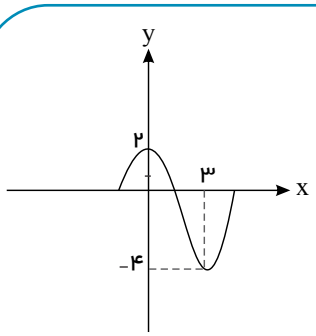
گروه مشاوره آکو: ۱۴۰۲

طراح : مشاوران آکو

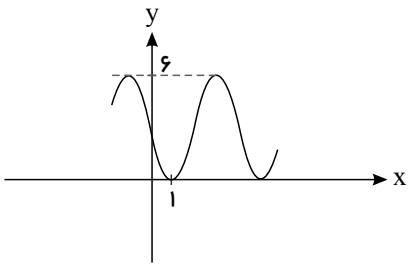
ناظر: سهیل حاج کرم

آموزشگاه پرسا

**۱** نمودار تابع $f(x) = a\cos bx + c$ به‌صورت زیر است، ضابطهٔ این تابع را بیابید.



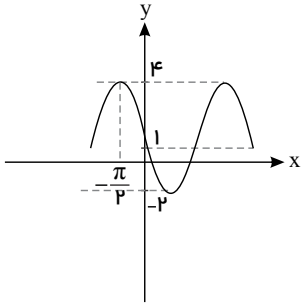

**۲** اگر نمودار تابع $f(x) = a\sin bx + c$ به‌صورت زیر باشد، ضابطهٔ تابع را بیابید.




**۳** ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = |۲\sin ۳x - ۴|$ ب) $g(x) = |۴\cos ۲x - ۳|$

**۴** نمودار تابع $f(x) = a\sin bx + c$ به‌صورت زیر است، ضابطهٔ آن را بیابید.




**۵** اگر دورهٔ تناوب $f(x) = ۳\cos(mx) + ۴$ برابر با $\frac{\pi}{۵}$ باشد، دورهٔ تناوب تابع $g(x) = -\cos(m+۲)x$ را بیابید. $(m > ۰)$

**۶** الف) مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y = ۱ - ۲\sin(\frac{-\pi}{۳}x)$ را به دست آورید.

ب) معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲\alpha - \sin\alpha + ۱ = ۱$ را حل کرده، جواب‌های کلی آن را بنویسید.

**۷** جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۳x + \sin ۵x = ۰$ را بیابید.

**۸** جوابهای کلی معادلهٔ زیر را بیابید.

$\sin^۳ \pi x + \cos^۳ \pi x = ۰$

**۹** معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\cos ۲x - \sqrt{۳} = ۰$

ب) $۲\cos ۳x + ۱ = ۰$

**۱۰** دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=۴\sin ۵x$ ۲) $g(x)=-\frac{۳}{۲}\cos(\frac{۱}{۴}x)$

**۱۱** درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) مینیمم تابع $y=-۳\cos(\pi x)+۲$ برابر با یک است.

ب) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

**۱۲** اگر $\tan(\alpha-\frac{\beta}{۲})=\sqrt{۳}-۱$ و $\tan(\alpha+\frac{\beta}{۲})=\sqrt{۳}+۱$ باشد حاصل $\tan ۲\beta$ را بیابید. $(۰\le\alpha\ ,\ \beta\le\frac{\pi}{۲})$

**۱۳** اگر $\sin x\cdot\sin y=\frac{۳}{۴}$ و $\tan x\cdot\tan y=۳$ باشد حاصل $\tan(x-y)$ را بیابید.

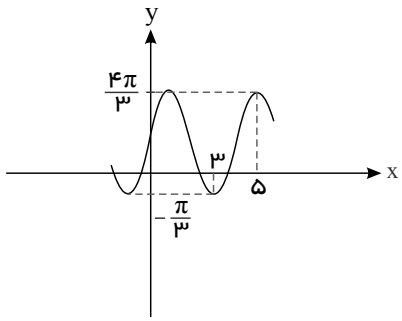
**۱۴** اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۴}$ و $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{۱}{۶}$ باشد حاصل $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ را بیابید. $(۰\le\alpha<\beta\le\frac{\pi}{۲})$

**۱۵** اگر $\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶}$ و $\tan\alpha=\frac{۲m-۱}{۳}$، آنگاه حدود $m$ را بیابید.

**۱۶** اگر $\tan x=۲m-۱$ و $\frac{\pi}{۳}\le x\le\frac{\pi}{۲}$ آنگاه حدود $m$ را بیابید.

**۱۷** اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۳cos(mx-\frac{\pi}{۴})$ برابر با $\frac{\pi}{۷}$ باشد، دورهٔ تناوب تابع $g(x)=\sin(mx-x+\frac{\pi}{۶})$ را بیابید. $(m>۰)$

**۱۸** نمودار تابع $f(x)=a\sin bx+c$ به‌صورت زیر است، ضابطهٔ تابع را بیابید.




**۱۹** ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=۳\cos^۲ ۲x-۶$ ب) $g(x)=-\pi\cos^۳ ۴x-\frac{\pi}{۲}$

**۲۰** معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کرده و جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را بیابید.

$$\sin x+\cos^۲ x=\frac{۱}{۴}$$

**۲۱** معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $۲\cos^۲ ۳x+\cos ۳x=۰$

ب) $\sin ۵x+\cos ۳x=۰$

**۲۲** ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=۲\sin^۴ x-۵$ ب) $g(x)=-۳\sin^۵ ۲x+۱۰$

**۲۳** معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$۴\sin^۲ x-۲(\sqrt{۲}+۱)\sin x+\sqrt{۲}=۰$$

**۲۴** جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\cos(۴x+\frac{\pi}{۴})+\sin ۳x=۰$$

**۲۵** معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

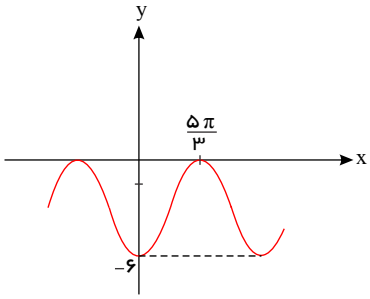
الف) $۲\sin^۲ x - \sqrt{۲}\sin x = ۰$

ب) $۲\cos^۲ x - \sqrt{۳}\cos x = ۰$

**۲۶** اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x) = m\cos(mx) + ۳$ برابر با $\frac{\pi}{۴}$ باشد، مینیمم و ماکزیمم تابع را بیابید. $(m > ۰)$

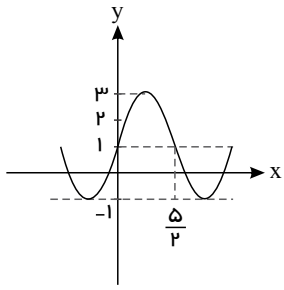
**۲۷** اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin(mx) + m$ برابر $۴\pi$ باشد، ماکزیمم تابع را بیابید. $(m > ۰)$

**۲۸** نمودار تابع $f(x) = a\cos bx + c$ به‌صورت زیر است، ضابطهٔ آن را بیابید.




**۲۹** معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$ را حل کرده و جواب‌های بین صفر و $۲\pi$ آن را به دست آورید.

**۳۰** اگر نمودار تابع $f(x) = a\sin bx + c$ به‌صورت زیر باشد، ضابطهٔ آن را بنویسید.




**۳۱** معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin ۲x + ۳\cos x = ۰$

ب) $۴\sin(\frac{x}{۲})\cos(\frac{x}{۲}) = ۱$

**۳۲** در تابع $f(x) = \sqrt{۲}\cos(\frac{۱}{۳}x) - ۱$، دورهٔ تناوب و نسبت ماکزیمم تابع به مینیمم آن را بیابید.

**۳۳** دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $g(x) = \pi\cos(\frac{\pi}{۲}x) + \frac{\pi}{۲}$

الف) $f(x) = \sqrt{۳}\sin(۲\pi x) - ۱$

**۳۴** دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

**الف**

$f(x) = ۵\sin(۶x) - ۷$

**ب**

$g(x) = \frac{۱}{۲}\cos(۳x) + ۴$

**۳۵** معادلات زیر را حل کنید.

**الف**

$\sin x + \cos x = ۱ \quad [۰, ۲\pi]$

**ب**

$\sin ۲x + \cos x = ۰$

**پ**

$\cos^۴(x + \frac{\pi}{۲}) = \frac{۱}{۴}$

**ت**

$۲\sin(۳\pi x) = \sqrt{۳}$

**ث**

$۴\cos ۲x - ۸\cos x + ۴ = ۰$

**۳۶** معادلات زیر را حل کنید.

**الف**

$\tan ۲x = ۳\tan x$

**ب**

$\tan^۳ x - \tan^۲ x + ۱ = \tan x$

**پ**

$\tan^۴ x - ۲\tan^۲ x - ۳ = ۰$

**ت**

$\cos ۳x = ۴\cos^۲ x$

**ث**

$\sin ۳x + ۲\cos ۲x = ۲$

**۳۷** هریک از عبارات داده شده را برحسب $\tan \frac{x}{۲}$ بنویسید.

**الف**

$$\frac{۱ + \cos x}{\sin x}$$

**ب**

$$\frac{۱ + \cos x}{۱ - \cos x}$$

**پ**

$$\frac{\sin x}{۱ + \sin x}$$

**۳۸** معادلات زیر را حل کنید.

**الف**

$\sin \frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$

**ب**

$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

**پ**

$\cos x = \cos ۲x$

**ت**

$\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

**ث**

$\cos^{۲} x - \sin x = \frac{۱}{۴}$

**ج**

$\sin x - \cos ۲x = ۰$

**چ**

$\tan(۲x - ۱) = ۰$

**ح**

$\tan ۳x = \tan \pi x$

**۳۹** معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۳x = \sin ۲x$ را حل کنید.

**۴۰** معادلهٔ $\cos ۲x + \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

**۴۱** ضابطهٔ تابعی به فرم $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دورهٔ تناوب آن $\pi$، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن $-۳$ باشد.

**۴۲** مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن به‌ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

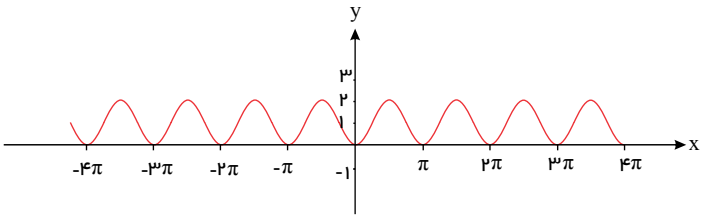
**۴۳** با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

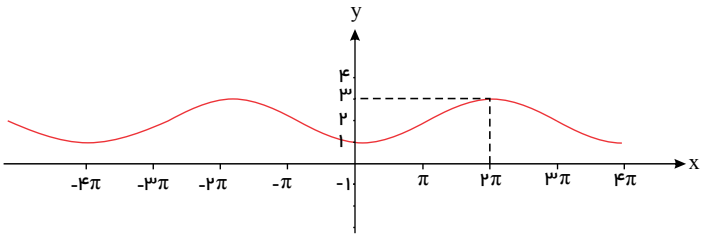
**۴۴** هریک از توابع داده‌شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = ۲ - \cos \frac{۱}{۲} x$ پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

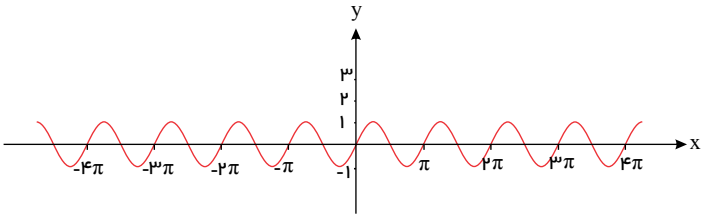
۱)



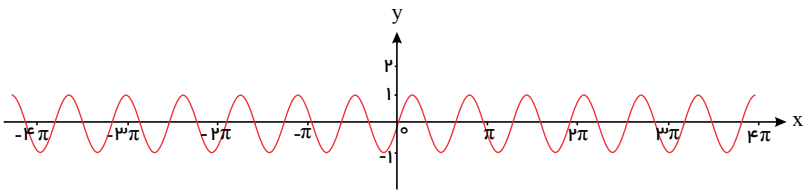

۲)




۳)




۴)




**۴۵** اگر $\sin^۴ \alpha + \cos^۴ \alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد حاصل $\cot ۲\alpha$ را بیابید.

**۴۶** اگر $\tan(\alpha + \beta) = ۳$ و $\tan(\alpha - \beta) = ۲$ باشد حاصل $\tan ۲\alpha$ را بیابید.

**۴۷** اگر $۹۰^\circ < \alpha < \beta < ۱۸۰^\circ$ باشد، علامت عبارت‌های $A = (\sin \alpha - \sin \beta)$ و $B = (\tan \alpha - \tan \beta)$ به‌ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

**۴۸** دورهٔ تناوب تابع $y = |\sin ax|$ و $y = |\cos ax|$ برابر ..... است.

**۴۹** اگر $\tan \alpha \leq -۱$، آنگاه حدود $\alpha$ را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ بیابید.

**۵۰** اگر $\sin \alpha = ۲m - ۱$ و $\tan \alpha = m + ۱$ و $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ آنگاه حدود $m$ را بیابید.

**۵۱** اگر $\tan \alpha \geq \frac{\sqrt{۳}}{۳}$، آنگاه حدود $\alpha$ را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ بیابید.

**۵۲** معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\tan^۳ x - \tan^۲ x + ۱ = \tan x$$

**۵۳** اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $\tan^۲ x - (۲m + ۱) \tan x + ۲m = ۰$ باشند و $\tan(\alpha + \beta) = -\frac{۵}{۳}$، آنگاه $m$ را بیابید.

**۵۴** معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\tan^۲ x + \sqrt{۳} \tan x = ۰$$

**۵۵** معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^{۲}(x-\frac{\pi}{۸})+۲\cos(\frac{۵\pi}{۸}-x)=۳$$

**۵۶** معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

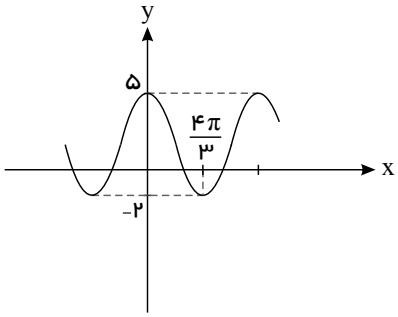
$$\sqrt{۳}\tan x=۲\sin x$$

**۵۷** معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $\tan(۱+\frac{x}{۲})\tan(۱-\frac{x}{۳})=۱$

ب) $۲\cos^{۲}x=\sin x-۱$

**۵۸** نمودار تابع $f(x)=a\cos bx+c$ به‌صورت زیر است. ضابطهٔ آن را بیابید.




**۵۹** معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $\sin(x-\frac{۲\pi}{۳})=\cos ۲x$

ب) $\tan(x+\frac{\pi}{۷})=\cot(\frac{۲\pi}{۷})$

**۶۰** معادلهٔ زیر چند جواب در بازهٔ $[۰,\pi]$ دارد؟

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{x}{۴}+\pi)$$

**۶۱** برد تابع $f(x)=[\pi\cos ۲x-\frac{\pi}{۲}]$ را بیابید. ([ ] جزء صحیح است)

**۶۲** معادلهٔ $\sin(\frac{x}{۲})+\cos(\frac{x}{۲})=۰$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

**۶۳** جواب‌های کلی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$\tan ۴x=\cot(\frac{\pi}{۳}+۴x)$$

**۶۴** جواب‌های کلی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$\cos ۴x\cos x=\sin ۴x\sin x+\frac{۱}{۲}$$

**۶۵** معادلات زیر را حل کنید.

**الف**

$$\cos^{۲}x+\frac{۳}{۴}=۱$$

**ب**

$$\sin(x+\frac{۲\pi}{۳})=-۱$$

**پ**

$$\tan ۲x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

**۶۶** معادلات زیر را حل کنید.

**الف**

$$\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

**ب**

$$(\sin x - \sin \frac{\pi}{۲})(\sin x + \sin \frac{\pi}{۲}) = \frac{-۱}{۲}$$

**۶۷** هریک از عبارات داده‌شده را برحسب $\cos ۲x$ بنویسید.

**الف**

$\sin^۲ x \cos^۲ x$

**ب**

$\sin^۲ x + ۱$

**پ**

$\cos^۴ x$

**۶۸** کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

**الف** تابع تانژانت در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است.

**ب** نقاطی به‌فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}\ , (k \in \mathbb{Z})$ در دامنهٔ تابع تانژانت قرار دارند.

**۶۹** کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

**الف** تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

**ب** می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

**پ** می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

**ت** تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

**۷۰** معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

**الف**

$\tan x = ۳ \cot x$

**ب**

$۲ \sin^۲ x = ۳ \cos x$

**۷۱** معادلهٔ مثلثاتی $۲ \cos^۲ x = \sin x - ۱$ را حل کنید.

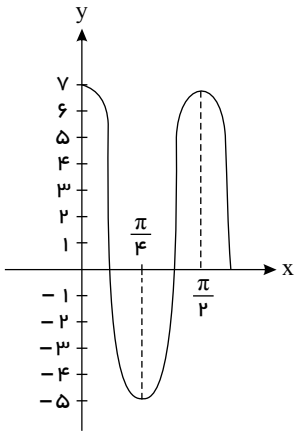
**۷۲** ضابطهٔ تابع مثلثاتی سینوس با دورهٔ تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید.

**۷۳** برد تابع تانژانت $(y = \tan x)$ برابر ..... است.

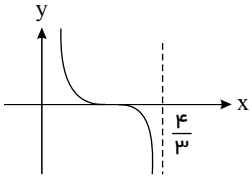
**۷۴** معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ را حل کنید.

**۷۵** معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x - \cos x = ۰$ را حل کنید.

**۷۶** نمودار داده‌شده مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x)=a\sin bx+c$ و یا $f(x)=a\cos bx+c$ است. باتوجه به نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را بنویسید.




**۷۷** اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\tan(ax+\frac{۱}{۲})\pi$ به شکل زیر باشد، $a$ کدام است؟




۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

**۷۸** معادلهٔ $۲\sin ۳x-\sqrt{۲}=۰$ را حل کنید.

**۷۹** معادلهٔ مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$۲\sin^{۲}x+۹\cos x+۳=۰$

**۸۰** معادلهٔ $۲\cos ۳x-\sqrt{۳}=۰$ را حل کنید.

**۸۱** در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

**الف** دورهٔ تناوب تابع $y=۸\cos(\frac{x}{۳})$ برابر با ..... است.

**۸۲** درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

**الف** معادلهٔ $\sqrt{۸}\cos x-\sqrt{۲}=۰$ در بازهٔ $[-۳\pi,\pi]$ دو جواب دارد.

**۸۳** معادلات زیر را حل کنید.

**الف**

$\tan^{۲}x-۳=۰$

**ب**

$۲\sin^{۲}۲x-\sin ۲x-۱=۰$

# پاسخ‌نامه تشریحی

**۱** تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است.

$$\frac{T}{۲}=۳\Rightarrow T=۶\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۶\Rightarrow |b|=\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۳}$$

$$\left.\begin{matrix} max\ f=|a|+c=۲ \\ min\ f=-|a|+c=-۴ \end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=-۲\Rightarrow c=-۱\rightarrow |a|=۳\xrightarrow{a>۰} a=۳$$

$$f(x)=۳\cos(\frac{\pi}{۳}x)-۱$$

**۲**

$$\frac{T}{۴}=۱\Rightarrow T=۴\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۴\Rightarrow |b|=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۲}$$

$$\left.\begin{matrix} max=|a|+c=۶ \\ min=-|a|+c=۰ \end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=۶\Rightarrow c=۳\rightarrow |a|=۳\xrightarrow{a<۰} a=-۳$$

$$f(x)=-۳\sin(\frac{\pi}{۲}x)+۳$$

**۳**

**الف)** $f(x)=|۲\sin ۳x-۴|$

$$-۱\le \sin ۳x\le ۱\Rightarrow -۲\le ۲\sin ۳x\le ۲\Rightarrow -۲-۴\le ۲\sin ۳x-۴\le ۲-۴$$

$$\Rightarrow -۶\le ۲\sin ۳x-۴\le -۲\Rightarrow ۲\le |۲\sin ۳x-۴|\le ۶\Rightarrow ۲\le f(x)\le ۶\Rightarrow \begin{cases} max\ f=۶ \\ min\ f=۲ \end{cases}$$

**ب)** $g(x)=|۴\cos ۲x-۳|$

$$-۱\le \cos ۲x\le ۱\Rightarrow -۴\le ۴\cos ۲x\le ۴\Rightarrow -۴-۳\le ۴\cos ۲x-۳\le ۴-۳$$

$$-۷\le ۴\cos ۲x-۳\le ۱\Rightarrow ۰\le |۴\cos ۲x-۳|\le ۷\Rightarrow ۰\le g(x)\le ۷\Rightarrow \begin{cases} min\ g=۰ \\ max\ g=۷ \end{cases}$$

**۴**

$$\frac{T}{۴}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow T=۲\pi\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۲\pi\Rightarrow |b|=۱\xrightarrow{b>۰} b=۱$$

$$\left.\begin{matrix} max=|a|+c=۴ \\ min=-|a|+c=-۲ \end{matrix}\right\}\Rightarrow ۲c=۲\Rightarrow c=۱\Rightarrow |a|=۳\xrightarrow{a<۰} a=-۳$$

$$f(x)=-۳\sin x+۱$$

**۵**

**می‌دانیم:** $f(x)=a\cos bx+c$ و $f(x)=a\sin bx+c\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$

$$f(x)=۳\cos(mx)+۴\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{m}=\frac{\pi}{۵}\Rightarrow m=۱۰$$

$$\Rightarrow g(x)=-\cos ۱۲x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$$

**۶** **الف)** می‌دانیم در تابع $y=a\sin bx+c$ همواره داریم: $Max=|a|+c$ و $Min=-|a|+c$

**پس:** $\begin{cases} Max=|-۲|+۱=۲+۱=۳ \\ Min=-|-۲|+۱=-۲+۱=-۱ \end{cases}$

**ب)** می‌دانیم که $\cos ۲a=۱-۲\sin^۲ a$ است.

$$\cos ۲\alpha-\sin\alpha+۱=۱\rightarrow \cos ۲\alpha-\sin\alpha=۰\rightarrow ۱-۲\sin^۲\alpha-\sin\alpha=۰\rightarrow ۲\sin^۲\alpha+\sin\alpha-۱=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases} \sin\alpha=-۱\xrightarrow{\text{حالت خاص}}\alpha=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \\ \sin\alpha=-\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\rightarrow\begin{cases}\alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ \alpha=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\rightarrow\alpha=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}\end{cases}$$

**۷**

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = ۲k\pi + v \quad , \quad u = ۲k\pi + \pi - v$

$$\sin ۳x + \sin ۵x = ۰ \Rightarrow \sin ۵x = -\sin ۳x = \sin(-۳x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۵x = ۲k\pi - ۳x \Rightarrow ۸x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴} \\ ۵x = ۲k\pi + \pi - (-۳x) = ۲k\pi + \pi + ۳x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{array} \right\} \xrightarrow{\cup} x = \frac{k\pi}{۴}$$

**۸**

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v, \cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha$

$$\sin^۳ \pi x + \cos^۳ \pi x = ۰ \Rightarrow sin^۳ \pi x = -\cos^۳ \pi x \Rightarrow \sin \pi x = -\cos \pi x$$
$$\Rightarrow \cos \pi x = -\sin \pi x \Rightarrow \cos \pi x = \cos(\frac{\pi}{۲} + \pi x) \Rightarrow \pi x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} + \pi x)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \pi x = ۲k\pi + (\frac{\pi}{۲} + \pi x) \Rightarrow ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} = ۰ \text{ جواب ندارد} \\ \pi x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - \pi x \Rightarrow ۲\pi x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k - \frac{۱}{۴} \end{array} \right.$$

**۹**

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

الف) $۲\cos ۲x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶}$
$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۱۲}$$

ب) $۲\cos ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = -\frac{۱}{۲} = -\cos\frac{\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳})$
$$\Rightarrow \cos ۳x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{۲\pi}{۹}$$

**۱۰** دورهٔ تناوب توابع $y = a\sin bx$ و $y = a\cos bx$ برابر با $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ و ماکزیمم آنها $|a|$ و مینیمم آنها $-|a|$ است.

۱) $f(x) = ۴\sin ۵x \rightarrow T = \frac{۲\pi}{۵} \quad , \quad max = ۴ \quad , \quad min = -۴$

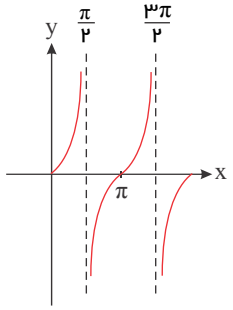
۲) $g(x) = -\frac{۳}{۲}\cos(\frac{۱}{۴}x) \rightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۴}} = ۸\pi \quad , \quad max = |-\frac{۳}{۲}| = \frac{۳}{۲} \quad , \quad min = -|-\frac{۳}{۲}| = -\frac{۳}{۲}$

**۱۱** الف) نادرست - می‌دانیم تابع $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است. پس داریم:

مقدار مینیمم $= -|-۳| + ۲ = -۱$

ب) نادرست

زیرا همان‌طور که در شکل مشخص است تابع تانژانت در یک دورهٔ تناوب خود صعودی است، نه در دامنه.




**۱۲**

$$\tan\beta = \tan((\alpha + \frac{\beta}{۲}) - (\alpha - \frac{\beta}{۲})) = \frac{\tan(\alpha + \frac{\beta}{۲}) - \tan(\alpha - \frac{\beta}{۲})}{۱ + \tan(\alpha + \frac{\beta}{۲})\tan(\alpha - \frac{\beta}{۲})}$$
$$= \frac{\sqrt{۳} + ۱ - (\sqrt{۳} - ۱)}{۱ + (\sqrt{۳} + ۱)(\sqrt{۳} - ۱)} = \frac{۲}{۱ + (۳ - ۱)} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan ۲\beta = \frac{۲\tan\beta}{۱-\tan^۲\beta} = \frac{\frac{۴}{۳}}{۱-\frac{۴}{۹}} = \frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۵}{۹}} = \frac{۱۲}{۵}$$

**۱۳** طبق فرض $\tan x \tan y = ۳$ داریم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y} = ۳ \Rightarrow \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = ۳$$

$$\xrightarrow[\sin x \sin y = \frac{۳}{۴}]{\text{طبق فرض}} \frac{\frac{۳}{۴}}{\cos x \cos y} = ۳ \Rightarrow \cos x \cos y = \frac{۱}{۴}$$

با باز کردن عبارت $\cos(x-y)$ داریم:

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۴} = ۱$$

حال طبق رابطهٔ $۱+\tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ داریم:

$$۱+\tan^۲(x-y) = \frac{۱}{\cos^۲(x-y)} \Rightarrow ۱+\tan^۲(x-y) = ۱ \Rightarrow \tan(x-y) = ۰$$

**۱۴** با توجه به فرض $\alpha+\beta = \frac{\pi}{۴}$ از دو طرف تساوی تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\frac{\pi}{۴}) = ۱ \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\cdot\tan\beta} = ۱$$

با جایگذاری $\tan\alpha\cdot\tan\beta = \frac{۱}{۶}$ داریم:

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\frac{۱}{۶}} = ۱ \Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \tan\beta = \frac{۵}{۶} - \tan\alpha \qquad (۱)$$

پس نتیجه (۱) را در عبارت $\tan\alpha\tan\beta = \frac{۱}{۶}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

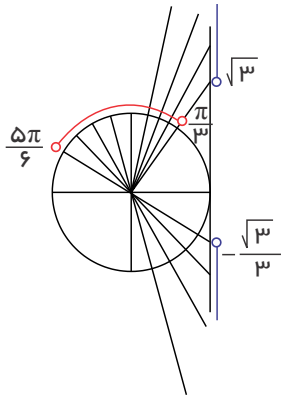
$$\tan\alpha(\frac{۵}{۶}-\tan\alpha) = \frac{۱}{۶} \xrightarrow{\tan\alpha = m} \frac{۵}{۶}m - m^۲ = \frac{۱}{۶} \xrightarrow{\times ۶} ۵m - ۶m^۲ = ۱ \Rightarrow ۶m^۲ - ۵m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۵ \pm ۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow m = \tan\alpha = \begin{cases} \frac{۱}{۳} \Rightarrow \tan\beta = \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan\beta = \frac{۱}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\beta > \alpha} \tan\beta > \tan\alpha \Rightarrow \tan\beta = \frac{۱}{۲} \ , \ \tan\alpha = \frac{۱}{۳}$$

**۱۵**

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل داریم:

$$\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \frac{\pi}{۳} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{۶}$$




$$\frac{\pi}{۳} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \tan\alpha > \sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad \tan\alpha < -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲m-۱}{۳} > \sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad \frac{۲m-۱}{۳} < -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

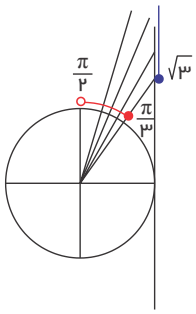
$$\Rightarrow ۲m-۱ > ۳\sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad ۲m-۱ < -\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow m > \frac{۳\sqrt{۳}+۱}{۲} \quad \text{یا} \quad m < \frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$$

**۱۶** با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل مشخص است که اگر $\frac{\pi}{۳} \le x \le \frac{\pi}{۲}$ باشد، نگاه تانژانت زاویهٔ $x$ بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{۳}$ است.

$$\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x \ge \sqrt{3} \Rightarrow 2m-1 \ge \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2m \ge 1+\sqrt{3} \Rightarrow m \ge \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$




**۱۷**

می‌دانیم: $f(x)=a\cos(bx+k)+c$ و $g(x)=a\sin(bx+k)+c \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|b|}$

$$f(x)=3\cos(mx-\frac{\pi}{4}) \to T=\frac{2\pi}{m}=\frac{\pi}{7} \Rightarrow m=14$$

$$\Rightarrow g(x)=\sin(14x-x+\frac{\pi}{6})=\sin(13x+\frac{\pi}{6}) \to T=\frac{2\pi}{13}$$

**۱۸** تفاضل طول دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است، پس:

$$\frac{T}{2}=5-3 \Rightarrow T=4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=4 \Rightarrow |b|=\frac{\pi}{2} \xrightarrow{b>0} b=\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} max\ f=|a|+c=\frac{4\pi}{3} \\ min\ f=-|a|+c=-\frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 2c=\pi \Rightarrow c=\frac{\pi}{2} \Rightarrow |a|=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$$

$$a>0 \Rightarrow a=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow f(x)=\frac{5\pi}{6}\sin(\frac{\pi}{2}x)+\frac{\pi}{2}$$

**۱۹**

نکته: زوج $n \to 0 \le \sin^n u \le 1$ و $0 \le \cos^n u \le 1$

نکته: فرد $n \to -1 \le \sin^n u \le 1$ و $-1 \le \cos^n u \le 1$

الف) $f(x)=3\cos^2 2x-6$

$$0 \le \cos^2 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le 3\cos^2 2x \le 3 \Rightarrow -6 \le 3\cos^2 2x-6 \le 3-6$$

$$\Rightarrow -6 \le f(x) \le -3 \Rightarrow min\ f=-6 \text{ و } max\ f=-3$$

ب) $g(x)=-\pi\cos^3 4x-\frac{\pi}{2}$

$$-1 \le \cos^3 4x \le 1 \xrightarrow{\times(-\pi)} \pi \ge -\pi\cos^3 4x \ge -\pi \Rightarrow -\pi-\frac{\pi}{2} \le -\pi\cos^3 4x-\frac{\pi}{2} \le \pi-\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \le g(x) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow min\ g=-\frac{3\pi}{2} \text{ و } max\ g=\frac{\pi}{2}$$

**۲۰**

$$\sin x+\cos^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin x+1-\sin^2 x=\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x-\sin x-\frac{3}{4}=0$$

$$\Delta=1+3=4 \Rightarrow \sin x=\frac{1\pm 2}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{-1}{2}$$

$\sin x=\frac{3}{2}$ غیرقابل‌قبول

$$\sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\ (1) \\ x=2k\pi+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\ (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

$$(2) \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6}$$

**۲۱**

نکته: $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$

نکته: $\cos u=\cos v\Rightarrow u=۲k\pi\pm v$

الف) $۲\cos^۲ ۳x+\cos ۳x=۰\Rightarrow \cos ۳x(۲\cos ۳x+۱)=۰\Rightarrow \cos ۳x=۰\ ,\ \cos ۳x=\frac{-۱}{۲}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos ۳x=۰\Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\\ \cos ۳x=-\frac{۱}{۲}=-\cos\frac{\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow \cos ۳x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow ۳x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\pm\frac{۲\pi}{۹}$$

ب) $\sin ۵x+\cos ۳x=۰\Rightarrow \cos ۳x=-\sin ۵x\Rightarrow \cos ۳x=\cos(\frac{\pi}{۲}+۵x)$

$$۳x=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۲}+۵x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+۵x\Rightarrow -۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=-k\pi-\frac{\pi}{۴}\\ ۳x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-۵x\Rightarrow ۸x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}-\frac{\pi}{۱۶}\end{cases}$$

**۲۲**

نکته: زوج $n\to ۰\le\sin^n u\le ۱$ و $۰\le\cos^n u\le ۱$

نکته: فرد $n\to -۱\le\sin^n u\le ۱$ و $-۱\le\cos^n u\le ۱$

الف) $f(x)=۲\sin^۴ x-۵$

$$۰\le\sin^۴ x\le ۱\xrightarrow{\times ۲}۰\le ۲\sin^۴ x\le ۲\Rightarrow ۰-۵\le ۲\sin^۴ x-۵\le ۲-۵$$

$$\Rightarrow -۵\le f(x)\le -۳\Rightarrow min\ f=-۵\ \text{ و }\ max\ f=-۳$$

ب) $g(x)=-۳\sin^۵ ۲x+۱۰$

$$-۱\le\sin^۵ ۲x\le ۱\xrightarrow{\times(-۳)}۳\ge -۳\sin^۵ ۲x\ge -۳\Rightarrow -۳+۱۰\le -۳\sin^۵ ۲x+۱۰\le ۳+۱۰$$

$$\Rightarrow ۷\le g(x)\le ۱۳\Rightarrow min\ g=۷\ \text{ و }\ max\ g=۱۳$$

**۲۳**

نکته: $\sin u=\sin v\Rightarrow u=۲k\pi+u\ ,\ u=۲k\pi+\pi-v$

$$۴\sin^۲ x-۲(\sqrt{۲}+۱)\sin x+\sqrt{۲}=۰\ ,\ \sin x=t$$

$$۴t^۲-۲(\sqrt{۲}+۱)t+\sqrt{۲}=۰\Rightarrow \Delta=۴(\sqrt{۲}+۱)^۲-۱۶\sqrt{۲}=۴(۲+۱+۲\sqrt{۲})-۱۶\sqrt{۲}$$

$$\Delta=۱۲+۸\sqrt{۲}-۱۶\sqrt{۲}=۱۲-۸\sqrt{۲}=۴(۳-۲\sqrt{۲})=۴(\sqrt{۲}-۱)^۲$$

$$t=\frac{۲(\sqrt{۲}+۱)\pm ۲(\sqrt{۲}-۱)}{۸}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۲\sqrt{۲}+۲+۲\sqrt{۲}-۲}{۸}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ t=\frac{۲\sqrt{۲}+۲-۲\sqrt{۲}+۲}{۸}=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\ ,\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

**۲۴** نکته: $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

$$\cos(۴x + \frac{\pi}{۴}) + \sin ۳x = ۰ \Rightarrow \cos(۴x + \frac{\pi}{۴}) = -\sin ۳x = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۳x)$$

$$۴x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} + ۳x)$$

$$۴x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۳x \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

$$۴x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - ۳x \Rightarrow ۷x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi - \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۷} - \frac{۳\pi}{۲۸}$$

**۲۵**

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = ۲k\pi + u \ , \ u = ۲k\pi + \pi - v$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

الف) $۲\sin^۲ x - \sqrt{۲}\sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\sin x - \sqrt{۲}) = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰ \ , \ \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow \boxed{x = k\pi} \ , \ \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} = \boxed{۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}} \end{cases}$$

ب) $۲\cos^۲ x - \sqrt{۳}\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\cos x - \sqrt{۳}) = ۰ \Rightarrow \cos x = ۰ \ , \ \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$$\cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$

**۲۶** در تابع $y = a\cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \ , \ max = |a| + c \ , \ min = -|a| + c$$

$$f(x) = m\cos(mx) + ۳ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{m} = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow m = ۸$$

$$f(x) = ۸\cos(۸x) + ۳ \rightarrow max = ۸ + ۳ = ۱۱ \ , \ min = -۸ + ۳ = -۵$$

**۲۷**

در تابع $y = a\sin bx + c$ داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \ , \ max = |a| + c \ , \ min = -|a| + c$$

$$f(x) = \sin(mx) + m \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{m} = ۴\pi \Rightarrow m = \frac{۱}{۲}$$

$$f(x) = \sin(\frac{۱}{۲}x) + \frac{۱}{۲} \Rightarrow max\ f = ۱ + \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

**۲۸**

تفاضل طول دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است، پس داریم:

$$\frac{T}{۲} = \frac{۵\pi}{۳} \Rightarrow T = \frac{۱۰\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۵} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{۳}{۵}$$

$$\left.\begin{matrix} max\ f = ۰ \Rightarrow |a| + c = ۰ \\ min\ f = -۶ \Rightarrow -|a| + c = -۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲c = -۶ \Rightarrow c = -۳ \rightarrow |a| = ۳$$

$$a < ۰ \Rightarrow a = -۳ \Rightarrow f(x) = -۳\cos(\frac{۳}{۵}x) - ۳$$

**۲۹**

نکته: $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$

نکته: $\cos u = ۰ \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow \cos x = ۰\ ,\ \cos x = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳}\ ,\ ۲\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۳}$$

جوابهای بین صفر و $۲\pi$ عبارتند از: $\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}$

**۳۰**

$$\frac{T}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow T = ۵ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۵ \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۵} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{۲\pi}{۵}$$

$$\left.\begin{matrix} max = |a| + c = ۳ \\ min = -|a| + c = -۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \rightarrow |a| = ۲ \xrightarrow{a>۰} a = ۲$$

$$f(x) = ۲\sin(\frac{۲\pi}{۵}x) + ۱$$

**۳۱**

نکته: $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha\ ,\ \cos u = ۰ \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

نکته: $\sin u = \sin v \rightarrow u = ۲k\pi + v\ ,\ u = ۲k\pi + \pi - v$

الف) $\sin ۲x + ۳\cos x = ۰ \Rightarrow ۲\sin x\cos x + ۳\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\sin x + ۳) = ۰$

$$\cos x = ۰ \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{۲}}\ ,\ ۲\sin x + ۳ = ۰ \Rightarrow \sin x = -\frac{۳}{۲}$$ غ ق ق

ب) $۴\sin(\frac{x}{۲})\cos(\frac{x}{۲}) = ۱ \Rightarrow ۲ \times ۲\sin(\frac{x}{۲})\cos(\frac{x}{۲}) = ۱ \Rightarrow ۲\sin ۲(\frac{x}{۲}) = ۱$

$$\Rightarrow ۲\sin x = ۱ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}},\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = \boxed{۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}}$$

**۳۲**

در تابع $y = a\cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ \max = |a| + c\ ,\ \min = -|a| + c$$

$$f(x) = \sqrt{۲}\cos(\frac{۱}{۳}x) - ۱ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi$$

$$\max\ f = \sqrt{۲} - ۱\ ,\ \min\ f = -\sqrt{۲} - ۱$$

$$\frac{\max f}{\min f}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{-\sqrt{۲}-۱}=\frac{۱-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}=\frac{\sqrt{۲}-۲-۱+\sqrt{۲}}{۲-۱}=-۳+۲\sqrt{۲}$$

**۳۳** در تابع‌های $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ max=|a|+c\ ,\ min=-|a|+c$$

الف) $f(x)=\sqrt{۳}\sin(۲\pi x)-۱\to T=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱$

$$max\ f=|\sqrt{۳}|-۱=\sqrt{۳}-۱\ ,\ min\ f=-|\sqrt{۳}|-۱=-\sqrt{۳}-۱$$

ب) $g(x)=\pi\cos(\frac{\pi}{۲}x)+\frac{\pi}{۲}\to T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$

$$max\ g=|\pi|+\frac{\pi}{۲}=\frac{۳\pi}{۲}\ ,\ min\ g=-|\pi|+\frac{\pi}{۲}=-\frac{\pi}{۲}$$

**۳۴**

در توابعی به فرم $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ داریم:

**الف**

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ max=|a|+c\ ,\ min=-|a|+c$$

$$f(x)=۵\sin(۶x)-۷\to T=\frac{۲\pi}{۶}=\frac{\pi}{۳}$$

$$max\ f=|۵|-۷=-۲\ ,\ min\ f=-|۵|-۷=-۱۲$$

**ب**

در توابعی به فرم $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ max=|a|+c\ ,\ min=-|a|+c$$

$$g(x)=\frac{۱}{۲}\cos(۳x)+۴\to T=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$max\ g=|\frac{۱}{۲}|+۴=\frac{۹}{۲}\qquad min\ g=-|\frac{۱}{۲}|+۴=-\frac{۱}{۲}+۴=\frac{۷}{۲}$$

**۳۵**

**الف**

دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x=۱$$

$$\Rightarrow ۱+\sin ۲x=۱\Rightarrow\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}$$

چون طرفین را به توان ۲ رساندیم، باید ریشه‌ها را در معادلهٔ اصلی امتحان کنیم. $\pi$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ در معادله صدق نمی‌کند پس دو جواب دارد.

$$x=\frac{\pi}{۲}\ ,\ ۲\pi$$

**ب**

می‌دانیم: $\sin ۲x=۲\sin x\cos x$ بنابراین:

$$\sin ۲x+\cos x=۰\Rightarrow ۲\sin x\cos x+\cos x=۰$$

$$\Rightarrow\cos x(۲\sin x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}۱)\ \cos x=۰=\cos\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ \ (k\in\mathbb{Z})\\ ۲)\ ۲\sin x+۱=۰\Rightarrow\sin x=\frac{-۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=\begin{cases}۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z})\\ ۲k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{۶})=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}\end{cases}$$

**پ**

$$\cos^{۴}(x+\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{۲})=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow$$

$$۱)\ \cos(x+\frac{\pi}{۲})=+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\cos(\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x+\frac{\pi}{۲}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow x=\begin{cases}۲k\pi-\frac{\pi}{۴} & (k\in\mathbb{Z})\\ ۲k\pi-\frac{۳\pi}{۴} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

۲) $\cos(x+\frac{\pi}{۲})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\cos(\frac{۳\pi}{۴})\Rightarrow x+\frac{\pi}{۲}=۲k\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$

$$\Rightarrow x=\begin{cases}۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۲}\\ ۲k\pi-\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۲}\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}۲k\pi+\frac{\pi}{۴} & (k\in\mathbb{Z})\\ ۲k\pi-\frac{۵\pi}{۴} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

**ت**

با تقسیم طرفین معادله بر ۲ داریم:

$$\sin(۳\pi x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow ۳\pi x=\begin{cases}۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\\ ۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳}\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}\frac{۲k\pi}{۳\pi}+\frac{\pi}{۹\pi}\\ \frac{۲k\pi}{۳\pi}+\frac{\pi-\frac{\pi}{۳}}{۳\pi}\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}\frac{۲k}{۳}+\frac{۱}{۹} & (k\in\mathbb{Z})\\ \frac{۲k}{۳}+\frac{۲}{۹} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

**ث**

معادلهٔ داده‌شده را به معادله‌ای درجهٔ ۲ تبدیل می‌کنیم به کمک رابطهٔ $\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱$ بنابراین:

$$۴\cos ۲x-۸\cos x+۴=۰\Rightarrow ۴(\cos ۲x+۱)-۸\cos x=۰$$

$$۴(۲\cos^۲x)-۸\cos x=۰\Rightarrow ۸\cos^۲x-۸\cos x=۰$$

$$\Rightarrow \cos^۲x-\cos x=۰\Rightarrow \cos x(\cos x-۱)=۰$$

۱) $\cos x=۰=\cos(\frac{\pi}{۲})\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\quad(k\in\mathbb{Z})$

۲) $\cos x-۱=۰\Rightarrow\cos x=۱=\cos(۰)\Rightarrow x=۲k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

**۳۶**

**الف**

نکته:

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲x}$$

به کمک رابطهٔ فوق ظاهر معادله را تغییر می‌دهیم:

$$\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲x}=۳\tan x$$

۱) $\tan x=۰=\tan(۰)\Rightarrow x=k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$

۲) $\tan x\neq۰\Rightarrow\frac{۲\cancel{\tan x}}{۱-\tan^۲x}=۳\cancel{\tan x}\Rightarrow\frac{۲}{۱-\tan^۲x}=۳$

$$\Rightarrow ۳-۳\tan^۲x=۲\Rightarrow ۳\tan^۲x-۱=۰\Rightarrow\tan^۲x=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow\tan x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\begin{cases}۱)\ \tan x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan(\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\quad(k\in\mathbb{Z})\\ ۲)\ \tan x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan(-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۶}\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

**ب**

با مرتب کردن معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$\tan^۳x-\tan^۲x-\tan x+۱=۰\xrightarrow{\tan x=t}$$

$$t^۳-t^۲-t+۱=۰\Rightarrow t^۲(t-۱)-(t-۱)=۰$$

$$\Rightarrow(t-۱)(t^۲-۱)=۰\Rightarrow(t-۱)^۲(t+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱)\ t=\tan x=-۱=\tan(-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\quad(k\in\mathbb{Z})\\ ۲)\ t=\tan x=۱=\tan(\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

**پ**

با جای‌گذاری $\tan^۲x=m$ در معادله داریم:

$$m^۲-۲m-۳=۰\Rightarrow(m+۱)(m-۳)=۰\Rightarrow$$

۱) $m=\tan^۲x=-۱\rightarrow$ امکان ندارد.

۲) $m=\tan^۲x=۳\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{۳}\Rightarrow\begin{cases}\tan x=\sqrt{۳}=\tan(\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\quad(k\in\mathbb{Z})\\ \tan x=-\sqrt{۳}=\tan(\frac{-\pi}{۳})\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۳}\quad(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

**ت**

نکته: $\cos ۳x=۴\cos^۳x-۳\cos x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۳x=۴\cos^۲x\Rightarrow ۴\cos^۳x-۳\cos x=۴\cos^۲x$$

$\Rightarrow ۴\cos^۳x - ۴\cos^۲x - ۳\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۴\cos^۲x - ۴\cos x - ۳) = ۰$

$\Rightarrow ۱)\ \cos x = ۰ = \cos\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}\ \ (k \in \mathbb{Z})$

$۲)\ ۴\cos^۲x - ۴\cos x - ۳ = ۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۱۶ + ۴۸ = ۶۴} = ۸$

$\Rightarrow \cos x = \begin{cases} \frac{۴+۸}{۸} = \frac{۳}{۲} \rightarrow & \text{نا ممکن است.} \\ \frac{۴-۸}{۸} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{۲\pi}{۳}) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

**ث**

نکته: $۱ - \cos ۲x = ۲\sin^۲x$ ، $\sin ۳x = ۳\sin x - ۴\sin^۳x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

$۳\sin x - ۴\sin^۳x + ۲\cos ۲x = ۲ \Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳x = ۲ - ۲\cos ۲x = ۲(۱ - \cos ۲x) \quad (*)$

$\Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳x = ۲ \times ۲\sin^۲x \Rightarrow ۴\sin^۳x + ۴\sin^۲x - ۳\sin x = ۰$

$\Rightarrow \sin x(۴\sin^۲x + ۴\sin x - ۳) = ۰$

$\Rightarrow ۱)\ \ \sin x = ۰ = \sin(۰) \Rightarrow x = k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

$۲)\ ۴\sin^۲x + ۴\sin x - ۳ = ۰ \Rightarrow (۲\sin x + ۳)(۲\sin x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-۳}{۲} \rightarrow & \text{ناممکن است.} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin(\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = \begin{cases} ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

**۳۷**

**الف**

نکته: $\begin{cases} ۱ + \cos x = ۲\cos^۲\frac{x}{۲} \\ \sin x = ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} \end{cases}$ بنابراین:

$\frac{۱ + \cos x}{\sin x} = \frac{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} = \frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}} = \frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}$

**ب**

می‌دانیم: $\begin{cases} \sin^۲x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲} \\ \cos^۲x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲} \end{cases}$ بنابراین:

$\frac{۱ + \cos x}{۱ - \cos x} = \frac{۲\cos^۲(\frac{x}{۲})}{۲\sin^۲(\frac{x}{۲})} = \cot^۲(\frac{x}{۲}) = \frac{۱}{\tan^۲(\frac{x}{۲})}$

**پ**

نکته: $(\sin\frac{x}{۲} + \cos\frac{x}{۲})^۲ = ۱ + \sin x$ بنابراین:

$\frac{\sin x}{۱ + \sin x} = \frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{(\sin\frac{x}{۲} + \cos\frac{x}{۲})^۲} = \frac{۲}{\frac{(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^۲}{\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}} = \frac{۲}{(\frac{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}})(\frac{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}})}$

$= \frac{۲}{(۱ + \frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}})(۱ + \tan\frac{x}{۲})} = \frac{۲}{۱ + \tan\frac{x}{۲} + \frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}} + ۱}$

$= \frac{۲}{۲ + \tan\frac{x}{۲} + \frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}} = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{\tan^۲\frac{x}{۲} + ۲\tan\frac{x}{۲} + ۱}$

**۳۸**

**الف**

$\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

**ب**

$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲x - \cos x = ۰$

$\Rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲\cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$

**پ**

$$\cos x = \cos ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

**ت**

$$\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱ \Rightarrow \cos ۲x = \sin x$$

با استفاده از رابطهٔ $\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x$ داریم:

$$\cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} - x)$$

$$۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

$$۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} + x \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

**ث**

$$\cos^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۱ - \sin^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x + \sin x - \frac{۳}{۴} = ۰$$

با فرض $\sin x = t$ داریم:

$$t^۲ + t - \frac{۳}{۴} = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ - ۴ \times ۱ \times (-\frac{۳}{۴}) = ۴ \Rightarrow t = \frac{-۱ \pm ۲}{۲} = \frac{۱}{۲}, -\frac{۳}{۲}$$

$$\sin x = -\frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق} \ , \ \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

$$x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$$

**ج**

$$\sin x - \cos ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \sin x \Rightarrow \cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x)$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} + x \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

**چ**

$$\tan(۲x - ۱) = ۰ \Rightarrow \tan(۲x - ۱) = \tan ۰ \Rightarrow ۲x - ۱ = k\pi + ۰ \Rightarrow ۲x = ۱ + k\pi \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} + \frac{k\pi}{۲}$$

**ح**

$$\tan ۳x = \tan \pi x \Rightarrow ۳x = k\pi + \pi x \Rightarrow ۳x - \pi x = k\pi \Rightarrow x(۳ - \pi) = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳ - \pi}$$

**۳۹**

$$\sin ۳x = \sin ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \Rightarrow x = ۲k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ ۳x = (۲k + ۱)\pi - ۲x \Rightarrow x = \frac{(۲k + ۱)\pi}{۵} \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**۴۰**

می‌دانیم: $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$

$$۲\cos^۲ x - ۱ + \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

**۴۱** می‌دانیم تابع $y = a\sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲$$

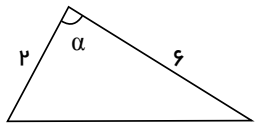
$$\begin{cases} |a| + c = ۳ \\ -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} |a| = ۳ \\ c = ۰ \end{matrix}$$

$y = ۳\sin(۲x)$ یا $y = -۳\sin(۲x)$ یا $y = ۳\sin(-۲x)$ یا $y = -۳\sin(-۲x)$

**۴۲** مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع، پس داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶\sin\alpha=۳\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow\alpha=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\ (۱)\ ,\ \alpha=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\ (۲)$$




با توجه به اینکه زاویهٔ مثلث بین صفر تا $۱۸۰^\circ$ می‌باشد، داریم:

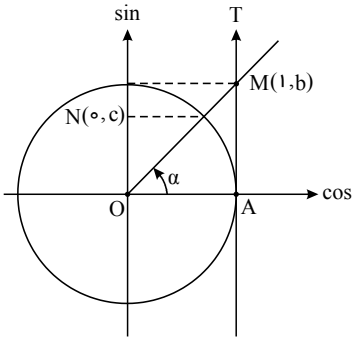
$$(۱)\ k=۰\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۶}\ ,\ (۲)\ k=۰\Rightarrow\alpha=\frac{۵\pi}{۶}$$

بنابراین دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

**۴۳** الف) $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ $\alpha$ را در ناحیهٔ اول در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\sin\alpha=ON=y_N=c>۰$$
$$\tan\alpha=AM=y_M=b>۰$$



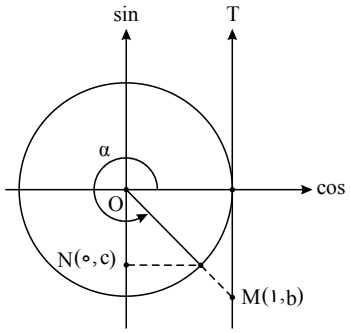

از روی شکل واضح است که:

$$c<b\Rightarrow\sin\alpha<\tan\alpha$$

ب) $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویهٔ $\alpha$ را در ناحیهٔ چهارم در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\sin\alpha=y_N=c<۰$$
$$\tan\alpha=y_M=b<۰$$




از روی شکل واضح است که:

$$b<c\Rightarrow\tan\alpha<\sin\alpha$$

**۴۴**

با استفاده از دورهٔ تناوب توابع داریم:

الف) $y=\sin\pi x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲\Rightarrow$ (۴) نمودار  ب) $y=۲-\cos\frac{۱}{۲}x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi\Rightarrow$ (۲) نمودار

پ) $y=\sin ۲x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\Rightarrow$ (۳) نمودار  ت) $y=۱-\cos ۲x\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\Rightarrow$ (۱) نمودار

**۴۵** می‌دانیم: $a^۴+b^۴=(a^۲+b^۲)^۲-۲a^۲b^۲$؛ بنابراین:

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)^۲-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=۱-\frac{۴\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}{۲}$$

$$=۱-\frac{(\sin ۲\alpha)^۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\sin^۲ ۲\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin^۲ ۲\alpha=۱\quad(۱)$$

$$۱+\cot^۲ ۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲ ۲\alpha}\xrightarrow{(۱)}۱+\cot^۲ ۲\alpha=۱\Rightarrow\cot ۲\alpha=۰$$

**۴۶** ابتدا زاویهٔ $۲\alpha$ را برحسب $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ می‌نویسیم:

$$۲\alpha = (\alpha+\beta)+(\alpha-\beta) \xrightarrow[\text{می‌گیریم.}\ \tan]{\text{از طرفین}} \tan ۲\alpha = \tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))$$

$$\Rightarrow \tan ۲\alpha = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$\Rightarrow \tan ۲\alpha = \frac{۳+۲}{۱-۳\times(+۲)} = \frac{۵}{-۵} = -۱$$

**۴۷**

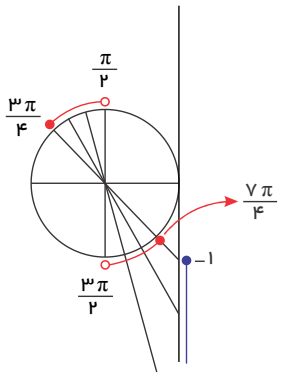
$$۹۰^\circ < \alpha < \beta < ۱۸۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha > \sin\beta \Rightarrow A = \sin\alpha - \sin\beta > ۰ \\ \tan\beta > \tan\alpha \Rightarrow B = \tan\alpha - \tan\beta < ۰ \end{cases}$$

**۴۸**

$$\frac{\pi}{|a|}$$

**۴۹** در دایرهٔ مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها کوچک‌تر یا مساوی $-۱$ است.

$$\tan\alpha \le -۱ \Rightarrow \frac{\pi}{۲} < \alpha \le \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad \frac{۳\pi}{۲} < \alpha \le \frac{۷\pi}{۴}$$




**۵۰**

**نکته:** $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin\alpha < \tan\alpha$

توجه کنید که در ناحیهٔ اول سینوس و تانژانت هر دو مثبت هستند، پس داریم:

$$۰ < \sin\alpha < ۱ \Rightarrow ۰ < ۲m-۱ < ۱ \Rightarrow ۱ < ۲m < ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < m < ۱ \quad (۱)$$

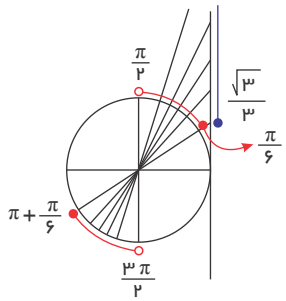
$$\tan\alpha > ۰ \Rightarrow m+۱ > ۰ \Rightarrow m > -۱ \quad (۲)$$

$$sin\ \alpha < \tan\alpha \Rightarrow ۲m-۱ < m+۱ \Rightarrow m < ۲ \quad (۳)$$

$$(۱)\cap(۲)\cap(۳) \Rightarrow \frac{۱}{۲} < m < ۱$$

**۵۱** در دایرهٔ مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، که داریم:

$$\tan\alpha \ge \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} \le \alpha < \frac{\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad \frac{۷\pi}{۶} \le \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$$




**۵۲** **نکته:** $\tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

$$\tan^۳ x - \tan^۲ x + ۱ - \tan x = ۰ \Rightarrow \tan^۲ x(\tan x - ۱) - (\tan x - ۱) = ۰$$

$$(\tan x - ۱)(\tan^۲ x - ۱) = ۰ \Rightarrow (\tan x - ۱)(\tan x - ۱)(\tan x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow (\tan x - ۱)^۲(\tan x + ۱) = ۰ \Rightarrow \tan x = ۱ \ , \ \tan x = -۱$$

$$\tan x = ۱ = \tan \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$
$$\tan x = -۱ = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

**۵۳**

$\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند، پس داریم:

$$\tan^۲ x - (۲m + ۱)\tan x + ۲m = ۰$$

$$\tan\alpha + \tan\beta = S = -\frac{b}{a} = -\frac{-(۲m+۱)}{۱} = ۲m + ۱$$

$$\tan\alpha \cdot \tan\beta = P = \frac{c}{a} = ۲m$$

$$\tan(\alpha+\beta) = -\frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta} = -\frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{۲m+۱}{۱-۲m} = -\frac{۵}{۳}$$

$$۶m + ۳ = -۵ + ۱۰m \Rightarrow ۸ = ۴m \Rightarrow m = ۲$$

**۵۴**

**نکته:** $\tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

$$\tan^۲ x + \sqrt{۳}\tan x = ۰ \Rightarrow \tan x(\tan x + \sqrt{۳}) = ۰ \Rightarrow \tan x = ۰ \ , \ \tan x = -\sqrt{۳}$$
$$\tan x = ۰ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰ \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$
$$\tan x = -\sqrt{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۳}}$$

**۵۵** **می‌دانیم:** $\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳ \Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - (\frac{۵\pi}{۸} - x)) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - \frac{۵\pi}{۸} + x) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(x - \frac{\pi}{۸}) - ۳ = ۰ \ , \ \sin(x - \frac{\pi}{۸}) = t$$

$$\Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \ , \ t = -۳$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{۸}) = -۳ \text{ غ ق ق} \ , \ \sin(x - \frac{\pi}{۸}) = ۱ \Rightarrow x - \frac{\pi}{۸} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۸}$$

**۵۶**

$$\sqrt{۳}\tan x = ۲\sin x \Rightarrow \sqrt{۳} \times \frac{\sin x}{\cos x} = ۲\sin x \Rightarrow \sqrt{۳}\sin x = ۲\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\cos x - \sqrt{۳}\sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x - \sqrt{۳}) = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰ \ , \ \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

**نکته:** $\cos u = \cos v \rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

**۵۷**

نکته: $\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$

نکته: $\tan u=\tan v\rightarrow u=k\pi+v$

نکته: $\sin u=۱\rightarrow u=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

الف) $\tan(۱+\frac{x}{۲})\tan(۱-\frac{x}{۳})=۱\Rightarrow\tan(۱+\frac{x}{۲})=\frac{۱}{\tan(۱-\frac{x}{۳})}$

$\Rightarrow\tan(۱+\frac{x}{۲})=\cot(۱-\frac{x}{۳})=\tan(\frac{\pi}{۲}-(۱-\frac{x}{۳}))\Rightarrow\tan(۱+\frac{x}{۲})=\tan(\frac{\pi}{۲}-۱+\frac{x}{۳})$

$\Rightarrow ۱+\frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}-۱+\frac{x}{۳}\Rightarrow\frac{x}{۲}-\frac{x}{۳}=k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲\Rightarrow x=۶k\pi+۳\pi-۱۲$

ب) $۲\cos^۲x=\sin x-۱\Rightarrow۲(۱-\sin^۲x)=\sin x-۱\Rightarrow۲-۲\sin^۲x=\sin x-۱$

$\Rightarrow ۲\sin^۲x+\sin x-۳=۰\ ,\ \sin x=t\Rightarrow ۲t^۲+t-۳=۰\Rightarrow t=۱\ ,\ t=-\frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow\sin x=-\frac{۳}{۲}$ غ ق ق $\ ,\ \sin x=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

**۵۸**

$\frac{T}{۲}=\frac{۴\pi}{۳}-۰\Rightarrow T=\frac{۸\pi}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۸\pi}{۳}\Rightarrow|b|=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{b>۰}b=\frac{۳}{۴}$

$\left.\begin{array}{l}max\ f=|a|+c=۵\\min\ f=-|a|+c=-۲\end{array}\right\}\Rightarrow ۲c=۳\Rightarrow c=\frac{۳}{۲}\rightarrow|a|=\frac{۷}{۲}\xrightarrow{a>۰}a=\frac{۷}{۲}$

$f(x)=\frac{۷}{۲}\cos(\frac{۳}{۴}x)+\frac{۳}{۲}$

**۵۹** می‌دانیم: $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha\ ,\ \tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$

می‌دانیم: $\sin u=\sin v\Rightarrow u=۲ku+v\ ,\ u=۲k\pi+\pi-v$

می‌دانیم: $\tan u=\tan v\Rightarrow u=k\pi+v$

الف) $\sin(x-\frac{۲\pi}{۳})=\cos۲x\Rightarrow\sin(x-\frac{۲\pi}{۳})=\sin(\frac{\pi}{۲}-۲x)$

$x-\frac{۲\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{۲\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}$

$\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{۷\pi}{۱۸}$

$x-\frac{۲\pi}{۳}=۲k\pi+\pi-(\frac{\pi}{۲}-۲x)\Rightarrow x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}+۲x+\frac{۲\pi}{۳}$

$\Rightarrow -x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{۲\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\Rightarrow x=-۲k\pi-\frac{۷\pi}{۶}$

ب) $\tan(x+\frac{\pi}{۷})=\cot(\frac{۲\pi}{۷})\Rightarrow\tan(x+\frac{\pi}{۷})=\tan(\frac{\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۷})$

$\Rightarrow\tan(x+\frac{\pi}{۷})=\tan(\frac{۳\pi}{۱۴})\Rightarrow x+\frac{\pi}{۷}=k\pi+\frac{۳\pi}{۱۴}$

$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۴}$

**۶۰**

نکته: $\cos u=\cos v\Rightarrow u=۲k\pi\pm v$

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{x}{۴}+\pi)\Rightarrow x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi\pm(\frac{x}{۴}+\pi)$$

$$x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{x}{۴}+\pi\Rightarrow x-\frac{x}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\frac{۳x}{۴}=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$$

$$x=\frac{۸k\pi}{۳}+\pi\xrightarrow{۰\leqslant x\leqslant\pi}\boxed{x=\pi}$$

$$x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{x}{۴}-\pi\Rightarrow\frac{۵x}{۴}=۲k\pi-\pi-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{۵\pi}{۴}$$

$$x=\frac{۸k\pi}{۵}-\pi\xrightarrow{۰\leqslant x\leqslant\pi}x=\frac{۸\pi}{۵}-\pi=\frac{۳\pi}{۵}\Rightarrow\boxed{x=\frac{۳\pi}{۵}}$$

**معادله در بازهٔ $[۰,\pi]$ دارای ۲ جواب است.**

**۶۱**

$$-۱\leq\cos ۲x\leq ۱\Rightarrow-\pi\leq\pi\cos ۲x\leq\pi\Rightarrow-\pi-\frac{\pi}{۲}\leq\pi\cos ۲x-\frac{\pi}{۲}\leq\pi-\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow-\frac{۳\pi}{۲}\leq\pi\cos ۲x-\frac{\pi}{۲}\leq\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f(x)=[\pi\cos ۲x-\frac{\pi}{۲}]=-۵,-۴,\cdots,۰,۱$$

$$R_f=\{-۵,-۴,\cdots,۰,۱\}$$

**۶۲**

نکته: $\cos u=\cos v\Rightarrow u=۲k\pi\pm v\ ,\ \cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$

$$\sin(\frac{x}{۲})+\cos(\frac{x}{۲})=۰\Rightarrow\cos(\frac{x}{۲})=-\sin(\frac{x}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲})$$

$$\frac{x}{۲}=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲})\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{۲}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{x}{۲}\Rightarrow ۲k\pi+\frac{\pi}{۲}=۰ & \text{نادرست}\\ \frac{x}{۲}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-\frac{x}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} & \text{جواب}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲}\ [۰,۲\pi]\text{ جوابهای واقع در بازهٔ}$$

**۶۳**

نکته: $\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha,\tan u=\tan v\rightarrow u=k\pi+v$

$$\tan ۴x=\cot(\frac{\pi}{۳}+۴x)\Rightarrow\tan ۴x=\tan(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۳}+۴x))$$

$$\Rightarrow\tan ۴x=\tan(\frac{\pi}{۶}-۴x)\Rightarrow ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۶}-۴x$$

$$\Rightarrow ۸x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۸}+\frac{\pi}{۴۸}$$

**۶۴** نکته: $\cos u=\cos v\Rightarrow u=۲k\pi\pm v$

$$\cos ۴x\cos x-\sin ۴x\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos(۴x+x)=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۵x=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow ۵x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵}\pm\frac{\pi}{۱۵}$$

**۶۵**

**الف**

$$\cos^۲x=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{۱}{۲}=\cos(\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} & (k\in\mathbb{Z})\\ \text{یا}\\ \cos x=\frac{-۱}{۲}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})\Rightarrow x=۲k\pi\pm(\pi-\frac{\pi}{۳})=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

**ب**

$$\sin(x+\frac{۲\pi}{۳})=-۱=\sin(\frac{-\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱)\ x+\frac{۲\pi}{۳}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{۷\pi}{۶} & (k\in\mathbb{Z})\\ ۲)\ x+\frac{۲\pi}{۳}=۲k\pi+\pi-(-\frac{\pi}{۲})\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۳}\rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

**پ**

$$\tan ۲x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan(-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow ۲x=k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

**۶۶**

دو طرف معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

**الف**

$$۲\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow ۲x=\begin{cases}۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\\ ۲k\pi+(\pi-\frac{\pi}{۳})\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}k\pi+\frac{\pi}{۶} & (k\in\mathbb{Z})\\ k\pi+\frac{\pi}{۳} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

**ب**

می‌دانیم: $\sin\frac{\pi}{۲}=۱$ است بنابراین:

$$(\sin x-۱)(\sin x+۱)=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow\sin^۲x-۱=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow$$

$$\sin^۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۴})\Rightarrow x=\begin{cases}۲k\pi+\frac{\pi}{۴} & (k\in\mathbb{Z})\\ ۲k\pi+(\pi-\frac{\pi}{۴})=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}\\ \sin x=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(\frac{-\pi}{۴})\Rightarrow x=\begin{cases}۲k\pi-\frac{\pi}{۴} & (k\in\mathbb{Z})\\ ۲k\pi+(\pi+\frac{\pi}{۴})=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}\end{cases}$$

**۶۷**

می‌دانیم: $\begin{cases}\sin^۲x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\\ \cos^۲x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\end{cases}$ بنابراین:

**الف**

$$\sin^۲x\cos^۲x=(\frac{۱-\cos ۲x}{۲})(\frac{۱+\cos ۲x}{۲})=\frac{۱-(\cos ۲x)^۲}{۴}$$

**ب**

می‌دانیم: $\sin^۲x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}$ بنابراین:

$$\sin^۲x+۱=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}+۱=\frac{۳-\cos ۲x}{۲}$$

**پ**

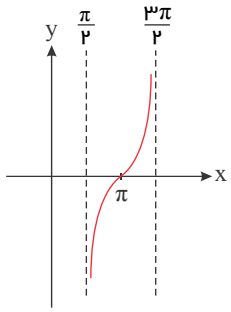
می‌دانیم: $\cos^۲x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}$ بنابراین:

$$\cos^۴x=(\frac{۱+\cos ۲x}{۲})^۲=\frac{(\cos ۲x)^۲+۲\cos ۲x+۱}{۴}$$

**۶۸**

**الف**

درست است؛ زیرا با توجه به شکل واضح است که تابع $\tan x$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است.




**ب** نادرست است؛ زیرا می‌دانیم دامنهٔ تابع تانژانت مجموعهٔ $D=\{x\in\mathbb{R}|x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ است.

**۶۹**

**الف** نادرست، تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست.

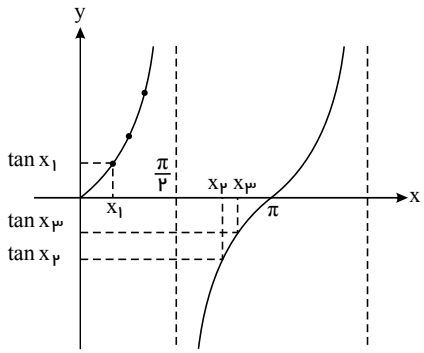
**ب** نادرست، تابع تانژانت در هیچ بازه‌ای نزولی نمی‌باشد.

**پ** درست، به‌عنوان مثال با توجه به نمودار تانژانت اگر بازهٔ $[0,\pi]$ را در نظر بگیریم داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \tan x_1 > \tan x_2$$

بنابراین تابع تانژانت در این بازه غیرصعودی است. توجه کنید که این بدان معنی نیست که تابع تانژانت در این بازه نزولی است زیرا برای $x_2$ و $x_3$ از این بازه داریم:

$$x_2 < x_3 \Rightarrow \tan x_2 < \tan x_3$$




در کل تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم باشد، غیریکنواست.

**ت** درست، تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم نباشد یعنی بازه‌ای که تابع تانژانت در آن بازه تعریف شده باشد، صعودی (اکیداً صعودی) است.

**۷۰**

**الف**

**نکته:** $\tan u = \tan v \Rightarrow u = ku + v$

$$\tan x = ۳\cot x \xrightarrow{\times \tan x} \tan^۲ x = ۳\cot x \tan x = ۳ \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{۳} = \tan\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ \tan x = -\sqrt{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

**ب**

**نکته:** $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k \pm v$

$$۲\sin^۲ x = ۳\cos x \Rightarrow ۲(۱ - \cos^۲ x) = ۳\cos x \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x = ۳\cos x$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x + ۳\cos x - ۲ = ۰ \ , \ \cos x = t \Rightarrow ۲t^۲ + ۳t - ۲ = ۰ \ , \ \Delta = ۹ + ۱۶ = ۲۵$$

$$t = \frac{-۳ \pm ۵}{۴} \begin{cases} t = -۲ \Rightarrow \cos x = -۲ \ \text{غ ق ق} \\ t = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

**۷۱**

$$-۲\sin^۲ x - \sin x + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin x = \frac{-۳}{۲} \quad (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

**۷۲**

$$\text{دورهٔ تناوب} : T = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow ۳ = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$|a| = ۱ \ , \ c = ۴ \Rightarrow y = \sin\frac{۲\pi}{۳}x + ۴ \ \text{یا} \ y = -\sin\frac{۲\pi}{۳}x + ۴$$

**۷۳** $\mathbb{R}$

**۷۴**

$$\frac{۱}{۲}\sin ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۸} & , k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi + \frac{۳\pi}{۸} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**۷۵**

$$\cos ۳x - \cos x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \\ ۳x = ۲k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi \\ ۴x = ۲k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{۲} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**۷۶**

$$T = \frac{\pi}{۲} \quad f(x) = a\cos bx + c$$

$$\frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow |\, b\,| = ۴$$

$$max = ۷ = |\, a\,| + c$$

$$min = -۵ = -|\, a\,| + c$$

$$c = \frac{۷ + (-۵)}{۲} = ۱ \Rightarrow ۷ = |\, a\,| + ۱ \Rightarrow |\, a\,| = ۶$$

باتوجه به نمودار $a$ و $b$ هردو مثبت‌اند پس:

$$f(x) = ۶\cos ۴x + ۱$$

**۷۷** گزینهٔ «۱»، دورهٔ تناوب $\tan x$، $\pi$ هست پس دورهٔ تناوب $f(x) = \tan(a\pi x + \frac{\pi}{۲})$ برابر است با $T = \frac{\pi}{|a\pi|} = \frac{۱}{|a|}$. از روی نمودار هم دورهٔ تناوب برابر است با $T = \frac{۴}{۳}$

بنابراین:

$$\frac{۱}{|a|} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow |\, a\,| = \frac{۳}{۴} \Rightarrow a = \pm\frac{۳}{۴}$$

گه چون تابع tan، به‌صورت رسم شده یعنی نزولی است پس $a = -\frac{۳}{۴}$ مورد قبول است.

**۷۸**

$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**۷۹** می‌دانیم: $۱ - \cos^۲ x = \sin^۲ x$

با جای‌گذاری در معادلهٔ اصلی سؤال داریم:

$$۲(۱ - \cos^۲ x) + ۹\cos x + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x + ۹\cos x + ۳ = ۰ \Rightarrow -۲\cos^۲ x + ۹\cos x + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-۹ \pm \sqrt{۸۱ - ۴(-۲)(۵)}}{۲(-۲)} \Rightarrow \cos x = \frac{-۹ \pm ۱۱}{-۴} \rightarrow \begin{cases} \cos x = ۵ & \text{غ‌ق‌ق} \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} & \text{ق‌ق} \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm ۲\frac{\pi}{۳} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**۸۰**

$$\cos ۳x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{\pi}{۱۸} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**۸۱**

می‌دانیم دورهٔ تناوب $y = a\cos bx + c$ برابر است با: $\frac{۲\pi}{|b|}$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

**الف**

$$y = ۸\cos(\frac{x}{۳})$$

دورهٔ تناوب: $\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi$

**۸۲**

نادرست- معادله را ساده‌تر می‌کنیم پس

**الف**

$$\sqrt{۸}\cos x = \sqrt{۲} \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad k \in \mathbb{Z}$$

| $k$ | ۰ | ۱ | $-۱$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۳}$ | $\times ۲\pi + \frac{\pi}{۳}$ | $\checkmark -۲\pi + \frac{\pi}{۳}$ |
| | $\checkmark \checkmark$ | $\times ۲\pi - \frac{\pi}{۳}$ | $\checkmark -۲\pi - \frac{\pi}{۳}$ |

$\Rightarrow$

**۸۳**

**الف**

$$\tan^۲ x = ۳ \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ \tan x = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases} , k \in \mathbb{Z}$$

**ب**

$\sin ۲x = a$

$$۲a^۲ - a - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = ۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \text{یا} \\ a = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

یا

$$a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \sin(-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} \end{cases} , \quad k \in \mathbb{Z}$$