

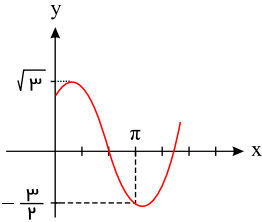


آموزشگاه پارسا

گروه مشاوره آکو: ۱۴۰۲

طراح: دکتر امید حیدری

ناظر: سهیل حاج کرم



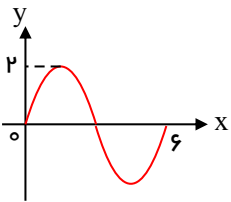
۱ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟

۲ $\frac{3}{2}$ (۲)

۳ ۲ (۴)

۱ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

۲ $\sqrt{3}$ (۳)



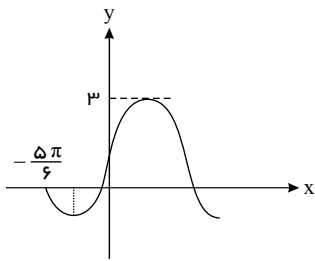
۲ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

۳ $\frac{5}{3}$ (۲)

۴ $\frac{8}{3}$ (۴)

۱ $\frac{4}{3}$ (۱)

۲ $\frac{7}{3}$ (۳)



۳ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

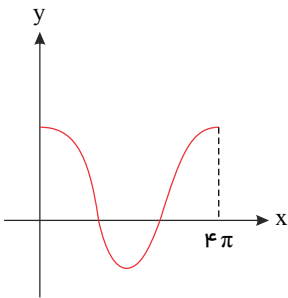
۱ ۱٫۵ (۱)

۲ ۲ (۲)

۳ ۲٫۵ (۳)

۴ $1 + \sqrt{3}$ (۴)

۴ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ای به طول $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟

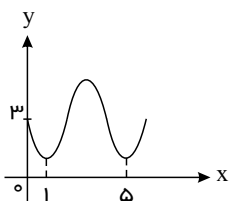


۱ $-\frac{1}{2}$ (۱)

۲ $\frac{1}{2}$ (۲)

۳ ۱ (۳)

۴ صفر (۴)



۵ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟

۲ ۲٫۵ (۲)

۳ ۳٫۵ (۴)

۱ ۲ (۱)

۲ ۳ (۳)

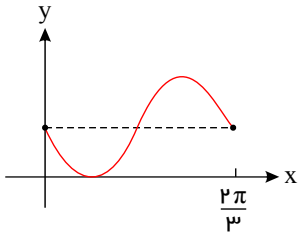
۶ با کدام ضابطه $f(x)$ همواره تساوی $f(x) = (-1)^{[x]} f(x) = |f(x)|$ برقرار است؟

۱ $\cos 2\pi x$ (۴)

۲ $\sin 2\pi x$ (۳)

۳ $\cos \pi x$ (۲)

۴ $\sin \pi x$ (۱)



۷ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{7\pi}{6}$ کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) ۲

۸ دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۱

۳) ۲

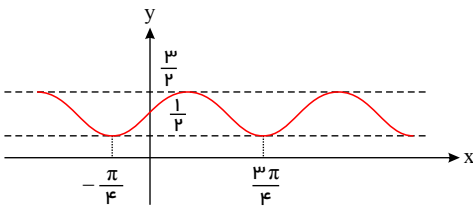
۴) π

۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۱

۳) ۲

۴) π



۹ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. کدام $a + b$ است؟

۱) ۱

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۳

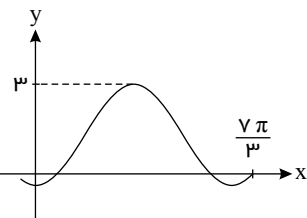
۴) $\frac{3}{2}$

۱) ۱

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۳

۴) $\frac{3}{2}$



۱۰ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ است. مقدار b ، کدام است؟

۱) ۲

۲) ۱

۳) -۱

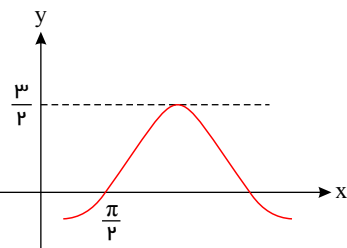
۴) -۲

۱) ۲

۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲



۱۱ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. مقدار a ، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) $\frac{1}{2}$

۱) $-\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) $\frac{1}{2}$

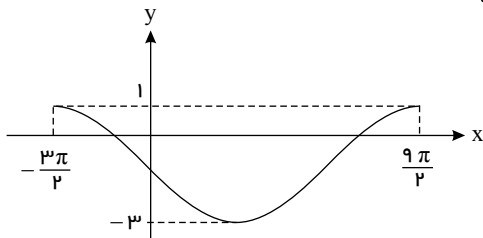
۱۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟

۱) -۲

۲) -۳

۳) -۴

۴) -۶



۱۳ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx - \frac{\pi}{2})$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f(\frac{5}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{3}{2}$

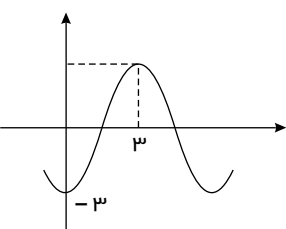
۴) $\frac{3}{2}$

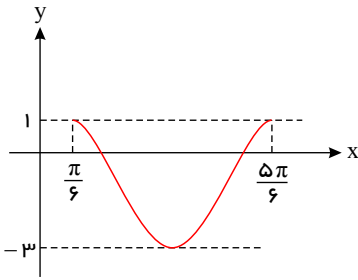
۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{3}{2}$

۴) $\frac{3}{2}$





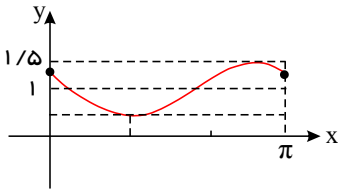
۱۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ در یک بازه تناوب است. مقادیر b و c کدامند؟

$b = 3, c = -2$ (۲)

$b = 3, c = -1$ (۱)

$b = \frac{3}{2}, c = -1$ (۴)

$b = \frac{3}{2}, c = -2$ (۳)



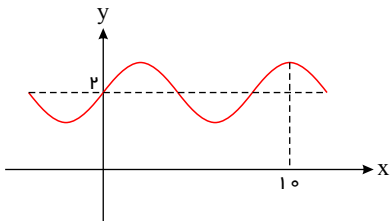
۱۵ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)



۱۶ نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = b + \sin ax$ می‌باشد. حاصل $f(15)$ کدام است؟

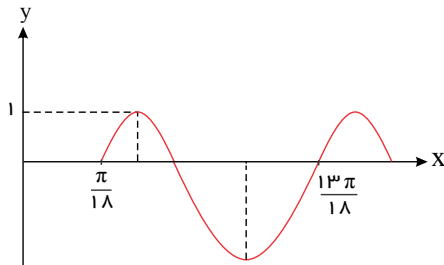
$4 - \sqrt{2}$ (۲)

$4 + \sqrt{2}$ (۱)

$2 + \sqrt{2}$ (۴)

$2 - \sqrt{2}$ (۳)

۱۷ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟



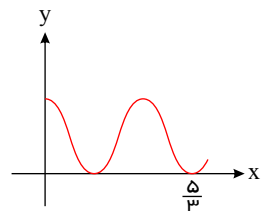
$\frac{1}{2}$ (۱)

۱ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۲ (۴)

۱۸ در شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = +2 - a \sin\left(\frac{\pi}{2}(bx + 3)\right)$ رسم شده است. حاصل $\sqrt{5b - a}$ برابر کدام گزینه می‌تواند باشد؟



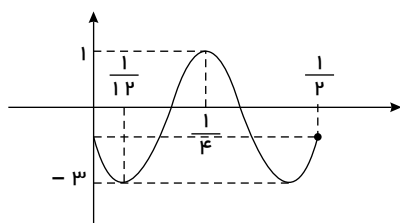
$\sqrt{29}$ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

$\sqrt{24}$ (۴)

۱۹ در شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos\left(\frac{3\pi}{2} - b\pi x\right) - c$ رسم شده است. مقدار abc کدام است؟

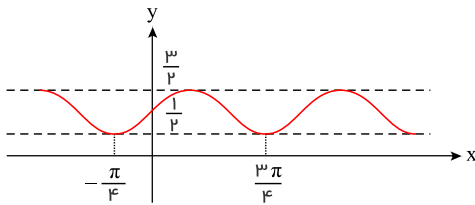


۱۲ (۱)

-۱۲ (۲)

۲۴ (۳)

-۲۴ (۴)



۲۰ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟

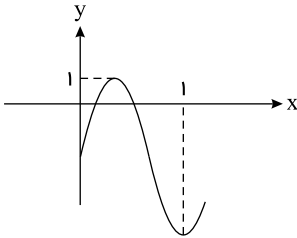
۱ ۱

۲ ۲

۳ ۳

۴ ۴

۲۱ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin\left(\frac{b\pi x}{2}\right) - 2$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a + b$ کدام است؟ ($a > 0$)



۱ ۶

۲ ۱۰

۳ -۶

۴ صفر

۲۲ دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

۱ ۱

۲ ۲

۳ ۱

۴ $\frac{1}{2}$

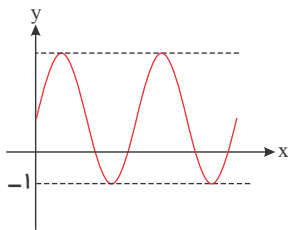
۲۳ شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟

۱ ۳

۲ ۴

۳ ۵

۴ ۶



۲۴ دوره تناوب تابع $f(x) = 4 \cos(bx) - 8$ برابر $\frac{1}{2}$ است. در تابع $g(x) = 2\pi \sin(-2x) + b$ مقدار ماکزیمم چند برابر مقدار مینیمم می‌تواند باشد؟

۱ $\frac{1}{3}$

۲ $\frac{1}{2}$

۳ ۴

۴ ۶

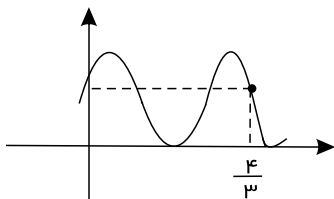
۲۵ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = 3 + \frac{a}{2} \cos \pi\left(\frac{1}{2} + bx\right)$ است. مقدار ab کدام است؟

۱ ۱۲,۵

۲ ۲۷

۳ ۶,۲۵

۴ ۱۳,۵



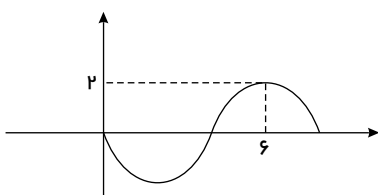
۲۶ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos\left(\frac{5\pi}{2} - bx\right)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار ab کدام است؟ ($b > 0$)

۱ $\frac{\pi}{2}$

۲ $-\frac{\pi}{4}$

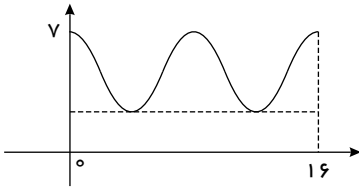
۳ $\frac{\pi}{4}$

۴ $-\frac{\pi}{2}$





۲۷) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(b\pi x) + 4$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار ab کدام یک می تواند باشد؟



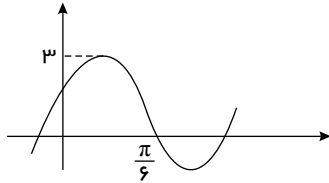
۱) $\frac{3}{2}$

۲) $-\frac{3}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{5}{4}$

۲۸) اگر $a > 0$ و نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx) + 1$ به شکل زیر باشد، مقدار b کدام است؟



۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۱۱

۲۹) برد تابع $f(x) = -\tan(x + \frac{\pi}{4})$ با دامنه $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}] - \{\frac{\pi}{4}\}$ کدام است؟

۱) \mathbb{R}

۲) $(-\infty, \sqrt{3}]$

۳) $[-1, \sqrt{3}]$

۴) $\mathbb{R} - (-1, \sqrt{3})$

۳۰) نمودار تابع $y = 2^{|sin x|}$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور x در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور y در جهت منفی انتقال می دهیم.

تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x در فاصله $[0, \pi]$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۳۱) اگر $f(x) = 3 - 6 \cos^2(\frac{11\pi}{3} - x)$ انتقال یافته تابع $y(x) = \cos x$ و $D_f = [-\frac{3\pi}{2}, \pi]$ ، آنگاه کدام گزینه در مورد تابع $f(x)$ نادرست است؟

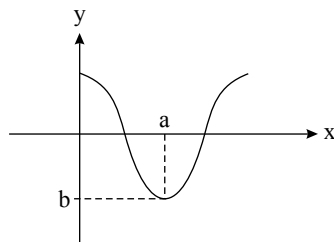
۱) نمودار، ۳ بار محور x را قطع می کند.

۲) اختلاف بیشترین و کمترین مقدار f برابر با ۶ است.

۳) نمودار f در بازه $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ صعودی اکید است.

۴) خط $y = 2$ در سه نقطه نمودار را قطع می کند.

۳۲) در شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = 2 \cos^2(\pi x) - 1$ رسم شده است. مقدار $a + b$ کدام است؟



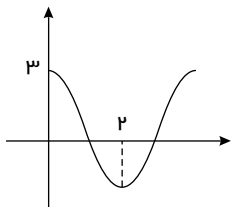
۱) $\frac{1}{2}$

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) -۱

۳۳) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(\frac{b\pi x}{4})$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a + b$ کدام می تواند باشد؟



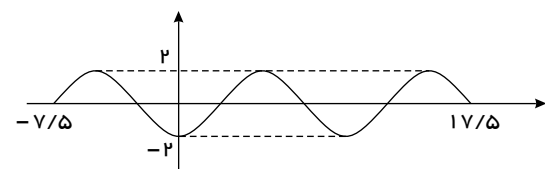
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۳۴) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(\pi - bx)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f(\frac{5}{3})$ کدام است؟

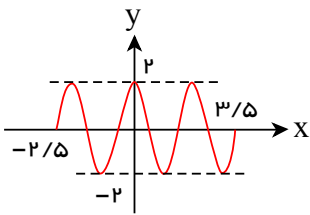


۱) -۱

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $-\sqrt{2}$

۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



۳۵ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{5} + bx)$ است. $a \cdot b$ کدام است؟ ($b > 0$)

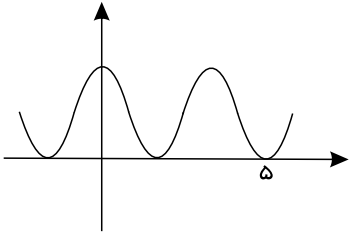
۲٫۵ (۲)

۲ (۱)

۳٫۵ (۴)

۳ (۳)

۳۶ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2a + \sin(\pi(\frac{3}{2} - bx))$ به‌صورت زیر است. حاصل ab کدام است؟



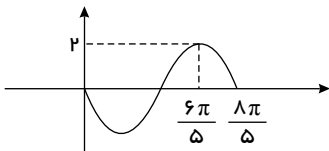
۱ (۱)

۰٫۸ (۲)

۰٫۶ (۳)

۰٫۴ (۴)

۳۷ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $b - a$ کدام است؟ ($b > 0$)



9/4 (۲)

7/4 (۱)

13/4 (۴)

11/4 (۳)

۳۸ دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\cos 4x}{\sin 2x + \cos 2x}$ کدام است؟

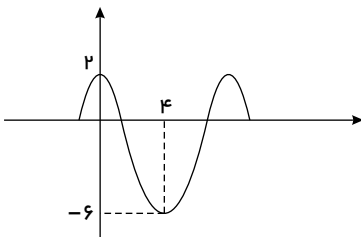
pi/4 (۴)

pi/2 (۳)

pi (۲)

2pi (۱)

۳۹ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(\pi(bx + \frac{1}{3})) + c$ به‌صورت زیر است. مقدار $f(\frac{4}{3})$ کدام است؟



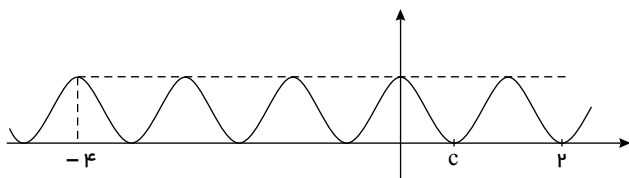
۱ (۱)

1/2 (۲)

2*sqrt(2) - 2 (۳)

صفر (۴)

۴۰ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 3 - a \cos(b\pi x)$ به‌صورت مقابل است. مقدار ac کدام است؟



-2 (۱)

2 (۲)

3 (۳)

-3 (۴)

۴۱ به‌ازای چند مقدار a دوره تناوب تابع $f(x) = 3 \cos((a^2 + 3)\pi x)$ با دوره تناوب تابع $g(x) = 2 \sin(-4a\pi x) + 1$ برابر است؟

6 (۴)

4 (۳)

3 (۲)

2 (۱)

۴۲ دوره تناوب تابع $f(x) = \sin 2x \cos 2x (\sin^2 2x - \cos^2 2x)$ کدام است؟

pi/8 (۴)

pi/4 (۳)

pi/2 (۲)

pi (۱)



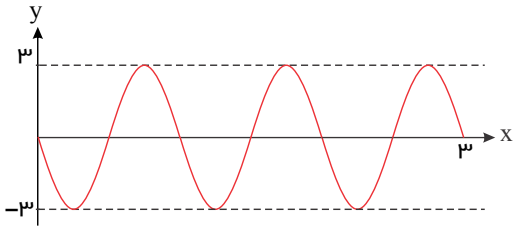
۴۳ تابع $f(x) = 2 \tan\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$ روی بازه $(2, a)$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱۱/۳ (۴)

۱۰/۳ (۳)

۹/۳ (۲)

۷/۳ (۱)



۴۴ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a \cdot b$ کدام می باشد؟

-۶ (۱)

-۳ (۲)

۴,۵ (۳)

۶ (۴)

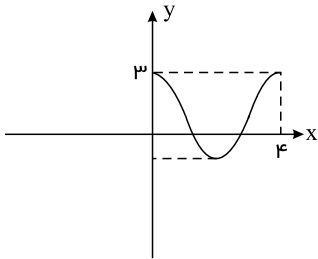
۴۵ اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2a \sin\left(\pi\left(bx + \frac{3}{2}\right)\right) + a^2$ به صورت زیر باشد. حاصل $f(8)$ کدام است؟

۱ (۱)

۳ (۲)

-۱ (۳)

-۳ (۴)



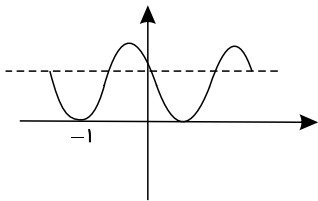
۴۶ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2 + a \sin(b\pi x)$ به صورت زیر است. $a + b$ کدام است؟

۷/۲ (۲)

۳/۲ (۴)

۱/۲ (۱)

۵/۲ (۳)



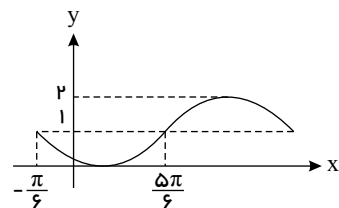
۴۷ ضابطه تابع نشان داده شده در نمودار مقابل کدام است؟

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ (۲)

$y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$ (۴)

$y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ (۱)

$y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ (۳)



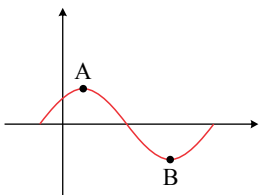
۴۸ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \sin x + \cos x$ در شکل مقابل رسم شده است. شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟

$-\frac{2}{\pi}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ (۴)

$-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ (۱)

$-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ (۳)



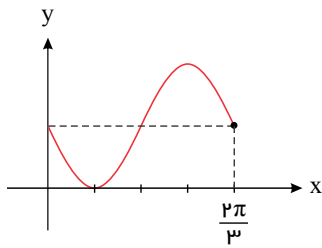
۴۹ اگر $f(x) = (-1)^{[x]} |f(-x)|$ ، آنگاه $f(x)$ کدام می تواند باشد؟

$-\sin(\pi x)$ (۴)

$-\cos(\pi x)$ (۳)

$\sin(\pi x)$ (۲)

$\cos(\pi x)$ (۱)



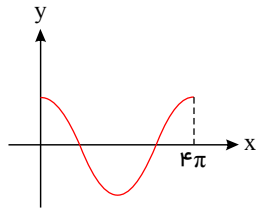
۵۰ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) ۲



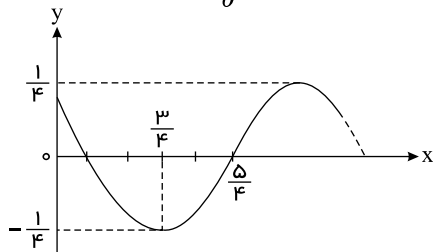
۵۱ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) صفر



۵۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $0 < c < \pi$ و $b > 0$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$

۲) ۱

۳) $\frac{1}{4\pi}$

۴) π

۵۳ نمودار تابع‌های $f(x) = -2 \sin(2x) + 3$ و $g(x) = k$ در بازه $(0, T)$ یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، حدود k کدام است؟ T دوره تناوب تابع f است.

۱) $(0, 5)$

۲) $(1, 3) \cup (3, 5)$

۳) $(0, 3)$

۴) $(0, 3) \cup (3, 5)$

۱) $(1, 5)$

۲) $(1, 3) \cup (3, 5)$

۳) $(0, 3)$

۴) $(0, 3) \cup (3, 5)$

۵۴ دوره تناوب اصلی تابع $f(x) = \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x}$ برابر T است. نمودار تابع $y = -f(x)$ در بازه‌های $(-\frac{T}{2}, 0)$ و $(T, \frac{3T}{2})$ به ترتیب چگونه است؟

۱) صعودی - صعودی

۲) صعودی - نزولی

۳) نزولی - صعودی

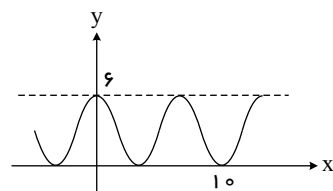
۴) نزولی - نزولی

۱) صعودی - صعودی

۲) صعودی - نزولی

۳) نزولی - صعودی

۴) نزولی - نزولی



۱) $y = 3 \cos(\frac{3\pi}{5}x) + 3$

۲) $y = 3 \sin(\frac{3\pi}{5}x) + 3$

۳) $y = 3 \cos(\frac{3\pi}{10}x) + 3$

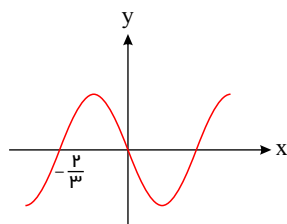
۴) $y = 3 \sin(\frac{3\pi}{10}x) + 3$

۱) $y = 3 \cos(\frac{3\pi}{5}x) + 3$

۲) $y = 3 \sin(\frac{3\pi}{5}x) + 3$

۳) $y = 3 \cos(\frac{3\pi}{10}x) + 3$

۴) $y = 3 \sin(\frac{3\pi}{10}x) + 3$



۵۶ قسمتی از نمودار تابع $y = \cos((ax + 5)\frac{\pi}{2})$ به صورت شکل زیر است. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$

۲) ۳

۳) $-\frac{3}{2}$

۴) ۲

۱) $-\frac{3}{2}$

۲) ۳

۳) $-\frac{3}{2}$

۴) ۲

۵۷ دوره تناوب تابع $f(x) = \cos^2 x (1 - \cos 2x)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) ۲

۳) π

۴) ۲

۱) $\frac{\pi}{2}$

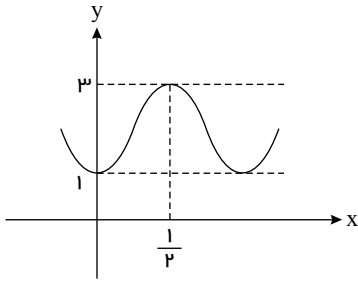
۲) ۴

۳) π

۴) $\frac{\pi}{2}$



۵۸ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - b \cos(a\pi x)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a + b$ کدام است؟

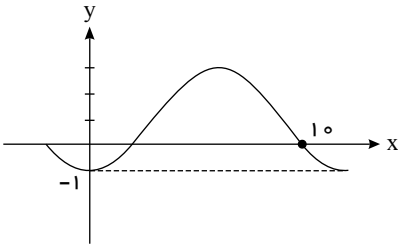


- ۱ ۲
۲ ۳
۳ -۴
۴ -۵

۵۹ دوره تناوب تابع $f(x) = 2 \sin^2 x$ و دوره تناوب تابع $g(x) = \sin(bx)$ برابر T است. نمودار این توابع در چند نقطه از بازه $[0, T]$ متقاطع هستند؟

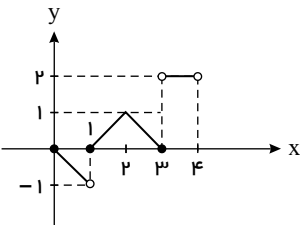
- ۱ ۱
۲ ۲
۳ ۳
۴ ۴

۶۰ در شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 1 - a \cos(b\pi x)$ رسم شده است. مقدار ab کدام است؟ ($b > 0$)



- ۱ ۱/۲
۲ ۱/۳
۳ ۱/۴
۴ ۲/۳

۶۱ نمودار تابع متناوب f در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. ضابطه تابع در بازه $(106, 107)$ کدام است؟



- ۱ $y = -x + 106$
۲ $y = 2$
۳ $y = x - 106$
۴ $y = -x + 107$

۶۲ فاصله بین نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = -2 \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱ 4π
۲ $\sqrt{\pi^2 + 4}$
۳ $2\pi + 2$
۴ $\sqrt{\pi^2 + 16}$

۶۳ نمودار تابع $f(x) = -\frac{3}{4} \cos bx + a$ بر خط $y = -\frac{1}{2}$ مماس بوده و دوره تناوب آن نیز برابر 3π می باشد. حاصل $f(\frac{11\pi}{2})$ کدام می تواند باشد؟

- ۱ $-\frac{13}{8}$
۲ $-\frac{3}{8}$
۳ $-\frac{7}{4}$
۴ $-\frac{5}{4}$

۶۴ تابع $f(x) = (a+1) \sin x + b$ روی بازه $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ صعودی و برد آن $[1, 5]$ است. برد تابع $g(x) = (b-a) \cos \frac{x}{2} + 1$ کدام است؟

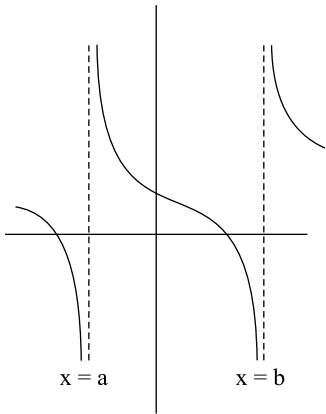
- ۱ $[0, 3]$
۲ $[0, 4]$
۳ $[-1, 3]$
۴ $[1, 4]$

۶۵ فرض کنید تابع f به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ نسبت به خطوط $x = 1$ و $x = 3$ متقارن باشد. کدام عبارت زیر درست است؟

- ۱ f تابعی متناوب با دوره تناوب ۵ است.
۲ f تابعی متناوب با دوره تناوب ۳ است.
۳ f تابعی متناوب با دوره تناوب ۲ است.
۴ f تابعی متناوب با دوره تناوب ۴ است.



۶۶ قسمتی از نمودار تابع $y = \tan(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$ به صورت زیر است. تابع $y = \tan(-\frac{b}{a}x)$ در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ چگونه است؟



- ① ابتدا صعودی سپس نزولی
 ② ابتدا نزولی سپس صعودی
 ③ صعودی
 ④ نزولی

۶۷ در تابع $y = a \sin bx + 2$ ، فاصله دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی با عرض ۳ برابر π است. اگر نمودار این تابع روی بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ اکیداً نزولی باشد

عرض این تابع در نقطه $\frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$

۶۸ دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{-\sin(\pi x)}{[\frac{x}{2}] + [-\frac{x}{2}]}$ کدام است؟

- ① $\frac{2}{3}$ ② ۲ ③ ۳ ④ متناوب نیست.

۶۹ دوره تناوب تابع $f(x) = |\cos \frac{\pi}{6}x|$ کدام است؟

- ① 12π ② 6π ③ ۱۲ ④ ۶

۷۰ اگر $f(x) = \sin^2 x$ و $g(x) = \sin^4 x$ ، دوره تناوب تابع $f - g$ کدام است؟

- ① 2π ② π ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{\pi}{4}$



پاسخنامه تشریحی

می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱)

$$Max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{چون شکل فرمت خود سینوس است، } b > 0} b + a = \sqrt{3}$$

نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left| \begin{array}{l} \pi \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2} b \rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3} b$$

$$-2 \begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد. (۱) (۲) (۳) (۴) (۲)

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

با توجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین

مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۳)

$$y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x) = a + b \sin x$$

نقطه $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{5\pi}{6} \\ 0 \end{array} \right. \rightarrow 0 = a + b \sin(-\frac{5\pi}{6}) \rightarrow 0 = a - b \sin(\frac{5\pi}{6})$$

$$\rightarrow 0 = a - b \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) \rightarrow 0 = a - b \sin(\frac{\pi}{6}) \rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \quad (I)$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار Max تابع از رابطه $|a| + c$ به دست می‌آید و چون تابع داده شده فرمت سینوس را دارد $ab > 0$ است و چون $0 < a$ است و در نتیجه $b > 0$ است.

$$Max = |a| + c \rightarrow 3 = |b| + a \rightarrow 3 = b + a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ حاصل می‌شوند.

$$\text{پس: } f(x) = 1 + 2 \sin x \rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = 1 + 2(\frac{1}{2}) = 2$$

می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره تناوب تابع برابر 4π است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۴)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow 2 = \frac{1}{|m|} \rightarrow |m| = \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است فرقی نمی‌کند که $m = \frac{1}{2}$ یا $m = -\frac{1}{2}$ باشد.

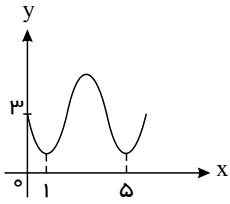
$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos(\frac{1}{2}x) \rightarrow y(\frac{16\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cos(\frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3}$$

$$\rightarrow y(\frac{16\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵

با توجه به شکل روبه‌رو به راحتی پی می‌بریم که دوره تناوب اصلی تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ برابر $T = 4$ می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است یعنی: $f(0) = 3 \rightarrow a = 3$



توجه کنید که دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$y = a + \sin(\underbrace{b\pi x}_k) \Rightarrow \text{دوره‌ی تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون به ازای $x > 0$ ، تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار b منفی می‌باشد، یعنی $b = -\frac{1}{2}$ است. داریم:

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶ اگر $[x]$ زوج باشد آنگاه:

$$(-1)^{[x]} f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \geq 0$$

اگر $[x]$ فرد باشد آنگاه:

$$(-1)^{[x]} f(x) = |f(x)| \Rightarrow -f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \leq 0$$

تابع $f(x) = \sin \pi x$ ویژگی‌های بالا را دارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷ می‌دانیم دوره تناوب تابع $y = a \sin bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = 3, m = -3$$

از طرفی تابع در همسایگی راست $x = 0$ نزولی است پس $m > 0$ یعنی $m = 3$ قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin 3x \rightarrow y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{7\pi}{6} = 1 - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 - (-1) = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸ می‌دانیم $2\alpha \cot \alpha - \tan \alpha = 2$ است.

$$\text{پس: } f(x) = -(\cot \pi x - \tan \pi x) = -2 \cot 2\pi x = \frac{-2}{\tan 2\pi x}$$

می‌دانیم دوره تناوب $y = \tan bx$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است بنابراین $T = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹ می‌دانیم که $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ پس $y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$ است. و می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ ، دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و

$Max = |a| + c$ است.

$$Max = \frac{3}{2} \rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm 1$$

چون فاصله دو مینیمم متوالی، دوره تناوب اصلی منحنی است، پس:

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

چون شکل داده شده فرمت سینوس است پس a, b هم علامتند، یعنی:

$$a = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow a + b = 2 \text{ یا } a = -1 \rightarrow b = -1 \rightarrow a + b = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \rightarrow y = a + b \cos x$$

در تابع $y = a \cos bx + c$ می‌دانیم که $Max = |a| + c$ است.

$$Max = 3 \rightarrow |b| + a = 3 \xrightarrow{\text{شکل فرمت فرینکسینوس را دارد}} -b + a = 3$$

پس $b < 0$ است



$$\left| \frac{\sqrt{\pi}}{3} \right| \text{ صندق} \rightarrow 0 = a + b \cos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow 0 = a + \frac{b}{2} \rightarrow 2a + b = 0$$

$$\text{پس: } \begin{cases} -b+a=3 \\ 2a+b=0 \end{cases} \rightarrow a=1, b=-2$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار ماکسیم تابع از رابطه $Max = |a| + c$ به دست می آید. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۱)

$$Max = \frac{3}{2} \rightarrow |b| + a = \frac{3}{2} \xrightarrow[\text{است پس } b < 0]{\text{شکل فرمت قرینه سینوس}} -b + a = \frac{3}{2}$$

$$\left| \frac{\pi}{2} \right| \text{ صندق} \rightarrow 0 = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} -b + a = \frac{3}{2} \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow 3a = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -1$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ می دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۲)

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 6\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \frac{1}{3}, b = \frac{-1}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} Max = 1 &\rightarrow |a| + c = 1 \\ Min = -3 &\rightarrow -|a| + c = -3 \end{aligned} \right\} \rightarrow c = -1, |a| = 2 \rightarrow a = 2, a = -2$$

چون شکل فرمت قرینه سینوس را دارد پس $ab < 0$ است بنابراین $\frac{a}{b} = -6$ است.

$$f(x) = a \sin\left(bx - \frac{\pi}{2}\right) = -a \cos(bx) \quad \text{ابتدا توجه کنید که:} \quad (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۳)$$

از روی نمودار معلوم است که نصف دوره تناوب تابع برابر ۳ است. پس:

$$\frac{T}{2} = 3 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{3}$$

همچنین کمترین مقدار تابع برابر ۳- است. پس:

$$|-a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

چون نمودار تابع f شبیه نمودار تابع $y = -\cos x$ است، پس a باید مثبت باشد، بنابراین:

$$f(x) = -3 \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}x\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{3} \times \frac{5}{2}\right) = -3 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ می دانیم که $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و $Max = |a| + c$ و $Min = -|a| + c$ است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۴)

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = 3, b = -3$$

$$\left. \begin{aligned} Max = 1 &\rightarrow |a| + c = 1 \\ Min = -3 &\rightarrow -|a| + c = -3 \end{aligned} \right\} \rightarrow c = -1, |a| = 2 \rightarrow a = 2, a = -2$$

شکل فرمت سینوس را دارد یعنی $ab > 0$ است و بدون دانستن این موضوع هم گزینه اول انتخاب می شد.

دوره تناوب تابع برابر π است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۱۵)

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

ماکزیم تابع برابر ۱٫۵ است، پس:

$$1 + |a| = 1,5 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

تابع در اطراف $x = 0$ نزولی است، پس a, b مختلف علامت هستند و داریم:

$$a = \frac{1}{2}, b = -2 \Rightarrow a + b = -\frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 2 \Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۱۶)

دوره تناوب $y = \sin ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$ می دانیم:



با توجه به شکل $\rightarrow \frac{T}{\frac{\pi}{4}} = 10 \Rightarrow \Delta T = 40 \Rightarrow T = 8$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = 8 \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{\pi}{4}$$

چون بلافاصله بعد از محور عرض‌ها، نمودار صعود پیدا کرده است، بنابراین باید ضرب پشت سینوس مثبت باشد، بنابراین ضرب کمان سینوس باید مثبت باشد پس $a = \frac{\pi}{4}$ است.

$$f(x) = b + \sin \frac{\pi}{4} x \xrightarrow{\text{صنق}} 2 = b + 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = 2 + \sin \frac{\pi}{4} x$$

$$f(15) = 2 + \sin \frac{15\pi}{4} = 2 + \sin(4\pi - \frac{\pi}{4}) = 2 - \sin \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$$

با توجه به رابطه $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$ داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**

$$f(x) = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = a + 2 \sin bx$$

$$\left. \begin{aligned} T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = \pm 3 \rightarrow b = 3 \text{ ق. ق.} \\ f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0 \rightarrow a + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 0 \rightarrow a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow a + b = -1 + 3 = 2$$

باتوجه به شکل تابع در بازه $[\frac{5}{3}, 0]$ ، 18 مرتبه تکرار شده است. پس اگر دوره تناوب تابع را T در نظر بگیریم، داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸**

$$18T = \frac{5}{3} \rightarrow \frac{3}{2}T = \frac{5}{3} \rightarrow T = \frac{10}{9}$$

حال اگر ضابطه تابع را تا حد امکان ساده کنیم به ضابطه زیر می‌رسیم:

$$f(x) = +2 - a \sin\left(\frac{b\pi x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = +2 + a \cos\left(\frac{b\pi x}{2}\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4}{|b|} \rightarrow \frac{4}{|b|} = \frac{10}{9} \rightarrow |b| = \frac{18}{5} \rightarrow b = \pm \frac{18}{5}$$

همچنین از روی نمودار، مقدار مینیمم تابع برابر صفر است، داریم:

$$\rightarrow \min = -|a| + 2 = 0 \rightarrow |a| = 2$$

از آنجا که نمودار تابع در اطراف صفر روند کاهشی دارد، پس $a > 0$ بوده و داریم $a = 2$.

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} b = \frac{18}{5} \rightarrow 5b - a = 18 - 2 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = 4 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{18}{5} \rightarrow 5b - a = -18 - 2 = -20 \rightarrow \sqrt{-20} \rightarrow \text{غیرقابل قبول} \\ a = 2 \end{cases}$$

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹**

$$f(x) = a \cos\left(\frac{3\pi}{4} - b\pi x\right) - c = a \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4} - b\pi x\right) - c = -a \sin(b\pi x) - c$$

اکنون توجه کنید که طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی تابع به اندازه $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ اختلاف دارند که با نصف دوره تناوب تابع برابر است. پس:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{1}{6} \Rightarrow |b| = 6 \Rightarrow b = \pm 6$$

از طرف دیگر ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب برابر ۱ و -۳ هستند. پس:

$$\begin{cases} |-a| - c = 1 \\ -|-a| - c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \end{cases}$$

با توجه به اینکه نمودار در اطراف نقطه $x = 0$ شبیه نمودار $y = -\sin x$ است. پس $-a$ و b مختلف‌العلامت هستند یعنی a و b هم‌علامت هستند. پس $a = 2$ و $b = 6$ یا $a = -2$ و $b = -6$

$$b = -6$$

در هر صورت $abc = 12$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$y = \sin bx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

می‌دانیم:

$$y = 1 + a \cdot \sin bx \cdot \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx$$

چون فاصله دو نقطهٔ مینیمم متوالی برابر با دورهٔ تناوب اصلی منحنی است پس:

$$T = \frac{2\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$y = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} 1 + \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تابع در اطراف $x = 0$ صعودی است، پس a و b هم علامتند و داریم:

$$a + b = 2 \quad \text{یا} \quad a + b = -2$$

بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است. پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$|a| - 2 = 1 \Rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a > 0} a = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \sin\left(\frac{b\pi x}{2}\right) - 2$$

پس کمترین مقدار تابع برابر $-5 = -3 - 2 = -5$ است. در نتیجه $f(1) = -5$.

$$3 \sin\left(\frac{b\pi}{2}\right) - 2 = -5 \Rightarrow \sin\left(\frac{b\pi}{2}\right) = -1$$

$$\frac{b\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 4k - 1$$

با توجه به اینکه اولین بار در سمت راست محور عرض‌ها، تابع در $x = 1$ مینیمم شده است، پس b باید کمترین مقدار ممکن مثبت را داشته باشد. یعنی $b = 3$.در نتیجه $a + b = 6$

روش اول: تابع را ساده‌تر می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} - \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x}{\sin \pi x \cos \pi x}$$

$$f(x) = \frac{-(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x)}{\sin \pi x \cos \pi x} = \frac{-\cos 2\pi x}{\frac{1}{2} \sin 2\pi x} = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

با توجه به اتحاد $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot \alpha$ حل می‌شود.

$$\tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

می‌دانیم که در تابع $y = a \cdot \sin bx$ اگر $a \cdot b > 0$ باشد، تابع در نقطهٔ شروع $x = 0$ صعودی خواهد بود و اگر $a \cdot b < 0$ باشد، نزولی خواهد بود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

توجه:

$$y = k \cdot \sin ax \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{2\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل، منحنی دو بار تکرار شده است. پس عدد $\frac{4}{3}$ دو برابر دورهٔ تناوب تابع است.

$$2T = \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

کمترین مقدار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ زمانی ایجاد می‌شود که مقدار سینوس عدد ۱ یا -1 باشد و با توجه به شکل مقدار \min عدد -1 است. پس:

$$\min = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a + b = \begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ -2 - 3 = -5 \end{cases}$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

$$f(x) = 4 \cos(bx) - 1 \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{1}{2} \rightarrow |b| = 4\pi \rightarrow b = \pm 4\pi$$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$1) b = 4\pi \rightarrow g(x) = 2\pi \sin(-2x) + 4\pi \rightarrow \begin{cases} \max = 2\pi + 4\pi = 6\pi \\ \min = -2\pi + 4\pi = 2\pi \end{cases} \rightarrow \frac{\max}{\min} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$$

$$2) b = -4\pi \rightarrow g(x) = 2\pi \sin(-2x) - 4\pi \rightarrow \begin{cases} \max = 2\pi - 4\pi = -2\pi \\ \min = -2\pi - 4\pi = -6\pi \end{cases} \rightarrow \frac{\max}{\min} = \frac{-2\pi}{-6\pi} = \frac{1}{3}$$

می‌دانیم $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ است. بنابراین داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$y = 3 + \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi bx\right) = 3 + \frac{a}{2} (-\sin(\pi bx)) = 3 - \frac{a}{2} \sin(\pi bx)$$

با توجه به شکل مقدار مینیمم تابع برابر صفر است. بنابراین داریم:

$$\text{Min} = -\left|\frac{a}{2}\right| + 3 = 0 \rightarrow \frac{|a|}{2} = 3 \rightarrow |a| = 6$$

همچنین با توجه به شکل اگر T دوره تناوب تابع باشد، داریم:

$$1/5 T = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{3}{2} T = \frac{4}{3} \rightarrow T = \frac{8}{9} = \frac{2\pi}{|b\pi|} \rightarrow \frac{8}{9} = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{9}{4}$$

چون شکل تابع در اطراف صفر به صورت صعودی است پس $ab > 0$ می‌باشد. بنابراین:

$$ab = 6 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{2} = 13,5$$

ابتدا توجه کنید که $f(x) = a \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - bx\right) = a \sin(bx)$ ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

از روی نمودار معلوم است که $\frac{3}{4}$ دوره تناوب تابع برابر ۶ است. پس:

$$\frac{3}{4} T = 6 \Rightarrow T = 8 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 8 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{\pi}{4}$$

از طرف دیگر حداکثر مقدار تابع برابر ۲ است. پس:

$$|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

چون نمودار تابع f در اطراف $x = 0$ شبیه نمودار $y = -\sin x$ است، پس a باید منفی باشد و در نتیجه:

$$a = -2 \Rightarrow ab = -\frac{\pi}{2}$$

از روی نمودار معلوم است که دوره تناوب تابع برابر ۸ است. پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 8 \Rightarrow |b| = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$

از طرف دیگر بیشترین مقدار تابع برابر ۷ است. پس:

$$4 + |a| = 7 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

چون نمودار تابع f در همسایگی $x = 0$ شبیه نمودار $y = \cos x$ است، پس a باید مثبت باشد، در نتیجه $a = 3$ و ab می‌تواند $\frac{3}{4}$ یا $-\frac{3}{4}$ باشد.

حداکثر مقدار تابع برابر ۳ است. پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$|a| + 1 = 3 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = 2$$

از طرف دیگر $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

$$2 \sin\left(\frac{b\pi}{6}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{b\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

ضمناً برای اولین بار در سمت راست مبدأ، تابع در $\frac{\pi}{6}$ صفر شده است یعنی $\sin\left(\frac{b\pi}{6}\right)$ برای اولین بار $-\frac{1}{2}$ است. پس $\frac{b\pi}{6}$ باید برابر $\frac{7\pi}{6}$ باشد و در نتیجه $b = 7$

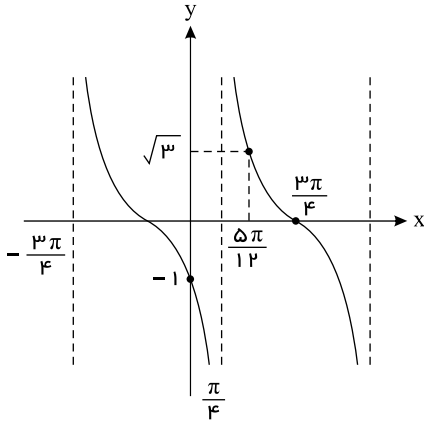


۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

اگر نمودار تابع $y = \tan x$ را $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت چپ منتقل کنیم و نسبت به محور x ها قرینه کنیم، تابع $y = -\tan(x + \frac{\pi}{4})$ به

دست می‌آید که به صورت زیر است:
برد تابع با توجه به شکل برابر است با:

$$[\sqrt{3}, +\infty) \cup (-\infty, -1] = \mathbb{R} - (-1, \sqrt{3})$$



توجه کنید که:

$$x = \frac{5\pi}{12} \rightarrow y = -\tan\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{8\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

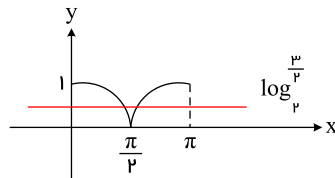
$$y = 2^{|\sin x|} \xrightarrow{\text{به راست } \frac{\pi}{2}} y = 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{2})|} = 2^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{3}{2}} y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} \xrightarrow{y=0} 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_2 \frac{3}{2} = |\cos x|$$

$\log_2 \frac{3}{2}$ در واقع عدد بین صفر تا یک است؛ زیرا:

$$\underbrace{\log_2 1}_{\text{صفر}} < \log_2 \frac{3}{2} < \underbrace{\log_2 2}_1$$

حال تابع $y = |\cos x|$ و خط $y = \log_2 \frac{3}{2}$ را رسم می‌کنیم.

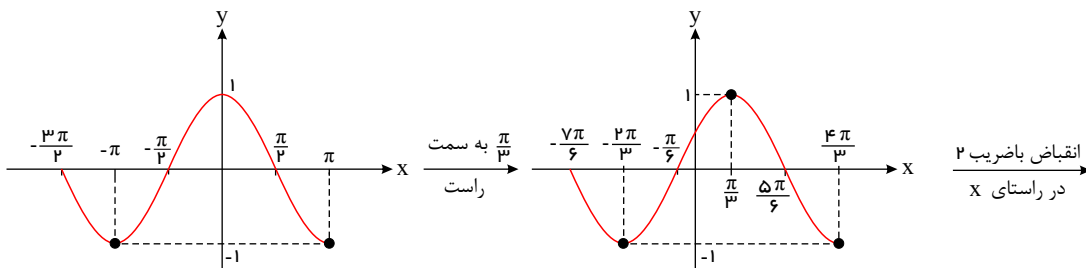
خط و نمودار در دو نقطه تقاطع دارند.

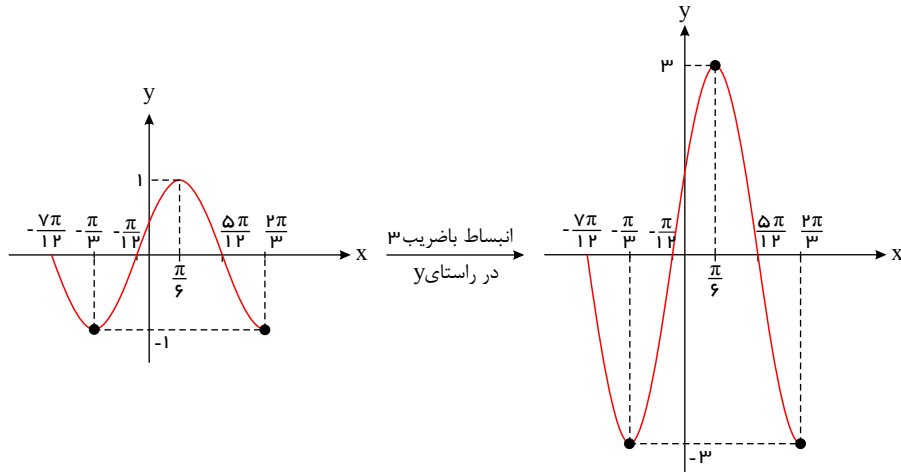


۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 - 6 \cos^2\left(\frac{11\pi}{3} - x\right) = 3(1 - 2 \cos^2\left(\frac{11\pi}{3} - x\right)) = 3(-\cos 2\left(\frac{11\pi}{3} - x\right)) = -3 \cos\left(\frac{22\pi}{3} - 2x\right) = -3 \cos(7\pi + \frac{\pi}{3} - 2x) \\ &= +3 \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

به کمک انتقال نمودار $y = \cos x$ داریم:





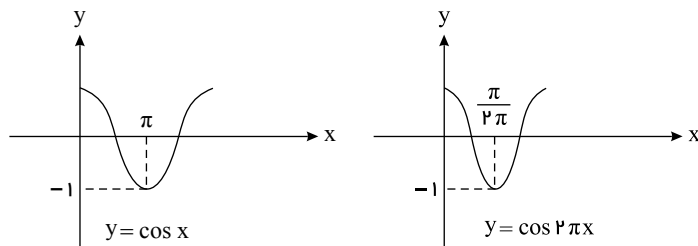
خط $y = 2$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، پس گزینه ۴ نادرست است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

نکته: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

توجه کنید که: $f(x) = 2\cos^2(\pi x) - 1 = \cos(2\pi x)$

بنابراین در نمودار تابع $y = \cos x$ طول نقاط را بر 2π تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید.



بنابراین $a = \frac{1}{4}$ و $b = -1$ در نتیجه: $a + b = -\frac{1}{4}$

با توجه به نمودار تابع معلوم است که $f(0) = 3$. پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$a \cos(0) = 3 \Rightarrow a = 3$$

از طرف دیگر نصف دوره تناوب تابع برابر ۲ است، پس دوره تناوب تابع برابر ۴ است. یعنی:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

بنابراین $a + b$ می‌تواند برابر ۵ یا ۱ باشد.

ضابطه تابع به صورت $f(x) = -a \cos(bx)$ است. از نمودار می‌بینیم که ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۲ و -۲ هستند. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

چون که $f(0) = -2$ پس داریم:

$$f(0) = a \cos(\pi - 0) = a \cos \pi = -2 \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2$$

نمودار تابع در $2/5$ برابر دوره تناوب رسم شده است، پس:

$$2,5 \times \frac{2\pi}{|b|} = 1,7,5 - (-1,7,5) \Rightarrow \frac{5\pi}{|b|} = 2,5 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{5} \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{5}$$

بنابراین $f(x) = -2 \cos(\pm \frac{\pi}{5}x)$ در نتیجه:

$$f(\frac{5}{3}) = -2 \cos(\pm \frac{\pi}{5} \times \frac{5}{3}) = -2 \cos(\pm \frac{\pi}{3}) = -2 \times (\frac{1}{2}) = -1$$

می‌دانیم که دوره تناوب تابع $y = k \cdot \cos ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵



$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos(b\pi x)$$

چون برد تابع $[-2, 2]$ است و برد تابع کسینوس $[-1, 1]$ است پس $a = 2$ است. ($a > 0$ است زیرا نمودار نسبت به محور x قرینه نشده است.)

$$3T = 3,5 - (-2,5) = 6 \Rightarrow T = 22$$

از طرفی طبق شکل دوره تناوب 2 است و داریم: $T = \frac{2\pi}{\pi b} = 2 \Rightarrow b = 1$ پس $ab = 2$ می‌باشد.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha \quad \text{با توجه به رابطه } \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{36}$$

$$f(x) = 2a + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - b\pi x\right) = 2a - \cos b\pi x$$

از روی نمودار مینیمم آن برابر صفر است.

$$\text{Min} = 2a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

همچنین $x = 5$ ریشه تابع مورد نظر است. بنابراین:

$$f(5) = 0 \rightarrow 2 \times \frac{1}{2} - \cos 5\pi b = 0 \rightarrow \cos 5\pi b = 1$$

$$\rightarrow 5\pi b = 0 \text{ یا } 2\pi \text{ یا } 4\pi \dots$$

با توجه به شکل $x = 5$ دومین ریشه مثبت تابع است پس:

$$5\pi b = 4\pi \rightarrow b = \frac{4}{5} \rightarrow ab = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

از روی نمودار معلوم است که دوره تناوب تابع برابر $\frac{8\pi}{5}$ است. پس: $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{37}$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{8\pi}{5} \Rightarrow |b| = \frac{5}{4} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{5}{4} \Rightarrow f(x) = a \sin\left(\frac{5}{4}x\right)$$

همچنین نمودار تابع از نقطه $(\frac{6\pi}{5}, 2)$ عبور می‌کند، پس:

$$f\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 2 \Rightarrow a \sin\left(\frac{5}{4} \times \frac{6\pi}{5}\right) = 2 \Rightarrow a \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{بنابراین: } b - a = \frac{5}{4} + 2 = \frac{13}{4}$$

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم. $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{38}$

$$f(x) = \frac{\cos 4x}{\sin 2x + \cos 2x} = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\sin 2x + \cos 2x} = \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\sin 2x + \cos 2x} = \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

بنابراین دوره تناوب تابع برابر π است.

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم: $\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4} \textcircled{39}$

$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi b x\right) + c = a \cos(\pi b x) + c$$

با توجه به شکل ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب 2 و -6 است، پس:

$$\begin{cases} |a| + c = 2 \\ -|a| + c = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4 \end{cases}$$

روی نمودار تابع معلوم است که a باید مثبت باشد. زیرا در نقطه $x = 0$ تابع دارای ماکزیمم است.

از طرف دیگر اختلاف طول نقطه ماکزیمم و مینیمم متوالی تابع برابر 4 است که برابر نصف دوره تناوب تابع است. پس:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{|\pi b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4}$$



پس:

$$f(x) = 4 \cos\left(\pm \frac{\pi}{4} x\right) - 2 = 4 \cos\left(\frac{\pi}{4} x\right) - 2$$

بنابراین:

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 4 \cos\left(\frac{4\pi}{4 \times 3}\right) - 2 = 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 = 4 \times \frac{1}{2} - 2 = 2 - 2 = 0$$

حد اقل مقدار تابع برابر صفر است، پس: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰**

$$3 - |a| = 0 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow a = -3, a = 3 \text{ (غ ق)}$$

(چون نمودار در اطراف مبدأ شبیه نمودار $y = \cos x$ است، پس ضریب کسینوس یعنی $-a$ باید مثبت باشد)طول دوره تناوب تابع برابر $6 = 2 - (-4)$ است، پس:

$$4.5T = 4.5 \times \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}, T = \frac{4}{3}$$

از طرف دیگر اختلاف 2 و c یک دوره تناوب است، پس $\frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 2 - T = 2 - \frac{4}{3}$ و در نتیجه:

$$ac = -3 \times \frac{2}{3} = -2$$

دوره تناوب تابع f برابر $\frac{2\pi}{|(a^2 + 3)\pi|}$ و دوره تناوب تابع g برابر $\frac{2\pi}{|-4a\pi|}$ است، پس: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱**

$$\frac{2\pi}{|(a^2 + 3)\pi|} = \frac{2\pi}{|-4a\pi|} \Rightarrow |a^2 + 3| = |4a|$$

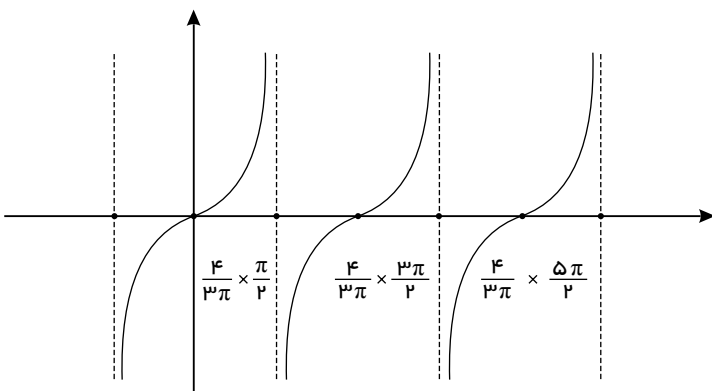
$$\begin{cases} a^2 + 3 = 4a \\ a^2 + 3 = -4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3, a = 1 \\ a^2 + 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1, a = -3 \end{cases}$$

بنابراین به ازای چهار مقدار a دوره تناوب تابع‌های f و g برابرند.ابتدا ضابطه تابع را به کمک رابطه‌های $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ و $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ساده می‌کنیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲**

$$f(x) = \sin 2x \cos 2x (\sin^2 2x - \cos^2 2x) = \frac{1}{2} \sin 4x (\sin^2 2x - \cos^2 2x) \underbrace{(\sin^2 2x + \cos^2 2x)}_1 = -\frac{1}{2} \sin 4x \cos 4x = -\frac{1}{4} \sin 8x$$

بنابراین دوره تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8}$ است.اگر طول نقاط نمودار تابع $y = \tan x$ را بر $\frac{3\pi}{4}$ تقسیم کنیم، نمودار تابع $y = \tan\left(\frac{3\pi x}{4}\right)$ به دست می‌آید. تابع $y = \tan x$ و وضعیت یکنوایی **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳**

یکسان دارند.

مطابق شکل، تابع روی بازه $\left(2, \frac{10}{3}\right)$ اکیداً صعودی است.پس حداکثر مقدار a برابر $\frac{10}{3}$ است.**۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴**

سه برابر دوره تناوب برابر ۳ است.

$$3T = 3 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:



تابع در اطراف $x = 0$ نزولی است، پس a و b مختلف‌العلامت هستند.

$$a = 3, b = -2 \text{ یا } a = -3, b = 2 \Rightarrow a \cdot b = -6$$

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵**

$$y = -2a \sin(\pi bx + \frac{3\pi}{2}) + a^2 = 2a \cos(\pi bx) + a^2$$

با توجه به نمودار تابع $T = 4$ دوره تناوب و $\max(y) = 3$

می‌دانیم در تابع $y = a \cos(bx) + c$ و $\max(y) = |a| + c$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

بنابراین:

$$|-2a| = |2a| = 2a \text{ لذا } a > 0$$

$$|-2a| + a^2 = 3 \rightarrow 2a + a^2 = 3 \rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow a = -3 \times, a = 1$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4 \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

در تابع کسینوس b منفی یا مثبت باشد، تفاوتی ندارد لذا $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ هر دو قبولند.

$$f(x) = 2 \cos(\frac{\pi}{2}x) + 1 \rightarrow f(1) = 2 \cos \frac{\pi}{2} + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$$

$$\text{Min} = -|a| + 2 = 0 \rightarrow |a| = 2$$

با توجه به نمودار و ضابطه تابع داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶**

از طرفی $T = 1$ و در نتیجه $T = \frac{4}{3}$ است. با توجه به رابطه دوره تناوب داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{3}{2}$$

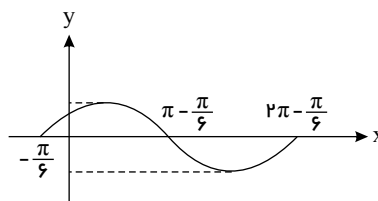
از آنجا که نمودار تابع در اطراف $x = 0$ نزولی است، پس $ab < 0$ بوده و در نتیجه a و b مختلف‌العلامت هستند.

پس $a = 2$ و $b = -\frac{3}{2}$ یا $a = -2$ و $b = \frac{3}{2}$ است و در نتیجه $a + b = \frac{1}{2}$ یا $a + b = -\frac{1}{2}$ می‌تواند باشد که فقط $a + b = \frac{1}{2}$ در گزینه‌ها وجود دارد.

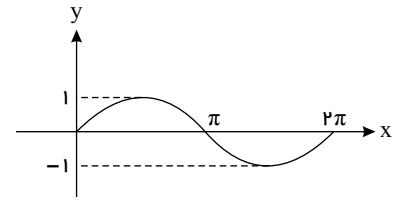
دقت کنید که $\frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ پس در ابتدا نمودار $y = \sin x$ به اندازه $\frac{\pi}{6}$ به چپ منتقل شده است. **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷**

$$y = \sin x \xrightarrow{x \rightarrow x + \frac{\pi}{6}} y = \sin(x + \frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$$

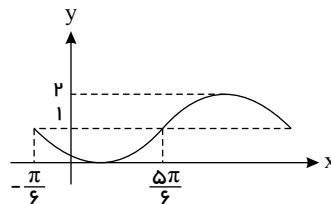
$$y = -\sin(x + \frac{\pi}{6}) \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = -\sin(x + \frac{\pi}{6}) + 1$$



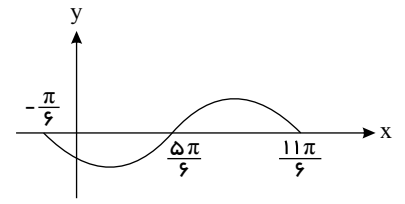
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

ابتدا توجه کنید که: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸**

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

بنابراین اگر نمودار تابع $y = \sin x$ را $\frac{\pi}{4}$ واحد به چپ ببریم و عرض نقاط آن را $\sqrt{2}$ برابر کنیم، نمودار تابع f به دست می‌آید. پس نقطه A و B روی نمودار تابع f متناظر نقاط $(\frac{\pi}{4}, 1)$ و

روی $(-\frac{3\pi}{4}, -1)$



نمودار تابع $y = \sin x$ هستند. بنابراین:

$$A = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, 1 \times \sqrt{2}\right) \Rightarrow A = \left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right), B\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, -1 \times \sqrt{2}\right) \Rightarrow B\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$$

پس شیب خط گذرنده از نقاط A و B برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})}{\frac{\pi}{4} - \left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{-\pi}$$

ابتدا توجه کنید که اگر $[x]$ زوج باشد، آنگاه: **۱ ۲ ۳ ۴ ۴۹**

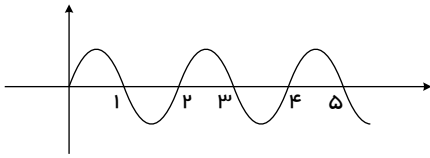
$$(-1)^{[x]} = 1 \Rightarrow f(x) = |f(-x)|$$

و اگر $[x]$ فرد باشد آنگاه:

$$(-1)^{[x]} = -1 \Rightarrow f(x) = -|f(-x)| \Rightarrow |f(-x)| = -f(x)$$

اکنون فرض کنید $f(x) = \sin(\pi x)$. در نتیجه $f(-x) = -\sin(\pi x)$ و در نتیجه $|f(-x)| = |-\sin(\pi x)| = |\sin(\pi x)|$.

از طرف دیگر نمودار تابع $f(x) = \sin(\pi x)$ به صورت مقابل است:



واضح که اگر $[x]$ زوج باشد آنگاه $\sin(\pi x) > 0$ و در نتیجه:

$$|f(-x)| = |\sin(\pi x)| = \sin(\pi x) = f(x)$$

و اگر $[x]$ فرد باشد آنگاه $\sin(\pi x) < 0$ و در نتیجه:

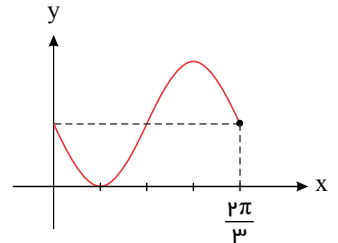
$$|f(-x)| = |\sin(\pi x)| = -\sin(\pi x) = -f(x)$$

می‌دانیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰**

با توجه به نمودار داریم:

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

$$y = 1 - \sin mx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = \pm 3$$



چون نمودار در آغاز رو به پایین حرکت می‌کند و ضریب سینوس منفی است پس باید کمان سینوس مثبت باشد پس $m > 0$ بوده و $m = +3$ قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin(+3x) = 1 - \sin 3x \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{6}} y = 1 - \sin \frac{21\pi}{6} = 1 - \sin \frac{7\pi}{2} \rightarrow y = 1 + 1 = 2$$

می‌دانیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱**

با توجه به شکل، دوره تناوب تابع 4π است.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx \rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = 4\pi \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{بازنویسی: } f(x) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{1}{2}x \xrightarrow{x = \frac{16\pi}{3}} f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{9\pi - \pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

با توجه به نمودار و این که $0 < c < \pi$, $b > 0$ مشخص است که a مثبت است **۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲**

$$\max a = |a| \xrightarrow{a > 0} a = \frac{1}{4} \rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \cos(bx + c)$$

نقطه $A\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ در تابع صدق می‌کند:



$$\frac{1}{4} \cos\left(\frac{3}{4}b + c\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{3}{4}b + c\right) = -1 \Rightarrow \frac{3b}{4} + c = \pi$$

همچنین در $x = \frac{5}{4}$ مقدار تابع برابر صفر است.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \cos\left(\frac{5}{4}b + c\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{5}{4}b + c\right) = 0$$

با توجه به نمودار در $x = \frac{5}{4}$ دومین بار است که نمودار تابع محور x را قطع می‌کند، پس داریم: $\frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2}$ و حال دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3}{4}b + c = \pi \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \frac{5}{4}b - \frac{3}{4}b - \frac{3}{4}b = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pi$$

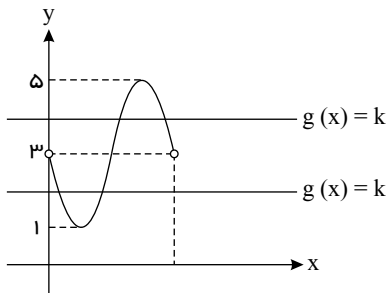
$$\frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{b=\pi} c = \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{a \cdot c}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳

$$f(x) = -2 \sin(2x) + 3 \rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$Max = |-2| + 3 = 1, Min = -|-2| + 3 = 5$$



نمودار f را رسم می‌کنیم.

تابع $g(x) = k$ تابع f را زمانی در دو نقطه قطع می‌کند که داشته باشیم:

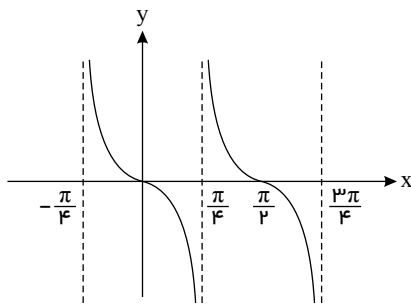
$$g(x) = k \quad 1 < k < 3 \quad \text{یا} \quad 3 < k < 5$$

$$g(x) = k$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

می‌دانیم: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

$$f(x) = \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{2 \cos^2 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$



دوره تناوب $y = -f(x) = -\tan 2x$ برابر $T = \frac{\pi}{2}$ است و نمودار آن به صورت زیر است.

تابع در بازه‌های $(-\frac{\pi}{4}, 0) = (-\frac{T}{2}, 0)$ و $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = (T, \frac{3T}{2})$ نزولی است.

ضابطه تابع به صورت $y = a \cos(bx) + c$ است که با توجه به نمودار، $\frac{3}{4}$ برابر دوره تناوب برابر ۱۰ است. پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

$$\frac{3}{2}T = 10 \Rightarrow T = \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{20}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6\pi}{20} = \frac{3\pi}{10} \Rightarrow b = \pm \frac{3\pi}{10}$$

نقطه برخورد تابع با محور y ها، ماکزیمم تابع است. پس a مثبت است.

$$\begin{cases} max = 6 \Rightarrow |a| + c = 6 \\ min = 0 \Rightarrow -|a| + c = 0 \end{cases} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a>0} a = 3$$

در نتیجه:

$$y = 3 \cos\left(\pm \frac{3\pi}{10}x\right) + 3 \Rightarrow y = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{10}x\right) + 3$$

تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶



$$y = \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{a\pi x}{2}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{a\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a\pi x}{2}\right)$$

$$y = -\sin\left(\frac{a\pi x}{2}\right)$$

با توجه به نمودار، a مثبت است و نصف دوره تناوب برابر $\frac{2}{3}$ است، پس داریم:

$$T = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{a\pi}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4\pi}{a\pi} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{a} = \frac{4}{3} \rightarrow a = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۷

می‌دانیم: $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \cos^2 x (2 \sin^2 x) = 2(\sin x \cos x)^2 = 2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 4x$$

بنابراین دوره تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ است.

ابتدا توجه کنید که نمودار تابع f از نقطه $(0, 1)$ گذشته است. پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۸

$$f(0) = 1 \Rightarrow a - b \cos 0 = 1 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow b = a - 1 \Rightarrow f(x) = a - (a - 1) \cos(a\pi x)$$

از طرف دیگر نصف دوره تناوب تابع برابر $\frac{1}{3}$ است. پس:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{|a|} = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

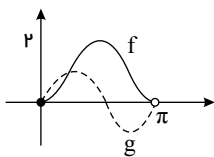
اگر $a = 2$ آنگاه $b = 1$ و $f(x) = 2 - \cos(2\pi x)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ که با نمودار تابع f تطابق دارد. پس $a + b = 3$.

اگر $a = -2$ آنگاه $b = -3$ و $f(x) = -2 + 3 \cos(2\pi x)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = -5$ که با نمودار تابع f تطابق ندارد و قابل قبول نیست.

دوره تناوب تابع $g(x) = \sin(bx)$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۹

دوره تناوب تابع $f(x) = 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ برابر $\frac{2\pi}{2}$ است. پس:

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$



نمودار تابع f و نمودار تابع g با شرط $b > 0$ روی بازه $[0, \pi]$ در شکل مقابل رسم شده‌اند و دو نقطه برخورد دارند.

توجه کنید که اگر $b < 0$ آنگاه نمودار تابع g قرینه نمودار مقابل نسبت به محور عرض‌ها خواهد بود و در این حالت هم دو نقطه برخورد وجود دارد.

کمترین مقدار تابع برابر $|a| - 1$ است، پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶۰

$$1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

چون نمودار تابع f در نقطه $x = 0$ مینیمم است، پس $a = 2$ قابل قبول است. زیرا در این صورت $f(x) = -2 \cos(b\pi x) + 1$.

اکنون توجه کنید که نمودار تابع f از نقطه $(0, 0)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(0) = 0 \Rightarrow 1 - 2 \cos(0 \cdot b\pi) = 0 \Rightarrow \cos(0 \cdot b\pi) = \frac{1}{2}$$

چون تابع f در $x = 1$ برای بار دوم در نقطه‌ای با طول مثبت برابر صفر شده است، پس:

$$1 \cdot b\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 1 \cdot b\pi = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$ab = \frac{1}{3}$$



۶۱ دوره تناوب تابع برابر $T = 4$ است، پس بازه $(106, 107)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(106, 107) = (26 \times 4 + 2, 26 \times 4 + 3)$$

بنابراین نمودار تابع در بازه $(106, 107)$ همان نمودار تابع در بازه $(2, 3)$ است. حال شیب خط گذرنده از نقاط $(2, 1)$ و $(3, 0)$ را می‌یابیم.

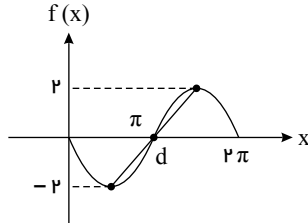
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{3 - 2} = -1$$

معادله خط گذرنده از نقطه $(106, 1)$ با شیب $m = -1$ به صورت زیر است.

$$y - 1 = -1(x - 106) \Rightarrow y = -x + 107$$

۶۲

این تابع را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم:



به دنبال طول پاره خط d هستیم. می‌دانیم فاصله بین دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) برابر با $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ است. در اینجا داریم:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2}, y_1 = -2 \\ x_2 = \frac{3\pi}{2}, y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow d = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{\pi^2 + 16}$$

۶۳ با توجه به آن که تابع f بر خط $y = \frac{1}{2}$ مماس است، لذا ماکزیمم یا مینیمم آن $-\frac{1}{2}$ است. بنابراین:

$$\max(f) = \left| -\frac{3}{4} \right| + a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{5}{4}$$

یا

$$\min(f) = -\left| -\frac{3}{4} \right| + a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

برای محاسبه دوره تناوب داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 3\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \rightarrow b = \pm \frac{2}{3}$$

دو حالت داریم:

$$(1) a = -\frac{5}{4}, b = \pm \frac{2}{3} \rightarrow f\left(\frac{11\pi}{2}\right) = -\frac{3}{4} \cos\left(\pm \frac{2}{3} \left(\frac{11\pi}{2}\right)\right) + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4} \cos\left(\pm \frac{11\pi}{3}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4} \cos\left(\pm(4\pi - \frac{\pi}{3})\right) + \left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$= -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{13}{8}$$

$$(2) a = \frac{1}{4}, b = \pm \frac{2}{3} \rightarrow f\left(\frac{11\pi}{2}\right) = -\frac{3}{4} \cos\left(\pm \frac{2}{3} \left(\frac{11\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

۶۴ با توجه به برد تابع $f(x)$ واضح است که کمترین مقدار و بیشترین مقدار تابع به ترتیب ۱ و ۵ هستند؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} |a + 1| + b = 5 \\ -|a + 1| + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3 \rightarrow |a + 1| = 2$$

و چون تابع روی $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است، پس ضریب سینوس مثبت است و $a + 1 > 0$ خواهد بود:

$$a + 1 = 2 \rightarrow a = 1$$

در نتیجه تابع $g(x)$ به صورت $g(x) = 2 \cos \frac{x}{3} + 1$ بوده و برد آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max &= |2| + 1 = 3 \\ \min &= -|2| + 1 = -1 \end{aligned} \rightarrow R_g = [-1, 3]$$

۶۵ تابع زوج و فرد حذف شده!

نمودار تابع نسبت به خط $x = 1$ متقارن است؛ پس:

$$f(2 - x) = f(x)$$

نمودار تابع نسبت به خط $x = 3$ متقارن است؛ پس:

$$f(6 - x) = f(x)$$

در رابطه دوم به جای x قرار می‌دهیم: $x + 4$:

$$f(6 - (x + 4)) = f(x + 4) \Rightarrow f(2 - x) = f(x + 4)$$

از طرفی $f(2 - x) = f(x)$ ، پس $f(x + 4) = f(x)$ ؛ بنابراین $t = 4$ دوره تناوب است. حال بررسی می‌کنیم آیا $t = 2$ هم دوره تناوب است. در رابطه اول به جای x قرار می‌دهیم:

$$f(2 - (x + 2)) = f(x + 2) \Rightarrow f(x + 2) = f(-x)$$



و دلیلی نداریم که $f(-x) = f(x)$ پس $t = 4$ کوچک ترین دوره تناوب است.

ریشه های معادله $\cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}) = 0$ یا $\cos(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}) = 0$ (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۶)

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x = k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} <$$

(اولین ریشه مثبت) $x = \frac{4\pi}{3}$

(اولین ریشه منفی) $x = -\frac{2\pi}{3}$

پس $a = \frac{-2\pi}{3}$ و $b = \frac{4\pi}{3}$ در نتیجه:

$$y = \tan\left(\frac{-4\pi}{3}x\right) = \tan 2x$$

که در $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ صعودی است.

چون دوره تناوب تابع (فاصله ۲ ماکزیم متوالی) برابر π است پس: (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۷)

روی $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ اکیداً نزولی

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = -2$$

از طرفی مقدار ماکزیم برابر ۳ است در نتیجه:

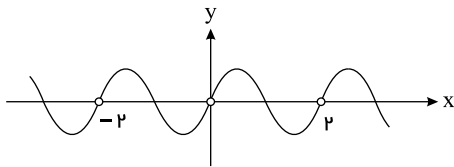
$$y_{max} = |a| + 2 = 3 \Rightarrow |a| = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

چون تابع در $(0, \frac{\pi}{4})$ اکیداً نزولی است پس $y = -\sin 2x + 1$ و مقدار تابع در $\frac{\pi}{12}$ عبارتست از:

$$-\sin \frac{\pi}{6} + 1 = \frac{1}{2}$$

توجه کنید که اگر $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ آنگاه $[\frac{x}{2}] + [-\frac{x}{2}] = 0$ و اگر $\frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}$ آنگاه $[\frac{x}{2}] + [-\frac{x}{2}] = -1$ بنابراین: (۱) (۲) (۳) (۴) (۶۸)

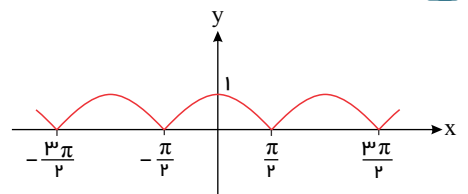
$$D_f = \mathbb{R} - \{x | x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}, f(x) = \frac{-\sin(\pi x)}{-1} = \sin(\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$



پس نمودار تابع f به صورت زیر است و دوره تناوب آن برابر ۲ است.

$$\frac{\pi}{6}x = t \rightarrow y = |\cos t|$$

(۱) (۲) (۳) (۴) (۶۹)



از روی نمودار مشخص است که دوره تناوب تابع $y = |\cos t|$ برابر π است، پس:

$$\frac{\pi}{6}T = \pi \Rightarrow T = 6$$

روش دوم: دوره تناوب توابع $y = |\sin ax|$ و $y = |\cos ax|$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است، پس:

$$f(x) = |\cos \frac{\pi}{6}x| \rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = 6$$

ابتدا ضابطه تابع $f - g$ را ساده می کنیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۰)

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sin^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x$$

بنابراین دوره تناوب تابع $f - g$ برابر است با:

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

پاسخنامه کاپری

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴

۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴

۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴

۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴

