\quad(*)$$

$$S_{\text{ناحیهٔ بین}}=۲۱\pi\Rightarrow S_{\text{دایره بزرگ}}-S_{\text{دایرهٔ کوچک}}=۲۱\pi$$

$$\Rightarrow\pi R^۲-\pi r^۲=۲۱\pi\Rightarrow R^۲-r^۲=۲۱\Rightarrow(R-r)(R+r)=۲۱$$

$$\xrightarrow{(*)}\frac{۷}{۲}(R+r)=۲۱\Rightarrow R+r=۶\xrightarrow{(*)}\begin{cases}R+r=۶\\ R-r=۳/۵\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}۲r=۲/۵\Rightarrow r=۱/۲۵$$

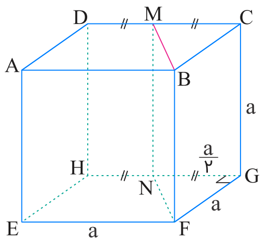
یال BF از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های EF، FG، AE، BC و CG باشد، زیرا در این صورت صفحهٔ گذرنده از BF و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط DH باشد، زیرا در این صورت، صفحهٔ گذرنده از AB و این نقطه، صفحهٔ قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطهٔ موردنظر، نقطهٔ M وسط یال CD است. (دقت کنید که برای یال‌های AD, EH, GH هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطهٔ M را به نقطهٔ N وسط HG وصل می‌کنیم. پس $MN||BF$ و درنتیجه صفحهٔ گذرنده از BF و M، از نقطهٔ N هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را V_1، حجم بزرگ‌تر را V_2 و حجم مکعب را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a^3$$

$$V_1 = S_{\overset{\Delta}{GFN}} \times CG = \frac{1}{2}(a)(\frac{a}{2})(a) = \frac{a^3}{4}$$

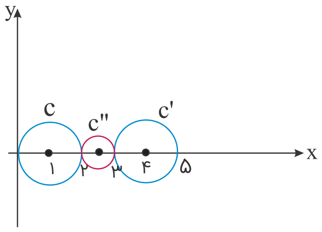
$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{3a^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$$



۲۳۲ گزینه ۲

مرکز و شعاع دو دایره را یافته و آن‌ها را رسم می‌کنیم.



$$C: x^{۲} + y^{۲} - ۲x = ۰ \Rightarrow O = (۱, ۰), R = \sqrt{\frac{۴ + ۰ + ۰}{۴}} = ۱$$

$$C': x^{۲} + y^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow O' = (۴, ۰), R' = \sqrt{\frac{۶۴ + ۰ - ۴(۱۵)}{۴}} = ۱$$

مطابق شکل، دایرهٔ موردنظر، دایرهٔ C'' به مرکز $O''(\frac{۵}{۲}, ۰)$ و شعاع $R'' = \frac{۱}{۲}$ است که معادلهٔ آن را می‌یابیم:

$$C'': (x - \frac{۵}{۲})^{۲} + (y - ۰)^{۲} = (\frac{۱}{۲})^{۲}$$

$$\Rightarrow C'': x^{۲} - ۵x + \frac{۲۵}{۴} + y^{۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow C'': x^{۲} + y^{۲} - ۵x + ۶ = ۰$$

۲۳۳ گزینه ۲

$$\begin{cases} c = ۱۲ \\ ۲b = ۱۸ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵$$

$$\Rightarrow a = ۱۵ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

۲۳۴ گزینه ۱

ابتدا با دادن دو مقدار دلخواه $m = ۲$ و $m = -۱$ به معادلهٔ قطرهای دایره، معادلهٔ دو تا از قطرها را یافته و سپس آن‌ها را قطع می‌دهیم تا مرکز دایره به دست آید:

$$\left.\begin{matrix} m = ۲ \Rightarrow ۳y = ۶ \Rightarrow y = ۲ \\ m = -۱ \Rightarrow -۳x = ۶ \Rightarrow x = -۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow O(-۲, ۲)$$

حال چون نقطهٔ $A(-۱, ۱)$ روی دایره است، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است. بنابراین:

$$R = |OA| = \sqrt{(-۱ + ۲)^{۲} + (۱ - ۲)^{۲}} = \sqrt{۲}$$

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi R = ۲\pi(\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}\pi$$

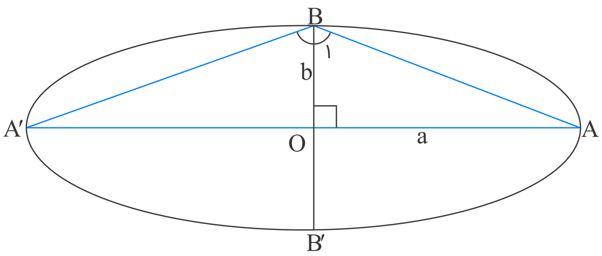
۲۳۵ گزینه ۳

$$e=\sqrt{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow\frac{c^{۲}}{a^{۲}}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a^{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۱-(\frac{b}{a})^{۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow(\frac{b}{a})^{۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\frac{a}{b}=\sqrt{۳}\quad(*)$$

حال باتوجه‌به شکل زیر، داریم:



$$O\overset{\Delta}{A}B\ :\tan\hat{B}_{۱}=\frac{a}{b}\xrightarrow{(*)}\tan\hat{B}_{۱}=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\hat{B}_{۱}=۶۰^{\circ}\Rightarrow\hat{B}=۲\hat{B}_{۱}=۱۲۰^{\circ}$$

۲۳۶ گزینه ۲

طبق فرض، داریم:

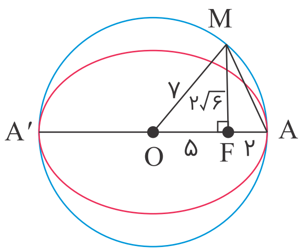
$$\left.\begin{array}{l} AA' = ۲a = ۱۴ \Rightarrow a = ۷ \\ BB' = ۲b = ۴\sqrt{۶} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۶} \end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} ۴۹ = ۲۴ + c^۲$$

$$\Rightarrow c^۲ = ۲۵ \Rightarrow c = ۵ \Rightarrow OF = ۵ \xrightarrow{OA = a = ۷} AF = ۷ - ۵ = ۲$$

OM شعاع دایره است $\Rightarrow OM = OA = a = ۷$

$\overset{\triangle}{OFM}$: فیثاغورس $\Rightarrow FM^۲ = OM^۲ - OF^۲ = ۴۹ - ۲۵ = ۲۴ \Rightarrow FM = ۲\sqrt{۶}$

$\overset{\triangle}{AFM}$: فیثاغورس $\Rightarrow AM = \sqrt{FM^۲ + FA^۲} = \sqrt{۲۴ + ۴} = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$



۲۳۷ گزینه ۱

معادلهٔ گستردهٔ دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادلهٔ وتر مشترک به دست آید:

$$\text{وتر مشترک} : (x^۲ + y^۲ + ۲x - ۳) - (x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳) = ۰$$
$$\Rightarrow \text{وتر مشترک} : ۲x - ۲y = ۰ \Rightarrow \text{وتر مشترک} : x = y$$

معادلهٔ درجه اولی که از کم کردن معادلهٔ دو دایره به دست می‌آید، حتما معادلهٔ وتر مشترک است، چون هم یک معادلهٔ درجه اول است و هم (x, y) این خط در هر دو دایره صدق می‌کند.

۲۳۸ گزینه ۴

فاصلهٔ کانون‌های $F'(۲, -۱)$ و $F(۲, ۷)$ برابر $۲c$ است.

$$۲c = |FF'| = |۷ - (-۱)| = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

در بیضی رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.

$$a^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

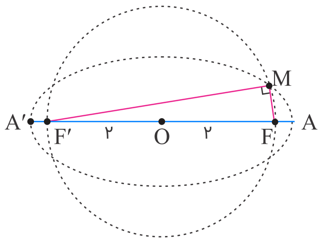
گزینه ۲

باتوجه‌به معلومات سؤال، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{طول قطر بزرگ} = ۲a = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow a = \sqrt{۵} \\ \text{طول قطر کوچک} = ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱\end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} c = ۲$$

پس $OF = OF' = ۲$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط F و F' روی دایره‌اند. پس FF' قطر دایره است و چون زاویهٔ FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

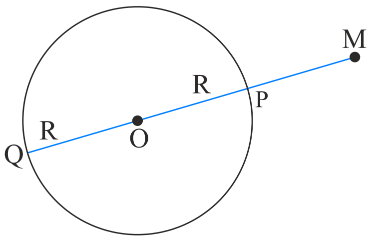
$$\overset{\Delta}{MFF'} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = ۴^۲ = ۱۶$$



گزینه ۴

نکته: نقطهٔ M و دایرهٔ $C\,(O,R)$ مفروض‌اند. در این صورت:

$$\text{کمترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره} = MP = |OM - R|$$
$$\text{بیشترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره} = MQ = OM + R$$



ابتدا محل برخورد قطرها را می‌یابیم تا مرکز دایره و فاصلهٔ M از مرکز، مشخص شود:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases} \Rightarrow O=(۲,-۱) \xrightarrow{M=(۴,-۲)} |OM|=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره از خط $۴x+۳y+۵=۰$ را می‌یابیم تا شعاع دایره، مشخص شود:

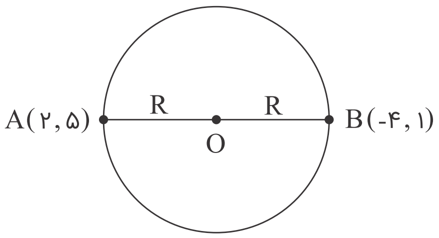
$$R=|OH|=\frac{|۴\,(۲)+۳\,(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

درنهایت طبق نکتهٔ فوق داریم:

$$\text{کمترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره} = |OM - R| = \sqrt{۵}-۲$$

۲۴۱ گزینه ۱

کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از A و B، دایره‌ای است که AB یک قطر آن باشد.



حال داریم:

O وسط AB است. $\Rightarrow O = \dfrac{A+B}{۲} = (-۱\,,\,۳)$

$$R = |OA| = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

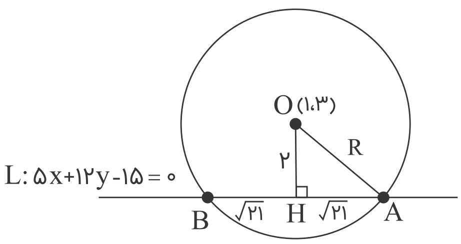
$$\Rightarrow \text{دایره} : (x+۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۳$$

$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور x ها}} (x+۱)^۲ + (۰-۳)^۲ = ۱۳$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow x+۱ = \pm ۲ \Rightarrow x = ۱\,,\ x = -۳$$

۲۴۲ گزینه ۴

از مرکز دایره بر خط $L : ۵x + ۱۲y - ۱۵ = ۰$ عمود می‌کنیم، پس $AH = HB = \sqrt{۲۱}$ و داریم:



$$|OH| = \frac{|۵(۱) + ۱۲(۳) - ۱۵|}{\sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

$$\overset{\triangle}{OHA} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow R^۲ = ۲^۲ + (\sqrt{۲۱})^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow \text{دایره} : (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور xها، مقدار y را در معادلهٔ دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(x-۱)^۲ + (۰-۳)^۲ = ۲۵ \Rightarrow (x-۱)^۲ + ۹ = ۲۵ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۱۶$$

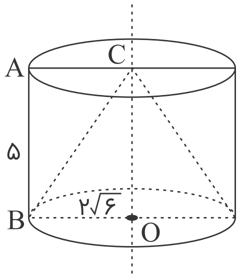
$$\Rightarrow x-۱ = \pm ۴ \Rightarrow x = -۳\,,\ x = ۵$$

$$\Rightarrow \text{نقاط برخورد با محور x ها} : (-۳\,,\,۰)\,,\,(۵\,,\,۰)$$

$$\Rightarrow \text{طول پاره‌خط حاصل} = ۵ - (-۳) = ۸$$

۲۴۳ گزینه ۴

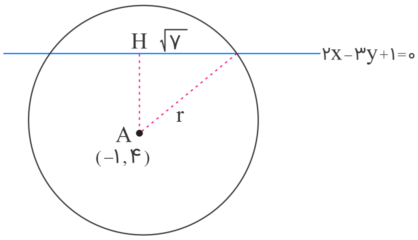
مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:



$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) - \frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) = \frac{۲}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)$$
$$= \frac{۲}{۳}\pi(۲۴)(۵) = ۸۰\pi$$

۲۴۴ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH = \frac{|۲(-۱) - ۳(۴) + ۱|}{\sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

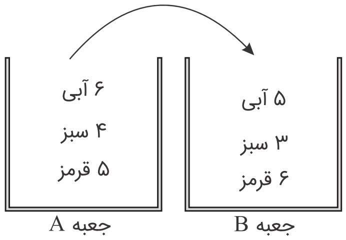
همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^۲ = AH^۲ + \sqrt{۷}^۲ \Rightarrow r^۲ = ۱۳ + ۷ = ۲۰$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x+۱)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲۰ \xrightarrow{y=۲} (x+۱)^۲ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۱۶$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۵ \end{cases}$$

گزینه ۱



احتمال آبی بودن را $\mathrm{P}(\mathrm{C})$ در نظر می‌گیریم. احتمال آبی بودن مهره انتخابی از جعبه B برابر است با:

$$\mathrm{P}(\mathrm{C})=\frac{۶}{۱۵}\times\frac{۶}{۱۵}+\frac{۹}{۱۵}\times\frac{۵}{۱۵}=\frac{۸۱}{۲۲۵}=۰/۳۶$$

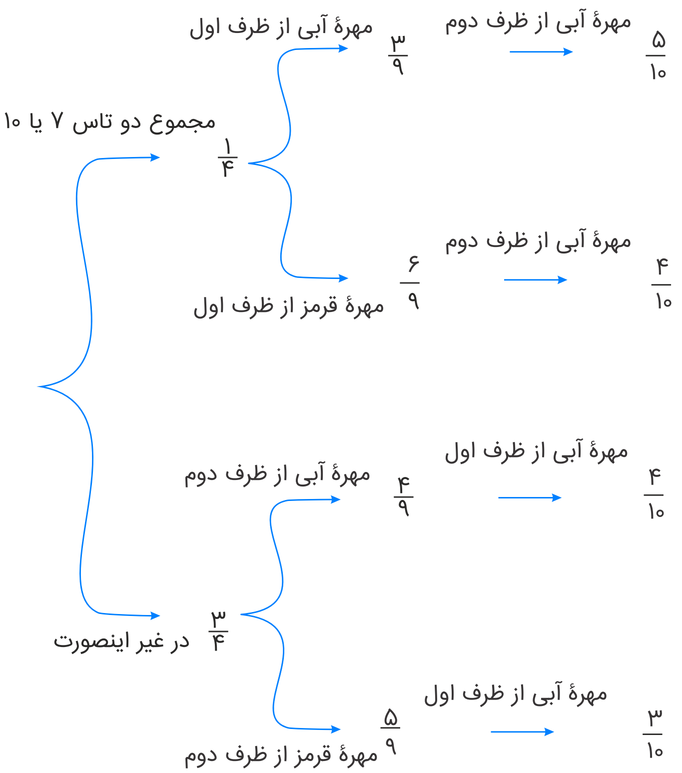
۲۴۶ گزینه ۲

$\text{مجموع دو تاس ۷ یا ۱۰} = \{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴)$

$,(۴,۳),(۴,۶),(۶,۴),(۵,۵)\} \Rightarrow \text{۹ عضو}$

$$P(\text{مجموع دو تاس ۷ یا ۱۰}) = \frac{۹}{۳۶}$$

$$P(\text{مجموع دو تاس غیر از ۷ یا ۱۰}) = \frac{۲۷}{۳۶}$$



با فرمول احتمال کل داریم:

$$\frac{۱}{۴}\left(\frac{۳}{۹}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۶}{۹}\times\frac{۴}{۱۰}\right)+\frac{۳}{۴}\left(\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۵}{۹}\times\frac{۳}{۱۰}\right)=\frac{۱۱}{۳۰}$$

۲۴۷ گزینه ۴

$$۰/۴\times۰/۲۵+۰/۳۵\times۰/۳+۰/۲۵\times۰/۳۵=۰/۱+۰/۱۰۵+۰/۰۸۷۵=۰/۲۹۲۵$$

۲۹/۲۵ درصد احتمال دارد امیر در رشته پزشکی قبول شود.

۲۴۸ گزینه ۱

با استفاده از فرمول احتمال کل داریم:

$$P=۰/۴۵\times۰/۲+۰/۲\times۰/۲۵+۰/۳۵\times۰/۳=۰/۲۴۵$$

۲۴۹ گزینه ۴

پرتاب دو سکه :

- جفت رو : $\frac{۱}{۴}$ ⇒ یک سکه می‌اندازیم $\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}$ صفر
- (رو, پشت) : $\frac{۱}{۴}$ ⇒ دو سکه می‌اندازیم $\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}$ یکی پشت و یکی رو می‌خواهیم : $\frac{۱}{۲}$
- (پشت, رو) : $\frac{۱}{۴}$ ⇒ دو سکه می‌اندازیم $\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}$ یکی پشت و یکی رو می‌خواهیم : $\frac{۱}{۲}$
- جفت پشت : $\frac{۱}{۴}$ ⇒ یک سکه می‌اندازیم $\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}$ یک رو ظاهر شود : $\frac{۱}{۲}$

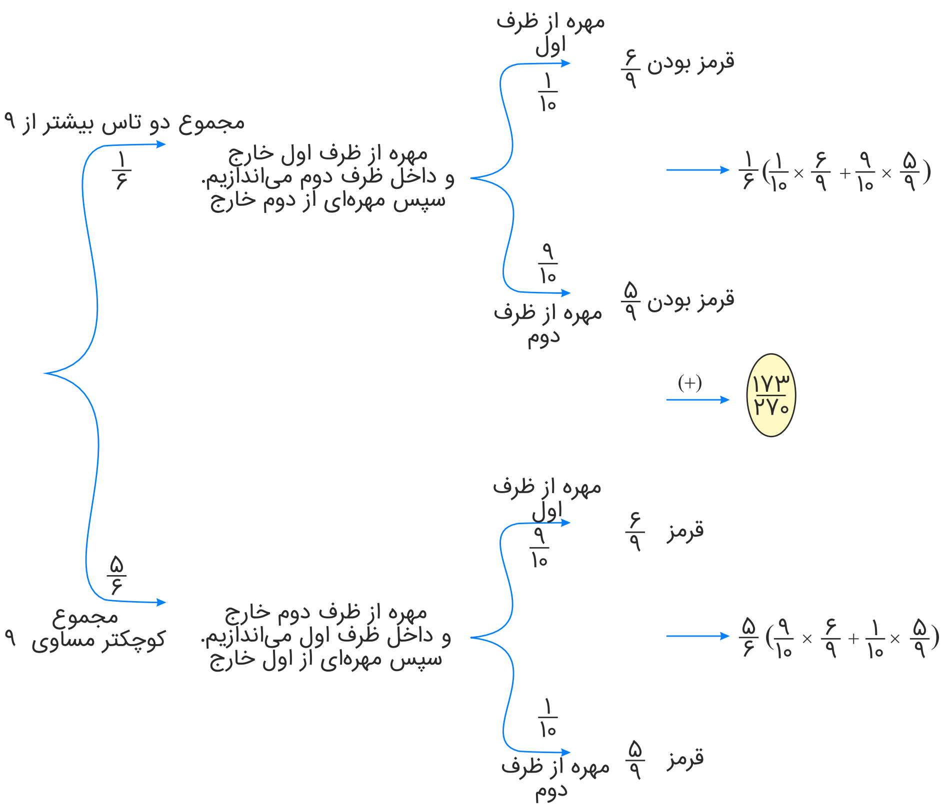
در کل : $\frac{۱}{۴} \times ۰ + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۸}$

۲۵۰ گزینه ۱

$$۱۴x + ۱۵x + ۱۶x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴۵}$$

$$P(A) = \frac{۱۴}{۴۵} \times \frac{۵}{۱۴} + \frac{۱۵}{۴۵} \times \frac{۶}{۱۵} + \frac{۱۶}{۴۵} \times \frac{۴}{۱۶} = \frac{۵ + ۶ + ۴}{۴۵} = \frac{۱۵}{۴۵} = \frac{۱}{۳}$$

۲۵۱ گزینه ۳



۲۵۲ گزینه ۱

احتمال خواسته‌شده را به‌صورت زیر مرحله‌به‌مرحله بررسی می‌کنیم:

$P(A) =$ اگر مهرهٔ خارج‌شده از ظرف اول سفید باشد × احتمال حداقل یک مهرهٔ سفید

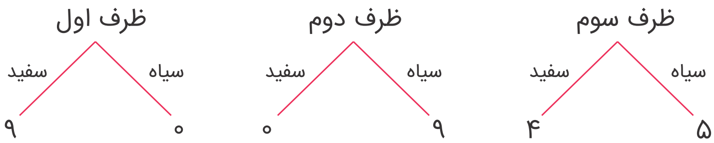
$+$ اگر مهره خارج‌شده از ظرف اول سیاه باشد × احتمال حداقل یک مهرهٔ سفید

$$P(A) = \frac{۶}{۹} \times \frac{\binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{۳}{۹} \times \frac{\binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

$$= \frac{۲}{۳} \times \frac{۱۰+۲۵}{۴۵} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۶+۲۴}{۴۵} = \frac{۲\times ۳۵ + ۱\times ۳۰}{۳\times ۴۵} = \frac{۷۰+۳۰}{۳\times ۴۵} = \frac{۱۰۰}{۳\times ۴۵} = \frac{۲۰}{۲۷}$$

۲۵۳ گزینه ۲

شکل نمودار درختی مسئله به‌صورت زیر است:



احتمال خواسته‌شده عبارت است از:

$$P(A) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۰}{\binom{۹}{۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۹}{۲}}{\binom{۹}{۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۹}{۲}}$$

$$= ۰ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱۰+۲۰}{۳۶} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۳۰}{۳۶} = \frac{۱}{۳} \times (۱ + \frac{۵}{۶}) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱۱}{۶} = \frac{۱۱}{۱۸}$$

۲۵۴ گزینه ۲

راه‌حل اول:

باتوجه‌به آنکه رنگ مهرهٔ اولی که از جعبه خارج شده، مشاهده نشده است، مثل این است که مهره‌ای خارج نشده، پس احتمال خروج مهرهٔ سفید در انتخاب دوم $۰/۶ = \frac{۶}{۱۰}$ است.

راه‌حل دوم:

پیشامد سفیدبودن کارت اول: B

پیشامد سیاه‌بودن کارت اول: B'

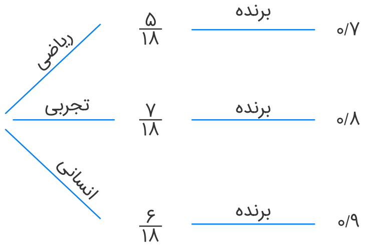
پیشامد سفیدبودن کارت دوم: A

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۶}{۹}$$

$$= \frac{۵۴}{۹۰} = ۰/۶$$

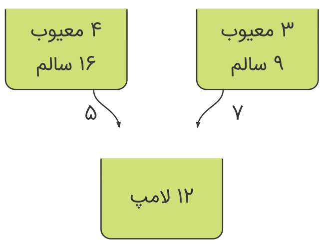
۲۵۵ گزینه ۲

فرض کنید A پیشامد برنده‌شدن بهروز باشد، پس:



$$P\ (A) = \frac{۵}{۱۸} \times ۰/۷ + \frac{۷}{۱۸} \times ۰/۸ + \frac{۶}{۱۸} \times ۰/۹$$
$$= \frac{۳۵}{۱۸۰} + \frac{۵۶}{۱۸۰} + \frac{۵۴}{۱۸۰} = \frac{۱۴۵}{۱۸۰} = \frac{۲۹}{۳۶}$$

۲۵۶ گزینه ۲



در جعبهٔ جدید در کل ۱۲ لامپ وجود دارد. حال اگر لامپی از جعبهٔ جدید انتخاب کنیم، احتمال اینکه به ترتیب متعلق به جعبهٔ اول و دوم باشد برابر $\frac{۵}{۱۲}$ و $\frac{۷}{۱۲}$ است. همچنین احتمال معیوب‌بودن لامپ جعبهٔ اول و دوم برابر $\frac{۴}{۲۰}$ و $\frac{۳}{۱۲}$ است. فرض کنید A پیشامد معیوب‌بودن لامپ جعبهٔ جدید باشد، پس:

$$P\ (A) = \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۴}{۲۰} + \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۷}{۴۸} = \frac{۱۱}{۴۸}$$