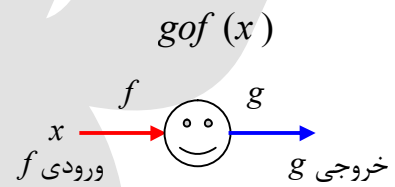
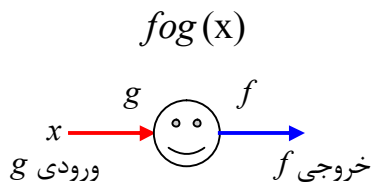


ترکیب توابع ۱

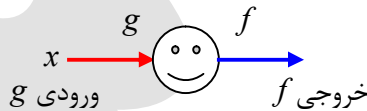
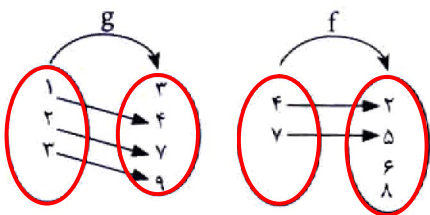
ترکیب دو تابع:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$



سؤال ۱: اگر توابع f و g به شکل روبرو باشند، $f(g(x))$ را بدست آورید.



$$1 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 2, \quad 2 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 5, \quad 3 \xrightarrow{g} 9 \xrightarrow{f} x$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = \{(1, 2), (2, 5)\}$$

سؤال ۲: اگر $f = \{(2, -2), (3, 1), (-1, 1)\}$ و $g \circ f = \{(-1, 4), (2, 3)\}$ باشد حاصل $g(g(-2) - 2)$ کدام است.

ابتدا باید $g(-2)$ رو حساب کنیم. اِه، اما ما که g نداریم پس به اجبار ناچار به f رو می اندازیم:

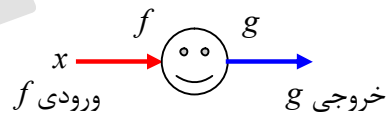
$$2 \xrightarrow{f} -2 \xrightarrow{g} 3 \Rightarrow (-2, 3) \in g$$

$$-1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 4 \Rightarrow (1, 4) \in g$$

$$3 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} x$$

$$\rightarrow g(g(-2) - 2) = g(3 - 2) = g(1)$$

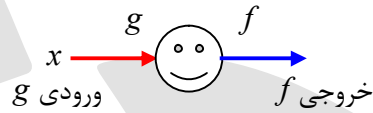
$$(-1, 1) \in f \rightarrow f(-1) = 1 \rightarrow g(1) = g(f(-1)) = g \circ f(-1) = 4$$



سؤال ۳: اگر $f \circ g = \{(-1, 3), (-2, 5), (7, 3), (-3, 3)\}$ و $g = \{(-1, 2), (3, 6), (-2, 4), (7, 1), (-3, 1)\}$ آنگاه f کدام

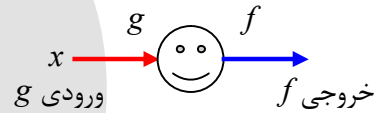
است.

$$\begin{aligned}
 -1 &\xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (2, 3) \in f \\
 -2 &\xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow (4, 5) \in f \\
 1 &\xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3) \in f \\
 -3 &\xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3) \in f \\
 f &= \{(2, 3), (4, 5), (1, 3)\}
 \end{aligned}$$



سؤال ۴: اگر $f = \{(-1, -2), (-2, 0), (0, 3)\}$, $f \circ g = \{(-1, 0), (1, -2), (2, 3)\}$ آنگاه g کدام است.

$$\begin{aligned}
 -1 &\xrightarrow{g} -2 \xrightarrow{f} 0 \quad (-1, -2) \in g \\
 1 &\xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} -2 \quad (1, -1) \in g \\
 2 &\xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} 3 \quad (2, 0) \in g \\
 \Rightarrow g &= \{(-1, -2), (1, -1), (2, 0)\}
 \end{aligned}$$



سؤال ۵: اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$, $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$, $f(a) = 5$ باشد عدد a کدام است.

- (داخلی تجربی ۹۱) ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$$\begin{aligned}
 a &\xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 5 \Rightarrow 0 = 6 \\
 \Rightarrow f(x) = 6 &\Rightarrow x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 4
 \end{aligned}$$

سؤال ۶: تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$, $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض هستند اگر $(4, 2) \in f \circ g$

$(4, 1) \in g \circ f$ باشد دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟ (سراسری ۹۰)

$$\begin{aligned}
 4 &\xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 2 \Rightarrow (4, 2) \in f \\
 4 &\xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 1 \Rightarrow (5, 1) \in g \\
 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases} &\Rightarrow (a, b) = (4, 5)
 \end{aligned}$$

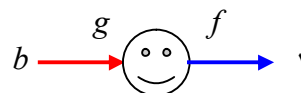
سؤال ۷: اگر $f = \{(2, 3), (a, 4), (12, 1)\}$, $g(x) = x + \sqrt{x}$ و باشند و $f \circ g = \{(1, 3), (4, 4), (b, 1)\}$

باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲، ۹۸)

- (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{aligned}
 4 &\xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} 4 \Rightarrow (6, 4) \in f \\
 b + \sqrt{b} = 12 &\Rightarrow b = 9 \\
 a + b = 13
 \end{aligned}$$



روش بدست آوردن ضابطه‌ی توابع $f \circ g$ و $g \circ f$

فرض کنید ضابطه توابع f و g رو در اختیار دارید.

$$y = f(x) \xrightarrow{g(x)} y = f(g(x))$$

$$y = g(x) \xrightarrow{f(x)} y = g(f(x))$$

۱. برای بدست آوردن ضابطه‌ی تابع $y = f(g(x))$ کافیست که ضابطه‌ی g رو درون f قرار بدید. یعنی به جای x های تابع f ، ضابطه‌ی $g(x)$ رو جایگزین کنید.

۲. برای بدست آوردن ضابطه‌ی تابع $y = g(f(x))$ کافیست که ضابطه‌ی f رو درون g قرار بدید. یعنی به جای x های تابع g ، ضابطه‌ی $f(x)$ رو جایگزین کنید.

سؤال ۸: اگر $f(x) = \frac{x}{1+x}$ و $g(x) = \tan x$ باشد، ضابطه‌ی $f(g(x))$ کدامست؟ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$

- (۱) $\tan^2 x$ (۲) $\cot^2 x$ (۳) $\sin^2 x$ (۴) $\cos^2 x$

پاسخ: گزینه (۳)

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \xrightarrow{g^2(x)} f(g^2(x)) = \frac{g^2(x)}{1+g^2(x)} = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \sin^2 x$$

سؤال ۹: اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ آنگاه حاصل $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ کدام

است؟ (قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲، ۹۸)

- (۱) $4(1 - \sqrt{2})$ (۲) $4(\sqrt{2} - 1)$ (۳) ۴ (۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = |x|, g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = f(g(1 - \sqrt{2})) - g(f(1 - \sqrt{2}))$$

$$= f((1 - \sqrt{2} + 1)^2) - g(|1 - \sqrt{2}|) = f((2 - \sqrt{2})^2) - g(\sqrt{2} - 1)$$

$$= |4 + 2 - 4\sqrt{2}| - (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = |6 - 4\sqrt{2}| - 2 = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4(1 - \sqrt{2})$$

سؤال ۱۰: اگر $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ و $g(x) = |x|$ حاصل $f(g(1 - \sqrt{2})) - g(f(1 - \sqrt{2}))$ کدام است؟ []

علامت جزء صحیح است (قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۳، ۹۷)

- (۱) صفر (۲) ۵ (۳) -۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۳

هر یک از عبارات ها را جداگانه مناسبه می کنیم:

$$f(g(1-\sqrt{2})) = f(|1-\sqrt{2}|) = f(\sqrt{2}-1) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}-1} \right]$$

از آنجا که با گویا کردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ فوایم داشت: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$ پس:

$$f(g(1-\sqrt{2})) = [\sqrt{2} + 1] = 2$$

$$g(f(1-\sqrt{2})) = g\left(\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right]\right)$$

$\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ برابر است با $-(\sqrt{2} + 1)$ پس:

$$g\left(\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right]\right) = g(-[\sqrt{2} + 1]) = g(-2) = |-2| = 2$$

$$g(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2})) = 2 - 2 = 0$$

سؤال ۱۱: اگر $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$ و $g(x) = 2\cos^2 x$ باشد، مقدار $fog\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟ (قلمچی)

ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ تابستان ۹۸

- (۴) ۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2 \frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

حال کافی است $x=2$ را در $f\left(\frac{1}{x}\right)$ جایگذاری کنیم: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

سؤال ۱۲: اگر $f(x) = 3 - 3^{x-1}$ و $g(x) = \log_3 x$ باشد آنگاه $fog(x)$ کدام است؟

- (۴) $\frac{x-1}{3}$ (۳) $3 - \frac{x}{3}$ (۲) $3 - x$ (۱) $x + 3$

پاسخ: گزینه ۳

$$fog(x) = f(\log_3 x) = 3 - 3^{\log_3(x-1)} = 3 - \frac{1}{3}(3^{\log_3 x}) = 3 - \frac{x}{3}$$

سؤال ۱۳: تابع $f(x) = \frac{x+1}{x+a}$ مفروض است. اگر $f\left(\frac{-1}{x}\right) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟ (قلمچی)

ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱، ۹۸

- (۴) -۲ (۳) ۲ (۲) -۱ (۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = \frac{x+1}{x+a} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x}+1}{-\frac{1}{x}+a} = \frac{\frac{-1+x}{x}}{\frac{-1+ax}{x}} = \frac{x-1}{ax-1}$$

$$f(x)f\left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+a} \times \frac{x-1}{ax-1} = -1 \Rightarrow a = -1$$

سؤال ۱۴: اگر $(g \circ f)(x) = x + f(x)$, $g(x) = x^2 - x + 4$ مقدار $f(3)$ چقدر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

توجه کنید که:

$$(g \circ f)(x) = x + f(x) \Rightarrow g(f(x)) = x + f(x)$$

$$f^2(x) - f(x) + 4 = x + f(x) \Rightarrow f^2(x) - 2f(x) - x + 4 = 0$$

اگر در این تساوی قرار دهیم $x = 3$ به دست می آید.

$$f^2(3) - 2f(3) - 3 + 4 = 0 \Rightarrow f^2(3) - 2f(3) + 1 = 0$$

$$(f(3) - 1)^2 = 0 \Rightarrow f(3) = 1$$

سؤال ۱۵: با توجه به نمودار زیر اگر $g(x) = 3x - 2$ باشد مقدار $f(5)$ کدام است.



- ۱ (۱) ۲ (۲)

- ۳ (۳) ۴ (۴)

$$x^2 = g(f(2x+1)) \xrightarrow{g(x)=3x-2} x^2 = 3f(2x+1) - 2 \xrightarrow{x=2} 4 = 3f(5) - 2 \Rightarrow 6 = 3f(5) \Rightarrow f(5) = 2$$

سؤال ۱۶: اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $x \xrightarrow{f} g \xrightarrow{2x}$ باشند و

$g(x) = 3x + 4$ آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟ (قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲، ۹۸)

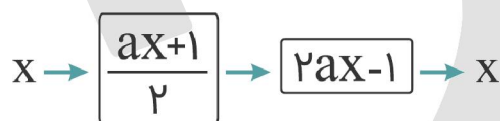
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به ماشین مفروض سؤال، می توان نوشت:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) \xrightarrow{2x} 2x \Rightarrow g(f(x)) = 2x$$

$$\xrightarrow{g(x)=3x+4} 3f(x) + 4 = 2x \Rightarrow f(x) = \frac{2x-4}{3} \Rightarrow f(5) = 2$$

سؤال ۱۷: ماشین زیر، مقدار a کدام است؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹، ۹۶)



- ۱ (۱)

- ۲ (۲)

- ۳ (۳)

- ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

❖ راه اول) باید دو تابع $y = \frac{ax+1}{2}$ و $y = 2ax-1$ معکوس هم باشند؛ اما معکوس تابع $y = \frac{ax+1}{2}$ به صورت زیر

حساب می‌گردد:

$$y = \frac{ax+1}{2} \Rightarrow 2y = ax+1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x-1}{a} = 2ax-1 \Rightarrow a=1$$

❖ راه دوم)

$$x \rightarrow \left[\frac{ax+1}{2} \right] \rightarrow \left[2ax-1 \right] \rightarrow x$$

$\frac{ax+1}{2}$ $2a\left(\frac{ax+1}{2}\right)-1$

$$2a\left(\frac{ax+1}{2}\right)-1 = x \Rightarrow a^2x + a - 1 = 1x + 0$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1$$

📖 سؤال ۱۸: اگر $f(x) = 4x^2 + 3x$ و $f \circ g(x) = \sqrt[3]{x} + 8$ حاصل $g(8)$ کدام می‌تواند باشد؟ (قلمچی ریاضی و

فیزیک سوم آزمون شماره ۱۲، ۹۶)

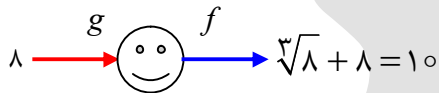
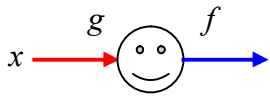
۲ (۴)

$-\frac{5}{4}$ (۳)

-۲ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



$$f(x) = 10 \Rightarrow 4x^2 + 3x = 10 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$\Rightarrow (x+8)(x-5) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{8}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

📖 سؤال ۱۹: اگر $f(x) = ax-1$ و $f(g(x)) = 6x^2 - 2x + 3$ و $g(f(x)) = 12x^2 - 14x + 6$ باشد، آنگاه

(۲) f کدام است؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۹، ۹۶)

۶ (۴)

-۱ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$f(g(x)) = ag(x) - 1 = 6x^2 - 2x + 3 \Rightarrow ag(x) = 6x^2 - 2x + 4 \quad (1)$$

$$g(f(x)) = g(ax-1) = 12x^2 - 14x + 6$$

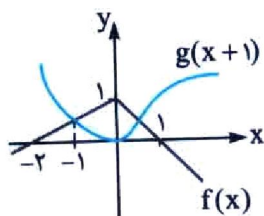
$$g(ax-1) = 12x^2 - 6x + 6 \quad (2)$$

$$(2) \quad x=0 \rightarrow \boxed{g(-1) = 6}$$

$$(1) \quad x=-1 \rightarrow ag(-1) = 12 \Rightarrow \boxed{g(a) = 2}$$

$$f(x) = 2x - 1 \Rightarrow f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

سؤال ۲۰: نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x+1)$ به شکل مقابل است مقدار تابع $y = (f+2g) \circ f$ به



ازای $x=1$ کدام است؟

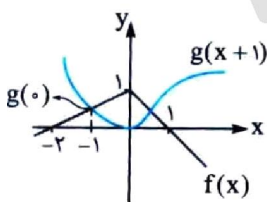
- ۱ (۱) ۲ (۲)
۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)
 $\frac{1}{2}$ (۵) ۲ (۶)

پاسخ: گزینه ۲

$$1 \xrightarrow{f} \text{Smiley Face} \xrightarrow{f+2g} f(0) + 2g(0) = 1 + 2g(0)$$

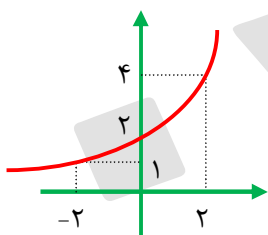
برای پیدا کردن $g(0)$ باید مقدار تابع $y = g(x+1)$ را در $x = -1$ پیدا کنیم. ضابطه پاره قطعی که $g(0)$ روی آن است را پیدا

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \xrightarrow{x=-1} g(0) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ می کنیم. شیب خط } m = \frac{1}{2} \text{ و عرض از مبدأ آن هم ۱ است.}$$



$$1 + 2g(0) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ بنابراین حاصل برابر است با:}$$

سؤال ۲۱: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. اگر $(f \circ f)(t) = 4$ مقدار $f(t-2)$ چقدر است؟



- ۱ (۱) صفر
۱ (۲)
۲ (۳)
۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

توجه کنید که:

$$f(t) = 2 \Rightarrow t = 0$$

$$f(t - 2) = f(-2) = 1$$

$$t \xrightarrow{f} \circ \xrightarrow{f} 4$$

$$\Rightarrow \circ = 2 \quad \Rightarrow t \xrightarrow{f} 2$$

$$\Rightarrow t = 0$$

سؤال ۲۲: اگر $f(x) = [x] + [2 - x]$, $g(x) = 3^x$, جواب های معادله $(g \circ f)(x) = 27$ چگونه است؟

(۱) فقط یک جواب مثبت

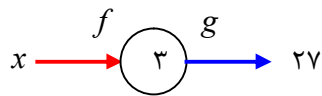
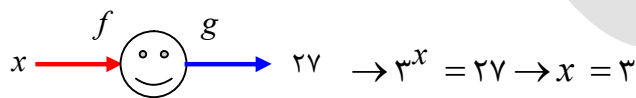
(۲) فقط یک جواب منفی

(۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی

(۴) جواب ندارد

پاسخ: گزینه ۴

$$f(x) = [x] + 2 + [-x] = 2 + [x] + [-x] = \begin{cases} 2 & x \in Z \\ 1 & x \notin Z \end{cases}$$



فروبی f هرگز ۳ نمی شود پس معادله جواب ندارد.

سؤال ۳۳: اگر $(g \circ f)(x) = x - [x]$ و $f(x) = x^3 - \sqrt{2}$ آنگاه حاصل $g(\sqrt{2})$ کدام است؟ [] نماد

جزء صحیح است (قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷، ۹۴)

(۴) -۱

(۳) ۱

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{2} - 1$

پاسخ: گزینه ۱

$$x \xrightarrow{f} \sqrt{2} \xrightarrow{g} x - [x]$$

$$f(x) = \sqrt{2} \Rightarrow x^3 - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow x^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow x^3 = \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = (\sqrt{2})^3 = \boxed{x = \sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \xrightarrow{f} \sqrt{2} \xrightarrow{g} \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$$

سؤال ۳۴: اگر $(f \circ g)(a) = -1$, $f(x) = 4x^2 - 4x$ باشند $g(a)$ کدام است؟ $(a \in D_g, a \in R)$ (قلمچی

ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳، ۹۶)

(۴) صفر

(۳) $\frac{1}{2}$

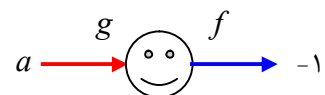
(۲) -۲

(۱) -۱

پاسخ: گزینه ۳

$$4x^2 - 4x = -1 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(a) = \frac{1}{2}$$



سؤال ۲۵: اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = x - [x]$ آنگاه ضابطه تابع $y = fog(x)$ برابر کدام است؟

[] نماد جزء صحیح است (قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷، ۹۴)

- (۱) $f(x)$ (۲) $g(x)$ (۳) $(f+g)(x)$ (۴) $(f-g)(x)$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا توجه کنید که: $0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow [x - [x]] = 0$

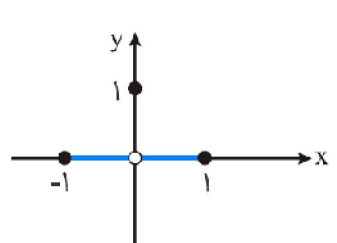
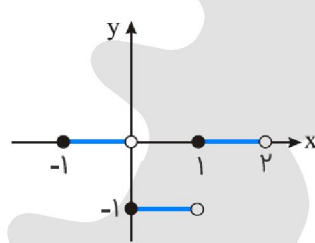
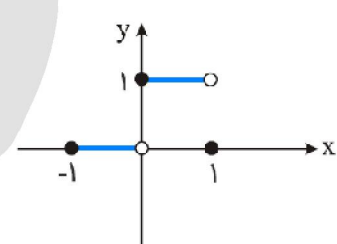
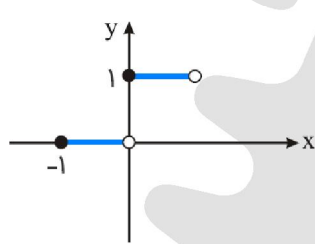
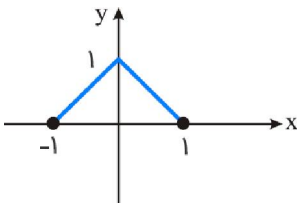
ضابطه fog را تشکیل می دهیم:

$$f(g(x)) = f(x - [x]) = x - [x] + [x - [x]] = x - [x] + 0$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = x - [x] = g(x)$$

سؤال ۲۶: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f([x])$ کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است

(قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۴، ۹۶)



پاسخ: گزینه ۱

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = f([x]) = f(-1) = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = f([x]) = f(0) = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = f([x]) = f(1) = 0 \Rightarrow y = f([x]) = \begin{cases} 0 & ; -1 \leq x < 0 \\ 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$$

سؤال ۲۷: الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت دو میلیون و چهار صد هزار تومان خریداری نماید.

اگر الناز یک کارت تخفیف ۲۰ درصدی داشته باشد و از طرفی فروشگاه برای خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان

۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی دهد، الناز در بهترین حالت لپ تاپ را با چه قیمتی خریداری می کند؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۱۷۶۰۰۰۰ (۲) ۱۷۲۰۰۰۰ (۳) ۱۶۸۰۰۰۰ (۴) ۱۶۴۰۰۰۰

پاسخ: گزینه ۲

الناز دو انتخاب دارد: اول کارت تخفیف بیست درصدی را ببرد و روی قیمت تخفیف فوری، ۲۰۰ هزار تومان نقدی تخفیف بگیرد یا

برعکس. ببینیم کدام به صرفه تر است؟

اگر تابع $f(x)$ نشان دهنده قیمت لب تاب بعد از تخفیف ۲۰۰ هزار تومان و تابع $g(x)$ نشان دهنده قیمت آن بعد از تخفیف ۲۰ درصدی باشد داریم:

$$f(x) = x - 200000, g(x) = x - \frac{20}{100}x = \frac{4}{5}x$$

ملا باید $(fog)(2400000)$ و $(gof)(2400000)$ را، مناسبه و با هم مقایسه کنیم:

$$(fog)(2400000) = f\left(\frac{4}{5} \times 2400000\right) = f(1920000) = 1920000 - 200000 = 1720000$$

$$(gof)(2400000) = g(2400000 - 200000) = g(2200000) = \frac{4}{5} \times 2200000 = 1760000$$

پس بهترین قیمتی که الاز می تواند خریداری کند برابر ۱۷۲۰۰۰۰ است.

سؤال ۲۸: اگر $f(x) = x^2 - 3x + 8$ و $g(x) = 1 - 2x$ باشد و α و β را ریشه های معادله

$(fog)(x) = 12$ بنامیم، آنگاه حاصل $|\alpha - \beta|$ کدام است؟ (قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲، ۹۸)

۴/۵ (۴)

۱/۵ (۳)

۲ (۲)

۲/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$x \xrightarrow{g} \bigcirc \xrightarrow{f} 12$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 8 = 12 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{g} 4 \text{ یا } -1 \xrightarrow{f} 12 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 4 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \\ 1 - 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$|\alpha - \beta| = \left| 1 - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| = 2/5$$

سؤال ۲۹: هرگاه $f(x) = x^2 - 4x + 2$ و $g(x) = x^2 - 5x + 6$ باشند آنگاه معادله $fog(x) = -2$

چند ریشه دارد؟

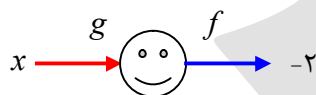
(۴) فاقد ریشه است.

۴ (۳)

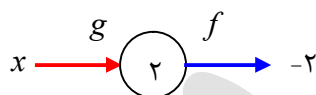
۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = -2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$



$$x^4 - 5x^2 + 6 = 2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

سؤال ۳۰: f در R صعودی اکید و g در R نزولی اکید است اگر $fog(a+6) < fog(2-a)$ آنگاه حدود a کدا است؟

- (۱) $a < -2$ (۲) $a > -2$ (۳) $a < 2$ (۴) $a > 2$

گزینه (۲)

اگر از بین f, g یکی صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشد، آنگاه fog در دامنه اش، نزولی اکید خواهد بود پس در این سؤال fog نزولی اکید است. و از $fog(a+6) < fog(2-a)$ نتیجه می شود:

$$a+6 > 2-a \Rightarrow 2a > -4 \Rightarrow a > -2$$

سؤال ۳۱: اگر $f(1) = 2, f(2) = 3$ و تابعی با دامنه R و اکیداً صعودی باشد دامنه تابع $g(x) = \sqrt{3 - (f \circ f)(x)}$

کدام است؟

- (۱) $(-\infty, 1]$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(3, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۱

دامنه تابع g از حل نامعادله زیر به دست می آید:

$$3 - (f \circ f)(x) \geq 0 \Rightarrow f(f(x)) \leq 3 \Rightarrow f(f(x)) \leq f(2)$$

با توجه به اینکه تابع f اکیداً صعودی است نتیجه می شود: $f(x) \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(1)$

مجدداً از اکیداً صعودی بودن تابع f نتیجه می شود $x \leq 1$.

$$D_g = (-\infty, 1]$$

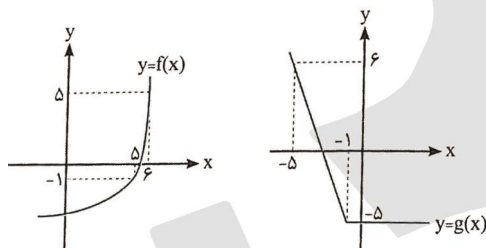
سؤال ۳۲: نمودارهای $y = g(x), y = f(x)$ به صورت زیر هستند. دامنه تابع $y = \sqrt{5 - f(g(x))}$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, 6]$

(۲) $[-5, +\infty)$

(۳) $[-5, 6]$

(۴) $[0, 5]$



پاسخ: گزینه ۲

یک موردیت داریم:

$$5 - f(g(x)) \geq 0 \Rightarrow f(g(x)) \leq 5 \Rightarrow g(x) \leq 6 \Rightarrow x \in [-5, +\infty)$$

سؤال ۱۳۳: اگر f و g توابعی چندجمله ای باشند طوری که $(f + g)(x) = 4$ و $(fog)(x) = 7 - 4x$ حاصل

جمع مقادیر ممکن برای $g(2)$ کدام است؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵، ۹۴)

۲ (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پون fog از درجه اول است، پس f و g توابعی از درجه اول هستند. اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ فوایدیم داشت:

$$f(x) + g(x) = 4 \Rightarrow g(x) = 4 - ax - b$$

$$f(g(x)) = 7 - 4x \Rightarrow ag(x) + b = 7 - 4x$$

$$\Rightarrow a(4 - ax - b) + b = 7 - 4x \Rightarrow -a^2x + 4a - ab + b = 7 - 4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a^2 = -4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ 4a - ab + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow g(x) = -2x + 3 \Rightarrow g(2) = -1 \\ a = -2 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow g(x) = 2x - 1 \Rightarrow g(2) = 3 \end{cases}$$

ترکیب توابع ۲

سؤال ۳۴: اگر $f(x) = mx + b$ ($b \geq 4, m \neq 0$) آنگاه با شرط $f(f(2)) = 2$ بیشترین مقدار m کدام است؟
(قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۸، ۹۸)

- ۱ (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$f \circ f(2) = f(f(2)) = f(2m + b) = m(2m + b) + b = 2m^2 + mb + b$$

$$f \circ f(2) = 2 \Rightarrow 2m^2 + mb + b = 2 \Rightarrow 2m^2 + mb + b - 2 = 0$$

در معادله فوق بر حسب m جمع ضریب جمله درجه دوم و عدد ثابت برابر با ضریب جمله درجه یک است ($2 + b - 2 = b$)

$$\text{پس یکی از ریشه ها } -1 \text{ و دیگری } -\frac{c}{a} = -\frac{b-2}{2} \text{ است؛ یعنی: } m \leq -1 \xrightarrow{b \geq 4} m = -\frac{b}{2} + 1 \text{ یا } m = -1$$

پس بیشترین مقدار m برابر با -1 است.

سؤال ۳۵: هرگاه f تابعی یک به یک باشد و $f(x + 2f(x)) = f(5x + 2)$ در این صورت نمودار تابع

$y = f \circ f(x)$ محور y را با چه عرضی قطع می کند؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹، ۹۷)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

باتوجه به اینکه تابع f یک به یک است، داریم:

$$f(x_2) = f(x_1) \xrightarrow{f \text{ تابعی یک به یک است}} x_1 = x_2$$

$$x + 2f(x) = 5x + 2 \Rightarrow 2f(x) = 5x + 2 - x \Rightarrow 2f(x) = 4x + 2$$

$$\Rightarrow 2f(x) = 2f(2x + 1) \Rightarrow f(x) = 2x + 1$$

$$\Rightarrow f \circ f(x) = f(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f \circ f(0) = 4(0) + 3 = 3$$


سؤال ۳۶: تابع f روی اعداد طبیعی به صورت $f(n) = \begin{cases} n + 3 & ; \text{ فرد } n \\ \frac{n}{2} & ; \text{ زوج } n \end{cases}$ تعریف می شود، به ازای کدام عدد

فرد k رابطه $(f \circ f)(k) = 27$ برقرار است؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷، ۹۹)

- ۵۳ (۱) ۲۱ (۲) ۵۱ (۳) ۲۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$k \xrightarrow{\text{فرد } f} \underbrace{(k + 3)}_{\text{زوج}} \xrightarrow{f} \frac{k + 3}{2} = 27 \Rightarrow k = 51$$

سؤال ۳۷: اگر $f(x) = x^2 + 4x$, $f \circ g(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3)$ باشد یکی از ضابطه های تابع g کدام می تواند باشد. 

(۱) $g(x) = x^2 + 1$

(۲) $g(x) = x^2 + 2$


(۳) $g(x) = 2x^2 + 1$

(۴) $g(x) = x^2 - 1$

$$f \circ g(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 3) \Rightarrow g^2(x) + 4g(x) = x^2 + 2x^2 - 3 \xrightarrow{+4}$$

$$g^2(x) + 4g(x) + 4 = x^2 + 2x^2 + 1 \Rightarrow (g(x) + 2)^2 = (x^2 + 1)^2 \Rightarrow g(x) + 2 = \pm(x^2 + 1)$$

$$\begin{cases} g(x) + 2 = x^2 + 1 \Rightarrow g(x) = x^2 - 1 \\ g(x) + 2 = -x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = -x^2 - 3 \end{cases}$$

سؤال ۳۸: اگر $f(x) = x(x + 4)$ و $f(g(x+1)) = (x-1)(x-5)$ باشد، ضابطه $g(x)$ کدام می تواند 


باشد؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵، ۹۷)

(۱) $x - 5$

(۲) $x - 4$

(۳) $-x$

(۴) $-x + 2$

پاسخ: گزینه ۴ 


$$f(x) = x(x + 4) = x^2 + 4x + 4 - 4 = (x + 2)^2 - 4$$

$$f(g(x+1)) = (x-1)(x-5) \xrightarrow{x \rightarrow x-1}$$

$$f(g(x)) = (x-2)(x-6) = x^2 - 8x + 12 = x^2 - 8x + 16 - 4 = (x-4)^2 - 4$$

$$f(g(x)) = (g+2)^2 + 4 = (x-4)^2 - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g + 2 = x - 4 \Rightarrow x - x - 6 \\ g + 2 = -x + 4 \Rightarrow g = -x + 2 \end{cases}$$

سؤال ۳۹: اگر $f(x) = x^2 - x - 2$, $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ آنگاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می تواند باشد. 

(۱) $x^2 - 1$

(۲) $x^2 + 1$

(۳) $x^2 - 2x$

(۴) $x^2 + 2x$ (خارج تجربی ۹۰)


$$f(g(x)) = g^2 - g - 2 = x^2 + x - 2 \Rightarrow g^2 - g = x^2 + x$$

به طرفین تساوی $\frac{1}{4}$ اضافه می کنیم:

$$g^2 - g + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ g - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1 \\ x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

سؤال ۴۰: اگر $f(x^2 + 2x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x + 2}$ مقدار $f(5)$ کدام است. (کانون ۹۰) 

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹

$$x^2 + 4 = x^2 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x^2 + 2x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} = x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 2 \Rightarrow f(5) = 7$$

راه دوم

$$x^2 + 2x = 5 \Rightarrow x^2 = 5 - 2x \Rightarrow x^4 = 25 - 2 \cdot 0 \cdot x + 4x^2 = 25 - 2 \cdot 0 \cdot x + 4(5 - 2x)$$

$$= 45 - 28x \Rightarrow \boxed{x^4 = 45 - 28x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 + 4}{x^2 - 2x + 2} = \frac{45 - 28x + 4}{5 - 2x - 2x + 2} = \frac{49 - 28x}{7 - 4x} = \frac{7(7 - 4x)}{7 - 4x} = 7$$

سؤال ۱۴: اگر $x \geq -\frac{3}{2}$ ، $f(x^2 + 3x) + f(3) = \frac{x^2 - 7x + 5}{x^4}$ ؛ آنگاه $f(3)$ کدام است؟ (قلمچی)

ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۵، ۹۶

$$\frac{1}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{18} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{9} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲

با استقاره از $x^2 + 3x = 3$ معادله را ساده می کنیم تا $f(3)$ در سمت چپ حاصل شود.

$$x^2 + 3x = 3 \Rightarrow x^2 = 3 - 3x \Rightarrow x^4 = 9 + 9x^2 - 18x$$

$$\xrightarrow{x^2 = 3 - 3x} x^4 = 9 + 9(3 - 3x) - 18x \Rightarrow x^4 = -45x + 36$$

$$\Rightarrow f(3) + f(3) = \frac{(3 - 3x) - 7x + 5}{-45x + 36} \Rightarrow 2f(3) = \frac{-1 \cdot x + 8}{-45x + 36} \Rightarrow 2f(3) = \frac{2(-5x + 4)}{9(-5x + 4)}$$

$$\Rightarrow f(3) = \frac{1}{9}$$

سؤال ۱۵: اگر $g(x) = 2x + 1$ ، $fog(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشد تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۵)

$$2x^2 + x + 3 \text{ (۴)}$$

$$2x^2 - x + 4 \text{ (۳)}$$

$$2x^2 - 2x + 3 \text{ (۲)}$$

$$2x^2 + 3x + 1 \text{ (۱)}$$

$$\boxed{(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1}$$

$$f(2x + 1) = 8x^2 + 6x + 5 = 2(4x^2 + 4x + 1) - (2x + 1) + 4 = 2(2x + 1)^2 - (2x + 1) + 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$

سؤال ۱۶: اگر $g(x) = 2x - 3$ ، $fog(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ ، تابع $f(x)$ کدام است. (داخلی ریاضی ۹۳)

$$x^2 - 2x + 3 \text{ (۴)}$$

$$x^2 - 2x + 5 \text{ (۳)}$$

$$x^2 - 4x + 5 \text{ (۲)}$$

$$x^2 - 4x + 3 \text{ (۱)}$$

$$\boxed{(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9}$$

$$f(2x-3) = 4x^2 - 16x + 20 \Rightarrow (2x-3)^2 - 2(2x-3) + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$\text{روش دوم } x=2: f(g(2)) = 4(4-8+5) \Rightarrow f(g(2)) = 4 \xrightarrow{g(2)=1} f(1) = 4$$

تنها گزینه ای که به ازای $x=1$ مقدار ۴ را می دهد گزینه ۳ است.

سؤال ۴۴: اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟ (داخل ۹۷)

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

$$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 = (2x-3)^2 - (2x-3) + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

سؤال ۴۵: اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند ضابطه $fog(x)$ کدام است. (داخل ریاضی ۹۲)

- (۱) $2x^2 - 7x + 3$ (۲) $2x^2 - 3x + 7$ (۳) $4x^2 - 2x + 13$ (۴) $4x^2 - 4x + 11$

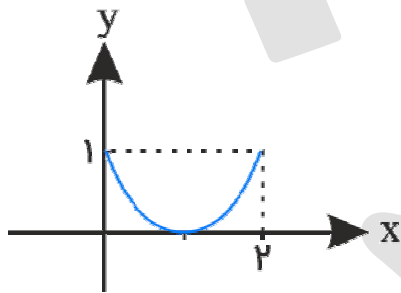
$$(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20 \Rightarrow 2(2x+3)^2 - (2x+3) + 5$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

$$\Rightarrow fog = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 4x^2 - 2x + 10 + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

سؤال ۴۶: نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. تابع $y = f(f(x))$ با ورودی $1 \leq x \leq 2$ چگونه است؟



(قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲، ۹۸)

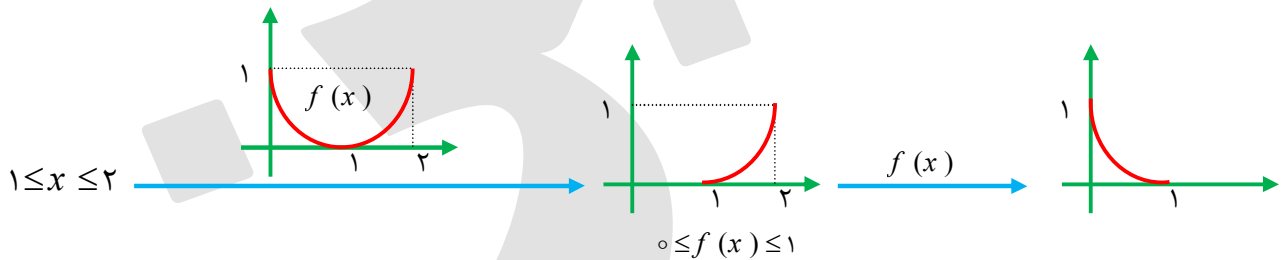
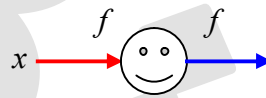
(۱) صعودی

(۲) نزولی

(۳) ابتدا نزولی سپس صعودی

(۴) ابتدا صعودی سپس نزولی

پاسخ: گزینه ۲



سؤال ۴۷: اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \sin \pi x$ باشد برد تابع $g \circ f$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

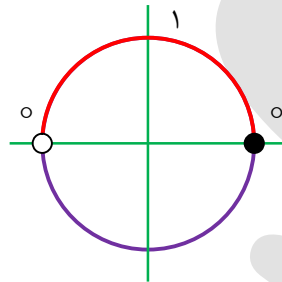
(کانون ۹۶)

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[-1, 0]$ (۴) $[-1, -\frac{1}{2}]$

پاسخ: گزینه ۲

$$0 \leq x - [x] < 1$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{0 \leq x - [x] < 1} \xrightarrow{g = \sin \pi x}$$



ورودی $\sin, \pi x$ که $0 \leq x < 1$ پس $0 \leq \pi x < \pi$

$$\Rightarrow 0 \leq \sin \pi x \leq 1$$

سؤال ۴۸: اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = [x+1] + [-x]$ آنگاه برد تابع $f \circ g$ شامل چند عدد صحیح است؟

([] علامت جزء صحیح است) (کانون ۹۴)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

$$g(x) = 1 + [x] + [-x] = \begin{cases} 1 & x \in Z \\ 0 & x \notin Z \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{a} \boxed{0 \text{ یا } 1} \xrightarrow{f = x^2 - x} 0$$

پس فروبی تنها یک مقدار می گیرد و آن هم صفر است.

سؤال ۴۹: اگر $f(x) = 4 - x^2$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ باشد، برد تابع $(f \circ g)(x)$ کدام است؟ (قلمچی)

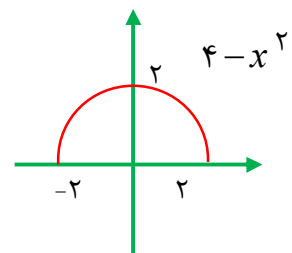
ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹، ۹۹

- (۱) $(-\infty, 0]$ (۲) $(-\infty, 4]$ (۳) $[4, +\infty)$ (۴) $[0, 4]$

پاسخ: گزینه ۴

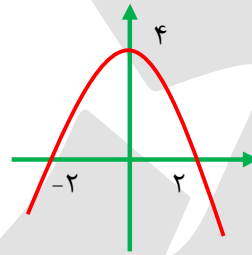
$$x \xrightarrow{g} \circ \xrightarrow{f}$$

$$x = 2 \sin \alpha \Rightarrow g(x) = \sqrt{4 - 4 \sin^2 \alpha} = 2 |\cos \alpha| \Rightarrow 0 \leq g(x) \leq 2$$



حال باید برد $4-x^2$ را در بازه $0 \leq x \leq 2$ مساب کنیم.

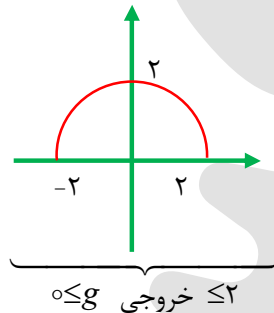
$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4$$



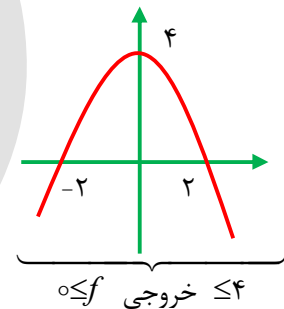
راه دوم)

$$D_g : -2 \leq x \leq 2$$

$$-2 \leq x \leq 2 \xrightarrow{g(x) = \sqrt{4-x^2}}$$



$$f = 4 - x^2$$



سؤال ۵۰: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، برد تابع $f \circ f(x)$ کدام است؟ (قلمچی ریاضی و

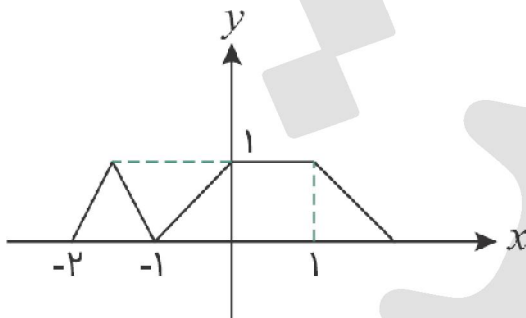
فیزیک سوم آزمون شماره ۱۳، ۹۶)

(۱) $[0, 1]$

(۲) $[0, 1]$

(۳) $(0, 1)$

(۴) $\{1\}$



پاسخ: گزینه ۴

$$x \xrightarrow{f} \quad \quad \quad \xrightarrow{f} 1$$

$$0 \leq f \leq 1$$

دقت فرمایید که $0 \leq f(x) \leq 1$ است، پس $f(x)$ مقادیر $[0, 1]$ را اختیار می کند، در نتیجه $f(f(x))$ از روی نمودار

مقادیری را می پذیرد که تابع f در بازه $[0, 1]$ پذیرفته است که فقط عدد ۱ است؛ یعنی برد تابع $f \circ f(x)$ برابر با $\{1\}$ است.

سؤال ۵۱: اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند برد تابع $g \circ f$ کدام است؟ (داخل تجربی ۹۹)

(۴) $[1, 4]$

(۳) $[0, 4]$

(۲) $[0, 3]$

(۱) $[0, 2]$

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = 2x - [2x]$$

$$g(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow -x^2 + 4x - 4 + 4$$

$$g(x) = -(x-2)^2 + 4$$

$$0 \leq f(x) < 1 \Rightarrow -2 \leq f(x) - 2 < -1 \Rightarrow 1 < (f(x) - 2)^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow -4 \leq -(f(x) - 2)^2 < -1 \Rightarrow 0 \leq 4 - (f(x) - 2)^2 < 3 \Rightarrow 0 \leq g \circ f(x) < 3$$

روش دوم

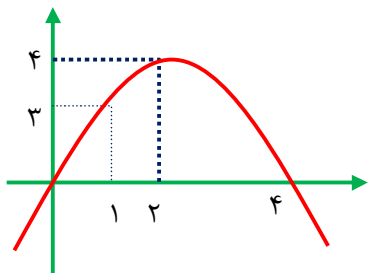
$$f(x) = 2x - [2x] \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1$$

$f(x)$ می فواید وارد دامنه $g(x)$ شود در واقع می فواید برانیم

برد تابع $g(x)$ در دامنه $[0, 1]$ $g(x), g(x) = -x^2 + 4x = -x(x-4)$

را رسم می کنیم و برد آن را در محدوده $[0, 1]$ به دست می آوریم واضح

است که وقتی $x \in [0, 1]$ باشد $g(x) \in [0, 3]$ است.



سؤال ۵۲: اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ باشند برد تابع $g \circ f$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۹)

$(-\infty, 1]$ (۴)

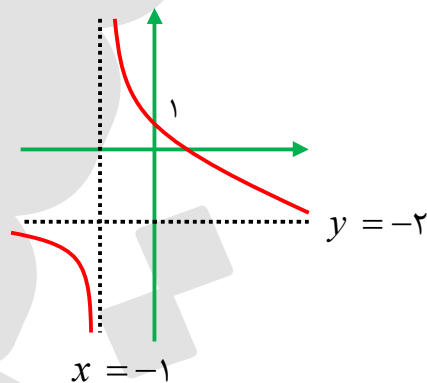
$[1, +\infty)$ (۳)

$(-1, 1]$ (۲)

$[-1, 1)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{cases} f(x) = [x] - x \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0 \\ g(x) = \frac{1-2x}{x+1} \end{cases}$$



نمودار تابع $g(x)$:

برد تابع $f(x)$ $[-1, 0]$ است حال باید ببینیم عرض تابع $g(x)$ در بازه $[-1, 0]$ چه تغییری می کند:

$$-1 < x \leq 0 \longrightarrow \text{برد } g \circ f \in [1, +\infty)$$

ترکیب توابع ۳

سؤال ۵۶: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ |x| & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ ضابطه تابع $y = fog(x)$ کدام است؟

گزینه ۲: $\begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ (۱)
 گزینه ۳: $2x$ (۳)
 گزینه ۴: $|x|$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به دامنه g داریم:

$$\begin{cases} x \geq 0: g(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = f(x) \xrightarrow{x \geq 0} f(g(x)) = 2x \\ x < 0: g(x) = x^2 \Rightarrow f(g(x)) = f(x^2) \xrightarrow{x^2 > 0} f(g(x)) = 2x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow fog(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 2x^2 & x < 0 \end{cases}$$

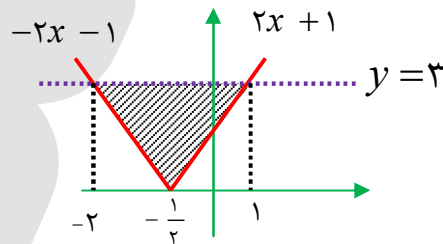
سؤال ۵۷: اگر $g(x) = \sqrt{4x+1}$, $f(x) = x^2 + x$ باشند مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع gof و خط $y=3$ به

معادله کدام است؟ (داخل تجربی ۹۵)

گزینه ۱: ۳ (۱) گزینه ۲: ۴ (۲) گزینه ۳: ۴/۵ (۳) گزینه ۴: ۶ (۴)

$$g(f(x)) = \sqrt{4f(x)+1} = \sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$

$$|2x+1|=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \\ 2x+1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow S = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

سؤال ۵۸: اگر $f \circ f(x) = x$, $f \rightarrow f(x) = \frac{3x+1}{x+a}$ آنگاه a کدام است؟

در تابع $\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ باشد آنگاه $f \circ f(x) = x$ می شود.

$$\rightarrow 3+a=0 \rightarrow a=-3$$

سؤال ۵۹: اگر $g(x) = x+4$, $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ باشند، جواب معادله $gof(x) = fog(x)$ کدام است؟ (خارج ۹۷)

گزینه ۱: -۱ و -۷ (۱) گزینه ۲: ۱ و -۷ (۲) گزینه ۳: ۱ و -۱ (۳) گزینه ۴: ۱ و ۷ (۴)

$$\frac{2(x+4)-1}{(x+4)+2} = \frac{2x-1}{x+2} + 4 \Rightarrow \frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$(2x+7)(x+2) = (x+6)(6x+7) \Rightarrow 2x^2 + 4x + 7x + 14 = 6x^2 + 7x + 36x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

راه حل دوم)

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}}$$

$$\frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2} \Rightarrow \frac{-4x}{4} = -x$$

$$\Rightarrow \frac{2x+7}{x+6} = -x \Rightarrow 2x+7 = -x^2 - 6x \Rightarrow x^2 + 8x + 7 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

سؤال ۵۶: اگر $f(x) = |x| - x$ ضابطه $f \circ f(x)$ برابر است با..... (سراسری ۸۳)

$$f(f(x)) = f(|x| - x) = \underbrace{||x| - x|}_{\text{همواره نامنفی}} - (|x| - x) = |x| - x - |x| + x = 0$$

سؤال ۵۷: اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۹۰)

$$f(f(x)) = f(2 - |2 - x|) = 2 - |(2 - |2 - x|) - 2| = 2 - ||2 - x|| = 2 - |2 - x| = f(x)$$

ترکیب توابع ۴

سؤال ۵۸: تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور x ها را در دو نقطه به طول

های $6, \frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع $f \circ g$ محور x ها را با کدام طول ها قطع می کند؟ (قلمچی علوم تجربی

دوازدهم آزمون شماره ۲، ۹۸)

- (۱) $\frac{1}{9}, 4$ (۲) $\frac{1}{4}, 9$ (۳) $4, \frac{1}{4}$ (۴) $4, 9$

پاسخ: گزینه ۲ برای یافتن نقاط تقاطع تابع $f \circ g$ با محور x ها باید معادله $(f \circ g)(x) = 0$ را حل کنیم. یعنی: $f(g(x)) = 0$

برای حل این معادله ابتدا ریشه های x را می یابیم. چون در دو نقطه به طول های 6 و $\frac{1}{4}$ محور x ها را قطع میکند، پس:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 6, x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) = 6, g(x) = \frac{1}{4}$$

$$x - \sqrt{x} = 6, x - \sqrt{x} = \frac{1}{4} \text{ بنابراین } g(x) = x - \sqrt{x}$$

باتوجه به گزینه ها $x = 9$ ریشه معادله اول و $x = \frac{1}{4}$ ریشه معادله دوم است.

سؤال ۵۹: اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = x^2 - 3x + 6$ باشد، آنگاه حاصل ضرب ریشه های معادله

$f \circ g(x) = 1/25$ کدام است؟ (تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی)

- (۱) -3 (۲) $+3$ (۳) $+1$ (۴) معادله ریشه ندارد.

پاسخ: گزینه ۴

❖ راه اول

$$f \circ g(x) = 1/25 \Rightarrow f(g(x)) = 1/25$$

$$\frac{2x-1}{x+1} = 1/25 = \frac{5}{4} \Rightarrow 4x - 4 = 5x + 5 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{ابتدا } f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ را برابر } 1/25 \text{ قرار می دهیم:}$$

پس داریم: $g(x) = 3$. حال $g(x) = x^2 - 3x + 6$ را برابر 3 قرار می دهیم:

$$x^2 - 3x + 6 = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(3) = -3 < 0$$

پس معادله فاقد ریشه است.

❖ راه دوم) ابتدا ضابطه $f \circ g(x)$ را تشکیل می دهیم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3x + 6) = \frac{2(x^2 - 3x + 6) - 1}{(x^2 - 3x + 6) + 1} = \frac{2x^2 - 6x + 11}{x^2 - 3x + 7} = 1/25 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 24x + 44 = 5x^2 - 15x + 35 \Rightarrow 3x^2 - 9x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 9 - 4(3) = -3 < 0$$

بنابراین معادله ریشه ندارد.

سؤال ۶۰: اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{3}(x - 3)$ مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $f \circ g$ که در زیر محور

x ها قرار می گیرند برابر کدام بازه است.

- (۱) $(-5, 1)$ (۲) $(-1, 5)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, 5)$ (خارج تجربی ۹۱)

$$f(g(x)) < 0$$

ابتدا محدوده ای را می یابیم که $x^2 + x - 2 < 0$ یعنی یا

$$(x + 2)(x - 1) < 0 \Rightarrow -2 < x < 1$$

پس برای اینکه $f(g(x)) < 0$ شود باید:

$$-2 < g(x) < 1 \Rightarrow -2 < \frac{1}{3}(x - 3) < 1 \Rightarrow -4 < (x - 3) < 2 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow \text{گزینه ۲}$$

سؤال ۶۱: اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور

x ها قرار گیرد برابر کدام بازه است.

- (۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-3, 2)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-1, 4)$ (داخلی تجربی ۹۱)

$$g \circ f(x) = -\frac{1}{3}g(x) + 2 = -\frac{1}{3}x(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{3}x + 2$$

$$g \circ f(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{3}x + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{3}x - 2 < 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

راه حل دوم) ابتدا نقاط را پیدا می کنیم که $g(x) > 0$ باشد یعنی:

$$-\frac{1}{3}x + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x < 2 \Rightarrow x < 4$$

پس برای اینکه $g(f(x)) > 0$ باشد باید $f(x) < 4$ شود یعنی:

$$x^2 + 3x < 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

ترکیب توابع ۵

دامنه‌ی توابع $f \circ g$ و $g \circ f$

$$y = f(g(x)) \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$y = g(f(x)) \rightarrow D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

سؤال ۶۲: اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \log_3(x^2+2x)$ باشند دامنه $f \circ g$ کدام است. (داخلی تجربی ۹۴)

- (۱) $[-۴, ۲]$ (۲) $[-۲, ۰]$ (۳) $[-۴, -۱) \cup (۱, ۲]$ (۴) $[-۴, -۲) \cup (۰, ۲]$

$$D_f : 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$D_g : x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{یا} \\ x < -2 \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} : \{x \in D_g \mid g \in D_f\} : \{x > 0 \text{ یا } x < -2 \mid \log_3(x^2+2x) \leq 3\}$$

$$\Rightarrow \log_3(x^2+2x) \leq 3 \Rightarrow x^2+2x \leq 27 \Rightarrow x^2+2x-27 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+9)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -9 \leq x \leq 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \cap -9 \leq x \leq 3 = -9 \leq 0 < -2 \text{ یا } 0 < x \leq 3 = [-۴, -۲) \cup (۰, ۲] \\ x < -2 \end{cases}$$

روش دوم) $f(g(x)) = \sqrt{3 - \log_3(x^2+2x)}$ است عددی که باعث اختلاف در گزینه ها می شود را چک می کنیم.

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(g(0)) = f(0) = \text{تعریف نشده} \Rightarrow \text{تعریف نشده} \Rightarrow \text{گزینه ۱ و ۲ نادرست است} \\ x = -1 \Rightarrow f(g(-1)) = \text{تعریف نشده} \Rightarrow \text{تعریف نشده} \Rightarrow \text{گزینه ۳ نادرست است} \end{cases}$$

گزینه ۴ درست است.

سؤال ۶۳: اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$, $g(x) = \log(x^2-15x)$ باشند دامنه $f \circ g$ کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۵)

- (۱) $(۰, ۵] \cup [۲۰, ۲۵)$ (۲) $(-۵, ۰) \cup (۱۵, ۲۰]$ (۳) $[۱۵, ۲۰]$ (۴) $[-۵, ۰)$

$$D_f : 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$D_g : x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x-15) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ \text{یا} \\ x < 0 \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid \log(x^2-15x) \leq 2\}$$

$$\Rightarrow \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid x^2-15x \leq 100\}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid x^2 - 15x - 100 \leq 0\} \\ &\Rightarrow \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid (x - 20)(x + 5) \leq 0\} \\ &\Rightarrow \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid -5 \leq x \leq 20\} \Rightarrow [-5, 0) \cup (15, 20] \end{aligned}$$

سؤال ۶۴: اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند دامنه تابع $f \circ g$ کدام است. (خارج تجربی ۹۴)

(۱) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} D_g = R \\ D_f : -x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid -1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\}$$

$$-1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2 \Rightarrow 2^{-2x} < 2^1 \Rightarrow -2x < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

همواره صحیح است

پس دامنه $f \circ g(x)$ برابر $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ است.

سؤال ۶۵: اگر $f(x) = \sqrt{x + |x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ دامنه $g \circ f$ کدام است؟ (خارج ۸۷)

(۱) $(0, 8) \cup (8, +\infty)$ (۲) $R - \{0, 8\}$ (۳) $R - \{0\}$ (۴) $(0, +\infty)$

$$D_f : x + |x| \geq 0 \Rightarrow x \in R$$

$$D_g : x^2 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, 4$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\} = \{x \in R \mid \sqrt{x + |x|} \neq 0, 4\} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x + |x|} \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ \sqrt{x + |x|} \neq 4 \Rightarrow x + |x| \neq 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + |x| \neq 16 \xrightarrow{x \geq 0} 2x \neq 16 \Rightarrow x \neq 8$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = x > 0 - \{8\} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

سؤال ۶۶: هرگاه $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ و $g(x) = \log(x - x^2)$ دامنه $g \circ f$ در کدام گزینه آمده است؟

(۱) $(0, 1)$ (۲) $(-1, 1) - \{0\}$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $R - (-1, 1)$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا دامنه f و g را حساب می‌کنیم. واضح است که $D_f = R$ برای مناسبه دامنه g می‌دانیم عبارت داخل لگاریتم باید نامنفی باشد پس:

$$x - x^2 > 0 \Rightarrow x(1 - x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

دامنه gof برابر است با:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1\right\}$$

پس باید نامعادله $0 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$ را حل کنیم چون $1+x^2$ همواره مثبت است سه طرف را در $1+x^2$ ضرب می‌کنیم:

$$0 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \\ 1-x^2 < 1+x^2 \Rightarrow 2x^2 > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

از اشتراک این دو شرط دامنه gof به دست می‌آید: $D_{gof} = (-1, 1) - \{0\}$

سؤال ۶۷: اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ دامنه تابع $f \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟ (کانون ۹۴)

- ۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

دامنه تعریف تابع مرکب را مینویسیم: $D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$

دامنه تابع با ضابطه $f(x) = 3 - \sqrt{x+1}$ برابر است با $D_f = [-1, +\infty)$ پس داریم:

سؤال ۶۸: تابع $f(x) = 3x + 1$ یا دامنه $[0, a]$ مفروض است. حداقل مقدار a برای این که تابع $f \circ f$ با دامنه

غیرتهی قابل تعریف باشد کدام است؟ (کانون ۹۵)

- ۱ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

تعریف دامنه $f \circ f$ را می‌نویسیم: $D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$

می‌دانیم $D_f = [0, a]$ است پس داریم:

$$= \{0 \leq x \leq a \mid 0 \leq 3x + 1 \leq a\} = \{0 \leq x \leq a \mid -1 \leq 3x \leq a - 1\}$$

$$= \{0 \leq x \leq a \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{a-1}{3}\} = [0, a] \cap \left[-\frac{1}{3}, \frac{a-1}{3}\right]$$

برای آن که دامنه $f \circ f$ نامتناهی باشد باید $[0, a]$ ، $\left[-\frac{1}{3}, \frac{a-1}{3}\right]$ اشتراک داشته باشند پس کافی است:

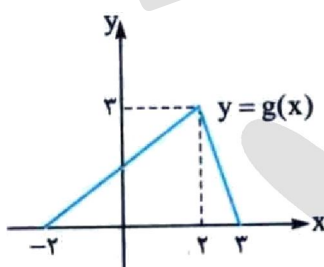
$$\frac{a-1}{3} \geq 0 \xrightarrow{\times 3} a-1 \geq 0 \Rightarrow a \geq 1$$

سؤال ۶۹: اگر $f(x) = \log(x^2 - x)$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به صورت زیر باشد دامنه $f \circ g(x)$ به صورت

(a, b) است بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- $\frac{10}{3}$ (۲) ۳ (۱)

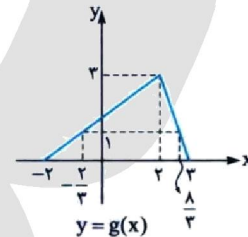
- ۴ (۴) $\frac{11}{3}$ (۳)



پاسخ: گزینه ۲

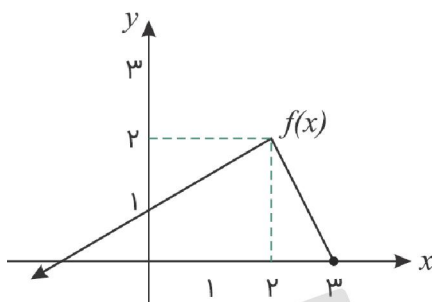
$f(x) = \log(x^2 - x)$ است پس باید $x^2 - x > 0$ باشد یعنی $x > 1$ یا $x < 0$ است پس شرط دامنه $f \circ g(x)$ این است که $g(x) > 1$ یا $g(x) < 0$ باشد. با توجه به نمودار تابع $y = g(x)$ اصلاً منفی نمی شود. پس باید حاصله هایی را پیدا کنیم که است که $g(x) > 1$ این اتفاق در فاصله $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ رخ می دهد:

$$b - a = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}$$



سؤال ۷۰: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر باشد و بدانیم $g(x) = \log_3(x^2 + 2x)$ آنگاه دامنه تابع

$(f \circ g)(x)$ کدام است؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵، ۹۷)



(۱) $[-4, 2]$

(۲) $[-2, 0]$

(۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$

(۴) $[-4, -2] \cup (0, 2]$

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به شکل، دامنه تابع $f(x)$ برابر با $D_f = (-\infty, 3]$ است.

$$g(x) = \log_3(x^2 + 2x) \Rightarrow D_g : x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x + 2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

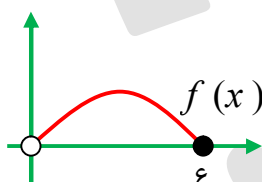
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 0 \text{ یا } x < -2 \mid \log_3(x^2 + 2x) \leq 3\}$$

$$\log_3(x^2 + 2x) \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 27 \Rightarrow x^2 + 2x - 27 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 2) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x > 0 \text{ یا } x < -2 \mid -4 \leq x \leq 2\} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

سؤال ۷۱: نمودار تابع f به شکل زیر است. اگر $g(x) = |x^2 - 9x + 14|$ به شکل $(f \circ g)(x)$ شامل چند عدد



صحیح است؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

$$D_f : (0, 6] , D_g = R$$

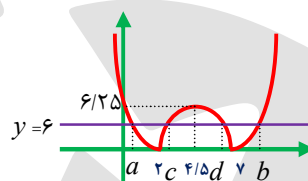
$$D_{f \circ g} : x \in D_g : g(x) \in D_f$$

$$\Rightarrow x \in R , 0 \leq |x^2 - 9x + 14| \leq 6$$

$$\Rightarrow |x^2 - 9x + 14| = |(x-2)(x-7)|$$

برای پیدا کردن نقاط a, b کافیسست معادلهٔ $x^2 - 9x + 14 = 6$ را حل کنیم:

$$x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow (x-8)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow a=1 \\ x=8 \Rightarrow b=8 \end{cases}$$

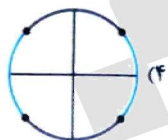


برای پیدا کردن نقاط c, d کافیسست معادلهٔ $x^2 - 9x + 14 = -6$ را حل کنیم:

$$-x^2 + 9x - 14 = 6 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \Rightarrow c=4 \\ x=5 \Rightarrow d=5 \end{cases}$$

پس $D_{f \circ g}$ شامل ۶ عدد صحیح است.

سؤال ۷۲: اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$ باشد دامنهٔ $g \circ f$ چه قسمتی از دایرهٔ مثلثاتی را نشان می‌دهد؟ (گزینه دو ۹۶)



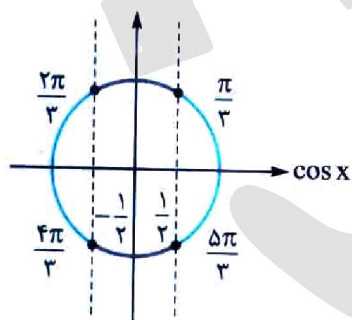
پاسخ: گزینه ۴

دامنهٔ تابع $f(x) = \cos x$ که R است برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$ عبارت زیر را در یکال باید نامنفی باشد.

$$D_g : 1 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

از تعریف $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in R \mid \cos x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$ استفاده می‌کنیم:

قسمت‌هایی از دایرهٔ مثلثاتی که به ازای آن $-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$ به صورت مقابل است:



بنابراین گزینه چهارم صحیح است.

سؤال ۷۳: اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ دامنهٔ تعریف تابع $(f+g) \circ g$ کدام است؟

(گزینه دو ۹۶)

- (۱) $[-۱, ۲]$ (۲) $[-۲, ۱]$ (۳) $[۰, ۱]$ (۴) $[۰, ۲]$

پاسخ: گزینه ۳

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$ است از طرفی طبق تعریف داریم: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$
اول دامنه f و g را پیدا می‌کنیم:

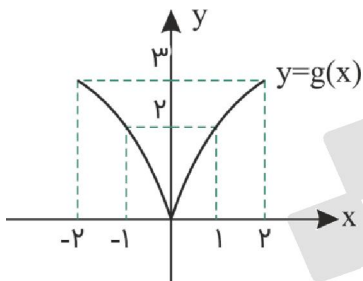
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x^2} : 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow D_f = [-۲, ۲] \\ g(x) = \sqrt{1-x} : 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_g = (-\infty, ۱] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-۲, ۱]$$

$$D_{(f+g) \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_{f+g}\} = \{x \leq 1 \mid -۲ \leq \sqrt{1-x} \leq ۱\}$$

$$\Rightarrow \{x \leq 1 \mid \sqrt{1-x} \leq ۱\} = \{x \leq 1 \mid 1-x \leq ۱\} = \{x \leq 1 \mid x \geq ۰\} = [۰, ۱]$$

سؤال ۷۴: اگر $D_f = [۰, ۲]$ باشد و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنهٔ $f \circ g$ کدام است؟



(قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۷، ۹۵)

- (۱) $[-۲, ۲]$ (۲) $[-۱, ۱]$ (۳) $[-۲, -۱] \cup [۱, ۲]$ (۴) $[۰, ۲]$

پاسخ: گزینه ۲

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x : -۲ \leq x \leq ۲, ۰ \leq g(x) \leq ۲\} = \{x : -۲ \leq x \leq ۲, -۱ \leq x \leq ۱\} = \{x : -۱ \leq x \leq ۱\}$$

سؤال ۷۵: اگر $g(x) = [x]$ و $f(x) = \sqrt{x-۱} - \sqrt{۸-x}$ باشد، آنگاه دامنهٔ $f \circ g$ کدام است؟ (علامت

جزء صحیح است) (قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۹، ۹۵)

- (۱) $[۱, ۹]$ (۲) $[۰, ۹]$ (۳) $[۱, ۸]$ (۴) $[۱, ۹)$

پاسخ: گزینه ۴

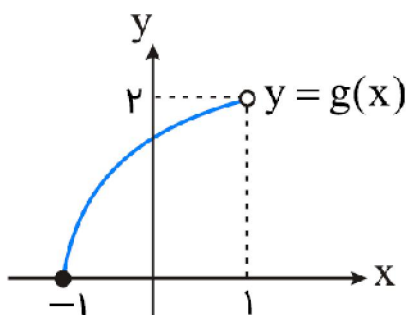
$$D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$D_g = \mathbb{R}, D_f = \{x : x-۱ \geq ۰, ۸-x \geq ۰ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۸\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x : x \in \mathbb{R}, [x] \in [۱, ۸]\}$$

$$۱ \leq [x] \leq ۸ \Rightarrow ۱ \leq x < ۹ \Rightarrow D_{f \circ g} = [۱, ۹)$$

سؤال ۷۶: اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ و نمودار تابع $y = g(x)$ به شکل زیر باشد $D_{g \circ f}$ کدام است؟ (قلمچی)



ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۲، ۹۷

(۱) $(-\infty, 1)$

(۲) $[0, 1]$

(۳) $(-\infty, -1)$

(۴) $(2, 10]$

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم $D_f: x \geq 1$ و $D_g: -1 \leq x < 1$ است.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 1 \mid -1 \leq 2 - \sqrt{x-1} < 1\}$$

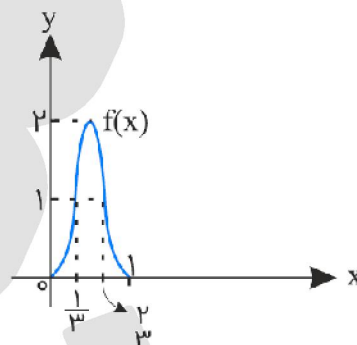
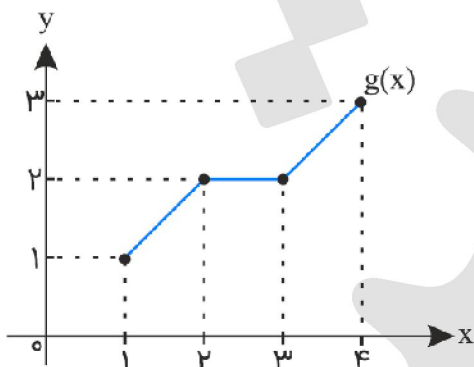
باید جواب نامعادله $-1 \leq 2 - \sqrt{x-1} < 1$ پیدا کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad -1 \leq 2 - \sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq 3 \Rightarrow x-1 \leq 9 \Rightarrow x \leq 10 \\ 2) \quad 2 - \sqrt{x-1} < 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} > 1 \Rightarrow x-1 > 1 \Rightarrow x > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 < x \leq 10$$

$$D_{g \circ f} = \{x \geq 1 \mid 2 < x \leq 10\} = (2, 10]$$

سؤال ۷۷: اگر توابع f و g به شکل زیر باشند، دامنه تابع $(g \circ f)(x)$ کدام است؟ (قلمچی علوم تجربی دوازدهم)

آزمون شماره ۳، ۹۸



(۱) $[0, 1]$

(۲) $\left[0, \frac{1}{3}\right]$

(۳) $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

(۴) $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$

پاسخ: گزینه ۳

با بررسی دامنه و برد توابع f و g داریم:

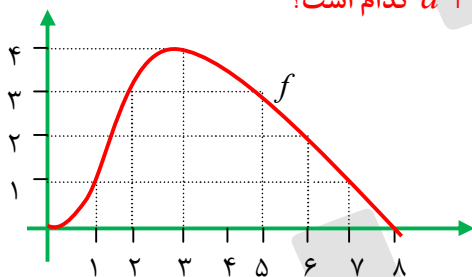
$$D_f = [0, 1], \quad R_f = [0, 2]$$

$$D_g = [1, 4], \quad R_g = [1, 3]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{0 \leq x \leq 1 \mid 1 \leq f(x) \leq 3\}$$

$$\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow D_{g \circ f} = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

سؤال ۷۸: نمودار تابع f به شکل زیر است. اگر $g(x) = \sqrt{2x-2} + \sqrt{3-x}$ باشد، آنگاه



$D_{g \circ f} = [a, b] \cup [c, d]$ می شود. مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

۱۰ (۱)

۱۲ (۲)

۱۵ (۳)

۱۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$g(x) = \sqrt{2x-2} + \sqrt{3-x}$$

$$D_g : \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

$$D_{g \circ f} : \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$0 \leq x \leq 8 \cap 1 \leq f(x) \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 8 \cap \{1 \leq x \leq 2 \cup 5 \leq x \leq 7\}$$

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \cup 5 \leq x \leq 7$$

$$a+b+c+d = 1+2+5+7 = 15$$

سؤال ۷۹: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2[x] - [x]^2$ باشد، مجموع اعضای برد تابع $f \circ g$ کدام است؟ []

نماد جزء صحیح است) (قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴، ۱۳۹۹)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$D_f = [0, +\infty), D_g = \mathbb{R}, D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2[x] - [x]^2 \geq 0\}$$

اگر فرض کنیم $t = [x]$ نامعادله بالا به صورت $t^2 - 2t \geq 0$ به دست می آید که جواب آن $0 \leq t \leq 2$ است. بنابراین داریم:

$$0 \leq t = [x] \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \Rightarrow D_{f \circ g} = [0, 3)$$

اکنون برد $f \circ g$ را به دست می آوریم:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{2[x] - [x]^2} \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0: (f \circ g)(x) = 0 \\ [x] = 1: (f \circ g)(x) = 1 \\ [x] = 2: (f \circ g)(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow R_{f \circ g} = \{0, 1\}$$

مجموع اعضای برد $f \circ g$ برابر ۱ است.

سؤال ۸۰: اگر $f = \{(-2, 2), (-1, 3), (2\sqrt{2}, 0), (\sqrt{6}, -1), (2, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{4-2x}$ باشند، مجموع

اعضای دامنه تابع $\frac{f}{f \circ g}$ کدام است؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶، ۹۹)

- (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) -۳ (۴) -۱

پاسخ: گزینه ۴

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \leq 2 \mid \sqrt{4-2x} \in \{-2, -1, 2\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\}\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4-2x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 4-2x = 8 \Rightarrow x = -2 \\ \sqrt{4-2x} = \sqrt{6} \Rightarrow 4-2x = 6 \Rightarrow x = -1 \\ \sqrt{4-2x} = 2 \Rightarrow 4-2x = 4 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{0, -1, -2\} \Rightarrow f \circ g = \{(-2, 0), (-1, -1), (0, 0)\}$$

$$D_{\frac{f}{f \circ g}} = D_f \cap D_{f \circ g} - \{x \mid f \circ g = 0\} = \{-1\}$$

$$\frac{f}{f \circ g} \text{ دامنه اعضای} = -1$$

سؤال ۸۱: اگر $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x} - 1}$ و $g(x) = 6 + 4x - x^2$ باشد، دامنه تابع $g \circ f$ کدام است؟ (قلمچی

ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸، ۹۹)

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 10)$ (۳) $(-\infty, 9]$ (۴) $[6, 10]$

پاسخ: گزینه ۱

$$f(x) = \sqrt{(\sqrt{x} - 1 + 1)^2} = |\sqrt{x} - 1 + 1| = \sqrt{x} - 1 + 1$$

دامنه تابع f بازه $D_f = [1, +\infty)$ است.

دامنه تابع g, R است و برای دامنه تابع $g \circ f$ داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

چون $D_g = R$ است $D_{g \circ f} = D_f$ خواهد بود $D_{g \circ f} = [1, +\infty)$

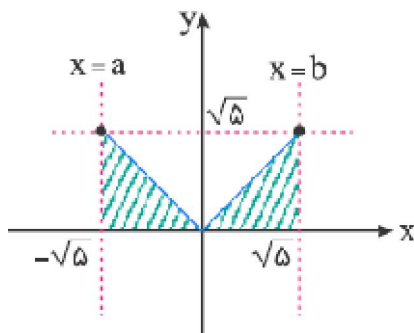
سؤال ۸۲: اگر $f(x) = \sqrt{5-x^2}$ باشد، دامنه تابع $f \circ f$ بازه $[a, b]$ است. مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $f \circ f$ محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ کدام است؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸، ۹۹)

- ۵ (۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $1/25$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}], R_f = [0, \sqrt{5}] \Rightarrow D_{f \circ f} = D_f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$$

$$(f \circ f)(x) = \sqrt{5 - (\sqrt{5 - x^2})^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$



بنابراین برای نمودار تابع $f \circ f$ داریم:

مثلث های هاشورفورده، ناحیه مورد نظر هستند که مساحت

$$2 \times \left(\frac{5}{2} \right) = 5 \text{ یعنی های مثلث ها یعنی}$$

است.

سؤال ۸۳: اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، $g(x) = \frac{x+a}{x-1}$ و دامنه تابع $f \circ g$ دارای فقط دو عدد صحیح باشد، آنگاه

حداقل مقدار a کدام است؟ ($a > 0$) (قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹، ۹۹)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$D_f : x \geq 2, D_g : x \neq 1$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \neq 1 \mid \frac{x+a}{x-1} \geq 2 \right\} \Rightarrow \frac{x+a-2x+2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x+2+a}{x-1} \geq 0$$

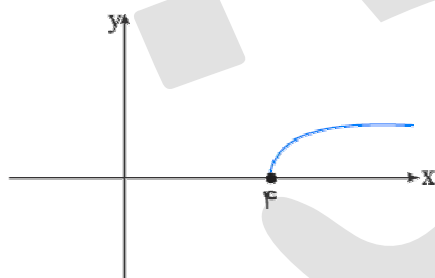
x	1	$2+a$	
	$-$	$+$	$-$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = (1, 2+a]$$

برای آنکه $D_{f \circ g}$ دارای دو عدد صحیح باشد باید a حداقل ۱ باشد. توجه کنید که چون $a > 0$ است، پس: $1 < 2+a$

سؤال ۸۴: اگر $g(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 16}$ و نمودار تابع f به صورت زیر باشد، دامنه تابع $\frac{f \circ g}{f}$ شامل چند

عدد صحیح است؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹، ۹۹)



- ۲ (۱)
۳ (۲)
۵ (۳)
۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$D_g : -x^2 + 6x + 16 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2, 8]$$

$$D_f : [5, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \Rightarrow \{x \in [-2, 8] \mid \sqrt{-x^2 + 6x + 16} \in D_f\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{-x^2 + 6x + 16} \geq 4 \Rightarrow -x^2 + 6x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 6] \Rightarrow D_{f \circ g} = [0, 6]$$

$$D_{\frac{f \circ g}{f}} = D_{f \circ g} \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\} = (4, 6]$$

بنابراین اعداد صحیح $x = 5, 6$ در دامنه تابع داده شده قرار دارند

سؤال ۸۵: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = \{(0, 3), (-5, 1), (-1, 0), (4, 5)\}$ باشد، آنگاه مجموع اعضای

متمايز $D_{g \circ f}$ کدام است؟ (تالیفی محمد مصطفی ابراهیمی)

- (۱) -۳ (۲) -۵ (۳) -۴ (۴) -۷

پاسخ: گزینه ۲

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

هرگاه اعضای $f(x)$ در D_g باشد، مقادیر x دامنه $g \circ f$ را تشکیل می دهند.

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$$

$$x^2 + 2x = -5 \Rightarrow x^2 + 2x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(5) = -16 < 0$$

این معادله فاقد جواب است.

$$x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$x^2 + 2x = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x_4 + x_5 = \frac{-b}{a} \Rightarrow x_4 + x_5 = -2$$

پس مجموع اعضای متمايز $D_{g \circ f}$ برابر است با:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 - 2 - 1 - 2 = -5$$

سؤال ۸۶: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، به ازای چه مقادیری از m معادله

$(f \circ g)(x) = m$ دو جواب متممايز دارد؟ (قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۷، ۹۹)

- (۱) $0 \leq m \leq 2$ (۲) $m < 3$ (۳) $2 \leq m < 3$ (۴) $0 < m < 3$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا دامنه و ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست می آوریم.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = [0, 2]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g; g(x) \in D_f\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 2; \sqrt{2x - x^2} \in \mathbb{R}\} = [0, 2]$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 2 = (\sqrt{2x - x^2})^2 + 2 = -x^2 + 2x + 2$$

بنابراین نمودار تابع $f \circ g$ به صورت زیر است و خط $y = m$ تنها

در صورتی این نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند که $2 \leq m < 3$

