فصل در یک نگاه

بازه‌ها

مفهوم: زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی.

اگر شاملِ ∞ نباشد:

بازه	$[a,b]$	(a,b)	$[a,b)$	$(a,b]$
نمایش روی محور	a b	a b	a b	a b

اگر شاملِ ∞ باشد:

بازه	$[a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$(-\infty,b)$	$(-\infty,b]$
نمایش روی محور	a	a	b	b

بازه‌هایِ جدا از هم: این‌ها را به شکل اجتماعِ چند بازه بنویس.

بازه‌ی معروف: $\mathbb{R}-\{a\}=(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$

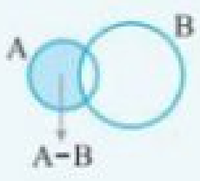
مجموعه

مجموعه‌های معروف

- **طبیعی:** $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\}$
- **حسابی:** $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$
- **صحیح:** $\mathbb{Z}=\{۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,\dots\}$
- **گویا:** اعداد کسری که صورت و مخرج آن‌ها عدد صحیح است و مخرج، مخالف صفر. $\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq۰\}$
- **گنگ:** اعدادی که گویا نباشند. $\mathbb{Q}'=\{x\mid x\notin\mathbb{Q}\}$
- **حقیقی:** هر عددی که می‌شناسیم، در آن هست! $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$
- **رابطه‌ی بینِ مجموعه‌های معروف**
  - $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$
  - $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$
  - $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$

تفاضل دو مجموعه

- **شکل:**



- **مفهوم:** $A-B$ عضوهایی را شامل می‌شود که در A هستند ولی در B نیستند.
- **پیدا کردن:** از رویِ عضوهایِ A، عضوهای $A\cap B$ را خط بزنید...
- **تعداد اعضا:** $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
- **برای معروف‌ها:** $\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$

مرجع: هر عضوی که از آن در یک بحث، استفاده می‌کنیم عضوِ این U است!

متمم: متمم مجموعه‌ی A، می‌شود:
- **به فارسی:** اعضایی از U که در A نیستند.
- **به ریاضی:** $A'=U-A$

متناهی و نامتناهی
- **متناهی:** اعضایش قابل شمارش‌اند و محدود.
- **نامتناهی:** اعضایش قابل شمارش نیستند یا نامحدود عضو دارد.

عملیات با مجموعه‌ها

در حضور متمم

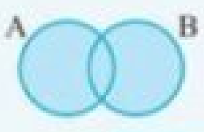
- **دبل:** $(A')'=A$
- **دمورگان:**
  - $(A\cap B)'=A'\cup B'$
  - $(A\cup B)'=A'\cap B'$
- **با اجتماع و اشتراک:**
  - $A\cup A'=U$
  - $A\cap A'=\varnothing$
- **با منها:**
  - $A-A'=A$
  - $A'-A=A'$
- **تهی و مرجع:**
  - $\varnothing'=U$
  - $U'=\varnothing$

در حضور زیرمجموعه

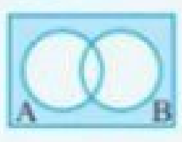
- $A\subseteq B\Rightarrow B'\subseteq A'$
- $A\subseteq B\Rightarrow A-B=\varnothing$
- $A\subseteq B$:
  - $A\cup B=B$
  - $A\cap B=A$

تعداد اعضا

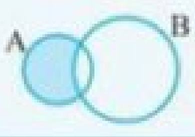
- **اجتماع:** (حداقل یکی از دو ویژگی) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$



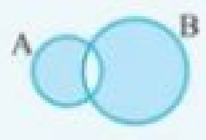
- **هیچ‌کدام از دوتا:** $n(A'\cap B')=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$



- **منها:** $n(A-B)=n(A)-n\ A\cap B$



- **دقیقاً یک ویژگی از میانِ دو تا ویژگی:** $n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$



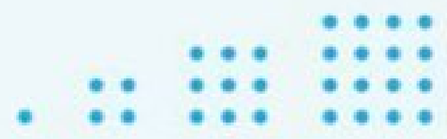
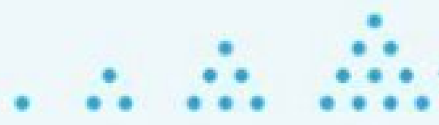
فصل در یک نگاه

دنباله

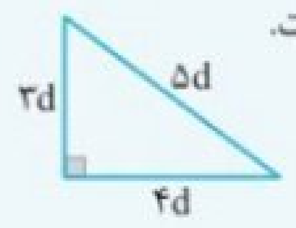
- **مفهوم:** تعدادی عدد که دنبالِ هم نوشته شده‌اند.
- **خطی**
  - مفهوم: تفاضلِ جمله‌های متوالیِ این دنباله، عددی ثابت است؛ ۵،۹،۱۳،۱۷،...
  - جمله‌ی عمومی: $t_n = an + b$ $\xrightarrow[a=0]{\text{حالت خاص}}$ دنباله ثابت است؛ ۳،۳،۳،...
- **درجه‌ی دو**
  - جمله‌ی عمومی: $t_n = an^2 + bn + c$
  - به‌دست آوردن ضابطه: با داشتنِ حاصلِ سه جمله از دنباله و شماره‌ی آن‌ها، دُرست مثل تابع، در جمله‌ی عمومی دنباله، شماره‌ها را جای‌گذاری کرده و مساویِ مقدارِ جمله بگذارید. در آخر هم دستگاه حل کنید.
  - شناسایی: دنباله‌ای درجه دو است که اختلافِ جمله‌های متوالی آن، به‌صورت یک دنباله‌ی حسابی پیش بروند:

    ۵ , ۸ , ۱۳ , ۲۰ , ...

    +۳ +۵ +۷

    +۲ → $a = \frac{d}{2}$
- **معروف‌ها**
  - مضرب‌های عددِ ثابتِ k: $t_n = kn$
  - مربعی
    - جمله‌ی عمومی: $t_n = n^2$
    - فرم: مربعِ عددهای طبیعی‌اند $\xrightarrow{\text{شکل}}$ 
  - مثلثی
    - جمله‌ی عمومی: $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\xrightarrow{\text{شکل}}$ 
    - فرم: ۱،۳،۶،۱۰،...
  - یک در میان + و - دارد
    - با منفی شروع می‌شود ← $(-1)^n$ را در فرمِ کلیِ جمله‌ها ضرب کن.
    - با مثبت شروع می‌شود ← $(-1)^{n+1}$ را در فرمِ کلیِ جمله‌ها ضرب کن.
  - فیبوناتچی
    - دو جمله‌ی اول: همیشه ۱ و ۱ هستند.
    - جمله‌ی عمومی: از جمله‌ی سوم به بعد: $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$
    - به زبان فارسی: هر جمله می‌شود مجموعِ دو جمله‌ی قبلیِ آن.
    - جمله‌ها: ۱،۱،۲،۳،۵،۸،...

دنباله‌ی حسابی

- **شناسایی**
  - اختلافِ هر دو جمله‌ی متوالی دنباله، عددی ثابت است به نامِ d. $d = t_n - t_{n-1}$
  - علامتِ d:
    - $d > 0$: دنباله صعودی است.
    - $d < 0$: دنباله نزولی است.
- **وقتی سه جمله، یک دنباله‌ی حسابی‌اند**
  - آن سه جمله داده شده‌اند $\xrightarrow{\text{واسطه‌ی حسابی}}$ اگر a، b، c دنباله‌ی حسابی باشند: $b = \frac{a+c}{2}$
  - یک ویژگی از آن سه جمله داده شده است ← آن‌ها را $a-d, a, a+d$ بگیرید $\xrightarrow{\text{بعد}}$ اعمالِ ویژگی
- **در مثلث**
  - سه زاویه، دنباله‌ی عددی‌اند ← زاویه‌ی وسطی °۶۰ است.
  - سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه، دنباله‌ی عددی‌اند $\xrightarrow{\text{شکل}}$ 

- **جمله‌ی عمومی**
  - فرمول: $t_n = t_1 + (n-1)d$
  - داده شده است.
    - فرم: بر حسبِ n، درجه‌ی اول است.
    - d: همان ضریبِ n است؛ $t_n = \boxed{3}\, n - 5$
    - t_1: به جایِ n، بذار ۱.
- **تعداد اعداد موجود در دنباله‌ی عددی:** $n = \frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{d} + 1$

- **فرمول دو جمله و شماره:** (وقتی دو جمله از دنباله و شماره‌ی آن‌ها را داری)
  - فرمول: $t_m - t_n = (m-n)d$
  - کاربرد:
    - d رو پیدا کن.
    - هر جمله‌ی دنباله رو با داشتن d و یک جمله‌ی دیگر بنویس.
  - شناسایی در تست: وقتی تفاضل دو جمله از دنباله‌ی عددی رو دارید، یادِ این فرمول بیفتید!
- **قانون اندیس‌ها**
  - حالت کلی: $m+n=r+s \Rightarrow t_m+t_n=t_r+t_s$
  - حالت خاص: جمع اندیس‌ها مضربی از تعداد جمله‌هاست
    - $m+n=2r \Rightarrow t_m+t_n=2t_r$
    - $m+n+r=3s \Rightarrow t_m+t_n+t_r=3t_s$
  - شناسایی در تست: وقتی جمع چند جمله از دنباله‌ی حسابی را دارید، یادِ این فرمول بیفتید!
- **درج واسطه:** اگر بخواهی بین a و b دقیقاً m تا واسطه‌ی حسابی بذاری، آن‌وقت: $d=\frac{b-a}{m+1}$

دنباله‌ی هندسی

- **شناسایی**
  - حاصل تقسیم هر جمله بر جمله‌ی قبلیِ خودش، عددی ثابت است به نام r.
  - وضعیت r
    - $r>1$: دنباله صعودی است.
    - $0<r<1$: دنباله نزولی است.
    - $r<0$: دنباله نه صعودی است، نه نزولی.
- **وقتی سه جمله، یک دنباله‌ی هندسی‌اند**
  - آن سه جمله داده شده‌اند ← واسطه‌ی هندسی
    - به زبان ریاضی: $a,b,c \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}} b^2=ac$
    - به فارسی: مجذورِ وسطی مساوی ضربِ دو تای دیگر
  - یک ویژگی از آن سه جمله داده شده است ← جمله‌ها را $ar, a, \frac{a}{r}$ بگیر و ویژگی را برای آن‌ها اعمال کن.
- **جمله‌ی عمومی**
  - فرمول: $t_n = t_1 r^{n-1}$
  - داده شده است
    - فرم: بر حسب n به‌صورت یک تابع با فرم نمایی است؛ $t_n = 2^n \times 3$.
    - r: پایه‌ی n است به شرطی که ضریبِ n در توان ۱ باشد.
    - t_1: به جای n، بذار ۱.
    - r از راهی دیگر: به جای n یک‌بار بذارید ۱ و یک‌بار هم ۲. وقتی t_1 و t_2 درآمد، آن‌وقت: $r=\frac{t_2}{t_1}$
- **فرمول دو جمله و شماره:** (وقتی دو جمله از دنباله را به همراه شماره‌ی آن‌ها دارید)
  - فرمول: $\frac{t_m}{t_n}=r^{m-n}$
  - کاربرد در تست
    - وقتی نسبتِ دو جمله را دارید، یادِ این فرمول بیفتید.
    - پیدا کردنِ r با داشتن دو جمله از دنباله
    - نوشتن هر جمله‌ی دنباله با داشتنِ r و یک جمله‌ی دیگر از دنباله
- **قانون اندیس‌ها**
  - حالت کلی: $m+n=r+s \Rightarrow t_m t_n=t_r t_s$
  - حالت خاص: وقتی جمعِ اندیس‌ها مضربی از تعداد جمله‌هاست
    - $m+n=2k \Rightarrow t_m t_n=t_k^2$
    - $m+n+k=3s \Rightarrow t_m t_n t_k=t_s^3$
  - شناسایی در تست: وقتی ضرب چند جمله از دنباله را دارید، یادِ این فرمول بیفتید!
- **درج واسطه:** اگر بخواهی بین a و b، دقیقاً m تا واسطه‌ی هندسی بذاری: $r^{m+1}=\frac{b}{a}$
  - توجه: اگر m فرد باشد، باید a و b هم علامت باشند و در این حالت برای r دو جواب قرینه داریم.

فصل در یک نگاه

دستگاه مختصات

- **ناحیه‌ها**
  - اول: $x,y>0$
  - دوم: $x<0, y>0$
  - سوم: $x,y<0$
  - چهارم: $x>0, y<0$
- **محورهای مختصات**
  - روی محور xها ← y صفر است.
  - روی محور yها ← x صفر است.
  - روی هر محوری باشی، متغیر دیگر صفر است.
- **نیمسازهای نواحی**
  - نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم
    - معادله: $y=x$
    - نقطه‌ی روی نیمساز: (a,a)
  - نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم
    - معادله: $y=-x$
    - نقطه‌ی روی نیمساز: $(a,-a)$

فاصله‌ی...

- نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ تا $B(x_2,y_2)$: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ تا مبدأ: $OA=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$
- نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ تا $B(x_1,y_2)$ $\xrightarrow{\text{دو نقطه‌ی هم‌طول}}$ $AB=|y_2-y_1|$
- نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ تا $B(x_2,y_1)$ $\xrightarrow{\text{دو نقطه‌ی هم‌عرض}}$ $AB=|x_2-x_1|$

مختصات نقطه‌های مهم

- وسطِ دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ $\xrightarrow[\text{میانگین‌گیر}]{\text{نقطه M}}$ $M=\frac{A+B}{2}=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$
- مرکز دایره: اگر A و B دو سرِ قطر دایره‌ای باشند: $O=\frac{A+B}{2}$ $\xrightarrow{\text{شعاع دایره}}$ $r=\frac{AB}{2}$
- متوازی الاضلاع: اگر ABCD، اسمِ متوازی الاضلاع شما باشد، آن‌وقت: $A+C=B+D$

شیب خط

- **پیدا کردنِ شیب خط از روی**
  - معادله‌ی ضمنی: $ax+by+c=0$ $\xrightarrow{\text{شیب}}$ $-\frac{a}{b}$
  - معادله‌ی صریح: $y=mx+h$ $\xrightarrow{\text{شیب}}$ m
  - با داشتن دو نقطه از خط: $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ $\xrightarrow[x_1\neq x_2]{\text{شیب}}$ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
  - با داشتن p (طول از مبدأ) و q (عرض از مبدأ) $\xrightarrow{\text{شیب}}$ $-\frac{q}{p}$
- **مفهوم**
  - |شیب| زیاد شود یعنی خط به محور yها نزدیک‌تر می‌شود.
  - $\tan\theta=m$، θ زاویه‌ای است که خط با جهتِ + محور x ها می‌سازد.

خط

- **نوشتن معادله**
  - **با داشتن شیب و یک نقطه:** $A(x_1, y_1)$ و m $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$
  - **با داشتن دو نقطه از خط:** $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ $\xrightarrow[x_1 \neq x_2]{\text{معادله}}$ $\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$
  - **با داشتن** طول از مبدأ (p) و عرض از مبدأ (q) $\xrightarrow{\text{معادله}}$ $\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$
    - طول از مبدأ: نقطه برخورد خط با محور xها
    - عرض از مبدأ: نقطه برخورد خط با محور yها
    - مساحت مثلث حاصل با محورها: $\boxed{\frac{1}{2}|pq|}$
- **خط‌های خاص**
  - **موازی محور y ها (قائم)**
    - معادله: $\boxed{x = t}$
    - شیب: $\boxed{\infty}$
  - **موازی محور x ها (افقی)**
    - معادله: $\boxed{y = k}$
    - شیب: صفر
- **رسم خط:** دو نقطه از خط را پیدا کن (با عدد دادن به x یا y و محاسبه‌ی دیگری)، آن‌ها را در دستگاه مشخص کن و به هم وصل کن.

حالت‌های دو خط نسبت به هم

- **معادله‌ی هر دو ضمنی است**
  $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$
  - **موازی با هم:** $\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}}$
  - **منطبق با هم:** $\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$
  - **متقاطع با هم:** $\boxed{\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}}$
  - **عمود بر هم:** $\boxed{aa' + bb' = 0}$
- **معادله‌ی صریح هر دو داده شده است**
  $\begin{cases} y = mx + h \\ y = m'x + h' \end{cases}$
  - **موازی با هم:** $\boxed{m = m'}$
  - **منطبق با هم:** $\boxed{m = m', h = h'}$
  - **متقاطع با هم:** $\boxed{m \neq m'}$ $\xrightarrow{\text{زاویه‌ی دو خط متقاطع}}$ $\boxed{\tan\theta = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|}$
  - **عمود بر هم:** $\boxed{mm' = -1}$ یا $\boxed{m' = -\frac{1}{m}}$
- **دو خطِ خاص**
  (t و t' و k و k' همگی عدد ثابت‌اند.)
  - **اگر خطی با خطِ x=t**
    - موازی باشد، آن‌وقت: $\boxed{x = t'}$ است.
    - عمود باشد، آن‌وقت: $\boxed{y = k'}$ است.
  - **اگر خطی با خط y=k**
    - موازی باشد، آن‌وقت: $\boxed{y = k'}$ است.
    - عمود باشد، آن‌وقت: $\boxed{x = t'}$ است.
  - به جور دیگه
    - خط موازی با خطِ افقی، افقی است و خط موازی با خط قائم هم حتماً قائم است.
    - خط عمود بر خط افقی، حتماً قائم است و برعکس.
- **تلاقی دو خط:** معادله‌ی دو خط را در یک دستگاه قرار بده و حل کن...
- **همرسی سه خط:** دو تا از خط‌ها را به دلخواه در دستگاه قرار بده و حل کن، در آخر نقطه‌ی حاصل را در معادله‌ی خطِ سوم، قرار بده...

نوشتن اجزاء فرعی مثلث

- **ارتفاع** (با شیب و نقطه نوشته می‌شود.)
  - **شیب:** شیبِ ارتفاع، عکس و قرینه‌ی شیب ضلعی است که بر آن وارد می‌شود؛ $m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}}$
  - **نقطه:** نقطه‌ای که ارتفاع از آن می‌گذرد، رأسی است که ارتفاع از آنجا کشیده شده.
- **میانه** (با دو نقطه نوشته می‌شود.)
  - **نقطه‌ی اول:** رأسی از مثلث است که میانه از آنجا کشیده شده.
  - **نقطه‌ی دوم:** وسطِ ضلعی است که میانه به آنجا وارد می‌شود؛ مثلاً در میانه‌ی نظیر BC، وسطِ C و B .
- **عمودمنصف** (با شیب و نقطه نوشته می‌شود.)
  - **شیب:** عکس و قرینه‌ی شیبِ ضلعی است که عمودمنصف بر آن وارد می‌شود، درست مثل ارتفاع.
  - **نقطه:** وسطِ ضلعی که عمودمنصفِ آن کشیده شده.

فاصله‌ی...

- **نقطه از خط** ← $A(x_0, y_0)$ $\xrightarrow{\text{خط را ضمنی کن}}$ $ax+by+c=0$ $\xrightarrow{\text{فرمول فاصله}}$ $\boxed{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$
- **دو خطِ موازی** ← $\xrightarrow[\text{ضریب x و y را هم یکی کن}]{\text{هر دو را ضمنی کن}}$ $ax+by+c=0 , ax+by+c'=0$ $\xrightarrow{\text{فرمول فاصله}}$ $\boxed{\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$
- **خاص‌ها**
  - مبدأ تا خطِ ضمنی $ax+by+c=0$: $\boxed{\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$
  - نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ تا خطِ افقی $y=k$: $\boxed{|y_0-k|}$
  - نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ تا خطِ قائم $x=t$: $\boxed{|x_0-t|}$
  - نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ تا
    - محور xها: $\boxed{|y_0|}$
    - محور yها: $\boxed{|x_0|}$
- **اندازه‌ی ارتفاع AH در مثلث ABC:** معادله‌ی BC را بنویس و فاصله‌ی A را تا آن حساب کن...

فصل در یک نگاه

روش‌های حلِ معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$

- **تجزیه:** وقتی ضریبِ x^2، مساوی ۱ بوده و ریشه‌ها صحیح باشند: $x^2+mx+n=0 \Rightarrow (x+\square)(x+\blacksquare)=0$
  - جمعشان m
  - ضربشان n
- **مربع کامل:** اول از ضریبِ x^2 فاکتور بگیر و بعد عبارتِ درجه‌ی دوم رو مربع کامل کن...
  $$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=0 \Rightarrow a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}]+c=0$$
  نصف کن — به‌توان ۲
  $$\Rightarrow a(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a}-c \rightarrow \text{حل کن}$$
- **روش Δ:** $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$
  - ریشه‌ها
    - $\Delta>0$: $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$
    - $\Delta=0$: $\boxed{x=\frac{-b}{2a}}$
  - تعداد ریشه‌ها
    - $\Delta>0$: دو ریشه‌ی حقیقی دارد.
    - $\Delta=0$: یک ریشه‌ی مضاعف دارد.
    - $\Delta<0$: ریشه‌ی حقیقی ندارد.
- **حالت‌های خاص**
  - جمع ضرایب، مساویِ صفر بشود $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{a+c+b=0 \rightarrow 1 \text{ و } \frac{c}{a}}$
  - ضریب اولی + ضریب آخری = ضریب وسطی $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{a+c=b \rightarrow -1 \text{ و } -\frac{c}{a}}$
  - عدد ثابت ندارد $\xrightarrow{\text{فاکتوربگیر}}$ $ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0$ $\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}$ $\boxed{0 \text{ و } -\frac{b}{a}}$

سهمی $y=ax^2+bx+c$

- **مختصاتِ رأس**
  - $\boxed{-\frac{b}{2a}}$
  - $\boxed{-\frac{\Delta}{4a}}$
- **تلاقی با محورxها**
  - $\Delta>0$ ← در دو نقطه محور را قطع می‌کند.
  - $\Delta<0$ (هیچ‌نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0$ ← قطع نمی‌کند: همواره بالای محور
    - $a<0$ ← قطع نمی‌کند: همواره پایین محور
  - $\Delta=0$ (یک‌نقطه‌ی برخورد)
    - $a>0$ ← مماس است و بالای محور
    - $a<0$ ← مماس است و پایین محور
- **علامتِ a**
  - $a>0$ ← سهمی رو به بالا است: $\smile$
  - $a<0$ ← سهمی رو به پایین است: $\frown$
- **محور تقارن**
  - معادله: $\boxed{x=-\frac{b}{2a}}$
  - تعداد: یکی
  - ویژگی: گذرنده از رأس سهمی
- **مماس بر**
  - محورxها: یعنی $\Delta=0$ بوده.
  - خطِ افقی $y=k$: یعنی $\boxed{k=-\frac{\Delta}{4a}}$ بوده.
  - خطِ کلی $y=mx+h$: دو ضابطه را برابرِ هم قرار دهید، یعنی $ax^2+bx+c=mx+h$ و معادله‌ی حاصل را ساده کنید و Δ ی آن را برابرِ صفر بگذارید.
- **تلاقی با محور yها**
  - تعداد ← همواره یکی
  - مختصات: $(0,c)$

روابط بین ریشه‌ها

- **S و P**
  - **مقدار و مفهوم**
    - $\boxed{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$
    - $\boxed{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}$ ← اگر منفی باشد: حتماً معادله، دو ریشه‌ی حقیقی دارد.
  - **فهمیدن علامت ریشه‌ها**
    - $P>0$ ← دو ریشه‌ی هم علامت دارد
      - $S>0$ ← ریشه‌ها مثبت‌اند.
      - $S<0$ ← ریشه‌ها منفی‌اند.
    - $P<0$ ← حتماً دو ریشه‌ی غیر هم‌علامت دارد
      - $S>0$ ← قدرمطلقِ ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تره: ۴ , ۲−
      - $S<0$ ← قدرمطلقِ ریشه‌ی منفی بزرگ‌تره: ۳− , ۱
  - **نوشتنِ معادله با داشتنِ S و P:** $\boxed{x^2-Sx+P=0}$
- **قرار است رابطه‌ای بین ریشه‌ها پیدا کنی**
  - **رابطه‌های معروف**
    - $\boxed{\alpha^2+\beta^2=S^2-2P}$
    - $\boxed{\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP}$
    - $\boxed{|\alpha-\beta|=\sqrt{S^2-4P}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$
    - $\boxed{\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm2\sqrt{P}}}$ با شرط $\alpha,\beta>0$
  - **رابطه‌های غیر معروف:** عبارت داده‌شده را با مخرج مشترک‌گیری و... ساده کن تا به عبارت‌های معروف برسد...
- **رابطه‌ای بین ریشه‌ها داده شده است**
  - **حالت کلی:** S و P رو بر حسبِ α و β بنویس و مقدارشون رو هم پیدا کن، بعد هم رابطه‌ی داده شده رو بر حسب α و β بنویس، حالا همه‌ی این‌ها رو با هم دستگاه کن...
  - **حالت‌های خاص**
    - یکی از ریشه‌ها k برابر دیگری است ← $\boxed{\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}}$
    - یکی از ریشه‌ها، k واحد از دیگری بزرگ‌تر است ← $\boxed{\Delta=k^2a^2}$
- **اخطار جدی** ← در همه‌ی تست‌هایِ S و P، بعد از پیدا کردن جواب، یادتان باشد Δ را کنترل کنید! اگر به ازای هر پارامتری $\Delta<0$ شود، یعنی ریشه نداشته‌اید و حرف درباره‌ی S و P غلط است!

معادله‌های ساده

- **درجه‌ی اول**
  - **فرم کلی:** $\boxed{ax+b=0}$, $a\neq0$
  - **جواب:** $\boxed{x=-\frac{b}{a}}$
  - **تعیین علامت:**

x		$-\frac{b}{a}$	
$ax+b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

- **درجه‌ی دوم**
  - **فرم کلی:** $\boxed{ax^2+bx+c=0}$, $a\neq0$
  - **جواب:** تجزیه کن یا روش Δ ← $\Delta\geq0$ ← $\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$
  - **تعیین علامت**
    - $\Delta>0$:

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

    - $\Delta=0$:

x		$-\frac{b}{2a}$	
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	موافق علامت a

    - $\Delta<0$: همواره موافق علامتِ a بوده و هیچ‌گاه هم صفر نمی‌شود.
- **$x^2=k$**
  - $k>0$ ← دو ریشه‌ی حقیقی دارد: $\boxed{x_{1,2}=\pm\sqrt{k}}$ ؛ مثل $x^2=4$.
  - $k=0$ ← یک ریشه‌ی مضاعفِ صفر دارد.
  - $k<0$ ← ریشه ندارد؛ مثل $x^2=-3$.
  - **حالت کلی‌تر** ← اگر $u^2=k$ و u عبارتی بر حسبِ x باشد هم، بررسی ریشه‌ها همین‌گونه است؛ مثل $(2x+1)^2=9$.
- **جمعِ چند جمله‌ی غیرمنفی، مساوی صفر شده است** ← هر کدام را تک تک، مساوی صفر بذار. بسته به توان زوج، رادیکال فرجه‌ی زوج و قدرمطلق، عبارت‌های غیرمنفی هستند: $|\bigcirc|$, $\sqrt[\text{زوج}]{\bigcirc}$, $(\bigcirc)^{\text{زوج}}$.
- **که با تغییر متغیر حل می‌شوند**
  - **حالت کلی:** عبارتی در معادله، مشترک است ← آن را A بگیر.
  - **حالت‌های خاص**
    - $\boxed{ax^{2n}+bx^n+c=0}$ ← $\boxed{x^n=A}$ بگیر ← $aA^2+bA+c=0$
    - $\boxed{ax+b\sqrt{x}+c=0}$ ← $\boxed{\sqrt{x}=A}$ بگیر ← $aA^2+bA+c=0$

فصل در یک نگاه

معادله‌های گویا و گنگ

- **معادله‌ی گویا**
  - **مفهوم:** x در مخرج داریم ← معادله کسری است.
  - **روش کلی حل:** همه‌ی جمله‌ها رو بیار یک طرف تساوی، بعدش مخرج مشترک بگیر و صورت کسر رو مساویِ صفر بذار...
  - **میان‌بُر:** گاهی به یک تناسب می‌رسیم که با طرفین وسطین، حلش می‌کنیم.
  - **بررسی:** حتماً باید xهای به‌دست آمده در دامنه باشند $\xleftarrow{\text{به‌جوردیگه}}$ مخرجِ هیچ کسری را صفر نکنند!
  - **ساده کردن یک عامل**
    - از صورت و مخرج یک کسر ← اشکال ندارد و ریشه‌ی عامل هم، قابل قبول نیست.
    - از صورت دو کسر مختلف در دو طرفِ تساوی ← اشکال ندارد و ریشه‌ی عامل هم قبول است.
    - از مخرج دو کسر مختلف در دو طرف تساوی ← اشکال ندارد و ریشه‌ی عامل هم قبول نیست.
  - **نسبت طلایی**
    - فرم معادله‌ای: $x^2 = x+1$ ، $\frac{x+1}{x} = x$
    - مقدار نسبت: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
    - مقدار تقریبی: ۱/۶۱۸
- **معادله‌ی گنگ**
  - **مفهوم:** x در زیر رادیکال داریم ← معادله رادیکال‌دار است.
  - **روش کلی حل:** رادیکال رو یک طرفِ تساوی نگه دار و بقیه رو به سمت دیگه منتقل کن.حالا دو طرف رو به توان برسان (به توانِ فرجه) تا رادیکال حذف شود. بعدش معادله‌ی معمولی رو حل کن.
  - **بررسی:** xهای به‌دست آمده باید عبارتِ زیر و مقابل هیچ رادیکالِ فرجه‌ی زوجی را منفی نکنند. $\xleftarrow{\text{به‌جوردیگه}}$ xهای به‌دست آمده باید درمعادله‌ی اصلی، قبل از توان رساندن، صدق کرده و مشکلی ایجاد نکنند.
  - **چندرادیکالی‌ها:** هر بار باید رادیکال رو تنها کنی و به توان برسانی تا هیچ رادیکالی باقی نماند! آخرش هم بررسی!

نامعادله

- **درجه‌ی اول**
  - **فرم کلی:** $ax+b \geq 0$ یا $ax+b \leq 0$ یا $ax+b > 0$ یا $ax+b < 0$
  - **روش حل:** عدد ثابت را به سمتِ دیگر منتقل کن. بعد هم دو طرف را بر ضریبِ x تقسیم کن.
    - ضریبِ $x > 0$ ← جهت حفظ می‌شود!
    - ضریبِ $x < 0$ ← جهت تغییر می‌کند!
- **درجه‌ی دوم**
  - **فرم کلی:** $ax^2+bx+c \geq 0$ یا $ax^2+bx+c > 0$ یا $ax^2+bx+c \leq 0$ یا $ax^2+bx+c < 0$
  - **روش حل:** وقتی همه‌ی جمله‌ها را آوردی یک طرفِ نامساوی، عبارت درجه‌ی دوم حاصل را تعیین علامت کن و محدوده‌ی قابل قبول را اعلام کن $\xleftarrow{\text{به‌جوردیگه}}$ (همه‌ی جمله‌ها بیان یک طرف ← ریشه‌ها را پیداً کن ← جدول تعیین علامت ← محدوده)
  - **همواره یک علامت دارد**
    - $ax^2+bx+c > 0 \rightarrow a > 0, \Delta < 0$
    - $ax^2+bx+c < 0 \rightarrow a < 0, \Delta < 0$
    - $ax^2+bx+c \geq 0 \rightarrow a > 0, \Delta \leq 0$
    - $ax^2+bx+c \leq 0 \rightarrow a < 0, \Delta \leq 0$
- **در حالت کلی:** همه‌ی جمله‌ها را باید بیاورید یک طرف نامساوی. بعد هم عبارتِ حاصل را تعیین علامت کنید، آخر هم محدوده‌ی قابل قبول را پیدا کنید.
  - ! موقع تعیین علامت، به بسته‌های توان زوج، رادیکال‌های فرجه‌ی زوج و قدرمطلق‌ها کاری نداشته باشید، این‌ها صفر می‌شوند؛ ولی منفی نه!
- **قدرمطلق‌دارها**
  - $|u| \geq k \xrightarrow{k>0} u \geq k$ یا $u \leq -k$
  - $|u| \leq k \xrightarrow{k>0} -k \leq u \leq k$
  - علامتِ مساوی‌ها، همه با هم هستند یا همه با هم نیستند!

نامساوی‌ها

- **عدد ثابتی را به دو طرفِ نامساوی**
  - جمع و منها کنیم ← ایرادی ندارد.
  - ضرب و تقسیم کنیم
    - مثبت باشد ← ایرادی ندارد.
    - منفی باشد ← جهت عوض می‌شود.
- **دو طرف نامساوی را**
  - به توان یا فرجه‌ی فرد برسانیم ← ایرادی ندارد: $\left.\begin{array}{l} a<b \Rightarrow a^3<b^3 \\ a<b \Rightarrow \sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b} \end{array}\right\}$
  - به توان زوج برسانیم
    - هر دو مثبت باشد ← جهت حفظ می‌شود: $0<a<b \Rightarrow a^2<b^2$
    - هر دو منفی باشد ← جهت تغییر می‌کند: $a<b<0 \Rightarrow a^2>b^2$
  - فرجه‌ی زوج بگیریم $\xleftarrow{\text{هر دو مثبت باشد}}$ ایرادی ندارد، فقط برای دو عددِ حاصل قدرمطلق بذار...
  - معکوس کنیم
    - هر دو مثبت‌اند / هر دو منفی‌اند ← جهت عوض می‌شود.
    - یکی مثبت و یکی منفی است. ← جهت حفظ می‌شود.
- **نامساوی دوگانه‌را قدرمطلق کنیم**
  $\boxed{a<x<b}$ یا $\boxed{x>b \text{ یا } x<a}$
  - میانگینِ a و b را از سه طرفِ نامساوی کم کنید...
  - فرمولی
    - $\boxed{a \le x \le b \Rightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right| \le \frac{b-a}{2}}$
    - $\boxed{x \ge b \text{ یا } x \le a \Rightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right| \ge \frac{b-a}{2}}$

Scanned with CamScanner

فصل در یک نگاه

تابع $f: A \to B$

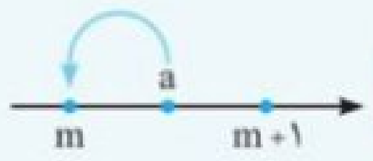
- **مدل‌های نمایش**
  - **با بیانِ فارسی** ← (بررسی تابع بودن در تست) هیچ عضوِ اولی نباید به دو تا عضو از مجموعه‌ی دوم نسبت داده شود!
  - **با زوج مرتب** ← (بررسی تابع بودن در تست) اگر دو زوج، مؤلفه‌ی اولِ تکراری دارند، مؤلفه‌ی دومشان را مساوی هم بذار...
  - **با نمودار پیکانی** ← (بررسی تابع بودن) از هر عضوِ اولی، دقیقاً یک فلش خارج شده باشد.
  - **با نمودار مختصاتی** ← (بررسی تابع بودن) هیچ دو نقطه‌ای زیر هم نداشته باشد.
  - **با نمودار تابع** ← (بررسی تابع بودن) هر خط موازی محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
- **ضابطه‌ی تابع**
  - **بررسی تابع بودن**
    - **اثبات در حالت کلی:** ضابطه‌ی داده شده را یک بار برای x و y_1 و بار دیگر برایِ x و y_2 می‌نویسیم و از این دو تا باید بتوانیم نتیجه بگیریم $y_1 = y_2$، وگرنه تابع نیست...
    - **نشان دادن تابع نبودن** ← (بهترین راه) **مثال نقض:** ارائه‌ی یک x که موجب به دست آمدنِ چندین y شود!
      - (کاندیداهای تابع نبودن) ← وقتی y در ضابطه‌ی داده شده
        - براکت دارد.
        - قدرمطلق دارد.
        - توان زوج دارد.
        - درگیر تابع‌های مثلثاتی است.
  - **کار با ضابطه**
    - $\boxed{(a,b) \in f}$ یعنی
      - $\boxed{f(a)=b}$
      - نقطه‌ی $\boxed{(a,b)}$ روی نمودار تابع است.
    - $\boxed{f(x)=\ldots}$ داده شده و $f(\alpha)$ خواسته شده ← در تابع به جایِ تمامِ x ها بگذارید α.
  - **برخورد تابع**
    - **با محور xها** ← تابع را مساویِ صفر بذار ← (حالت خاص) اگر کسری است، فقط صورتش مساوی صفر باشد.
    - **با محور yها** ← به جایِ تمام x ها بذار صفر.
    - **با تابعِ دیگر** ← ضابطه‌ها را مساویِ هم بذار و معادله حل کن. $\boxed{f(x)=g(x)}$ ↓ برخورد تابعِ f با g

جزء صحیح

$\boxed{y=[x]}$

(حاصل این تابع همواره عدد صحیح است.)

- **پیدا کردنِ جزء صحیحِ عددِ a**
  - $a \in \mathbb{Z}$ ← $[a]=a$
  - $a \notin \mathbb{Z}$ ← $[a]$ می‌شود اولین عدد صحیحِ قبلِ a.
  - **حالت کلی:** $\boxed{m \le a < m+1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} [a]=m}$



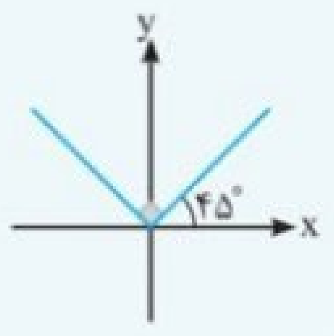
- **ویژگی‌ها**
  - **حاصلِ براکت را داریم**
    - $\boxed{[u]=k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \le u < k+1}$
    - $\boxed{[u]=t \xrightarrow{t \notin \mathbb{Z}} \text{امکان ندارد}}$
  - **عدد منهای جزء صحیح خودش:** $\boxed{0 \le u-[u] < 1}$: صفر شدن یعنی $u \in \mathbb{Z}$.
  - **خارج شدن عدد صحیح از براکت:** $n \in \mathbb{Z} : \boxed{[x+n]=[x]+n}$
- **رسم:** برای $y=[ax]$ و $a>0$ از مبدأ با نقطه‌ی پُر شروع کن و یک نیم خط به طول $\frac{1}{a}$ به سمت راست بکش که اون سرش بازه، بعد یک واحد برو بالا و تکرار همین قضیه... برای $a<0$ فقط سمتِ حرکت می‌شه چپ...

انواع تابع

- **چند جمله‌ای:** $\boxed{f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\ldots}$ که $n \in \mathbb{N}$ و ضرایب عددهای حقیقی‌اند.
- **ثابت:** $\boxed{f(x)=c}$ ؛ هر چی بهش می‌دی، خروجی‌اش عددِ ثابتِ c است ← (نمودار) خطی موازی محور xها
- **همانی:** $\boxed{f(x)=x}$ ؛ هر چی بهش می‌دی، خروجی‌اش همان عدد است ← (نمودار) نیمساز ربع اول و سوم
- **خطی:** $\boxed{f(x)=ax+b}$ ؛ عبارتی درجه اول بر حسب x است ← (نمودار) یک خطِ راست

قدرمطلق: $f(x)=|u|$

- **ضابطه:** $|u|=\begin{cases} u & u\geq 0 \\ -u & u<0 \end{cases}$
- **شکل:** $y=|x|$ می‌شود



- **مفهوم:** حاصلِ قدرمطلق همواره نامنفی است.

قطعه‌ای ← فرم

$f(x)=\begin{cases} g(x) \ , & ☁ \\ h(x) \ , & ☁ \end{cases}$ (محدوده‌ی x)

- **بررسی تابع بودن:** اگرِ x مشترکی در محدوده‌ها هست باید به ازای هر ضابطه، خروجیِ یکسان داشته باشد.
- **یافتن مقدار:** برای یافتن $f(\alpha)$، باید اول ببینی α در کدام محدوده صدق می‌کند، در هر کدام که بود α را به آن ضابطه بدهید...

فرمولی‌ها

- مربع به ضلع a
  - محیط: $4a$
  - مساحت: a^2
- دایره به شعاع r
  - محیط: $2\pi r$
  - مساحت: πr^2
- کره به شعاع r ← حجم: $\frac{4}{3}\pi r^3$
- مجموع زوایای n ضلعی محدب: $(n-2)180^\circ$

دامنه‌ی تابع D

مفهوم: مجموعه‌ی تمام x هایی که تابع می‌تواند آن‌ها را قبول کند و به ازایِ آن‌ها یکِ y حقیقی تحویل دهد.

پیدا کردن دامنه از روی مدل‌های مختلف نمایش تابع — :نمایش با

- **زوج مرتب:** همه‌ی مؤلفه‌هایِ اولِ زوج مرتب‌ها را بریز در یک مجموعه...
- **پیکانی:** همه‌ی عضوهای موجود در دایره‌ی اول را بریز در یک مجموعه...
- **نمودار مختصاتی:** همه‌ی طول نقطه‌های موجود را بریز در یک مجموعه...
- **نمودار تابع:** شکل تابع را روی محور xها تصویر کن و بازه‌ی حاصل را اعلام کن...

پیدا کردن دامنه از روی ضابطه‌ی تابع

- **تابع کسری:** مخرج نباید صفر شود
  - $\frac{☁}{u} \xrightarrow{\text{دامنه}} \mathbb{R}-\{x\,|\,u=0\}$
  - مثلثاتی‌ها
    - $\tan u \xrightarrow{\text{دامنه}} u\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$
    - $\cot u \xrightarrow{\text{دامنه}} u\neq k\pi$
  - اخطار: برای یافتن دامنه، هیچ کسری را ساده نکنید، تغییر هم ندهید!
- **تابع رادیکالی**
  - فرجه فرد است ← محدودیتی ندارد، اگر هر مشکلی هست مالِ زیر رادیکاله!
  - فرجه زوج است ← $\sqrt[\text{زوج}]{u} \xrightarrow{\text{دامنه}} u\geq 0$
- **چندضابطه‌ای:** $y=\begin{cases} g(x) \ , & A \\ h(x) \ , & B \end{cases} \xrightarrow{\text{دامنه}} (D_g\cap A)\cup(D_h\cap B)$
- **لگاریتمی:** $y=\log_B A \xrightarrow{\text{دامنه}} A\,,B>0\,,B\neq 1$

دامنه‌ی محدود شده توسط گفته‌ی تست

تابع کسری

- اگر گفت دامنه $\mathbb{R}$ است ← مخرجِ $\Delta<0$
- اگر گفت دامنه فقط یک عضو به نامِ k را ندارد
  - مخرجِ $\Delta=0$
  - $x=k$، مخرج کسر را صفر می‌کند.
- اگر گفت دامنه فقط دو عضوِ α و β را ندارد. ← $x=\alpha$ و $x=\beta$ مخرج کسر را صفر می‌کنند.

اگر گفت رادیکالیِ فرجه‌ی زوج: دامنه $\mathbb{R}$ است

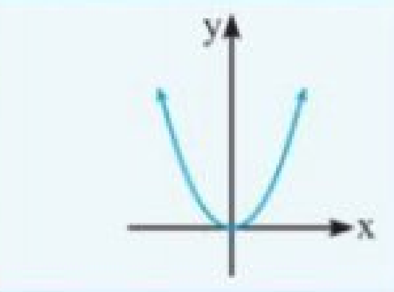
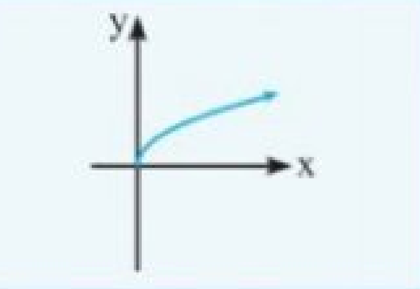
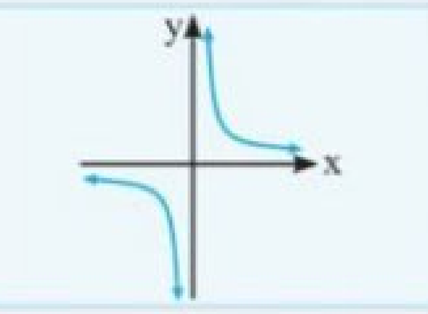
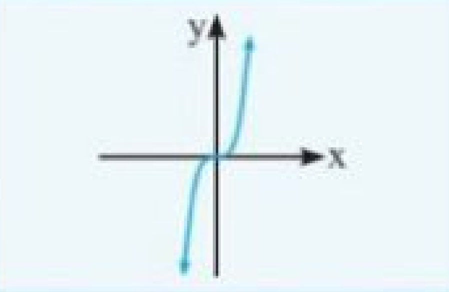
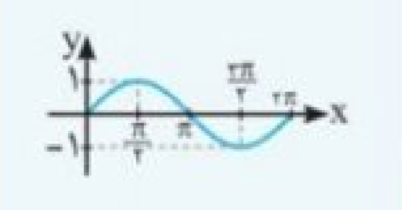
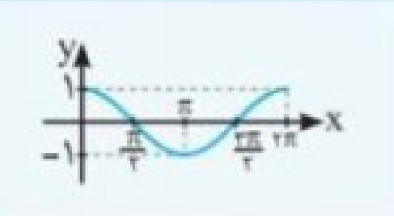
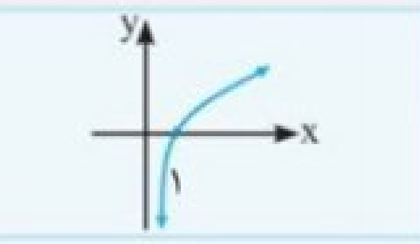
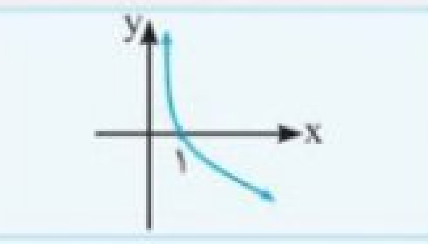
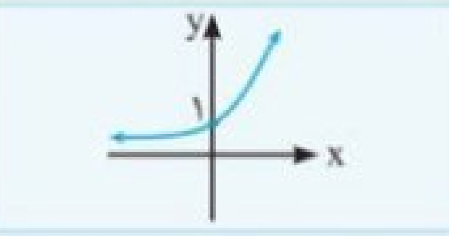
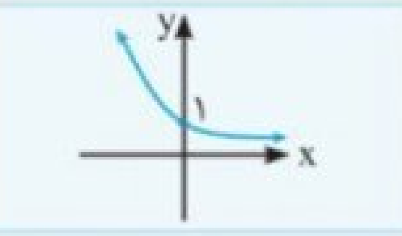
- عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است.
- حالت خاص: $\underset{D=\mathbb{R}}{y=\sqrt{ax^2+bx+c}} \rightarrow \begin{matrix} \Delta\leq 0 \\ a>0 \end{matrix}$

Scanned with CamScanner

بُرد تابع R

- **مفهوم:** مجموعه‌ی تمامیِ yهایی است که از xهایِ ورودی تابع، دریافت کرده‌ایم.
- **پیدا کردن برد از روی مدل‌های مختلف نمایش تابع**
  - **زوج مرتب:** همه‌ی مؤلفه‌های دومِ زوج مرتب‌ها را بریز در یک مجموعه...
  - **پیکانی:** همه‌ی عضوهای موجود در دایره‌ی دوم را بریز در یک مجموعه...
  - **نمودار مختصاتی:** همه‌ی عرض‌های نقطه‌های موجود را بریز در یک مجموعه...
  - **نمودار تابع:** شکل تابع را روی محور yها تصویر کن و بازه‌ی حاصل را اعلام کن...
- **برد تابع از روی ضابطه**
  - **تابع چندجمله‌ای**
    - درجه فرد: بُردش $\mathbb{R}$ است.
    - درجه دو: $\boxed{y = ax^۲ + bx + c}$
      - $a > ۰$ است. $\boxed{R = [-\frac{\Delta}{۴a}, +\infty)}$
      - $a < ۰$ است. $\boxed{R = (-\infty, -\frac{\Delta}{۴a}]}$
  - **عبارتِ مثبتِ کنار عددِ a**
    - عبارت‌های مثبت: $|u|$ و $u^{\text{زوج}}$ و $\sqrt[\text{زوج}]{u}$
    - عبارتِ مثبت، ضریب مثبت دارد: $\boxed{a + (\text{عبارت مثبت}) \rightarrow R = [a, +\infty)}$
    - عبارتِ مثبت، ضریب منفی دارد: $\boxed{a - (\text{عبارت مثبت}) \rightarrow R = (-\infty, a]}$
  - **تابع هموگرافیک**
    - ضابطه: $\boxed{y = \frac{ax + b}{cx + d}}$
    - شرط: $\boxed{\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}}$
    - بُرد: $\boxed{R = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}}$
  - **معروف‌ها**
    - مثلثاتی‌ها
      - سینوس و کسینوس: $\boxed{R = [-۱, ۱]}$
      - تانژانت و کتانژانت: $\boxed{R = \mathbb{R}}$
    - نمایی $\boxed{y = a^x}$: $\boxed{R = \mathbb{R}^+}$
    - لگاریتمی $\boxed{y = \log_a x}$: $\boxed{R = \mathbb{R}}$
  - **نیم خط:** بُرد $y = ax + b$ با شرطِ
    - $x > k$
      - $a > ۰$: $\boxed{(ak + b, +\infty)}$
      - $a < ۰$: $\boxed{(-\infty, ak + b)}$
    - $x < k$
      - $a > ۰$: $\boxed{(-\infty, ak + b)}$
      - $a < ۰$: $\boxed{(ak + b, +\infty)}$

شکل تابع‌های معروف

$y = x^۲$	$y = \sqrt{x}$	$y = \frac{۱}{x}$	$y = x^۳$	$y = \sin x$ در $[۰, ۲\pi]$
				
$y = \cos x$	$y = \log_a x$	$y = \log_b x$	$y = a^x$	$y = b^x$
در $[۰, ۲\pi]$	$a > ۱$	$۰ < b < ۱$	$a > ۱$	$۰ < b < ۱$
				

انتقال و کشش

- $f(x)+a$
  - $a>0$: $f(x)$ را a واحد ببَر بالا.
  - $a<0$: $f(x)$ را a واحد بیار پایین.
- $f(x+a)$
  - $a>0$: $f(x)$ را a واحد به سمت چپ منتقل کن.
  - $a<0$: $f(x)$ را a واحد به سمت راست منتقل کن.
- $kf(x)$ $\xrightarrow{k>0}$ بدون هیچ تغییری در xها، $f(x)$ را از بالا و پایین بکش یا فشرده کن تا بُرد آن k برابر شود.
- $-f(x)$: $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کن...
- $|f(x)|$
  - **قسمت‌های بالایی $f(x)$ نسبت به محور xها:** سرِ جای خود می‌مانند.
  - **قسمت‌های پایینی $f(x)$ نسبت به محور xها:** نسبت به محور xها قرینه کن.
- $f(kx)$ (طول نقطه‌ها همگی در $\frac{1}{k}$ ضرب می‌شود.)
  - $k>0$: هر نقطه‌ای رویِ $y=f(x)$، از (a,b) می‌شود $(\frac{a}{k},b)$
    - $k>1$: انقباضِ $y=f(x)$ در راستای محور xها
    - $0<k<1$: انبساطِ $y=f(x)$ در راستای محور xها
  - $k<0$: در حالت $k>0$ رسم کن، آخر سر تقارن نسبت به محور yها بده.
- $f(|x|)$: هر بخشی از $y=f(x)$ که سمت چپ محور yهاست حذف کن و سمت راستِ تابع و قرینه‌ی آن نسبت به محور yها را به عنوان جواب اعلام کن.

تابع یک به یک

- **تشخیص با مدل‌های مختلف نمایش تابع**
  - **زوج مرتب:** در زوج‌های متفاوت، نه مؤلفه‌ی اولِ تکراری داشته باشیم و نه مؤلفه‌ی دومِ تکراری!
  - **پیکانی**
    - از هر عضو دایره‌ی اول، دقیقاً یک فلش خارج شود.
    - به هر عضو دایره‌ی دوم، دقیقاً یک فلش وارد شود.
  - **نمودار مختصاتی** (نقطه‌های هم‌طول و هم‌عرض ممنوع است!)
    - هیچ دو نقطه‌ای زیر هم نداشته باشیم.
    - هیچ دو نقطه‌ای روبه‌روی هم نداشته باشیم.
  - **نمودار تابع**
    - هر خط موازی محور xها، نمودار تابع را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.
    - هر خط موازی محور yها، نمودار تابع را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.
- **روش کلیِ اثبات:** ضابطه‌ی داده‌شده را یک بار برای x_1 و y می‌نویسیم و یک بار هم برای x_2 و y و از این دو رابطه سعی می‌کنیم نتیجه بگیریم $x_1=x_2$. اگر تنها نتیجه این نباشد، یعنی تابع یک‌به‌یک نیست.
- **شناخت**
  - **تابع‌های یک به یک**
    - نمایی و لگاریتمی: $y=\log_c(ax+b)$ و $y=a^{mx+n}$
    - رادیکالی: $y=\sqrt{ax+b}$ و $y=\sqrt[3]{ax+b}$
    - هموگرافیک: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$.
  - **تابع‌های غیر یک به یک**
    - مثلثاتی‌ها: همه‌شون یک‌به‌یک نیستند!
    - چندجمله‌ای درجه ۲ $\xrightarrow{y=ax^2+bx+c}$ مگر بازه بدهند $\xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین بازه}}$ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ ، $[-\frac{b}{2a},+\infty)$
    - قدرمطلقی: $y=|ax+b|$ $\xrightarrow{\text{مگر}}$ بازه بدهند $\xrightarrow{\text{بزرگ‌ترین بازه}}$ $(-\infty,-\frac{b}{a}]$ ، $[-\frac{b}{a},+\infty)$
    - براکتی: $y=[ax+b]$
- **روش هندسی:** تابع را رسم کن و از روی نمودار، یک‌به‌یک بودن یا نبودنش را تعیین کن!
- **یک‌به‌یک کردنِ تابع غیر یک‌به‌یک:** کافی است محدوده‌ای از دامنه‌ی $f(x)$ را در نظر بگیرید که تابع در آن محدوده یک‌به‌یک و بعد هم وارون‌پذیر گردد.

Scanned with CamScanner

وارون تابع

- **مفهوم**
  - **وارون تابع:** جایِ x و yها را عوض کنی...
  - **تابعِ وارون:** اگر وارونِ تابع، خودش تابع باشد، به آن تابع وارون می‌گوییم $\xleftarrow{\text{جوردیگه}}$ **اگر f وارون‌پذیر باشد، تابع وارون دارد.**
- **وارون از روی مُدل‌ها**
  - **زوج مرتب:** جای تمامِ مؤلفه‌های اول و دوم را با هم عوض کن. $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $\boxed{R_f = D_{f^{-1}}}$ و $\boxed{D_f = R_{f^{-1}}}$
  - **پیکانی:** جهتِ تمامِ فلش‌ها را برعکس کن.
  - **نمودار مختصاتی:** جایِ طول و عرضِ همه‌ی نقطه‌های موجود را عوض کن و نقطه‌های جدیدِ حاصل را پررنگ کن!
  - **نمودار تابع:** شکل تابع را نسبت به خط $y = x$، قرینه کن...
- **شرط یک‌به یک‌بودن:** f باید یک‌به‌یک باشد $\xrightarrow{\text{جوردیگه}}$
  - نه xِ تکراری داشته باشیم و نه yِ تکراری!
  - هر خط موازی محور xها و yها نمودار تابع را در **حداکثر یک نقطه** قطع کند.

$\boxed{y = f(x)}$

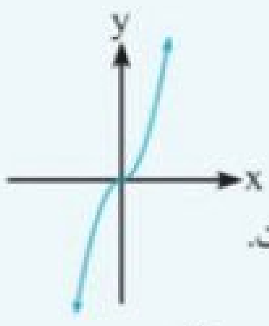
- **پیدا کردن ضابطه‌ی وارون**
  - **مرحله‌ی ۱:** جایِ x و y را عوض کنید.
  - **مرحله‌ی ۲:** y را بر حسبِ xپیدا کنید $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ y را تنها کن و معادله حل کن تا y دربیاد...
  - **مرحله‌ی ۳:** در معادله‌ی آخر، به جای y بذار $f^{-1}(x)$.
  - **مرحله‌ی ۴:** اگر برد f محدود است، بازه‌ی برد f را کنار ضابطه‌ی f^{-1} بذار.
- **معروف‌ها**
  - **تابع خطی:** $\boxed{y = ax + b}$ $\xrightarrow{\text{وارون}}$ $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{x - b}{a}}$
  - **تابع هموگرافیک:** $\boxed{y = \dfrac{ax + b}{cx + d}}$ $\xrightarrow[\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}]{\text{وارون}}$ $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{dx - b}{-cx + a}}$
  - **دو خط وارون هم:** اگر $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ وارونِ هم باشند، آن‌وقت: $\boxed{\dfrac{a}{b'} = \dfrac{b}{a'} = \dfrac{c}{c'}}$.
  - **تابع خطی زیر رادیکال:** $\boxed{y = k \pm \sqrt{ax + b}}$
    - ضریب رادیکال مثبت است: $x \geq k$
    - ضریب رادیکال منفی است: $x \leq k$
    - $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{(x - k)^2 - b}{a}}$
  - **تابع درجه دو:** $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$
    - $a = 1$ ← $\boxed{y = x^2 + mx + n}$
      - $x \geq -\dfrac{m}{2}$ $\xrightarrow{\text{وارون}}$ $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{-m + \sqrt{\Delta + 4x}}{2}}$
      - $x \leq -\dfrac{m}{2}$ $\xrightarrow{\text{وارون}}$ $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{-m - \sqrt{\Delta + 4x}}{2}}$
    - $a \neq 1$ ← a را از کل عبارت فاکتور بگیر و با فرمول بالا وارون پیدا کن، آخر سر به جای x، بذار $\dfrac{x}{a}$.
- **روش تستی**
  - **$f^{-1}(\alpha)$ خواسته شده:** گزینه‌ای درست است که اگر آن را در $f(x)$ بگذاریم، بدهد α.
  - **ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ خواسته شده** ← به x در $f(x)$ عددی دلخواه بدهید تا β حاصل شود. حالا گزینه‌ای درست است که به ازای β به شما همان xِ دلخواه اولیه را بدهد.
  - از روی $f(x)$...

تابع $y=x^3$

دامنه و بُرد: $D=R=\mathbb{R}$

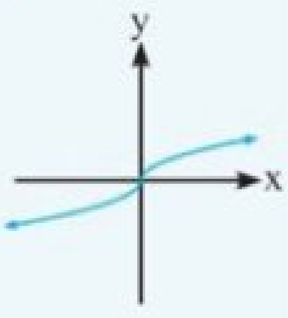
شکل تابع: یک «لُـر» که روی محور x ها در مبدأ نشسته است!

نمودار منحنی، نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.



ویژگی‌هایِ تابع
- یک‌به‌یک است.
- وارون‌پذیر است.
- صعودی اکید است.

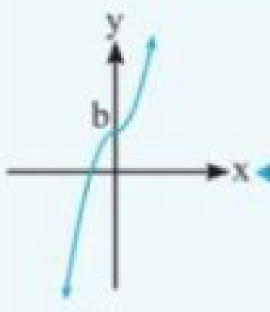
$\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}}$ ← شکل



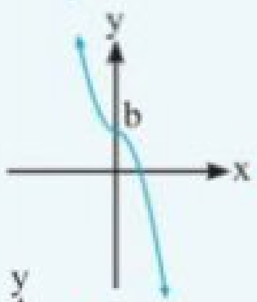
هم‌خانواده‌ها

$\boxed{y=ax^3+b}$

$a>0$ ← شکل‌تقریبی



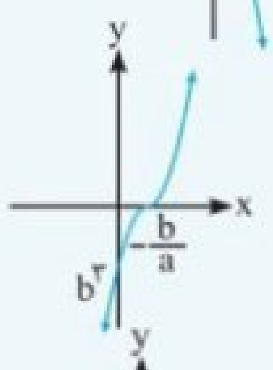
$a<0$ ← شکل‌تقریبی



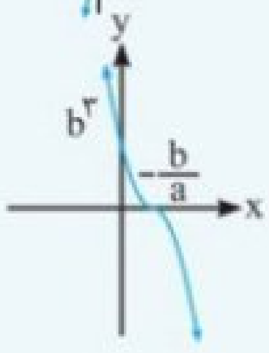
وارون ← $\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-b}{a}}}$

$\boxed{y=(ax+b)^3}$

$a>0$ ← شکل‌تقریبی

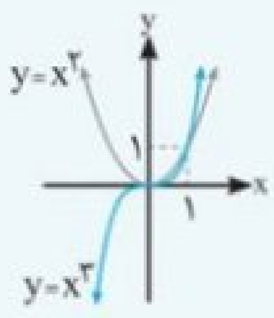


$a<0$ ← شکل‌تقریبی



وارون ← $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{\sqrt[3]{x}-b}{a}}$

ارتباط با x^2 ← هر دو که از مبدأ شروع می‌شوند، x^3 از زیر x^2 حرکت می‌کند تا نقطه‌ی به طول ۱ که به هم برخورد می‌کنند، بعد x^3 می‌رود بالایِ x^2...



اعمال جبری روی f و g

تأثیر بر ضابطه

$\boxed{(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)}$

$\boxed{(f.g)(x)=f(x)g(x)}$

$\boxed{(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}}$

$\boxed{(kf)(x)=kf(x)}$

تأثیر بر دامنه (تابع ترکیبی)

جمع و منها و ضرب: $\boxed{D_{f\pm g}=D_{fg}=D_f\cap D_g}$

تقسیم: $\boxed{D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}}$

← x های مشترکِ دو تابع به جز آن‌هایی که مخرج را صفر می‌کنند.

ضرب عدد: دامنه تغییر نمی‌کند. $\boxed{D_{kf}=D_f}$

مسیر در کنکور: بهتر است دامنه‌ی دو تابع را جداگانه پیدا کرده و سپس دامنه‌ی تابع ترکیبی را به‌دست آورید...

تابع ترکیبی به ازای عددِ α خواسته شده: α را جداگانه به هر تابع بدهید و حاصل آن را جای‌گذاری کنید.

جوردیگه ← $\boxed{(\frac{f+kg}{hg})(\alpha)=\frac{f(\alpha)+kg(\alpha)}{h(\alpha).g(\alpha)}}$

کشیدن نمودار تابعِ ترکیبی با داشتن f و g: باید ضابطه‌ی f و g را پیدا کنید. عملیات خواسته‌شده را روی آن اجرا کرده و در آخر رسم کنید.

متداول‌ترین‌حالت: f و g خط هستند ← اول شیب پیدا کن $\boxed{m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$ بعد معادله بنویس $\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$.

مفاهیم ابتدایی تابع مرکب

شکل ماشینی تابع مرکب

$$(gof)(a)=b:\quad \begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "gof"'] & f \arrow[r, "c"] & g \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

$$(fog)(a)=b:\quad \begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "fog"'] & g \arrow[r, "c"] & f \arrow[r] & b \end{tikzcd}$$

شکل ماشین‌ها در تست داده شده: از آخر شروع کن و بیا عقب، هر ضابطه رو مساویِ مقدار قرار بده: $h \to k$ ، $h(x)=k$

مقداریابی تابع مرکب

$(fog)(a)=?$: a رو بده به g، هرچی دراومد، اونو بده به f و حاصل نهایی رو اعلام کن.

$(gof)(a)=?$: a رو بده به f، هرچی دراومد، اونو بده به g و حاصل نهایی رو اعلام کن.

ترتیب عمل‌کردن تابع‌ها: همیشه اول تابع سمت راستی عمل می‌کنه، بعد سمت چپی؛ در fog اول g بعد f...

پیدا کردن تابع مرکب

زوج‌مرتب‌هاشو می‌خوای: در fog، اول g رو به‌صورت نمودار پیکانی بکش و در ادامه f رو وارد کن، هر عضوی از دایره‌ی دوم که تصویر می‌شه قبوله و بقیه هیچ. در آخر بدون در نظر گرفتنِ دایره‌ی وسطی از اولی به سومی، زوج‌مرتب بنویس...

ضابطه‌اش رو می‌خوای

$\boxed{(fog)(x)=f(g(x))}$ ، در ضابطه‌ی f به جای همه‌ی xها، $g(x)$ رو بذار...

$\boxed{(gof)(x)=g(f(x))}$ ، در ضابطه‌ی g به جای همه‌ی xها، $f(x)$ رو بذار...

روش تستی: یک xِ دلخواه در نظر بگیر و با تابع مرکبِ خواسته‌شده مقداریابی کن، بعد همین x رو در گزینه‌ها بذار، هر کدوم جواب یکسان با مقدار تابع مرکب نده، غلطه!

کار با نمودار

اگر نمودار قابل پیاده‌کردنِ عضوهاست: عضوها رو به‌صورت زوج مرتب بنویس و مثلِ پیدا کردنِ زوج مرتب در تابع مرکب عمل کن...

اگر در نمودار، عضوها معلوم نباشند: ضابطه‌ی f و g رو بنویس (معمولاً معادله‌ی خط هستن) بعد با ضابطه‌ی تابع مرکب یا مقداریابی وارد شو...

داشتن عضوی در تابع مرکب

یه m بنداز وسط!

اگر $\boxed{(a,b)\in fog}$ باشد، آن‌وقت: $\boxed{(a,m)\in g,(m,b)\in f}$

اگر $\boxed{(a,b)\in gof}$ باشد، آن‌وقت: $\boxed{(a,m)\in f,(m,b)\in g}$

دامنه‌ی تابع مرکب

$\boxed{D_{fog}=\{x \mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}}$: دامنه‌ی f و g رو پیدا کن، بعد ضابطه‌ی g رو در محدوده‌ی دامنه‌ی f بذار و حل کن، جوابِ اینو با دامنه‌ی g اشتراک بگیر...

$\boxed{D_{gof}=\{x \mid x\in D_f, f(x)\in D_g\}}$: دامنه‌ی f و g رو پیدا کن، بعد ضابطه‌ی f رو در محدوده‌ی دامنه‌ی g بذار و حل کن، جوابِ اینو با دامنه‌ی f اشتراک بگیر...

روش تستی: یک xِ دلخواه در نظر بگیر و با تابع مرکبی که داری مقداریابی کن. اگر تابع مرکب با این x، مقدارِ حقیقی نده، هر گزینه‌ای که شاملِ این x باشد، غلطه و حذف می‌شه...

ضابطه‌ی تابع مرکب و یکی از دو تابع را داریم

f و fog معلوم‌اند (درونی مجهوله): $f(g(x))$ رو می‌سازی، یعنی به جای همه‌ی xهای f می‌ذاری $g(x)$، بعد مساویِ ضابطه‌ای که تست برای fog داده قرار می‌دی. $f(x)$ مجهوله که درمیاد...

f و gof معلوم‌اند (بیرونی مجهوله): $g(f(x))$ رو تشکیل می‌دی و به جای $f(x)$ ضابطه‌اش رو می‌ذاری: $f(x$ (عبارتی برحسبِ = ☁ ، حالا عبارت داخل پرانتز رو t بگیر و x رو بر حسب t پیدا کن و در ☁ به جای xهای موجود، اونو بذار...

ترکیب f و f^{-1}

- **ضابطه**
  - $(fof^{-1})(x) = x$
  - $(f^{-1}of)(x) = x$
- **وضعیت زوج‌مرتب‌ها**
  - $f^{-1}of = \{(a,a) \mid a \in D_f\}$
  - $fof^{-1} = \{(b,b) \mid b \in R_f\}$
- **دامنه و برد**
  - $D_{f^{-1}of} = R_{f^{-1}of} = D_f$
  - $D_{fof^{-1}} = R_{fof^{-1}} = R_f$
- **نمودار**
  - برای $y = (f^{-1}of)(x)$ ، $y = x$ رو بکش و بخشی از اون رو که در محدوده‌ی xهای دامنه‌ی f می‌افته، بَردار و بقیه رو حذف کن...
  - برای $y = (fof^{-1})(x)$ ، $y = x$ رو بکش و بخشی از اون رو که در محدوده‌ی xهای برد f می‌افته، بَردار و بقیه رو حذف کن...
- **ارتباط:** در حالت کلی: $fof^{-1} \neq f^{-1}of$ $\xleftarrow{\text{شرط مساوی}}$ $D_f = R_f$
- **دو تابع وارونِ هم:** اگر f و g بخواهند وارونِ هم باشند، باید $(fog)(x) = x$ یا $(gof)(x) = x$ باشد...

پخش شدنِ ۱-

- $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ و $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$
- $(fog^{-1})^{-1} = gof^{-1}$ و $(f^{-1}og)^{-1} = g^{-1}of$

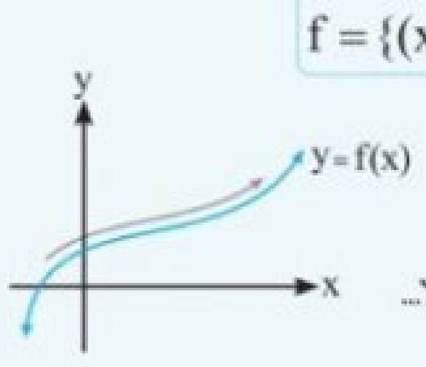
۱- ، روی هر دو تابع اثر می‌کنه؛ ولی از سمت راست به چپ...

- **وجود عضو** (برای α مجهول و β معلوم)
  - $(fog)^{-1}(\alpha) = \beta$ ، نتیجه می‌دهد $(gof)(\beta) = \alpha$
  - $(fog^{-1})(\alpha) = \beta$ ، نتیجه می‌دهد $(gof^{-1})(\beta) = \alpha$
  - $(f^{-1}og)(\alpha) = \beta$ ، نتیجه می‌دهد $(g^{-1}of)(\beta) = \alpha$

مفاهیم اولیه‌ی یکنوایی

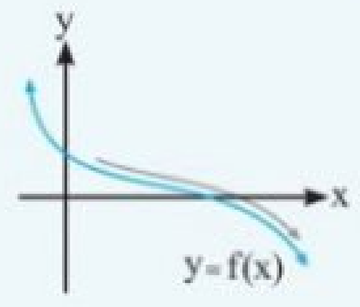
f صعودیِ اکید است.

- **مفهوم فارسی:** با افزایش مقدار x ها، y هایِ نظیر آن‌ها زیاد می‌شود.
- **زوج‌مرتب:** $f = \{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a<b<c$
- **ریاضی:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **نمودار:** از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، همش داره می‌ره بالا...



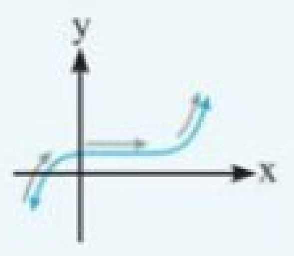
f نزولیِ اکید است.

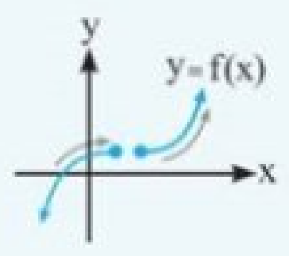
- **مفهوم فارسی:** با افزایش مقدار xها، yهای نظیر آن‌ها کم می‌شود.
- **زوج‌مرتب:** $f = \{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a>b>c$
- **ریاضی:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **نمودار:** از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، همش داره می‌ره پایین...



f صعودی است.

- **مفهوم فارسی:** با افزایش مقدار xها، yهای نظیر یا زیاد می‌شود یا مساویِ همان مقدار قبل باقی می‌ماند (کم نمی‌شود).
- **زوج‌مرتب:** $f = \{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\} \xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a \leq b \leq c$
- **ریاضی:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **نمودار:** از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، یا می‌ره بالا یا در مسیر مستقیم حرکت می‌کنه.

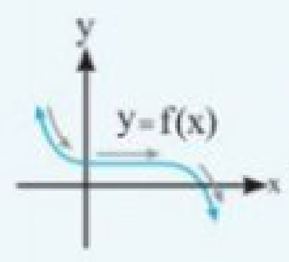


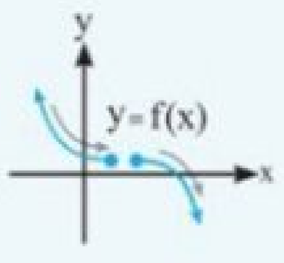


Scanned with CamScanner

f نزولی است.

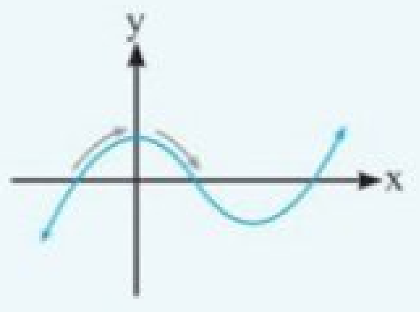
- **مفهوم فارسی:** با افزایش مقدار xها، yهای نظیر یا کم می‌شود یا مساویِ همان مقدار قبل باقی می‌ماند (زیاد نمی‌شود).
- **زوج‌مرتب:** $f=\{(x_1,a),(x_2,b),(x_3,c)\}\xrightarrow{x_1<x_2<x_3} a\ge b\ge c$
- **ریاضی:** $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$
- **نمودار:** از سمت چپ به راست روی تابع حرکت کنی، یا می‌ره پایین یا در مسیر مستقیم حرکت می‌کنه.





مفهوم یکنوایی

- **f یکنوای اکید است** ← صعودی اکید یا نزولی اکید است.
- **f یکنواست.** ← صعودی یا نزولی است.
- **غیریکنواست** ← در بخشی از دامنه‌ی خود، صعودی و در بخشی نزولی است؛ رفتار ثابت ندارد.



تابع‌های صعودیِ اکید معروف

- **تابع خطی با شیب مثبت:** $a>0,\ y=ax+b$
- **تابع خطی با شیب مثبت، زیر رادیکال:** $a>0,\ y=\sqrt{ax+b}$
- **تابع نمایی** $y=a^{mx+n}$
  - با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱ و ضریبِ x مثبت: $a>1$ و $m>0$
  - با پایه‌ی بین صفر و ۱ و ضریبِ x منفی: $0<a<1$ و $m<0$
- **تابع لگاریتمی** $y=\log_c(ax+b)$
  - با ضریبِ x مثبت و مبنای بزرگ‌تر از ۱: $a>0$ و $c>1$
  - با ضریبِ x منفی و مبنای بین صفر و ۱: $a<0$ و $0<c<1$
- **تابع درجه‌ی دوم** $y=ax^2+bx+c$
  - با $a>0$ و بعد از xِ رأس: $x\ge -\frac{b}{2a}$
  - با $a<0$ و قبل از xِ رأس: $x\le -\frac{b}{2a}$
- **تابع درجه‌ی سه و هم‌خانواده‌هاش با ضریبِ x^3 مثبت:** $y=(ax+b)^3\ ,\ y=ax^3+b\ ,\ y=x^3$ با شرطِ $a>0$
- **تابع قدرمطلقِ خطی:** بعد از ریشه‌ی عبارتِ داخل: $y=|ax+b|$ که $x\ge -\frac{b}{a}$ ، $a>0$
- **تابع هموگرافیک (گویا):** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\ne\frac{b}{d}$ و $ad-bc>0$ ، محدوده‌ای برای x که شاملِ ریشه‌ی مخرج نباشد
- **جزء صحیح خطی با شیب مثبت:** $a>0\ ,\ y=[ax+b]$ ولی اکید نیست!

تابع‌های نزولی اکید معروف

- **تابع خطی با شیب منفی:** $a<0\ ,\ y=ax+b$
- **تابع خطی با شیب منفی، زیر رادیکال:** $a<0,\ y=\sqrt{ax+b}$
- **تابع نمایی** $y=a^{mx+n}$
  - با پایه‌ی بین صفر و ۱ و ضریبِ x مثبت: $0<a<1$ و $m>0$
  - با پایه‌ی بزرگ‌تر از ۱ و ضریبِ x منفی: $a>1$ و $m<0$
- **تابع لگاریتمی** $y=\log_c(ax+b)$
  - با ضریبِ x منفی و مبنای بزرگ‌تر از ۱: $a<0$ و $c>1$
  - با ضریبِ x مثبت و مبنای بین صفر و ۱: $a>0$ و $0<c<1$
- **تابع درجه‌ی دوم** $y=ax^2+bx+c$
  - با $a>0$ و قبل از xِ رأس: $x\le -\frac{b}{2a}$
  - با $a<0$ و بعد از xِ رأس: $x\ge -\frac{b}{2a}$

- **تابع درجه‌ی سه و هم‌خانواده‌هاش با ضریبِ x^3 منفی:** $y=(ax+b)^3 , y=ax^3+b , y=x^3$ با شرط $a<0$
- **تابع قدرمطلقِ خطی:** قبل از ریشه‌ی عبارتِ داخل: $y=|ax+b|$ که $x \le -\frac{b}{a}$, $a<0$
- **تابع هموگرافیک (گویا):** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c} \ne \frac{b}{d}$ و $ad-bc<0$ ، محدوده‌ای برای x که شامل ریشه مخرج نباشد.
- **جزء صحیح خطی با شیب منفی:** $y=[ax+b]$ و $a<0$ ولی اکید نیست!

تابع داده‌شده آلپازی است از تابع‌های معروف

- **جمعِ دو تابعِ هم‌رفتار می‌شود تابعی با همان رفتار**
  - صعودی = صعودی + صعودی
  - نزولی = نزولی + نزولی
- **ترکیب**
  - دو تابع هم‌رفتار می‌شود صعودی
    - صعودی = صعودی o صعودی
    - صعودی = نزولی o نزولی
  - دو تابع غیر هم‌رفتار می‌شود نزولی ← نزولی = نزولی o صعودی
- **ضریبِ منفی** ← رفتار را عوض می‌کند؛ ولی ضریبِ مثبت نه!
  - f صعودی ، f نزولی $\xrightarrow{k<0}$ kf نزولی ، kf صعودی
  - نتیجه:
    - اگر f نزولی و g صعودی باشد، $f-g$ نزولی است.
    - اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی است.

راه‌های تشخیص یکنوایی

- **تعریف ریاضی:** قرار بده $x_1<x_2$ و سعی کن ضابطه‌ی تابع رو در دو طرفِ تساوی بسازی...
- **از طریق یک‌به‌یک بودن**
  - اگر f یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه یکنوای اکید است.
  - اگر f یک‌به‌یک نباشد، درباره‌ی صعودی یا نزولی بودنِ f نمی‌توان اظهار نظرِ کلی کرد!
  - اگر f یکنوا نباشد، یک‌به‌یک هم نخواهد بود.
- **رسم تابع:** برای قدرمطلق‌ها، جزءصحیح‌دارها و چند ضابطه‌ای‌ها بهترین راه است...
- **با مشتق**
  - اگر در فاصله‌ای $f'>0$ باشد، f صعودی اکید بوده است.
  - اگر در فاصله‌ای $f'<0$ باشد، f نزولی اکید بوده است.

کاربرد تابعِ یکنوا

- **یافتنِ بُردِ تابع با دامنه‌ی محدود:** فقط اول و آخرِ دامنه رو در تابع جای‌گذاری کن تا اول و آخرِ برد دربیاد... $\xrightarrow{D=[a,b]}$
  - f صعودی اکید: $R=[f(a),f(b)]$
  - f نزولی اکید: $R=[f(b),f(a)]$
- **تلاقی f و f^{-1}**
  - f صعودی اکید است ← f را با $y=x$ قطع بده...
  - f نزولی اکید است ← f را با $y=-x$ قطع بده...

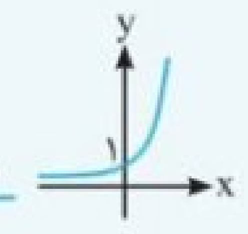
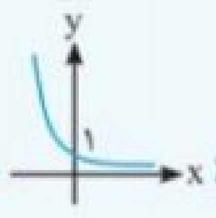
رفتار f و f^{-1}

- **رفتار موافقِ هم دارند**
  - f صعودی اکید ⇔ f^{-1} صعودی اکید
  - f نزولی اکید ⇔ f^{-1} نزولی اکید
- **دامنه و بُرد:** $D_f=R_{f^{-1}}$
- **اگر f یک‌به‌یک باشد، f^{-1} هم یک‌به‌یک خواهد بود.**
- **بازه‌ی یکنوایی:** اگر f روی بازه‌ی $[a,b]$
  - صعودی اکید باشد ← f^{-1} روی $[f(a),f(b)]$ صعودی اکید است.
  - نزولی اکید باشد ← f^{-1} روی $[f(b),f(a)]$ نزولی اکید است.

Scanned with CamScanner

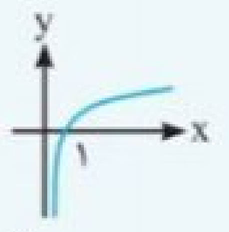
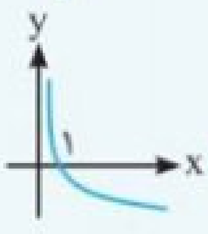
فصل در یک نگاه

تابع نمایی $f(x)=a^x$

- **دامنه و برد:** $R=\mathbb{R}^+ , D=\mathbb{R}$ $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ a^x، هیچ‌گاه منفی و صفر نمی‌شود.
- **تلاقی با محورها:**
  - محور xها را قطع نمی کند.
  - محور yها را در نقطه‌ی ۱ قطع می‌کند.
- **یک به یک است** $\xrightarrow{\text{ضابطه‌ی وارون}}$ $\boxed{f^{-1}(x)=\log_a x}$
- **نمودار:**
  - $a>1$:  $\xrightarrow{\text{رفتار}}$ صعودی است.
  - $0<a<1$:  $\xrightarrow{\text{رفتار}}$ نزولی است.
- **ضربِ منفی:** تابع $-a^x$
  - **نمودار:** شکلِ a^x را بکش و نسبت به محور xها قرینه کن...
  - **رفتار:** برعکس a^x است.
    - $a>1$: نزولی است.
    - $0<a<1$: صعودی است.
- **شناسایی تابع نمایی:** در جدولِ داده‌های x و y:
  - xها دنباله‌ی حسابی
  - yها دنباله‌ی هندسی

  $\xrightarrow{\text{پایه‌ی تابع نمایی}}$ $a^d=r$

تابع لگاریتمی $f(x)=\log_a x$

- **دامنه و برد:** $R=\mathbb{R}$ و $D=\mathbb{R}^+$ $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $x , a>0 , a\neq 1$
- **تلاقی با محورها:**
  - محور xها را در ۱ قطع می‌کند $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $\log_a 1=0$
  - محور yها را قطع نمی‌کند $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $\log_a 0=$ نامعین
- **نمودار:**
  - $a>1$:  $\xrightarrow{\text{رفتار}}$ صعودی است.
  - $0<a<1$:  $\xrightarrow{\text{رفتار}}$ نزولی است.
  - $-\log_a x$ $\xrightarrow{\text{ضرب منفی}}$ نسبت به محور xها قرینه کن...
- **علامت:**
  - $a>1$:
    - $u>1$ آن‌گاه: $\log_a u>0$.
    - $0<u<1$ آن‌گاه: $\log_a u<0$.
  - $0<a<1$:
    - $u>1$ آن‌گاه: $\log_a u<0$.
    - $0<u<1$ آن‌گاه: $\log_a u>0$.

قوانین لگاریتم

- **چرخش:** $\log_a u = k \Rightarrow u = a^k$ $\xleftarrow{\text{مناسب برای}}$ زمانی که از بین اعدادِ u، a و k تنها یکی، مجهول باشد...
- **ویژگی‌ها**
  - $\boxed{\log_a a = 1}$
  - $\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$: ضرب را جمع می‌کند!
  - $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$:تقسیم را منها می‌کند!
  - $\boxed{\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x}$: انتقالِ توان!
  - $\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$:تغییر مبنا $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $\boxed{\log_a x = \frac{1}{\log_x a}}$
    - $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $\boxed{\log_a x \log_b a = \log_b x}$
- **یکی کردنِ لگاریتم‌ها**
  - جمع شده‌اند: $\boxed{m\log_c a + n\log_c b = \log_c a^m b^n}$
  - منها شده‌اند: $\boxed{m\log_c a - n\log_c b = \log_c \frac{a^m}{b^n}}$
- **در مبنایِ ۱۰**
  - مبنا نوشته نمی‌شود: $\boxed{\log a = \log_{10} a}$
  - $\boxed{\log 2 + \log 5 = 1}$
- **لگاریتم در توان است**
  - جایِ پایه و عددِ مقابلِ **log** را عوض کن: $\boxed{a^{\log_c b} = b^{\log_c a}}$
  - $\boxed{a^{\log_a b} = b}$

معادلات و نامعادلاتِ توانی

- **معادله‌ی نمایی**
  - عاملِ اولِ تمامِ پایه‌ها یکی است $\xrightarrow{\text{روش حل}}$ پایه‌ها را یکی کن $\xrightarrow{\text{آخرش}}$ $\boxed{a^u = a^v \Rightarrow u = v}$
    - $a^m \times a^n = a^{m+n}$　$a^{mn} = (a^m)^n$　$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  - عبارتِ نماییِ تکراری می‌بینی $\xrightarrow{\text{روش حل}}$ تغییر متغیر $\xrightarrow{\text{به‌خصوص}}$ $a^{2x} = A^2, a^x = A$ $\xrightarrow{\text{آخرش}}$ معادله‌ی درجه ۲ حل کن.
  - عددِ نمایی را مساوی با یک عدد پیدا کردی، ولی x،قابل فهمیدن نیست! $\xrightarrow{\text{روش حل}}$ از دو طرفِ تساوی،log بگیر در مبنایِ پایه!
- **نامعادله‌ی نمایی:** تمام پایه‌ها را یکی کن بعدش
  - $\boxed{x \geq y \xleftarrow{a>1} a^x \geq a^y}$ ، حفظ جهت!
  - $\boxed{x \leq y \xleftarrow{0<b<1} b^x \geq b^y}$ ، تغییر جهت!

معادلات و نامعادلات لگاریتمی

- **معادله‌ی لگاریتمی**
  - **روش حل:** تمام logها را به یکی تبدیل کن، بعدش:
    - logها را خط بزن: $\boxed{\log_a u = \log_a v \Rightarrow u = v}$
    - چرخش بده: $\boxed{\log_a u = b \Rightarrow u = a^b}$
  - **بررسیِ جواب‌ها:** x های به‌دست آمده باید در دامنه‌ی لگاریتم‌ها باشند $\xrightarrow{\text{یعنی}}$
    - مبنا و مقابل هیچ لگاریتمی منفی نشود.
    - مبنا هم، هیچ‌گاه ۱ نشود!
- **نامعادله‌ی لگاریتمی**
  - **روش حل:** تمام logها را به یکی تبدیل کن، بعدش:
    - $a>1$: $\boxed{\log_a u \geq b \Rightarrow u \geq a^b}$
    - $0<a<1$: $\boxed{\log_a u \geq b \Rightarrow u \leq a^b}$
    - خط زدن logها
      - $a>1$: $\boxed{\log_a A \geq \log_a B \Rightarrow A \geq B}$
      - $0<b<1$: $\boxed{\log_b A \geq \log_b B \Rightarrow A \leq B}$
  - **قدم آخر:** دامنه‌ی تمام logها را پیدا کن و با محدوده‌ای که بالا درآوردی، اشتراک بگیر...

فصل در یک نگاه

زاویه‌ها

- دو زاویه‌ی متمم: $\boxed{\alpha+\beta=۹۰^\circ}$
- دو زاویه‌ی مکمل: $\boxed{\alpha+\beta=۱۸۰^\circ}$
- دو زاویه‌ی متقابل به رأس: شکل

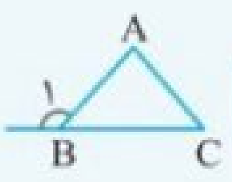
ویژگی $\boxed{\alpha=\beta}$

- زاویه‌ها در خطوط موازی مورب
  - حاده‌ها: مساوی‌اند:

  - تمامیِ زاویه‌های باز: مساوی‌اند:

  - هر حاده با یک باز: مکمل‌اند:

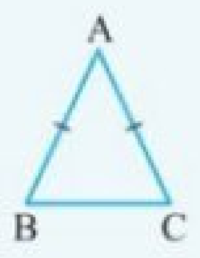
  - توجه: از نقطه‌ی شکست، موازیِ دو خط موازی خطی رسم کن...
- زاویه‌ی خارجی در مثلث
  - به‌وجود آمدن: با امتدادِ ضلعِ مثلث به‌وجود می‌آید.
  - اندازه: مجموع دو زاویه‌ی داخلیِ غیر مجاور $\boxed{\hat{B}_1=\hat{A}+\hat{C}}$



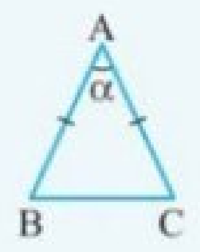
- زاویه‌ی اسیر بین دو خط موازی: $\boxed{\alpha=x+y}$

- زاویه‌های بادبادک: $\boxed{\alpha+\beta=x+y}$

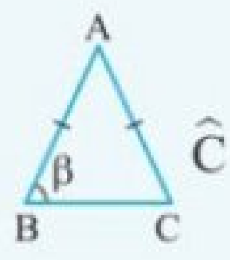
- در مثلث متساوی‌الساقین (دو ضلعِ مساوی دارد)
  - زوایای مجاور به قاعده $\boxed{\hat{B}=\hat{C}}$



  - $\boxed{\hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ-\alpha}{۲}}$



  - $\hat{C}=\beta\ ,\ \hat{A}=۱۸۰^\circ-۲\beta$



  - نیمساز و ارتفاع و میانه‌ی نظیر قاعـده‌اش بر هم منطبق‌اند.

هم‌نهشتی دو مثلث

- دو مثلث در حالت کلی
  - ض ز ض
  - ز ض ز
  - ض ض ض
  - فایده: اجزاء نظیرِ دو مثلث با هم مساوی‌اند.
  - شناخت تست: شکلِ تست شامل چند مثلث است و تعدادی پاره‌خطِ مساوی هم می‌بینیم...
- دو مثلث قائم‌الزاویه
  - وتر و یک ضلع
  - وتر و یک زاویه‌ی حاده

Scanned with CamScanner

درباره‌ی n ضلعی

- **مجموع زوایای داخلی:** $(n-2)180^\circ$ $\xrightarrow{\text{یک زاویه‌ی داخلی n ضلعی منتظم}}$ $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$
- **تعداد قطرها:** $\frac{n(n-3)}{2}$
- **مجموع زوایای خارجی:** 360° $\xrightarrow{\text{یک زاویه‌ی خارجی n ضلعی منتظم}}$ $\frac{360^\circ}{n}$

استدلال

آوردن دلیل

- **گزاره**
  - **مفهوم:** جمله‌ی خبری که وضعیت درستی یا نادرستیِ آن کاملاً معلوم یا قابلِ مشخص کردن باشد.
  - **چه جملاتی گزاره نیستند:** جملاتِ سؤالی، امری، تعجبی، x دار و آن‌هایی که قیدِ مبهم دارند.
  - **نقیض گزاره:** از خودِ گزاره ساخته می‌شود؛ با گذاشتنِ کلماتِ «این‌طور نیست که...» در ابتدای گزاره.
    - به‌جور دیگه: گزاره درست باشد، نقیضش غلطه...
- **انواع استدلال**
  - **استقرایی**
    - از مشاهده‌ی چند موردِ جزئی، نتیجه‌ی کلی بگیری.
    - رسیدن از جزء به کل.
  - **استنتاجی:** با نتایج درستِ قبلی، چیزی را ثابت کنیم.
  - **برهان خلف:** فرض می‌کنیم حکم غلط باشد و با کمک فرض و قضایای قبلی به یک تناقض آشکار می‌رسیم...
  - **مثال نقض:** این برای اثبات کردن نیست! آوردن یک مثال است که ویژگیِ مورد نظر را ندارد؛ این‌طوری کلیتِ حکم نقض می‌شود!
  - **استدلال‌های درست:** استنتاجی و برهان خلف نتیجه‌شان همواره درست است.
    - جمله‌ی درستِ کاربردی
      - **فرم:** $A \Rightarrow B$
      - **فرض و حکم:** A را فرض و B را حکم می‌گوییم.
      - **عکس قضیه:** در قضیه‌ی $A \Rightarrow B$، عکس می‌شود: $B \Rightarrow A$
      - اگر عکسِ قضیه هم درست باشد، قضیه می‌شود **دو شرطی:** $A \Leftrightarrow B$

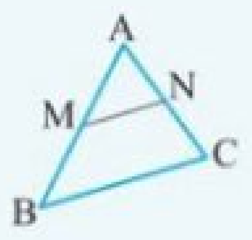
ترسیم

- **با کمک ویژگیِ نقطه:** مجموعه‌ی تمامی نقاطی که
  - تا نقطه‌ی ثابتِ A، فاصله‌ی k دارند $\xrightarrow{\text{جواب}}$ دایره‌ای به مرکز A و شعاع k
  - تا خطِ ثابتِ L، فاصله‌ی k دارند $\xrightarrow{\text{جواب}}$ دو خط موازی با L در طرفین آن و به فاصله‌ی k از آن
  - از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند $\xrightarrow{\text{جواب}}$ عمودمنصفِ پاره‌خطِ AB
  - از دو خط متقاطعِ L و L'، به یک فاصله‌اند $\xrightarrow{\text{جواب}}$ نیمساز زاویه‌ی بین L و L'
  - روش حل تست: نقطه‌ای که از شما می‌خواهند، دو ویژگی از چهارتای بالا را دارد، جوابِ هر کدام از آن دو تا را بکشید و تلاقی دهید...
- **ترسیم‌های هندسی**
  - **وسایل ترسیم:** خط‌کشِ غیر مدرج و پرگار
  - **ترسیم‌های ساده** (این‌ها پایه‌ی هر رسم دیگری هستند)
    - عمودمنصفِ AB $\xrightarrow{\text{جور دیگه}}$ پیدا کردنِ وسطِ پاره‌خط
    - نیمساز زاویه
    - کشیدنِ عمود
      - از نقطه‌ی روی خط
      - از نقطه‌ی بیرون خط
    - خط موازی از نقطه‌ی خارجِ خط
    - رسم مثلث با داشتن اندازه‌ی سه ضلع آن
  - **حل تستِ رسم مثلث**
    - یک ضلع را داده $\xrightarrow{\text{برای پیدا کردن رأس سوم}}$
      - میانه را داده ← به مرکز وسطِ ضلع و شعاعِ میانه کمان بزن.
      - ارتفاع را داده ← خط موازی ضلع و به فاصله‌ی ارتفاع از آن بکش.
    - یک مثلث کوچکِ داخل شکل با معلوم بودنِ سه ضلعش داریم ← آن را بکش و با آن مثلث را کامل کن.

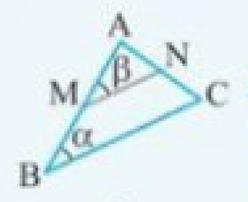
نسبت و تناسب

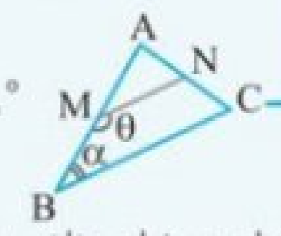
- **ویژگی‌های حاصل از ترسیم**
  - **عمودمنصف‌های هر مثلث دلخواه، در یک نقطه همرس‌اند.**
    - اسم نقطه: مرکز دایره محیطی
    - ویژگی نقطه: از هر سه رأس به یک فاصله است.
  - **نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث دلخواه در یک نقطه همرس‌اند.**
    - اسم نقطه: مرکز دایره محاطی
    - ویژگی نقطه: از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.
- **معنای نسبت:** به کسر $\frac{a}{b}$ می‌گوییم نسبت؛ $b \neq ۰$.
- **خواص تناسب:** اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد، آن‌گاه
  - $\boxed{ad = bc}$
  - **عملیات ترکیب**
    - در صورت: $\boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}}$
    - در مخرج: $\boxed{\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}}$
  - **عملیات تفضیل**
    - در صورت: $\boxed{\frac{|a-b|}{b} = \frac{|c-d|}{d}}$
    - در مخرج: $\boxed{\frac{a}{|a-b|} = \frac{c}{|c-d|}}$
  - **جمع صورت‌ها با هم و مخرج‌ها با هم:** $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = k}$
  - کار با تناسب: اگر $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$ بود، به‌طوری که m و n دو عددِ معلوم بودند، بگویید: $\boxed{a = mk \text{ و } b = nk}$

    ببین: $\frac{x}{y} = \frac{۳}{۴}$ نتیجه می‌دهد $x = ۳k$ و $y = ۴k$.
- **تالس**
  - **قضیه‌ی تالس**
    - شرط: باید خطی در مثلث، موازیِ یک ضلع آن کشیده شده باشد.
    - تالس نویسی (رأس را پیدا کن)

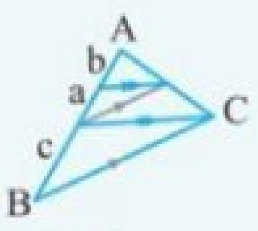
      

      - تالس جزء به جزء: $\boxed{\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}}$
      - تالس جزء به کل: $\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}$
        - فایده: اگر اندازه‌ی خطِ موازی برایتان مهم است، باید تالس را این‌طوری بنویسید...
    - تالس در حضور زاویه‌ها

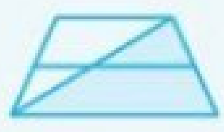
      

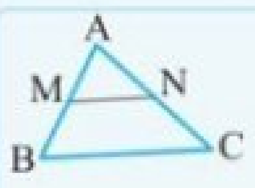
      $\left\{\begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \alpha + \theta = ۱۸۰^\circ \end{array}\right.$ یعنی $\boxed{MN \parallel BC}$
  - **میان خط**
    - مفهوم: خطی است که وسط‌هایِ دو ضلعِ مثلثی را به هم، وصل می‌کند.
    - ویژگی
      - موازی ضلع روبه‌رویی خود است.
      - نصف ضلع روبه‌رویی خود است.
  - **تو در تو**
    - شناسایی: با علامتِ zoro در مثلث مواجه هستیم:

    - نوشتن رابطه: بروید سراغ ضلعی که سه قسمت شده؛ بعدش $\boxed{a^۲ = bc}$
  - **در ذوزنقه:** یکی از قطرها را بکش و تالس بنویس:

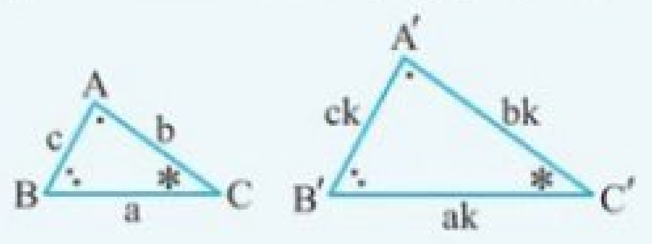
  - **عکس تالس:** اگر خطی یکی از تناسب‌هایِ تالس را در مثلث برقرار کرده باشد، با ضلع روبه‌رویی خودش موازی است.

    $\xrightarrow[\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}]{\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}} MN \parallel BC$

تشابه

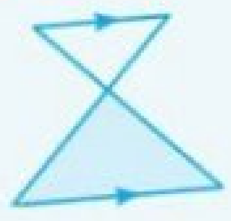
- **مفهوم**
  - **تمام زوایا:** نظیر به نظیر مساوی‌اند.
  - **تمام اضلاع:** نظیر به نظیر، ضریبی از هم هستند $\xrightarrow{\text{نسبت تشابه}}$ نسبتِ اضلاعِ متناظر در دو مثلث است. (k)
- **شکل هندسیِ تشابه دو مثلث:**



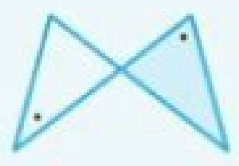
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$$

- **حالت‌های تشابه دو مثلث**
  - زز ← دو زاویه‌ی مساوی $\xrightarrow{\text{یادت باشه}}$ این اصلی‌ترین حالتِ اثبات تشابه دو مثلث است.
  - ض ز ض ← دو ضلع متناسب و زاویه‌ی بین آن‌ها مساوی
  - ض ض ض ← سه ضلع متناسب
- **فایده‌ی اثباتِ تشابه دو مثلث**
  - اضلاعِ متناظر را از روی زاویه‌ها شناسایی کن و تناسبِ حاصل را بنویس.
  - زاویه‌های متناظر، مساوی‌اند.
- **کنکوری‌ترین حالت‌های (زز)**
  - **مثلث پاپیونی داریم**
    - دو تا پاپیونی قائم الزاویه

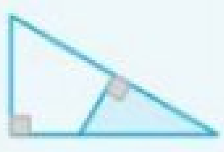
    - دو تا پاپیونی که ضلع رو به روی موازی دارند.



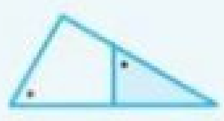
    - دو تــا پاپیونی کــه دارای یک زاویه‌ی مساوی هستند.



  - **مثلث گوشه‌نشین**
    - مثلث گوشه‌نشین شما قائم الزاویه است و در گوشه‌ی مثلث قائم‌الزاویه هم نشسته است!



    - مثلث گوشه‌نشین شما دارای یک زاویه‌ی مساوی با مثلث اصلی است:



- **دو مثلث توسطِ خود تست گفته شده**
  - اضلاع را می‌توان از کوچک به بزرگ مرتب کرد: $\frac{\text{ضلع کوچک اولی}}{\text{ضلع کوچک دومی}}=\frac{\text{ضلع متوسط اولی}}{\text{ضلع متوسط دومی}}=\frac{\text{ضلع بزرگ اولی}}{\text{ضلع بزرگ دومی}}$
  - اضلاع را نمی‌توان از کوچک به بزرگ مرتب کرد ← همه‌ی حالت‌های ممکن برای تشابه را در نظر بگیر.

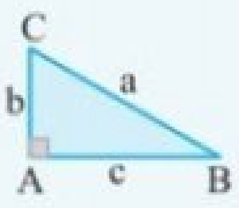
تشابهِ اجزای فرعی در مثلث

- **نسبت اضلاع k است**
  - نسبت میانه‌های نظیر : $\boxed{k}$
  - نسبت نیمسازهای نظیر : $\boxed{k}$
  - نسبت ارتفاع‌های نظیر : $\boxed{k}$
  - نسبت محیط‌های نظیر : $\boxed{k}$

  هر کـدام از این‌هـا را داده بود، انگار نسبت تشابه داده.
  - نسبت مساحت‌های نظیر : $\boxed{k^2}$ $\xrightarrow{\text{حل تست}}$ اگر نسبت مساحت‌ها را داده بود جذر بگیر و نسبت تشابه را گیر بیار...

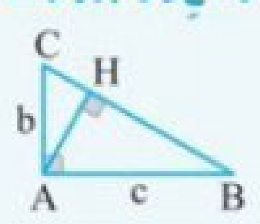
ویژگی‌های مثلث قائم الزاویه

- **فیثاغورس:**



$$\boxed{\hat{A}=90^\circ}\Leftrightarrow\boxed{a^2=b^2+c^2},$$

- **ارتفاعِ وارد بر وتر کشیده شده**



  - **مثلث‌های متشابهِ موجود**
    - $\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{ABC}$
    - $\overset{\triangle}{AHC}\sim\overset{\triangle}{ABC}$
    - $\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{AHC}$
  - **روابط طولی**
    - با اندازه‌ی ارتفاع و قطعه‌ها کار داری: $\boxed{AH^2=BH.CH}$
    - با اضلاع و قطعه‌های حاصل روی وتر کار داری: $\boxed{AB^2=BH.BC}$ ، $\boxed{AC^2=CH.BC}$
    - با ارتفاع و اضلاع کار داری: $\boxed{AH=\frac{bc}{a}}$

Scanned with CamScanner

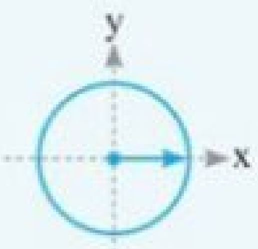
فصل در یک نگاه

در موردِ زاویه

- **طول کمان:** $\boxed{\ell = R\theta}$ ، یعنی طولِ کمان، می‌شود ضربِ شعاع دایره در زاویه‌ی مرکزیِ روبه‌رویش بر حسب رادیان.
- **تبدیلِ واحدهای زاویه به همدیگر**
  - **از درجه به رادیان:** در $\frac{\pi}{۱۸۰^\circ}$ ضرب کن.
  - **از رادیان به درجه:** در $\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$ ضرب کن.

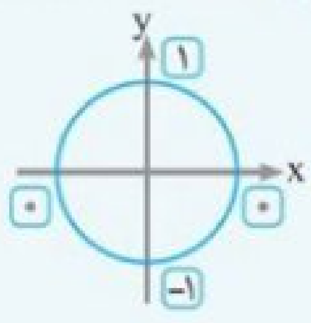
دایره‌ی مثلثاتی

- **مفاهیم ابتدایی دایره**
  - **شعاع:** ۱ است.
  - **مرکز:** مبدأ مختصات است.
  - **جهتِ مثلثاتی:** خلافِ حرکت عقربه‌های ساعت.
  - **شروع کمان‌ها:** شعاعی از دایره که روی جهتِ +محور x هاست: x

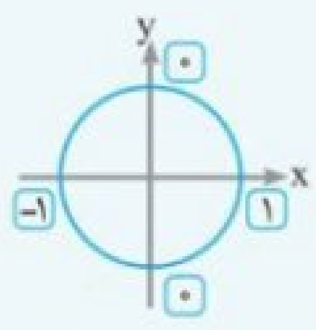


- **sinα و cosα**
  - **در دایره:** از انتهای کمانِ α بر دو محور عمود کن.
  - **حدود:** $\boxed{-۱ \le \sin\alpha \le ۱, -۱ \le \cos\alpha \le ۱}$
- **علامتِ نسبت‌های مثلثاتی**
  - **در ناحیه‌ی اول:** همه + اند.
  - **در ناحیه‌ی دوم:** فقط sin ، + است.
  - **در ناحیه‌ی سوم:** tan (و cot)، + است.
  - **در ناحیه چهارم:** فقط cos ، + است.

  به‌ترتیب در ناحیه‌ها، **هستک** مثبت است.
- **مقدار نسبت‌های مثلثاتی در مرزهای دایره**
  - **سینوس:**



  - **کسینوس:**



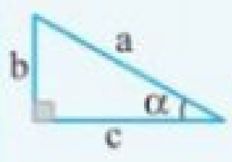
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

نسبت‌های مثلثاتی

- **زوایای معروف:**

α	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sinα	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cosα	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

- **در مثلث قائم‌الزاویه**



  - **سینوس:** ضلع مقابل به وتر: $\boxed{\sin\alpha = \frac{b}{a}}$
  - **کسینوس:** ضلع مجاور به وتر: $\boxed{\cos\alpha = \frac{c}{a}}$
  - **تانژانت:** ضلع مقابل به مجاور: $\boxed{\tan\alpha = \frac{b}{c}}$
  - **کتانژانت:** ضلع مجاور به مقابل: $\boxed{\cot\alpha = \frac{c}{b}}$

رابطه‌های تکمیلی مثلثات

پیدا کردن همه‌ی نسبت‌ها
(با داشتن یکی از آن‌ها و انتهای کمان)

استفاده از اتحادهای:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ یا $\cot^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

راه حل شیک: کشـیدن مثلثِ قائم‌الزاویه‌ای که برایِ یک زاویه‌اش، نسـبتِ مثلثاتیِ فرض برقراره $\xrightarrow{\text{بعدش}}$ فیثاغورس $\xrightarrow{\text{بعدش}}$ پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتیِ دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه

روابط مقدماتی

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ و $\cot^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

روابط فرعی

$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin^3\alpha \pm \cos^3\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)(1 \mp \sin\alpha\cos\alpha)$

$(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha) = \cos^2\alpha$

$\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ و $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

منفی در کمان

کسینوس: منفی را می‌خورد: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

نسبت‌های دیگر غیر از کسینوس: منها را می‌دهند بیرون
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

2π در کمان: به جای 2π، بذار صفر
(انگار هر مضرب زوجی از π، صفره.)

$\sin(2\pi \pm \alpha) = \sin(\pm\alpha)$

$\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos(\pm\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(2\pi \pm \alpha) = \tan(\pm\alpha)$

$\cot(2\pi \pm \alpha) = \cot(\pm\alpha)$

π در کمان

فرم کمان: $(\pi \pm \quad)$

تعیین ناحیه:
- $\pi + \alpha$: ناحیه‌ی سوم است.
- $\pi - \alpha$: ناحیه‌ی دوم است.

پیدا کردن جواب: در کمان، $(\pi \pm \quad)$ است: شما فقط را نگه دارید با نسبتِ پشتِ آن. علامتِ نسبت مثلثاتی را طبقِ ناحیه‌ی بالا، پشتِ آن بذارید.

صورتِ ریاضی:

	$\sin$	$\cos$	$\tan$	$\cot$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

$\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ در کمان

- **فرمِ کمان:** $(\frac{3\pi}{2} \pm \square)$ یا $(\frac{\pi}{2} \pm \square)$
- **تعیین ناحیه**

کمان	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
ناحیه	اول	دوم	سوم	چهارم

- **پیدا کردن جواب:** نسبت مثلثاتی رو هم‌نوا و مخالف بنویس. کمان هم همیشه α و علامتِ نسبت مثلثاتیِ اولیه رو طبق ناحیه‌ی بالا بذار پشت.
- **صورت ریاضی**

	sin	cos	tan	cot
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$

	sin	cos	tan	cot
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$

زوایایِ متمم و مکمل

- **مکمل‌ها:** sinِ مساوی دارند و cosِ قرینه.
- **متمم‌ها:** هر نسبت می‌شود هم‌نوا و مخالفِ دیگری.

فرمول‌های 2α

برای سینوس

- **فرمول سینوسِ 2α:** $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$
- **حالت کلی‌تر:** این فرمول را برای هر کمانی که باز کنی، در سمت راست، نصف می‌شود: $\boxed{\sin 2u = 2\sin u\cos u}$
  - یه حالت کنکوری: $\boxed{\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$
- **کاربرد در تست:** ضربِ سینوس و کسینوس یک کمان را دیدی...! $\boxed{\sin u\cos u = \frac{1}{2}\sin 2u}$
- **مجموع سینوس و کسینوس یک کمان:** $\boxed{(\sin u \pm \cos u)^2 = 1 \pm \sin 2u}$

برای کسینوس

- **فرمول کسینوسِ 2α**
  - بر حسب سینوس و کسینوس: $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$
  - فقط بر حسب کسینوس: $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$
  - فقط بر حسب سینوس: $\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$
- **در حالت کلی:** برای هر کمانی، این فرمول را باز کنی، در سمت راست نصف می‌شود:
  $\boxed{\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u}$
- **فرمول‌های طلایی:** $\left\{\begin{array}{l} 1+\cos 2u = 2\cos^2 u \\ 1-\cos 2u = 2\sin^2 u \end{array}\right.$: $\boxed{1 \pm \cos \square}$ دیدی یادِ طلایی بیفت!

کاربردها

- پیدا کردن نسبت مثلثاتیِ زاویه‌های غیر معروفی که دو برابرشان معروف است: $\boxed{15^\circ, 22/5^\circ, 67/5^\circ, 75^\circ}$
- با داشتن یک نسبت مثلثاتیِ α، نسبت‌های 2α را پیدا کنی $\xrightarrow{\text{ترتیب}}$ اول حتما $\cos 2\alpha$ را پیدا کن...
  اول فرمول‌های مقدماتی مثلثات را برای α می‌نویسی بعداً همین فرمول‌ها را برای 2α...

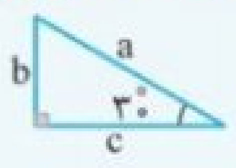
نتیجه‌ها

- $\left\{\begin{array}{l} \boxed{\cot u + \tan u = \frac{2}{\sin 2u}} \\ \boxed{\cot u - \tan u = 2\cot 2u} \end{array}\right.$ جمع یا تفاضل تانژانت و کتانژانت دیدی، یادِ این‌ها بیفت!
- فرمول تانژانت 2α: $\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$

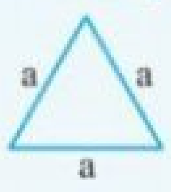
Scanned with CamScanner

مثلثات در لباس هندسه

- **در مثلث قائم‌الزاویه:** ضلع مقابل به زاویه‌ی °۳۰، نصف وتر است. $\xrightarrow{\text{صورت ریاضی}}$ $b=\frac{a}{2}$



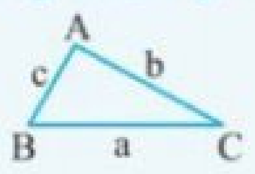
- **در مثلث متساوی الاضلاع**
  - ارتفاع: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
  - مساحت: $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$



- **در شش ضلعی منتظم**
  - مساحت: $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$
  - قطر کوچک: $d_1=\sqrt{3}a$
  - قطر بزرگ: $d_2=2a$

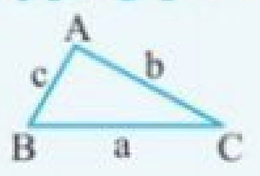
(هر زاویه‌ی داخلی: °۱۲۰)

- **در مثلث دلخواه:** مساحت می‌شود
  - $S=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$
  - $S=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$
  - $S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$



- **قضیه‌ی سینوس‌ها:** در هر مثلث دلخواه داریم: $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$

- **قضیه‌ی کسینوس‌ها:** در هر مثلث دلخواه داریم:
  - $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$
  - $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$
  - $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$



دوره‌ی تناوب

- **تعریف**
  - مفهوم تابع متناوب: اگر عدد مثبت c موجود باشد به‌طوری که: $f(x+c)=f(x)$، f می‌شود متناوب.
  - دوره‌ی تناوب: کوچک‌ترین عددِ c در تعریف بالا، دوره‌ی تناوب است $\xrightarrow{\text{نماد}}$ T.
- **پیدا کردنِ T**
  - نسبت‌های مثلثاتی معروف
    - سینوس: $y=k\sin(ax+b)+t$ $\xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}}$ $T=\frac{2\pi}{|a|}$
    - کسینوس: $y=k\cos(ax+b)+t$ $\xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}}$ $T=\frac{2\pi}{|a|}$
    - تانژانت: $y=k\tan(ax+b)+t$ $\xrightarrow{\text{دوره‌ی تناوب}}$ $T=\frac{\pi}{|a|}$
  - بی‌تأثیرها: ضریب نسبت مثلثاتی، عددِ ثابت جمع و منها شده با کمان یا با نسبت مثلثاتی در یافتنِ T بی‌اثرند! **فقط ضریبِ x کمان مهمه ...!**
  - مجموع چند عبارت
    - اگر عبارت قابل ساده شدن است ⟵ اول ساده کن با اتحادهای مثلثاتی و بعد T پیدا کن...
    - اگر عبارت ساده نمی‌شود ⟵ تک تک، دوره تناوب بگیر و بعد بین دوره تناوب‌ها ک‌م‌م حساب کن.
      - $\xrightarrow{\text{ک‌م‌م کسری‌ها}}$ $[\frac{a}{b},\frac{c}{d}]=\frac{[a,c]}{(b,d)}$

Scanned with CamScanner

تغییر در دوره‌ی تناوب
- توان فرد نسبت مثلثاتی: تأثیری بر T ندارد. مثل $y=\sin^{3} 2x, T=\pi$
- توانِ زوجِ نسبت مثلثاتی: دوره تناوب را نصف می‌کند. مثل $y=\sin^{2} 2x, T=\frac{\pi}{2}$
- قدر مطلق دورِ نسبتِ مثلثاتی: دوره تناوب را نصف می‌کند. مثل $y=|\sin 2x|, T=\frac{\pi}{2}$

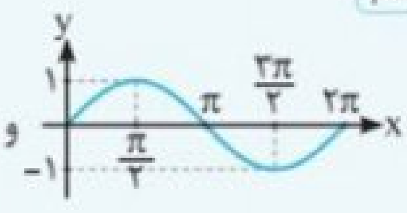
کاربرد
- موج سینوسی: $\boxed{f(t)=a\sin(bt)+c}$
- موج کسینوسی: $\boxed{f(t)=a\cos(bt)+c}$

دامنه‌ی موج: $\boxed{a=\frac{Max-Min}{2}}$

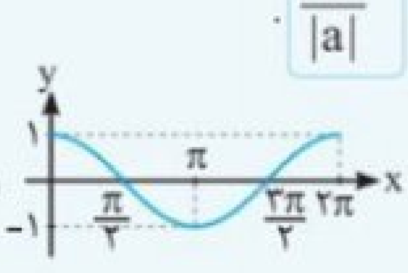
$\boxed{c=\frac{Max+Min}{2}}$

$\boxed{|b|=\frac{2\pi}{T}}$

y=Sin u

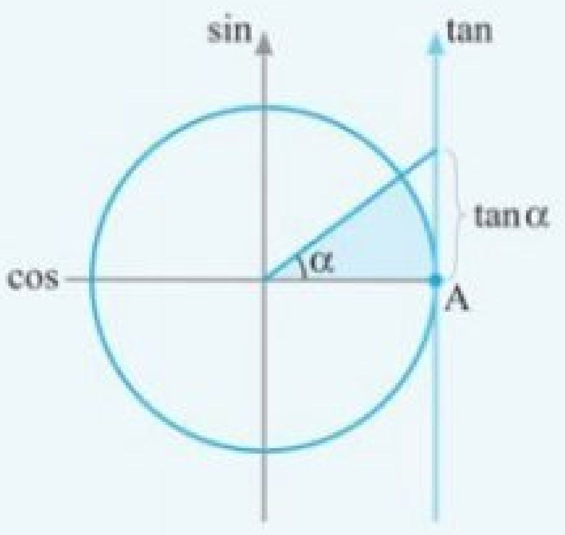
- **دامنه:** $\boxed{D=\mathbb{R}}$ ، مگر این‌که u محدودیتی داشته باشد!
- **بُرد:** $\boxed{y=\sin x \Rightarrow R=[-1,1]}$ $\xleftarrow{\text{حالت کاربردی}}$ $\boxed{[-a,a] \xleftarrow{\text{برد}} y=a\sin(bx+c)}$
- **ماکسیمم:** قرار دهید $\boxed{u=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ تا مقدار $\sin$، بشود ۱.
- **مینیمم:** قرار دهید $\boxed{u=2k\pi-\frac{\pi}{2}}$ تا مقدار $\sin$، بشود ۱- .
- **تلاقی با محورxها:** قرار دهید $\boxed{u=k\pi}$ تا مقدار $\sin$، بشود صفر.
- **دوره‌ی تناوب:** برای تابعِ $\boxed{y=k\sin(ax+b)+t}$ عبارت است از $\boxed{\frac{2\pi}{|a|}}$.
- **کشیدنِ تابع:** کافی است $\boxed{y=\sin x}$ را در یک دوره تناوب آن بلد باشیم:  و در فاصله‌های به طولِ 2π، همین‌طوری تکرارش کنیم!

y=Cos u

- **دامنه:** $\boxed{D=\mathbb{R}}$، مگر این‌که u محدودیتِ خاصی داشته باشد!
- **بُرد:** $\boxed{y=\cos x \Rightarrow R=[-1,1]}$ $\xleftarrow{\text{حالت کاربردی}}$ $\boxed{[-a,a] \xleftarrow{\text{برد}} y=a\cos(bx+c)}$
- **ماکسیمم:** قرار دهید $\boxed{u=2k\pi}$ تا مقدار $\cos$، بشود ۱.
- **مینیمم:** قرار دهید $\boxed{u=2k\pi+\pi}$ تا مقدار $\cos$، بشود ۱- .
- **تلاقی با محورxها:** قرار دهید $\boxed{u=k\pi+\frac{\pi}{2}}$ تا مقدار $\cos$، بشود صفر.
- **دوره‌ی تناوب:** برای تابعِ $\boxed{y=k\cos(ax+b)+t}$ عبارت است از $\boxed{\frac{2\pi}{|a|}}$.
- **کشیدنِ تابع:** کافی است $\boxed{y=\cos x}$ را در یک دوره تناوب آن بلد باشیم:  و در فاصله‌های به طولِ 2π، همین‌طوری تکرارش کنیم!

تانژانت

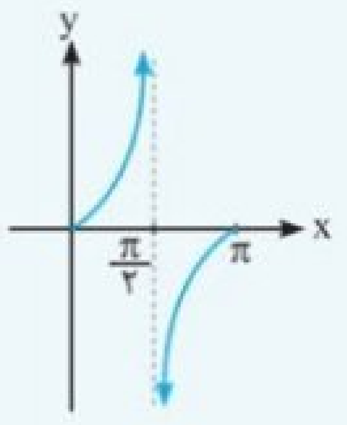
در دایره مثلثاتی



- **محور تانژانت:** خطی مماس بر دایره، سمت راستِ آن و موازی محور sin
- **مبدأ محور تانژانت:** نقطه‌ی A
  - بالایِ A: tan مثبت است.
  - پایین A: tan منفی است.
- **مشخص کردن تانژانت:** انتهای کمان را ادامه بده تا محورش را قطع کند از مبدأ تا نقطه‌ی تلاقی، می‌شود tanِ زاویه.
- **علامت:** در ناحیه اول و سوم مثبت است، در دوم و چهارم منفی.

تابع تانژانت

- **دامنه:** $\boxed{f(x)=\tan u \xrightarrow{\text{دامنه}} D=\mathbb{R}-\{x \mid u=k\pi+\frac{\pi}{۲}\}}$
- **تعریف نشده:** هر کمانی به‌صورت $\frac{k\pi}{۲}$، که k صحیح و فرد باشد، تانژانتِ تعریف نشده دارد.
- **برد:** $\mathbb{R}$
- **ماکسیمم و مینیمم:** $y=\tan x$ ماکسیمم و مینیمم ندارد!
- **تلاقی با محور xها** $\xleftarrow{\text{جوردیگه}}$ جایی که تانژانت صفر می‌شود: $\boxed{y=\tan u \xrightarrow{\text{صفرشدن}} u=k\pi}$
- **دوره‌ی تناوب:** اگر $\boxed{f(x)=k\tan(ax+b)+t}$ باشد، $\boxed{T=\frac{\pi}{|a|}}$.
- **رفتار:** غیر یکنواست، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هم نیست!
- **نمودار:** در بازه‌ی $[۰,\pi]$ بلد باش و در بازه‌هایی با این طول، عیناً شکل تابع را ادامه بده...



- **محدوده‌ای برای x داریم که شامل $x=\frac{k\pi}{۲}$ (k فرد و صحیح) نیست**
  - رفتار تانژانت: در این‌صورت، صعودی اکید بوده و یک‌به‌یک و وارون‌پذیر هم هست.
  - برد: در این‌صورت برای دامنه‌ی $[a,b]$ برد می‌شود $[\tan a,\tan b]$.

معادله‌های مثلثاتی

الفبای معادله

- **حالت کلی**
  - $\boxed{\sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\alpha \\ x=۲k\pi+\pi-\alpha \end{cases}}$
  - $\boxed{\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha}$
  - کمتر کاربردی: $\boxed{\tan x=\tan\alpha \Rightarrow x=k\pi+\alpha}$
- **حالت خاص:** وقتی جواب سینوس و کسینوس صفر و ۱± شود:

	۰	۱	۱-
sinx	$k\pi$	$۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$
cosx	$۲k\pi$	$k\pi+\frac{\pi}{۲}$	$۲k\pi+\pi$

- **اگر کمانِ سینوس و کسینوس، x نبود:** کمان، عبارتی بر حسبِ x بود، مثل u، آن‌وقت u را مساویِ این‌ها بذار...
- **قالب آماده:** یعنی سینوس یا کسینوس را بی‌ضریب و بی‌توان، مساوی یک عدد پیدا کنی که آن عدد معروف است...
  - $\boxed{\sin u=☁}$
  - $\boxed{\cos u=☁}$

رسیدن به قالب آماده

- **در ابتدا لازم است ساده کنی**
  - اتحادهای $(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha)$ را در کمان‌ها می‌بینی...
  - اتحادهای مقدماتی مثلثات را باید به‌کار ببری...
  - اتحادهای ۲α (sin۲α یا cos۲α رو وارد کن)
    - $\boxed{\sin ☁ \cos ☁}$ می‌بینی...
    - طلایی $\boxed{۱\pm\cos ☁}$ داری...
    - $\boxed{۲\cos^۲ ☁ -۱}$ و $\boxed{۱-۲\sin^۲ ☁}$ داری...

با منفی چه کنیم؟

- ◂ **برای کسینوس:** منفیِ ضریبِ کسینوس را بَردار و در عوض کمان را مکمل کن. $\boxed{\;= -\cos u \Rightarrow \;= \cos(\pi - u)}$
- ◂ **برای سینوس و تانژانت:** منفی را بَردار و در عوض کمان را قرینه کن. $\boxed{\;= -\sin u \Rightarrow \;= \sin(-u)}$ ← منفی روبده به کمان!

با بازه چه کنیم؟ اگر تعداد جواب‌های معادله در یک بازه، خواسته شده است:

۱) معادله را حل کن و x را پیدا کن.
۲) x را بر حسبِ k بذار توی محدوده.
۳) نامعادله را ساده کن، k رو تنها کن و محدوده‌ی k رو پیدا کن.
۴) عددهای صحیح محدوده‌ی k را اعلام کن.

با معادله‌ی کسری چه کنیم؟ حواستان باشد، xای که پیدا کرده‌اید باعث صفر شدن مخرج نشود! $\xleftarrow{\text{جور دیگه}}$ اگر دسته جوابی باعث صفر شدن مخرج می‌شود، حذفش کن...

روش حل معادله مثلثاتی

- **به دو نسبتِ هم‌نامِ مساوی می‌رسی**
  - $\boxed{\sin u = \sin v} \xrightarrow{\text{جواب‌ها}} \left.\begin{array}{l} u = 2k\pi + v \\ u = 2k\pi + \pi - v \end{array}\right\}$
  - $\boxed{\cos u = \cos v} \xrightarrow{\text{جواب‌ها}} \boxed{u = 2k\pi \pm v}$
- **به دو نسبت غیر هم‌نامِ مساوی می‌رسی:** کمانِ یکی را متمم کن تا بشود حالت بالا.
  - $\boxed{\sin u = \cos v \Rightarrow \sin u = \sin(\frac{\pi}{2} - v)}$
  - $\boxed{\sin u = \cos v \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - u) = \cos v}$
- **معادله‌ی درجه دو داری**
  - **خودش معادله‌ی درجه دو داره**
    - ◂ $\boxed{a\sin^2 u + b\sin u + c = 0}$
    - ◂ $\boxed{a\cos^2 u + b\cos u + c = 0}$
    - با روشِ Δ حل کن و سینوس یا کسینوس را پیدا کن...
  - **باید بفهمی معادله‌ی درجه دو می‌شود**
    - ◂ $\sin^2 u$ کنار $\cos u$ داری: $\boxed{\sin^2 u = 1 - \cos^2 u}$
    - ◂ $\cos^2 u$ کنار $\sin u$ داری: $\boxed{\cos^2 u = 1 - \sin^2 u}$
    - ◂ $\cos 2u$ کنار $\sin u$ داری: $\boxed{\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u}$
    - ◂ $\cos 2u$ کنار $\cos u$ داری: $\boxed{\cos 2u = 2\cos^2 u - 1}$

فصل در یک نگاه

بخش‌پذیری و تقسیم

- **فرمِ الگوریتم تقسیم** $f(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$
  - **اسامی:** باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم
  - **درجه‌ها**
    - مقسوم: m
    - مقسوم‌علیه: n طوری‌که $n<m$
    - خارج‌قسمت: $m-n$
    - باقی‌مانده: حداکثر $n-1$
- **باقی‌مانده صفر شد** $\xrightarrow{\text{اسم خاص}}$ $f(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر است.
- **پیداکردن باقی‌مانده**
  - باقی مانده‌ی $f(x)$ بر $ax+b$ می‌شود $r=f(-\frac{b}{a})$ $\xrightarrow{\text{فارسی}}$ ریشه‌ی مقسوم‌علیه را بذار توی مقسوم...
  - شرط بخش‌پذیریِ $f(x)$ بر $ax+b$ می‌شود $f(-\frac{b}{a})=0$
- **ارتباط عامل‌ها و عبارت:** اگر $x=a$ یک ریشه‌ی عبارت $f(x)$ باشد
  - یک عاملِ $f(x)$: می‌شود $x-a$
  - عامل‌های دیگرِ $f(x)$ $\xrightarrow{\text{روش یافتن}}$ $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کن.
  - معنای عامل: $f(x)$ بر آن بخش‌پذیر است...

تعمیم اتحاد چاق و لاغر

- **صورت اتحاد**
  - n طبیعی: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})$
  - n فرد و طبیعی: $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+b^{n-1})$
- **ویژگی‌های اتحاد**
  - مجموع توان‌هایِ a و b داخل پرانتزِ چاق در هر جمله $n-1$ است.
  - علامت ضریبِ جملات چاق در a^n+b^n زمانی که توانِ b فرد است، منفی می‌شود.
  - **به شکل بخش‌پذیری**
    - a^n-b^n برای هر n طبیعی بر $a-b$ بخش‌پذیر است.
    - a^n+b^n برای هر n طبیعی و فرد بر $a+b$ بخش‌پذیر است.
  - **حالت خاص**
    - n طبیعی: $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\dots+1)$
    - n طبیعیِ فرد: $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+a^{n-3}-\dots+1)$
  - **کاربرد در گویا کردن و حذف رادیکال در حد**
    - n طبیعی: $(\sqrt[n]{x}-1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{x^{n-3}}+\dots+1)=x-1$
    - n طبیعی و فرد: $(\sqrt[n]{x}+1)(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-2}}+\sqrt[n]{x^{n-3}}-\dots+1)=x+1$
- **حالت کلیِ رادیکال**
  - n طبیعی: $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\dots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$
  - n طبیعیِ فرد: $(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}-\dots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b$

مفاهیم اولیه‌ی حد

- **میل کردن**
  - **از سمت راست**
    - نماد: $\boxed{x \to a^+}$
    - مفهوم: $\boxed{x > a}$ و البته بسیار نزدیک به a.
  - **از سمت چپ**
    - نماد: $\boxed{x \to a^-}$
    - مفهوم: $\boxed{x < a}$ و از هر چه فکر کنید به a نزدیک‌تر است ...!
  - **دو طرفه**
    - نماد: $\boxed{x \to a}$
    - مفهوم: $\boxed{x \to a^- \text{ یا } x \to a^+}$
  - در هر سه حالت $\boxed{x \neq a}$
  - **وضعیتِ $-x$**
    - اگر $x \to a^+$ آن‌وقت $-x \to (-a)^-$
    - اگر $x \to a^-$ آن‌وقت $-x \to (-a)^+$
    - مقدار x را قرینه کن و علامت همسایگی را عوض کن.
- **همسایگی**
  - تعریف: بازه‌ی بازِ شاملِ x_0 را همسایگیِ x_0 می‌گوییم. $\boxed{(a,b) \to x_0 \in (a,b)}$ همسایگیِ x_0
  - **انواع همسایگی**
    - همسایگی چپ x_0
      - فرم: $\boxed{(x_0 - r, x_0)}$ ؛ پایان بازه x_0 است.
      - شکل: x_0-r ، x_0 ، بازه‌ای شامل اعداد کوچک‌تر از x_0.
    - همسایگی راست x_0
      - فرم: $\boxed{(x_0, x_0 + r)}$ ؛ شروع بازه x_0 است.
      - شکل: x_0 ، x_0+r ، بازه‌ای شامل اعداد بزرگ‌تر از x_0.
    - همسایگی محذوف x_0
      - فرم
        - $\boxed{(a,b) - \{x_0\}}$
        - $\boxed{(a,x_0) \cup (x_0,b)}$
      - مفهوم: هم اعداد کوچک‌تر از x_0 در آن هستند و هم بزرگ‌تر، ولی خودِ x_0 نیست.
      - شکل: a ، x_0 ، b
  - اگر گفتند بازه‌ی (a,b) همسایگی
    - چپ x_0 است، آن‌وقت: $\boxed{a < x_0 , b = x_0}$
    - راستِ x_0 است، آن‌وقت: $\boxed{b > x_0 , a = x_0}$
  - $(a,b) \cup (c,d)$ همسایگی محذوف x_0 است، آن‌وقت $\boxed{b = c = x_0}$ و $\boxed{a < x_0 < d}$

مقدماتِ حد تابع در $x \to a$

- **وجود حدِ f در $x \to a$**
  - **شرایط**
    - ① f در سمت چپ و راستِ a تعریف شده باشد.
    - ② حد چپ و راست f در همسایگی a مساوی باشد.
  - **به ریاضی:** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ و سمت چپ و راستِ $x = a$ در تابع، خالی نباشد.
  - **روی نمودار:** در نقطه‌ی $x = a$ تابع، پرش نداشته باشد و یک سمتِ آن هم خالی نباشد.
  - **یافتن حدها** روی محور x ها، و سمت چپ و راستِ a علامتِ کوچکی بزن و بعد عرضِ این علامت‌ها را روی تابع پیدا کن...
- **حد و مقدار:** حدِ تابع در $x = a$، با مقدار تابع در این نقطه هیچ ربطی به هم ندارند!
  - **مقدار**
    - نماد: $f(a)$
    - روی شکل: نقطه‌ی تُوپر روی تابع به ازای $x = a$ (در صورت وجود)
- **حفره**
  - شکل: 
  - **مفهوم و کاربرد:** اگر تابع کسری در $x = a$ حفره داشته باشد، $x = a$ ریشه‌ی مشترکِ صورت و مخرج بوده است.
- **قوانین حد**
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ آن‌وقت برای $x \to a$ حدِ
    - جمع و منها: $f \pm g = \ell \pm m$
    - ضرب: $fg = \ell m$
    - تقسیم: $\frac{f}{g} = \frac{\ell}{m}$ $(m \neq 0)$
    - توان: $f^k = \ell^k$ $(k \in \mathbb{N})$

تابع‌های چالش‌دار در حد

لازم است حد تابع را به حدهای راست و چپ، جدا کنی و هرکدام را جداگانه حساب کنی.

- **تابع قطعه‌ای**
  - $f(x) = \begin{cases} \quad & x > a \\ \quad & x < a \end{cases}$
    - حد راست از شاخه‌ای که مقابلش $x > a$ دارد، حساب می‌شود.
    - حد چپ از شاخه‌ای که مقابلش $x < a$ دارد، حساب می‌شود.
    - $x = a$ در هر شاخه‌ای باشد، برای حدِ تابع مهم نیست!
  - $f(x) = \begin{cases} \quad & x \neq a \\ \quad & x = a \end{cases}$
    - حد راست و چپ از شاخه‌ای که مقابلش $x \neq a$ دارد، حساب می‌شود.
    - به‌جوردیگه برای محاسبه‌ی حد تابع در a، شاخه‌ای را که $x = a$ دارد، نادیده بگیر...
- **تابع قدر مطلقی در $x \to a$**
  - $x = a$، داخل قدرمطلق را صفر نمی‌کند ← عددگذاریِ معمولی کن
  - $x = a$، داخل قدرمطلق را صفر می‌کند $\xrightarrow{\text{ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد}}$ حد چپ و راست را جداگانه حساب کن.
  - **روش رفع چالش:** عبارت را تعیین علامت کنید و به‌طور مناسب از قدرمطلق خارج کنید.
  - **ریاضی:** $|u| = \begin{cases} u & u > 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$

- **تابع براکتی در $x \to a$**
  - $x = a$، داخل براکت را عددی صحیح نمی‌کند ← عددگذاریِ معمولی کن.
  - $x = a$، داخل براکت را عددی صحیح می‌کند ← حد راست و چپ را جداگانه حساب کن.
  - **روش رفع چالش**
    - برای $x \to a^+$ به x، عددی کوچک اضافه کن و بعد جای‌گذاری کن.
    - برای $x \to a^-$ از x، عددی کوچک کم کن و بعد جای‌گذاری کن.
    - $\boxed{x \to a^+ \Rightarrow x \simeq a + 0/001}$
    - $\boxed{x \to a^- \Rightarrow x \simeq a - 0/001}$
  - **تابع معروف $[kx]$**
    - $x \to a^+$
      - $k > 0$ حدش می‌شود $\boxed{ka}$
      - $k < 0$ حدش می‌شود $\boxed{ka - 1}$
    - $x \to a^-$
      - $k > 0$ حدش می‌شود $\boxed{ka - 1}$
      - $k < 0$ حدش می‌شود $\boxed{ka}$
    - $x \to a$ و $ka \in \mathbb{Z}$ $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ حد ندارد
- $\boxed{\underset{x \to a}{f(x)} = \dfrac{\neq 0}{x - a}}$ مخرج باید با توجه به حد چپ و راست تعیین علامت شود...

محاسبه‌ی حد تابعِ مبهم

- **مسیر اصلی:** تابع در $x \to a$ چالش دارد؟
  - بله: چالش را رفع کن، تابع بدون قدرمطلق و جزء صحیح باشد...
  - خیر: عددگذاری کن $\xrightarrow{\text{ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد؟}}$
    - بله: ابهام را رفع کن.
    - خیر: تمام است، جواب حد در آمده...
- **$\frac{0}{0}$ جبری**
  - عاملِ $x - a$ را در صورت و مخرج ایجاد کن و ساده کن $\xrightarrow{\text{روش‌ها}}$
    - ① اتحادها و فاکتور
    - ② تقسیم صورت و مخرج بر $x - a$ و گذاشتن خارج قسمتِ تقسیم به جای هر کدام
  - **هوپیتال بزن**
    - ریاضی: $\boxed{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f}{g} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'}{g'}}$
    - فارسی: به‌جای صورت، مشتق آن و به جای مخرج هم مشتق آن را بذار و بعد عددگذاری کن.
- **$\frac{0}{0}$ رادیکالی**
  - **ضربِ لنگه‌ی مناسب**
    - برای $\sqrt{x} \mp \sqrt{a}$، مزدوجش یعنی $\sqrt{x} \pm \sqrt{a}$ را در صورت و مخرج ضرب کن.
    - برای $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{a}$، عبارتِ $\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2}$ را در صورت و مخرج ضرب کن.
    - برای $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}$، عبارت $\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}a} + \sqrt[n]{x^{n-3}a^2} + \cdots + \sqrt[n]{a^{n-1}}$ را در صورت و مخرج ضرب کن.
  - **اتحادی که استفاده می‌شود**
    - برای فرجه دو: $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$
    - برای فرجه سه: $\boxed{(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3}$
    - برای فرجه n: $\boxed{(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) = a^n - b^n}$
  - **روشِ با مشتق:** هوپیتال بزن... $\boxed{\sqrt[n]{u} \xrightarrow{\text{مشتق}} \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}}$

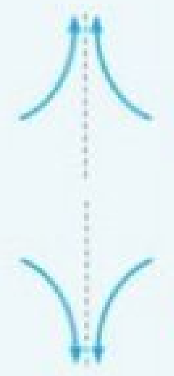
- $\frac{0}{0}$ مثلثاتی
  - عامل صفرکننده را ایجاد کن و از صورت و مخرج خط بزن ← مهم‌ترین اتحادها
    - $\sin^2 u = 1-\cos^2 u = (1-\cos u)(1+\cos u)$
    - $\cos^2 u = 1-\sin^2 u = (1-\sin u)(1+\sin u)$
    - $\sin^3 u \pm \cos^3 u = (\sin u \pm \cos u)(1 \mp \sin u \cos u)$
    - طلایی
      - $1+\cos u = 2\cos^2 \frac{u}{2}$
      - $1-\cos u = 2\sin^2 \frac{u}{2}$
    - 2α: $\sin 2u = 2\sin u \cos u$
  - استفاده از هم‌ارزی
    - وقتی ۰ ← کمان
    - برای سینوس: $\sqrt[n]{\sin^m u} = \sqrt[n]{u^m}$
    - برای کسینوس: $\sqrt[n]{\cos^m u} = 1-\frac{u^2 m}{2n}$

حد نامتناهی

- مفاهیم
  - تعریف: حد نامتناهی، یعنی جوابِ حد تابع برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
  - تعبیر فارسی
    - $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ؛ در همسایگی a، مقدار تابع از هر چه فکر کنید بیشتر است...
    - $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ؛ در همسایگی a، مقدار تابع منفی و عدد آن بسیار بزرگ است...
- قوانین
  - چه حدی، نامتناهی می‌شود: کسری که صورتش غیرصفر و مخرجش حدِ صفر داشته باشد: $\lim\limits_{x\to a} \frac{\text{عددغیرصفر}}{\text{صفر}} = \infty$
  - محاسبه‌ی حد نامتناهی: مخرج کسر را تعیین علامت کن
    - جبری‌ها ← جدول تعیین علامت
    - مثلثاتی‌ها ← ببین x در کدام ناحیه می‌افتد
    - صورت کسر مثبت است
      - $\frac{\ }{0^+} = +\infty$
      - $\frac{\ }{0^-} = -\infty$
    - صورت کسر منفی است
      - $\frac{\ }{0^+} = -\infty$
      - $\frac{\ }{0^-} = +\infty$
    - مخرج همواره مثبت است
      - فقط علامت صورت و ضریب مهمه! مخرج تعیین علامت نمی‌خواد
      - جبری‌ها
        - $\frac{\ }{|u|}$
        - $\frac{\ }{u^{2k}}$
        - $\frac{\ }{\sqrt[2k]{u}}$
        - Δ مخرج صفره... ← باعلامت a ← علامت مخرج معلومه
      - مثلثاتی‌ها
        - $1 \pm \sin u \geq 0$
        - $1 \pm \cos u \geq 0$

- ریخت‌شناسی
  - حدِ یک‌طرفه نامتناهی شود
    - $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$
    - $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$
    - $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$
    - $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

  - هر دو حد راست و چپ نامتناهی می‌شوند
    - انفصال مضاعف
      - حد راست و چپ هر دو $+\infty$
      - حد راست و چپ هر دو $-\infty$
    - حد راست $+\infty$ و حد چپ $-\infty$
    - حد راست $-\infty$ و حد چپ $+\infty$



کسر در همسایگیِ a در کنکور

- وضعیت $\lim_{x\to a}\frac{\ell}{m}$
  - حد صورت و مخرج صفر است ← رفع ابهام کن: $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \text{مبهم}$
  - فقط مخرج صفر است ← حد نامتناهی است ← مخرج را تعیین علامت کن: $\frac{\text{غیرصفر}}{\text{صفر}} = \infty$
  - مخرج صفر نیست ← عددگذاری معمولی کن: $\frac{\text{هرعددی}}{\text{غیرصفر}} = \text{عدد}$
- کسرِ نامتناهی معروف
  - شرایط
    - مخرجش عبارتی درجه‌ی دو است: $\frac{☁}{ax^2+bx+c}$
    - x به‌صورت یک‌طرفه به عددی میل نمی‌کند؛ همسایگیِ x راست و چپ ندارد! $x \to m$
    - جوابِ حد، شده $+\infty$ یا $-\infty$. $\lim_{x\to m}\frac{☁}{ax^2+bx+c}=\pm\infty$
  - نتیجه‌گیری
    - مفهومی: $x = m$ ریشه‌ی مضاعف مخرج بوده است.
    - اجرا در تست
      - $-\frac{b}{a}=2m$
      - $\frac{c}{a}=m^2$

حد در بی‌نهایت

مفاهیم

- $x \to +\infty$ یعنی x عدد مثبتِ خیلی بزرگی است $\xrightarrow{\text{لازمه}}$ تابع در بازه‌ی $(\ \ , +\infty)$ تعریف شده باشد.
- $x \to -\infty$ یعنی x عددِ منفی است ولی قدر مطلقش بزرگ است $\xrightarrow{\text{لازمه}}$ تابع در بازه‌ی $(-\infty ,\ \ )$ تعریف شده باشد.

جواب حد تابع در بی‌نهایت

- $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell}$ ؛ $f(x)$ می‌تواند به هر مقدار که بخواهید به ℓ نزدیک شود به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی بزرگ کرده باشید.
- $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty}$ ؛ با بزرگ شدنِ x، مقدار تابع هم بزرگ می‌شود...
- $\boxed{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \text{تعریف نشده}}$ ؛ دامنه‌ی تابع از دو طرف محدود بوده است.

روش محاسبه

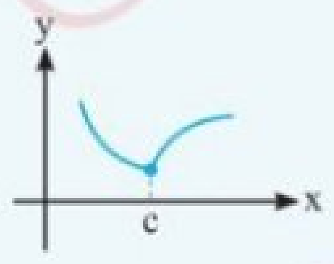
- حد بی‌نهایت فقط در مخرج: $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{k}{x^r} = 0}$ $(r > 0)$
- **پرتوان**
  - روش استفاده: به جای هر عبارتِ جبری، فقط جمله‌ای که بزرگ‌ترین توان را دارد با ضریبش نگه‌دار و بقیه را حذف کن...
    $\boxed{ax^n + bx^{n-1} + \cdots \xrightarrow{x \to \infty} ax^n}$
  - کجا قابل استفاده است: چند جمله‌ای در موقعیتِ $\boxed{x \to \infty}$
    - توان: $\boxed{2^{x^2+x} = 2^{x^2}}$
    - پایه: $\boxed{(x^2+x)^3 = (x^2)^3}$
    - زیر رادیکال: $\boxed{\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x^2}}$
    - توی قدرمطلق: $\boxed{|x^2+x| = |x^2|}$
  - چند جمله‌ای کنارِ رادیکال: $\boxed{\underset{x \to \infty}{ax^m + \sqrt[n]{bx^p + \cdots}}}$
    - می‌شود $\boxed{ax^m}$، اگر $\boxed{\frac{p}{n} < m}$
    - می‌شود $\boxed{\sqrt[n]{bx^p}}$، اگر $\boxed{\frac{p}{n} > m}$
- **برای عبارت گویا:** در کسری که صورت و مخرج چند جمله‌ای هستند، با شرط
  - درجه‌ی مخرج < درجه‌ی صورت
  - درجه‌ی مخرج = درجه‌ی صورت
  - درجه‌ی مخرج > درجه‌ی صورت

  جواب حد می‌شود
  - بی‌نهایت
  - ضریبِ پر توانِ صورت به ضریبِ پر توانِ مخرج
  - صفر

پیوستگی

در نقطه $\boxed{x = c}$

- روی نمودار: اگر از کمی قبلِ $x = c$ روی تابع به سمتِ کمی بعد آن حرکت کنیم، مجبور به برداشتن قلم از روی کاغذ نشویم...



- به زبان ریاضی: حد چپ و راست و مقدار مساوی باشند: $\boxed{\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)}$

در بازه‌ی...

- (a,b): تابع در محدوده‌ی x های این بازه هیچ نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد:
- $[a,b)$: در (a,b) پیوسته است و در a پیوستگی راست دارد:
- $(a,b]$: در (a,b) پیوسته است و در b پیوستگی چپ دارد:
- $[a,b]$: در (a,b) پیوسته است و در a پیوستگی راست دارد و در b پیوستگی چپ دارد:

Scanned with CamScanner

انواع پیوستگی

- **راست:** حد راست و مقدار مساوی‌اند: $\boxed{\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)}$
- **چپ:** حد چپ و مقدار مساوی‌اند: $\boxed{\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)}$
- **کامل:** حد راست و چپ و مقدار هر سه تا مساوی‌اند: $\boxed{\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)}$

روی $\mathbb{R}$

- **تابع کسری است** $\xrightarrow{\text{شرط}}$ Δ مخرج را کوچک‌تر از صفر قرار دهید: $\boxed{\dfrac{\;}{u} \xrightarrow{\text{همواره پیوسته}} \Delta_u < 0}$
- **تابع رادیکالی است** $\xrightarrow{\text{شرط}}$ زیر رادیکالِ فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید: $\boxed{\sqrt[2k]{u} \xrightarrow{\text{همواره پیوسته}} u \geq 0}$
- **تابع چند ضابطه‌ای است** $\xrightarrow{\text{شرط}}$ شرط پیوستگی را برای تمامِ نقطه‌های شکست دامنه بنویس...

$$\boxed{y=\begin{cases} f(x) & x>c \\ g(x) & x\leq c \end{cases} \xrightarrow{\text{همواره پیوسته}} f(c)=g(c)}$$

حالت‌های ناپیوستگی تابع در نقطه‌ی $x = c$

تابع در این نقطه تعریف نشده

- **کسرها روی ریشه‌ی مخرج خود:** مثل $y=\dfrac{x}{x+1}$ در $x=-1$.
- **مثلثاتی‌ها**
  - $\boxed{\tan u}$ هر جا که $\boxed{u=k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ شود.
  - $\boxed{\cot u}$ هر جا که $\boxed{u=k\pi}$ شود.
- **تابع لگاریتمی:** $\boxed{y=\log u}$ وقتی $\boxed{u=0}$ شود. مثل $y=\log(x+1)$ در $x=-1$.

این نقطه ابتدا یا انتهای بازه است

(شروع و پایان دامنه)

- **اگر برای x محدوده داده‌اند:** یا
- $y=\sqrt{ax+b}$ **در ریشه‌ی زیر رادیکال:** مثل $y=\sqrt{x+1}$ روی $x=-1$.

این نقطه حفره‌ی تابع است

- **مفهوم:** تابع در این نقطه حد دارد ولی مقدارش یا وجود ندارد یا با حدها مساوی نیست.
- **شکل:** یا
- **کجا اتفاق می‌افتد**
  - در کسری که $x=c$ ریشه‌ی مشترک صورت و مخرج است.
  - در تابع چند ضابطه‌ای که $x=c$ یک شاخه‌ی مجزا باشد، از این حالت بترسید...!

$$\boxed{y=\begin{cases} f(x) & x>c \\ g(x) & x<c \\ k & x=c \end{cases} \quad \text{یا} \quad y=\begin{cases} f(x) & x\neq c \\ k & x=c \end{cases}}$$

تابع براکتی

$\boxed{y=[ax]}$ در نقاطی با فرم $\boxed{(k\in\mathbb{Z})\; x=\dfrac{k}{a}}$ ناپیوسته است.

فصل در یک نگاه

مماس

- **تعریف:** خطی بر منحنی مماس است که
  - ① تنها یک نقطه‌ی مشترک با منحنی داشته باشد و در همسایگی آن نقطه تابع را قطع نکند!
  - ② در نقطه‌ی تماس، منحنی نقطه‌ی گوشه‌ای نشود.
  - ③ نقطه‌ی تماس خط و منحنی عضو دامنه‌ی f باشد (توخالی نباشد).
- **انواع مماس**
  - **مماس افقی** ← وضعیت: موازی محور x ها با شیب صفر ← شکل ← یا ← مشتق: $f' = 0$
  - **مماس قائم** ← وضعیت: موازی محور y ها با شیب $\pm\infty$ ← شکل ← یا ← مشتق: $f' = \pm\infty$
  - **مماس مایل** ← وضعیت: نه موازی محور x ها و نه موازی محور y ها ← شکل ← مشتق: عددی حقیقی و غیرصفر
    - مشتق مثبت
    - مشتق منفی
- **نیم‌مماس**
  - **نیم‌مماس راست:** سمت راستِ نقطه، یک نیم‌خطِ مماس بکش ← نماد مشتق: $f'_+(c) =$ شیب نیم‌مماس راست ← شکل
  - **نیم‌مماس چپ:** سمت چپِ نقطه، یک نیم‌خطِ مماس بکش ← نماد مشتق: $f'_-(c) =$ شیب نیم‌مماس چپ ← شکل
- **خط مماس**
  - **شیب:** در هر نقطه می‌شود مشتق در آن نقطه
    - ریاضی: شیب مماس در نقطه‌ای به طول a روی منحنی $= f'(a)$
    - نموداری: $a \rightarrow \boxed{f'} \rightarrow m$ مماس
    - نحوه‌ی اجرا: از تابع مشتق بگیر و به جای x های آن بذار a، این می‌شود $f'(a)$ یا شیب مماس.
  - **معادله‌ی مماس**
    - فرمول: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ ← حالت خاص $f'(a) = \pm\infty$ ← $x = a$
    - نحوه‌ی اجرا: $x = a$ را به
      - خود تابع بده ← دریافتی ← $f(a)$
      - مشتق تابع بده ← دریافتی ← $f'(a)$
      - ← جای گذاری ← فرمول بالا...

مفاهیم ابتدایی مشتق

- **تعریف مشتق در a**
  - در همسایگیِ صفر: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
  - در همسایگیِ خود a: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
  - حدِ f دار: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \dfrac{m-n}{k} f'(a)$
- **ارتباط با مماس:** مشتق در نقطه‌ی $x = a$، همان شیب مماس بر تابع در نقطه‌ای با طول a است...
- **وجود مشتق**
  - تابع در $x = a$ پیوسته باشد.
  - جواب تعریف مشتق، عددی حقیقی و متناهی باشد.
  - ← هندسی ← بتوان در $x = a$ یک خط مماسِ غیر قائم بر تابع کشید.

مشتق‌گیری

◂ در چه تابعی از تعریف مشتق استفاده کنیم

- $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq a \\ k & x=a \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{در } x=a}$ $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-k}{x-a}$
- $f(x)=(x-a)g(x)$
  - ◂ با تعریف: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)g(x)-0}{x-a}$
  - ◂ راه تستی: $x-a$ را نادیده بگیر و حدِ g را در همسایگی a پیدا کن $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$

◂ مشتق‌های یک‌طرفه

- مشتق راست
  - ◂ نماد: $f'_+(a)$
  - ◂ مفهوم: شیب نیم‌مماس راست در نقطه‌ای به طول a
  - ◂ تعریف ریاضی: $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- مشتق چپ
  - ◂ نماد: $f'_-(a)$
  - ◂ مفهوم: شیب نیم‌مماس چپ در نقطه‌ای به‌طول a
  - ◂ تعریف ریاضی: $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- $\underbrace{f'_+(a)=f'_-(a) \text{ و } f \text{ در } a \text{ پیوسته}}_{\text{شرط مشتق‌پذیری در } a}$

◂ مرتبه‌های بالاتر:

$f\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}f'\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}f''\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}f'''$ برای رسیدن به مشتق‌های مرتبه‌ی بالاتر، پشتِ سر هم مشتق بگیر...

◂ تابع‌های بیسیک

- $y=x^n$ با فرضِ $n\in\mathbb{Q}$ $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y'=nx^{n-1}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$
  - ۱◂ $y=x\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=1$
  - ۲◂ $y=k\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=0$
- $y=\sqrt{ax+b}$ ، تابع خطیِ زیر رادیکال $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $y=\sqrt[3]{ax+b}$ $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y'=\dfrac{a}{3\sqrt[3]{(ax+b)^2}}$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=\sqrt[3]{x}\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

◂ قالب‌ها

- ضریب عددی: $mf\xrightarrow{\text{مشتق}}mf'$
- جمع و منها: $f\pm g\xrightarrow{\text{مشتق}}f'\pm g'$
- نتیجه: $mf\pm ng\xrightarrow{\text{مشتق}}mf'\pm ng'$
- ضرب: $fg\xrightarrow{\text{مشتق}}f'g+g'f$ ؛ مشتق اولی در دومی + مشتق دومی در اولی
- تقسیم: $\dfrac{f}{g}\xrightarrow{\text{مشتق}}\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$ ؛ مشتق صورت در مخرج، منهای مشتق مخرج در صورت، تقسیم بر مجذور مخرج...
  - حالت خاص هموگرافیک: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ آن‌گاه $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

◂ ترکیبی‌ها

- عبارتِ توان‌دار در حالت کلی: اگر $y=u^m$ باشد، آن‌گاه $y'=mu^{m-1}u'$
- عبارتِ فرجه‌دار در حالت کلی: اگر $y=\sqrt[m]{u}$ باشد، آن‌گاه $y'=\dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$

◂ ترتیبِ عملیات:

اول ساده کردنِ ضابطه‌ی تابع، دوم مشتق‌گیری و سوم عددگذاری $f\xrightarrow{\text{ساده کن}}\;\bigcirc\;\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}$ عدد بده

◂ از تابعی که عامل صفرساز دارد:

$y=f(x)g(x)\xrightarrow{f(a)=0}y'(a)=f'(a)g(a)$ ؛ فقط از عامل صفرسازِ ضرب‌شده، مشتق بگیر و ضریب را عیناً بنویس، آخر سر عددگذاری کن...

مشتق‌ناپذیری

از تابع چند ضابطه‌ای $\xrightarrow{\text{به شرط پیوستگی}}$ $y=\begin{cases} f(x) & x \ge a \\ g(x) & x < a \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\begin{cases} f'(x) & x > a \\ g'(x) & x < a \end{cases}$ ؛ از هر شاخه مشتق بگیر و تساویِ موجود در دامنه را حذف کن.

$\xrightarrow[x>a]{\text{مشتق راست}} y'_+(a)=f'(a)$

$\xrightarrow[x<a]{\text{مشتق چپ}} y'_-(a)=g'(a)$

شرط مشتق‌پذیری: $f'(a)=g'(a)$ و $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} g(x)$

از تابع قدرمطلق دار: عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کنید و قدرمطلق را به‌طور مناسب بردارید ⟵ چند ضابطه‌ای می‌شود ⟵ مشتق بگیر:

$$y=|u|=\begin{cases} u & u \ge 0 \\ -u & u < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\begin{cases} u' & u > 0 \\ -u' & u < 0 \end{cases}$$

از تابع جزء صحیح دار

- اگر عدد داده‌شده، عبارت داخل براکت را صحیح نمی‌کند ⟵ عددگذاری معمولی کن ⟵ مشتق بگیر
- اگر عدد داده‌شده، عبارت داخل براکت را صحیح می‌کند ⟵ به مشتق‌های راست و چپ تفکیک کن و جداگانه حساب کن...

دامنه‌ی مشتق: مجموعه xهایی از دامنه‌ی f که تابع در آن‌ها پیوسته بوده و مشتق راست و چپِ برابر دارد...

ارتباط با پیوستگی

- اگر طراح گفت f در $x=a$ مشتق‌پذیر است، نتیجه بگیر پیوسته هم بوده است.
- اگر f در نقطه‌ی a ناپیوسته باشد، حتماً مشتق‌ناپذیر است.

یادت باشه

کاندیداهای مشتق‌ناپذیری

- **تابع کسری:** روی ریشه‌ی مخرج قطعاً! $\frac{\square}{u} \xrightarrow{\text{مشتق‌ناپذیری}} u=0$
- **تابع قدرمطلقی:** روی ریشه‌ی عبارتِ داخل، شاید! $|u| \xrightarrow{\text{کاندید مشتق‌ناپذیری}} u=0$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=|ax+b|$ در $-\frac{b}{a}$ حتماً مشتق ندارد
- **تابع رادیکالی**
  - رادیکال فرجه ۲: $\sqrt{u} \xrightarrow{\text{کاندید مشتق‌ناپذیری}} u=0$ $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $y=\sqrt{ax+b}$ در $-\frac{b}{a}$ حتماً مشتق ندارد
  - رادیکال فرجه ۳: $\sqrt[3]{(ax+b)^2(cx+d)} \xrightarrow{\text{کاندیدای مشتق‌ناپذیری}} x=-\frac{b}{a},-\frac{d}{c}$
- **تابع قطعه‌ای**
  - $y=\begin{cases} f(x) & x \ge a \\ g(x) & x < a \end{cases}$ در $x=a$ شاید مشتق‌پذیر نباشد. (شاخه‌ی $x=a$ هرجا می‌تواند باشد!)
  - $y=\begin{cases} f(x) & x \ne a \\ k & x = a \end{cases}$ در $x=a$ شاید مشتق‌پذیر نباشد.
  - یادت باشه: اول پیوستگی و بعد مشتق‌پذیری را بررسی کن...
- **تابع جزء صحیح:** $y=[u]$ ، هر نقطه‌ای که $u \in \mathbb{Z}$ شود شاید مشتق نداشته باشد. $\xrightarrow{\text{حالت خاص}}$ $[ax]$ روی نقاط $x=\frac{k}{a}$ $(k \in \mathbb{Z})$ مشتق ندارد

ریخت‌شناسی: در نقطه‌ی مشتق ناپذیری، یا خط مماس نمی‌توان کشید یا دوتاست یا عمودی است:

مشتق‌پذیری روی بازه

- (a,b): در تمام نقاط بازه پیوسته بوده و در این بازه هیچ نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری نداشته باشد.
- $[a,b)$: روی (a,b) مشتق‌پذیر بوده و در $x=a$ مشتق راست هم داشته باشد.
- $(a,b]$: روی (a,b) مشتق‌پذیر بوده و در $x=b$ مشتق چپ هم داشته باشد.
- $[a,b]$: روی (a,b) مشتق‌پذیر بوده و در $x=a$ مشتق راست و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

روی $\mathbb{R}$

- **مفهوم:** یعنی هیچ نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری ندارد.
- **نحوه‌ی اجرا:** حواست به دو تابع باشه
  - نقطه‌ی شکست دامنه در تابع چند ضابطه‌ای $\xrightarrow{\text{روی } \mathbb{R} \text{ مشتق دارد}}$ حد چپ و راست و مشتق چپ و راستِ نقطه‌ی مرزی را برابر بذار...
  - مخرج کسر $\xrightarrow{\text{روی } \mathbb{R} \text{ مشتق دارد}}$ $\boxed{\Delta < 0 \text{ مخرج}}$

$\xrightarrow{\text{ریاضی}} y=\begin{cases} f(x) & x \ge a \\ g(x) & x < a \end{cases} \xrightarrow{\text{روی } \mathbb{R} \text{ مشتق دارد}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} g(x) \\ f'(a)=g'(a) \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{دقت کن}}$ تمامی نقطه‌های مرزی را بررسی کن

مشتق تابع مرکب

فرمول

- $\boxed{y=(fog)(x) \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y'=g'(x)f'(g(x))}$
- $\boxed{y=(gof)(x) \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y'=f'(x)g'(f(x))}$
- $\boxed{y=(fof)(x) \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} y'=f'(x)f'(f(x))}$

به فارسی: از تابع سمت راستی در نقطه‌ی a مشتق بگیر، ضربدر از تابع چپی مشتق بگیر در نقطه‌ی عرضِ a به‌ازای اولی...

- $\boxed{(fog)'(a)=g'(a)f'(g(a))}$
- $\boxed{(gof)'(a)=f'(a)g'(f(a))}$

تیپ‌بندی تست

- $\boxed{u=g(x), y=f(u)}$: y تابعی از u داده شده و u هم عبارتی بر حسب x است.

  $y'=?$ بر حسب x

  - **روش اول:** به جای u در تابع y، مقدارش را که بر حسب x است بگذارید، حالا تابع f فقط بر حسب x است و آماده‌ی مشتق‌گیری.
  - **روش دوم:** از تابع y بر حسب u مشتق بگیرید و از تابع u هم بر حسب x و این دو عبارت را در هم ضرب کنید...

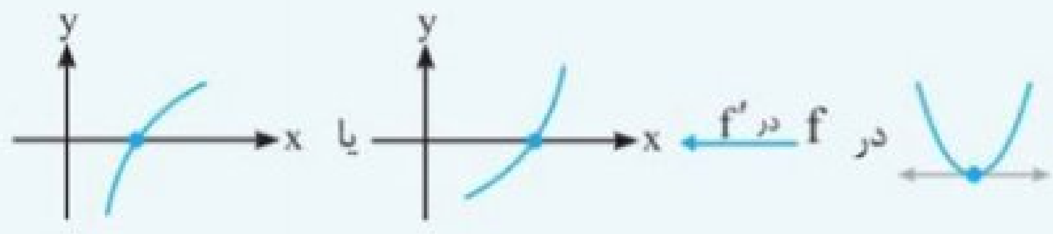
- $\boxed{\text{مشتقِ } f(u)} \xrightarrow{u \text{ عبارتی بر حسب } x \text{ است}} \boxed{u'f'(u)}$: مشتق کمان ضربدر مشتق تابع به ازای کمان قبلی...

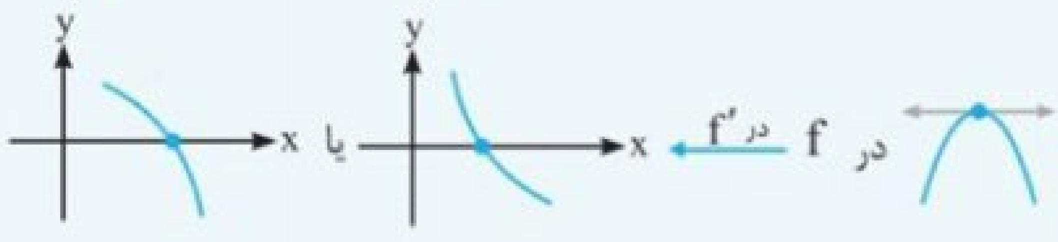
- $\boxed{\text{مشتقِ } f^m(u)} \xrightarrow[m\in\mathbb{N}]{u \text{ عبارتی بر حسب } x \text{ است}} \boxed{mf^{m-1}(u)\cdot u'\cdot f'(u)}$: برای علاقه‌مندان به ٪۱۰۰...!

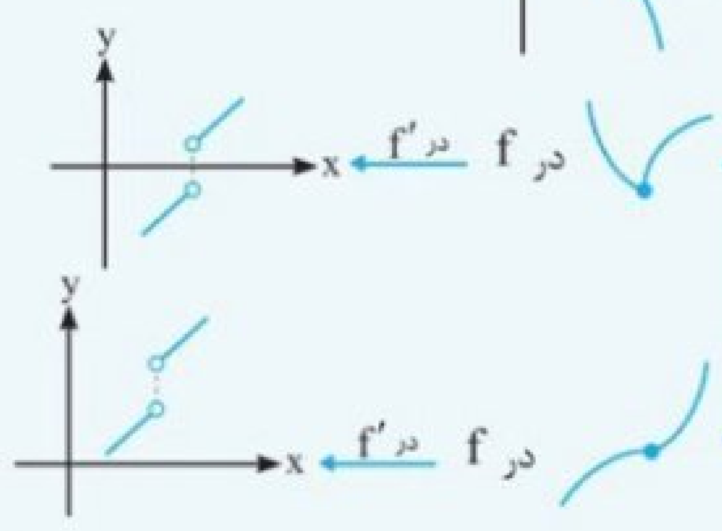
مقایسه‌ی نمودار f و f′

رفتار
- در f، فاصله‌هایی که صعودی است $\xleftarrow{\text{در } f'}$ بالای محور x ها قرار دارد.
- در f، فاصله‌هایی که نزولی است $\xleftarrow{\text{در } f'}$ پایین محور x ها قرار دارد.

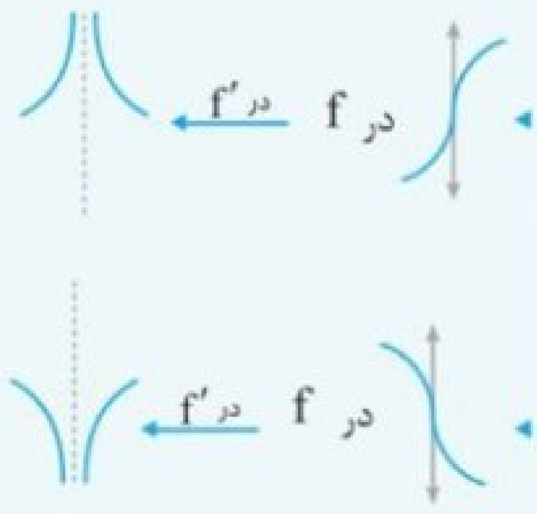
نقطه‌های حساس



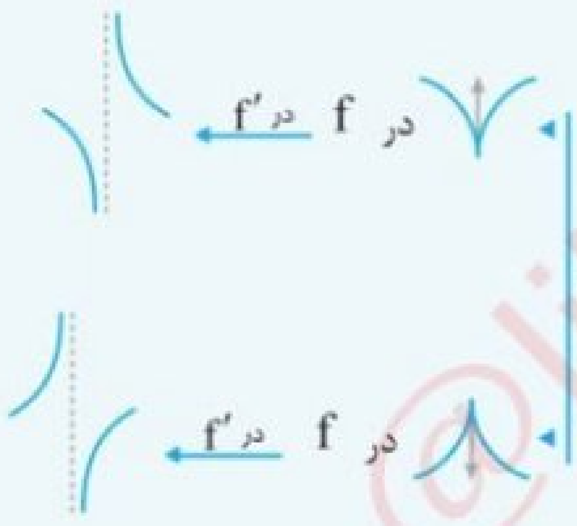




گوشه‌ای در f $\xleftarrow{\text{در } f'}$ نقطه‌ی انفصال است، ببین:



عطف قائم در f $\xleftarrow{\text{در } f'}$ شبیه حد نامتناهی با انفصال مضاعف می‌شود.



بازگشتی در f $\xleftarrow{\text{در } f'}$ شبیه حد نامتناهی با انفصال غیرمضاعف می‌شود.

هوپیتال

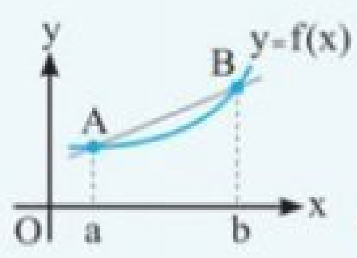
- **کاربرد در:** حدهایی که دارای ابهامِ $\frac{0}{0}$ هستند.
- **روش کار:** به جای صورت، مشتق آن و به جای مخرج هم مشتق آن را گذاشته، بعد همسایگی داده‌شده را عددگذاری کنید.

$$\lim_{x\to a}\frac{A}{B}\xrightarrow[\text{هوپیتال}]{\text{ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد}}\lim_{x\to a}\frac{A'}{B'}$$

- **دفعات استفاده از هوپیتال:** تا هر چند باری که کسر با ابهامِ $\frac{0}{0}$ مواجه شود می‌توانید هوپیتال را به کار ببرید تا بالاخره به جوابِ حد برسید.
- **فرق هوپیتال‌گیری با مشتق کسر**
  - مشتق کسر: $\frac{A}{B}\xrightarrow{\text{مشتق‌بگیر}}\frac{A'B-B'A}{B^2}$
  - هوپیتال: $\frac{A}{B}\xrightarrow{HOP}\frac{A'}{B'}$

آهنگ تغییر

- **آهنگ متوسط**
  - فرمول — در بازه‌ی $[a,b]$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
    - مفهوم: شیب پاره‌خطی که دو نقطه به طول‌های a و b را روی نمودار تابعِ f، به هم وصل می‌کند.
      - شکل:



- **آهنگ لحظه‌ای**
  - فرمول — در نقطه‌ی $x=c$: $f'(c)$
    - جور دیگه:
      - m مماس $\leftarrow f' \leftarrow c$
      - آهنگ لحظه‌ای $\leftarrow f' \leftarrow c$
  - فارسی: از تابع مشتق بگیر و به جای x ها بذار c، این می‌شود آهنگ لحظه‌ای...
- **در فیزیک**
  - x به‌صورت تابعی از زمان داده می‌شود: $\boxed{x=f(t)}$
  - مشتقِ تابعِ x (همان جابه‌جایی) می‌شود سرعت. $\boxed{x \xrightarrow{\text{مشتق بگیر}} v}$
  - **دو مفهومِ مهم**
    - توقف: یعنی سرعت صفر شده.
    - برخورد با زمین: یعنی جابه‌جایی صفر شده.

فصل در یک نگاه

یکنوایی و رفتار تابع

- **مفهوم:** تابعِ f در بازه‌ی (a,b)
  - **صعودی اکید است**
    - با افزایش x در بازه، y های نظیر هم زیاد می‌شوند.
    - در کلِ بازه $\boxed{f'>0}$ و امکان دارد در تعدادی از نقاط $f'=0$ هم بشود...
  - **نزولی اکید است**
    - با افزایش x در بازه، مقدار y های آنها کمتر می‌شود.
    - در تمام بازه $\boxed{f'<0}$ و امکان دارد در چند نقطه از این بازه، $f'=0$ هم بشود...
  - **صعودی غیراکید است**
    - با افزایش x، y ها زیاد شده و در بخشی هم تابع ثابت می‌شود.
    - $\boxed{f'>0}$ و حداقل در یک فاصله از این بازه، $f'=0$؛ $\boxed{f'\geq 0}$
  - **نزولیِ غیراکید است**
    - با افزایش x، y ها کم شده و در بخشی از بازه، تابع ثابت می‌شود.
    - $\boxed{f'>0}$ و حداقل در یک فاصله از این بازه، $f'=0$، $\boxed{f'\geq 0}$
- **ارتباط دقیق مشتق و رفتار**
  - **از مشتق به رفتارِ تابع برسیم**
    - اگر $\boxed{f'>0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **صعودی اکید** بوده است.
    - اگر $\boxed{f'<0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **نزولی اکید** بوده است.
    - اگر $\boxed{f'\geq 0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **صعودی** بوده است.
    - اگر $\boxed{f'\leq 0}$ است، نتیجه بگیرید که تابع f **نزولی** بوده است.
  - **از رفتار تابع به مشتقِ آن برسیم**
    - اگر f **صعودی یا صعودی اکید** بوده، نتیجه بگیرید که $\boxed{f'\geq 0}$.
    - اگر f **نزولی یا نزولی اکید** بوده، نتیجه بگیرید که $\boxed{f'\leq 0}$.
    - استثنایِ کم کاربرد ← اگر تابع چند ضابطه‌ای با شاخه‌ی ثابت یا قدرمطلق‌دار باشد، برای اکیدها مساوی نذار...
- **تعیین رفتار**
  - **تابع پیوسته و بدون قدرمطلق است** $\xrightarrow{\text{روش}}$ مشتق بگیر و آن را تعیین علامت کن و برای f فلش بزن
    - جدول ←

x		x_0	
f'	+	o	−
f	↗		↘

    - ریشه مضاعف ← قبل و بعد ریشه‌ی مضاعف علامت عوض نمی‌شود!
  - **تابع ناپیوسته است یا قدرمطلق دارد** $\xrightarrow{\text{روش}}$ رسم کن و از مفهومِ صعودی نزولی استفاده کن.
  - **تابع کسری**
    - مخرج کسر ریشه ندارد $\xrightarrow{\text{روش}}$ مشتق
    - مخرج کسر ریشه دارد $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ قطعاً تابع یکنوا نیست $\xrightarrow{\text{بازه‌ای داده که ریشه‌ی مخرج در آن نیست}}$ روش مشتق
      - $\boxed{f'\geq 0 \text{ صعودی}}$
      - $\boxed{f'\leq 0 \text{ نزولی}}$
    - گفته شده که در یک بازه یکنوا است $\xrightarrow{\text{روش}}$ علامتِ مشتق را مطابقِ رفتارِ تابع تنظیم کنید و کاری کنید که ریشه‌ی مخرج در بازه‌ی داده نشده نیفتد!

Scanned with CamScanner

شناخت و معرفیِ نقطه‌های مهم در تابع

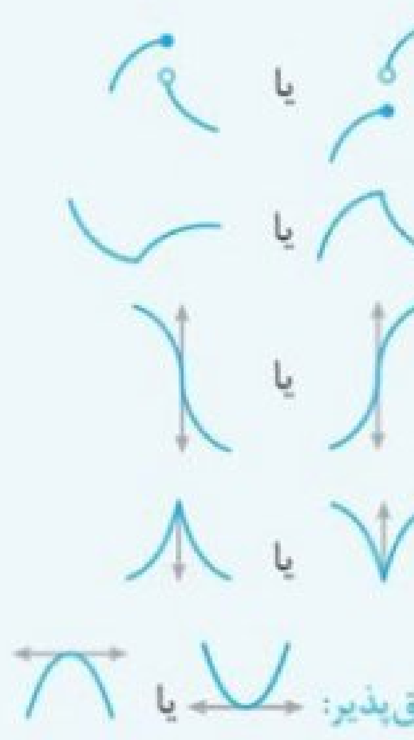
- **اکسترمم نسبی** $c \in D_f$
  - **مینیمم نسبی:** عرض نقطه‌ی c در مقایسه با عرض نقطه‌های چپ و راستِ آن کمتر یا مساوی است. ← شکل‌ها

  - **ماکزیمم نسبی:** عرض نقطه‌ی c در مقایسه با عرض نقطه‌های چپ و راستِ آن بیشتر یا مساوی است. ← شکل‌ها

اکسترمم یعنی مینیمم یا ماکزیمم

- **اکسترمم مطلق** $c \in D_f$
  - **مینیمم مطلق:** عرض نقطه‌ی c در مقایسه با تمامی عرض‌های تابع و در کلِ دامنه از همه کمتر یا مساویِ بعضی است. ← نام‌دیگر: کمترین مقدار تابع
  - **ماکزیمم مطلق:** عرض نقطه‌ی c در مقایسه با تمامی عرض‌های تابع و در کلِ دامنه از همه بیشتر یا مساوی بعضی است. ← نام‌دیگر: بیشترین مقدار تابع

- **بحرانی:** نقطه‌ای از درون دامنه که در آن $f' = 0$ یا $f' =$ وجودندارد
  - **شناخت از روی خط مماس**
    - خط مماس قابل رسم نیست.
    - دو نیم مماس می‌توان کشید.
    - مماس کشیده شده افقی یا قائم است.
  - **شناخت از روی شکل**
    - نقاط ناپیوستگی: یا
    - نقاط گوشه‌ای: یا
    - نقاط عطف قائم: یا
    - نقاط بازگشتی: یا
    - اکسترمم‌های مشتق‌پذیر: یا



- **اول و آخر بازه:** اگر تابع روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شود، اول و آخرِ آن یعنی $x = a$ و $x = b$
  - اکسترمم نسبی و بحرانی نیستند.
  - اکسترمم مطلق، شاید باشند.

- **ارتباط سه نقطه با هم** ← نمودارون

$\Leftarrow$ $A(a,b)$ بحرانی یا اکسترمم باشد $\boxed{f(a)=b}$

پیدا کردن نقطه‌های مهم از روی ضابطه

- **اکسترمم نسبی**
  - تابع پیوسته و بی قدرمطلق است ← آزمون مشتق اول: مشتق بگیر و تعیین علامت کن

x		x_0	
f'	+		−
f	↗	max نسبی	↘

x		x_1	
f'	−		+
f	↘	min نسبی	↗

روی x_0 و x_1 مشتق می‌تواند صفر شود یا نشود!

  - تابع ناپیوسته است یا قدرمطلق دارد ← روش: رسم کن و از راه تعریف اکسترمم شناسایی کن...
  - بدونِ تعیینِ علامتِ مشتق
    - اگر $f'(x) = (x-\alpha)^{2k}(x-\beta)^{2k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$ باشد
      - $x = \alpha$ طولِ اکسترمم نیست!
      - $x = \beta$ طولِ اکسترمم هست!
    - اگر $f(x) = \square\, (x-m)^{2k} +$ عدد $(k \in \mathbb{N})$ باشد، در این‌صورت $x = m$ طول اکسترمم است.

Scanned with CamScanner

- **اکسترمم مطلق**
  - **تابع پیوسته است** $\xrightarrow[\text{بازه‌ی } [a,b] \text{ را می‌دهد}]{\text{سید هدف}}$ تمام بحرانی‌ها را به اضافه‌ی a و b در یک جدول قرار بده و عرض همگی را پیدا کن.
    بیشترین عرض می‌شود ماکزیمم مطلق و کمترین عرض هم مینیمم مطلق.
  - **تابع ناپیوسته است** ← رسم کن و از مفهوم اکسترمم مطلق شناسایی کن...
- **بحرانی**
  - ۱ **تابع تک ضابطه‌ای است بدون قدر مطلق و جزء صحیح** $\xrightarrow{\text{روش}}$ مشتق بگیر و ساده کن، اگر یک کسر شد، آن‌گاه:
    - $f' = \frac{A}{B}$ $\xrightarrow{A=0}$ بحرانی است $\xrightarrow{\text{شرط}}$ وجود در بازه و دامنه
    - $f' = \frac{A}{B}$ $\xrightarrow{B=0}$ بحرانی است $\xrightarrow{\text{شرط}}$ وجود در بازه و دامنه
    - $\xrightarrow{\text{بازه ندارد}}$ $\boxed{D = \mathbb{R}}$: $\boxed{f' = \frac{A}{B} \xrightarrow{A \text{ و } B=0} \text{بحرانی‌ها}}$
  - ۲ **تابع قدرمطلقی است:** $y = |u|$ $\xrightarrow{\text{قرار بده}}$ $\boxed{u=0}$ و $\boxed{u'=0}$ ← تمامی نقاط بحرانی به‌دست می‌آید.
  - ۳ **تابع چند ضابطه‌ای است**
    - در هر شاخه‌ی آن جداگانه و با روشِ ۱ بحرانی‌ها را پیدا کن
    - هر نقطه‌ی شکست دامنه، شانسِ بحرانی بودن دارد $\xrightarrow{\text{چک کن}}$ $\boxed{\text{ناپیوسته، بدون مشتق، مشتق صفر یا } \infty \leftarrow \text{بحرانی}}$

ارتباط مشتق و اکسترمم نسبی

- ۱ f در c پیوسته بوده و f' در c تغییر علامت می‌دهد
- ۲ $f'(c)=0$ و f' در c تغییر علامت می‌دهد

$\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $\boxed{x = c \text{ نقطه‌ی اکسترمم نسبی } f \text{ است}}$ $\xrightarrow[\text{مشتق دارد}]{\text{آیا } f \text{ در } c}$

- بله $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $f'(c) = 0$
- خیر $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ $f'(c)$ وجود ندارد

شناخت نقطه‌های مهم تابع روی نمودار

- **اکسترمم نسبی:** یک خطِ افقیِ کوچک روی عرضِ نقطه بکش
  - **تابع بالای خط افقیِ کوچک بود** ← نقطه را **مینیمم نسبی** اعلام کن: 
  - **تابع پایین خط افقیِ کوچک بود** ← نقطه را **ماکزیمم نسبی** اعلام کن: 
- **اکسترمم مطلق:** نقطه‌ی توپُری که
  - **بالاترین نقطه‌ی نمودار است** $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ **ماکزیمم مطلق است:** 

  - **پایین‌ترین نقطه‌ی نمودار است** $\xrightarrow{\text{نتیجه}}$ **مینیمم مطلق است:** 

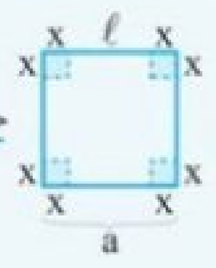
- **بحرانی:** خطِ مماس کشیده شده در این نقطه
  - **افقی است:** 
  - **عمودی است:** 
  - **بدون مماس است!** 

نقطه‌های مهم در تابع‌های معروف

- $y=k|ax+b|$ نقطه‌ی $x=-\frac{b}{a}$
  - با فرض $k>0$: مینیمم نسبی، مینیمم مطلق و بحرانی است.
  - با فرض $k<0$: ماکزیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و بحرانی است.
- $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ نقطه‌ی $x=-\frac{b}{2a}$
  - با فرض $a>0$: مینیمم نسبی، مینیمم مطلق و بحرانی است.
  - با فرض $a<0$: ماکزیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و بحرانی است.
- $y=a(bx+c)^3+d$ $(a\neq 0)$ نقطه‌ی $x=-\frac{c}{b}$ یا همان ریشه‌ی پرانتز نقطه‌ی **بحرانی** است.
  - **اکسترمم نسبی و مطلق ندارد.**
- $y=a\sin(bx+c)+d$ $(a\neq 0)$
  - نقطه‌هایی با طولِ $bx+c=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$، **ماکزیمم نسبی، مطلق و بحرانی** است.
  - نقطه‌هایی با طولِ $bx+c=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$، **مینیمم نسبی، مطلق و بحرانی** است.
- $y=a\cos(bx+c)+d$ $(a\neq 0)$
  - نقطه‌هایی با طولِ $bx+c=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$، **ماکزیمم نسبی، مطلق و بحرانی** است.
  - نقطه‌هایی با طولِ $bx+c=2k\pi+\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$، **مینیمم نسبی، مطلق و بحرانی** است.
- $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0)$ $\xrightarrow{\text{اکسترمم و بحرانی}}$ ندارد.
- $y=c\sqrt{ax+b}+d$ روی $x=\frac{-b}{a}$ یا همان ریشه‌ی زیر رادیکال
  - $c>0$: مینیمم مطلق دارد.
  - $c<0$: ماکزیمم مطلق دارد.

بهینه‌سازی

- **هدف:** قرار است کمیتِ خاصی را ماکزیمم یا مینیمم کنیم؛ یافتنِ **بهترین حالت ممکن!**
- **شناسایی در بین تست‌ها**
  - قالبِ تست، مسئله‌ای توضیحی دارد و معمولاً ترکیبی با هندسه یا...
  - خواسته‌ی سؤال یکی از کلمات کلیدی **بیشترین مقدارِ** یا **کمترین مقدارِ** را دارد...
- **روش حل**
  1. کشیدن یک شکل
  2. پیدا کردن عبارتی که قرار است بهینه شود، نامش را P بگذارید.
  3. P را تک مجهولی کنید. روش کار استفاده از شکل و روابط هندسی و ریاضیِ حاکم بر آن یا داده‌های تست...
  4. از P تک مجهولی مشتق گرفته و مساویِ صفر بگذارید و مجهولِ قابل قبول و واقعی را پیدا کنید!
- **مسائل معروف**
  - **ساختن جعبه**

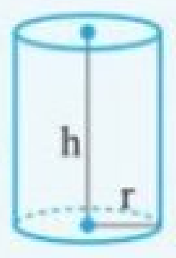
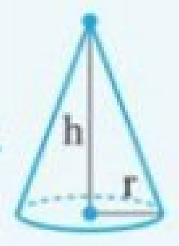
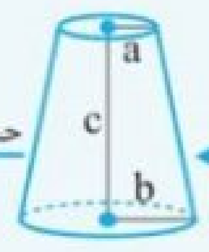
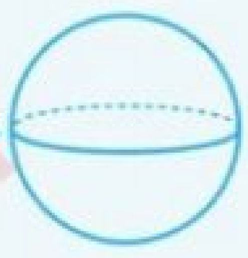


$\xrightarrow{\text{حجم ماکزیمم شود}}$ $P=x(a-2x)^2$ $\xrightarrow{P'=0}$ $x=$

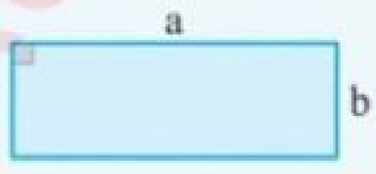
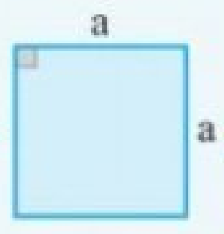
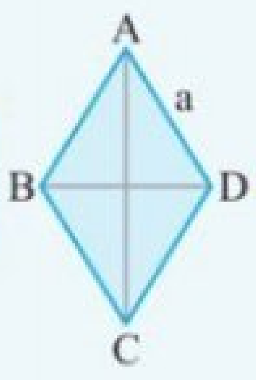
  - **کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه تا منحنی**
    - داده‌ها: نقطه‌ی $A(a,b)$ و ضابطه‌ی تابع f
    - عبارتی که باید بهینه کنید: $P=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-b)^2}$
- **بدون مشتق** (برای $x,y>0$)
  - اگر $x+y=k$ و xy **ماکزیمم** باشد، باید $x=y$ شود: $\max(xy)=\frac{k^2}{4}$
  - اگر $xy=t$ و $x+y$ **مینیمم** باشد، باید $x=y$ شود: $\min(x+y)=2\sqrt{t}$

فصل در یک نگاه

حجم‌ها

- **استوانه:**  حجم ← $V=\pi r^2 h$
- **مخروط:**  حجم ← $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ مخروط‌ناقص ←  حجم ← $V=\frac{\pi c}{3}(a^2+b^2+ab)$
- **کره:**  حجم ← $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

مساحت‌ها

- **مستطیل:**  مساحت ← $S=ab$
- **مربع:**  مساحت ←
  - **بر اساس ضلع:** $S=a^2$
  - **بر اساس قطر:** $S=\frac{d^2}{2}$
- **دایره:**  مساحت ← $S=\pi r^2$
- **لوزی:** 
  - **بر اساس قطر:** $S=\frac{AC\cdot BD}{2}$
  - **بر اساس ضلع:** $S=a^2\sin\widehat{A}$

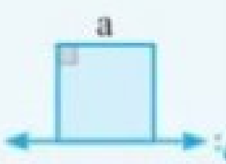
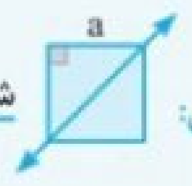
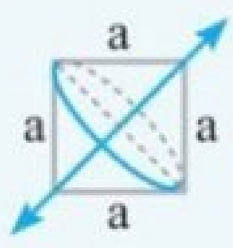
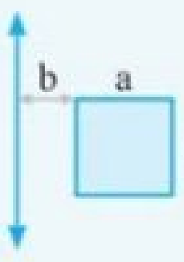
ایده‌های دوران

- **شکل فاصله‌دار تا محور:** از رأس‌ها عمود بکش بر محور دوران: 
- **شکل‌های متقارن نسبت به محور:** نصفِ شکل را دوران بده...
- **افراز:** با کشیدن خط‌های عمودبر محورِ دوران، شکل را به بخش‌هایی تقسیم کن که دوران آن‌ها را بلدی...

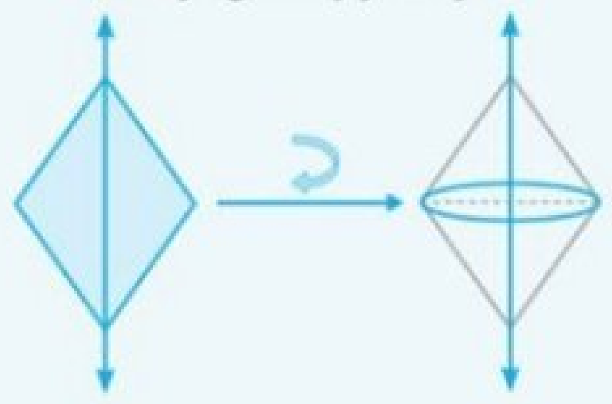
دوران شکل‌های متقارن

- **دوران پاره‌خط و نیم‌خط**
  - **دوران پاره‌خط**
    - شکل حاصل: دایره با شعاع AB ← مساحت: $S=\pi a^2$
    - شکل حاصل: مخروط توخالی با مولدِ AB ← حجم: $V=\frac{1}{3}\pi b^2(\sqrt{a^2-b^2})$
    - شکل حاصل: مخروط توخالیِ سر بریده با مولدِ AB ← ارتفاع: $h=\sqrt{a^2-(b-c)^2}$
    - شکل حاصل: واشری به پهنایِ AB ← مساحت: $S=\pi(a^2-b^2)$
    - شکل حاصل: استوانه‌ی توخالی به ارتفاعِ AB ← حجم: $V=\pi b^2 a$
  - **دوران نیم‌خط**
    - شکل حاصل: مخروط توخالیِ ته‌باز
    - شکل حاصل: مخروط ناقص و ته‌باز
    - مولد = نیم‌خط
    - حجم: هر دو شکل نامحدودند و حجم ندارند...!
- **دایره**
  - نیم‌دایره حول قطرش: شکل حاصل: کُره
  - دایره حول قطرش: شکل حاصل: کُره
    - حجم: $V=\frac{4}{3}\pi a^3$
  - ربع دایره حول محور گذرنده از قطرش: شکل حاصل: نیم‌کُره ← حجم: $V=\frac{2}{3}\pi a^3$
- **مستطیل**
  - حول طولش / حول عرضش: شکل حاصل: استوانه
    - ارتفاع a ← حجم: $V=\pi b^2 a$
    - ارتفاع b ← حجم: $V=\pi a^2 b$

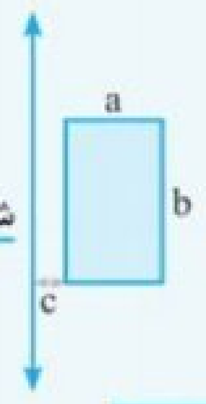
مربع

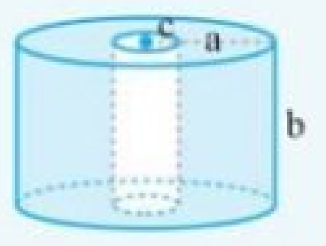
- **حول ضلعش:**  **شکل حاصل** استوانه — حجم: $\boxed{V = \pi a^۳}$
- **حول قطرش:**  **شکل حاصل** دو مخروط هم قاعده‌ی متقارن — حجم: $\boxed{V = \frac{\sqrt{۲}}{۶}\pi a^۳}$
  - شکل‌فضایی: 
- **حول خطی موازی ضلعش:**  **شکل حاصل** تیوپ — حجم: $\boxed{V = \pi a^۲(a+۲b)}$
  - استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی $a+b$ که استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی b درست از وسط آن درآمده...

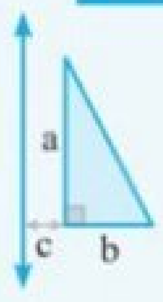
لوزی حول هر قطرش **شکل حاصل** دو مخروط هم‌قاعده‌ی متقارن:

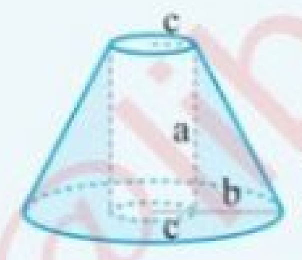


شکل‌های تیوپ‌طور

-  **شکل حاصل** تیوپ مستطیلی: استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی $a+c$ و ارتفاع b که درست از وسط آن استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی c و ارتفاع b درآمده است...

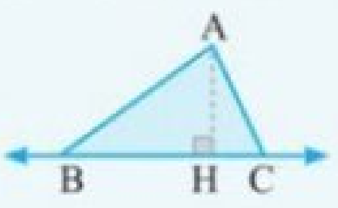
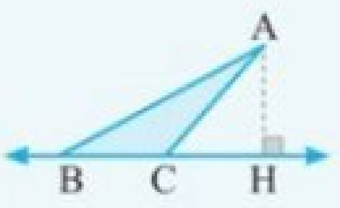


-  **شکل حاصل** مخروط ناقصی به شعاع قاعده‌ی $b+c$ و ارتفاع a که درست از وسط آن استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی c و همان ارتفاع درآمده است...



دوران مثلث حول ضلعش

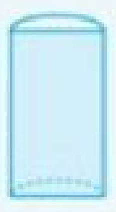
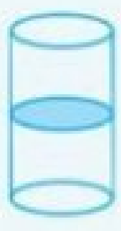
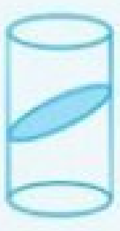
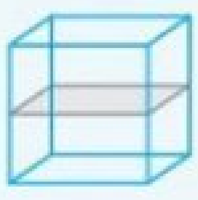
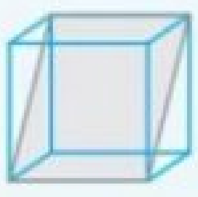
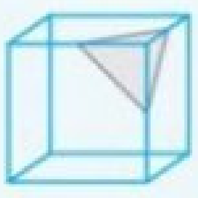
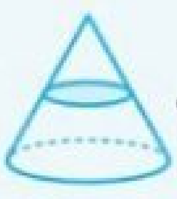
ایده: از رأس مقابلِ محور دوران به محور عمود بکش

-  $\boxed{\widehat{B}, \widehat{C} < ۹۰^\circ}$ **شکل حاصل** دو مخروط هم‌قاعده با ارتفاع‌های BH و CH
-  $\boxed{\widehat{C} > ۹۰^\circ}$ **شکل حاصل** مخروطی با ارتفاع BH که یک مخروط هم‌قاعده و با ارتفاع CH از پایین آن درآمده است...
- حجم‌شکل‌حاصل: $\boxed{V = \frac{۱}{۳}\pi(AH)^۲(BC)}$

مفاهیم اولیه‌ی برش

- **برش‌دهنده:** یک صفحه است.
- **سطح مقطع:** شکلی است که پس از برخوردِ صفحه‌ی برش با جسم هندسی، روی شکل باقی می‌ماند.

بُرش اشکال معروف

- **استوانه**
  - صفحه‌ی برش موازی محور ← سطح مقطع ← مستطیل 
  - صفحه‌ی برش عمود بر محور ← سطح مقطع ← دایره 
  - صفحه‌ی برش، نه عمود است بر محور و نه موازیِ آن ← سطح مقطع ← بیضی 
- **مکعب‌مستطیل**
  - صفحه‌ی برش موازی یکی از وجه‌هاست ← سطح مقطع ← مستطیل 
  - صفحه‌ی برش از چهار رأس غیر هم‌صفحه می‌گذرد. ← سطح مقطع ← مستطیل 
  - صفحه‌ی برش، هر سه ضلع هم‌رأس مکعب‌مستطیل را قطع می‌کند. ← سطح مقطع ← مثلث 
- **مخروط**
  - مخروط
    - صفحه‌ی برش بر محور عمود است. ← سطح مقطع ← دایره 
    - صفحه‌ی برش، شامل محور است. ← سطح مقطع ← مثلث 
    - غیر این دو حالت ← بیضی می‌شود: 
  - مخروط ناقص
    - صفحه‌ی برش بر محور عمود است. ← سطح مقطع ← دایره 
    - صفحه‌ی برش شامل محور است. ← سطح مقطع ← ذوزنقه 
    - غیر این دو حالت ← بیضی می‌شود: 
  - حالت خاص
    - صفحه فقط از رأس بگذرد. ← سطح مقطع ← نقطه 
    - صفحه فقط از مولد بگذرد. ← سطح مقطع ← خط 
- **کُره**
  - صفحه‌ی برش بر کره مماس باشد. ← سطح مقطع ← نقطه 
  - صفحه‌ی برش بر کره مماس نباشد. ← سطح مقطع ← دایره 
    - حالت خاص ← صفحه از مرکز بگذرد ← دایره بزرگه: $\boxed{S=\pi R^2}$
  - رابطه‌ی طولی: صفحه‌ی برش با فاصله‌ی h از مرکز کره به شعاع R بگذرد، مساحتِ دایره‌ی حاصل می‌شود: $\boxed{\pi(R^2-h^2)}$

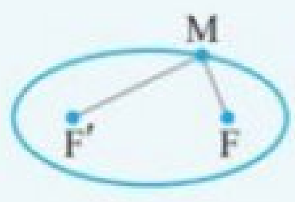
مقاطع مخروطی

- **سطح مخروطی:** خط d، حول خطِ ثابت ℓ دوران می‌کند:

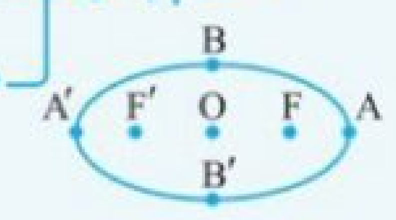
  - شکل ◄ دوتا مخروط تو خالیِ بی‌انتها که از رأس، روی هم قرار دارند...
- **مقطع مخروطی:** اثرِ برش صفحه با سطح مخروطی است.
- **برش سطح مقطع**
  - **حالت خاص:** صفحه از رأس بگذرد
    - ◄ نقطه: صفحه فقط از رأس می‌گذشته...
    - ◄ خط: صفحه شامل مولد است...
    - ◄ دو خط متقاطع: صفحه شامل محور است...
  - **شکل مقاطع مخروطی** (صفحه از رأس نگذرد)
    - ◄ دایره: صفحه بر محور عمود است.
    - ◄ بیضی: صفحه بر محور عمود نیست ولی موازی مولد هم نیست.
    - ◄ سهمی: صفحه موازی مولد است.
    - ◄ هذلولی: صفحه موازی محور است.

شناخت بیضی

- **تعریف بیضی:** مجموعه‌ی نقاطی است مانند M، به‌طوری که $\boxed{MF + MF' = ۲a}$ ، $\boxed{a \in \mathbb{R}^+}$



- **کشیدن بیضی با نخ**
  - طول نخ=۲a
  - فاصله‌ی دو میخ=۲c
- **پارامترها**
  - فاصله‌ی دو رأس کانونی $= \boxed{AA' = ۲a}$
  - فاصله‌ی دو رأس ناکانونی $= \boxed{BB' = ۲b}$
  - فاصله‌ی دو کانون $= \boxed{FF' = ۲c}$



  - ◄ محورهای تقارن: $\boxed{x = \alpha}$ ، $\boxed{y = \beta}$ — $O(\alpha , \beta)$
  - ◄ رابطه‌ی پارامترها: $\boxed{a^۲ = b^۲ + c^۲}$
  - ◄ بزرگ‌ترین پارامتر: $\boxed{a}$
  - ◄ مرکز بیضی: $\boxed{O = \frac{A + A'}{۲} = \frac{F + F'}{۲} = \frac{B + B'}{۲}}$

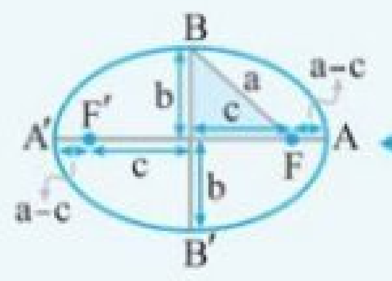
خروج از مرکز

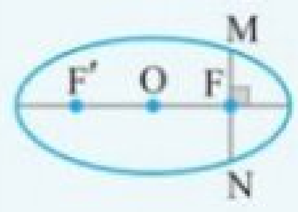
- **فرمول اصلی:** $\boxed{e = \frac{c}{a}}$
- **محدوده:** $\boxed{۰ < e_{\text{بیضی}} < ۱}$
- **مفهوم:** هرچه e به ۱ نزدیک‌تر شود بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه به صفر نزدیک‌تر شود، تُپل‌تر!
- **فرمول دوم:** $\boxed{e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}}$ $\xrightarrow{\text{کاربرد}}$ $\boxed{e = \sqrt{۱ - (\frac{\text{قطر کوچک}}{\text{قطر بزرگ}})^۲}}$

روابط طولی در بیضی

فاصله‌ی:
- هر کانون تا رأس ناکانونی = $\boxed{a}$ مثل BF.
- هر کانون تا رأس کانونی مجاور (نزدیک‌تر) = $\boxed{a-c}$ مثل AF.
- هر کانون تا رأس کانونی غیرمجاور (دورتر) = $\boxed{a+c}$ مثل AF'.

در یک نگاه





وتر کانونی $MN=\dfrac{2b^2}{a}$

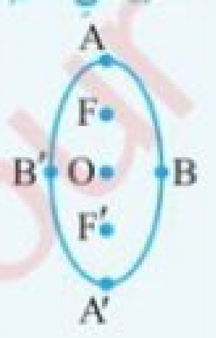
مختصات نقاط مهم بیضی

نوشتن مختصات

بیضیِ افقی

- $F,F'(\alpha\pm c,\beta)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی c به چپ و راست حرکت کن.
- $A,A'(\alpha\pm a,\beta)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی a به چپ و راست حرکت کن.
- $B,B'(\alpha,\beta\pm b)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی b به بالا و پایین حرکت کن.

بیضیِ قائم



- $F,F'(\alpha,\beta\pm c)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی c به بالا و پایین حرکت کن.
- $A,A'(\alpha,\beta\pm a)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی a به بالا و پایین حرکت کن.
- $B,B'(\alpha\pm b,\beta)$ $\xleftarrow{\text{فارسی}}$ مرکز را بچین و به اندازه‌ی b به چپ و راست حرکت کن.

دریافت اطلاعات از مختصات

- F',F
  - وسطشان می‌شود O
  - فاصله‌شان می‌شود $2c$
- A',A
  - وسطشان می‌شود O
  - فاصله‌شان می‌شود $2a$
- B',B
  - وسطشان می‌شود O
  - فاصله‌شان می‌شود $2b$

درون و بیرون بیضی

اگر نقطه‌ی M
- روی بیضی باشد: $\boxed{MF+MF'=2a}$
- درون بیضی باشد: $\boxed{MF+MF'<2a}$
- بیرون بیضی باشد: $\boxed{MF+MF'>2a}$

روش: فاصله‌ی M را تا دو کانون حساب کرده و جمع کن و بعد حاصل را با $2a$ مقایسه کن...!

شناخت دایره

تعریف: مجموعه‌ی نقاطی است مانند M، به‌طوری که فاصله‌شان تا نقطه‌ی ثابتِ $\underset{\text{مرکز}}{\boxed{O}}$ برابرِ $\underset{\text{شعاع}}{\boxed{r}}$ باشد. $(r>0)$

معادله‌ی استاندارد

نوشتن معادله: اگر $O(\alpha,\beta)$، مرکز و r شعاع باشد، آن‌وقت: $\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$

دریافت اطلاعات از معادله: اگر ضریب پرانتزها و متغیرها یک بود $\boxed{(\ \ )^2+(\ \ )^2=k}$
- پرانتزها را صفر کن و ریشه‌ها را پیدا کن ← مرکز
- از عددِ سمتِ راست، جذر بگیر ← شعاع

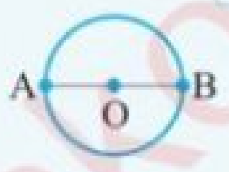
معادله‌ی گسترده

- **دریافت اطلاعات:** ضریبِ $x^۲$ و $y^۲$ را با تقسیمِ طرفین تساوی، ۱ کن و همه‌ی جمله‌ها رو بیار سمت چپ.
  - فرم آماده: $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$
- **فرم آماده**
  - مرکز: $O(\frac{a}{-۲},\frac{b}{-۲})$
  - شعاع: $r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$
- **شرط دایره بودن**
  - شرط لازم: ضریبِ $x^۲$ = ضریبِ $y^۲$
  - شرط مکمل: معادله را آماده کن و شعاع را پیدا کن $\xrightarrow{\text{حتماً}}$ عدد زیر رادیکال مثبت باشد.
    - فرم ریاضی: $a^۲+b^۲-۴c>۰$

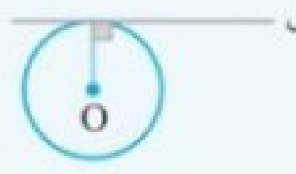
نوشتن معادله‌ی دایره با اطلاعات معلوم

- **مرکز و نقطه:** فاصله‌ی مرکز را تا نقطه پیدا کن، می‌شود شعاع:

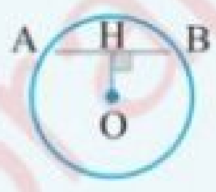
- **دو سر قطر** A,B
  - $O=\frac{A+B}{۲}$
  - $r=\frac{AB}{۲}$



- **مرکز و مماس:** فاصله‌ی مرکز تا خط مماس را پیدا کن، این می‌شود شعاع:



- **مرکز و طول وتر:** از رابطه‌ی $\ell=۲\sqrt{r^۲-OH^۲}$ شعاع را پیدا کن:



$AB=\ell$

- **مرکز روی خطِ ... است:** مختصات مرکز را در خط صدق بده؛ شرطی برحسب α و β پیدا کن...
- **مماس بر دو خط موازی:**
  - شعاع: فاصله‌ی دو خط موازی را پیدا کن و بعد هم نصف کن...
  - مرکز: روی خطِ موازیِ این دو و وسطِ آن‌ها قرار دارد...

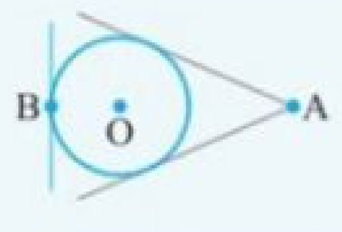
- **گذرنده از سه نقطه:** معادله‌ی دایره را $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ بگیر و سه نقطه را در این معادله قرار بده، آخرش حلِ دستگاه

درباره‌ی مماس

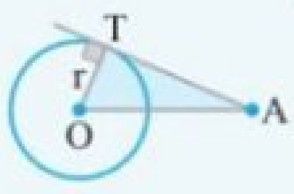
- **فاصله‌ی مرکز تا خط مماس می‌شود شعاع:**

$$\underbrace{ax+by+c=۰}_{\text{مماس}}\xrightarrow{O(\alpha,\beta)}\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=r$$

- **تعداد مماس‌های موجود از یک نقطه**
  - روی دایره: یکی
  - بیرون دایره: دو تا
  - درون دایره: هیچی



- **طول قطعه مماس رسم شده از نقطه‌ی A**
  - $A(x_۰,y_۰)$
  - مفهومی: $AT=\sqrt{OA^۲-r^۲}$



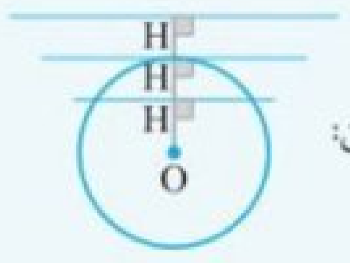
  - تستی: مختصات نقطه را در معادله‌ی گسترده‌ی آماده بذار و جذر بگیر... $AT=\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲+ax_۰+by_۰+c}$
- **معادله‌ی مماس از $A(x_۰,y_۰)$ روی دایره:** معادله‌ی استاندارد دایره را بنویس، بعدش:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \Rightarrow (x_۰-\alpha)(x-\alpha)+(y_۰-\beta)(y-\beta)=r^۲$$

وضعیت دایره با...

- **یک خط**
  - خط و دایره مماس‌اند: $OH = r$
  - خط و دایره متقاطع‌اند: $OH < r$
  - خط و دایره نقطه‌ی مشترک ندارند: $OH > r$

  فارسی ← فاصله‌ی مرکز تا خط را پیدا کرده با شعاع مقایسه کن:



  پیدا کردن نقاط تلاقی ←  : x را از معادله‌ی خط برحسب y پیدا کن و در معادله‌ی دایره بذار و معادله‌ی حاصل را حل کن...

- **محورهای مختصات**
  - مماس بر محور x هاست: $|\beta| = r$
  - مماس بر محور y هاست: $|\alpha| = r$
  - مماس بر هر دو محور است: $|\alpha| = |\beta| = r$ $\xleftarrow[\text{(a , b)می‌گذرد}]{\text{دایره از نقطه‌ی}}$ $\underbrace{\alpha\text{، هم‌علامتِ } a \text{ و } \beta\text{، هم‌علامتِ } b \text{ است}}_{\text{قدر مطلق‌ها را مناسب بردار}}$

درون و بیرون دایره

$A(x_0 , y_0)$

- **مفهومی (هندسی)**
  - نقطه روی دایره است: $OA = r$
  - نقطه بیرون دایره است: $OA > r$
  - نقطه درون دایره است: $OA < r$

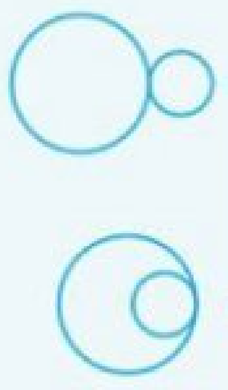
- **با داشتن معادله‌ی استاندارد:** مختصات نقطه را به جای x و y معادله بذار
  - نقطه روی دایره است: $(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2 = r^2$
  - نقطه بیرون دایره است: $(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2 > r^2$
  - نقطه درون دایره است: $(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2 < r^2$

- **با داشتن معادله‌ی گسترده:** مختصات نقطه را به جای x و y معادله بذار
  - نقطه روی دایره است: $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c = 0$
  - نقطه بیرون دایره است: $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c > 0$
  - نقطه درون دایره است: $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c < 0$

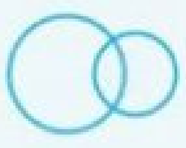
دو دایره

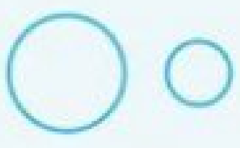
- **ابزارهای لازم**
  - فاصله‌ی دو مرکز: $OO' = d$
  - اندازه‌ی دو شعاع r و r' $\xrightarrow{\text{+و−کن}}$ $r+r'$ و $|r-r'|$

- **وضعیت دو دایره**
  - یک نقطه‌ی مشترک دارند
    - مماسِ بیرون: $d = r+r'$
    - مماسِ درون: $d = |r-r'|$



  - متقاطع: $|r-r'| < d < r+r'$ ← دو نقطه‌ی برخورد



  - بدون نقطه‌ی برخورد
    - یکی خارج دیگری: (متخارج)  : $d > r+r'$
    - یکی داخل دیگری: (متداخل)  : $d < |r-r'|$
    - هم‌مرکز:  : $d = 0$

فصل در یک نگاه

اصل ضرب

- **مفهوم:** وقتی عملی در چند مرحله‌ی پشت سر هم قابل انجام است، تعداد راه‌های هر کدام را در هم ضرب کن.
- **کاربردها**
  - تستِ شمارشی که بین چند اتفاق، «و» گذاشته باشد، با اصل ضرب حل می‌شود...
  - با چند رقم داده‌شده، بخواهید عددی چند رقمی بسازید $\xleftarrow{\text{آیا تست حرفی از تکرار زده است؟}}$
    - خیر ← تکرار مجاز است.
    - بله ← وقتی گفته، تکرار مجاز نیست.
  - با چند حرفِ داده‌شده، بخواهید کلمه‌ای بسازید.
  - همیشه موقع پرکردن خانه‌ها، اول خانه‌های شرط‌دار را پر کنید و بعد بقیه را...
  - **برای احتمال بلد باش:** تعداد حالت‌ها برایِ:
    - n تا سکه: $\boxed{2^n}$
    - m تا تاس: $\boxed{6^m}$
    - n تا سکه و m تا تاس با هم: $\boxed{2^n \times 6^m}$

اصل جمع

- **مفهوم:** وقتی مجبوری برای شمارش، حالت‌بندی ارائه کنی و اتفاقِ مورد نظرِ تست را در چند حالتِ مجزا، دسته‌بندی کنی، تعداد راه‌های هرکدام را جداگانه حساب کن و در آخر با هم جمع کن.
- **کاربردها**
  - تستِ شمارشی که بین چند اتفاق، «یا» گذاشته باشد، با اصل جمع حل می‌شود...
  - **alarm حداقل و حداکثر:** تستی که کلمات «حداقل» و «حداکثر» داشته باشد؛ معمولاً نیاز به حالت‌بندی دارد
    - حداقل k تا: حالت‌های خودِ k تا و بیشترهاش رو حساب کن و جمع کن.
    - حداکثر t تا: حالت‌های خودِ t تا و کمترهاش رو حساب کن و جمع کن.
  - **حالت‌بندی نهفته:** اگر شیء خاصی نتواند در یک خانه قرار بگیرد و همچنین در خانه‌ی دیگری حتماً باشد، اونو حالت‌بندی کن یا این‌که عددی بتواند در دو خانه‌ی مختلف قرار بگیرد.

جایگشت (چیدن)

- **فاکتوریل:** حالت‌های چیدنِ n شیء متمایز در یک ردیف (یا در n تا جا)، بدون تکرار می‌شود: $\boxed{n!}$
- **تبدیل:** وقتی می‌خواهی از میان n تا شیء، k تا را برداری و بعد هم آن‌ها را در یک ردیف، به‌ترتیب، بچینی: $\xrightarrow{\text{فرمول}}$ $\boxed{P(n,k)=\dfrac{n!}{(n-k)!}}$
- **کنار هم بودن اشیای خاص:** وقتی قراره چند تا شیء خاص کنار هم باشند، آن‌ها را به هم طناب‌پیچ کن و یک شیء به‌حساب بیار، حالا از نو بشمر و جایگشت بده:
  - جایگشت خودِ اشیای داخل بسته مهم است ← جایگشت اونا رو در جوابِ آخر ضرب کن.
  - جایگشت خودِ اشیای طناب‌پیچ شده مهم نیست ← کار خاصی نباید بکنی...
- **یک در میان چیدن**
  - n تا از نوع اول و n تا از نوع دوم $\xrightarrow{\text{یک در میان}}$ $\boxed{2(n!)^2}$
  - n تا از نوع اول و $n+1$ تا از نوع دوم $\xrightarrow{\text{یک در میان}}$ $\boxed{n!(n+1)!}$
- **یکی قبلِ دیگری:** اگر بخواهی از بین n شیء، A قبل از B باشد، تعداد جایگشت‌ها می‌شود $\boxed{\dfrac{n!}{2}}$.
- **اشیای تکراری دارد:** همه رو بشمر و جایگشت بده، آخر سر هم جایگشتِ هر کدام از اشیای تکراری را در مخرج قرار بده...

ترکیب (انتخاب)

- **مفهوم:** وقتی قرار است از میان n تا شیء، k تا شیء را فقط انتخاب کنی؛ بدون این‌که ترتیب چیدن آن‌ها مهم باشد... $\binom{n}{k}$.
- **شناسایی تستی که با ترکیب حل می‌شود**
  - وجود کلمه‌ی **انتخاب** چند شیء...
  - ساختن **گروه** یا **تیم**...
  - شمارش تعداد مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها و... (به طور کلی شمارش n ضلعی‌ها با داشتن تعدادی نقطه)
- **فرمول:** $C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$
- **فرمول‌های ترکیب**
  - $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$
  - $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
  - $\binom{n}{a}=\binom{n}{b}\Rightarrow a+b=n$
  - $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$
  - $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$
- وقتی بخواهی از میان n شیء، k تا را انتخاب کنی که شامل t عضو به‌خصوص بوده و فاقد r عضو مشخص باشند، حالت‌ها می‌شود: $\binom{n-t-r}{k-t}$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضویِ A

- **تعداد اعضای زیرمجموعه، گفته شده** ← تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی
  - $\binom{n}{k}$
  - شامل t عضو به‌خصوص $\binom{n-t}{k-t}$
  - فاقد r عضو مشخص‌شده $\binom{n-r}{k}$
- **تعداد اعضای زیرمجموعه، گفته نشده** ← تعداد زیرمجموعه‌های A
  - 2^n
  - شامل t عضو به‌خصوص 2^{n-t}
  - فاقد r عضو مشخص‌شده 2^{n-r}

فصل در یک نگاه

مفاهیم اولیه

فضای نمونه: مجموعه‌ی تمامِ حالت‌های ممکن است ← فضاهای معروف

پدیده	n سکه	m تاس	n سکه و m تاس	n فرزند
$n(S)$	۲^n	۶^m	$۲^n \times ۶^m$	۲^n

نماد ← S

پیشامد: زیرمجموعه‌ی فضای نمونه است.

- **تعداد پیشامدهای قابل تعریف:** $۲^{n(S)}$

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعدادحالت	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

فرمول احتمال: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

حل تست احتمال مقدماتی

ترکیبیات

- یک گروه انتخاب می‌کنیم ← به $\binom{n}{k}$ فکر کن.
- تعدادی شیء را می‌چینیم یا یکی یکی انتخاب می‌کنیم ← به $n!$ فکر کن.
- حالت‌ها را جداگانه مجبوریم بشماریم ← به اصل جمع فکر کن.
- تعداد حالت‌های ممکن برای تعدادی شیء یا مکان را باید بررسی کنیم ← به اصل ضرب فکر کن.

کلمات کلیدی ← **حداقل و حداکثر:** این‌ها معمولاً نیاز به حالت‌بندی دارند و شاید حالتِ نامطلوبشان از خودشان بهتر باشد!

شمارش دستی: وقتی حالت‌های مطلوب کم باشد، حالت‌ها را می‌نویسیم و بعد هم می‌شماریم.

دختر و پسری

- در بین n فرزند: $\dfrac{\binom{n}{k}}{۲^n}=$ احتمالِ k دختر $=$ احتمالِ k پسر
- در بین n بار پرتاب یک سکه: $\dfrac{\binom{n}{k}}{۲^n}=$ احتمالِ k بار پشت $=$ احتمالِ k بار رو
- در بین n بار پرتاب یک تاس: $\dfrac{\binom{n}{k}}{۲^n}=$ احتمالِ k بار عدد اول $=$ احتمالِ k بار فرد $=$ احتمالِ k بار زوج

فرمول‌های احتمال

متمم: $P(A')=۱-P(A)$ ← مفهوم ← A' یعنی A اتفاق نیفتد.

اجتماع: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ← مفهوم ← حداقل یکی از پیشامدهای A یا B اتفاق بیفتند.

حالت خاص ← A و B ناسازگار باشند: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$A\cap B=\varnothing$

منها: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ ← مفهوم ← A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.

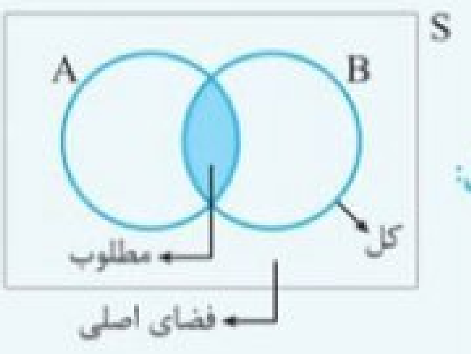
حالت‌های دیگر ← $P(B\cap A')=P(B-A)$ و $P(A\cap B')=P(A-B)$

نه A و نه B: $P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)$ ← مفهوم ← هیچ‌کدام اتفاق نیفتد.

از سه تا فقط یکی: $P(\underbrace{A\cap B\cap C'}_{(A\cap B)-C})=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)$ ← مفهوم ← A و B اتفاق بیفتند ولی C اتفاق نیفتد.

احتمال پیشرفته

- **احتمال شرطی**
  - **فرمول**
    - با داشتن احتمال: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
    - با داشتن حالت‌ها: $P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$
  - **طرز خواندن:** $P(A|B)$، یعنی احتمالِ A، مشروط به اتفاق افتادنِ B.
  - **شکل:**



  - **فرمِ تست:** یک پیشامد می‌دهد و احتمال یک پیشامدِ دیگر را می‌خواهد: اگر شود، احتمالِ چقدر است؟
- **پیشامدهای مستقل**
  - **مفهوم:** اتفاق افتادن یا نیفتادنِ A، احتمالِ B را کم یا زیاد نمی‌کند $\xrightarrow{\text{شکل دیگر}}$ تأثیری بر هم ندارند.
  - **فرمول:** $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
  - **تشخیص مستقل بودنِ A و B:** سه احتمال $P(A\cap B)$، $P(A)$ و $P(B)$ را حساب کن و درستیِ فرمولِ مستقل را بررسی کن...
  - **فرمول‌های احتمال در حالت مستقل**
    - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$
    - $P(A-B)=P(A)-P(A)P(B)$
    - $P(A'\cap B')=(۱-P(A))(۱-P(B))$
  - **فرمِ تست:** در بین چند پیشامدِ بی‌ربط به هم، قرار است بعضی اتفاق بیفتد و بعضی هم نه!
    - یه‌جوردیگه: و بشود و و نشود و...
  - **ایده‌ی شیک:** اجتماع را با دمورگان، اشتراک کن و اشتراک هم یعنی ضرب...

$$P(A\cup B)=۱-P(A'\cap B')=۱-P(A')P(B')$$

محاسبه‌ی $P(A\cap B)$ در تست

- **A و B مستقل‌اند** $\xrightarrow{\text{فرمول مستقل}}$ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ← جداجدا احتمال‌ها را حساب کن و در هم ضرب کن.
- حالت کلی: **A و B مستقل نیستند** $\xrightarrow{\text{فرمول ضرب احتمال}}$ $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$ ← احتمالِ اولی را حساب کن و نوبتِ دومی که شد احتمال آن را با شرطِ اتفاق افتادنِ اولی حساب کن بعد هم این دو احتمال را در هم ضرب کن...

احتمال کل

انتخاب یک شیء
- از میان n کیسه، یکی را انتخاب کنیم $\xrightarrow{\text{احتمال انتخاب هر کیسه}}$ $\boxed{\frac{1}{n}}$
- از میان a مهره سفید و b سیاه، یکی را انتخاب کنیم
  - احتمال انتخاب سفید: $\boxed{\frac{a}{a+b}}$
  - احتمال انتخاب سیاه: $\boxed{\frac{b}{a+b}}$

تشخیص تست در لابه‌لای تست‌های احتمال
- **داده‌های سؤال**
  - فضای نمونه به چند پیشامد افراز شده
  - نتیجه‌ی اتفاقاتی که در تست توضیح داده شده، نامشخص و مبهم است...
  - در توضیحِ سؤال با چند اتفاقِ پشت سر هم مواجهیم!
- **خواسته‌ی تست:** یک پیشامد ساده روی آخرین اتفاق

روش حل: نمودار درختی بکش به‌ترتیبِ اتفاق‌ها و حالت‌بندی کن، روی هر فلش حالتِ آن را بنویس و مقابلش احتمالِ آن را...

محاسبه‌ی عددِ احتمال: حالت‌های نامطلوب را در شاخه‌های آخر بگذار کنار و عددهای در یک سطر و کنار هم را در هم ضرب کن. در نهایت عددهای شاخه‌های مجزا را با هم جمع بزن ...!

$$\begin{cases} \xrightarrow{A_1} a \xrightarrow{\text{مطلوب}} c \\ \xrightarrow{A_2} b \xrightarrow{\text{مطلوب}} d \end{cases} \xrightarrow{\text{احتمال کل}} ac+bd$$

مفهومِ فلش‌ها: هر پیشامدی روی فلش‌ها برای جلوییِ خودش، فرض محسوب می‌شود:

$$\begin{cases} \xrightarrow{A_1} P_1 \xrightarrow{B} P_2 \\ \xrightarrow{A_2} P_3 \xrightarrow{B} P_4 \end{cases}$$

A_1 فرض (یاشرط) است برای B ...

ساختن ظرف جدید:

حضور همزمانِ $P(A|B)$ و $P(B|A)$ در تست $\xrightarrow{\text{فرمول}}$ $\boxed{P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)}$

فصل در یک نگاه

مفاهیم اولیه

- **علم آمار:** مجموعه روش‌هایی است شامل جمع‌آوری اعداد و اطلاعات، مرتب کردن، خلاصه‌سازی و تحلیلِ آن‌ها
- **جامعه:** تمامِ افرادی که در مورد یک ویژگیِ آن‌ها تحقیق می‌کنیم. حجم جامعه ← تعداد اعضای جامعه
- **نمونه:** زیرمجموعه‌ی انتخابی از جامعه.
- **متغیر:** یک ویژگی که قرار است در مورد آن تحقیق کنیم.

دسته‌بندی متغیرها

- **کمی:** این‌ها را می‌توان شمرد یا اندازه‌گیری کرد. (قابل بیان با عدد)
  - **گسسته:** قابل شمارش‌اند مثال ← تعداد روزهای بارانی
  - **پیوسته:** قابل اندازه‌گیری‌اند مثال ← بین هر دو مقدارشان مقدار دیگری می‌توان در نظر گرفت؛ دما
- **کیفی:** قابل شمردن و اندازه‌گیری نیستند. درباره‌ی نوعِ آن‌ها می‌توان توضیح داد... (غیرقابل بیان با عدد)
  - **اسمی:** فقط وضعیت و نوع دارند مثال ← گروه خونی
  - **ترتیبی:** نوعی ترتیبِ طبیعی در خود دارند مثال ← مراحل تحصیلی

فراوانی

- **مطلق:** مفهوم: به تعداد اشیایی که از یک داده داریم، می‌گوییم به جوری دیگه ← یک داده چند بار تکرار می‌شود؟
  - n = تعداد کل داده‌ها = جمع تمام فراوانی‌ها
- **نسبی:** $\frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}}$ به جوری دیگه ← $\frac{f}{n}$ = فراوانی نسبی نکته ← مقدارش بین صفر و یک است.

شاخص‌های آماری

- **مرکزی**
  - **میانگین**
    - **نماد:** $\bar{x}$
    - **روش پیدا کردن:** تمامی داده‌ها را جمع کن و بعد بر تعدادشان تقسیم کن.
    - **به زبان ریاضی:** $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$
    - **اگر میانگین را داده بودند** میانگین را در تعدادِ کل داده‌ها ضرب کن، این‌جوری جمع داده‌ها درمیاد...
  - **میانه**
    - **نماد:** Q_2
    - **روش پیدا کردن:** داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کن
      - تعداد داده‌ها فرد است ← میانه = داده‌ی وسطی
      - تعداد داده‌ها زوج است ← میانه = میانگین دو تا داده‌ی وسطی
    - پیدا کردن شماره‌ی داده‌ی وسطی
      - تعداد داده‌ها فرد است ← $\frac{n+1}{2}$ = شماره‌ی وسطی
      - تعداد داده‌ها زوج است ← $\frac{n}{2}$ و بعدی آن، شماره‌های داده‌های وسطی
- **پراکندگی**
  - **دامنه‌تغییرات**
    - **نماد:** R
    - **مفهوم:** کوچک‌ترین داده را از بزرگ‌ترین داده، کم کن: $R = \max - \min$
  - **واریانس**
    - **نماد:** σ^2
    - **روش پیدا کردن در حالت کلی**
      - **ریاضی:** $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$
      - **فارسی:** اول میانگین را پیدا کن، بعد هر داده را منهای میانگین کرده و مجذور کن، آخر سر جمعِ همه‌ی این‌ها را به تعداد کل داده‌ها تقسیم کن.
    - **فرمول‌های دیگر**
      - $\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \times d^2$: وقتی داده‌ها، دنباله‌ی حسابی با قدرنسبتِ d باشند.
      - $\sigma^2 = \frac{M}{n} - \bar{x}^2$: وقتی مجموع مجذورات داده‌ها داده شده، یعنی M.
    - **مفهوم:** هر قدر σ^2 بیشتر باشد، یعنی پراکندگیِ داده‌ها بیشتر است.

انحراف معیار: این، جذر واریانس است: σ، یعنی واریانس حساب کن بعد هم جذرش رو بگو...

ضریب تغییرات: $cv = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ $\xrightarrow{\text{کاربرد}}$ cvِ بیشتر بین دو نفر، یعنی دقت کمتر.

چارک

Q_2 = چارک دوم: این همان میانه است.

Q_1 = چارک اول: وقتی داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب شدند و میانه حساب شد، بعدش از داده‌هایِ کمتر از میانه، دوباره میانه بگیر! این می‌شود Q_1.

Q_3 = چارک سوم: وقتی داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب شدند و میانه حساب شد، بعدش از داده‌هایِ بیشتر از میانه، دوباره میانه بگیر! این می‌شود Q_3.

دستکاری برایِ داده‌های آماری

(اگر داده‌ها را از x تبدیل کنیم به ax+b)

- میانگین: از $\bar{x}$ می‌شود: $a\bar{x}+b$
- میانه: از Q_2 می‌شود: aQ_2+b
- واریانس: از σ^2 می‌شود: $a^2\sigma^2$
- انحراف معیار: از σ می‌شود: $|a|\sigma$
- دامنه تغییرات: از R می‌شود: $|a|R$

$x \to ax+b$

- $\bar{x} \to a\bar{x}+b$
- $Q_2 \to aQ_2+b$
- $\sigma^2 \to a^2\sigma^2$
- $\sigma \to |a|\sigma$
- $R \to |a|R$

دستکاری در ضریب تغییرات

ضرب عددِ
- مثبت: cv را تغییر نمی‌دهد.
- منفی: cv را قرینه می‌کند.

جمع کردن تمامی داده‌ها با
- عددِ مثبت ← cv را کم می‌کند.
- عددِ منفی ← cv را زیاد می‌کند.

اگر تمام داده‌ها، مساوی باشند

(همگی k باشند)

- k= چارک سوم = چارک اول = میانه = میانگین
- $\sigma^2 = \sigma = cv = R = 0$، عکس این جمله خیلی مهمه: **صفر شدنِ واریانس، انحراف معیار یا ضریب تغییرات، یعنی همه‌ی داده‌ها مساوی‌اند.**