پاسخ تمرینات
کتاب
حسابان (۱)

آمادگی امتحان نهایی

یازدهم ریاضی

پاسخ : فعالیت‌ها ، کار در کلاس‌ها ، تمرین‌های پایان درس

فعالیت ص ۲

۱ ۵۵

۲ تعداد ردیف‌ها ۱۰ و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف ۱۱ پس تعداد کل دگمه‌ها برابر $۱۱۰ = ۱۰ \times ۱۱$

$$\text{تعداد دگمه‌های آبی} = \frac{۱۱۰}{۲} = ۵۵$$

۳ جملات S را یکبار دیگر از آخر به اوّل می‌نویسیم و جفت، جفت آنها را با هم جمع می‌کنیم تعداد n جفت تشکیل می‌شود که مجموع هر جفت $n+۱$ است پس $۲S = n(n+۱)$ و از آنجا با تقسیم طرفین بر ۲ به $S = \frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌رسیم.

فعالیت ص ۳

۱

$$S_n = a + (a+d) + (a+۲d) + \dots + \left(a + (n-۲)\,d\right) + \left(a + (n-۱)\,d\right)$$

$$S_n = \left(a + (n-۱)\,d\right) + \left(a + (n-۲)\,d\right) + \dots + (a+d) + a$$

$$۲S_n = \left(۲a + (n-۱)\,d\right) + \left(۲a + (n-۱)\,d\right) + \dots + \left(۲a + (n-۱)\,d\right) + \left(۲a + (n-۱)\,d\right)$$

$$۲S_n = n\left[۲a + (n-۱)d\right]$$

$$S_n = \frac{n}{۲}\left(۲a + (n-۱)d\right)$$

کار در کلاس ص ۴

۱ $S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]=\frac{n}{۲}\left[a_۱+\underbrace{a_۱+(n-۱)d}_{a_n}\right]=\frac{n}{۲}[a_۱+a_n]$

۲ اولین مضرب دورقمی ۴ برابر ۱۲ و آخرین آن ۹۶ است. ابتدا تعداد آنها را به‌دست آورید.

$a_n=a_۱+(n-۱)\ d$

$۹۶=۱۲+(n-۱)\times ۴\Rightarrow n=۲۲$

$S_n=\frac{۲۲}{۲}(۱۲+۹۶)=۱۱۸۰$

فعالیت ص ۴

۱ قدر نسبت ۱ و مجموع n جمله آن a_n

۲ الف) $a_n=aq^{n-۱}$

ب) $S_n-S_nq=a-aq^n$

$S_n(۱-q)=a(۱-q^n)\Rightarrow S_n=a\frac{۱-q^n}{۱-q}$

کار در کلاس ص ۵

$$S_{۱۰}=\frac{۱}{۸}\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۸}\times\frac{۱-\frac{۱}{۱۰۲۴}}{۱}=\frac{۱۰۲۳}{۸۱۹۲}$$

کار در کلاس ص ۶

الف) $S=۱\times\frac{۱-۲^{۶۴}}{۱-۲}=۲^{۶۴}-۱$ گرم

$۲^{۶۴}-۱>۲^{۶۳}=(۲^۷)^۹>۱۲۸^۹>۱۰۰^۹=۱۰^{۱۸}$

هر تن $۱۰^۶$ گرم است. $۱۰^{۱۸}$ گرم برابر $۱۰^{۱۲}$ تن گندم خواهد بود پس تعداد گندم‌ها از ۱۰۰۰ میلیارد تن بیشتر است.

تمرین ص ۶

۱ $۵+۸+۱۱+\ldots+(۵+(n-۱)۳)>۴۹۳$

$$\frac{n}{۲}(۱۰+(n-۱)\times۳)>۴۹۳$$

$$n(۷+۳n)>۹۸۶$$

عبارت $۳n^۲+۷n-۹۸۶=۰$ به‌ازای $n=۱۷$ جواب دارد پس حداقل ۱۸ جمله باید جمع شود تا به منظورمان برسیم.

۲ الف) $۱+۳+۵+\ldots+(۲n-۱)=n^۲$

ب) $S=\frac{n}{۲}(۲+(n-۱)\times۲)=n^۲$

۳ اولین عدد طبیعی سه‌رقمی که مضرب ۶ باشد برابر ۱۰۲ و آخرین عدد سه‌رقمی مضرب ۶ برابر ۹۹۶ است.

$$۹۹۶=۱۰۲+(n-۱)۶\Rightarrow n=۱۵۰$$

$$S=\frac{۱۵۰}{۲}(۱۰۲+۹۹۶)=۸۲۳۵۰$$

۴

$$\begin{cases}a_۱+a_۳+\ldots+a_{۱۹}=۱۳۵\\ \\ a_۲+a_۴+\ldots+a_{۲۰}=۱۵۰\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع}}S_{۲۰}=۲۸۵$$

$$\Rightarrow ۲۸۵=\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)\Rightarrow ۲۸/۵=۲a_۱+۱۹d$$

$$(a_۲-a_۱)+(a_۴-a_۳)+\ldots+(a_{۲۰}-a_{۱۹})=۱۵\Rightarrow ۱۰d=۱۵\Rightarrow\begin{cases}d=۱/۵\\ a_۱=۰\end{cases}$$

۵ $a_۱=۱\quad,\quad a_۲=۲\quad,\quad a_۳=۴$

جملات دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ خواهند بود.

$$S_n=۲۵۵$$

$$۱\times\frac{۱-۲^n}{۱-۲}=۲۵۵\Rightarrow ۲^n=۲۵۶\Rightarrow ۲^n=۲^۸\Rightarrow n=۸$$

۶

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, ...$$

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+...+\frac{۱}{۲^n} \geq ۰/۹۹$$

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}} \geq \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲^n} \geq \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲^n} \leq \frac{۱}{۱۰۰}$$

$\Rightarrow ۲^n \geq ۱۰۰$ با آزمایش خط $n = ۷$

۷ الف)

$$S = ۱+a+a^۲+...+a^n = ۱\times\frac{۱-a^n}{۱-a} = \frac{a^n-۱}{a-۱}$$

ب)

$$(a-۱)(۱+a+a^۲+...+a^n) = a^n - ۱$$

کار در کلاس ص ۷

۱

$$۳x^۲-۵x+۲=۰ \Rightarrow x=\frac{۵\pm\sqrt{۱}}{۶}= \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

۲

$$x=-۱ \Rightarrow ۴+m-۷=۰ \Rightarrow m=۳$$

$$۴x^۲-۳x-۷=۰ \Rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۹+۱۱۲}}{۸}=\frac{۳\pm۱۱}{۸} \begin{cases} x=\frac{۷}{۴} \\ x=-۱ \end{cases}$$

فعالیت ص ۸

۱

$ax^۲+bx+c=۰$	مقدار ریشه‌ها		S	p	a	b	c	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$۳x^۲-۵x+۲=۰$	۱	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۳	-۵	۲	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$
$۴x^۲-۳x-۷=۰$	-۱	$\frac{۷}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۷}{۴}$	۴	-۳	-۷	$\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۷}{۴}$
$x^۲-۲x+۱=۰$	۱	۱	۲	۱	۱	-۲	۱	۲	۱
$۵x^۲+۶x-۸=۰$	-۲	$\frac{۴}{۵}$	$-\frac{۶}{۵}$	$-\frac{۸}{۵}$	۵	۶	-۸	$-\frac{۶}{۵}$	$-\frac{۸}{۵}$

۲ الف) در ستون جمع ریشه‌ها و ستون $-\frac{b}{a}$ نظیر به نظیر جملات برابر است پس : $S=-\frac{b}{a}$

ب) در ستون ضرب ریشه‌ها و ستون $\frac{c}{a}$ نظیر به نظیر جملات برابر است پس : $p=\frac{c}{a}$

۳

$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{۲a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_۱x_۲=(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a})(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a})=\frac{(-b)^۲-\Delta}{۴a}=\frac{b^۲-(b^۲-۴ac)}{۴a}=\frac{c}{a}$$

فعالیت ص ۹

۱ الف) با هریک از ریشه‌ها معادله‌ای ساخته و طرفین درهم ضرب شده و به یک معادله درجه دوم رسیده‌ایم.

ب)

$$\begin{matrix} x=\alpha \\ x=\beta \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x-\alpha=\circ \\ x-\beta=\circ \end{matrix} \Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=\circ \Rightarrow x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=\circ$$

کار در کلاس ص ۹

$$\begin{matrix} S=۴ \\ P=(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})=-۱ \end{matrix} \Rightarrow x^۲-۴x-۱=\circ$$

فعالیت ص ۱۰

۱

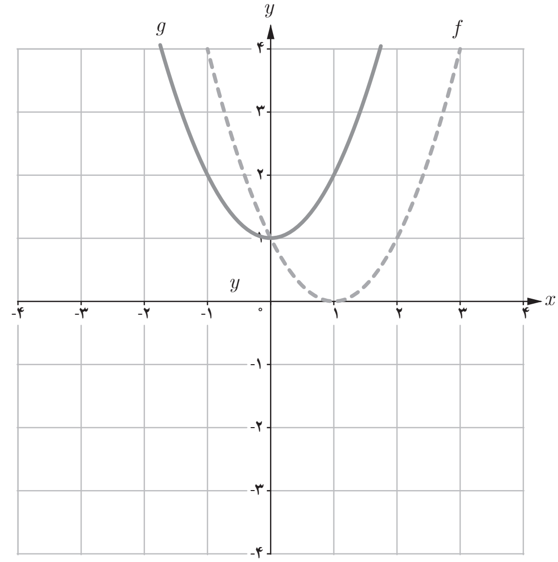
$$f(x)=\circ \Rightarrow x^۲+۴x+۳=\circ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=-۳ \end{cases}$$

۲ طول‌های نقاط تلاقی جواب‌های معادله $f(x)=\circ$ هستند.

کار در کلاس ص ۱۰

۱

$f(x) = (x-۱)^۲$



۲ منحنی f در نقطه $x = ۱$ محور طول‌ها را قطع کرده است پس معادله $f(x) = ۰$ یک جواب دارد منحنی g محور xها را قطع نکرده است پس معادله $g(x) = ۰$ جواب ندارد.

کار در کلاس ص۱۲

۱ الف) (۹,۸) ب) (۴) پ) (۲,۱) ت) (۷,۵)

ث) (۷) ج) (۳) چ) (۳,۸,۹) ح) (۱,۲,۴,۶)

شماره شکل / ویژگی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f	۲	۲	۱	۲	۰	۲	۰	۲	۲
علامت a	+	−	+	+	+	−	−	−	+
علامت b	+	−	−	+	−	−	+	+	−
علامت c	−	+	+	+	+	بی‌علامت $c = ۰$	−	−	+

کار در کلاس ص ۱۳

$$x=-۲ \Rightarrow -۸+۴k+۲-۲=۰ \Rightarrow k=۲$$

$$f(x)=x^۳+۲x^۲-x-۲$$

$$f(x)=(x+۲)\,(x^۲-۱)$$

$$f(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ & \Rightarrow x=-۲ \\ x^۲-۱=۰ & \Rightarrow x=\pm۱ \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} x^۳+۲x^۲-x-۲ & x+۲ \\ \cline{2-2} x^۳+۲x^۲ & x^۲-۱ \\ \cline{1-1} ۰-x-۲ & \\ -x-۲ & \\ \cline{1-1} ۰ & \end{array}$$

کار در کلاس ص ۱۳

با فرض $x^۲=u$ داریم :

$$u^۲-۱۰u+۱۶=۰ \Rightarrow (u-۲)(u-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} u=۲ \\ u=۸ \end{cases}$$

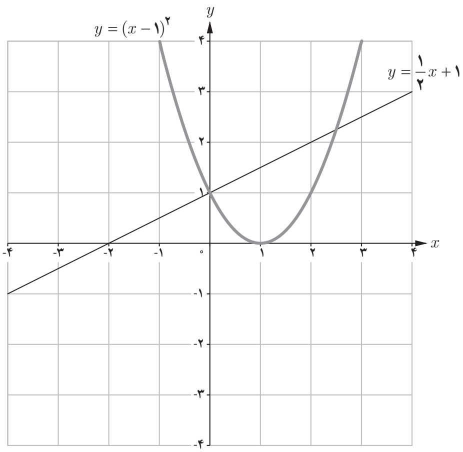
$$u=۲ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

$$u=۸ \Rightarrow x^۲=۸ \Rightarrow x=\pm ۲\sqrt{۲}$$

فعالیت ص ۱۴

۱ $$x^۲-۲x+۱=\frac{۱}{۲}x+۱ \;\Rightarrow\; x^۲-\frac{۵}{۲}x=۰ \;\Rightarrow\; x(x-\frac{۵}{۲})=۰ \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=۰ \\ x=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

۲



۳ طول‌های نقاط تلاقی همان جواب‌های معادله مذکور هستند.

تمرین ص ۱۵

۱ الف) $S=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳}=۱\quad,\quad P=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹}\;\Rightarrow\; x^{۲}-x+\frac{۲}{۹}=۰$

ب) فرض کنیم یکی از ریشه‌ها a باشد پس ریشه دیگر آن a ۲ است و داریم :

$$\begin{matrix} S=a+۲a=۳a & & x^{۲}-Sx+P=۰ \\ & \Rightarrow & \\ P=a\times ۲a=۲a^{۲} & & x^{۲}-۳ax+۲a^{۲}=۰ \end{matrix}$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود معادله بی‌شمار جواب دارد کافی است به‌جای a مقادیر مختلف قرار دهیم.

۲ الف) صفر تابع ۲ = x است.

$$P(x)=a(x-x_{۱})\,(x-x_{۲})=a\,(x-۲)^{۲}$$

$$P(۰)=-۲\Rightarrow -۲=a(-۲)^{۲}\Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow P(x)=-\frac{۱}{۲}(x-۲)^{۲}$$

ب) صفرها ۱ = x و ۳− = x هستند.

$$P(x)=a(x-۱)(x+۳)$$

$$P(-۱)=-۲\Rightarrow -۲=a(-۲)(۲)\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$P(x)=\frac{۱}{۲}(x-۱)(x+۳)=\frac{۱}{۲}x^{۲}+x-\frac{۳}{۲}$$

الف) وقتی توپ به زمین می‌خورد که $h(x)=۰$ در این‌صورت معادله دو جواب $x_{۱}=۰$ و $x_{۲}=۳۶$ را دارد که اولی مربوط به نقطه اولیه و دیگری مربوط به نقطه پایانی است بنابراین توپ ۲۶ متر فاصله افقی را طی می‌کند.

ب) باید بیشترین مقدار تابع h را بیابیم که در نقطه طول رأس سهمی رخ می‌دهد.

$$h(x)=-۰/۰۳x^{۲}+۱/۰۸x$$

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱/۰۸}{-۰/۰۶}=۱۸$$

بیشترین ارتفاع توپ برحسب متر $h(۱۸)=-۹/۷۲+۱۹/۴۴=۹/۷۲$

۴

الف) $f(x)=x^3-4x=0 \Rightarrow x(x^2-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2 \end{cases}$

ب) $g(x)=2x^3+x^2+3x=0 \Rightarrow x(\underbrace{2x^2+x+3}_{\Delta\ \text{منفی}})=0 \Rightarrow x=0$

پ) $h(x)=x^4+3x^2+5\ ,\ \Delta=9-20<0 \Rightarrow$ جواب ندارد $\Rightarrow$ تابع هیچ صفری ندارد

۵ الف)

$$x^4-3x^2-4=0$$

$$x^2=u \Rightarrow u^2-3u-4=0 \Rightarrow \begin{cases} u=-1 \Rightarrow x^2=-1 & \text{جواب ندارد} \\ u=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

ب)

$$\frac{x^2}{3}-2=u \Rightarrow u^2-7u+6=0 \Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-2=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \\ u=6 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-2=6 \Rightarrow x^2=24 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

پ)

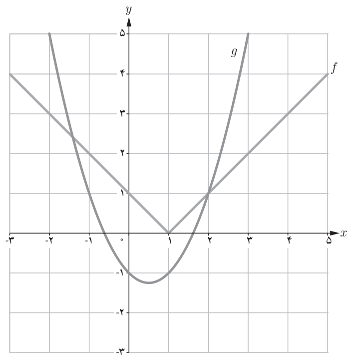
$$4-x^2=u \Rightarrow u^2-4u-12=0 \Rightarrow (u+2)(u-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} u=-2 \\ u=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2=-2 \Rightarrow 4-x^2=-2 \Rightarrow x^2=6 \Rightarrow x=\pm\sqrt{6} \\ u^2=6 \Rightarrow 4-x^2=6 \Rightarrow x^2=-2 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۶

$$f(x)=|x-1| \quad , \quad g(x)=x^2-x-1$$

تعداد جواب‌ها دوتاست.
یکی $x=2$ و دیگری عددی بین ۱- و ۲-
(جواب دقیق $-\sqrt{2}$ خواهد بود که با شکل نمی‌توان به آن رسید.)



۷ الف) تابع صفر ندارد و $a=1$ در نتیجه $f(x)=x^2+bx+c$ و چون نقطه $(-3,5)$ نقطه مینیمم تابع است پس $\frac{-b}{2a}=-3$ و از آنجا $b=6$ و چون $f(-3)=5$ پس :

$$9-3b+c=5 \Rightarrow 9-18+c=5 \Rightarrow c=14 \quad f(x)=x^2+6x+14$$

ب) تابع دو صفر دارد و چون دهانه سهمی روبه پایین است پس $a=-1$ و در نتیجه $f(x)=-x^2+bx+c$

نقطه $(-2,2)$ نقطه ماکزیمم تابع است پس $x=\frac{-b}{2a}$ و در نتیجه $\frac{-b}{-2}=-2$ و $b=-4$ از طرفی

$$f(-2)=2 \Rightarrow -4-2b+c=2 \Rightarrow c=-2 \Rightarrow f(x)=x^2-4x-2$$

پ) تابع دو صفر دارد و $a=1$ در نتیجه $f(x)=x^2+bx+c$ و $x=3$ طول نقطه مینیمم است

$$3=\frac{-b}{2a} \Rightarrow b=-6 \Rightarrow f(3)=-3 \Rightarrow -3=9-18+c \Rightarrow c=6 \Rightarrow f(x)=x^2-6x+6$$

ت) تابع هیچ صفری ندارد و $a=-1$ لذا $f(x)=-x^2+bx+c$ و $x=-2$ نقطه ماکزیمم پس

$$-2=\frac{-b}{2a} \Rightarrow b=-4 \Rightarrow f(x)=-x^2-4x+c, f(-2)=-1 \Rightarrow -4+8+c=-1 \Rightarrow c=-5$$

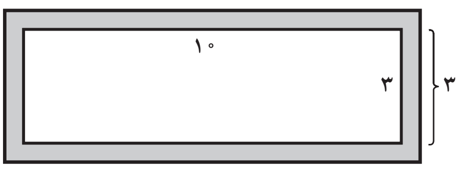
$$f(x)=-x^2-4x-5$$

۸ پهنای آبراه را x درنظر می‌گیریم.

مساحت آبراه $=2\left(x(10+2x)+2(3\times x)\right)$

$$14=4x^2+26x$$

$$2x^2+13x-7=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-7 & \text{غ ق ق} \\ x=\frac{1}{2} & \text{متر} \end{cases}$$



۹ اگر عرض کف‌پوش را x درنظر بگیریم طول کف‌پوش $4x+1$ می‌باشد و مساحت هر کف‌پوش $4x^2+x$ خواهد بود

$$2000\,(4x^2+x)=52/8\times 10^4 \Rightarrow 4x^2+x=264$$

$$4x^2+x-264=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm 65}{8} \begin{cases} x=8 & \text{سانتی‌متر} \\ x=\frac{-33}{4} & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

طول کف‌پوش $4\times 8+1=33$ سانتی‌متر خواهد بود.

کار در کلاس ص ۱۸

$$\frac{۸+۵}{۲۰۰+۵-y}=\frac{۷}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{۱۳}{۲۰۵-y}=\frac{۷}{۱۰۰}\Rightarrow ۱۳۰۰=۱۴۳۵-۷y$$

$$\Rightarrow y=۱۹/۲۸$$

تقریباً ۱۹/۲۸ کیلوگرم از آب محلول باید تبخیر شود.

کار در کلاس ص ۱۹

۱

$$۱+۲(x-۲)=۳(x-۲)^۲\Rightarrow ۳x^۲-۱۴x+۱۵=۰$$

$$x=\frac{۱۴\pm۱۶}{۶}\begin{cases}x=۵ & \text{مورد قبول}\\ x=\frac{-۱}{۳} & \text{مورد قبول}\end{cases}$$

۲

$$۲(w+L)=۱۴۴$$

$$w=۷۲-L$$

$$\frac{L}{۷۲-L}=\frac{۷۲}{L}\Rightarrow L^۲+۷۲L-۵۱۴۸=۰$$

$$\Delta=(۷۲)^۲+۴(۵۱۴۸)=۵\times ۷۲^۲$$

$$L=\frac{-۷۲\pm۷۲\sqrt{۵}}{۲}$$

$$L=۳۶(-۱\pm\sqrt{۵})\qquad L\simeq ۴۴/۵$$

طول تقریباً ۴۴/۵ و عرض ۲۷/۵ می‌باشد.

کار در کلاس ص ۲۱

۱ فرض کنیم عدد صحیح موردنظر x باشد داریم:

$$x+\sqrt{x}=۶\Rightarrow\sqrt{x}=۶-x\xrightarrow{\text{توان ۲}}x=۳۶+x^۲-۱۲x$$

$$x^۲-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow x=\frac{۱۳\pm۵}{۲}\begin{cases}x=۹ & \text{قبول}\\ x=۴ & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

۲

$$\sqrt{x^۲+۴}=-۲\sqrt{x}\xrightarrow{\text{توان ۲}}x^۲+۴=۴x\Rightarrow x^۲-۴x+۴=۰$$

$$\Rightarrow x=۲$$

با آزمایش جواب، $x=۲$ غیرقابل قبول است.

بدون حل معادله چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است پس تک‌تک عبارات صفر هستند و :

$$\begin{cases} x^{۲}-۴=۰ \\ x=۰ \end{cases} \Rightarrow x=\pm ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک}}$$ جواب ندارد.

تمرین ص۲۲

۱

$$۶(x+۱)=۲x(x+۱)^{۲}+(x-۳)x \Rightarrow ۳x^{۲}-۷x-۶=۰ \Rightarrow x=\frac{۷\pm ۱۱}{۶} \begin{cases} x=۳ & \text{ق ق} \\ x=\frac{-۲}{۳} & \text{ق ق} \end{cases}$$

۲

$$۲p^{۲}+۴(۲-p)=-۳p(۲-p) \Rightarrow p^{۲}-۲p-۸=۰ \Rightarrow (p-۴)(p+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} p=۴ & \text{ق ق} \\ p=-۲ & \text{ق ق} \end{cases}$$

۳

$$۳y+۵+y(y+۴)=(y+۱)(y+۵)$$
$$۳y+۵+y^{۲}+۴y=y^{۲}+۶y+۵$$
$$\Rightarrow y=۰$$ غیرقابل قبول

۴

$$۴x=۳x+۴ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow ۲\sqrt{۴} \stackrel{?}{=} \sqrt{۱۲+۴} \Rightarrow ۴=۴ \checkmark$$ آزمایش — $x=۴$ قابل قبول است.

۵

$$\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x}) \xrightarrow{\text{با فرض } ۱-\sqrt{x}\neq ۰} \frac{۱}{۱+\sqrt{x}}=۱+\sqrt{x} \Rightarrow (۱+\sqrt{x})^{۲}=۰$$

$۱-\sqrt{x}=۰ \Rightarrow x=۱$ قابل قبول است — $۱+\sqrt{x}=۰$ جواب ندارد

۶ با ضرب طرفین معادله در $(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)$ داریم :

$$۵(\sqrt{x}-۲)=۲(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)-(\sqrt{x}+۲)$$

$$۵\sqrt{x}-۱۰=۲(x-۴)-\sqrt{x}-۲$$

$$۶\sqrt{x}=۲x \Rightarrow ۳۶x=۴x^{۲} \Rightarrow ۴x(x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{ق ق} \\ x=۹ & \text{ق ق} \end{cases}$$

۷

$$\sqrt{x+۳}=۴-\sqrt{۳x+۱}$$

$$x+۳=۱۶+۳x+۱-۸\sqrt{۳x+۱}$$

$$۲x+۱۴=۸\sqrt{۳x}+۱$$

$$x+۷=۴\sqrt{۳x}+۱$$

$$x \quad +۱۴x+۴۹=۱۶(۳x+۱)$$

$$x^{۲}-۳۴x+۳۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{قابل قبول} \\ x=۳۳ & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۸ x : قیمت یک اسباب‌بازی قبل از تخفیف

$\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}=$ تعداد اسباب‌بازی قبل از تخفیف

$\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}=$ تعداد اسباب‌بازی بعد از تخفیف

$$\frac{۱۲۰۰۰۰}{x}+۴=\frac{۱۲۰۰۰۰}{x-۱۰۰۰}$$

$$-x^{۲}+۱۰۰۰x+۳۰\times۱۰^{۶}=۰$$

$$\Delta=۱۲۱\times۱۰^{۶}$$

$$\sqrt{\Delta}=۱۱۰۰۰$$

$$\begin{cases} x=۶۰۰۰ \\ x=-۵۰۰۰ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۹ x : سرعت در مسیر خلاف جریان آب

$$\frac{۱۴۴}{x+۸}+\frac{۱۴۴}{x}=۱۵$$

$$۱۵x^{۲}-۱۶۸x-۱۱۵۲=۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=۳۱۲ \quad , \quad x=۱۶$$

سرعت در جریان آب ۲۴ = ۸ + ۱۶ کیلومتر بر ساعت

۱۰ اگر کل کار را V درنظر بگیریم و ماشین A کار را در x ساعت انجام دهد ماشین B کار را در $x+۱۵$ ساعت انجام می‌دهد.

$$\frac{V}{x}+\frac{V}{x+۱۵}=\frac{V}{۱۸}\Rightarrow\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$۱۸(x+۱۵)+۱۸x=x(x+۱۵)$$

$$۱۸x+۲۷۰+۱۸x=x^{۲}+۱۵x$$

$$x^{۲}-۲۱x-۲۷۰=۰$$

$$\Delta=۱۵۲۱\Rightarrow\sqrt{\Delta}=۳۹$$

$$x=\frac{۲۱\pm۳۹}{۲}\quad\begin{cases}x=۳۰\\ x=-۹ \text{ غیر قابل قبول}\end{cases}$$

ماشین A در ۳۰ ساعت و ماشین B در ۴۵ ساعت کار را به‌تنهایی انجام می‌دهند.

کار در کلاس ص ۲۳

۱

الف) $|-۵-(-۳)|=|-۵+۳|=|-۲|=۲$

ب) $\left|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}\right|=\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$

پ) $|۰|=۰$

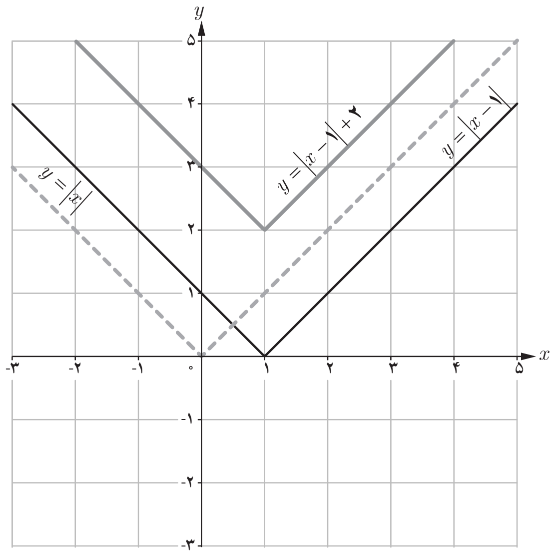
۲

الف) $\sqrt{a^{۴}+۲a^{۲}+۱}=\sqrt{(a^{۲}+۱)^{۲}}=\left|a^{۲}+۱\right|=a^{۲}+۱$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(\sqrt{۳}-۲)^{۲}}=\left|\sqrt{۳}-۲\right|=۲-\sqrt{۳}$

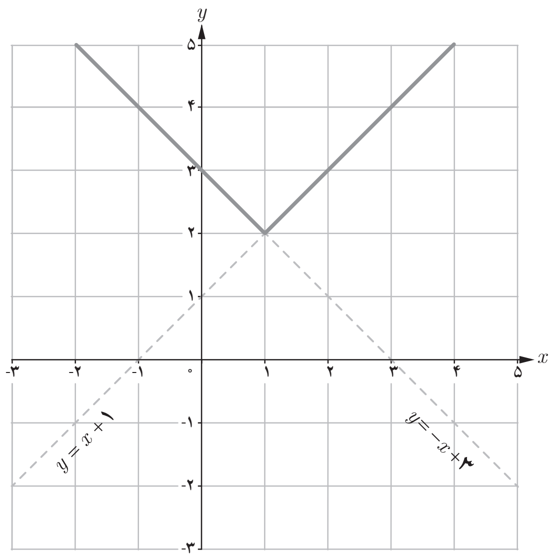
فعالیت ص ۲۴

روش اول



روش دوم

$$y=|x-1|+2=\begin{cases} x+1 & , \quad x\geq 1 \\ -x+3 & , \quad x<1 \end{cases}$$



فعالیت ص ۲۵

۱

$$|ab| = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = |a| \times |b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \times \frac{1}{b}\right| = |a| \times \left|\frac{1}{b}\right| = |a| \times \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

فعالیت ص ۲۵

۱ (الف) $\leftrightarrow$ (۲)

(ب) $\leftrightarrow$ (۳)

(پ) $\leftrightarrow$ (۱)

(ت) $\leftrightarrow$ (۴)

۲ اگر $a \ge 0$ آن‌گاه $-a \le a \le a$ بدیهی است اگر $a < 0$ آن‌گاه $a \le a \le -a$

$(a < 0 \Rightarrow -a > 0)$

۳

$$\begin{cases} -|a| \le a \le |a| \\ -|b| \le b \le |b| \end{cases} \overset{\text{جمع}}{\Rightarrow} -|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b|$$

۴

$$-|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b| \Rightarrow -(|a| + |b|) \le a + b \le (|a| + |b|)$$
$$\Rightarrow |a + b| \le |a| + |b|$$

تذکر : به‌صورت مستقیم نیز می‌توانیم حکم را نتیجه بگیریم

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \ge x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$$
$$\Rightarrow (|a| + |y|) \ge |x + y|$$

از طرفی $\big||a| + |b|\big| = |a| + |b|$ پس $|x| + |y| \ge |x + y|$

کار در کلاس ص ۲۶

۱ ***روش اول***

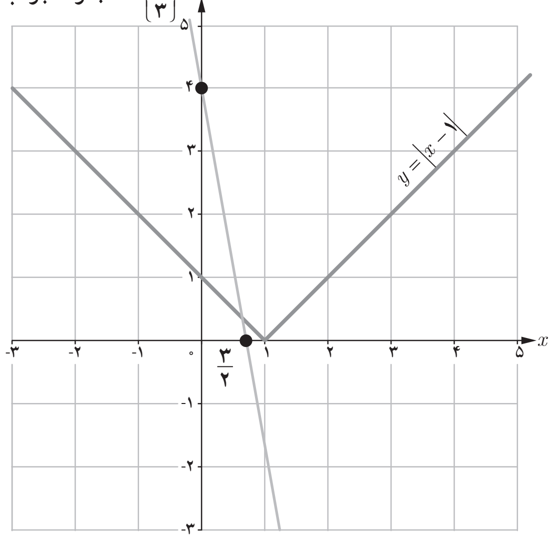
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \quad x \geq 1 \\ -x+1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

حالت اول : $x \geq 1 \Rightarrow x-1 = 4-3x \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ قابل قبول

حالت دوم : $x < 1 \Rightarrow -x+1 = 4-3x \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ غیرقابل قبول

روش دوم

مجموعه جواب $= \left\{\frac{5}{3}\right\}$



روش سوم

$$(|x-1|)^2 = (4-3x)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 16 - 24x + 9x^2$$

$$8x^2 - 22x + 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} & \text{قابل قبول} \\ x = \frac{-5}{4} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

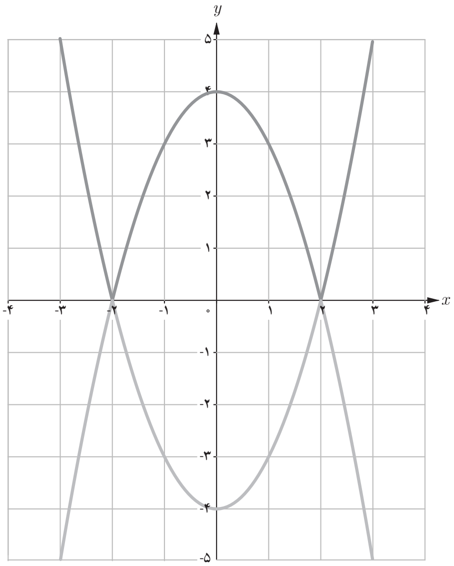
(در معادله اولیه صدق نمی‌کند.)

فعالیت ص ۲۷

۱ $y = x^{۲} - ۴$

		-۲		۲	
$x^{۲}-۴$	+	۰	−	۰	+

۲



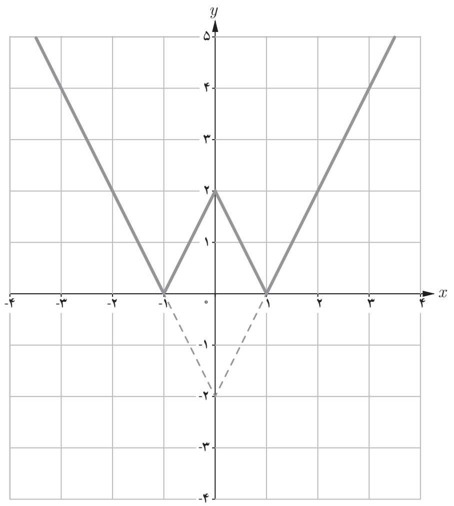
$$y = \left|x^{۲} - ۴\right| = \begin{cases} x^{۲} - ۴ & , \quad x \geq ۲ \\ -x^{۲} + ۴ & , \quad -۲ < x < ۲ \\ x^{۲} - ۴ & , \quad x < -۲ \end{cases}$$

۳

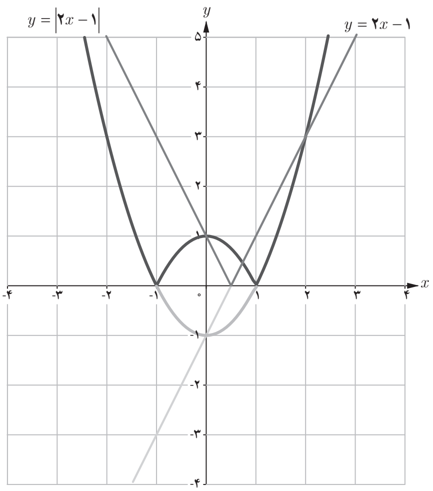
$$y = \left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x) & f(x) > ۰ \\ -f(x) & f(x) < ۰ \end{cases}$$

۴ نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم بخشی از نمودار که پایین محور xهاست را آینه‌وار به بالای محور xها منتقل می‌کنیم.

۵



کار در کلاس ص ۲۷



۱ تعداد جواب = ۴

یک جواب $x=۰$ یکی $x=۲$

یک جواب بین ۲− و ۳−

یک جواب بین ۰ و ۱

۲

$$x^{۲}-۱=-۲x+۱\Rightarrow x^{۲}+۲x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{-۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۳}$$

تمرین ص ۲۸

۱ الف)

$$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^{۲} & , \quad x\geq ۰\\ -x^{۲} & , \quad x<۰\end{cases}$$

ب)

$$g(x)=|x^{۲}-۱|=\begin{cases}x^{۲}-۱ & , \quad x\geq ۱\\ -x^{۲}+۱ & , \quad -۱<x<۱\\ x^{۲}-۱ & , \quad x\leq -۱\end{cases}$$

پ)

$$h(x)=|x-۱|+|x+۱|$$

		-۱		۱	
$x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$
$x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
	(۱)		(۲)		(۳)

$$x<-1 \Rightarrow h(x)=-(x-1)-(x+1)=-2x$$
$$-1\le x\le 1 \Rightarrow h(x)=-(x-1)+(x+1) \Rightarrow h(x)=\begin{cases}2x & , \quad x>1\\ 2 & , \quad -1\le x\le 1\\ -2x & , \quad x<-1\end{cases}$$
$$1<x \Rightarrow h(x)=x-1+x+1=2x$$

۲ فرض کنیم نقاط موردنظر روی محور طول‌ها به طول x باشند.

$$|x+1|+|x-3|=6$$

$x>3 \Rightarrow x+1+x-3=6 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$ مورد قبول

$-1\le x\le 3 \Rightarrow x+1-(x-3)=6 \Rightarrow 4=6$ غیرممکن

$x<-1 \Rightarrow -(x+1)-(x-3)=6 \Rightarrow -2x=4 \Rightarrow x=-2$ قابل قبول

دو نقطه به طول‌های ۲- و ۴ جواب‌های مسئله‌اند.

۳ الف)

$$|x-3|=7 \Rightarrow \begin{cases}x-3=7 \Rightarrow x=10\\ x-3=-7 \Rightarrow x=-4\end{cases}$$

ب)

$$2|x-6|=4 \Rightarrow |x-6|=2 \Rightarrow \begin{cases}x-6=2 \Rightarrow x=8\\ x-6=-2 \Rightarrow x=4\end{cases}$$

پ)

$$|x+3|>2 \Rightarrow \begin{cases}x+3>2 \Rightarrow x>-1\\ x+3<-2 \Rightarrow x<-5\end{cases}$$

۴

الف) $x>3 \Rightarrow \dfrac{2-x}{x-3}=1 \Rightarrow 2-x=x-3 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$ غیرقابل قبول

ب) $x<3 \Rightarrow \dfrac{2-x}{-x+3}=1 \Rightarrow 2-x=-x+3 \Rightarrow 2=3$ غیرممکن

این معادله جواب ندارد.

$$\sqrt{(x-1)^2}=2x+1 \Rightarrow |x-1|=2x+1$$

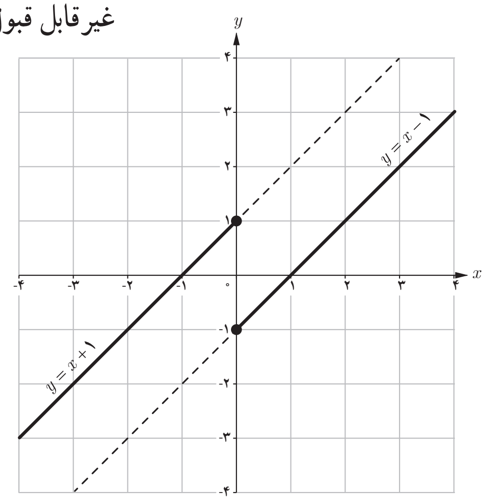
$x\ge 1 \Rightarrow x-1=2x+1 \Rightarrow x=-2$ غیرقابل قبول

$x<1 \Rightarrow -x+1=2x+1 \Rightarrow x=0$ قابل قبول

۵ الف)

$$y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x-۱ & , \quad x > ۰ \\ x+۱ & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

$$y = ۳ \Rightarrow \begin{cases} x > ۰ \Rightarrow ۳ = x-۱ \Rightarrow x = ۴ & \text{قابل قبول} \\ x < ۰ \Rightarrow x+۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲ & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

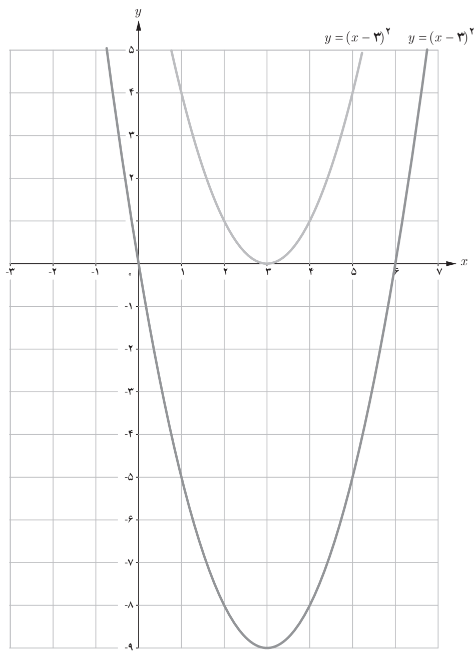


ب)

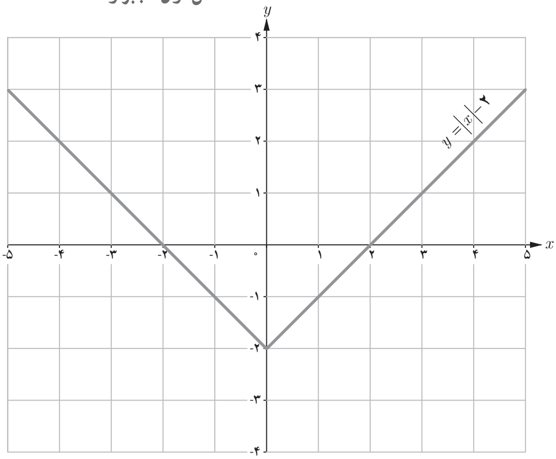
$$y = x^{۲} - ۶x = (x-۳)^{۲} - ۹$$

$$y = ۳ \Rightarrow (x-۳)^{۲} - ۹ = ۳ \Rightarrow (x-۳)^{۲} = ۱۲$$

$$x - ۳ = \pm\sqrt{۱۲} \Rightarrow x = ۳ \pm \sqrt{۱۲}$$

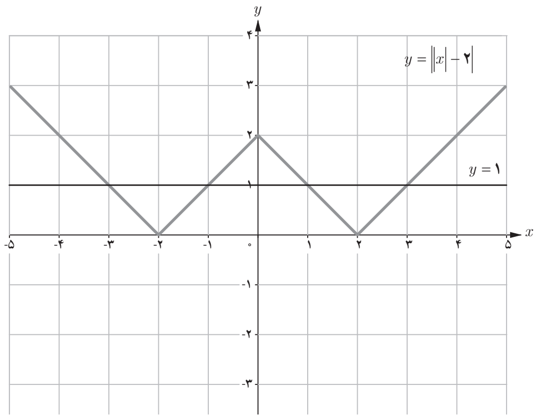


۶ روش هندسی



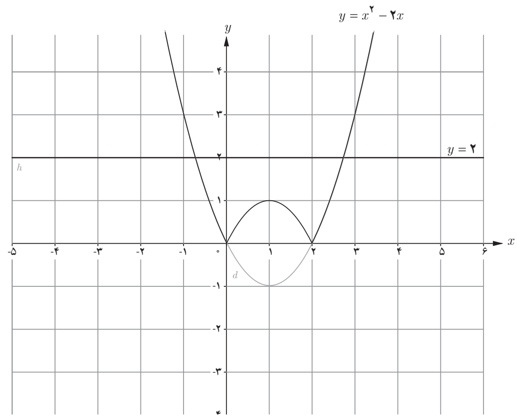
معادله دارای ۴ جواب است.

$$||x|-2|=1 \Rightarrow |x|-2=\pm 1 \qquad \begin{array}{l} |x|-2=1 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=\pm 3 \\ |x|-2=-1 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{array}$$



۷

$$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$$



خط $y=۲$ معادله نمودار $y=\left|x^۲-۲x\right|$ را در دو نقطه قطع کرده است و دو جواب دارد.

$$\left|x^۲-۲x\right|=۲\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۲x=۲\Rightarrow x^۲-۲x-۲=۰\Rightarrow x=\dfrac{۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}\Rightarrow x=۱\pm\sqrt{۳}\\ x^۲-۲x=-۲\Rightarrow x^۲-۲x+۲=۰\Rightarrow\Delta<۰\Rightarrow\text{جواب ندارد}\end{cases}$$

فعالیت ص ۲۹

۱ OA = ۴ و OB = −۳

۲ ۷ = (−۳)−۴

۳ ۷

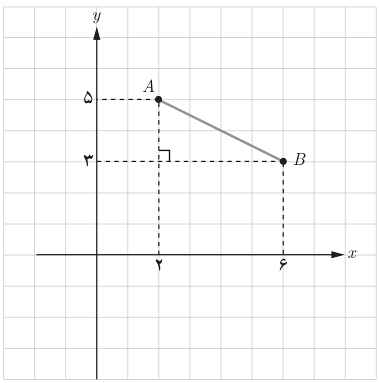
۴ فاصله بین دو نقطه روی یک محور، قدر مطلق تفاضل طول‌های آن دو نقطه است.

فعالیت ص ۳۰

۱ الف

$$AB^۲=\left|x_B-x_A\right|^۲+\left|y_B-y_A\right|^۲$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$



کار در کلاس ص ۳۰

الف)

ب)

$$AB = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = ۵$$

$$AC = \sqrt{۱۶ + ۶۴} = \sqrt{۸۰}$$

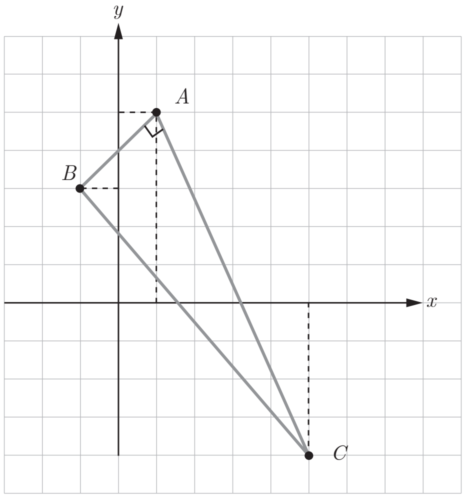
$$BC = \sqrt{۳۶ + ۴۹} = \sqrt{۸۵}$$

پ) از آنجا که $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

ت) شیب‌ها عکس قرینه هم هستند.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۲ - ۳}{-۱ - ۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$m_{AC} = \frac{-۵ - ۳}{۵ - ۱} = -۲$$



کار در کلاس ص۳۱

فرض کنیم $P(x,y)$ نقطه دلخواهی در عمودمنصف AB باشد داریم :

$$PA=PB \Rightarrow \sqrt{x^{۲}+(y+۳)^{۲}}=\sqrt{(x-۶)^{۲}+(y-۱۵)^{۲}}$$

$$x^{۲}+(y+۳)^{۲}=(x-۶)^{۲}+(y-۱۵)^{۲}$$

$$x^{۲}+y^{۲}+۶y+۹=x^{۲}+۳۶-۱۲x+y^{۲}-۳۰y+۲۲۵$$

$$۱۲x+۳۶y=۲۵۲$$

$$x+۳y=۲۱$$

از آنجا که مختصات نقطه P در معادله عمودمنصف صدق می‌کند پس نقطه P روی عمودمنصف قرار دارد.

$$-۱۲+۳(۱۱)=۲۱$$

فعالیت ص ۳۵

۱ $x_M=۲$

۲ طول نقطه M معدل طول‌های دو نقطه A و B است.

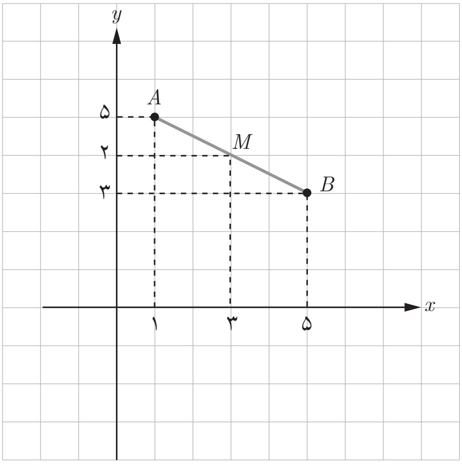
۳

$$AM=MB \Rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M \Rightarrow ۲x_M=x_A+x_B \Rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

۴ مشابه کاری که در قسمت قبل انجام شد می‌توان نوشت :

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

کار در کلاس ص ۳۲



الف)

ب)

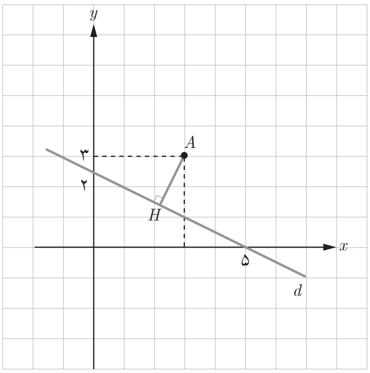
$$x_M = \frac{۱+۵}{۲} = ۳$$

$$y_M = \frac{۵+۳}{۲} = ۴$$

M (۳،۴)

فعالیت ص۳۳

۱



۲ $m_{AH} = \frac{-۱}{m_d}$ $\quad m_d = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow m_{AH} = ۲$

۳ AH معادله : $y - ۳ = ۲(x - ۴) \Rightarrow ۲x - y = ۵$

۴ $\begin{cases} ۲y + x = ۵ \\ ۲x - y = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲y + x = ۵ \\ ۴x - ۲y = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۵x = ۱۵ \Rightarrow x = ۳ \;,\; y = ۱ \Rightarrow H(۳,۱)$

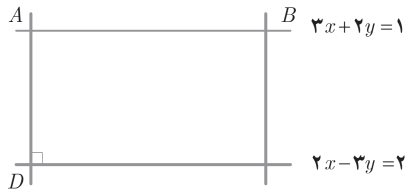
۵ $AH = \sqrt{(۴-۳)^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۵}$

کار در کلاس ص ۳۴

۱ فاصله A تا ضلع داده شده، طول ضلع مربع را به ما می‌دهد.

$$AH = a = \frac{|6-12-9|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow$$ مساحت مربع $= a^2 = 9$ واحد مربع

۲ چون دو خط موازی نیستند پس دو ضلع مجاور مستطیل‌اند و چون $A(2,5)$ روی هیچ یک از خطوط داده شده نیست پس A رأس مستطیل است که مقابل دو ضلع قرار دارد. فاصله A تا دو ضلع، طول و عرض مستطیل را به ما می‌دهد.



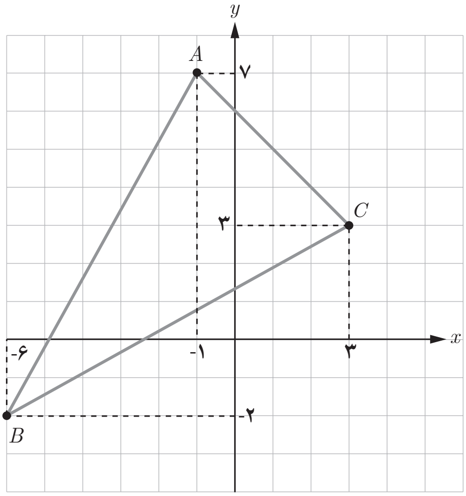
$$AB = \frac{|4-15-2|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$AB = \frac{|6+6-1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

مساحت مستطیل $= AB \times AD = \sqrt{13} \times \frac{1}{\sqrt{13}} = 1$ (واحد مربع)

تمرین ص ۳۵

۱ الف)



ب) ABC متساوی‌الساقین است $\Rightarrow \left.\begin{matrix} AB=\sqrt{۲۵+۸۱}=\sqrt{۱۲۶} \\ BC=\sqrt{۸۱+۲۵}=\sqrt{۱۲۶} \end{matrix}\right\}$

پ) $M(\frac{-۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ وسط BC

$$m_{BC}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}}=\frac{-۹}{۵}\Rightarrow \text{معادله عمودمنصف}\ y-\frac{۱}{۲}=\frac{-۹}{۵}(x+\frac{۳}{۲})$$

$$۱۰y-۵=-۱۸x-۲۷\Rightarrow ۱۸x+۱۰y=-۲۲$$

معادله ضلع BC: $y-۳=\frac{۵}{۹}(x-۳)\Rightarrow ۹y-۲۷=۵x-۱۵\Rightarrow ۵x-۹y+۱۲=۰$

$$AH=\frac{|-۵-۹(-۲)-۱۲|}{\sqrt{۲۵+۸۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰۶}}$$

۲ وسط قطر مرکز دایره است اگر M وسط BC باشد $x_m=۴$ و $y_m=-۱$ در نیمه $M(۴،-۱)$
شعاع دایره فاصله مرکز تا نقطه A است.

$$MA=R=\sqrt{۱۶+۴۹}=\sqrt{۶۵}$$

۳

الف) $x^۲-۸x-۲۰=۰\Rightarrow (x-۱۰)(x+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۲\Rightarrow x_A=-۲ \\ x=۱۰\Rightarrow x_B=۱۰ \end{cases}$

ب) $AB=|x_B-x_A|=|۱۰+۲|=۱۲cm$

پ) اندازه عرض نقطه مینیمم برابر ضخامت عدسی است.

طول نقطه ماکزیمم $=\frac{۸}{۲}=۴\Rightarrow y=۴^۲-۸(۴)-۲۰=-۳۶$

ضخامت عدسی ۳۶ میلی‌متر است.

۴ یک نقطه دلخواه روی یکی درنظر گرفته و فاصله‌اش را تاخط دیگر محاسبه می‌کنیم.

$$A(۰,\frac{-c}{b})$$

$$AH=\frac{|۰+(-c)+c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۵ شعاع بر خط مماس در نقطه تماس عمود است.

$$OA=R=\frac{|-۴+۶-۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۳}{۵}$$

۶ الف) $R=۱۰ \Rightarrow OS=۱۰ \Rightarrow \sqrt{x^۲+۶۴}=۱۰ \Rightarrow x=۶$

ب) $m_{PS}=\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲} \qquad S(۶,۸) \quad , \quad Q(۱۰,۰) \quad , \quad P(-۱۰,۰)$

$$m_{QS}=\frac{۸}{-۴}=-۲$$

پ) $m_{PS}\times m_{QS}=\frac{۱}{۲}\times -۲=-۱ \Rightarrow PS \perp QS$

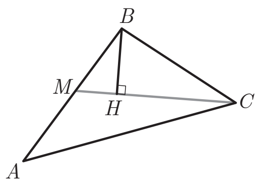
۷ $ax+۴y-۱=۰ \Rightarrow AH=۲$

$$۲=\frac{|a+۸-۱|}{\sqrt{a^۲+۱۶}} \Rightarrow |a+۷|=۲\sqrt{a^۲+۱۶} \Rightarrow a^۲+۱۴a+۴۹=۴a^۲+۶۴$$

$$\Rightarrow ۳a \quad -۱۴a+۱۵=۰ \Rightarrow a=\frac{۱۴\pm\sqrt{۱۶}}{}\begin{cases} \text{ق ق} \\ - \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

۸ الف) $M(-۷,۵)$

$$m_{MC}=\frac{۴}{-۱۰}=\frac{-۲}{۵}$$



معادله MC: $y-۱=-\frac{۲}{۵}(x-۳) \Rightarrow ۵y-۵=-۲x+۶$

$$۲x+۵y-۱۱=۰$$

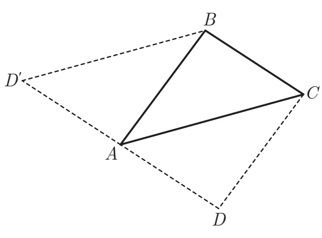
$$BH=\frac{|-۶+۱۵-۱۱|}{\sqrt{۴+۲۵}}=\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$$

ب) $\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۱۱+۳=-۳+x_D \Rightarrow x_D=-۵ \\ -۱۳+۳=۱+y_D \Rightarrow y_D=-۱۱ \end{cases}$

مسئله دو جواب دارد $ABCD$ و $ACBD'$

در حالت دوم

$$\begin{cases} x_A+x_B=x_C+x_{D'} \\ y_A+y_B=y_C+y_{D'} \end{cases}$$



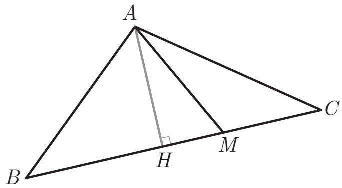
۹ فرض کنیم نقطه $M(a, 2a)$ در خط $y = 2x$ باشد.

$$OM + MA = 5 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 4a^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (2a-4)^2}$$

$$5a^2 = a^2 - 4a + 4 + 4a^2 - 16a + 16$$

$$20a = 20 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow M(1,2)$$

$$HM^2 = AM^2 - AH^2$$



$$m_{BC} = \frac{1}{-7}$$

معادله BC: $y + 1 = -\frac{1}{7}(x - 1)$

$$7y + 7 = -x + 1 \Rightarrow x + 7y + 6 = 0$$

$$AH = \frac{|4 + 14 + 6|}{\sqrt{1 + 49}} = \frac{24}{\sqrt{50}}$$

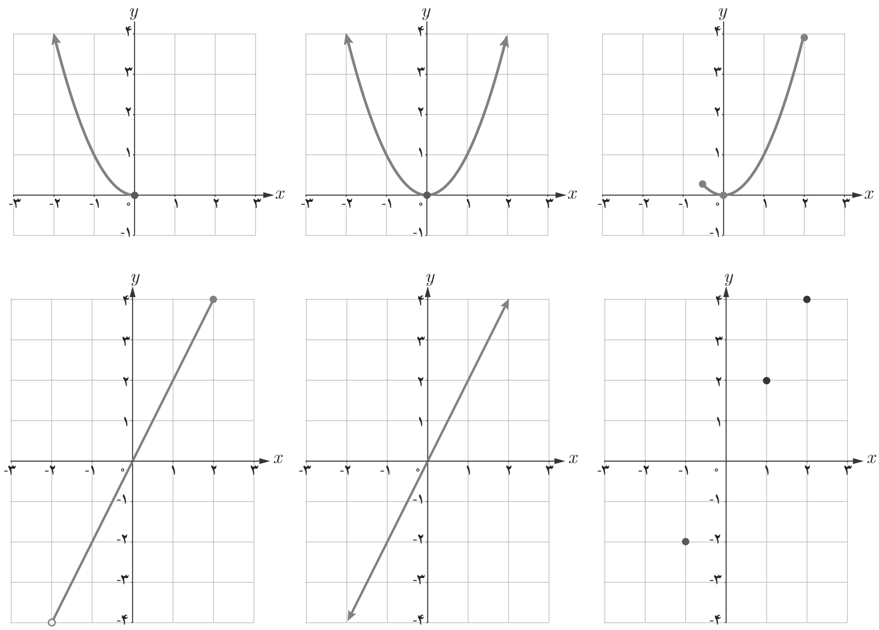
وسط BC $M(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}) \Rightarrow AM = \sqrt{(\frac{9}{2} - 4)^2 + (-\frac{3}{2} - 2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$HM^2 = (\frac{5\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{24}{\sqrt{50}})^2 = \frac{25}{2} - \frac{576}{50} = \frac{49}{50}$$

کار در کلاس صفحه ۳۸

الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

تابع	$f(x)=2x$	$g(x)=2x$	$h(x)=2x$	$t(x)=x^2$	$s(x)=x^2$	$k(x)=x^2$
دامنه تابع	$\mathbb{R}$	$\{-1,1,2\}$	$(-2,2]$	$\mathbb{R}$	$(-\infty,0]$	$\left[-\frac{1}{2},2\right]$
برد تابع	$\mathbb{R}$	$\{-2,2,4\}$	$(-4,4]$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,4)$



در این کار در کلاس یادآوری مطالبی که در کلاس دهم خوانده‌اند مورد نظر بوده است و همچنین دقت بیشتری در نمایش تابع لحاظ شده است. مطالب این کار در کلاس در کلاس درس باید بحث شود. ممکن است دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤالات دچار اشتباه هم شوند، اشتباهات هم می‌تواند بخشی از مسیر آموزش باشد. صرف پیدا کردن جواب برای ما کفایت نمی‌کند. ما می‌خواهیم دانش‌آموزان درگیر حل مسئله شوند، درگیر بحث و گفت‌وگو شوند، مثال نقض بیاورند، استدلال بیاورند، رد کنند، توجیه کنند که همهٔ اینها

فرایندهایی در آموزش ریاضیات هستند که به اندازهٔ جواب و محصول دارای ارزش هستند و شاید ارزش بالاتری داشته باشند. در این مثال مثلاً باید بچه‌ها استدلال کنند که کدام نمودار دامنهٔ $\{-۱,۱,۲\}$ دارد و سپس برد تابع را به‌دست آورند. در پاسخ‌های اشتباه ممکن است نکاتی نهفته باشد که معلم بتواند اشکالات دانش‌آموزان را دریابد. در قسمت ب این کار در کلاس دو تابع داده شده است که ضابطه مشخص است و ممکن است پاسخ‌های دانش‌آموزان برای دامنه جواب‌های متفاوتی باشد و این سؤال از سؤالات باز پاسخ هستند سپس به طرز نمایش تابع پرداخته می‌شود؛ مثلاً در تابع f در قسمت الف داریم :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=۲x$

و تابع h به‌صورت زیر است :

$h: (-۲,۲]\to(-۴,۴]$

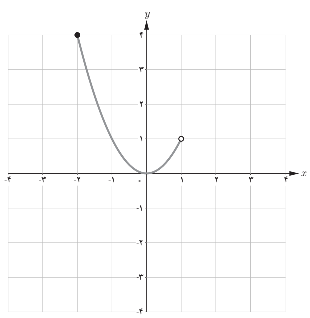
$h(x)=۲x$

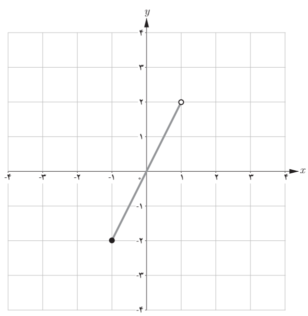
و این نکته باید بیان شود که هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعهٔ دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت. به دانش‌آموزان باید اجازه داد که مثال‌های دیگری را خودشان مطرح کنند. که در کار در کلاس صفحهٔ ۴۰ این موضوع در نظر گرفته شده است و با توجه به سطح کلاس دانش‌آموزان می‌توانند پاسخ‌های جدید را نیز بیاورند.

مطلب بعدی از تابع به عنوان یک ماشین تغییر کرده است که موضوع متغیر وابسته و متغیر مستقل را نیز تداعی می‌کند که دانش‌آموزان از دبستان با این مفهوم آشنا هستند. کار در کلاس صفحهٔ ۴۰ نیز برای تسلط بر این مفهوم است.

ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟

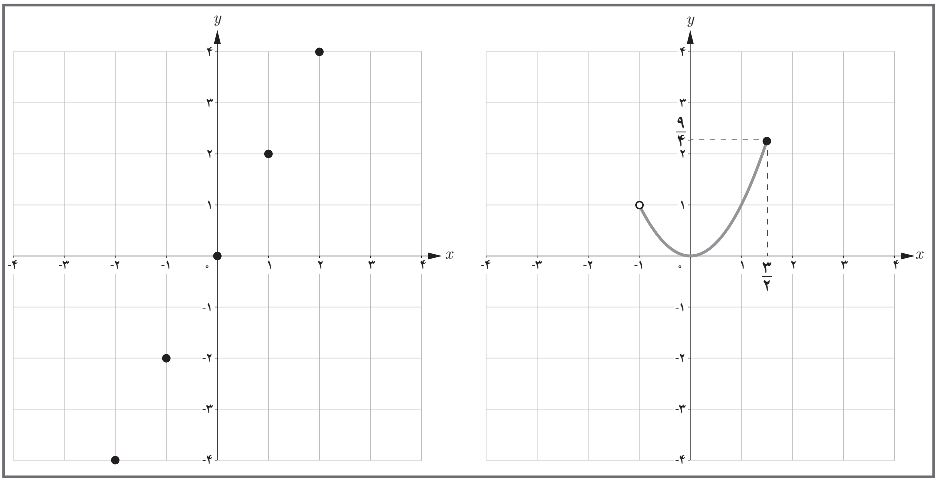
تابع	$f(x)=۲x$	$g(x)=x^۲$
دامنه	$[-۱,۱)$	$[-۲,۱)$
برد	$[-۲,۲)$	$[۰,۴]$





راه‌حل دیگری می‌تواند به‌صورت روبه‌رو باشد :

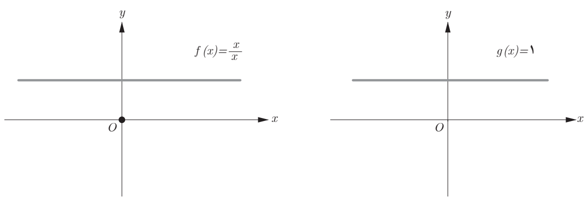
تابع	$f(x)=2x$	$g(x)=x^2$
دامنه	$\mathbb{Z}$	$(-1,\frac{3}{2}]$
برد	$\{2n \mid n\in\mathbb{Z}\}$	$[0,\frac{9}{4}]$



در صفحه ۴۱ تساوی دو تابع ارائه شده و در کار در کلاس و تمرین نیز مثال‌هایی آورده شده است. توصیه می‌شود از مثال‌های خیلی پیچیده خودداری شود تا دانش‌آموزان تساوی دو تابع را با مثال‌های ساده و حتی‌الامکان از روی نمودار و ضابطه درک کنند.

مثال : **تابع‌های** $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$ **با هم برابرند ولی تابع‌های** $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=1$ برابر نیستند. چرا؟

حل : تابع $f(x)=\frac{x}{x}$ ، دامنهٔ آن $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ است درحالی‌که تابع $g(x)=1$ دارای دامنهٔ $D_g=\mathbb{R}$ می‌باشد. بنابراین هرچند ضابطه‌ها به ظاهر برابر هستند ولی دامنه‌ها برابر نیستند، پس دو تابع f و g برابر نمی‌باشند، در نمودار نیز می‌بینید که دو تابع بر هم منطبق نیستند (تعریف نشده $=f(0)$ و $g(0)=1$)



در کار در کلاس زیر مثال‌هایی ساده ولی کمی آشنا برای دانش‌آموزان مطرح شده است که با حل آنها درک تساوی دو تابع به‌دست می‌آید.

کار در کلاس صفحه ۴۱

۱ در جدول زیر کدام‌یک از توابع داده شدهٔ زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید :

۱	$f=\{(۱,۲),(۵,۷)\}$	$g=\{(۱,۷),(۵,۲)\}$	×
۲	$f=\{(a,b),(c,d)\}$	$g=\{(c,d),(a,b)\}$	✓
۳	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=۳x$	$g=\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ $g(x)=۳x$	×
۴	$f(x)=x\|x\|$	$g(x)=x^{۲}$	×
۵	$f(x)=۴x$	$g(x)=\frac{۸x}{۲}$	✓

حل :

۱ دامنه توابع f و g با هم برابرند $D_f=D_g=\{۱,۵\}$ ، ولی به ازای هر x در دامنه مشترکشان، ضابطه‌ها برابر نیستند؛ مثلاً $f(۱)=۲$ و $g(۱)=۷$ و $f(۱)\neq g(۱)$. پس $f\neq g$.

۲ دامنه دو تابع f و g با هم برابرند و به ازای هر x در دامنه مشترکشان، ضابطه‌ها نیز برابرند، بنابراین دو تابع f و g با هم برابرند ($f(a)=g(a)=b$ و $f(c)=g(c)=d$).

۳ دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}^+$ است، پس دو تابع با هم برابر نیستند، هرچند که ضابطهٔ دو تابع برابرند.

۴ دو تابع دارای دامنهٔ برابر $\mathbb{R}$ ولی ضابطهٔ آنها برابر نمی‌باشد؛ مثلاً $g(-۱)=۱$ و $f(-۱)=-۱$. پس $f\neq g$.

۵ دامنه دو تابع f و g برابر $\mathbb{R}$ است، از طرفی ضابطهٔ آنها نیز برابر است پس دو تابع f و g برابرند.

تمرین ۲ کار در کلاس مثالی از یک پدیده واقعی بیان شده که ضمن حل آن دانش‌آموزان به این نکته توجه می‌کنند که شرط تساوی دو تابع و تأثیر دامنه و برد به چه صورت است.

۲ وقتی در آسمان پدیدهٔ آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می‌شنویم. صدای ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است، اگر $t\in [۴,۱۲]$:

الف) جدول را کامل کنید :

t (ثانیه)	۴	$۴\frac{۱}{۲}$	۵	۶	۸	۹	$۱۰\frac{۱}{۵}$	۱۱	۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۳}$	۲	$\frac{۸}{۳}$	۳	$\frac{۵۱}{۵}$	$\frac{۱۱}{۳}$	۴

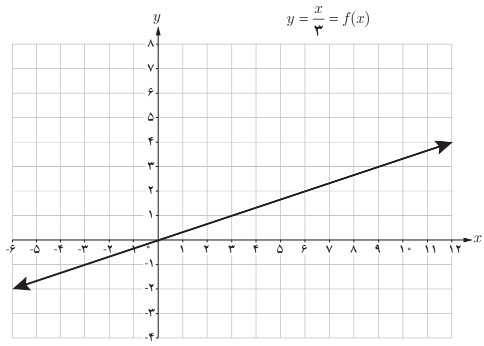
ب) چرا h تابعی از t است؟ آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند و فاصله ما از مکان وقوع آذرخش به زمان وابسته است.

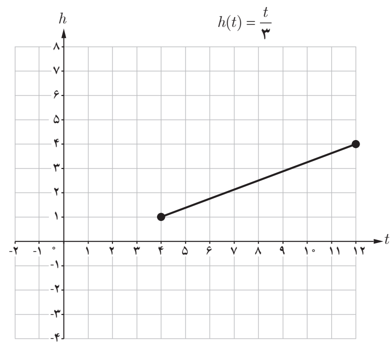
پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید. $D=[۴\ ,۱۲]\ ,\ R=[\frac{۴}{۳}\ ,۴]$

ت) نمایش مقابل از تابع h کامل کنید :

$$\begin{cases} h:[۴\ ,۱۲]\to[\frac{۴}{۳}\ ,۴] \\ h(t)=\frac{t}{۳} \end{cases}$$

ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}x$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید.





کار در کلاس صفحه ۴۵

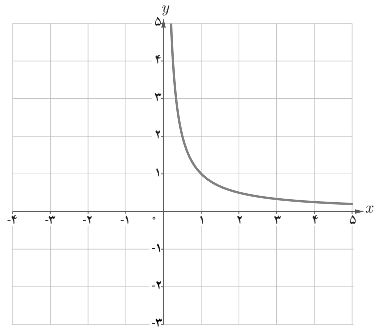
مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

$\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$ (الف)

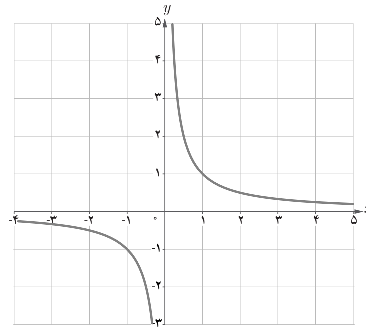
$\begin{cases} g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ g(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$ (ب)

$\begin{cases} h:\{1,2,3\}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$ (پ)

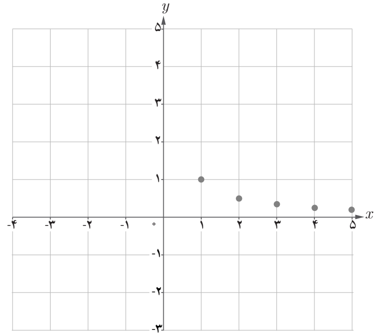
$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$ (ت)



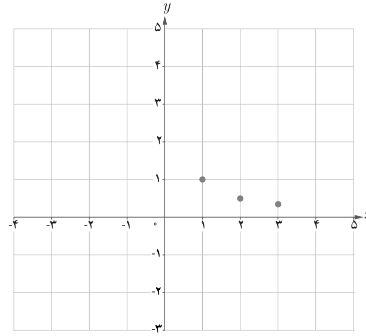
g



t

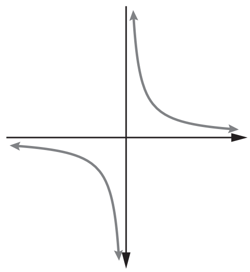


f



h

ضابطهٔ همهٔ توابع یکی است ولی دامنهٔ آنها با هم برابر نیستند، لذا نمودارهای متفاوتی دیده می‌شود. پایه رسم این توابع، تابع گویای $\begin{cases} f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$ است که نمودار آن به‌صورت روبه‌رو است :



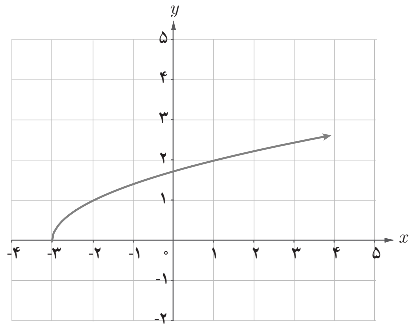
در ادامه با معرفی تابع رادیکالی که زیر رادیکال یک تابع خطی می‌باشد، سعی بر توجه دانش‌آموزان به رسم توابع و پیدا کردن دامنه و برد آنها شده است. رسم این توابع به کمک نقطه‌یابی و انتقال از دیگر اهداف کار در کلاس‌های صفحه ۴۶ و صفحه ۴۷ می‌باشد.

کار در کلاس صفحه ۴۶

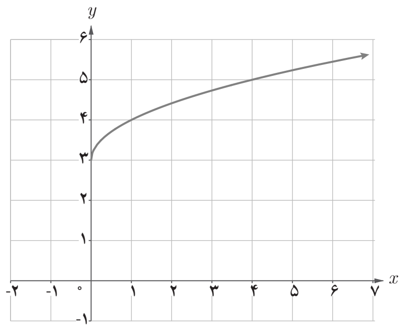
به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار چهار تابع :

الف) $f(x)=\sqrt{x}+۳$, ب) $h(x)=\sqrt{x}-۳$, پ) $g(x)=\sqrt{x-۳}$, ت) $r(x)=\sqrt{x+۳}$

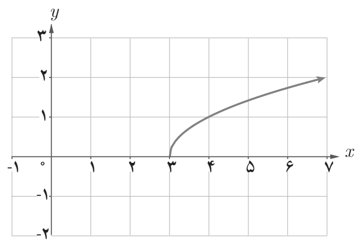
رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



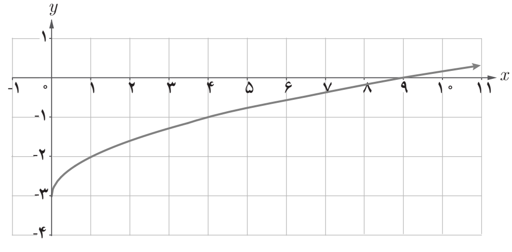
$r(x)=\sqrt{x+۳}$; $D_f=[-۳,+\infty)$, $R_f=[۰,+\infty)$



$f(x)=\sqrt{x}+۳$; $D_f=[-۳,+\infty)$, $R_f=[۳,+\infty)$



$g(x)=\sqrt{x-۳}$; $D_g=[۳,+\infty)$, $R_g=[۰,+\infty)$



$h(x)=\sqrt{x}-۳$; $D_h=[۰,+\infty)$, $R_h=[-۳,+\infty)$

دانش‌آموزان در این کار در کلاس، استدلال می‌کنند که اولاً نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به چه صورت است (در سال گذشته خوانده‌اند)، ثانیاً اگر به کمک انتقال آن را رسم کنند، کدام یک از نمودارهای رسم شده متناظر با صورت سؤال است یعنی با بازنمایی‌های مختلف آن آشنا می‌شوند و در نهایت پس از انتخاب

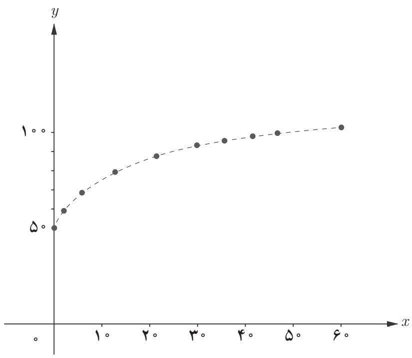
صحیح نمودار، دامنه و برد چگونه از روی نمودار به‌دست می‌آید. پاسخ‌های نادرست آنها در کلاس مورد بررسی قرار گیرد. حدود و ثغور این مطلب نیز در حد انتقال افقی و عمودی است.

دانش‌آموزان باید قادر باشند توابعی به‌صورت $f(x)=\sqrt{ax+b}$ را رسم کنند و دامنه را هم با توجه به نمودار آن و هم با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال تعیین کنند و برد آن را نیز از روی نمودار مشخص نمایند.

فعالیت صفحه ۴۷

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده‌ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	۵۷	۶۴	۷۲/۱	۷۸	۸۵	۸۸/۳	۹۲	۹۹	۱۰۴/۲



ب) برد این تابع چیست؟

پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید که کودکی با قد ۷۵ سانتی‌متر حدوداً چند ماهه است.

ب) برد تابع، مجموعه مقادیر $f(x)$ می‌باشد که با توجه به جدول داریم : $R=[۵۰,۱۰۴/۲]$

پ) هدف این سؤال، تفسیر دانش‌آموزان از نمودارها می‌باشد و اینکه چگونه از روی بازنمایی جدول و نمودار می‌توان مقادیر خواسته شده را پیدا کرد. کودک چهار ساله حدوداً ۴۹ ماه دارد (با توجه به جدول داده شده که برای ۴۹ ماه، ۹۹ سانتی‌متر است) پس حدوداً ۹۹ سانتی‌متر می‌باشد.

ت) ضابطهٔ تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ است. پس : $f(x)=۷۵ \Rightarrow ۷\sqrt{x}+۵۰=۷۵$

$$\Rightarrow ۷\sqrt{x}=۲۵ \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۲۵}{۷}$$

$$\Rightarrow x=(\frac{۲۵}{۷})^{۲}\cong ۱۲/۷۶cm$$

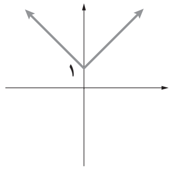
بنابراین حدوداً ۱۳ ماهه است. انتظار می‌رود که دانش‌آموز بتواند نمودار را تجزیه و تحلیل کند.

رابطه بین معادلات و توابع در ادامه صفحه ۴۸ و صفحه ۴۹ آورده شده است که توصیه به مثال‌های خیلی سخت نمی‌شود. اینکه هر معادله‌ای بر حسب x و y لزوماً تابع نیست، کافی است. معمولاً برای تأیید تابع بودن از نمودار کمک گرفته و برای رد آن از عددگذاری استفاده می‌کنیم. اثبات تابع بودن از طریق ضابطه در کلاس درس معمولی لزومی ندارد. کار در کلاس صفحه ۴۹ گویای این مطلب است و تشخیص با استفاده از نمودار کفایت می‌کند.

کار در کلاس صفحه ۴۹

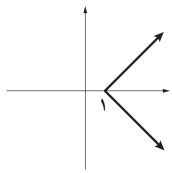
کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y = |x| + ۱$ ✓



(تابع است زیرا هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند).

ب) $x = |y| + ۱$ ×



تابع نیست.

روش اول : به کمک نمودار

روش دوم : به ازای یک x، دو مقدار برای y به‌دست می‌آید.

$$|y| = x - ۱ \Rightarrow y = \pm(x - ۱)$$

روش سوم : مثال نقض : فرض کنید $x = ۲$، در این صورت $|y| = ۱$ پس $y = \pm ۱$، یعنی به ازای یک مقدار x دو مقدار برای y به دست آمده است.

تابع پله‌ای با بیان یک فعالیت در دنیای واقعی (صفحه ۴۹) و سپس کار در کلاس (صفحه ۵۰) به‌طور کامل معرفی شده است. این نوع تابع در مسائل واقعی نمونه‌های بسیاری دارند که دو نمونه از آنها بیان شده است. نوشتن ضابطه و حل مسائل به کمک آنها و رسم چنین توابعی در فعالیت و کار در کلاس حائز اهمیت می‌باشد. استفاده از مثال‌های مثبت و منفی، یادگیری این مفهوم را آسان‌تر می‌کند.

فعالیت صفحه ۴۹

هزینه ارسال یک بستهٔ پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) برحسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

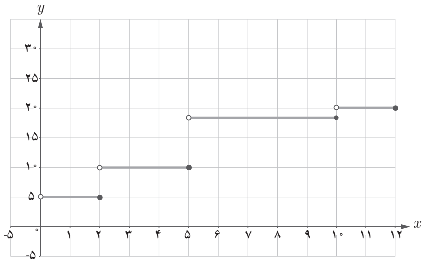
اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطهٔ تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید :

$$f(x)=\begin{cases} 5 & 0<x\leq 2 \\ 10 & 2<x\leq 5 \\ 17 & 5<x\leq 10 \\ 20 & 10<x\leq 12 \end{cases}$$

ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و ۱۱/۵ کیلوگرم چه هزینه‌ای باید پرداخت؟

پ) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه‌رو رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.



توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به‌گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.

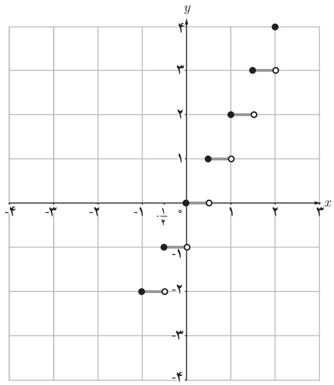
سپس تابع جزءصحیح به عنوان حالت خاص تابع پله‌ای معرفی گردیده است. در کار در کلاس صفحه ۵۱ مثالی ساده و مهم از چگونگی رسم این توابع داده شده است. توصیه می‌شود از بیان تمام ویژگی‌های تابع جزء صحیح و تمام حالت‌های رسم آن در کلاس خودداری شود. البته متناسب با سطح دانش‌آموزان می‌توان برخی ویژگی‌ها را بیان کرد ولی جزء اهداف کتاب نمی‌باشد. برای رسم تابع جزء صحیح ابتدا با توجه به بازه داده شده x را در بازه قرار داده و عبارت درون جزء صحیح را به کمک این بازه تولید می‌کنیم. سپس آنچه به‌وجود آمده را یک واحد یک واحد در بازه‌های مجزا قرار داده و جزء صحیح آن عبارت را محاسبه می‌کنیم و در نهایت بازه‌ها را دوباره به محدوده x تبدیل کرده و نمودار را در این بازه رسم می‌کنیم.

کار در کلاس صفحه ۵۱

۱ نمودار تابع $f(x)=[۲x]$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$$-۱ \le x \le ۲ \Rightarrow -۲ \le ۲x \le ۴$$

$۲x$	$-۲ \le ۲x < -۱$	$-۱ \le ۲x < ۰$	$۰ \le ۲x < ۱$	$۱ \le ۲x < ۲$	$۲ \le ۲x < ۳$	$۳ \le ۲x < ۴$	$۲x=۴$
$[۲x]$	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	$-۱ \le x < -\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲} \le x < ۰$	$۰ \le x < \frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲} \le x < ۱$	$۱ \le x < \frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲} \le x < ۲$	$x=۲$



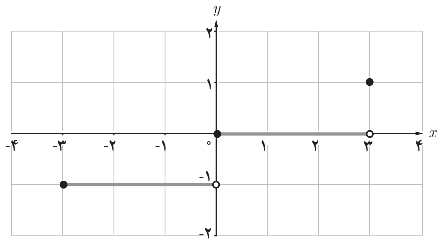
۲ نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{۱}{۳}x\right]$ را در بازهٔ $[-۳\,,\,۳]$ رسم کنید (کامل کنید).

$$-۱ \le \frac{۱}{۳}x < ۰ \Rightarrow \begin{cases} [\frac{۱}{۳}x] = -۱ \\ -۳ \le x < ۰ \end{cases}$$

$$۰ \le \frac{۱}{۳} < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{۱}{۳}x\right] = ۰ \\ ۰ \le x < ۳ \end{cases}$$

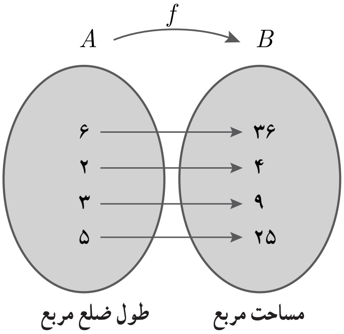
$$۰ \le \frac{۱}{۳}x < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{۱}{۳}x\right] = ۰ \\ ۰ \le x < ۳ \end{cases}$$

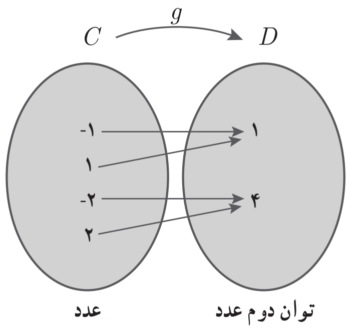
$$\frac{۱}{۳}x = ۱ \Rightarrow \begin{cases} [\frac{۱}{۳}x] = ۱ \\ x = ۳ \end{cases}$$



فعالیت ص ۵۵

دو تابع f و g را در نظر بگیرید :





الف) f و g را به‌صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

f = {(۶,۳۶) , (۲,۴) , (۳,۹) , (۵,۲۵)}

g = {(−۱,۱) , (۱,۱) , (−۲,۴) , (۲,۴)}

D_f = {۲, ۳ , ۵ , ۶}　　D_g = {−۲, −۱ , ۱ , ۲}

R_f = {۴, ۹ , ۲۵ , ۳۶}　　R_g = {۱, ۴}

ب) اگر جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به‌دست می‌آید. آنها را به ترتیب h و k بنامید. h و k را وارون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

h = {(۳۶,۶) , (۴,۲) , (۹,۳) , (۲۵,۵)}

k = {(۱,−۱) , (۱,۱) , (۴,−۲) , (۴,۲)}

کدام‌یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید.

h تابع است زیرا مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب همگی متمایز هستند. اما k تابع نیست زیرا $k\in$(۱,−۱) و $k\in$(۱,۱) یعنی به ازای یک x، دو مقدار برای y وجود دارد پس تابع نیست. همچنین می‌توان در مورد $k\in$(۴,۲) و $k\in$(۴,−۲) صحبت کرد که باز هم نشان می‌دهد k تابع نیست.

فعالیت و کار در کلاس ص ۵۶ و ص ۵۷ نیز جهت تثبیت یادگیری معنادار مفهوم تابع یک به یک ارائه شده است. تصمیم‌گیری دانش‌آموز در مورد اینکه چه تابعی وارون‌پذیر است و گفتمان در مورد اینکه چه ویژگی‌های مشترکی وجود دارد از اهداف این فعالیت است.

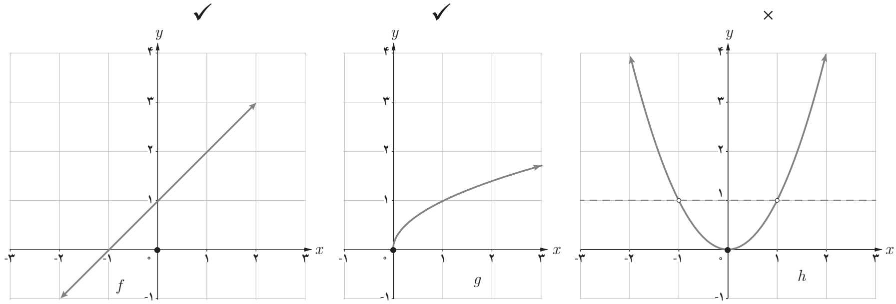
با انجام کار در کلاس زیر (ص ۵۶)، درک دانش‌آموزان از تابع یک به یک به کمک بازنمایی نمودار بررسی می‌شود و سپس یک کاربرد واقعی از مفهوم تابع یک به یک یاد می‌گیرد.

توصیه آموزشی : در این قسمت از بیان تمام نکات در مورد تابع یک به یک در کلاس درس پرهیز شود و فقط به بازنمایی از طریق نمودار بسنده کنید. البته بستگی به شرایط کلاس، بازنمایی‌های دیگر تابع یک به یک را هم می‌توانید ارائه کنید ولی از اهداف کتاب نمی‌باشد.

کار در کلاس ص ۵۶

۱ کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند؟

خط موازی محور xها ($y=۱$)، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند پس یک به یک نمی‌باشد.



$\checkmark\ k=\{(۱,۲)\,,(۳,۴)\,,(۸,۹)\}$ $\quad\quad$ $\times\ l=\{(۳,۷)\,,(۲,۵)\,,(۱,۵)\}$

$$\left.\begin{matrix}(۲,۵)\in l\\(۱,۵)\in l\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{یک به یک نیست } l$$

۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطهٔ بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند.

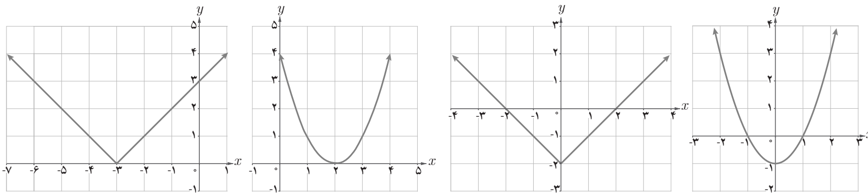
هر شخص فقط دارای یک کد ملی است و به ازای هر کد ملی، یک نفر مشخص می‌شود پس تابعی یک‌به‌یک بین افراد و کد ملی وجود دارد.

در ادامهٔ بحث تابع یک به یک به این نکته توجه شود که برخی توابع یک به یک نیستند ولی می‌توان دامنه آنها را طوری محدود کرد که یک به یک شوند. از دانش‌آموزان بخواهید که در ابتدا خودشان روی محدود کردن دامنه بحث کنند و پاسخ‌های آنها را در کلاس با هم مقایسه کنید.

کار در کلاس ص ۵۷

تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هریک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y=|x+3|$ ب) $y=(x-2)^2$ پ) $y=|x|-2$ ت) $y=x^2-1$



این مسئلهٔ جالب نیز باز پاسخ است و جواب‌های متفاوتی ممکن است داده شود.

الف) تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=|x+3| \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} f_1:A\to\mathbb{R} \\ f_1(x)=|x+3| \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[-3,+\infty)$ یا $(-\infty,-3]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع f_1، یک‌به‌یک می‌شود.

ب) تابع $\begin{cases} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(x)=(x-2)^2 \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} g_1:A\to\mathbb{R} \\ g_1(x)=(x-2)^2 \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[2,+\infty)$ یا $(-\infty,2]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع g_1، یک‌به‌یک می‌شود.

پ) تابع $\begin{cases} K:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ K(x)=|x|-2 \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} K_1:A\to\mathbb{R} \\ K_1(x)=|x|-2 \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[0,+\infty)$ یا $(-\infty,0]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع K_1، یک‌به‌یک می‌شود.

ت) تابع $\begin{cases} L:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ L(x)=x^2-1 \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} L_1:A\to\mathbb{R} \\ L_1(x)=x^2-1 \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[0,+\infty)$ یا $(-\infty,0]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع L_1، یک‌به‌یک می‌شود.

تذکر : در مورد انتخاب بازه‌هایی که تابع در آن بازه‌ها یک به یک می‌شود، می‌توان از روی نمودار در حالت کلی آنها را پیدا کرد و یا در توابع درجه دوم به طول رأس سهمی و در توابع قدر مطلقی به ریشه سادهٔ درون قدر مطلق توجه کرد.

محاسبه وارون یک تابع در صورت یک به یک بودن به کمک نمودار ص ۵۷ از زیبایی‌های این فصل است. با انجام این فعالیت ص ۵۷ به کمک دانش‌آموزان روش محاسبه تابع وارون درک می‌شود.

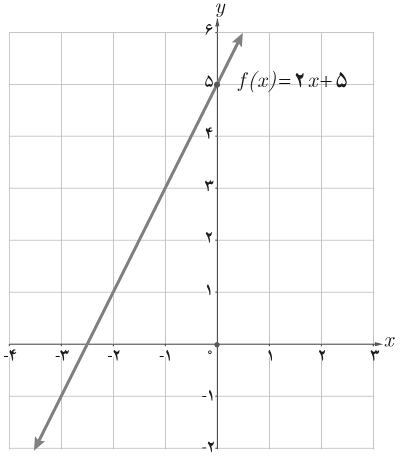
قسمت الف این فعالیت نیز با رسم خط موازی محور xها قابل انجام است.

فعالیت ص ۵۷

تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = ۲x + ۵ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

هر خط موازی محور xها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین نمودار یک تابع یک به یک است.



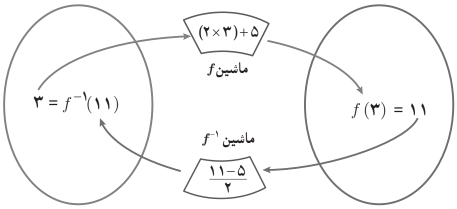
برای اینکه دانش‌آموزان درک کنند که کار تابع وارون چیست و با تابع چه ارتباطی دارد، انجام ادامه فعالیت توسط خود او حائز اهمیت است. درصورتی‌که دانش‌آموزان تشخیص ندادند، با راهنمایی سعی کنید خود آنها به پاسخ صحیح برسند.

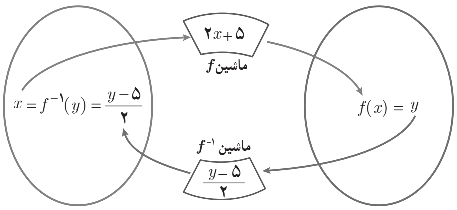
ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید :

$(۱۱,۳) \in f^{-۱}$ و $(۳,۱۱) \in f$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۱۱$ و $f^{-۱}(۱۱) = ۳$

اگر به ماشین f، عدد ۳ را بدهیم، آن را ۲ برابر کرده و سپس به‌علاوه ۵ می‌کند و عدد ۱۱ در برد می‌دهد. حال اگر بخواهیم بدانیم عدد ۱۱ توسط ماشین f به ازای چه عددی در دامنه آورده شده است، کافی است عدد ۱۱ را منهای ۵ و تقسیم بر ۲ کنیم که حاصل ۳ می‌شود یعنی $f(۳) = ۱۱$ و $f^{-۱}(۱۱) = ۳$. این توضیحات باید با راهنمایی و هدایت معلم توسط دانش‌آموز گفته شود.





پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$، نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.

این فعالیت طوری طراحی شده است که قسمت‌هایی را دانش‌آموز بنویسد و به‌صورت مکاشفه‌ای از حل آن لذت ببرد.

در این قسمت روش محاسبه تابع وارون و بازنمایی‌های مختلف جبری آن متذکر شده است. دانش‌آموزان در پایان محاسبه تابع وارون اکثراً این پرسش را می‌کنند که چرا به‌جای y، x قرار می‌دهید. در این فعالیت به آن پاسخ داده شده است و متذکر شوید که این یک نمایش است و محدوده xها می‌تواند متفاوت باشد.

ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} f(x) = ۲x+۵ & (x \in D_f) \\ f^{-۱}(y) = \dfrac{y-۵}{۲} & (y \in R_f) \end{cases}$$

$f^{-۱}$ را به‌صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید :

$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x) = \dfrac{x-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(t) = \dfrac{t-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(y) = \dfrac{y-۵}{۲} \end{cases}$$

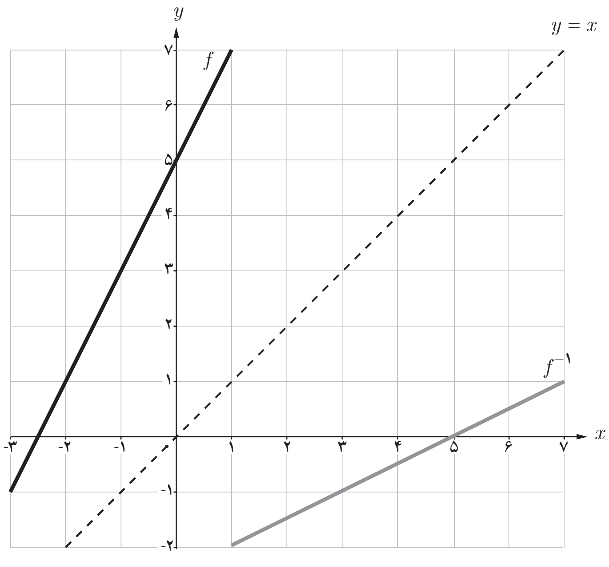
انتظار می‌رود که در نهایت $f^{-۱}(x)$ را بنویسند ولی درک کنند که این x همان xهای دامنه نیست.
آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x) = \dfrac{x-۵}{۲} \end{cases}$$

سپس در کار در کلاس ص ۵۹ روش محاسبه تابع وارون به کمک جبری و نموداری در کلاس تثبیت می‌شود. توجه به رسم تابع و تابع وارون در یک دستگاه و ارتباط آن با نیم‌ساز ناحیه اول و سوم از اهمیت بالایی برخوردار است.

کار در کلاس ص ۵۹

۱ با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x) = ۲x+۵$، نمودار f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



۲ اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x-۲}$ ، دامنه و برد f را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

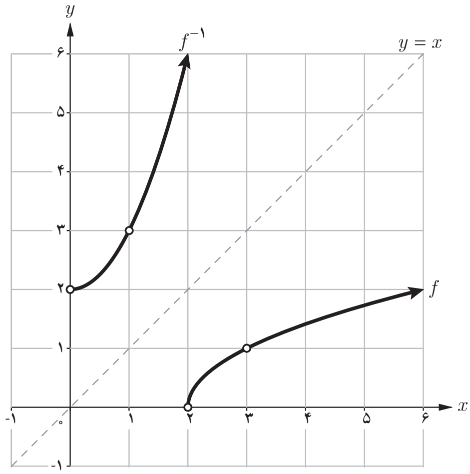
$D_f=[۲,+\infty)$ و $R_f=[۰,+\infty)$

در معادلهٔ $y=\sqrt{x-۲}$ ضابطه $f^{-۱}$ را بنویسید. نمودار $f^{-۱}$ را رسم و دامنه و برد $f^{-۱}$ را معلوم کنید.

$y^۲=x-۲ \longrightarrow x=y^۲+۲ \longrightarrow f^{-۱}(x)=x^۲+۲$

$D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

$R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$

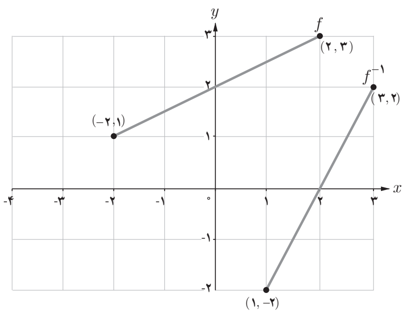


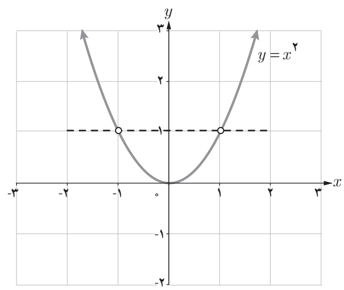
توجه شود که جای دامنه و برد تابع و تابع وارون با هم عوض می‌شود.

کار در کلاس ص ۵۹

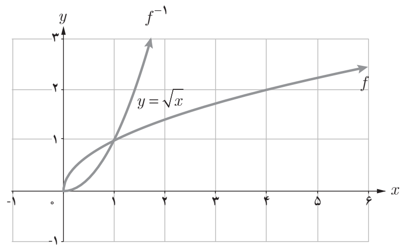
با انجام این کار در کلاس بازنمایی نموداری تابع وارون برای دانش‌آموزان تثبیت می‌گردد.

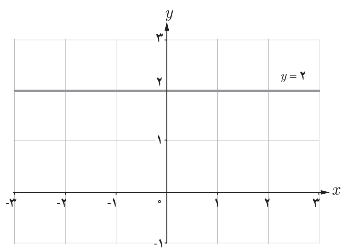
نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.





تابع یک به یک نیست زیرا خط y=۱ نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس وارون‌پذیر نمی‌باشد.





تابع یک به یک نمی‌باشد زیرا خط y=۲ نمودار را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند، پس وارون‌پذیر نیست.

برای رسم بهتر تابع وارون بدون داشتن ضابطه، کافی است خط y=x را رسم کنید و نمودار تابع f را نسبت به خط y=x قرینه می‌کنیم.

حل مثال ص ۶۱ برای درک معنادار تابع وارون دانش‌آموزان در کلاس ضروری می‌باشد.

سطح دشواری مثال‌ها توابع خطی، توابع درجه ۲ و توابع ساده رادیکالی است. اگر دشواری فقط در سطح تکنیک‌ها باشد و درک خاصی توسط دانش‌آموز انجام نشود ارزش خاصی ندارد.

فعالیت ص ۶۳

فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت در بزرگراهی درحال حرکت است. اگر اتومبیل با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس‌العمل» طی می‌کند از تابع $f(x)=\frac{۷}{۱۰}x$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است.

همچنین مسافتی که اتومبیل پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می‌کند از تابع $g(x)=\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است و x سرعت اتومبیل برحسب کیلومتر بر ساعت است.

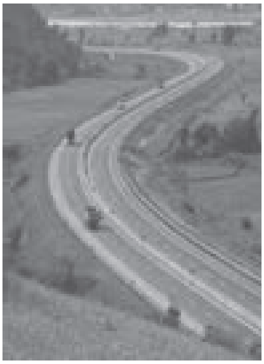
الف) اگر اتومبیلی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر برساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می‌شود؟

$f(۱۰۰)+g(۱۰۰)=$

$(\frac{۷}{۱۰}\times ۱۰۰)+(\frac{۱}{۱۰۰}\times ۱۰۰^{۲})=۱۷۰m$

ب) اگر سرعت اتومبیل x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط اتومبیل پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.

فاصله زمانی لحظه‌ای که راننده با یک مانع روبه‌رو می‌شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس‌العمل» می‌نامند.



مجموع فاصلهٔ طی شده در طول زمان عکس‌العمل و فاصله طی شده پس از ترمزکردن را «فاصله دید توقف[۱]» می‌نامند. این فاصله در طراحی جاده‌ها و بزرگراه‌ها کاربرد دارد.

$$h(x)=f(x)+g(x)=\frac{۷}{۱۰}x+\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}$$

پ) اگر این اتومبیل پس از پیمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی درحال حرکت بوده است؟

$$h(x)=\frac{۷}{۱۰}x+\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}=۶۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۷۰x=۶۰۰۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۷۰x-۶۰۰۰=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۴۹۰۰+۲۴۰۰۰=۲۸۹۰۰$$

$$\Rightarrow x_{۱,۲}=\frac{-۷۰\pm ۱۷۰}{۲}\rightarrow x=\frac{-۷۰+۱۷۰}{۲}=۵۰\,\mathrm{km/h}$$

۱ــ برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس‌العمل ترمز مبتنی بر زمان ۲/۵ ثانیه و شتاب کاهنده ۳/۴ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فعالیت ص ۶۵

الف) دامنهٔ تابع g بازهٔ $[-۴,۵]$ و ضابطهٔ آن به‌صورت $g(x) = x+۲$ می‌باشد.

ب)
$D_{f+g}=D_f \cap D_g = [-۴,۵]$ $\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+۵$

$D_{f-g}=D_f \cap D_g = [-۴,۵]$ $\quad (f-g)(x)=f(x)-g(x)=۱-x$

$D_{f.g}=D_f \cap D_g = [-۴,۵]$ $\quad (f.g)(x)=f(x).g(x)=۳x+۶$

$D_{f/g}=D_f \cap D_g - \{x|g(x)=۰\} = [-۴,۵]-\{-۲\}$ $\quad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۳}{x+۲}$

پ)

روش اول : برای رسم تابع $f+g$، ابتدا دامنه مشترک آنها را پیدا می‌کنیم، سپس نقاطی در دامنه مشترکشان انتخاب کرده و عرض آنها را با هم جمع می‌کنیم. به دلیل اینکه f و g خطی هستند پس مجموع آنها نیز تابع خطی القا و بنابراین با داشتن دو نقطه از مجموع می‌توان نمودارش را رسم کرد.

روش دوم : ضابطه $f+g$ را پیدا کرده و در دامنه مشترک آنها رسم می‌کنیم.

ت) می‌توان به روش اول که در بالا توضیح داده شد، بقیه توابع را نیز مشابه روش بالا رسم کرد و یا اینکه از طریق پیدا کردن ضابطهٔ آنها رسم کنیم.

کار در کلاس ص ۶۶

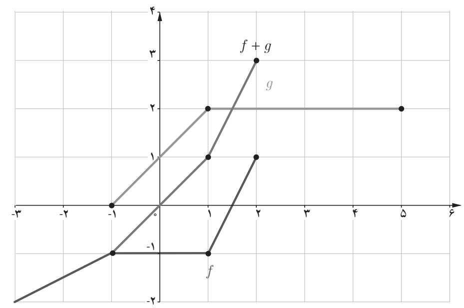
نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(۱)$ و $(f+g)(-۱)$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ و f ، g را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطهٔ آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.



الف) $(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=-۱+۲=۱$

$(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=-۱+۰=-۱$

ب) ابتدا دامنه مشترک f و g را پیدا می‌کنیم. $D_f \cap D_g=[-۱,۲]$

سپس در این دامنه مشترک با پیدا کردن چند نقطه و محاسبه مجموع، نمودار را رسم می‌کنیم.

$(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=۱-۱=۰ \qquad (f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۱+۲=۳$

پ)

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & -۱\le x\le ۱\\ ۲x-۳ & ۱<x\le ۲\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+۱ & -۱\le x\le ۱\\ ۲ & ۱<x\le ۵\end{cases}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}x & -۱\le x\le ۱\\ ۲x-۱ & ۱<x\le ۲\end{cases}$$

ت) نمودار هردو یکی است. البته در حالت کلی رسم نمودار به کمک ضابطه دقیق‌تر از رسم به کمک چند نقطه است.

مفهوم ترکیب دو تابع با انجام فعالیت ص ۶۶ به خوبی بیان شده است. کار در کلاس و مثال ص ۶۸ نیز به تثبیت این مفهوم کمک می‌کند.

توصیه آموزشی: مفهوم ترکیب دو تابع و پیدا کردن دامنه برای دانش‌آموزان در ابتدا شاید کمی مشکل باشد. بهتر است با مثال‌های ساده این مفهوم برای دانش‌آموزان روشن شود و از بیان مثال‌های پیچیده در کلاس خودداری گردد.

فعالیت ص ۶۶

تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

الف) $f(۳۲)=۰$ به چه معنی است؟ ۵۰ درجهٔ فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟ ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است.

ب) تابع $g(x)=x+۲۷۳$ درجه سانتی‌گراد را به درجهٔ کلوین تبدیل می‌کند. $g(۰)=۲۷۳$ به چه معنی است؟

پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین درنظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلوین تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که

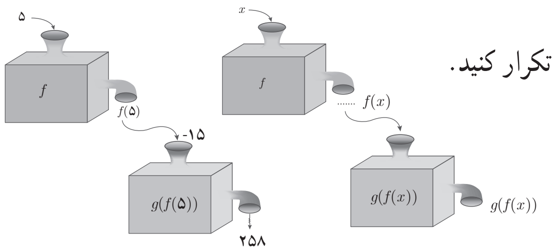
۵ درجهٔ فارنهایت معادل چند درجهٔ کلوین است؟

$f(۵) = \frac{۵}{۹}(۵-۳۲) = \frac{۵}{۹}\times(-۲۷) = -۱۵$

$g(f(۵)) = g(-۱۵) = ۲۵۸$

ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $f(x)$ است و اگر ورودی تابع g، $f(x)$ باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.

ث) ت را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



الف) $f(۳۲) = ۰$ یعنی ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است. بنابراین ۵۰ درجه فارنهایت معادل ۱۰ درجه سانتی‌گراد است. $f(۵۰) = \frac{۵}{۹}(۵۰-۳۲) = \frac{۵}{۹}\times۱۸ = ۱۰ \Rightarrow$

ب) یعنی صفر درجه سانتی‌گراد معادل ۲۷۳ درجه کلوین است.

پ) بنابراین ۵ درجه فارنهایت معادل ۲۵۸ درجه کلوین است.

کار در کلاس ص ۶۸

اگر $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = ۲x + ۳$

الف) دامنه و ضابطه تابع‌های fog و gof را به‌دست آورید.

ب) آیا تابع‌های gof و fog مساوی‌اند؟

حل الف)

$(fog)(x) = f(g(x)) = (۲x+۳)^۲+۱ = ۴x^۲+۱۲x+۱۰$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲x+۳ \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$(gof)(x) = g(f(x)) = ۲(x^۲+۱)+۳ = ۲x^۲+۵$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^۲+۱ \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

ب) دو تابع fog و gof با هم برابر نیستند زیرا ضابطهٔ آنها متفاوت است.

کار در کلاس ص ۶۸

اگر $f=\{(۱۱,۷) , (-۲,۴) , (۳,-۵) , (۲,-۵)\}$ و $g=\{(۲,۱۱) , (۴,-۲) , (۶,۳) , (۳,۲)\}$، ابتدا D_{fog} و D_{gof} و سپس توابع fog و gof را محاسبه کنید.

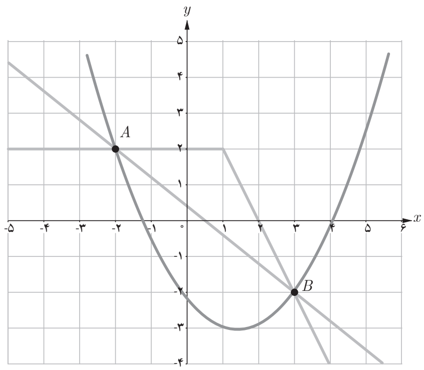
$$D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}=\{۲,۴,۶,۳\}$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}=\{-۲\}$$
$$fog=\{(۲,۷) , (۴,۴) , (۶,-۵) , (۳,-۵)\}$$
$$gof=\{(-۲,-۲)\}$$

برای یافتن ضابطه fog، ابتدا به سراغ دامنه آن می‌رویم، مثلاً $x=۲$. سپس در تابع g، ببینیم $(۲,۱۱)$ داریم پس عدد ۲ توسط تابع g به عدد ۱۱ می‌رود و سپس به سراغ تابع f می‌رویم و می‌بینیم که عدد ۱۱ توسط f به عدد ۷ می‌رود. بنابراین در تابع fog، عدد ۲ به ۷ می‌رود یعنی $(۲,۷)\in fog$. به همین ترتیب برای عضوهای دیگر بررسی می‌کنیم.

حل تمرین‌های فصل تابع

الف) درس ۱ : تمرین ص ۴۲

۱ در صفحه مختصات زیر تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟



حل : این یک مسئله بازپاسخ است و می‌تواند بی‌شمار جواب صحیح داشته باشد. پاسخ‌های دانش‌آموزان را می‌توان با یکدیگر در یک فرصت مناسب بررسی کرد. به‌عنوان نمونه، سه نوع تابع رسم شده است.

۲ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.
الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.
ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.
پ) هم‌دامنهٔ تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است.
ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[۰,۳]$ است.

حل : الف نادرست است.

مثال : ۱
$$\begin{cases} f=\{(۱,۲),(۳,۵)\} & D_f=D_g=\{۱,۳\} \\ g=\{(۱,۵),(۳,۲)\} & R_f=R_g=\{۲,۵\} \end{cases}$$
ولی $f \neq g$

مثال : ۲ تابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^۳$ دارای دامنه و برد برابر $\mathbb{R}$ هستند ولی با هم برابر نیستند.
ب) درست است. هم‌دامنه هر تابع می‌تواند مجموعهٔ برد یا هر مجموعهٔ دیگری شامل برد باشد.
پ) نادرست است. برد یک تابع نهایتاً می‌تواند برابر هم‌دامنه شود و نمی‌تواند هم‌دامنه زیرمجموعه برد باشد.
ت) درست است. به‌عنوان نمونه :

$$\begin{cases} f_۱:[۰,۳]\to\mathbb{R} \\ f_۱(x)=\sqrt{x} \end{cases} ، \begin{cases} f_۲:[۰,۳]\to\mathbb{R} \\ f_۲(x)=۲\sqrt{x} \end{cases} ، \begin{cases} f_۳:[۰,۳]\to\mathbb{R} \\ f_۳(x)=۳\sqrt{x} \end{cases} \text{ و } \dots$$

$$\begin{cases} g_۱:[۰,۳]\to\mathbb{R} \\ g_۱(x)=x \end{cases} ، \begin{cases} g_۲:[۰,۳]\to\mathbb{R} \\ g_۲(x)=۲x \end{cases} ، \begin{cases} g_۳:[۰,۳]\to\mathbb{R} \\ g_۳(x)=۳x \end{cases} \text{ و } \dots$$

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

حل : به‌عنوان نمونه :

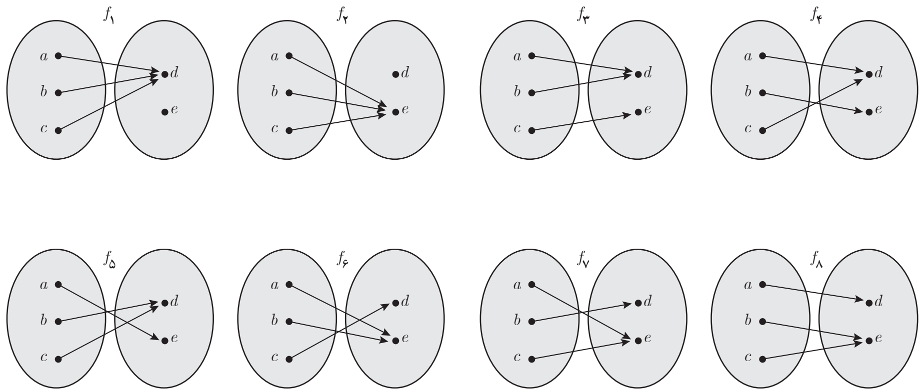
$$\begin{cases} f_۱:\mathbb{R}\geq ۰\to\mathbb{R} \\ f_۱(x)=x \end{cases} ، \begin{cases} f_۲:\mathbb{R}\geq ۰\to\mathbb{R} \\ f_۲(x)=x^۲ \end{cases} ، \begin{cases} f_۳:\mathbb{R}\geq ۰\to\mathbb{R} \\ f_۳(x)=x^۳ \end{cases} \text{ و } \dots$$

$$\begin{cases} g_۱:\mathbb{R}\geq ۰\to\mathbb{R} \\ g_۱(x)=-|x| \end{cases} ، \begin{cases} g_۲:\mathbb{R}\geq ۰\to\mathbb{R} \\ g_۲(x)=\sqrt{x} \end{cases} ، \begin{cases} g_۳:\mathbb{R}\geq ۰\to\mathbb{R} \\ g_۳(x)=۲ \end{cases} \text{ و } \dots$$

بی‌شمار از این نوع توابع وجود دارد. این سؤال نیز بازپاسخ است و پاسخ‌های متفاوتی از دانش‌آموزان خواهید دید.

> **۴** همه تابع‌های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید (از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

حل : تعداد توابع از یک مجموعهٔ m عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با n^m. بنابراین در این تمرین $8=2^3$ تابع وجود دارد.



> **۵** تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$\begin{cases} r:[0,+\infty)\to\mathbb{R} \\ r(a)=5a \end{cases}$	$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\lvert x\rvert \end{cases}$
$\begin{cases} s:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ s(a)=5a \end{cases}$	$\begin{cases} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(x)=5x \end{cases}$
$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=5x \end{cases}$	$\begin{cases} h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \end{cases}$

حل : تابع‌های $f=h$ و $g=s$ توابع مساوی هستند و تابع t با هیچ‌کدام برابر نیست.

۶ تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲) = ۳$ و $f(-۵) = -۲$

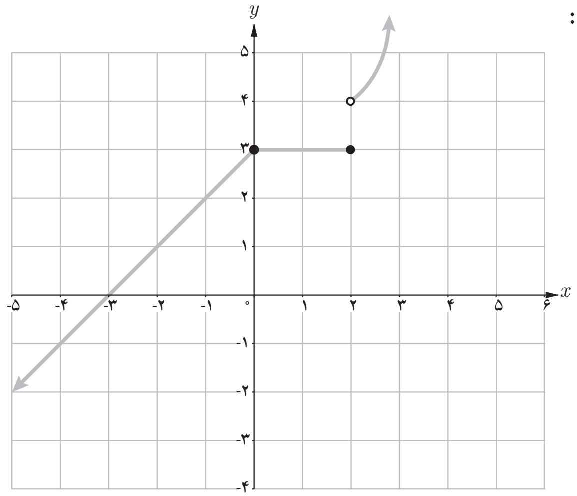
ب) f در بازه $[۰,۲]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

حل :

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۲ \\ ۳ & ۰ \le x \le ۲ \\ x + ۳ & x < ۰ \end{cases}$$



۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد :

تابع خطی برای مردان $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴$

تابع خطی برای زنان $F(x) = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸$

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

حل :

الف) $M(۳۵) = (۲/۸۹\times۳۵) + ۷۰/۶۴ = ۱۷۱/۷۹ \text{ cm}$

ب) $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴ = ۱۸۵$

$\Rightarrow ۲/۸۹x = ۱۱۴/۳۶ \Rightarrow x = \dfrac{۱۱۴/۳۶}{۲/۸۹} \cong ۳۹/۵۷$

مثال فوق یک مثال کاربردی از توابع خطی می‌باشد که برای محاسبهٔ طول قد به‌کار می‌رود.

ب) درس ۲ :

تمرین ص ۵۲

۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \dfrac{x-۱}{۲-x}$ ب) $f(x) = \dfrac{-۳x}{x^۲+۱}$ پ) $f(x) = \dfrac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$

ت) $f(x) = \sqrt{۳x+۱}$ ث) $f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳$ ج) $f(x) = \sqrt{۸-x}$

الف) $۲-x=۰ \longrightarrow x=۲ \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{۲\}$

ب) $x^۲+۱ \neq ۰ \Rightarrow D = \mathbb{R}$

پ) $x^۲+x-۱۲=۰ \longrightarrow (x+۴)(x-۳)=۰ \longrightarrow \begin{cases} x=-۴ \\ x=۳ \end{cases}$

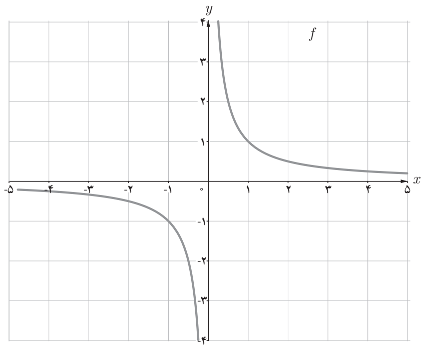
$\Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-۴,۳\}$

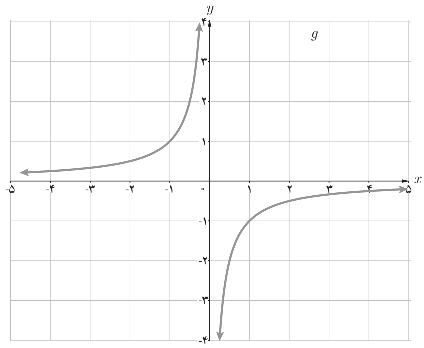
ت) $۳x+۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -\dfrac{۱}{۳} \Rightarrow D = [-\dfrac{۱}{۳}, +\infty)$

ث) $x \geq ۰ \Rightarrow D = [۰, +\infty)$

ج) $۸-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۸ \Rightarrow D = (-\infty, ۸]$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.

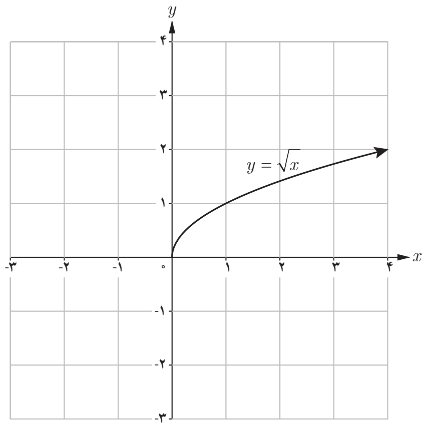


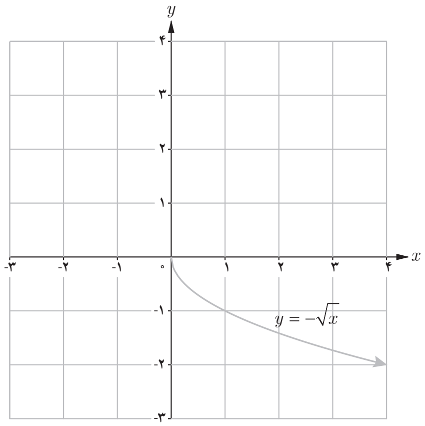


حل : دامنه توابع f و g با هم برابر هستند ولی عرض‌ها قرینه شده‌اند. پس برای رسم با معلوم بودن تابع f، کافی است نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

حل : کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم تا نمودار $y=-\sqrt{x}$ رسم شود.





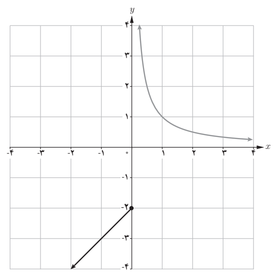
۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\le ۰\end{cases}$ ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\le x\le ۰\end{cases}$ ت) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\ge ۰\end{cases}$

حل :

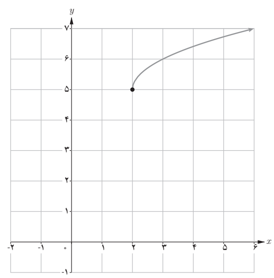
الف)



$D=\mathbb{R}$

$R=(-\infty,-۲]\cup(۰,+\infty)$

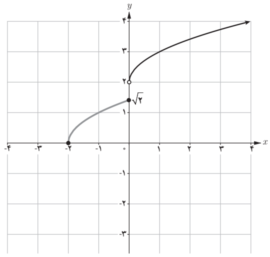
ب)



$D=[۲,+\infty)$

$R=[۵,+\infty)$

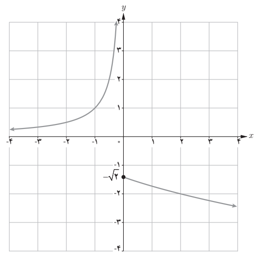
پ)



$D=[-۲,+\infty)$

$R=[۰,+\infty)-(\sqrt{۲},۲]$

ت)



$D=\mathbb{R}$

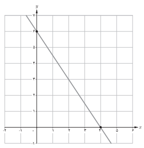
$R=(-\infty,-\sqrt{۲}\,]\cup(۰,+\infty)$

۵ کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

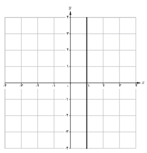
الف) $۳x+۲y=۱۲$ ✓   ب) $x=۱$ ×   پ) $y=-۲$ ✓

ت) $f(x)=\begin{cases} x+۳ & x\leq ۰ \\ x-۱ & x\geq ۰ \end{cases}$ ×   ث) $y^{۲}=x^{۲}$ ×   ج) $y=|x|$ ✓

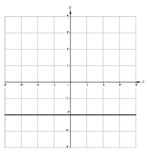
حل



الف) y تابعی از x می‌باشد و $y=\dfrac{۱۲-۳x}{۲}$ زیرا هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

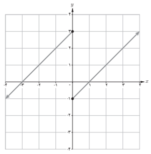


ب) خط $x=۱$ به‌عنوان تابع y از x نمی‌باشد زیرا به ازای $x=۱$، حداقل ۲ مقدار $y=\pm ۱$ وجود دارد پس تابع نیست و یا خط $x=۱$ موازی محور yها، نمودار را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

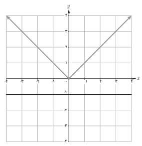


پ) خط $y=-۲$، به‌عنوان یک تابع y برحسب x می‌باشد و به آن تابع ثابت گوییم.

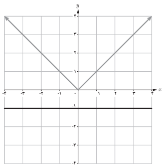
دو خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



ت) با توجه به نمودار خط $x=۰$، نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس تابع y برحسب x نیست و یا طبق ضابطه به ازای $x=۰$، دو مقدار ۳ به‌دست می‌آید پس تابع نیست.



ث) $y^{۲}=x^{۲}\longrightarrow y=\pm x$ یعنی به ازای یک x دو مقدار برای y است پس تابع نیست و یا نمودار آن به‌صورت روبه‌رو می‌باشد و تابع نیست.



ج) y تابعی از x است زیرا نمودار آن به‌صورت روبه‌رو است و هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

حل :

الف) میلیون تومان $f(۵۰) = ۲۵۵$ ب) $[۰,۱۰۰)$

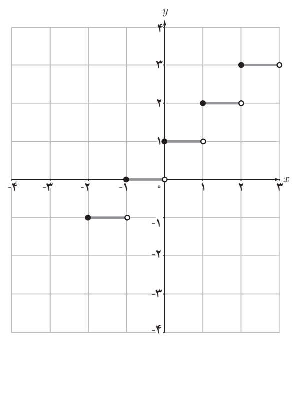
۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+۱ \quad , \quad -۲\le x<۳$ ب) $f(x)=[\frac{۱}{۲}x] \quad , \quad -۴\le x<۴$

حل :

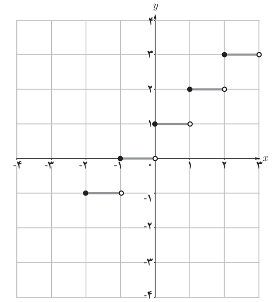
الف)

$$-۲\le x<۳ \rightarrow \begin{cases} -۲\le x<-۱ \rightarrow [x]=-۲ \rightarrow y=-۲+۱=-۱ \\ -۱\le x<۰ \rightarrow [x]=-۱ \rightarrow y=-۱+۱=۰ \\ ۰\le x<۱ \rightarrow [x]=۰ \rightarrow y=۰+۱=۱ \\ ۱\le x<۲ \rightarrow [x]=۱ \rightarrow y=۱+۱=۲ \\ ۲\le x<۳ \rightarrow [x]=۲ \rightarrow y=۲+۱=۳ \end{cases}$$

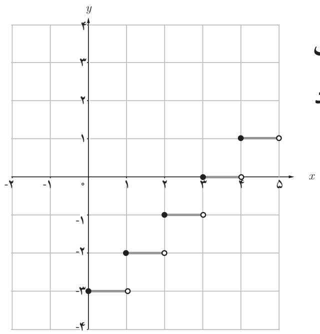


ب)

$$-۴\le x<۴\to -۲\le \frac{x}{۲}<۲\to \begin{cases} -۲\le \frac{x}{۲}<-۱\to [\frac{x}{۲}]=-۲\to y=-۲ & (-۴\le x<-۲) \\ -۱\le \frac{x}{۲}<۰ \to [\frac{x}{۲}]=-۱\to y=-۱ & (-۲\le x<۰) \\ ۰\le \frac{x}{۲}<۱ \to [\frac{x}{۲}]=۰ \to y=۰ & (۰\le x<۲) \\ ۱\le \frac{x}{۲}<۲ \to [\frac{x}{۲}]=۱ \to y=۱ & (۲\le x<۴) \end{cases}$$



۸ نمودارهای دو تابع $y=[x-۳]$ و $y=[x]-۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟



حل : دو تابع با هم برابرند.

نتیجه : $[x]-۳=[x-۳]$

۹ اگر تعداد افرادی که،طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t)=\frac{۹۵۰۰t-۲۰۰۰}{۴+t}$ به‌دست آید که در آن $t>۰$ زمان برحسب ماه است :

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

حل :

الف) ۵۰۵۶ نفر $\quad n(۵)=\frac{۹۵۰۰\times ۵-۲۰۰۰}{۴+۵}=۵۰۵۵/۵$

ب) $۵۵۰۰=\frac{۹۵۰۰t-۲۰۰۰}{t+۵}\to t=۶$

پ) درس ۳ :

تمرین ص ۶۲

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

حل : تابع‌های زیادی می‌توان مثال زد که یک به یک نیستند.

ــ فرض کنید علی و فاطمه فرزند رضا هستند پس {(رضا و فاطمه),(رضا و علی)}=f یک تابعی است که یک به یک نمی‌باشد.

ــ دمای هوا و ساعات روز یک تابع است که ممکن است دمای ساعت ۷ صبح با دمای ساعت ۲۰ شب با هم برابر باشند. در این صورت این تابع یک به یک نمی‌باشد.

۲ آیا تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۵}{۲}$ است؟

حل : خیر. تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ یک تابع ثابت با دامنه $\mathbb{R}$ است و یک به یک نمی‌باشد بنابراین وارون‌پذیر هم نیست.

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید :

الف) $f(x)=(x+۵)^۲ \quad , \quad x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱ \quad , \quad x\geq ۲$

پ) $f(x)=(x-۳)^۲$

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

حل : الف) تابعی یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.

$y=(x+۵)^۲ \qquad x\geq -۵$

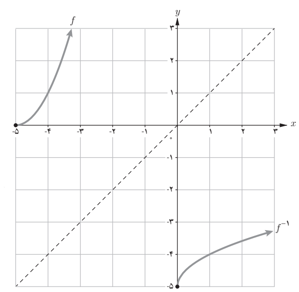
$x+۵=\pm\sqrt{y} \xrightarrow{x\geq -۵} x+۵=\sqrt{y}$

$\to x=\sqrt{y}-۵$

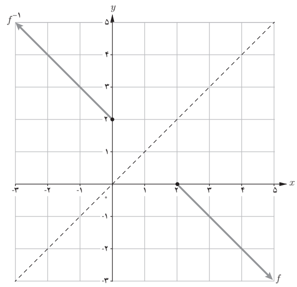
$\to f^{-۱}(x)=\sqrt{x}-۵$

$D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

$R_{f^{-۱}}=[-۵,+\infty)$



ب) تابعی یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.



$y=-|x-۱|+۱ \qquad x\geq ۲$

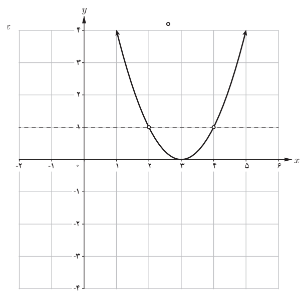
$y=-(x-۱)+۱=-x+۲$

$x=-y+۲ \longrightarrow f^{-۱}(x)=-x+۲$

$D_{f^{-۱}}=(-\infty,۰]$

$R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$

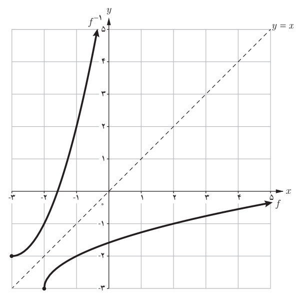
پ) این تابع یک به یک نیست زیرا خط $y=۱$ نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس وارون‌پذیر هم نمی‌باشد.



$y=(x-۳)^۲$

$$(x-۳)^۲=۱ \longrightarrow x-۳=\pm۱ \longrightarrow \begin{cases} x=۴ \\ \text{یا} \\ x=۲ \end{cases}$$

ت) تابع f یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.



$y=\sqrt{x+۲}-۳ \rightarrow \sqrt{x+۲}=y+۳$

$\longrightarrow x+۲=(y+۳)^۲$

$\longrightarrow x=(y+۳)^۲-۲$

$\longrightarrow f^{-۱}(x)=(x+۳)^۲-۲$

$D_{f^{-۱}}=[-۳,+\infty)$

$R_{f^{-۱}}=[-۲,+\infty)$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=۱۰۰-۵t^۲$ به‌دست می‌آید.

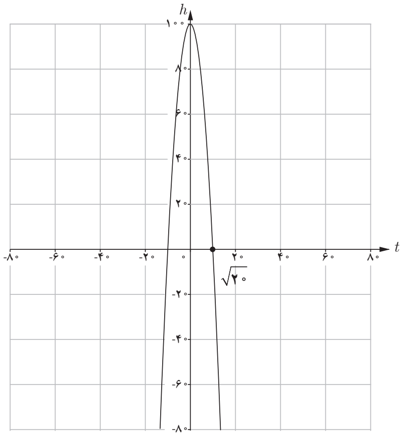
الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید. ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

حل : الف) $D=[۰,\sqrt{۲۰}\,]$ و $R=[۰,۱۰۰]$

ب) زیرا سنگ در هر زمان یک ارتفاع منحصربه‌فرد دارد پس تابع ارتفاع برحسب زمان یک‌به‌یک است.

پ)



$y=۱۰۰-۵t^{۲}$

$۵t^{۲}=۱۰۰-y$

$t^{۲}=\frac{۱۰۰-y}{۵}$

$t=\pm\sqrt{\frac{۱۰۰-y}{۵}}$

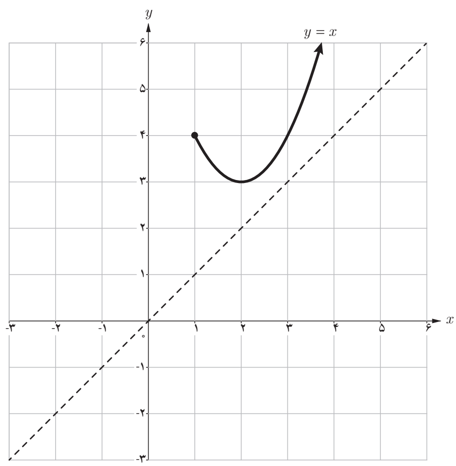
از طرفی $t>۰$ پس $t=\sqrt{\frac{۱۰۰-y}{۵}}$ یعنی $\sqrt{\frac{۱۰۰}{\quad}}$ (t) h .

$D_{h^{-۱}}=[۰,۱۰۰]$

$R_{h^{-۱}}=[۰,\sqrt{۲۰}\,]$

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x<f(x)$.

حل : این سؤال بازپاسخ می‌باشد و بی‌شمار تابع می‌توان مثال زد. برای پاسخ‌گویی بهتر، می‌توان خط $y=x$ را رسم کرد و سپس تابع را طوری بالای خط $y=x$ رسم کنید که یک به یک نباشد. به‌عنوان یک نمونه به صورت روبه‌رو است.



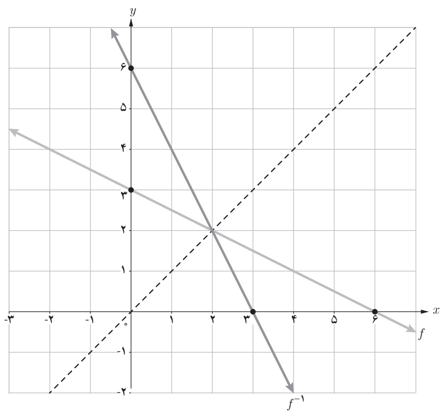
۶ وارون تابع $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

حل : تابع خطی $y = -\frac{۱}{۲}x + ۳$ یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.

$$y = -\frac{۱}{۲}x + ۳ \rightarrow y - ۳ = \frac{۱}{۲}x \rightarrow x = -۲y + ۶$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x) = -۲x + ۶$$

$$D_{f^{-۱}} = \mathbb{R} \quad , \quad R_{f^{-۱}} = \mathbb{R}$$



تمرین ص ۶۹

۱ اگر $f(x) = ۴x$ و $g(x) = ۲ - x$، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید.

حل : $D_f = \mathbb{R} \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۴x}{۲ - x} \qquad D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = \mathbb{R} - \{۲\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = ۴x - (۲ - x) = ۵x - ۲ \qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۴(۲ - x) = ۸ - ۴x$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ - x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید.

حل :

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۱}{\frac{۴}{x}-۳}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R}-\{۰\} \mid \frac{۴}{x}\in \mathbb{R}-\{۳\}\}=\mathbb{R}-\{۰,\frac{۴}{۳}\}$$

$$\frac{۴}{x}\neq ۳$$

$$x\neq \frac{۴}{۳}$$

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(۴)=۷$ و $f(۷)=۵$، آن‌گاه $(fog)(۴)=۳۵$

ب) اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$، آن‌گاه $(\frac{f}{g})(۲)=۱$

پ) اگر $g(x)=۲x-۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ ، آن‌گاه $(fog)(۵)=g(۲)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم : $fog=gof$

ث) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ، آن‌گاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^۲$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم : $fg=gf$

حل : الف) نادرست است زیرا : $(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۷)=۵\neq ۳۵$

ب) درست است زیرا : $(\frac{f}{g})(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۲+۴}{۳(۲)}=\frac{۶}{۶}=۱$

پ) درست است زیرا : $(fog)(۵)=f(g(۵))=f(۹)=۳=g(۲)$

ت) نادرست است زیرا اگر $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ، آن‌گاه :

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x})^۲+۱=x+۱\\(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^۲+۱}\end{array}\right\}\Rightarrow fog\neq gof$$

ث) نادرست است زیرا :

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x^۲-۴})^۲-۴=x^۲-۸\neq -x^۲$$

ج) درست است زیرا : $(fg)(x)=f(x)g(x)=g(x)f(x)=(gf)(x)\longrightarrow fg=gf$

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=۲n \end{cases}$ و $f: A\to\mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود :

$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ که در آن : $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، توابع $f+g$ و gof را به‌دست آورید.

حل : برای تعریف تابع $f+g$، ابتدا بایستی دامنهٔ g را محدود کنیم زیرا دامنهٔ f برابر $\{۱,۲,۳,۴\}$ است پس :

$$g=\{(۱,۲)\,,(۲,۴)\,,(۳,۶)\,,(۴,۸)\}$$
$$\Rightarrow f+g=\{(۱,۴)\,,(۲,۷)\,,(۳,۱۱)\,,(۴,۱۵)\}$$

در مورد تابع gof داریم :

$$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}=\{۱,۲,۳,۴\}$$
$$gof=\{(۱,۴)\,,(۲,۶)\,,(۳,۱۰)\,,(۴,۱۴)\}$$

۵ اگر $f=\{(-۴,۱۳)\,,(-۱,۷)\,,(۰,۵)\,,(\frac{۵}{۲},۰)\,,(۳,-۵)\}$ و
$g=\{(-۴,-۷)\,,(-۲,-۵)\,,(۰,-۳)\,,(۳,۰)\,,(۵,۲)\,,(۹,۶)\}$
توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

حل : برای محاسبه $f\pm g$ و $\frac{f}{g}$ ابتدا بایستی دامنه اشتراک آنها را بیابیم.

$$D_f\cap D_g=\{-۴,۰,۳\}$$

$$f+g=\{(-۴,۶)\,,(۰,۲)\,,(۳,-۵)\}$$

$$f-g=\{(-۴,۲۰)\,,(۰,۸)\,,(۳,-۵)\}$$

$$\frac{f}{g}=\{(-۴,\frac{-۱۳}{۷}),(۰,\frac{-۵}{۳})\}$$

۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

حل :

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۲,۲] \mid \sqrt{۴-x^۲}\in\mathbb{R}\}=[-۲,۲]$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{۴-x^۲+۵}=\sqrt{۹-x^۲}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt{x^۲+۵}\in[-۲,۲]\}=\varnothing$$

بنابراین gof تعریف نمی‌شود.

$$۰\le\sqrt{x^۲+۵}\le ۲$$

$$x^۲+۵\le ۴$$

$$x^۲\le -۱$$

---

۷ اگر $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=x+۳$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳\quad,\quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$$

حل : $x+۳$ ساده شده است درحالی‌که اجازه ساده کردن را نداریم. در حالی می‌توان $x+۳$ را در صورت و مخرج یک کسر ساده کرد که $x\neq-۳$. بنابراین راه حل درست به‌صورت زیر است :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳\qquad x\neq-۳$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۳\}$$

---

۸ اگر $f(x)=۲x+۵$ ، $f^{-۱}(x)$ ، $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید.

حل :

$$y=۲x+۵\rightarrow ۲x=y-۵\rightarrow x=\frac{y-۵}{۲}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

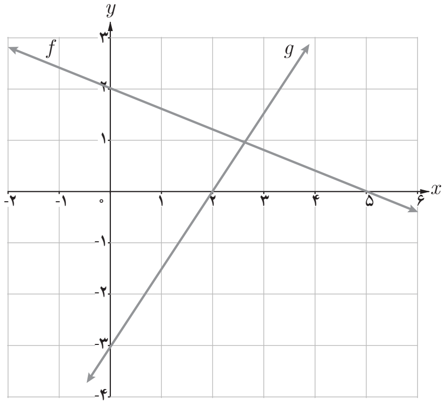
$$(fof^{-۱})(x)=f(f^{-۱}(x))=۲(\frac{x-۵}{۲})+۵=x\quad;\quad x\in D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$$

$$(f^{-۱}of)(x)=f^{-۱}(f(x))=\frac{۲x+۵-۵}{۲}=x\quad;\quad x\in D_f=\mathbb{R}$$

بنابراین $fof^{-۱}=f^{-۱}of$.

۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.

حل :



$$f(x)=۲-\frac{۲}{۵}x \quad ; \quad D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=-۳+\frac{۳}{۲}x \quad ; \quad D_g=\mathbb{R}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-۱+\frac{۱۱}{۱۰}x$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۵-\frac{۱۹}{۱۰}x$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(۲-\frac{۲}{۵}x)(-۳+\frac{۳}{۲}x)$$

$$D_{f\pm g}=D_f\bigcap D_g=\mathbb{R}$$

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$

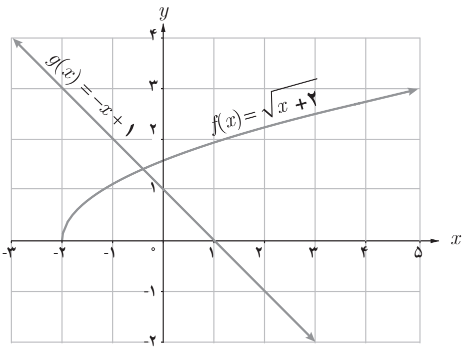
ب) $(f+g)(-۳)$

پ) $(fg)(\frac{۱}{۲})$

ت) $(fog)(-۴)$

ث) $(\frac{f}{g})(۰)$

ج) $(gof)(-۱)$



حل : الف) $(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۲+(-۱)=۱$

ب) $(f+g)(-۳)=f(-۳)+g(-۳)=$ تعریف نشده

پ) $(f.g)(\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲}).g(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\frac{۵}{۲}}.\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵}{۲}}$

ت) $(fog)(-۴)=f(g(-۴))=$ تعریف نشده

ث) $(\frac{f}{g})(۰)=\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۲}$

ج) $(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=۰$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ ($a \neq ۰$) باز هم یک تابع خطی است.

حل : تابع خطی $y = ax + b$ که $a \neq ۰$ در نظر بگیرید.

$$ax = y - b \rightarrow x = \frac{۱}{a}y - \frac{b}{a} \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{a}x - \frac{b}{a}$$

بنابراین $f^{-۱}$ نیز یک تابع خطی است.

۱۲ تابع $f(x) = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

حل : برای این منظور بایستی تابع وارون f را پیدا کنیم.

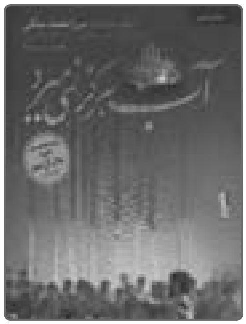
$$y = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲) \rightarrow x - ۳۲ = \frac{۹}{۵}y$$

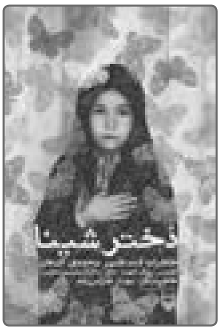
$$\rightarrow x = \frac{۹}{۵}y + ۳۲ \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۹}{۵}x + ۳۲$$

x : برحسب درجه سانتی‌گراد

$f^{-۱}(x)$: برحسب درجه فارنهایت

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزهٔ خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید :





یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به‌چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دوکتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

حل :

الف) $f(x)=10000+(x-1)(70000) \qquad x\geq 1$

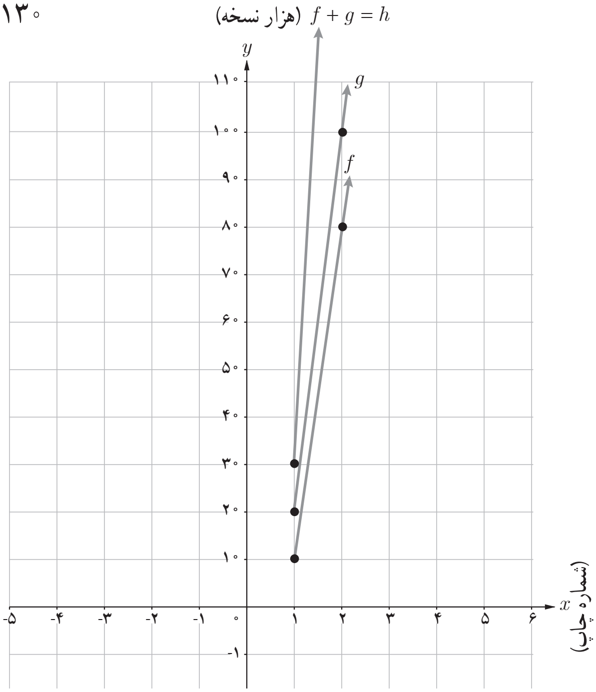
$g(x)=20000+(x-1)(90000) \qquad x\geq 1$

ب) $h(x)=f(x)+g(x)=30000+160000(x-1) \qquad x\geq 1$

پ) $y=f(x)=70x-70+10=70x-60$

$y=20+90x-90=90x-70$

$y=30+160x-160=160x-130$



فعالیت ص ۷۲

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(۰)=۱$، آن‌گاه باتوجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

جدول (۱)

جرم باکتری‌ها $m(t)$	t زمان (ساعت)
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	?=۴
?=۳۲	۵
?=۶۴	۶
⋮	⋮
۱۰۲۴	?=۱۰

الف) در زمان‌های $t=۶$ و $t=۵$ جرم باکتری‌ها را به‌دست آورید.

$m(۵)=۳۲$

$m(۶)=۶۴$

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟

$۶۴ \xrightarrow{\times ۲} ۱۲۸ \xrightarrow{\times ۲} ۲۵۶$

با توجه به جدول، پس از ۸ ساعت جرم باکتری‌ها به ۲۵۶ گرم می‌رسد.

و پس از ۱۰ ثانیه نیز جرم باکتری‌ها به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد.

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به‌دست آورد؟

در هر مرحله جرم باکتری‌ها دو برابر مرحله قبل است.

در فعالیت بعدی، هدف گسترش دامنه این تابع است، بنابراین با پرکردن اعداد جدول نقاط بیشتری از نمودار تابع $y=۲^x$ نمایان می‌شوند. سرانجام، به‌صورت دستوری به دانش‌آموز آموزش داده می‌شود که اگر نقاط بیشتری از این تابع را داشته باشد که این نقاط شامل نقاط گویا و اصم است شکل این تابع شبیه نموداری است که در صفحه ۷۴ رسم شده است. برای اینکه دانش‌آموز متوجه باشد که دامنه این تابع اعداد حقیقی است، در ادامه این فعالیت از وی خواسته می‌شود تا مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کند. همچنین یکی از اهداف دیگر این فعالیت، آموزش این مطلب است که نمودار تابع $y=a^x$ هرگز محورxها را قطع نمی‌کند.

جدول (۲)

$m(t)$	t
$۲^۰=۱$	۰
$۲^۱=۲$	۱
$۲^۲=۴$	۲
$۲^۳=۸$	۳
⋮	⋮
$۲^۹=۵۱۲$	?=۹

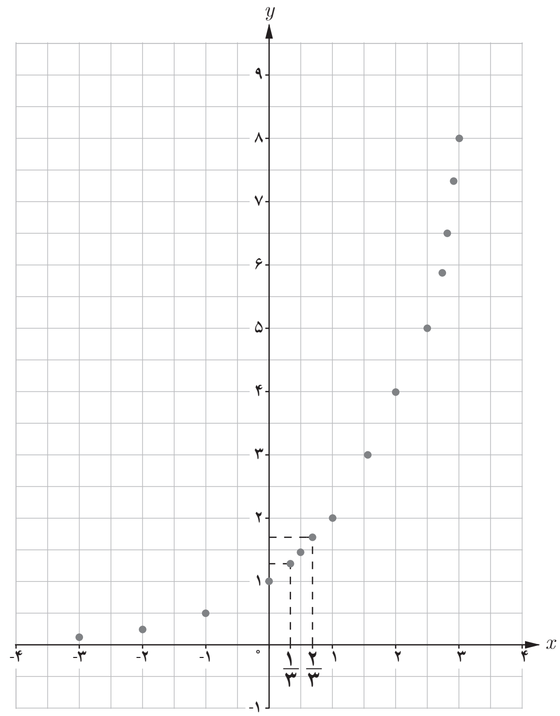
فعالیت ص ۷۳

در نمودار فعالیت قبل، نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به‌دست آورد.

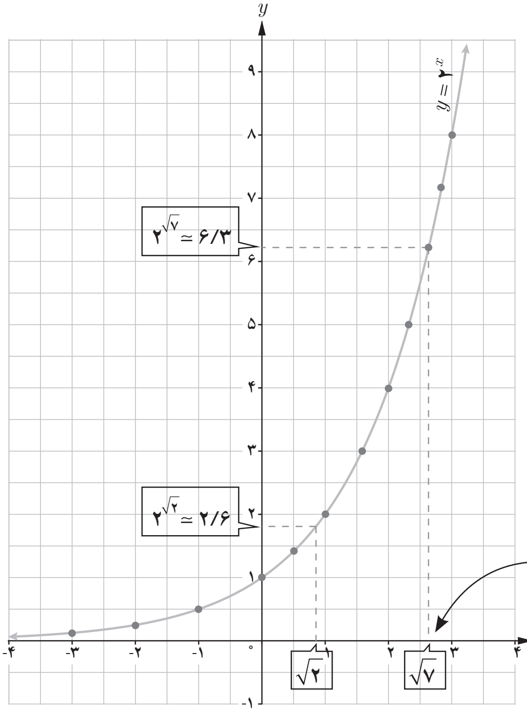
الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
۲^x	$۲^{-۳}$	$۲^{-۲}$	$۲^{-۱}$	$۲^{۰}$	$۲^{\frac{۱}{۳}}$	$۲^{\frac{۱}{۲}}$	$۲^{\frac{۲}{۳}}$	$۲^{۱}$	$۲^{\frac{۳}{۲}}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\sqrt[۳]{۲} \simeq ۱/۲۶$	$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$	$\sqrt[۳]{۴} \simeq ۱/۵۶$	۲	$\sqrt{۸} \simeq ۲/۸۳$	۴	۸

ب) نقاط به‌دست آمده را در یک صفحهٔ شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).



همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنهٔ تابع $y=۲^x$ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است. اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار زیر حاصل می‌شود.



پ) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟

زیرا هر خط که به موازات محور yها رسم شود، حداکثر در یک نقطه نمودار روبه‌رو را قطع می‌کند.

ت) نقطهٔ $x=\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

با توجه به نمودار، مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ برابر ۲/۶ است.

ث) کدام‌یک از اعداد زیر، بین دو عدد $۲^۳$ و $۲^۲$ قرار دارد؟

$$۲^{\frac{۵}{۲}} \qquad ۲^{\frac{۳}{۲}} \qquad ۲^۵ \qquad ۲^{-۱}$$

عدد $\frac{۵}{۲}$ بین دو عدد ۲ و ۳ قرار دارد. از این رو عدد $۲^{\frac{۵}{۲}}$ بین دو عدد $۲^۲$ و $۲^۳$ قرار دارد.

ج) چرا نمودار تابع $y=۲^x$ محور xها را قطع نمی‌کند؟

با توجه به نمودار $y=۲^m$، مقدار این تابع به ازای هر عدد حقیقی همواره بزرگ‌تر از صفر است و هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که به ازای آن ۲^m برابر صفر شود بنابراین نمودار این تابع هرگز محور xها را قطع نمی‌کند.

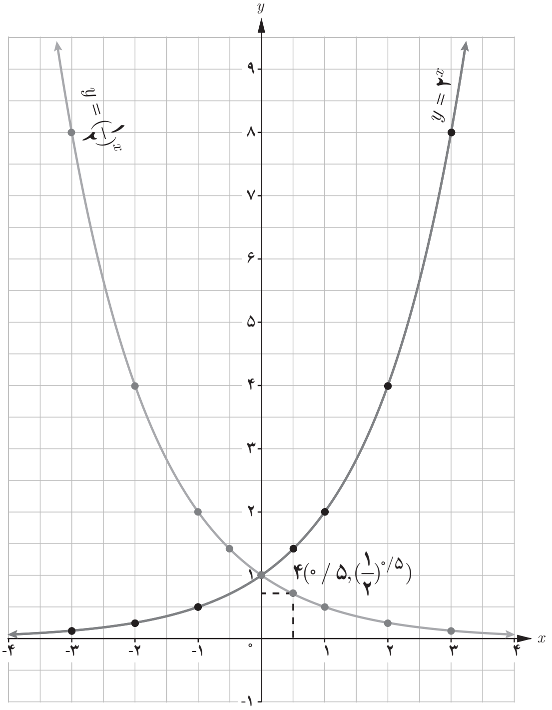
هدف کار در کلاس آشنایی با توابع $f(x)=a^{-x}$ و کشف رابطه $f(x)=a^{-x}=(\frac{۱}{a})^x$ است و در ادامه از دانش‌آموز انتظار می‌رود بتواند دو تابع $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ را با هم مقایسه کند و دامنه و برد هریک را به‌دست آورد.

کار در کلاس ص ۷۵

الف) نمودار تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y=۲^x$ مقایسه کنید.

هر دو تابع دو نقطه (۰,۱) محور yها را قطع می‌کنند.

در تابع $y=۲^x$ با افزایش x، مقدار تابع افزایش می‌یابد و در تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ با افزایش x، مقدار تابع کاهش می‌یابد.



ب) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

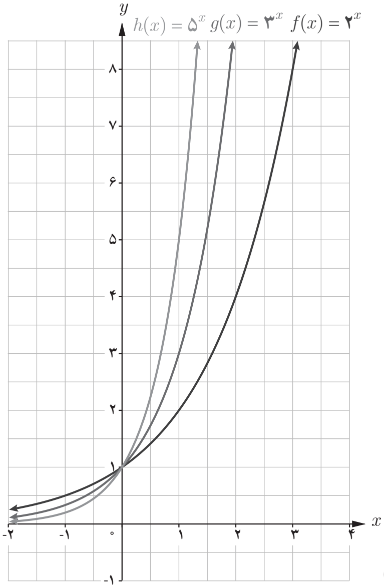
با توجه به نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ ، دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

پ) نقطه $\left(۰/۵\ ,\ (\frac{۱}{۲})^{۰/۵}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.

بعد از کار درکلاس مثال‌هایی برای کاربرد مفهوم تابع نمایی و استفاده از آن در حل مسایل آورده شده است که انتظار می‌رود، در این قسمت مثال‌های بیشتری ارائه شود.

هدف کار در کلاس صفحه ۷۶، مقایسه نمودار تابع $f(x)=a^x$، $y(x)=b^x$ و $h(x)=c^x$ است که در آن $۱<a<b<c$ یا $۰<c<b<a<۱$ است. سؤال پنجم این کار درکلاس در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع نمایی $y=a^x$ بحث می‌کند.

کار در کلاس ص ۷۶



شکل (۱)

۱ نمودارهای سه تابع $f(x)=2^x$، $g(x)=3^x$ و $h(x)=5^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

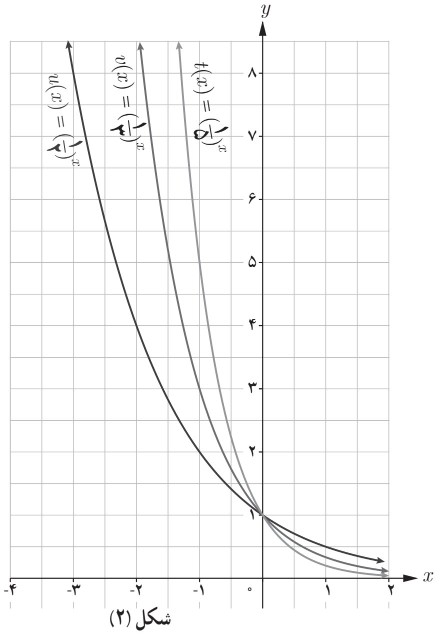
۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید.

دامنه هر سه تابع، مجموعه اعداد حقیقی و برد آنها مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟ بله

زیرا هر خط موازی محور yها نمودار توابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۴ نمودارهای توابع $u(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$، $v(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $t(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به‌دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟



شکل (۲)

با توجه به نمودار توابع، دامنه در همه موارد مجموعه اعداد حقیقی و برد مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

این توابع یک به یک هستند. زیرا به ازای هر خط موازی محور xها، نمودار هر یک از توابع، حداکثر در یک نقطه قطع می‌شود.

۵ــ الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$2^4, (\frac{1}{2})^2, 2^2, 2^3, (\frac{1}{2})^4, (\frac{1}{2})^3 \rightarrow 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^2, 2^3, 2^4$

ب) جاهای خالی را پر کنید :

در تابع $f(x)=a^x$ ،

ــ اگر $a>1$، با افزایش مقدار x، مقادیر f افزایش می‌یابند.

ــ اگر $0<a<1$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f کاهش می‌یابند.

تمرین ص ۷۷

۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

$g(t)=۱۰۰\times ۲^{t}$

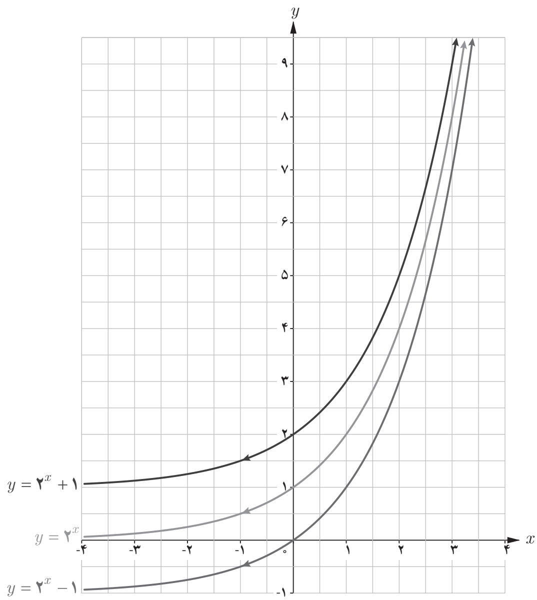
gجرم توده پس از t ساعت است.

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

$g(۲۰)=۱۰۰\times ۲^{۲۰}$

۲ نمودار توابع $y=۲^{x}$ ، $y=۲^{x}+۱$ و $y=۲^{x}-۱$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y=a^{x}$ ، $y=a^{x}+۲$ و $y=a^{x}-۲$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $(a>۱)$.

این تمرین، در مورد انتقال تابع $y=a^{x}$ است. دانش‌آموزان قبلاً برای تابع $y=f(x)$ در حالت کلی، با این مسئله آشنا شده‌اند.



نمودار تابع $y=a^x+۲$ از انتقال دو واحد به بالای همه نقاط نمودار $y=a^x$ و نمودار تابع $y=a^x-۲$، از انتقال دو واحد به پایین نمودار تابع $y=a^x$، حاصل می‌شود.

۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t)=۱۰(۰/۸)^t$ به‌دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

حل :

الف) $A(۸) = ۱۰(۰/۸)^۸ \simeq ۱/۶۷$

ب)

میزان از بین رفتن دارو در هر ساعت : $B(t) = ۱۰ - ۱۰(۰/۸)^t = ۱۰^۲(۱-(۰/۸)^t)$

پس به مقدار $۱۰^۲(۱-(۰/۸)^t)$ درصد از دارو در هر ساعت از بین می‌رود.

۴ الف) سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید.

$$۳^{۲/۵} < ۳^{۲/۶} < ۳^{۲/۷} < ۳^{۲/۷۱} < ۳^{۲/۸} < \ldots < ۳^{\sqrt{۱۰}}$$

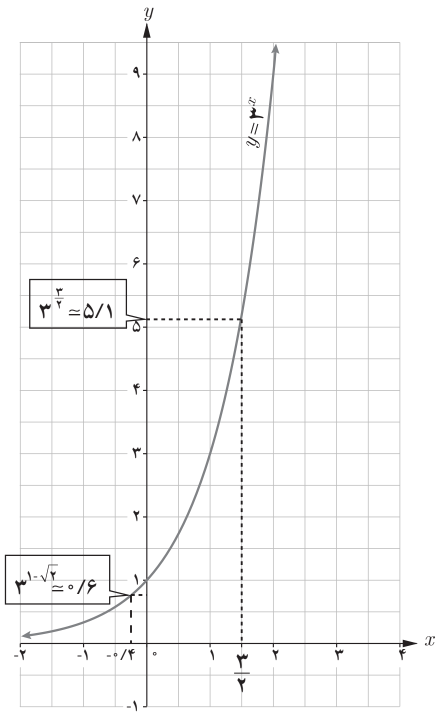
ب) نامعادلهٔ توانی $۴^{۲x-۱} > \frac{۱}{۱۰۲۴}$ را حل کنید.

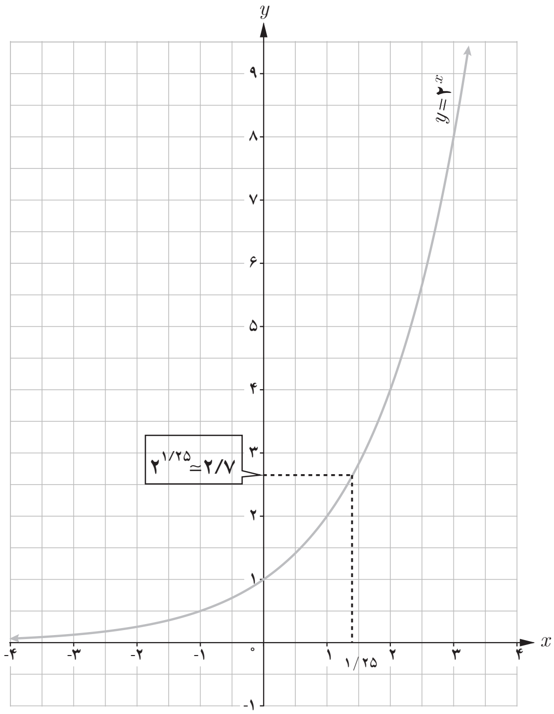
$$۲^{۴x-۲} > ۲^{-۱۰} \rightarrow ۴x - ۲ > -۱۰ \rightarrow x > -۲$$

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x > a^y > a^z$، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a>۱$).

چون $a>۱$ و $a^x > a^y > a^z$ پس $x>y>z$.

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.





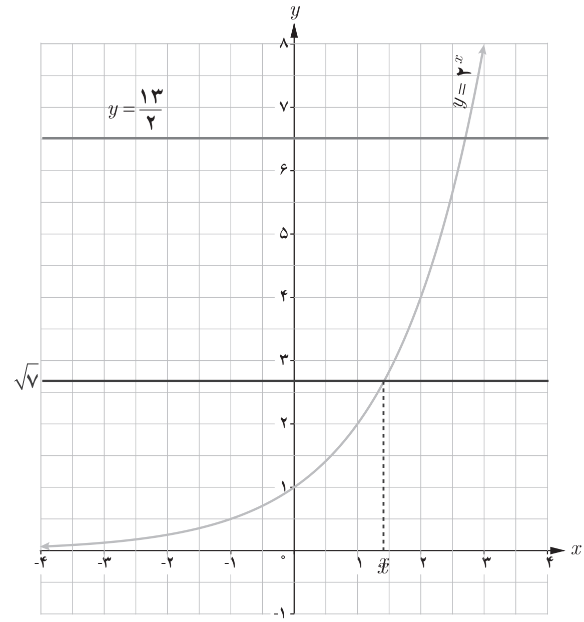
الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}} \simeq ۰/۶۳$

ب) $۲^{۱/۲۵} \simeq ۲/۸۲$

پ) $۳^{\frac{۳}{۲}} \simeq ۵/۱۹$

۶ الف) در شکل زیر خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ نمودار $y=۲^x$ راقطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟چرا؟

با توجه به نمودار $۲^۳ > ۲^{\frac{۱۳}{۲}} > ۲^۲$ ، پس طول نقطه برخورد بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ است.



ب) خط $y = \sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

با توجه به نمودار $۲^۲ > ۲^x > ۲^۱$

پس طول نقطه برخورد بین دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

۷ در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آن‌گاه $۰/۴۹ = ۰/۷ \times ۰/۷$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟ $f(t)=۱۰۰(۰/۷)^t$

t تعداد لایه فیلتر مورد استفاده است.

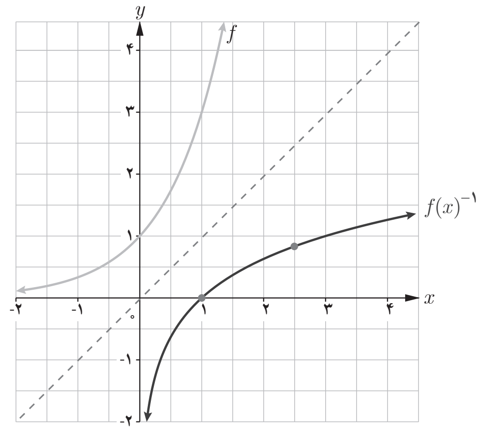
ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

رابطه درصد ناخالصی آب که به ازای تعداد فیلتر t از بین می‌رود : $h(t)=۱۰۰(۰/۳)^t$

$۱۰۰(۰/۳)^t < ۴ \rightarrow (۰/۳)^t < ۰/۰۴ \rightarrow t = ۳$

فعالیت ص ۸۱

۱ باتوجه به نمودار تابع $f(x)=۳^{x}$ نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.



$f(-۲)=۳^{-۲}=\frac{۱}{۹}$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۹})=-۲$
$f(-۱)=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۳})=-۱$
$f(۰)=۳^{۰}=۱$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(۱)=۰$
$f(۱)=۳^{۱}=۳$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(۳)=۱$
$f(\frac{۳}{۲})=۳^{\frac{۳}{۲}}\simeq ۵/۱$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(۳^{۳/۲})=\frac{۳}{۲}$
$f(۲)=۳^{۲}=۹$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(۹)=۲$

۲ گزینهٔ درست را با ✓ و گزینه غلط را با × علامت بزنید.

ـ نقطهٔ ($\frac{۱}{۹}$ و ۲−) روی نمودار f قرار دارد. ✓

ـ نقطه ($\frac{۱}{۳}$و ۱−) روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. ×

ـ نقطهٔ (۰ و ۱) روی نمودار f قرار دارد. ×

ـ نقطه (۲− و $\frac{۱}{۹}$) روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. ✓

ـ تابع $f^{-۱}$ یک به یک است. ✓

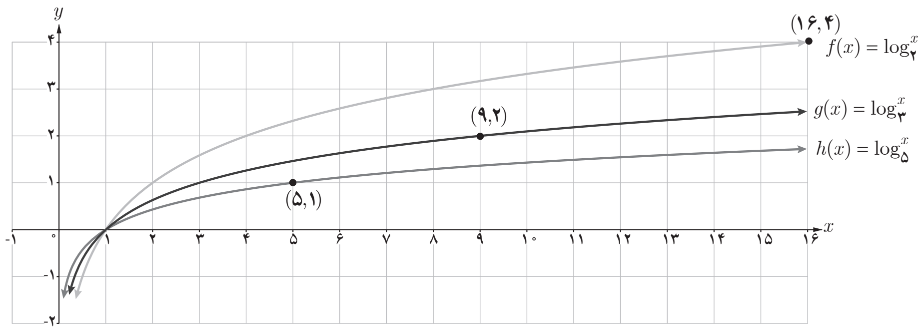
کار در کلاس ص ۸۳

۱

الف) نمودار سه تابع $f(x)=\log_۲ x$ ، $g(x)=\log_۳ x$ و $h(x)=\log_۵ x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هریک را روی نمودار آن بنویسید.

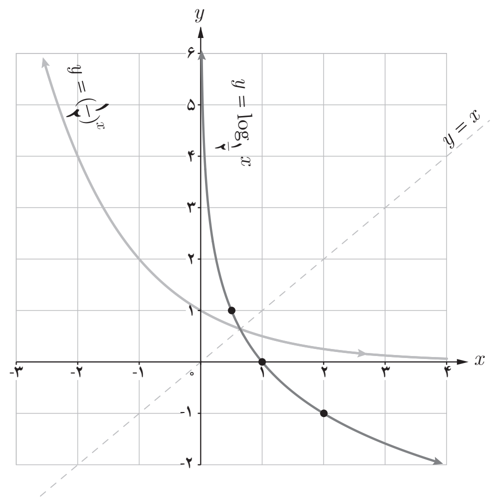
ب) محل دقیق هریک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

(۱۶ , ۴) و (۹ , ۲) و (۵ , ۱)



هدف این سؤال، ۱ مقایسه توابع لگاریتمی $f(x)=\log_a^x$ ، $g(x)=\log_b^x$ و $h(x)=\log_c^x$ در حالت مختلف a,b,c است که $a,b,c\neq ۱$.

پ) با توجه به نمودار $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.



نمودار تابع $y=\log_{۱/۳}^x$ قرینه نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ نسبت به خط $y=x$ است.

۲ مشخص کنید هر یک از نمودارهای زیر به کدام‌یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

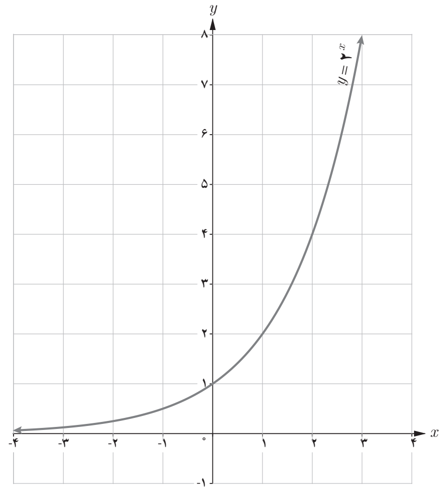
در این سؤال، از دانش‌آموزان انتظار می‌رود تا بتوانند، نمودار توابع نمایی و لگاریتمی را با هم مقایسه کنند.

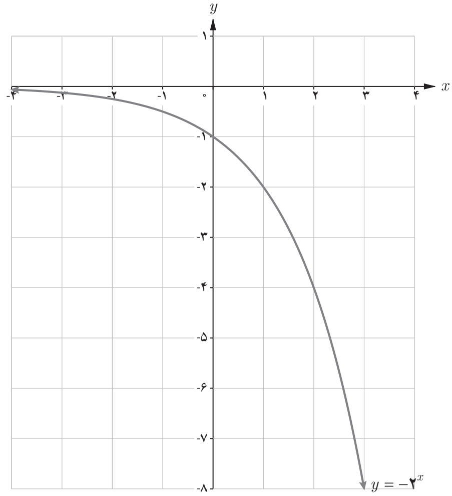
نکته :

در کاردرکلاس ۲، دانش‌آموز به‌راحتی می‌تواند با استفاده از نقطه‌یابی نیز ضابطه هر تابع را پیدا کند و این کار منعی ندارد ولی هدف اصلی این کاردرکلاس، استفاده از خواص توابع می‌باشد.

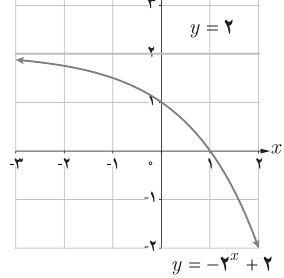
حل :

الف) $y=-۲^x+۲$، ابتدا تابع $y=۲^x$ را رسم می‌کنیم و سپس با استفاده از تعریف، قرینه آن نسبت به محور xها را رسم می‌کنیم.

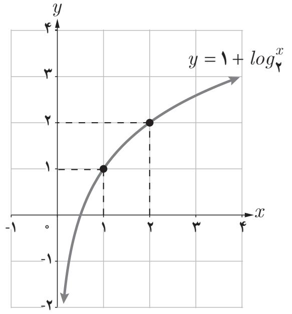




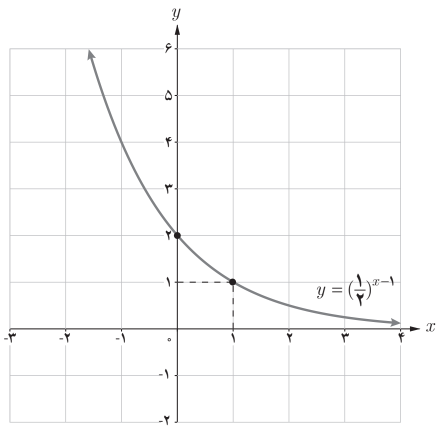
سپس تابع $y=-۲^x$ را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا شکل زیر حاصل شود.

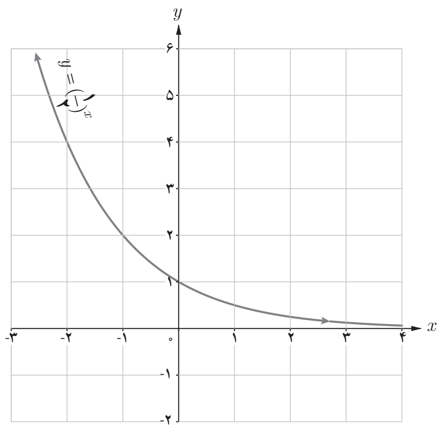


ب) برای رسم تابع $y=(\log x)+۱$، با استفاده از مطالب فصل تابع می‌دانیم کافی است ابتدا نمودار $y=\log_۲ x$ را رسم کنیم سپس، شکل آن را یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم. دقت کنید که پرانتز اضافی است و تابع $y=۱+\log_۲ x$ صحیح است که شکل آن به‌صورت روبه‌رو است :



پ) سرانجام برای رسم نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$ کافی است ابتدا نمودار $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کرده و سپس نمودار آن را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم.





۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_۳^{۸۱}$

اگر $a=\log_۳^{۸۱}$، آن‌گاه $۳^a=۸۱$ در نتیجه $a=۴$

ب) $\log_{۱/۶}^{\frac{۱}{۶}}$

اگر $b=\log_{۱/۶}^{\frac{۱}{۶}}$، آن‌گاه $(۱/۶)^b = ۱/۶$ در نتیجه $b=۱$

پ) $\log_۲^۸$

اگر $c=\log_۲^۸$، آن‌گاه $۲^c=۸$ در نتیجه $c=۳$

تمرین ص ۸۵

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

$a=\log_{۱۰} ۰/۰۱ \rightarrow ۱۰^{a}=۰/۰۱ \rightarrow a=-۲$

$b=\log_{۶}^{\frac{۱}{۶}} \rightarrow ۶^{b}=\frac{۱}{۶} \rightarrow b=-۱$

$c=\log_{۲}^{\sqrt{۲}} \rightarrow ۲^{c}=\sqrt{۲} \rightarrow c=\frac{۱}{۲}$

$d=\log_{۷}{}^{\sqrt[۳]{۷^{۲}}} \rightarrow ۷^{d}=\sqrt[۳]{۷^{۲}} \rightarrow d=\frac{۲}{۳}$

۲ نمودار تابع $y=\log_{a}x$ را برای دو حالت $a>۱$ و $۰<a<۱$ با هم مقایسه کنید.

در نمودار تابع $y=\log_{a}x$ اگر $a>۱$ ، با افزایش x مقدار y افزایش می‌یابد.

و در نمودار تابع $y=\log_{a}x$ اگر $۰<a<۱$ ، با افزایش x مقدار y کاهش می‌یابد.

همچنین هر دو نمودار در نقطه $x=۱$، محور xها را قطع می‌کنند.

۳

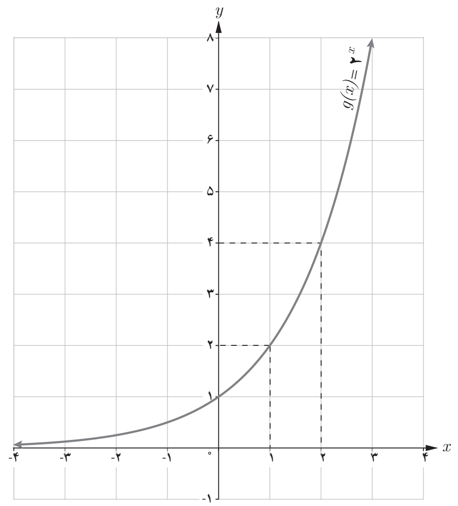
الف) خط $y=۲۷$ نمودار تابع $y=۳^{x}$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

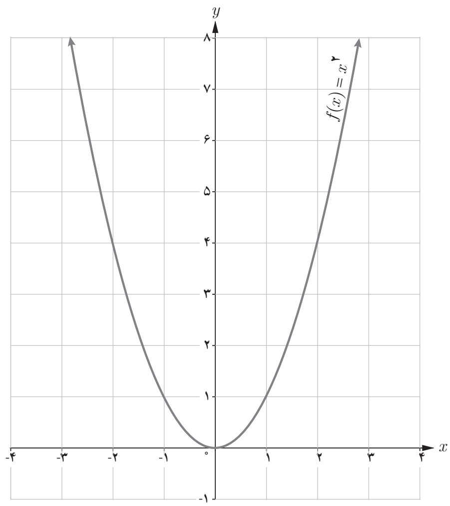
$۲۷=۳^{x}$ در نتیجه $x=۳$

ب) خط $y=۱۰$ نمودار تابع $y=(۰/۰۱)^{x}$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

اگر $(۰/۰)^{x}=۱۰$ آن‌گاه $۲x=-۱$ و در نتیجه $x=-\frac{۱}{۲}$.

۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۲^{x}$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.





تابع $y=x^{۲}$ نسبت به محور yها متقارن است، یک به یک نیست و یک نقطه مینیمم دارد و به ازای $x=۰$، دارای عرض صفر است.

تابع $y=۲^{x}$ یک به یک است و با افزایش مقدار x، مقدار تابع افزایش می‌یابد. این تابع در هیچ نقطه‌ای محور xها را قطع نمی‌کند و اصطلاحاً صفر ندارد.

دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی و برد تابع $y=x^{۲}$ بازه $[۰,+\infty)$ و برد تابع $y=۲^{x}$ بازه $(۰,+\infty)$ است.

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

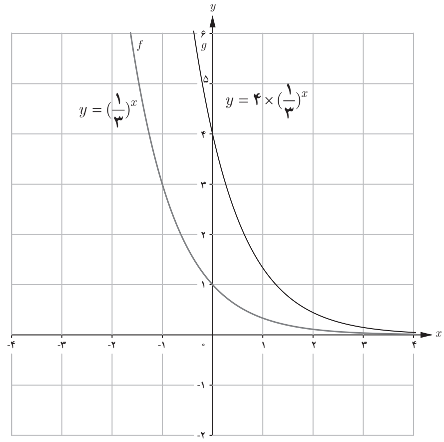
- لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. ✓
- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓
- تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است. ✓
- تابع لگاریتم محور yها را قطع می‌کند. ×
- اگر نقطه (b,d) روی نمودار $y=a^{x}$ قرار داشته باشد، آن‌گاه (d,b) روی نمودار $y=\log_{a}x$ قرار دارد. ✓
- اگر $a>b>۰$ آن‌گاه $\log_{۱۰}a<\log_{۱۰}b$. ×

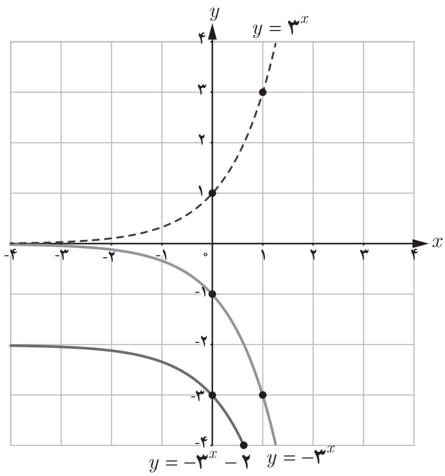
۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

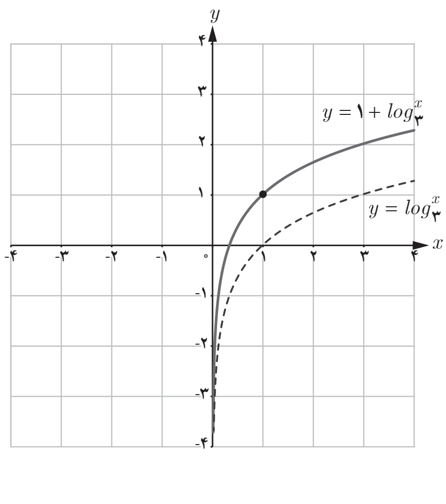
الف) $y=۱+\log_۳ x$

ب) $y=-۳^x-۲$

پ) $y=۴(\frac{۱}{۳})^x$







کار در کلاس ص ۸۷

۱ نشان دهید که اگر $a, b, c>0$ و $c\neq 1$، آن‌گاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

حل : فرض کنید $x = \log_c^a$ و $y = \log_c^b$ پس طبق تعریف $a=c^x$ و $b=c^y$.

پس $\log_c^a = x$ و $\log_c^b = y$ و

$$\frac{a}{b} = \frac{c^x}{c^y} = c^{x-y} \Rightarrow \log_c^{\frac{a}{b}} = x-y$$

$$\Rightarrow \log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

۲ اگر $a=\log 2$ و $b=\log 3$، حاصل عبارت‌های زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log 0/75 = \log \frac{75}{100} = \log 75 - \log 100 = \log 5^2 \times 3 - \log 10^2$

$$= \log 5^2 + \log 3 - 2\log 10 = 2\log 5 + \log 3 - 2$$

$$= 2(1-a) + b - 2 = b - 2a$$

ب) $3\log^{\sqrt[3]{4}} - \log 250 = 3\log 2^{\frac{2}{3}} - \log 5^2 \times 10$

$$= 3\times\frac{2}{3}\log 2 - (\log 5^2 + \log 10)$$

$$=2\log^{2}-2\log 5-1$$

$$=2a-2(1-a)-1$$

$$=4a+1$$

پ) $\log 0/005 = \log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 10^3$

$$=\log 5-3\log 10$$

$$=1-a-3$$

$$=-(a+2)$$

فعالیت ص ۸۸

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید :

الف) $\log_5(2x-1)=\log_5 x$

$2x-1=x \rightarrow \boxed{x=1}$

ب) $\log_3(x-1)+\log_3(\frac{x}{2}+1)=2$

$\log_3(x-1)(\frac{x}{2}+1)$

$=2\times\log_3 3 \Rightarrow (x-1)(\frac{x}{2}+1)=3^2$

$\Rightarrow x=4\ ,\ x=-5$ غ ق ق

پ) $\log x+\log(x+3)=1$

$\log_{10} x(x+3)=\log_{10} 10$

$x(x+3)=10 \Rightarrow x=2\ ,\ x=-5$ غ ق ق

تمرین ص ۹۰

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_۴ m^۲ - \log_۴ m - ۳ = ۰$

$$\log_۴ \frac{m^۲}{m-۳} = \log_۴ ۱ \to \frac{m^۲}{m-۳} = ۱ \to m^۲ - m + ۳ = ۰$$
$$\to \Delta < ۰$$

معادله جواب ندارد.

ب) $\log_۲ (۱۲b-۲۱) - \log_۲ (b^۲-۳) = ۲$

$$\log_۲ \frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳}$$

$$= ۲ \times \log_۲ ۲$$

$$\frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳} = ۴ \to ۴b^۲ - ۱۲b + ۹ = ۰ \to b = \frac{۳}{۲}$$

چون $۱۲(\frac{۳}{۲}) - ۲۱ = -۴$ پس جواب به‌دست آمده، قابل قبول نیست.

۲

الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = ۲^t$ به‌دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

$m^{-۱}(t) = \log_۲ t$

که دور آن t جرم باکتری و $m^{-۱}(t)$ زمان سپری شده برحسب ساعت است.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$$\log ۲ \simeq ۰/۳۰۱$$

$$\log_{۲} ۵۰۰۰ = \frac{\log_{۱۰} ۵۰۰۰}{\log_{۱۰} ۲} = \frac{\log ۵ \times ۱۰۰۰}{\log ۲} = \frac{\log ۵ + \log ۱۰۰۰}{\log ۲}$$

$$= \frac{\log ۵ + ۳}{\log ۲} \simeq \frac{۱ - ۰/۳۰۱ + ۳}{۰/۳۰۱} \simeq ۱۲/۲۸$$

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $a^{\log_b a} = a \quad (b \neq ۱ , a , b > ۰)$

نادرست است به عنوان مثال اگر $a=۱۰۰$ و $b=۱۰$ آن‌گاه

$$۱۰۰^{\log_{۱۰} ۱۰۰} \overset{?}{=} ۱۰۰^{۲} = ۱۰^{۴} \neq ۱۰۰$$

ب) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c \quad (d \neq ۱ , a , b , c , d > ۰)$

درست است. تعمیم حالت $\log_d ab = \log_d a + \log_d b$

پ) $\log x \log y = \log x + \log y$

نادرست. مثال

$$\log ۱۰ \log ۱۰۰ \overset{?}{\neq} \log ۱۰ + \log ۱۰۰$$

$$۱ \times ۲ \quad \neq \quad ۱ + ۲$$

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

نادرست. (به ازای هر x در بازه $(۰,۱)$ $\log_a x < ۰ , \log_a ۱ = ۰$ $(a \neq ۱, a > ۰)$

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید. $m(t) = ۱ \times ۲^{\frac{-t}{۴}}$

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟

$$۰/۰۱ = ۲^{\frac{-t}{۴}}$$

$$\log ۰/۰۱ = -\frac{t}{۴} \log ۲ \rightarrow -۲ = -\frac{t}{۴} \log ۲$$

$$t = \frac{۸}{\log ۲} \simeq \frac{۸}{۰/۳} \simeq ۲۶/۶$$

پس طی ۲۷ روز، جرم این عنصر به ۰/۰۱ کاهش می‌یابد.

۵ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log ۳ \simeq ۰/۴۷۷۱ \ , \log ۲ \simeq ۰/۳۰۱)$.

الف) $\log(۱۸\times۳۷۵)=\log ۱۸+\log۳۷۵=\log۲+۲\log۳+۳\log۵+\log۳$

$$=\log۲+۳\log۳+۳\log۵$$

$$\simeq ۰/۳+۳\times۰/۴+۳\ (۱-۰/۳)$$

$$=۳/۶$$

ب) $\log\sqrt{۰/۷۵}=\frac{۱}{۲}[\log۷۵-\log۱۰۰]$

$$=\frac{۱}{۲}[\log۳+۲\log۵-۲]$$

$$\simeq\frac{۱}{۲}[۰/۴+۲(۱-۰/۳)-۲]$$

$$=-۰/۱$$

پ) $\log_۲\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt[۴]{۲}}=\log_۲ ۲^{\frac{۲}{۳}}\div۲^{\frac{۱}{۴}}=\log_۲ ۲^{\frac{۵}{۴}}=\frac{۵}{۴}\log_۲ ۲=\frac{۵}{۴}$

۶ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

✓ $\log_b a\times\log_a b=۱$

$$\frac{\log a}{\log b}\times\frac{\log b}{\log a}=۱$$

× $\log ۵=\log ۳+\log ۲$

۷ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$$m(t)=۱۲۸\times۲^{\frac{-t}{۳۰}}$$

$m(۳۰۰)=۱۲۸\times۲^{-\frac{۳۰۰}{۳۰}}=۱۲۸\times۲^{-۱۰}=۰/۱۲۵$ میلی گرم

نمونه تمرین‌های حل شده

کدام‌یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است.

الف) $f(x) = (۲x-۱)^۲$ ب) $g(x) = \frac{۲^x}{۳^x}$ پ) $h(x) = (۰/۰۰۱)^x$

ت) $t(x) = x^{\frac{۱}{۵}}$ ث) $r(x) = (-۲)^x$

حل : طبق تعریف، هر تابع به‌صورت $y = a^x$ که در آن a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابعی نمایی است.

الف) همان‌طور که ملاحظه می‌شود،تابع، صورت کلی تابع نمایی را ندارد. پس $f(x)$ تابع‌نمایی نیست. چون دانش‌آموزان با تابع درجه ۲ آشنا هستند. برای رد این قسمت، می‌توان از رسم تابع نیز استفاده کرد.

ب) $g(x) = \frac{۲^x}{۳^x} = (\frac{۲}{۳})^x$

$a = \frac{۲}{۳} > ۰$ و $a \neq ۱$. پس این تابع نمایی است زیرا به‌صورت $y = a^x$ است.

پ) $h(x) = (۰/۰۰۱)^x$

$a = ۰/۰۰۱ > ۰$ و $a \neq ۱$. پس این تابع نمایی است زیرا به‌صورت $y = a^x$ است.

ت) $t(x) = x^{\frac{۱}{۵}}$

در تعریف تابع نمایی، پایه یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است ولی در تابع $t(x)$، پایه، یک متغیر است. پس این تابع نمایی نیست.

ث) در تابع $r(x)$، $a = -۲$ عددی منفی است پس $r(x)$ شرط لازم در تعریف تابع نمایی را ندارد.

بین اعداد $۲^{۳/۱}$ و $۲^{\sqrt{۷}}$ سه عدد پیدا کنید

می‌دانیم اگر دو عدد حقیقی مثبت توان‌دار پایه‌های برابر داشته باشند، هرچه توان بزرگ‌تر می‌شود، عدد هم بزرگ‌تر می‌شود از این خاصیت در پاسخ این سؤال استفاده می‌کنیم.

$\sqrt{۷}$ عددی گنگ با تقریب ۲/۶ است.

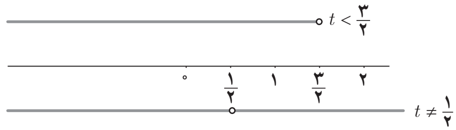
$$۲^{\sqrt{۷} = ۲/۶} < ۲^{۳/۱}$$

همه اعداد به‌صورت ۲^a که در آن $۲/۶ < a < ۳/۱$ بین دو عدد مذکور واقع هستند. پس اعداد $۲^{۲/۷}$، $۲^{۲/۸}$ و $۲^{۲/۸۱}$ و $۲^{۲/۸۱۲}$ و ... همگی جواب‌های مسئله‌اند.

■ حدود t را چنان بیابید که تابع $y = (\frac{۳}{۲} - t)^x$ یک تابع نمایی باشد.
طبق تعریف تابع نمایی به‌صورت $y = a^x$، a باید عددی مثبت و مخالف یک باشد پس

$-- >$ و $\frac{۳}{۲} - t \neq ۱$

$\frac{۳}{۲} > t$ و $- \neq$



که از اشتراک جواب‌های حاصل نتیجه می‌شود. $t \in (-\infty, \frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$

■ کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^x$ واقع است؟

الف) $(۰/۵, \frac{\sqrt{۲}}{۲})$ ب) $(۰ , ۲)$ پ) $(-۲ , ۴)$

حل :

$$(۵, \frac{\sqrt{۲}}{۲}) \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} \stackrel{?}{=} (\frac{۱}{۲})^{۰/۵ = \frac{۱}{۲}}$$

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = (\frac{۱}{۲})^{۰/۵}$$

و نقطه $(۰/۵, \frac{\sqrt{۲}}{۲})$ روی نمودار تابع f واقع است.

ب) $(۰,۱) \rightarrow ۲ \stackrel{?}{=} (\frac{۱}{۲})^{۰}$

$$(\frac{۱}{۲})^{۰} = ۱ \Rightarrow ۲ \neq (\frac{۱}{۲})^{۰}$$

پس نقطه $(۲, ۰)$ روی نمودار تابع f قرار ندارد.

پ) $(-۲, ۴) \rightarrow ۴ \stackrel{?}{=} (\frac{۱}{۲})^{-۲}$

$$(\frac{۱}{۲})^{-۲} = ۲^۲ = ۴ \Rightarrow ۴ = (\frac{۱}{۲})^{-۲}$$

پس نقطه $(-۲ , ۴)$ روی نمودار تابع f قرار دارد.

نامعادله توانی $۳^{۵x-۲} > \frac{۱}{۷۲۹}$ را حل کنید.

$$۳^{۵x-۲} > \frac{۱}{۷۲۹}$$

از تجزیه ۷۲۹ داریم $۷۲۹ = ۳^۶$

پس مسئله به‌صورت $۳^{۵x-۲} > (\frac{۱}{۳})^۶$ بازنویسی می‌شود. همچنین $۳^{۵x-۲} > (۳^{-۱})^۶$ در نتیجه $۳^{۵x-۲} > ۳^{-۶}$. از آنجا که پایه‌ها مثبت و برابر ۳ هستند. این نامساوی با شرط $۵x-۲>-۶$ صحیح است و

جواب این نامعادله به‌صورت $x > -\frac{۴}{۵}$ است.

ــ اگر سه تابع نمایی به‌صورت $f(x) = ۳^x$ و $g(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ و $h(x) = ۲^x$ داشته باشیم حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(\frac{۱}{۲})$ ب) $g(-۳)$ پ) $h(-۲) + g(-۱)$

ت) $(۳g + h)(۱)$ ث) $\frac{۵}{۲}h(۲) + \frac{۱}{۳}g(-۲)$

الف) $f(\frac{۱}{۲}) = ۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$

ب) $g(-۳) = ۳^{-۳} = (۳^{-۱})^۳ = (\frac{۱}{۳})^۳ = \frac{۱}{۲۷}$

پ) $h(-۲) + g(-۱) = ۳^{-۲} + (\frac{۱}{۳})^{(-۱)} = (\frac{۱}{۳})^۲ + ۳ = \frac{۱}{۹} + ۳ = \frac{۲۸}{۹}$

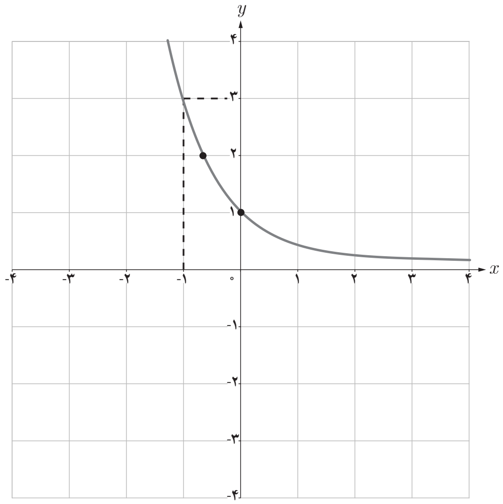
ت) $(۳g + h)(۱) = ۳g(۱) + h(۱) = ۳((\frac{۱}{۳})^۱) + ۲^۱ = ۱ + ۲ = ۳$

ث) $$\begin{aligned}\frac{۵}{۲}h(۲) + \frac{۱}{۳}g(-۲) &= \frac{۵}{۲}(۲^۲) + \frac{۱}{۳}((\frac{۱}{۳})^{-۲}) \\ &= ۱۰ + ۳ \\ &= ۱۳\end{aligned}$$

■ ضابطه تابع نمایی زیر را به‌دست آورید.

صورت کلی تابع نمایی به‌صورت $y = a^x$ ($a>۰$ و $a\neq۱$) نقطه $(-۱\,,\,۳)$ را در معادله قرار می‌دهیم تا مقدار a به‌دست آید.

$$۳ = a^{-۱} \rightarrow a = \frac{۱}{۳}$$



کار در کلاس ص۹۵

در این کار در کلاس دانش‌آموزان زاویه‌هایی را که در مثلثات پایهٔ دهم فراگرفته مجدداً بررسی می‌کنند و ضمن یادآوری مفاهیم قبلی با تبدیل زاویه‌ها به رادیان مفاهیم فراگرفته شده در این درس را مرور می‌کنند.

در کتاب درسی ممکن است تعداد و تنوع مثال‌ها کافی نباشد. همکاران گرامی می‌توانند با ارائه مثال‌های بیشتر و متناسب با سطح دانش‌آموزان خود و نیز رعایت اصول مدنظر کتاب، این بخش را غنی‌تر کنند. نکته مورد تأکید در اینجا استفاده از مثال‌های کاربردی است.

۱ در زیر برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

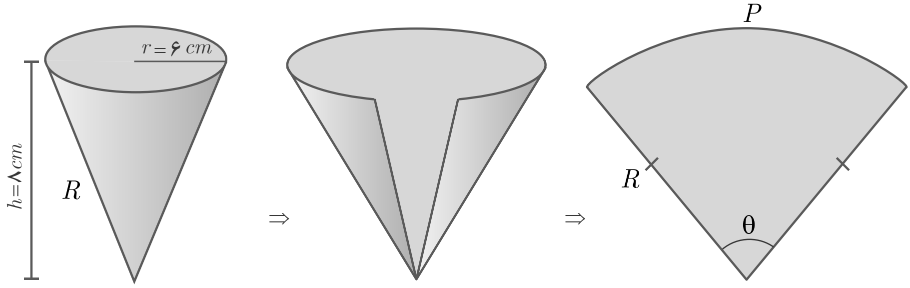
الف) $\frac{۲\pi}{۶}=\theta_۶$ ب) $\frac{۲\pi}{۵}=\theta_۳$ پ) $\frac{۲\pi}{۴}=\theta_۵$ ت) $\frac{۲\pi}{۳}=\theta_۴$ ث) $\frac{۲\pi}{۲}=\theta_۱$

ج) $۲\pi=\theta_۲$ چ) $۳\pi=\theta_۸$ ح) $۴\pi=\theta_۷$ خ) $۵\pi=\theta_۹$ د) $۶\pi=\theta_{۱۰}$

حل تمرین‌های برگزیده

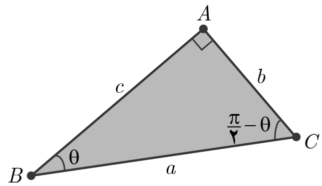
۲ شکل فضایی و گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط r=۶cm و ارتفاع آن h=۸cm می‌باشد. اندازهٔ زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

رابطه فیثاغورس : $R=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=۱۰$ ، $P=۲\pi\times۶=۱۲\pi$ $\Rightarrow \theta=\frac{P}{R}=\frac{۱۲\pi}{۱۰}=\frac{۶\pi}{۵}rad$



مقدار $\sin ۶۰^\circ$ دست یابیم! این در حالی است که بقیه روابط مطرح شده در این درس عموماً جهت محاسبه نسبت‌های دیگر زوایا به‌کار گرفته می‌شود. بنابراین رابطه بین نسبت‌های زوایای متمم از این جهت که در محاسبه نسبت‌های دیگر زوایا به‌کار نمی‌رود استثنا است و به همین دلیل آن را در ابتدای این درس مطرح کرده و سپس به بیان دیگر روابط و محاسبات مربوط به آنها پرداخته‌ایم.

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



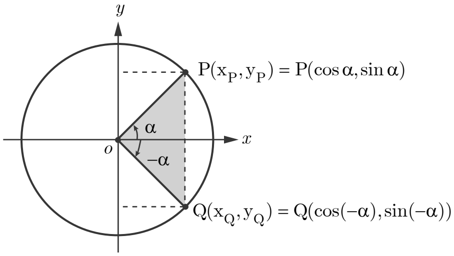
با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$\sin\theta = \frac{b}{a}$	$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \frac{c}{a}$
$\cos\theta = \frac{c}{a}$	$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \frac{b}{a}$
$\tan\theta = \frac{b}{c}$	$\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \frac{c}{b}$
$\cot\theta = \frac{c}{b}$	$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \frac{b}{c}$

فعالیت ص ۹۹

در این فعالیت به نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌پردازیم. توجه شود که در مثلثات پایهٔ دهم دانش‌آموزان با محورهای سینوس و کسینوس و نیز نمایش مختصات یک نقطه برحسب زاویه مربوطه آشنا شده‌اند. در اینجا معلم می‌تواند در صورت نیاز مطالب سال قبل را ابتدا مرور کرده و سپس به این فعالیت بپردازد. دقت شودکه نحوهٔ پیدا کردن روابط بین زوایای قرینه از طریق دایره مثلثاتی است در حالی‌که برای یافتن رابطه برای زوایای متمم از مثلث قائم‌الزاویه استفاده شده بود. دلیل این امر آن است که یافتن رابطه برای زوایای متمم از طریق دایره مثلثاتی دشوارتر از مثلث قائم‌الزاویه است و ضمناً به این صورت دو روش مختلف (استفاده از مثلث قائم‌الزاویه و استفاده از دایره مثلثاتی) را به دانش‌آموز آموزش می‌دهیم.

در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور xها نقطه $Q(x_Q, y_Q)=Q(x_P, -y_P)$ می‌باشد.



الف) باتوجه به رابطهٔ بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$y_Q = -y_P \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

فعالیت ص ۱۰۰

روش فعالیت قبل مجدداً برای دو زاویه مکمل در این فعالیت نیز استفاده شده است. سپس روابط برای α و $\pi + \alpha$ مشابهاً توضیح داده شده است. توصیه می‌شودکه برای حالت α و $\pi + \alpha$ نیز دبیر محترم دایره مثلثاتی را رسم و محاسبات را همانند α و $\pi - \alpha$ به کمک دانش‌آموزان به‌دست آورد.

در صفحه ۱۰۱ ابتدا روابط برای زوایای α و $2\pi + \alpha$ بحث شده و سپس آن را برای زوایای $2k\pi + \alpha$ تعمیم داده‌ایم. توجه می‌شود که برای زوایای مکمل، ضلع پایانی دو زاویه در دایره مثلثاتی بر روی هم قرار

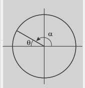
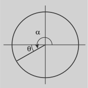
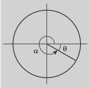
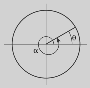
می‌گیرد. بنابراین توصیه می‌شود که در شکل بالایی صفحه ۱۰۱ ابتدا زاویه α به تنهایی در دایره مثلثاتی رسم شود. (پای تابلو یا به کمک نرم‌افزار) و سپس به کمک دانش آموزان زاویه دوم که همان $2\pi+\alpha$ است ترسیم گردد تا وجود دو زاویه در شکل برجسته‌تر گردد. آنگاه به یافتن روابط بین نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه پرداخته شود.

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2\pi - \alpha$ نیز هم انتها هستند با روشی مشابه می‌توان رابطه نسبت‌های مثلثاتی بین آنها را به‌دست آورد. سپس با توجه به رابطه بین زوایای قرینه که پیش‌تر در فعالیت ص ۹۹ به آن پرداخته شده می‌توان رابطه بین $2\pi - \alpha$ و α را به‌دست آورد.

کار در کلاس ص ۱۰۲

این کار در کلاس به نوعی جمع‌بندی مطالب فرا گرفته شده در فعالیت‌های قبل است. گفتنی است در برخی منابع آموزشی مفهومی به نام «زاویه مرجع»[1] مطرح می‌شود. این زاویه برخلاف زوایای مثلثاتی جهت (یا علامت) ندارد و همواره یک زاویه تند است. برای پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه داده شده در این منابع ابتدا نحوه پیدا کردن زاویه مرجع برای زاویه داده شده آموزش داده می‌شود و سپس نشان می‌دهند که مقدار نسبت مثلثاتی برای یک زاویه همواره به کمک مقدار نسبت مثلثاتی برای زاویه مرجع آن به‌دست می‌آید. زاویه مرجع کوچک‌ترین زاویه‌ای است که ضلع پایانی زاویه با محور xها (نه لزوماً بخش مثبت محور) می‌سازد. اگر به جدول داده شده در سؤال ۲ این کار در کلاس دقت شود، زاویه θ در این جدول برای زوایای مختلف همان زاویه مرجع می‌باشد که با یافتن آن می‌توان مقدار نسبت‌های زوایای داده شده را یافت. در این جدول از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا θ که همان زاویه مرجع می‌باشد را نیز مشخص کند. همان‌طور که در نمونه کامل شده آمده برای زاویه θ جهت مشخص نشده است در حالی‌که برای زاویه α داده شده که یک زاویه مثلثاتی است جهت رسم شده است. (به پیکان‌ها دقت کنید). به‌هر حال متذکر می‌شود که آموزش زاویه مرجع جزء اهداف کتاب درسی نیست و بدون ذکر نام آن و با کمک جدول فوق نحوه محاسبه مقدار نسبت‌های مثلثاتی آموزش داده می‌شود. مطالب فوق راجع به زاویه مرجع جهت دانش‌افزایی دبیران محترم مطرح شده است.

۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

زاویه / نسبت	$\alpha=\pi-\theta$	$\alpha=\pi+\theta$	$\alpha=2k\pi-\theta$	$\alpha=2k\pi+\theta$
انتهای کمان	ربع دوم	.....	.....	.....
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها	 نسبت | + | − $\sin\alpha$: + ✓ $\cos\alpha$: − ✓ $\tan\alpha$: − ✓	 نسبت | + | − $\sin\alpha$: − ✓ $\cos\alpha$: − ✓ $\tan\alpha$: + ✓	 نسبت | + | − $\sin\alpha$: − ✓ $\cos\alpha$: + ✓ $\tan\alpha$: − ✓	 نسبت | + | − $\sin\alpha$: + ✓ $\cos\alpha$: + ✓ $\tan\alpha$: + ✓
$\sin\alpha$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$	$\sin(2k\pi-\theta)=-\sin\theta$	$\sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta$
$\cos\alpha$	$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$	$\cos(2k\pi-\theta)=\cos\theta$	$\cos(2k\pi+\theta)=\cos\theta$
$\tan\alpha$	$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\tan(2k\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\tan(2k\pi+\theta)=\tan\theta$
$\cot\alpha$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$	$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$	$\cot(2k\pi-\theta)=-\cot\theta$	$\cot(2k\pi+\theta)=\cot\theta$

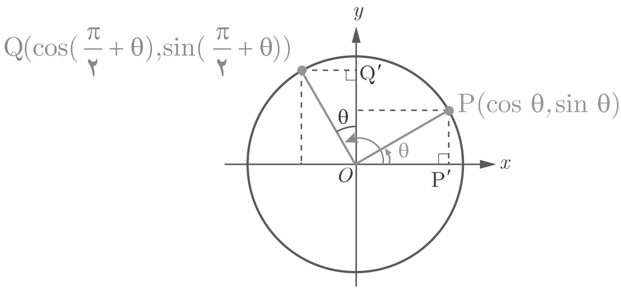
۳ برای زوایای قرینهٔ $(\alpha=-\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟ از ستون $2k\pi-\theta$ چون ضلع انتهایی آنها بر روی هم منطبق می‌شود و لذا مختصات نقطه پایانی کمان‌ها یکسان است.

فعالیت ص ۱۰۳

برای به‌دست آوردن رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه θ و $\frac{\pi}{2}+\theta$ که هدف این فعالیت است از روشی متفاوت با فعالیت‌های قبلی استفاده شده است. در اینجا ابتدا همنهشتی دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}P'$ و $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ به حالت وتر (که شعاع دایره است) و یک زاویه تند (θ) به تساوی اضلاع آنها پی می‌بریم. سپس با توجه به اینکه نقطه پایانی هر کدام از دو زاویه در چه قسمتی از صفحه مختصات هستند علامت مختصه‌های x و y برای این نقاط مشخص و از طریق تساوی اضلاع مثلث‌های همنهشت رابطه بین مختصات P و Q کامل می‌شود. با تکمیل رابطه بین مختصه‌های طول و عرض این نقاط و بازنویسی هر کدام برحسب نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس زوایای مربوطه، رابطه‌های مثلثاتی مدنظر برای نسبت‌های سینوس و

کسینوس کشف می‌شوند. در قسمت ب از این روابط برای پیدا کردن روابط دو نسبت تانژانت و کتانژانت استفاده شده است. روش ارائه شده در این فعالیت را می‌توان برای به‌دست آوردن روابط فعالیت‌های قبلی نیز به‌کار برد. معلم محترم می‌تواند از دانش‌آموزان بخواهد تا نحوه به‌دست آوردن روابط قبلی را به کمک این روش بررسی کنند.

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{۲}+\theta$ رسم شده‌اند.



الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}P'$ و $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ هم‌نهشت هستند.

ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q=-y_p \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta$$

$$y_Q=x_P \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\cos\theta$$

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

در پاسخ به این سؤال دانش‌آموز رابطه‌ای را که قبلاً فراگرفته یعنی $y = \sin x$ را به‌دست می‌آورد و بعد توضیح داده می‌شود که x هر مقداری می‌تواند باشد و y متناسب با سینوس آن تغییر می‌کند. معمولاً روش فوق در قالب یک سناریوی نسبتاً واقعی (یا کاربردی) مانند محاسبه ارتفاع یک نقطه از یک چرخ و فلک یا دیگر اشیای دایره‌ای شکل ارائه می‌شود. به‌هرحال قلب اصلی داستان پیداکردن رابطه‌ای مشابه فوق است.

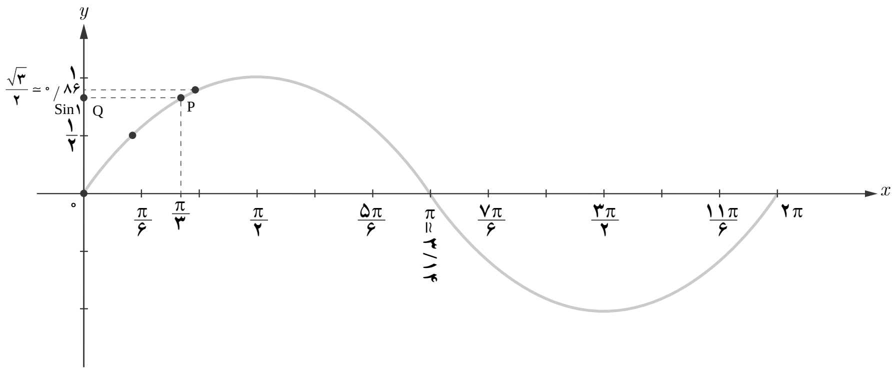
ضعف این شیوه‌ها در این است که دانش‌آموز درک روشنی از اینکه زاویه x می‌تواند اعداد گنگ مانند $\sqrt{۲}$ و یا حتی ساده‌تر از آن اعدادی مانند ۳ و ۵- و ... باشد را پیدا نمی‌کند. ضمناً ارتباط بین تابع مثلثاتی با محور اعداد حقیقی اغلب مغفول می‌ماند.

روش تدریس

فعالیت ص ۱۰۵

در این فعالیت برای آموزش مفهوم تابع مثلثاتی از ساده‌ترین بازنمایی توابع که همان بازنمایی به کمک رسم چند نقطه از تابع (بازنمایی زوج مرتبی) است بهره گرفته شده است. دانش‌آموزان در فصل تابع در پایهٔ دهم با انواع بازنمایی‌های مختلف یک تابع آشنا شده‌اند. در این کتاب توابعی مانند تابع رادیکالی (در فصل ۲) و توابع نمایی (در فصل ۳) نیز به کمک بازنمایی زوج مرتبی تابع، آموزش داده شده است. در این شیوه بازنمایی ابتدا از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا به کمک دانش قبلی خود مقدار تابع را در چند نقطه که قبلاً یادگرفته به‌دست آورد و سپس آنها را در یک دستگاه مختصات مشخص کند. در این فعالیت به همین شیوه از دانش‌آموز خواسته شده تا مقدار سینوس را (بدون ذکر نام تابع سینوس) در یک سری از نقاط در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ بیابد و آنها را در یک نمایش زوج مرتبی ارائه دهد. برای راهنمایی بیشتر نمودار تابع به‌صورت کم‌رنگ ترسیم شده تا نقاط برجسته‌تر دیده شوند. پس از نمایش نقاط در دستگاه مختصات دانش‌آموز پی می‌برد که این نقاط بر روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند و لذا به ازای هر نقطه از محور xها در بازه $[۰,۲\pi]$ می‌توان نقطه‌ای از منحنی یافت. در سؤال ۳ به‌طور مشخص از دانش‌آموز خواسته شده تا عدد ۱ را روی محور xها یافته و سپس نقطه $\sin ۱$ را برروی محور yها بیابد. برای این منظور او باید از منحنی داده شده کمک بگیرد. در واقع او ابتدا نقطه ۱ را یافته و موازی با محور yها با خط‌چین به منحنی رسم می‌کند تا نقطه‌ای روی منحنی نظیر عدد ۱ بیابد. آنگاه از آنجا به سمت محور yها عمودی رسم می‌کند. چون منحنی سینوس اعداد را نمایش می‌دهد لذا مکان یافته شده بر روی محور yها متناظر با $\sin ۱$ است. این فرایند ممکن است نیاز به کمک معلم باشد که هرجا دانش‌آموز دچار ابهام شد آن را رفع کند. توصیه می‌شود که معلم این کار را برای اعدادی دیگر (فقط

گویا) دربازه $[\circ,2\pi]$ تکرار نماید. در سؤال ۴ از این فعالیت تمایز بین رادیان و درجه و نسبت‌های مثلثاتی برحسب آنها برجسته شده تا این موضوع که در توابع مثلثاتی همواره (مگر خلاف آن تصریح شود) متغیر برحسب رادیان است. این موضوع در خواندنی مربوط به ماشین حساب نیز اشاره شده است.

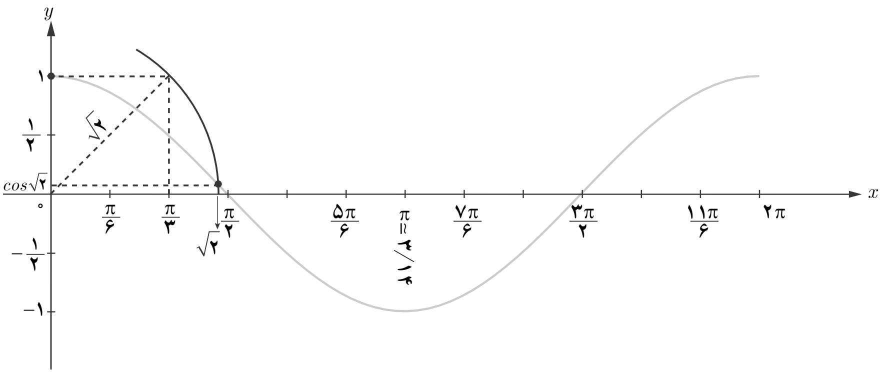


۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y=\sin x$ در بازه $[\circ,2\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار $\sin 1$ کجای محور yها قرار می‌گیرد؟ کافی است به‌طور تقریبی مکان $x=1$ را روی محور xها مشخص کرده و سپس به موازات محور yها به نمودار $\sin x$ وصل کرده تا نقطه P مشخص شود. سپس از نقطه P به موازات محور xها رسم کرده تا محور yها را در نقطه Q قطع کند. نقطه Q روی محور yها متناظر $\sin 1$ است.

فعالیت ص ۱۰۶

گام بعدی و تکمیلی در خصوص تابع مثلثاتی در این فعالیت آورده شده است. در فعالیت قبل تمرکز بر یافتن مقدار توابع مثلثاتی (به‌طور خاص تابع سینوس) برای اعداد ساده مانند $\sin 1$ و $\sin 2$ بود. در این فعالیت مهارت قبلی را برای اعداد گنگ تعمیم می‌دهیم. برای این منظور از منحنی کسینوس استفاده شود تا این منحنی نیز معرفی گردد. در سؤال ۳ از این فعالیت تعمیم مفهوم تابع مثلثاتی به بازه‌های بزرگ‌تر از $[\circ,2\pi]$ مدنظر است. دقت شود که ارائه مفهوم دوره تناوب در اینجا به هیچ وجه مطرح نیست و نباید به‌کار گرفته شود. بحث توابع متناوب در سال آینده مطرح خواهد شد. در اینجا فقط به رفتار تکراری (با همین لفظ) اشاره (و نه تأکید بیش از حد) می‌شود. در سؤال ۴ از این فعالیت به برخی خواص توابع مثلثاتی

سینوس و کسینوس پرداخته شده است. البته این خواص فقط برای تابع کسینوس بحث شده که توصیه می‌شود معلم بررسی این خواص برای تابع سینوس را نیز از دانش آموز مطالبه کند.



۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{۲}$ رادیان را بر روی محور xها یافته و سپس مکان $\cos\sqrt{۲}$ را بر روی محور yها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.
کافی است مربعی به طول ضلع ۱ همانند شکل رسم کنیم. از قضیه فیثاغورث نتیجه می‌شود که طول قطر آن $\sqrt{۲}$ است. اکنون اگر کمانی به شعاع طول این قطر (همانند شکل) رسم کنیم آنگاه محل تقاطع این کمان با محور xها متناظر $x=\sqrt{۲}$ است. ادامه فرایند مشابه سؤال ۳ از فعالیت قبل است.

کار در کلاس ص ۱۰۸

این کار در کلاس درصدد تصحیح بدفهمی‌ها یا رفع نواقص مربوط به مفهوم تابع مثلثاتی است. این کار در کلاس به نوعی به دنبال ایجاد تفاوت بین مفهوم نسبت مثلثاتی و تابع مثلثاتی و ارائه مفهوم تابع مثلثاتی به‌عنوان یک مفهوم مستقل (و البته در ارتباط تنگاتنگ با مفهوم نسبت مثلثاتی) است. لذا در این اینجا هیچ اشاره‌ای به زاویه نشده و همه‌جا صحبت از اعداد حقیقی است. مثلاً در قسمت ث پرسیده شده آیا عددی (و نه زاویه‌ای) می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲− باشد. مشابه همین سؤال در پایه دهم آورده شده بود اما با لفظ زاویه به‌دلیل اینکه آنجا صحبت از نسبت مثلثاتی بود و نه تابع.

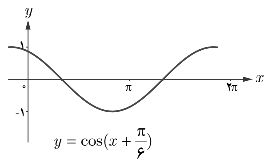
مثال‌های ص ۱۰۸

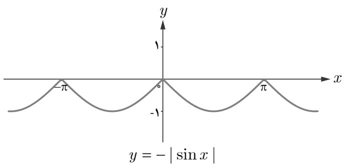
در ادامه فعالیت ص ۱۱۰ چند مثال از نمودارهای مثلثاتی آورده شده که برای سهولت مراحل به‌طور گام به گام و از کم‌رنگ به پررنگ ترسیم شده‌اند و یک کاربرد واقعی از مثلثات در صنایع آورده شده است. حالت تعمیم یافته این مثال کاربردی در آخرین تمرین این درس داده شده است که مشابه این مثال با اندکی تعمیم قابل حل است. به هر حال چنانچه تمرین داده شده برای دانش‌آموزان دشوار است می‌توان از ارائه آن صرف‌نظر کرد.

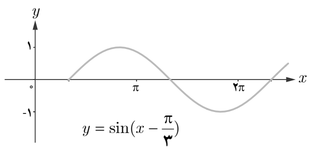
حل تمرین‌های برگزیده

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y = -|\sin x|$ ب) $y = \cos(x+\frac{\pi}{۶})$ پ) $y = \sin(x-\frac{\pi}{۳})$

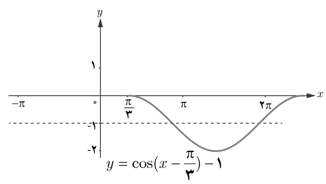


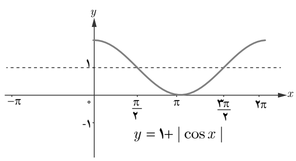


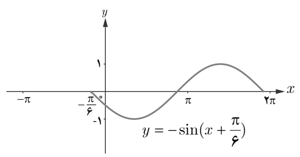


۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y = -\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ ب) $y = \cos(x-\frac{\pi}{۳}) -۱$ پ) $y = ۱ + |\cos x|$







۳ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

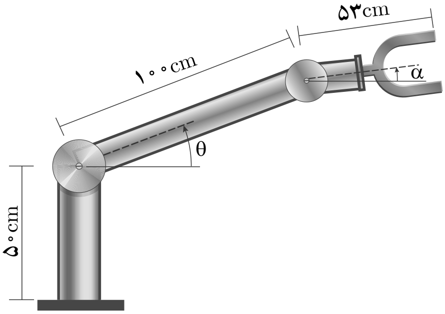
الف) min= −۱ , max= ۱

ب) min= −۲ , max= ۰

ج) min= ۰ , max= ۲

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام‌یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازهٔ $(۰, \pi)$ یک به یک است؟

الف) یک به یک نیست　　　ب) یک به یک است　　　ج) یک به یک است



۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

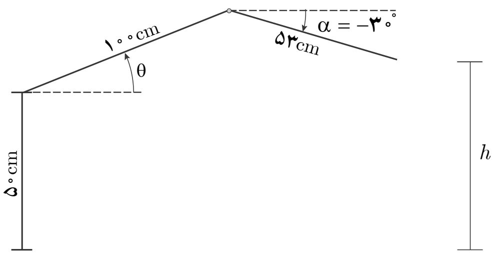
الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید.

$$(-\frac{\pi}{۲} \le \alpha \le \frac{\pi}{۲} \ , \ ۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲})$$

$$h = ۵۰ + h_۱ + h_۲ = ۵۰ + ۱۰۰\sin\theta + ۵۳\sin\alpha$$

توجه شود که حل معادلات ساده در پایه دهم مطرح شده است.

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $۲۳/۵\,cm$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -۳۰^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



$$۲۳/۵ = ۵۰ + ۱۰۰\sin\theta + ۵۳\sin(-۳۰^\circ)$$

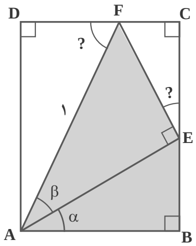
$$\Rightarrow ۲۳/۵ = ۵۰ + ۱۰۰\sin\theta - ۲۶/۵$$

$$\Rightarrow ۵۰ = ۵۰ + ۱۰۰\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = ۰ \xrightarrow[۰\le\theta\le\frac{\pi}{۲}]{} \theta = ۰$$

فعالیت ص ۱۱۰

در این فعالیت با تکمیل روابط طولی خواسته شده برحسب نسبت‌های مثلثاتی زوایای گفته شده، به‌سادگی می‌توان درستی هر دو رابطه مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ را به‌دست آورد. برای سادگی در محاسبات ضلع AF ابتدا برابر ۱ فرض می‌شود و در سؤال ۲ از دانش‌آموز خواسته می شود که روابط به دست آمده را در حالتی که این ضلع برابر ۱ نباشد بررسی کند. با این بررسی مشخص می‌شود که اندازه این ضلع هرچه باشد (مثلاً l) در نهایت از طرفین رابطه ساده می‌شود و همان روابط قبل برقرار می‌شوند.



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است و اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است.

الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $F\hat{E}C$ و $A\hat{F}D$ را برحسب α و β به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{ll} F\hat{E}C+۹۰^\circ+A\hat{E}B=۱۸۰ : & \text{زاویه } E \text{ نیم صفحه است.} \\ \alpha+۹۰^\circ+A\hat{E}B=۱۸۰ : & \text{مجموع زوایای داخلی } ABE \end{array}\right\} \Rightarrow F\hat{E}C=\alpha$$

اضلاع AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به‌صورت مورب آن را قطع کرده است. $\Leftarrow A\hat{F}D=\alpha+\beta$

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $A\overset{\Delta}{D}F$ را با توجه به اینکه $AF=۱$، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $D\hat{F}A$ بنویسید.

$AD=\sin(\alpha+\beta)$ $\qquad$ $DF=\cos(\alpha+\beta)$

ج) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF ، که وتر آن برابر ۱ است را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

$EF=\sin(\beta)$ $\qquad$ $AE=\cos(\beta)$

د) اندازهٔ پاره خط‌های BE، EC، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به‌دست آورید.

$EC=EF\times\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $BE=AE\times\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha$

$AB=AE\times\cos\alpha=\cos\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $FC=EF\times\sin\alpha=\sin\beta\sin\alpha$

هـ) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل بالا روابط زیر به‌دست می‌آید. آنها را باتوجه به قسمت‌های الف تا د کامل کنید.

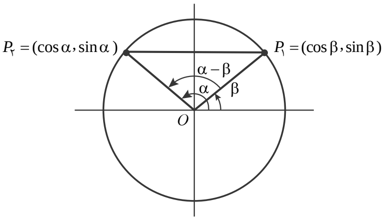
$$AD=BE+EC \Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$DF=AB-FC \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

۲ توضیح دهید چرا اگر اندازهٔ پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است. اگر $AF=r$ باشد آنگاه مقدار r از طرفین رابطه‌های فوق ساده می‌شود. بررسی کنید.

برای به‌دست آوردن روابط خواسته شده می‌توان فعالیت جایگزین زیر را نیز به‌کار برد.

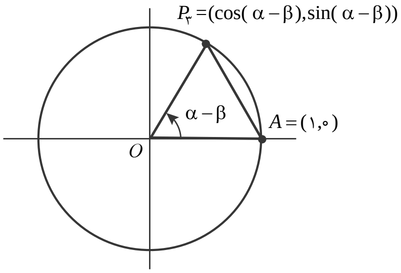
فعالیت جایگزین



در روش زیر ابتدا روابط تفاضل به‌دست می‌آیند و سپس به کمک آنها روابط حاصل جمع زوایا.

در شکل مقابل دو زاویه β و α رسم شده و نقاط انتهایی کمان‌ها را به‌ترتیب $P_۱$ و $P_۲$ نامیده‌ایم. زاویه $\alpha-\beta$ بین این دو زاویه و وتر روبه‌رو به آن نیز رسم شده‌اند.

برای سادگی همهٔ زوایا را به اندازه زاویه β در خلاف جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا شکل زیر به‌دست آید. نقطهٔ A و $P_۳$ به‌ترتیب دوران یافته $P_۱$ و $P_۲$ می‌باشند. با مشاهده مثلث $OP_۱P_۲$ از شکل قبل و مثلث $OAP_۳$ از این شکل معلوم می‌شود که این دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویه بین هم نهشت هستند (چرا؟) بنابراین وتر $P_۱P_۲$ با وتر $AP_۳$ برابر است. پس فاصله نقطه $P_۱$ تا $P_۲$ برابر فاصله نقطه A تا $P_۳$ است.



اکنون از رابطه فاصله دو نقطه که در فصل اول آمده داریم : $d(A,P_۳)=d(P_۱,P_۲)$

رابطه فاصله دو نقطه :

$$\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-۱]^۲+[\sin(\alpha-\beta)-۰]^۲}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^۲+(\sin\alpha-\sin\beta)^۲}$$

به توان ۲ رساندن (دقت شود که عبارات زیر رادیکال همگی بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند و لذا قدر مطلق حذف می‌شود) :

$$[\cos(\alpha-\beta)-۱]^۲+\sin^۲(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^۲+(\sin\alpha-\sin\beta)^۲$$

$$\cos^۲(\alpha-\beta)-۲\cos(\alpha-\beta)+۱+\sin^۲(\alpha-\beta)$$
$$=\cos^۲\alpha-۲\cos\alpha\cos\beta+\cos^۲\beta+\sin^۲\alpha-۲\sin\alpha\sin\beta+\sin^۲\beta$$

(اتحاد مربع)

سه بار استفاده از اتحاد $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$ $\quad ۲-۲\cos(\alpha-\beta)=۲-۲\cos\alpha\cos\beta-۲\sin\alpha\sin\beta$

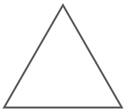
ساده کردن ۲ از طرفین $\quad -۲\cos(\alpha-\beta)=-۲\cos\alpha\cos\beta-۲\sin\alpha\sin\beta$

تقسیم طرفین بر ۲ $\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

از رابطه اخیر و با استفاده از $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$ می‌توان رابطه حاصل‌جمع زوایا را نیز به‌دست آورد.

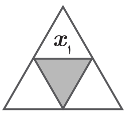
فعالیت ص۱۱۵

یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را درنظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.



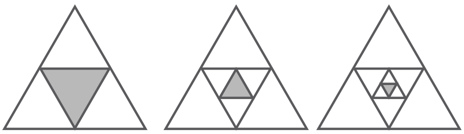
۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را x_1 و اندازه محیط آن را P_1 می‌نامیم.

در این صورت داریم : $x_1 = ۱$ و $P_1 = ۳$



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله nام طول ضلع مثلث به‌وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید :

x_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۳۲}$	...	$\frac{۱}{۲^n}$
P_n	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۳}{۳۲}$	...	$\frac{۳}{۲^n}$



(۱) (۲) (۳)

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x درنظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه داریم $f(x) = ۳x$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر تابع f، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

در مثال حل شدهٔ صفحه ۱۱۶، رفتار یک تابع در اطراف نقطه $x = ۲$ به کمک رسم نمودار و جدول مقادیر بررسی شده است. معلم می‌تواند متناسب با سطح کلاس از مثال‌های جایگزین استفاده نماید. در همین مثال برای اولین بار دانش‌آموزان با نماد حد و نحوه نمایش دادن آن آشنا می‌شوند.

در کار در کلاس صفحه ۱۱۷، سه تابع داده شده که یکی از آنها در $x = ۳$ تعریف شده ($g(x)$) و یکی از آنها در نقطه $x = ۳$ تعریف شده ولی مقدار تابع در $x = ۳$ با مقدار حد تابع در آن نقطه یکسان نمی‌باشد ($h(x)$) و تابع سوم از سه تابع داده شده ($f(x)$) هم در $x = ۳$ تعریف شده و هم مقدار تابع در $x = ۳$ با حد تابع در آن نقطه برابر است.

کار در کلاس ص ۱۱۷

توابع f ، g و h با ضابطه‌های $f(x) = x+۳$ و $g(x) = \frac{x^۲ - ۹}{x - ۳}$ و $h(x) = \begin{cases} x+۳ & x \neq ۳ \\ ۴ & x = ۳ \end{cases}$ را درنظر بگیرید :

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید :

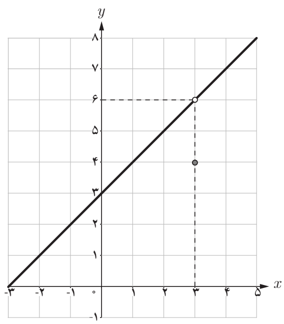
$h(۳) = ۴$ $g(۳) =$ تعریف نشده است $f(۳) = ۶$

۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع f ، g و h هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.

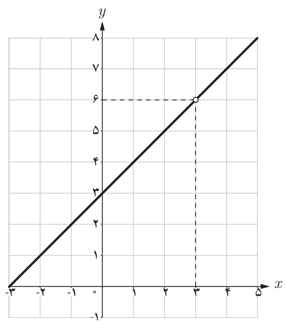
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	→	۳	←	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	۶	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	تعریف نشده	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$h(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	۴	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱

۳ نمودارهای توابع f ، g و h به‌صورت زیر رسم شده است.

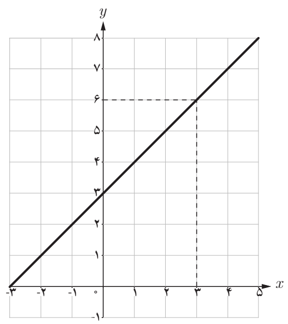
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند. هر سه به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.



نمودار h



نمودار g



نمودار f

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ۶ است به عبارت دیگر :

$\lim_{x \to ۳} h(x) = ۶$ $\lim_{x \to ۳} g(x) = ۶$ $\lim_{x \to ۳} f(x) = ۶$

معلم پس از انجام این کار در کلاس توسط دانش‌آموزان طی بحث کلاسی باید روی دو نتیجه زیر تأکید نماید :

الف) ممکن است یک تابع در نقطه‌ای به طول a تعریف نشده باشد ولی در این نقطه حد داشته باشد.

ب) ممکن است یک تابع در نقطه‌ای به طول a تعریف نشده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

پس از این کار در کلاس، تعریف همسایگی، همسایگی محذوف و نیز همسایگی راست و چپ ارائه شده است. با توجه به اینکه در این کتاب از تعریف دقیق حد (روش ε و δ) برای ارائهٔ حد استفاده نشده است، لذا از ورود به تعریف همسایگی متقارن و محذوف متقارن و نمایش آنها به‌صورت نامعادله قدر مطلقی اجتناب شده است و لزومی به ارائهٔ این تعاریف در کلاس درس نیست.

تعریف

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.

بنابراین اگر $x_0 \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 است.

اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می‌نامیم.

به همین ترتیب :

اگر $r>0$، در این صورت بازه (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست و بازهٔ (x_0-r , x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

توجه : با توجه به تعریف، منظور از همسایگی یک نقطه در این کتاب، همسایگی دوطرفه است و هر جا که هدف همسایگی یک‌طرفه باشد، همسایگی راست (یا چپ) ذکر می‌شود.

کار در کلاس بالای صفحه ۱۱۹ پس از ارائهٔ تعریف همسایگی، در خصوص مسائل مرتبط با تمرین همسایگی آورده شده است.

سؤال ۱ : این کار در کلاس، سؤالی باز پاسخ می‌باشد که دانش‌آموزان می‌توانند با توجه به سطح درک خود به آن، پاسخی متفاوت و درست ارائه دهند. به‌عنوان مثال دو نمونه پاسخ برای هر یک از قسمت‌های این سؤال در زیر ارائه شده است :

کار در کلاس ص ۱۱۹

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

همسایگی محذوف ۳ : {۳}ـ(۲,۶) یا {۳}ـ(۱,۴)

همسایگی راست۳ : (۳,۵) یا (۳,۱۰)

همسایگی چپ۳ : (۱,۳) و (۳,۱۰−)

۲ آیا بازهٔ (۲,۳) یک همسایگی ۲می‌باشد؟ چرا؟ نه چون شامل ۲ نمی‌باشد ولی این بازه یک همسایگی راست ۲ می‌باشد.

پس از این کار در کلاس، تعریف حد براساس تعریف همسایگی ارائه شده است. در این تعریف بر دو واژهٔ به میزان دلخواه و به‌قدر کافی تأکید شده است و اساس این تعریف در واقع این دو واژه می‌باشد به همین دلیل پیشنهاد می‌شود در نمونه‌های قبل از این تعریف و بعد از این تعریف، بر این دو واژه و درک جایگاه آن در مشخص کردن حد داشتن یک تابع یا نداشتن حد تأکید زیادی داشته باشند.

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

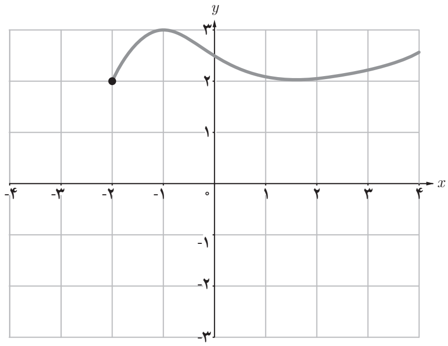
کار در کلاس دوم صفحه ۱۱۹ در خصوص حد توابع می‌باشد که در صفحه بعد حل آنها ارائه می‌شود :

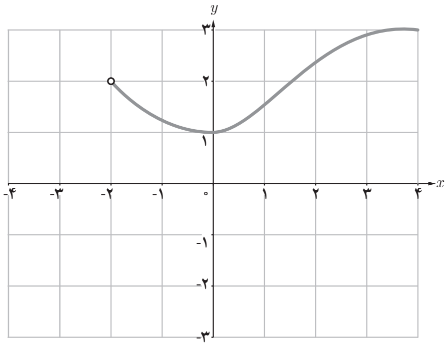
۴ سؤال اول این کار در کلاس سؤال‌های باز پاسخی هستند که دانش‌آموزان می‌توانند پاسخ‌های متفاوت درستی به این سؤال‌ها بدهند.

به‌عنوان نمونه ۲ پاسخ برای هر یک از سؤال‌های ۱ تا ۴ این کار در کلاس به شرح زیر می‌باشد :

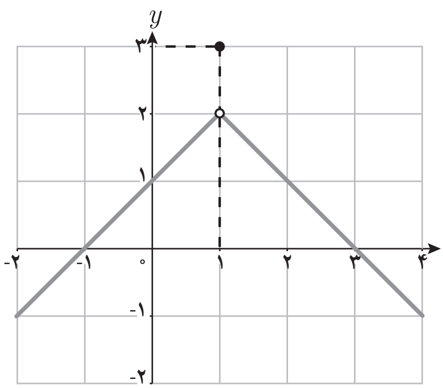
کار در کلاس ص ۱۱۹

۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

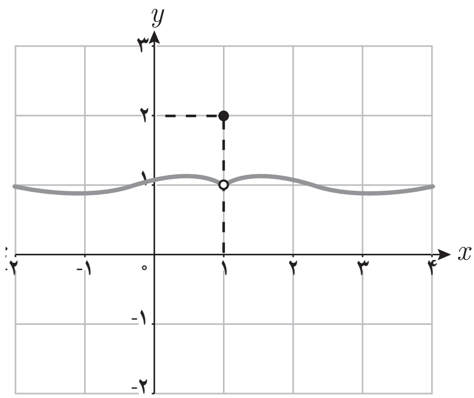




۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

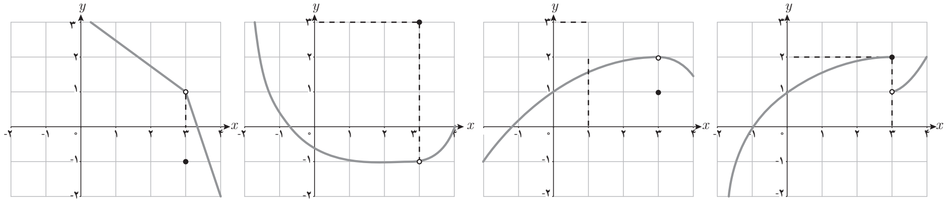


g



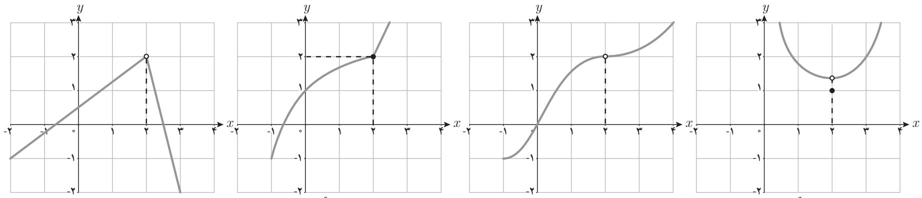
f

۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(۳)\neq g(۳)$.



f $\quad$ g $\quad$ f $\quad$ g

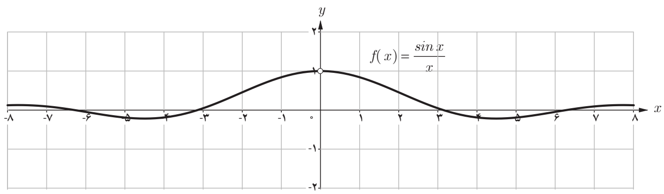
۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.



f $\quad$ g $\quad$ f $\quad$ g

۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f، مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور xها برحسب رادیان است). $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{x}=۱$

$\dfrac{\sin x}{x}$	x
۰/۸۴۱۴۷۰۹۸	$\pm$۱
۰/۹۵۸۸۵۱۰۸	$\pm$۰/۵
۰/۹۷۳۵۴۵۸۶	$\pm$۰/۴
۰/۹۸۵۰۶۷۳۶	$\pm$۰/۳
۰/۹۹۳۳۴۶۶۵	$\pm$۰/۲
۰/۹۹۸۳۳۴۱۷	$\pm$۰/۱
۰/۹۹۹۵۸۳۳۹	$\pm$۰/۰۵
۰/۹۹۹۹۸۳۳۳	$\pm$۰/۰۱
۰/۹۹۹۹۹۵۸۳	$\pm$۰/۰۰۵
۰/۹۹۹۹۹۹۸۳	$\pm$۰/۰۰۱

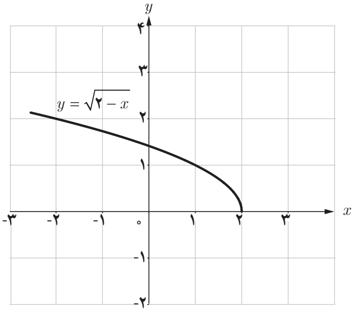


با اینکه این سؤال، سؤالی باز پاسخ نیست ولی سؤالی است که از نتیجه این سؤال در درس‌های بعد این فصل و حل مسائل آن به‌خصوص در محاسبه حدود کسری (حالت ÷) شامل توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. با توجه به اینکه قضیه فشردگی در این کتاب ارائه نشده است، در محاسبه این تمرین یعنی محاسبه $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}$ با استفاده از جدول مقادیر و نمودار رسم شده حد تابع ۱ به‌دست می‌آید.

پس از کار در کلاس صفحه ۱۱۹ و صفحه ۱۲۰، مثال حل شده‌ای ارائه شده است که در آن بر تعریف شدن تابع در حداقل یک همسایگی محذوف برای حد داشتن تأکید شده است و چون $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در هیچ همسایگی محذوف ۲ تعریف نشده است پس این تابع در نقطه $x=۲$ حد ندارد.

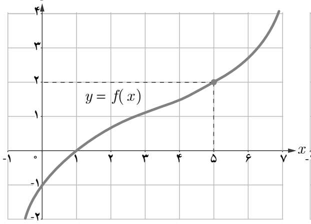
مثال : آیا تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در نقطه $x=۲$ حد دارد؟ چرا؟

حل : می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f=(-\infty,۲]$ می‌باشد. چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه $x=۲$ حد ندارد.

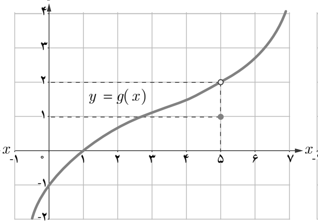


تمرین ص ۱۲۰

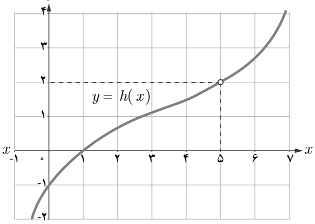
۱ نمودار سه تابع f، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x=۵$، مشخص کنید



$\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۲$

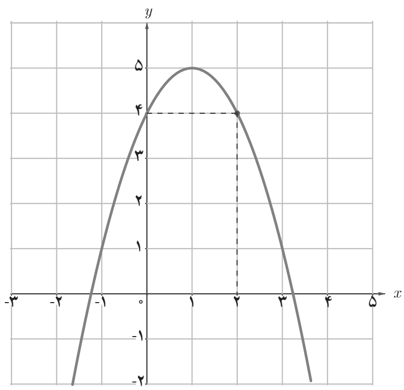


$\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=۲$

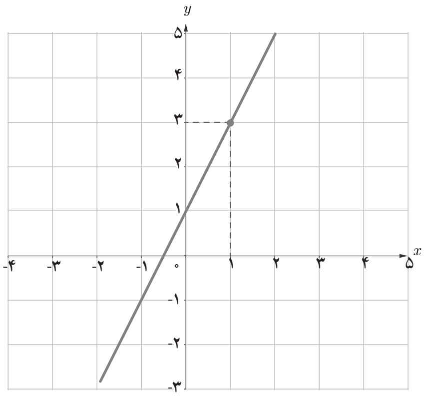


$\lim\limits_{x\to ۵} h(x)=۲$

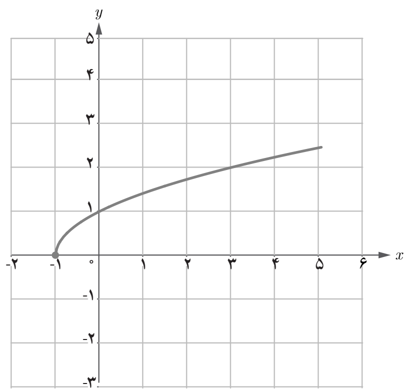
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



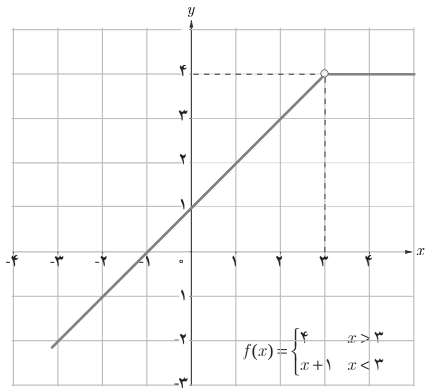
$\lim\limits_{x\to ۲} (-x^{۲}+۲x+۴)$ =۴



$\lim\limits_{x\to ۱} (۲x+۱)$ =۳



$\lim\limits_{x\to -۱} \sqrt{x+۱} =$ حد ندارد



$\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ =۴

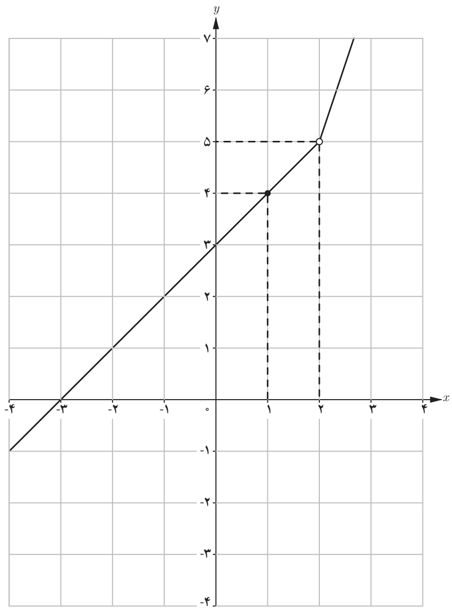
۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} (-۳x+۴)$= ۴

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	→	۰	←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰۳	→	۴	←	۳/۹۹۷	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

$f(x)=\begin{cases} x-۴ & x\neq -۱ \\ ۳ & x=-۱ \end{cases}$ ،   ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = -۵$

x	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	-۶	$-۵/۵$	$-۵/۱$	$-۵/۰۱$	$-۵/۰۰۱$	$\rightarrow$	۳	$\leftarrow$	$-۴/۹۹۹$	$-۴/۹۹$	$-۴/۹$	$-۴/۸$



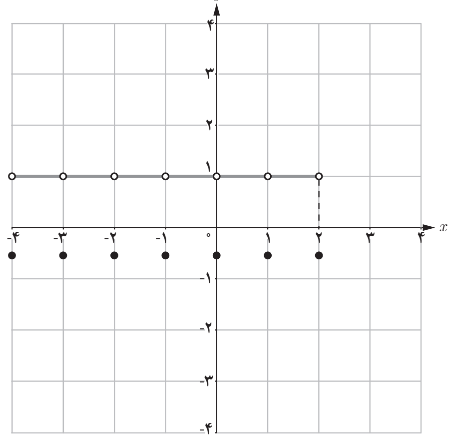
۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x>۲ \\ x+۳ & x<۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) آیا تابع f در نقطه $x=۲$، تعریف شده است؟

خیر

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را به دست آورید.

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۵$



۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases} -۱ & x\in \mathbb{Z} \\ ۲ & x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-۴,۲]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} g(x) = ۲$

$\lim\limits_{x\to ۱} g(x) = ۲$

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

$$D_f=\begin{cases}۱-x^۲\geq ۰\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\\ x\neq ۰\end{cases}\Rightarrow D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$$

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

شامل همسایگی محذوف تمام نقاط دامنه به‌غیر از ۱ و ۱- و همچنین شامل همسایگی محذوف ۰ نیز هست.

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ x=۱ تعریف شده است؟ در همسایگی راست x=۱ چطور؟

بله، این تابع در همسایگی چپ x=۱ تعریف شده ولی در همسایگی راست x=۱ تعریف نشده است.

۷ اگر بازهٔ (x−۱,۲x+۳) یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$$۲\in(x-۱,۲x+۳)\Rightarrow x-۱<۲<۲x+۳\Rightarrow\begin{cases}x-۱<۲\Rightarrow x<۳\\ ۲x+۳>۲\Rightarrow x>-\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$

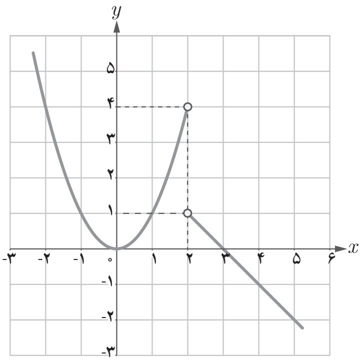
$$\overset{\cap}{\Rightarrow}-\frac{۱}{۲}<x<۳\Rightarrow x\in(-\frac{۱}{۲},۳)$$

توصیه‌های آموزشی

با توجه به مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری حد، توصیه می‌شود در این درس و در حد امکان فرصت‌های آموزشی زیادی را برای مشاهدهٔ حد توابع در نقاط مختلف با استفاده از بازنمایی‌های مختلف از جمله جدول مقادیر و رسم نمودار در کلاس تدارک ببینند. همچنین در تمامی مثال‌ها و نمونه‌های ارائه شده، تأکید ویژه‌ای بر دو عبارت «به اندازهٔ دلخواه» و «به مقدار کافی» که در تعریف حد آمده است، داشته باشند. همچنین با ارائهٔ سؤال‌هایی که در آنها تابع در یک نقطه حد دارد، از دانش‌آموزان بخواهند که با تعیین مقدار دلخواه، مقدار کافی را به‌دست آورند. به‌عنوان مثال :

در تابع $f(x)=x$+۱ داریم : $\lim\limits_{x\to ۱}(x+۱)=۲$. اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ به ۲ از دو طرف کمتر از ۰/۱ باشد، مقدار x باید در چه فاصله‌ای از ۱ قرار گیرد؟

فعالیت ص۱۲۳



نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+۳ & x>۲\\ x^۲ & x<۲\end{cases}$ به صورت روبه‌رو است :

الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد؟ خیر

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت :

حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نتیجه

اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع f در نقطه $x=a$، حد ندارد.

کار در کلاس ص ۱۲۵

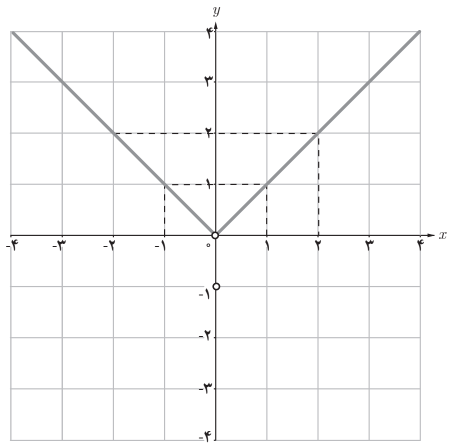
در خصوص مفاهیم ارائه شده در این درس در خصوص حد چپ و حد راست و همچنین ارتباط آنها با حد توابع می‌باشد. سؤال ۲ این کار در کلاس، سؤالی باز پاسخ است که می‌تواند پاسخ‌های درست بسیاری داشته باشد.

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

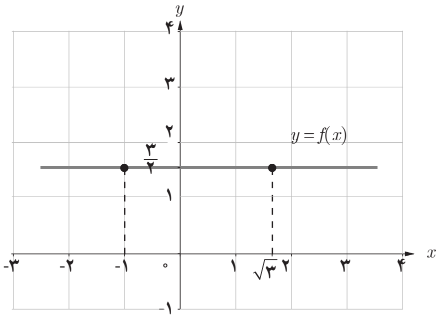
الف) مقدار $\lim_{x\to 0}|x|$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 0}|x|=0$$

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟ بله برقرار است.

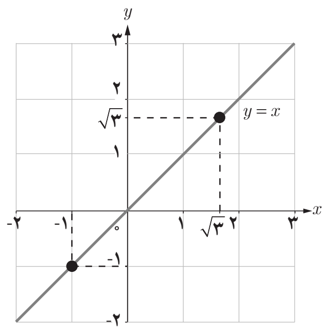


فعالیت ص ۱۳۰



الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{۳}{۲}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to -۱} f(x) = \frac{۳}{۲} \qquad \lim_{x\to \sqrt{۳}} f(x) = \frac{۳}{۲}$$



ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $g(x)=x$. با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to -۱} g(x) = -۱ \qquad \lim_{x\to \sqrt{۳}} g(x) = \sqrt{۳}$$

قضیه :

الف) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی،

$$\lim_{x\to a} c = c$$

ب) حد تابع همانی $g(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a است. یعنی،

$$\lim_{x\to a} x = a$$

فعالیت صفحه بعد (صفحه ۱۳۱) به مفهوم بخشی شهودی قضایایی در خصوص حد مجموع توابع و تفاضل دو تابع می‌پردازد. نتیجه این فعالیت به عنوان قضیه اصلی این درس در صفحه ۱۳۲ بیان شده است. در بخش نتیجه فعالیت قضایای مربوط به محاسبه حد حاصل‌ضرب دو تابع و خارج قسمت دو تابع نیز ارائه شده است.

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ ، آن‌گاه

الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=L_1+L_2$$

ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L_1-L_2$$

پ) (حد حاصل‌ضرب) حاصل‌ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=L_1.L_2$$

ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه $L_2\neq 0$، تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

کار در کلاس صفحه ۱۳۲ فرصتی را فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان در مسائل ارائه شده در آن از قضایای ارائه شده در خصوص حد مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت استفاده کنند.

کار در کلاس ص ۱۳۲

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیهٔ فوق، توضیح دهید چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=\lim\limits_{x\to a} c\ .\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^{2}(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{2}$

$$\lim_{x\to a} f^{2}(x)=\lim_{x\to a}(f(x).f(x))=\lim_{x\to a} f(x)\ .\ \lim_{x\to a} f(x)=(\lim_{x\to a} f(x))^{2}$$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x\to a}(-f(x))=\lim\limits_{x\to a} -1\ .\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ (به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$)

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} 1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

در صفحه ۱۳۳ طی تذکری این قضایا از دو تابع به n تابع تعمیم داده شده است. در این تذکر تأکید ویژه‌ای بر محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to a} x^{n}$ شده است که برابر a^{n} می‌باشد. یعنی $\lim\limits_{x\to a} x^{n}=a^{n}$. بیان این مطلب به همراه قضیه حد توابع ثابت و قضیه حاصل‌ضرب توابع، دانش‌آموزان را برای درک قضیه حد توابع چند جمله‌ای آماده می‌کند که در صفحه ۱۳۴ به آن پرداخته شده است.

تذکر : قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر n یک عدد طبیعی و توابع f_1 ، . . . ، f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+\cdots+f_n(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_n(x)$$
$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\times\cdots\times f_n(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)\times\cdots\times\lim_{x\to a} f_n(x)$$

به‌ویژه، اگر تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد آن‌گاه : $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{n}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{n}$

که در حالت خاص، اگر تابع f را تابع همانی $f(x)=x$ انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\lim_{x\to a} x^{n}=a^{n}$$

در مثال حل شده و کار در کلاس صفحه ۱۳۴ از حد تابع قدر مطلق استفاده شده است که نیازمند یادآوری تمرین شماره ۷ صفحه ۱۲۹ قبل از حل این صفحه می‌باشد.

فعالیت صفحه ۱۳۵ به‌طور شهودی به دانش‌آموزان این درک را می‌دهد که :

۱ حد مجموع دو تابع می‌تواند وجود داشته باشد در حالی‌که هیچ کدام از دو تابع حد نداشته باشند.

۲ زمانی می‌توانیم از قضایای حد مجموع، تفاضل، ضرب و . . . استفاده کنیم که حد هر یک از توابع، موجود باشد.

از این نکات در طرح سؤالات کار در کلاس صفحه ۱۳۶ استفاده شده است که بایستی در پاسخ دادن به آنها به این نکته توجه کرد.

کار در کلاس ص ۱۳۶

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

برای حل این سؤال می‌توان از نمونه ارائه شده در فعالیت صفحه ۱۳۵ و یا موارد مشابه به عنوان مثال نقض، استفاده کرد.

ب) ثابت کنید اگر $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشند، آن‌گاه $\lim_{x\to a} g(x)$ نیز وجود دارد.

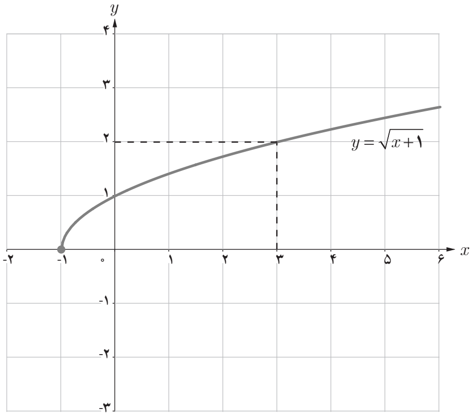
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x)=l\\ \lim_{x\to a} f(x)+g(x)=k\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}(g(x)+f(x)-f(x)) \xlongequal[\text{مجموع و تفاضل}]{\text{طبق قضیه حد}}$$

$$\overset{K}{\lim_{x\to a}(g(x)+f(x))}-\underset{L}{\lim_{x\to a} f(x)}=K-L=M$$

یعنی $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارد.

در ادامه فعالیت پایین صفحه ۱۳۶، قضیه حد ریشه nام تابع به‌صورت شهودی مفهوم بخشی شده است.

فعالیت ص ۱۳۶



در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ رسم شده است.

الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}$ را بیابید.

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+۱)}$ برقرار است؟

قضیه :

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}f(x)}$$

به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

دانش‌آموزان با انجام فعالیت صفحه ۱۳۷ می‌توانند به‌صورت شهودی و به کمک نمودار ارائه شده، قضیه حد توابع مثلثاتی در خصوص $\sin x$ و $\cos x$ را درک کنند.

برای هر عدد حقیقی a،

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a \quad و \quad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

در ادامه پس از ارائه کار در کلاس در خصوص استفاده از قضایای حد توابع مثلثاتی، حل تذکری تمامی قضایای مطرح شده در خصوص حد توابع در کتاب به حد چپ و حد راست توابع نیز تعمیم داده می‌شود و در کار در کلاس مسئله مرتبط با این موضوع ارائه می‌شود.

حل تمرین‌های درس سوم (از صفحه ۱۳۹ تا ۱۴۰)

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}-9)^3 = -216$ ب) $\lim\limits_{x\to -1}(-6x^7-4x^2+5) = 6-4+5=7$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}}\dfrac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^3+1)} = 0$ ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+}\dfrac{1-x^2}{x^2-4} = \dfrac{1}{2}$ ث) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\sqrt{4x^2+6x} = 2$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x+\cos x} = \dfrac{0}{1} = 0$ چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{|\cos x|}{x-\pi}\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}|\cos x| = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\cos x = 0\\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}|\cos x| = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\cos x = 0\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}|\cos x| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{|\cos x|}{x-\pi} = 0$$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to 1}f(x) = 3$ و $\lim\limits_{x\to 2}f(x) = 3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

خیر. به عنوان مثال $f(x) = \begin{cases}3x & x \le \frac{3}{2}\\ x+1 & x > \frac{3}{2}\end{cases}$ مثال نقضی است برای رد این ادعا. البته این سؤال باز پاسخ است و می‌توان مثال‌های نقض دیگری نیز ارائه کرد.

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x^2-1} = 4$.

$$\begin{cases}g(x) = 6x\\ g(x) = 10+x\\ g(x) = 2x+8\end{cases}$$

اگر $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x^2-1} = 4 \Rightarrow \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}g(x)}{\underset{3}{\cancel{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}}} = 4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}g(x) = 12$

موجود باشد، این سؤال نیز سؤالی باز پاسخ است.

۴ نشان دهید اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}\left(f(x)-L\right)=0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

بله چون

$$\text{اگر } \lim_{x\to a}(f(x)-L)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-L+L)$$

$$=\underbrace{\cancel{\lim_{x\to a}(f(x)-L)}}_{0}+\lim_{x\to a} L = 0+L=L$$

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y=3x+2 \quad , \quad y=x^2-1 \quad , \quad y=[x]-1 \quad\quad y=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.

$$\lim_{x\to 1}(3x+2)=3+2=5 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$$

$$\lim_{x\to 1} y \quad \begin{matrix}\lim_{x\to 1^+} y=2\\ \lim_{x\to 1^-} y=-2\end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} y \neq \lim_{x\to 1^-} y$$

پس حد ندارد

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=x^2-1$	$g(x)=3x+2$	$f(x)+g(x)=x^2+3x+1$
تابع $f.g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=[x]-1$	$g(x)=x^2-1$	$f(x)\,g(x)=x^2+[x]-2$
توابع f و g در ۱حد راست دارنداما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=3x+2$	$g(x)=[x]-1$	$\frac{f(x)}{g(x)}=3x+[x]+1$
تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$		$f^2(x)=4\ (x+1)$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=x^2-1$		$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

حد تابع $f+g$ در a وجود ندارد زیرا اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ موجود باشد آنگاه بنابر تساوی $g(x)=(f(x)+g(x)-f(x))$ و قضیه حدتفاضل حد تابع g نیز باید در a موجود باشد که خلاف فرض است.

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+b & x>-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-۱^-}\dfrac{x^{۲}+[x]}{|x|}=\dfrac{۱-۲}{۱}=-۱\\ \lim\limits_{x\to-۱^+}۳x+b=-۳+b\end{cases}\Rightarrow -۳+b=-۱\to b=۲$$

۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to-۲}\left(۲g(x)-f(x)\right)$$

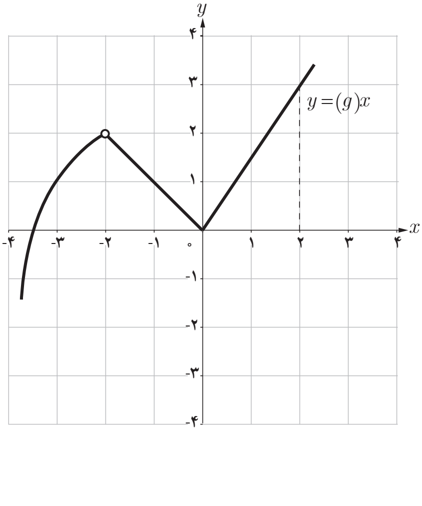
$$\lim_{x\to-۳}-۳\sqrt{g(x)}$$

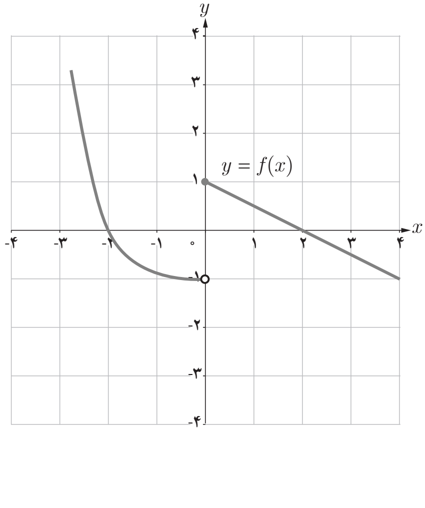
$$\lim_{x\to۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}$$

$$\lim_{x\to-۲}(۲g(x)-f(x))=۲\lim_{x\to-۲}g(x)-\lim_{x\to-۲}f(x)=۴-۰=۴$$

$$\lim_{x\to-۳}-۳\sqrt{g\,x}=-۳\sqrt{\lim_{x\to-۳}g(x)}=-۳\sqrt{۱}=-۳$$

$$\lim_{x\to۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}=۲\sqrt[۳]{\lim_{x\to۲}g(x)}=۲\sqrt[۳]{۳}$$





کار در کلاس ص ۱۴۳

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۲x-۱}{۴x-\pi}\Rightarrow\lim_{t\to ۰}\frac{\sin ۲(t+\frac{\pi}{۴})-۱}{۴(t+\frac{\pi}{۴})-\pi}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(۲t+\frac{\pi}{۲})-۱}{۴t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos ۲t-۱}{۴t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cancel{۱}-\cancel{۲}\sin^۲ \cancel{t-۱}}{۴t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin ۲t}{۲t}=-\frac{۱}{۲}\cancel{\lim_{t\to ۰}}\frac{\cancel{\sin t}}{t}\times\cancel{\lim_{t\to ۰}}\cancel{\sin t}$$

$$=-\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۰=۰$$

پس اگر $x\to\frac{\pi}{۴}$ ، $t\to ۰$ $\Rightarrow$ $\boxed{x-\frac{\pi}{۴}=t}$

$$x=t+\frac{\pi}{۴}$$

حل تمرین‌های درس چهارم ص ۱۴۴

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۲x^۲+x-۱=x^۲-۱+x^۲+x=(x-۱)(x+۱)+x(x+۱)=(x+۱)(۲x-۱)$$

الف) $$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x}=\lim_{x\to -۱}\frac{\overset{۱}{\cancel{(x+۱)}}(۲x-۱)}{۳x\,\underset{۱}{\cancel{(x+۱)}}}=\lim_{x\to -۱}\frac{۲x-۱}{۳x}=\frac{-۲-۱}{-۳}=+۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+}[x]=۲$$

ب) $$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲[x]-۸}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x^۲-۸}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x^۲-۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲\overset{۱}{\cancel{(x-۲)}}(x+۲)}{\underset{۱}{\cancel{x-۲}}}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}(۲x+۴)=۸$$

پ) $$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}\times\frac{(\sqrt{x+۲}+۲)}{(\sqrt{x+۲}+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}=\frac{۱}{۴\times ۴}=\frac{۱}{۱۶}$$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}\times\left(\dfrac{۲+\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}}\right)\times\left(\dfrac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}\right)=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۸-۲x)(۲+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(۴-x)}(۳+\sqrt{۲x+۱})}{۲\cancel{(۴-x)}(۲+\sqrt{x})}=\dfrac{۶}{۸}=\dfrac{۳}{۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x}\times\dfrac{(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})}{(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲\cancel{x}}{\cancel{x}(x^۲+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})}=\dfrac{۲}{۲}=۱$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}\times\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}\right)=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x^۲-x)(\sqrt{x}+۱)}{(x-۱)(x+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}(x+\sqrt{x})}=\dfrac{۲}{۲}=۱$

۲ اگر $f(x)=\dfrac{x+۱}{۲x^۲-x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۲x+۱}{x}$ ، **حاصل** $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)g(x)$ را بیابید.

$\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x).g(x)=\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}}\dfrac{(x+۱)}{\cancel{(۲x+۱)}(x-۱)}\times\dfrac{\cancel{(۲x+۱)}}{x}=\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}}\dfrac{x+۱}{x(x-۱)}=\dfrac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\dfrac{۴}{۶}=\dfrac{۲}{۳}$

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱-\sin x}{\cos x}\times\dfrac{(۱+\sin x)}{(۱+\sin x)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱-\sin^۲ x}{\cos x(۱+\sin x)}$

$=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{\cos^۲ x}{\cancel{\cos x}(۱+\sin x)}=\dfrac{۰}{۲}=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\dfrac{\cos x\,\cos\frac{\pi}{۴}-\sin x\,\sin\frac{\pi}{۴}}{\cos x-\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}\times\dfrac{\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x^۲}{|۱-\cos x|}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x^۲}{۱-\cos x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x^۲}{۱-۱+\sin\frac{۲x}{۲}}$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۴}{۲}\times\underbrace{\cancel{\frac{\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}}}_{۱}\times\underbrace{\cancel{\frac{\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}}}_{۱}=\frac{۴}{۲}=۲$$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲-۲+۴\sin \cancel{۲}x}{x\cancel{\sin x}}=\lim\limits_{x\to ۰}۴\times\overset{۱}{\cancel{\dfrac{\sin x}{x}}}=۴$

ث) $\lim\limits_{x\to -\pi}\dfrac{\cos x+۱}{x+\pi}=\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{\cos(t-\pi)+۱}{t}=\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{\cos-(\pi-t)+۱}{t}$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\cos t+۱}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{(۱-\cos t)}{t}\frac{(۱+\cos t)}{(۱+\cos t)}=\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ t}{t(۱+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\cancel{\frac{\sin t}{t}}\times\frac{\sin t}{۱+\cos t}=\frac{۰}{۱+۱}=\frac{۰}{۲}=۰$$

$$\boxed{\begin{array}{l}x+\pi=t\\ x=t-\pi\end{array}}$$

حل : $x-a=t$ و اگر $x\to a$ آنگاه $t\to ۰$ و $x=t+a$ پس داریم :

ج) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{\sin(t+a)-\sin a}{t+a-a}=\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{\sin t\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t}$

$$=\cos a\underbrace{\cancel{\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}}}_{۱}+\sin a\lim_{t\to ۰}\frac{(\cos t-۱)}{t}=\cos a+۰=\cos a$$

$$\lim_{t\to ۰}\frac{(\cos t-۱)}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{(\cos t-۱)(\cos t+۱)}{t(\cos t+۱)}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos^۲ t-۱}{t(\cos t+۱)}=\lim_{t\to ۰}-\frac{\sin^۲ t}{t(\cos t+۱)}$$

$$=-\lim_{t\to ۰}(\underbrace{\cancel{\frac{\sin t}{t}}}_{۱}\times\frac{\sin t}{\cos t+۱})=-\frac{۰}{۲}=۰$$

با تغییر متغیر $t=x-\dfrac{\pi}{۳}$ ، اگر $x\to\dfrac{\pi}{۳}$ پس $t\to ۰$ و داریم $x=t+\dfrac{\pi}{۳}$

چ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}=\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{\sin t}{۶t+۲\pi-۲\pi}=\lim\limits_{t\to ۰}\dfrac{\sin t}{t}\times\dfrac{۱}{۶}=\dfrac{۱}{۶}$

با تغییر متغیر $t=x-۱$، اگر $x\to ۱$ پس $t\to ۰$ و داریم $x=t+۱$

ح) $$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}=\lim_{t\to ۰}\frac{۲t+۲-۳\sqrt{t+۱}+۱}{t}=\lim_{t\to ۰}\frac{۲t+۳-۳\sqrt{t+۱}}{t}$$

$$=۲\lim_{t\to ۰}\frac{t}{t}+۳\lim_{t\to ۰}\frac{(۱-\sqrt{t+۱})}{t}\times\frac{(۱+\sqrt{t+۱})}{(۱+\sqrt{t+۱})}=۲+۳\lim_{t\to ۰}\frac{-\cancel{t}}{\cancel{t}(۱+\sqrt{t+۱})}=۲+(۳\times\frac{-۱}{۲})$$

$$=۲-\frac{۳}{۲}=+\frac{۱}{۲}$$

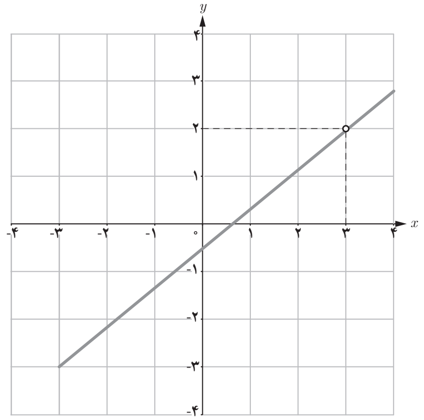
کار در کلاس ص ۱۴۷

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=$۳ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=$۳ پیوسته نیست)

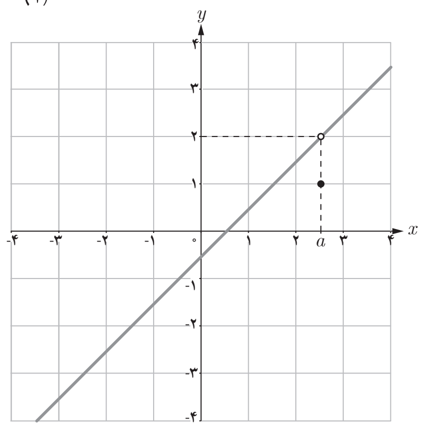
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

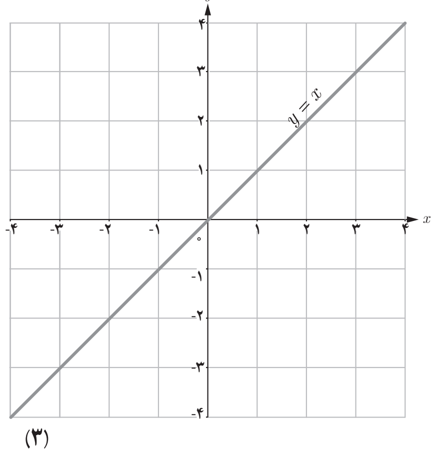
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دو نقطه.



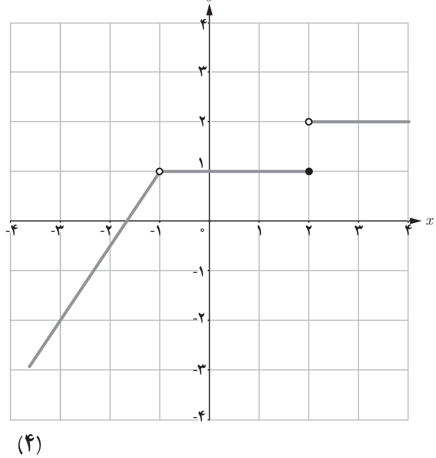
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

تذکر : دو نکته مهم که درمورد پیوستگی باید به آن توجه شود موارد زیر می‌باشد :

۱ در این کتاب و این فصل فقط مفهوم «پیوستگی تابع در نقطه» بیان شده است و از «تابع پیوسته» هیچ حرفی زده نمی‌شود و جزء اهداف کتاب نمی‌باشد.

۲ با توجه به تعریف حد و مطالب ارائه شده و بنابر تعریف پیوستگی، در شرایط زیر باید گفته شود که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نیست اگر یکی از شرایط زیر را دارا باشد :

الف) $a \notin D_f$

ب) f فقط در یک نقطه a تعریف شده باشد (مانند تابع $y \quad \sqrt{x}$ در $a=0$).

دانش‌آموزان با انجام فعالیت صفحه ۱۴۸، با مفهوم «پیوستگی یک‌طرفه» تابع در نقطه به صورت شهودی آشنا می‌شوند و پس از درک شهودی آن تعریف «پیوستگی راست تابع در یک نقطه مانند a و پیوستگی چپ تابع در همان نقطه» ارائه شده است.

پس از بیان این تعاریف، ارتباط بین پیوستگی راست و چپ تابع برای پیوستگی آن (در یک نقطه) در قالب یک قضیه دو شرطی مطرح شده است. پس از آن مثال حل شده‌ای برای ارائه نمونه‌ای که از تعاریف و قضایای پیوستگی در آن استفاده شده، بیان شده است و پس از این مثال، کار در کلاسی برای تعیین پیوستگی راست، چپ و دو طرفه توابع در یک نقطه با استفاده از نمودار آنها ارائه گردیده است.

تعریف

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

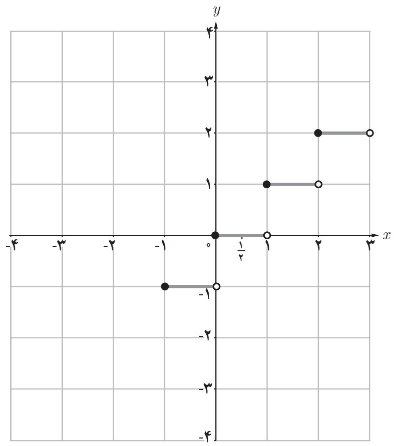
گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دوطرفه) a تعریف شده باشد :

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

در سؤال ۱ کار در کلاس صفحه ۱۴۹ تعیین پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ در چند نقطه و همچنین پیوستگی راست و چپ آن با توجه به رسم نمودار تابع در نقاط ارائه شده خواسته شده است.

کار در کلاس ص ۱۴۹



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{\circ , \frac{1}{2} , 2\}$،

۱ تابع f پیوسته است. فقط در نقطه $\frac{1}{2}$ پیوسته است.

۲ تابع f پیوستگی راست دارد. در نقاط $\{\circ , \frac{1}{2} , 2\}$ پیوستگی راست دارد.

۳ تابع f پیوستگی چپ دارد. در نقطه $\frac{1}{2}$ پیوستگی چپ دارد.

پایین صفحه ۱۴۹ تعریف پیوستگی تابع بر یک بازه بیان شده است.

تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازهٔ باز (a, b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازهٔ بسته $[a , b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

همان‌طور که دبیران محترم اطلاع دارند تعریف پیوستگی تابع بر یک بازه بسته صرفاً جهت سهولت بیان صورت قضایایی مانند قضیه مقدار میانگین و ... بیان می‌شود و به نوعی آن را به عنوان قرارداد تلقی می‌کنند و نه یک مفهوم جدید!

تذکر : «پیوستگی تابع f بر بازه $[a , b]$»با مفهوم «پیوسته بودن تابع f در هر نقطه $[a , b]$» کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال تابع $y=[x]$ بر بازه بسته $[\circ , \frac{1}{2}]$ پیوسته است اما نمی‌توان گفت تابع $y=[x]$ در هر نقطه از $[\circ , -]$ پیوسته است. در این فصل از کتاب پیوستگی تابع بر یک بازه ارائه شده است نه پیوسته بودن تابع در تمام نقاط یک بازه. در کار در کلاس‌های صفحه ۱۵۰ نیز به این مطلب (پیوستگی تابع بر یک بازه) پرداخته شده است.

حل تمرین‌های درس پنجم ص ۱۵۱

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-۱|+۲$　　　ب) $y=x-[x]$

پ) $y=[x]+[-x]$　　　ت) $y=\begin{cases} x(x-۱) & x\leq ۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۱ \\ a & x=۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$　　　ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲+x-۲}{x-۱} & x\neq ۱ \\ a & x=۱ \end{cases}$

پ) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ۰<x<۱ \\ [x]+a & x\geq ۱ \end{cases}$　　　ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=۰$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<۰ \\ a & x=۰ \\ ۲x+۱ & x>۰ \end{cases}$　　　ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(۲,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱-\cos x}{x^۲} & x>۰\\ b-۱ & x=۰\\ x-۲a & x<۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد.

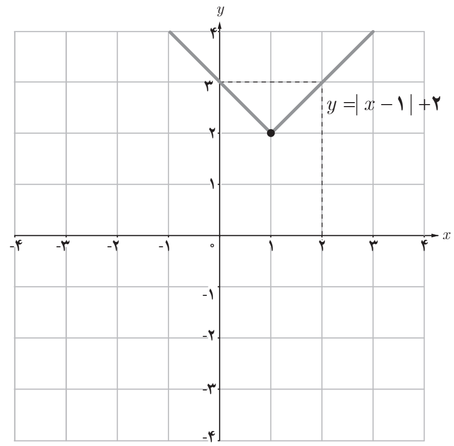
تمرین ص ۱۵۱

۱

(الف)

تابع هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد

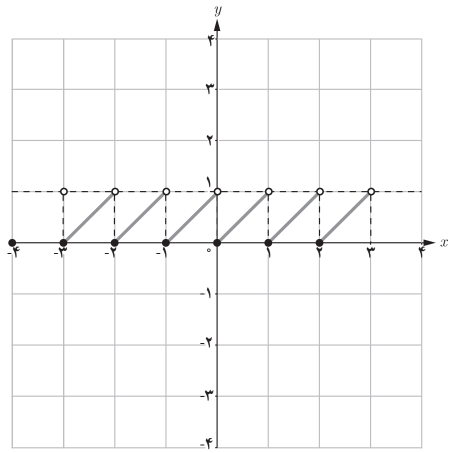
$y=|x-۱|+۲$



(ب)

مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع برابر $\mathbb{Z}$ است

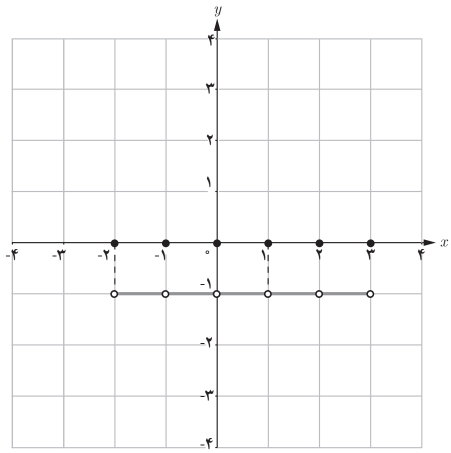
$y=x-[x]$



(پ)

مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع برابر مجموعه $\mathbb{Z}$ است

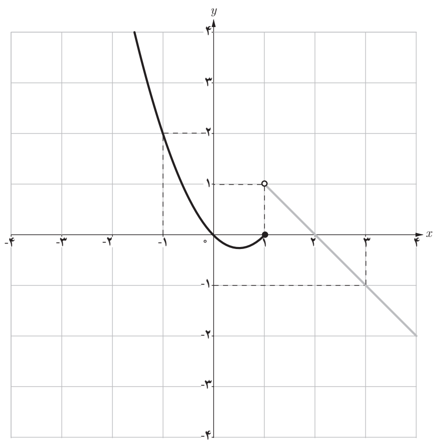
$$y=[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ ۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



(ت)

تابع فقط در نقطه x=۱ ناپیوسته است

$$y=\begin{cases}x(x-۱) & x\leq ۱\\ -x+۲ & x>۱\end{cases}$$



۲

الف)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲x-۱)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(-x+۲)=۱\end{array}\right\rangle \lim_{x\to ۱} f(x)=۱$$

چون $a=f(۱)$ پس برای آنکه شرط $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$ برقرار باشد باید داشته باشیم $a=۱$.

ب)

$$\lim_{x\to ۱} g(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۲)}{\cancel{(x-۱)}}=۳$$

چون $a=f(۱)$ پس باید a=۳ .

پ) $\lim\limits_{x\to ۱^-} h(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} = \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}}{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)} = \frac{۱}{۲}$

$$\lim_{x\to ۱^+} h(x) = \lim_{x\to ۱^+} [x]+a = ۱+a$$

پس برای آنکه $\lim\limits_{x\to ۱} h(x)$ موجود باشد باید داشته باشیم

$$\frac{۱}{۲} = ۱+a \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

حال چون $\lim\limits_{x\to ۱} h(x) = \frac{۱}{۲} = h(۱)$ پس h در $x=۱$ پیوسته می‌شود.

ت) چون $\lim\limits_{x\to ۱^+} [x] = ۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} [x] = ۰$ پس :

$$\lim_{x\to ۱^+} h(x) = \lim_{x\to ۱^+} ([x]-a)[x] = ۱-a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} k(x) = \lim_{x\to ۱^-} ([x]-a)[x] = (۰-a)(۰) = ۰$$

پس برای وجود حد باید داشته باشیم $۱-a=۰$ پس $a=۱$ و در این صورت داریم :

$\lim\limits_{x\to ۱^-} k(x) = ۰ = k(۱)$ پس k در $x=۱$ پیوسته می‌شود.

۳

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} x = ۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} (۲x+۱) = ۱$ پس $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد پس a هر مقدار هم که باشد تابع f در $x=۰$ پیوسته نیست.

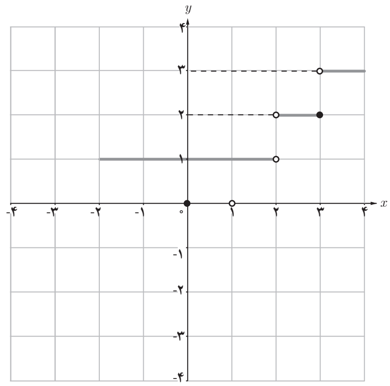
ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+} g(x) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{ax}{|x|} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}} = a$

$$\lim_{x\to ۰^-} g(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

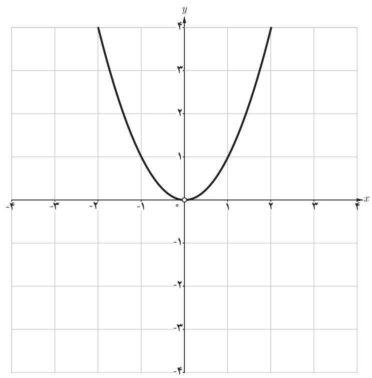
پس برای آنکه $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ موجود باشد باید داشته باشیم : $a=-a \Rightarrow ۲a=۰ \Rightarrow a=۰$

اما در این صورت خواهیم داشت $\lim\limits_{x\to ۰} g(x) = ۰ \neq ۱ = g(۰)$ پس برای $a=۰$ نیز تابع g در $x=۰$ نمی‌تواند پیوسته باشد.

۴ سؤالی باز پاسخ می‌باشد که یک پاسخ به عنوان نمونه آورده شده است.



(ب)



(الف)

(پ)
$$f(x)=\begin{cases}-۱ & x\leq ۱\\ ۱ & ۱<x<۲\\ ۳ & ۲\leq x\end{cases}$$

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(۲,۳)$ پیوسته است امّا چون دو نقطه $x=۳$ پیوسته نیست پس حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

۶ دامنه تابع $f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$ برابر است با $(-\infty, ۳]$ و تابع f روی بازه‌های بسته‌ای مانند $[۲,۳]$ ، $[۱,۲/۵]$ و ... پیوسته است.

۷
$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(x-۲a)=-۲a$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{۱-\cos x}{x^۲}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}\right)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin^۲ x}{x^۲(۱+\cos x)}$$

$$=\left(\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{x}\right)^۲\left(\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱+\cos x}\right)=(۱)^۲(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

$$f(۰)=b-۱$$

حد راست = حد چپ = مقدار تابع $\Rightarrow \frac{۱}{۲}=-۲a=b-۱\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}\ ,\ b=\frac{۳}{۲}$