۱) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۰$ با شرط $i = ۲,۳,۴,۵$, $x_i > ۰$ را محاسبه کنید.

۲) حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقهٔ کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل style="">۲۰ نفر از آنها، روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیرکبیسه در نظر بگیرید.)

۳) اگر داشته باشیم $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{۵,۶,۷,۸,۹\}$، در این‌صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۴) در جعبه‌ای ۴ گوی زرد، ۶ گوی مشکی، ۸ گوی سبز و ۱۰ گوی آبی داریم. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن شویم که حداقل ۷ گوی خارج‌شده هم‌رنگ هستند؟

۵) آیا دو مربع لاتین زیر متعامدند؟

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۳	۱	۴	۲
۲	۴	۱	۳

۶) ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

۷) ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.
(راهنمایی: فرض کنید $(m, m+۱) = d$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d = ۱$.)

۸) یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

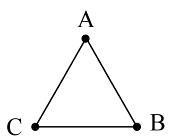
۹) اگر $a\,, b \in \mathbb{N}$ و $(a\,, ۱۳) \neq ۱$ و $(۲a\,, b) = ۱$ آنگاه $[۱۳b,\, ۲a]$ را محاسبه کنید:

۱۰) فرض کنید $(۶a - ۴\,, ۸a + ۲) = d$ آنگاه d چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

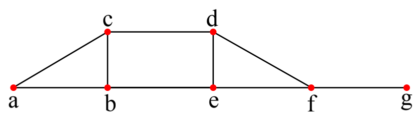
۱۱) ثابت کنید اگر n برابر حاصلضرب دو عدد زوج متوالی باشد آنگاه $n + ۱$ مربع کامل است.

۱۲) به ازای چند عدد صحیح از n رابطهٔ $n + ۱ \mid ۷n + ۵$ برقرار است؟

۱۳) رأس‌های مثلث متساوی الاضلاع مقابل با نام ABC را به چند طریق می توان با رنگ‌های قرمز و آبی و سبز رنگ آمیزی کرد؟

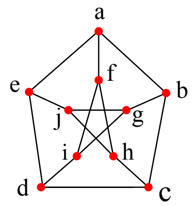


۱۴) در گراف روبه‌رو، تمام دورها را بنویسید.



۱۵) در گراف $K_۵$، بین ۲ رأس دلخواه و متمایز u, v چند مسیر متفاوت وجود دارد؟

۱۶ برای گراف مقابل، سه مجموعهٔ احاطه‌گر بنویسید.



۱۷ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{ae,bc,bd,be,ec,ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های «الف» تا «ج» پاسخ دهید.

الف مجموعهٔ همسایگی باز رأس d را بنویسید.

ب اندازهٔ گراف را مشخص کنید.

پ مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

۱۸ متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

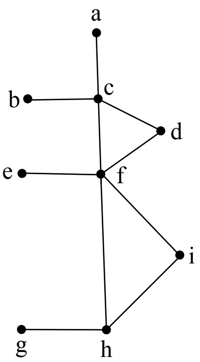
۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

۱۹ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۲۰ برای گراف روبه‌رو:

الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید.

ب) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد.



پاسخنامه تشریحی

۱

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌های معادله} = \binom{n+k-1}{k-1}} \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

۲

طبق تعمیم اصل لانهٔ کبوتری، تعداد لانه‌ها، همان روزهای سال می‌باشد: $n = 365$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، حداقل تعداد تماشگران برابر است با:

$$K + 1 = 20 \Rightarrow k = 19$$
$$kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936$$

۳

تعداد انتخاب دو رقم از A:

$$\binom{4}{2} = 6$$

تعداد انتخاب سه رقم از B:

$$\binom{5}{3} = 10$$

جایگشت ۵ رقم:

$$5! = 120$$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$6 \times 10 \times 120 = 7200$$

۴ در بدترین حالت، همهٔ گوی‌های زرد و مشکی و ۶ گوی سبز و ۶ گوی آبی خارج کرده‌ایم و حالا با خارج کردن یک گوی دیگر به مقصودمان می‌رسیم. پس حداقل باید ۲۳ گوی خارج کنیم.

۵

دیگر نوشتن اعداد مربع مقابل را ادامه نمی‌دهیم. چون ۴۳ تکرار شد و همین کافی است تا بگوییم دو مربع لاتین متعامد نیستند.

۴۴	۳۳	۲۲	۱۱
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۳۱	۱۴	۴۳	

۶ اعداد صحیح متوالی دلخواه n، $n+1$ و $n-1$ را در نظر می‌گیریم با توجه به تمرین ۱۱ نشان دادیم که حاصل‌ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است از طرفی می‌دانیم حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی نیز بر ۲ بخش‌پذیر است؛ پس حاصل‌ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی نیز مضرب ۲ می‌باشد؛ در نتیجه $n(n+1)(n-1)$ بر $3!$ بخش‌پذیر است.

۷ الف) فرض کنید $(m, m+1) = d$ آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} d|m \\ d|m+1 \end{matrix}\right\} \rightarrow d|m+1-m \rightarrow d|1$$

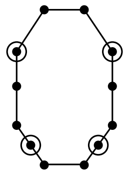
حال چون $d > 0$ می‌توان نتیجه گرفت $d = 1$ یعنی عدد دو صحیح و متوالی m و $m+1$ نسبت به هم اول‌اند.

ب) فرض کنید $(2m+1, 2m+3) = d$ آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} d|2m+1 \\ d|2m+3 \end{matrix}\right\} \rightarrow d|2m+3-2m-1 \rightarrow d|2$$

با توجه به اینکه $d > 0$ می‌توان نتیجه گرفت $d = 1$ یا $d = 2$ چون هیچ عدد فردی مقسوم‌علیه زوج ندارد بنابراین $d = 1$.

۸ عدد احاطه‌گری حداقل برابر ۴ است، زیرا $4 = \left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil \le \gamma(G)$. پس کافی است گراف ۲-منتظم مرتبهٔ ۱۲ را رسم کنیم که عدد احاطه‌گری آن ۴ باشد.



(۹) می دانیم ۱۳ عددی اول است چون $(a\ ,\ ۱۳)\neq ۱$ پس $(a\ ,\ ۱۳)=۱۳$ بنابراین $a=۱۳k$.

همینطور از اینکه $(۲a\ ,\ b)=۱$ می توان نتیجه گرفت $۲\nmid b\ ,\ ۱۳\nmid b\ ,\ (a\ ,\ b)=۱$ حال می توان نوشت:

$$[۱۳b\ ,\ ۲a]=[۱۳b\ ,\ ۲\times ۱۳k]=۲\times ۱۳\times k\times b=۲ab$$

(۱۰)

$$\left.\begin{array}{l} d|۶a-۴\rightarrow d|۲۴a-۱۶ \\ d|۸a+۲\rightarrow d|۲۴a+۶ \end{array}\right\}\rightarrow d|۲۲$$

بنابراین $d\in\{۱\ ,\ ۲\ ,\ ۱۱\ ,\ ۲۲\ ,\}$ با توجه به اینکه $۶a-۴$ و $۸a+۲$ زوج هستند d تنها می‌تواند ۲ یا ۲۲ باشد.

(۱۱) طبق فرض داریم $n=۲k(۲k+۲)$ در نتیجه:

$$n+۱=۲k(۲k+۲)+۱=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲$$

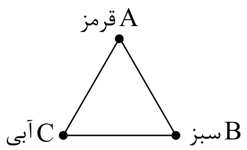
پس $n+۱$ مربع کامل است.

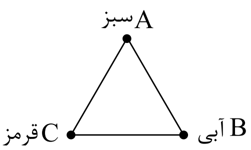
(۱۲)

$$\left.\begin{array}{l} n+۱\ |\ ۷n+۵ \\ n+۱\ |\ ۷\ (n+۱) \end{array}\right\}\Rightarrow n+۱\ |\ (۷n+۷)-(۷n+۵)\rightarrow n+۱\ |\ ۲$$

$$\begin{cases} ۱)\ n+۱=۲\rightarrow n=۱ \\ ۲)\ n+۱=-۲\rightarrow n=-۳ \\ ۳)\ n+۱=۱\rightarrow n=۰ \\ ۴)\ n+۱=-۱\rightarrow n=-۲ \end{cases}$$

(۱۳) در این سؤال نمی توان از جایگشت دوری کمک گرفت. چون شکل تقارن ندارد و مثلاً ۲ حالت زیر با هم متفاوت‌اند. (به دلیل نام گذاری رأس‌ها)





بنابراین تعداد کل حالات برابر با جایگشت ۳ شیء است داریم:

$$۳!=۶$$

(۱۴)

a, c, b, a

d, f, e, d

c, d, e, b, c

c, d, f, e, b, c

a, c, d, f, e, b, a

a, c, d, e, b, a

(۱۵)

مسیر به طول ۱   ۱ $u, v\rightarrow$

مسیر به طول ۲   ۳ $u\,\underline{۳}\,v\rightarrow\quad u, \boxed{۳}, v\rightarrow$

مسیر به طول ۳   ۶ $u\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,v\rightarrow\quad u, \boxed{۳}, \boxed{۲}, v\rightarrow$

مسیر به طول ۴ $\underline{۶}$ $u, \boxed{۳}, \boxed{۲}, \boxed{۱}, v\rightarrow u\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱}\,v\rightarrow$

۱۶

(۱۶)

$A=\{a, b, c, d, e\}$
$B=\{f, g, h, i, j\}$
$C=\{f, g, h, e\}$

(۱۷)

الف

فرض کنیم $v\in V(G)$ به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، همسایگی باز رأس v می گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم.

$N_G(d)=\{b, e\}$

ب

تعداد یال‌های گراف، یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نشان می‌دهیم.

$q = ۶$

پ

مجموع درجات رئوس گراف دوبرابر تعداد یال‌های آن یعنی برابر $۱۲ = ۶ \times ۲$ است.

۱۸ در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند.

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۱۹ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \sum_{v\in A} \deg(v) + \sum_{v\in B} \deg(v)$.

از طرفی $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = ۲q$ و $\sum_{v\in B} \deg(v) = ۲k$ زوج‌اند.

لذا $\sum_{v\in A} \deg(v) = ۲q - ۲k$ باید زوج باشد. می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداداعضای A باید زوج باشد.

۲۰ الف) مجموعهٔ احاطه‌گر با ۴ عضو مانند: $\{c, f, h, g\}$

ب) احاطه‌گر مینیمال مانند: $\{c, f, g\}$