نام و نام خانوادگی: سهیل حاج کرم

نام آزمون: ۱۰۰ تست فیزیک فصل یک دوازدهم

شتاب ثابت

AKO
گروه مشاوره و برنامه ریزی آکو
آموزشگاه پرسا

فصل 1: حرکت در راستای خط راست

حرکت با شتاب ثابت | مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۱ متحرکی با شتاب ثابت از حال سکون به حرکت درمی‌آید و مسافتی را در مسیر مستقیم طی می‌کند. اگر در انتهای مسیر سرعت آن به $12\frac{m}{s}$ برسد، سرعت آن در وسط مسیر چند متر بر ثانیه بوده است؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴

(۱) ۳ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۶ (۴) $6\sqrt{2}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴** اگر سرعت اولیه را v_0 و سرعت در نیمه مسیر را v_1 و سرعت در انتهای مسیر را v_2 فرض کنیم، می‌توان نوشت:

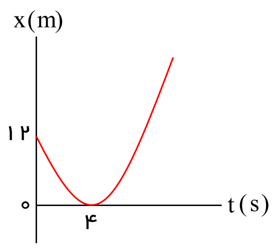
$$\begin{cases} v_1^2 - v_0^2 = 2a(\frac{x}{2}) \Rightarrow v_1^2 - 0 = ax \\ v_2^2 - v_1^2 = 2a(\frac{x}{2}) \Rightarrow 12^2 - v_1^2 = ax \end{cases} \Rightarrow v_1^2 = 12^2 - v_1^2$$

$$\Rightarrow 2v_1^2 = 12^2 \Rightarrow \sqrt{2}v_1 = 12 \Rightarrow v_1 = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۲ مطابق شکل زیر، نمودار مکان - زمان متحرکی به‌صورت سهمی است. سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 8s$ چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۹۸



(۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۱۲

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

معادلهٔ مستقل از شتاب : $\Delta x = \frac{v + v_0}{2}\Delta t \Rightarrow 0 - 12 = \frac{0 + v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = -6m/s$

با توجه به شکل سهمی و اینکه رأس سهمی در $t = 4$ است، سرعت در $t = 8s$، هم‌اندازهٔ سرعت در لحظهٔ صفر است، پس: $v = +6m/s$

مقایسهٔ چند حرکت و شتاب نسبی

۳ قطار A به طول ۲۰۰ متر با سرعت ثابت $40\frac{m}{s}$ در حال حرکت است. قطار B به طول ۲۲۵ متر که روی ریل مجاور توقف کرده است، به محض اینکه قطار A کاملاً از آن عبور کرد، با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ در همان جهت قطار A شروع به حرکت می‌کند و سرعت خود را به $50\frac{m}{s}$ می‌رساند و با همان سرعت حرکت خود را ادامه می‌دهد. قطار B چند ثانیه پس از شروع حرکت، از قطار A سبقت گرفته و از کنار آن کاملاً عبور می‌کند؟

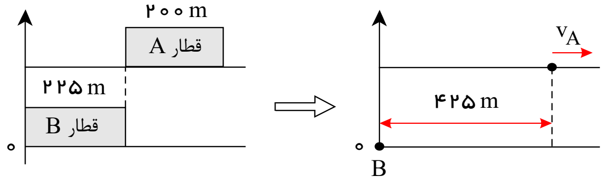
سخت - سراسری - ۱۳۹۲

(۱) ۵۷٫۵ (۲) ۸۲٫۵ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴** انتهای قطار B در حالت سکون را به‌عنوان مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. چون می‌خواهیم لحظه‌ای را بیابیم که قطار B به‌طور کامل از قطار A سبقت گرفته است، بنابراین معادلهٔ حرکت قطار B را نسبت به نقطهٔ انتهایی آن و معادلهٔ حرکت قطار A را نسبت به نقطهٔ ابتدایی آن می‌نویسیم. در این صورت در لحظه‌ای که قطار B به‌طور کامل از قطار A

سبقت می‌گیرد، این دو نقطه برهم منطبق می‌شوند.

$x_A = ۴۰t + ۴۲۵ \quad (I)$



حرکت قطار B از دو قسمت تشکیل شده است، ابتدا با شتاب $۲\frac{m}{s}$ شروع به حرکت می‌کند تا سرعتش به $۵۰\frac{m}{s}$ برسد. قطار B این کار را در مدت $t = \frac{v}{a} = \frac{۵۰}{۲} = ۲۵s$ انجام می‌دهد و طی آن مسافت $\Delta x = \frac{v^۲}{۲a} = \frac{۵۰^۲}{۲ \times ۲} = ۶۲۵m$ را طی می‌کند. سپس با سرعت $۵۰\frac{m}{s}$ به مسیر خود ادامه می‌دهد. دقت کنید طی $۲۵s$ ابتدایی حرکت، قطار B از قطار A سبقت نمی‌گیرد؛ بنابراین:

$x_B = ۵۰(t - ۲۵) + ۶۲۵ \quad (II)$

$\xrightarrow{(I),(II)} x_A = x_B \Rightarrow ۴۰t + ۴۲۵ = ۵۰(t - ۲۵) + ۶۲۵ \Rightarrow ۱۰t = ۱۰۵۰ \Rightarrow t = ۱۰۵s$

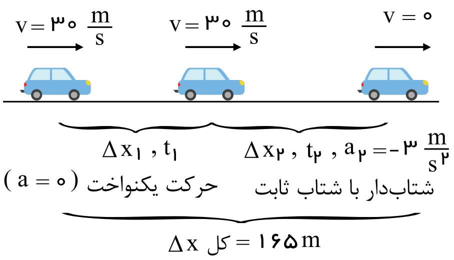
توقف - مقایسهٔ جابه‌جایی و مسافت

۴ اتومبیلی روی یک خط راست با سرعت $۱۰۸\frac{km}{h}$ در حال حرکت است. راننده با دیدن مانعی در فاصلهٔ $۱۶۵m$، با شتاب ثابت $۳\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌کند و درست جلوی مانع می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده $t_۱$ و زمانی که حرکت اتومبیل کندشونده بوده $t_۲$ باشد، $\frac{t_۲}{t_۱}$ کدام است؟

سخت - سراسری - ۱۳۹۶

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

پاسخ: (۴) (۳) (۲) (۱) در مدت زمان واکنش راننده ($t_۱$) متحرک با سرعت ثابت ($v = ۱۰۸\frac{km}{h} = ۳۰\frac{m}{s}$) حرکت می‌کند و در مدت زمان ترمز ($t_۲$) اتومبیل با شتاب ثابت (کندشونده) حرکت می‌کند.



ابتدا جابه‌جایی متحرک در مرحلهٔ دوم را با استفاده از رابطهٔ $v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x$ محاسبه می‌کنیم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۹۰۰ = ۲(-۳)\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲ = ۱۵۰m$$

$$\Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۱۶۵m \Rightarrow \Delta x_۱ + ۱۵۰ = ۱۶۵ \Rightarrow \Delta x_۱ = ۱۵m$$

$$\Delta x_۱ = vt_۱ \Rightarrow ۱۵ = ۳۰t_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{۲}s$$

برای محاسبهٔ زمان حرکت متحرک در مرحلهٔ دوم از معادلهٔ $v = at + v_۰$ استفاده می‌کنیم.

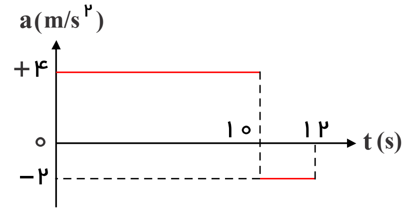
$$v = a_۲t_۲ + v_۰ \xrightarrow[v_۰=۳۰,\ a=-۳]{v=۰} ۰ = (-۳)t_۲ + ۳۰ \Rightarrow t_۲ = ۱۰s$$

$\frac{t_۲}{t_۱}$ برابر است با: $۲۰ = \frac{۱۰}{\frac{۱}{۲}} = \frac{t_۲}{t_۱}$

سطح زیر نمودار a-t و رسم نمودار از روی نمودار

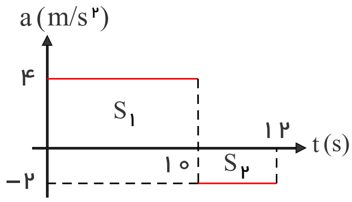
۵) نمودارشتاب - زمان متحرکی که سرعتش در مبداء زمان $+۵\frac{m}{s}$ است، به‌صورت شکل زیر می‌باشد، سرعت متوسط متحرک در این ۱۲ ثانیه، چند متر بر ثانیه است؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۴



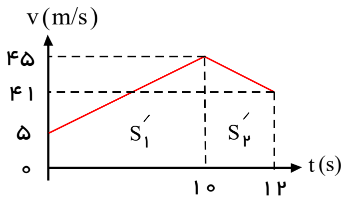
۱) ۱۳٫۵
۲) ۱۴
۳) ۲۷
۴) ۲۸

پاسخ: ۴ برای حل این تست بهترین روش رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار شتاب - زمان می‌باشد.



$S_۱ = \underset{(۰-۱۰)}{\Delta v} = v_{۱۰} - v_۰ \Rightarrow ۴۰ = v_{۱۰} - ۵ \Rightarrow v_{۱۰} = ۴۵$

$S_۲ = \underset{(۱۰-۱۲)}{\Delta v} = v_{۱۲} - v_{۱۰} \Rightarrow -۴ = v_{۱۲} - ۴۵ \Rightarrow v_{۱۲} = ۴۱$



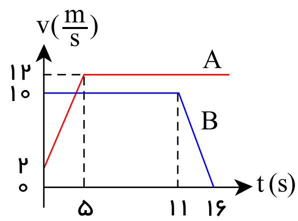
$$\Delta x = S'_۱ + S'_۲ = \frac{(۵+۴۵)\times ۱۰}{۲} + \frac{(۴۵+۴۱)\times ۲}{۲} = ۳۳۶m$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳۳۶}{۱۲} = ۲۸\frac{m}{s}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۶) نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل مقابل است. اگر در لحظهٔ $t=۰$، هر دو در مکان $x=۰$ قرار داشته باشند، چند ثانیه پس از آن، دو متحرک به‌هم می‌رسند؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۰



۱) ۷٫۵
۲) ۸
۳) ۱۲٫۵
۴) ۱۲

پاسخ: ۴ در ابتدا متحرک A به دلیل سرعت کمتر از متحرک B عقب می‌افتد. جابه‌جایی متحرک‌ها را تا لحظهٔ $t=۱۱s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \Delta x_A = \frac{۲+۱۲}{۲}\times ۵ + ۱۲\times(۱۱-۵) = ۳۵+۷۲ = ۱۰۷m \\ \Delta x_B = ۱۰\times ۱۱ = ۱۱۰m \end{cases}$$

در لحظهٔ $t=۱۱s$ متحرک A هنوز به متحرک B نرسیده است و $۳m$ از آن عقب‌تر است. فرض می‌کنیم در مدت $t_۰$ بعد از لحظهٔ $t=۱۱s$، متحرک A به B برسد.

$$a_B = \frac{۰-۱۰}{۱۶-۱۱} = -۲\frac{m}{s^۲}$$

$$\begin{cases} \Delta x_B = \frac{۱}{۲}a_B t_۰^۲ + v_{۰B}t = -t_۰^۲ + ۱۰t_۰ \\ \Delta x_A = v_A t_۰ = ۱۲t_۰ \end{cases}$$

$$\Delta x_A = \Delta x_B + ۳ \Rightarrow ۱۲t_۰ = (-t_۰^۲ + ۱۰t_۰) + ۳$$

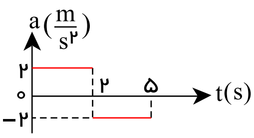
$$\Rightarrow t_۰^۲ + ۲t_۰ - ۳ = ۰ \Rightarrow t_۰ = ۱s$$

بنابراین A در لحظهٔ $t' = t_۰ + ۱۱s$، یعنی در لحظهٔ $t' = ۱۲s$ به B می‌رسد.

حرکت شامل چند بخش

۷) نمودار شتاب - زمان متحرکی در مسیر مستقیم مطابق شکل است. اگر سرعت متوسط متحرک در این مدت $۶/۴ m/s$ باشد، سرعت اولیهٔ آن چند متر بر ثانیه است؟

سخت- سراسری- ۱۳۸۵



۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: ۲ روش اول: سرعت اولیهٔ متحرک را $v_۰$ در نظر می‌گیریم.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}(۲)(۲)^۲ + v_۰ \times ۲ = ۴ + ۲v_۰$$

سرعت متحرک بعد از دو ثانیه

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲ \times ۲ + v_۰ = ۴ + v_۰$$

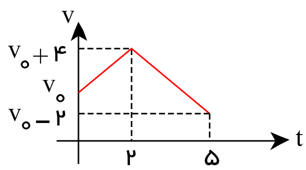
$$\Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t = \frac{۱}{۲} \times (-۲)(۳)^۲ + (۴ + v_۰) \times ۳ \Rightarrow \Delta x_۲ = -۹ + ۱۲ + ۳v_۰ = ۳ + ۳v_۰$$

$$\Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۴ + ۲v_۰ + ۳ + ۳v_۰ = ۷ + ۵v_۰$$

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۶/۴ = \frac{۷ + ۵v_۰}{۵} \Rightarrow ۵v_۰ + ۷ = ۳۲ \Rightarrow ۵v_۰ = ۲۵ \Rightarrow v_۰ = ۵m/s$$

روش دوم: رسم نمودار $v - t$ از روی نمودار $a - t$:

سطح زیر نمودار $v - t$ معرف جابه‌جایی می‌باشد:



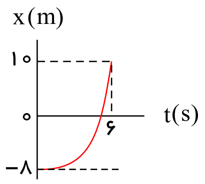
$$V_{av} = \frac{S}{\Delta t} \Rightarrow ۶/۴ = \frac{\frac{(v_۰ + v_۰ + ۴) \times ۲}{۲} + \frac{(v_۰ + ۴ + v_۰ - ۲) \times ۳}{۲}}{۵}$$

$$\Rightarrow v_۰ = ۵m/s$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۸) نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند مطابق شکل است. سرعت متحرک در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان عبور کرده است، چند $\frac{m}{s}$ است؟

متوسط- سراسری- ۱۳۸۴



۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: ۳ با توجه به نمودار، شیب خط مماس بر نمودار $x - t$ در لحظهٔ $t = ۰$ برابر صفر است، پس $v_۰ = ۰$ است.

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰ \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱}{۲}a(۶)^۲ + ۰ - ۸ \Rightarrow a = ۱$$

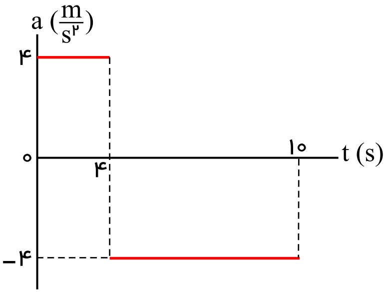
$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰ \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲} \times t^۲ - ۸ \Rightarrow t^۲ = ۱۶ \Rightarrow t = ۴$$ لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند.

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۱ \times ۴ + ۰ = ۴\frac{m}{s}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۹ نمودار شتاب – زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند به‌صورت شکل زیر است. اگر جابه‌جایی متحرک در این ۱۰ ثانیه ۱۵۶ متر باشد، سرعت اولیهٔ متحرک چند متر بر ثانیه است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۶



(۱) ۲۰
(۲) ۱۵
(۳) ۱۰
(۴) ۵

پاسخ: (۴) **(۳)** (۲) (۱) سرعت متحرک در لحظهٔ صفر را v_0 فرض می‌کنیم و سرعت متحرک در لحظه‌های $t = 4s$ و $t = 10s$ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به نمودار شتاب – زمان متحرک داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_4 = 4 \times 4 + v_0 = 16 + v_0 \\ v_{10} = -4 \times 6 + v_4 = -24 + 16 + v_0 = -8 + v_0 \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2} \times \Delta t$$

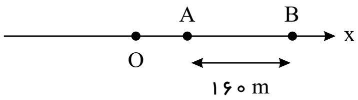
$$\Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{16 + v_0 + v_0}{2} \times 4 + \frac{-8 + v_0 + 16 + v_0}{2} \times 6 = 56 + 10v_0$$

$$\Rightarrow 156 = 56 + 10\,v_0 \Rightarrow 100 = 10v_0 \Rightarrow v_0 = 10\frac{m}{s}$$

ترکیب معادلات – بازه‌های مختلف

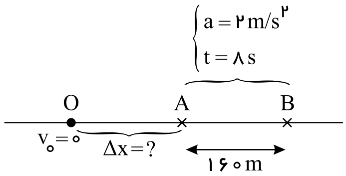
۱۰ مطابق شکل زیر، متحرکی با شتاب ثابت $2\,m/s^2$ روی محور x حرکت می‌کند. اگر فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B را در مدت ۸ ثانیه طی کند و در نقطهٔ O سرعتش صفر باشد، فاصلهٔ OA چند متر است؟

متوسط- سراسری- ۱۳۹۸



(۱) ۱۸
(۲) ۳۶
(۳) ۴۵
(۴) ۷۲

پاسخ: (۴) (۳) **(۲)** (۱) در ابتدا با توجه به معلوم بودن زمان جابه‌جایی، شتاب و مقدار جابه‌جایی AB، سرعت در نقطه A را می‌یابیم



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_A t \rightarrow 160 = (\frac{1}{2})(2)(8)^2 + V_A(8) \rightarrow v_A = 12(\frac{m}{s})$$

حال با استفاده از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی (مستقل از زمان) بین دو نقطهٔ o و A داریم:

$$V_A^2 - V_0^2 = 2a(\Delta x) \xrightarrow{V_0 = 0} (12)^2 - 0 = (2)(2)\Delta x \rightarrow \Delta x_{OA} = 36m$$

t ثانیهٔ nام و آخر – بازه های زمانی برابر

۱۱) متحرکی با شتاب ثابت و سرعت اولیهٔ $v_\circ$ در ۲ ثانیهٔ اول حرکت خود، ۱۳ متر و در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت خود، ۲۵ متر را طی می‌کند. شتاب حرکت در SI کدام است؟

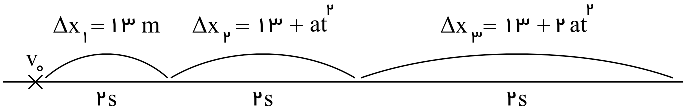
سخت- سراسری- ۱۳۹۱

۱) ۱٫۵ ۲) ۲٫۵ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: ۱

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت در ابتدا یک خط راست، جابه‌جایی‌های متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، تشکیل یک دنباله با قدر نسبت $at^۲$ می‌دهند. به عبارتی داریم:



$$\Delta x_۳ = ۱۳ + ۲at^۲ \xrightarrow[t=۲s]{\Delta x_۳ = ۲۵m} ۲۵ = ۱۳ + ۸a \rightarrow a = ۱٫۵\frac{m}{s^۲}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t$$

$$t = ۲s \Rightarrow \Delta x(\text{دو ثانیهٔ اول}) = ۲a + ۲v_\circ = ۱۳ \Rightarrow a + v_\circ = ۶٫۵(I)$$

$$\begin{cases} t = ۴s \Rightarrow \Delta x_۴ = ۸a + ۴v_\circ \\ t = ۶s \Rightarrow \Delta x_۶ = ۱۸a + ۶v_\circ \end{cases}$$

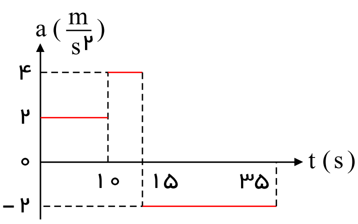
$$\Rightarrow \Delta x(\text{دو ثانیهٔ سوم}) = \Delta x_۶ - \Delta x_۴ = ۱۰a + ۲v_\circ = ۲۵ \Rightarrow ۵a + v_\circ = ۱۲٫۵(II)$$

$$I, II \Rightarrow ۴a = ۱۲٫۵ - ۶٫۵ \Rightarrow a = ۱٫۵\ \frac{m}{s^۲}$$

حرکت شامل چند بخش

۱۲) نمودار شتاب – زمان متحرکی که روی محور x در لحظه $t = \circ$ از مبدأ می‌گذرد، مطابق شکل زیر است. اگر $v_\circ = -۱\circ m/s$ باشد، بیشترین فاصله متحرک از مبدأ در بازه زمانی $t = \circ$ تا $t = ۳۵s$، چند متر است؟

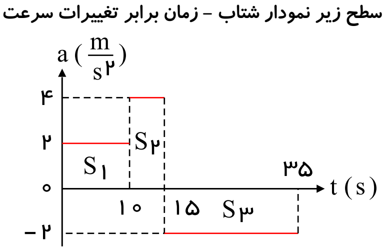
سخت- سراسری- ۱۳۹۵



۱) ۲۱۰
۲) ۲۲۵
۳) ۳۲۵
۴) ۳۵۰

پاسخ: ۳ با رسم نمودار سرعت – زمان از روی نمودار شتاب – زمان و بررسی سطح زیر نمودار سرعت – زمان می‌توانیم بیشترین فاصله از مبدأ را تعیین کنیم.

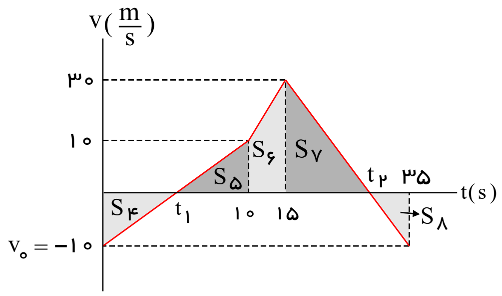
سطح زیر نمودار شتاب – زمان برابر تغییرات سرعت می‌باشد.



$$S_۱ = v_{۱\circ} - v_\circ \Rightarrow ۲\circ = v_{۱\circ} - (-۱\circ) \Rightarrow v_{۱\circ} = ۱\circ\frac{m}{s}$$

$$S_۲ = v_{۱۵} - v_{۱\circ} \Rightarrow ۲\circ = v_{۱۵} - ۱\circ \Rightarrow v_{۱۵} = ۳\circ\frac{m}{s}$$

$$S_۳ = v_{۳۵} - v_{۱۵} \Rightarrow -۴\circ = v_{۳۵} - ۳\circ \Rightarrow v_{۳۵} = -۱\circ\frac{m}{s}$$



$$\frac{۳۰}{t_۲ - ۱۵} = \frac{۱۰}{۳۵ - t_۲} \Rightarrow t_۲ = ۳۰s$$

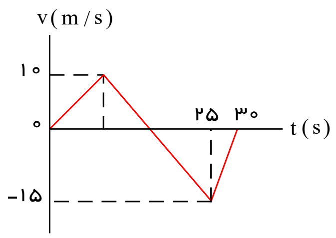
در لحظهٔ $t_۲ = ۳۰s$ متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه‌اش (مبداء) قرار دارد.

$$d_{max} = -\cancel{S_۴} + \cancel{S_۵} + S_۶ + S_۷ = \frac{۱۰ + ۳۰}{۲} \times (۱۵ - ۱۰) + \frac{۳۰ \times (۳۰ - ۱۵)}{۲} = ۳۲۵m$$

سطح زیر نمودار v-t

۱۳) نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. بزرگی سرعت متوسط متحرک در مدتی که در سوی مخالف محور x جابه‌جا می‌شود، چند متر بر ثانیه است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۰



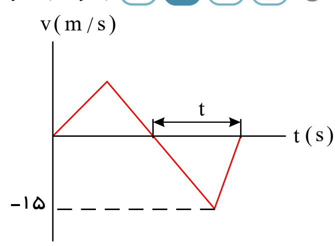
۱) ۲٫۵

۲) ۷٫۵

۳) ۱۰٫۵

۴) ۱۲٫۵

پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱ با توجه به نمودار اگر به اندازهٔ t ثانیه جسم در خلاف جهت محور x حرکت کند، داریم:

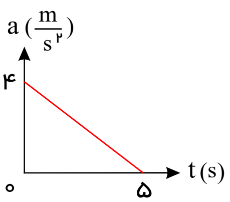


$$|\Delta x| = S = \frac{۱۵ \times t}{۲} \Rightarrow |v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{\frac{۱۵ \times t}{۲}}{t} = ۷٫۵\frac{m}{s}$$

سطح زیر نمودار a-t و رسم نمودار از روی نمودار

۱۴) متحرکی با سرعت اولیه‌ی $-۶\frac{m}{s}$ در مسیر مستقیم به حرکت درمی‌آید و نمودار شتاب - زمان آن به‌صورت مقابل است. حرکت این متحرک در فاصله‌ی زمانی نشان داده شده چگونه است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۷



۱) پیوسته کندشونده

۲) پیوسته تندشونده

۳) تندشونده و سپس کندشونده

۴) کندشونده و سپس تندشونده

پاسخ: **۴** ۳ ۲ ۱ نکته: سطح زیر نمودار $a - t$ برابر Δv می‌باشد.

با توجه به نمودار ارائه شده در متن سؤال، مشخص است که شتاب متحرک در بازه‌ی زمانی نشان داده شده همواره مثبت است. برای به‌دست آوردن علامت سرعت سطح زیر منحنی را در فاصله ی زمانی نشان داده شده به‌دست می‌آوریم.

$$S_{(۰-۵)} = \Delta v = \frac{۴ \times ۵}{۲} = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta v = ۱۰ \Rightarrow v_۵ - v_۰ = ۱۰ \Rightarrow v_۵ - (-۶) = ۱۰ \Rightarrow v_۵ = ۴\frac{m}{s}$$

اکنون با بررسی علامت سرعت و شتاب در این بازه‌ی زمانی داریم:

لحظه‌ی شروع بازه زمانی $\begin{cases} a_۰ = ۴ > ۰ \\ v_۰ = -۶ < ۰ \end{cases} \rightarrow a \cdot v < ۰$ کندشونده

$\text{تندشونده } \leftarrow a\cdot v>0 \leftarrow \begin{cases} a>0 \\ v_5 = 4 \end{cases}$ لحظه‌ی پایان بازه زمانی $(t=5)$

مقایسهٔ چند حرکت و شتاب نسبی

۱۵ دو متحرک روی خط مستقیمی به طرف یکدیگر در حرکت هستند. در زمانی که فاصله‌ی آنها ۱۱۲۵ متر است. سرعت متحرک اول $10\frac{m}{s}$ تندشونده و سرعت متحرک دوم $20\frac{m}{s}$ و آن هم تندشونده است. اگر شتاب متحرک اول $2\frac{m}{s^2}$ و شتاب متحرک دوم $4\frac{m}{s^2}$ باشد، پس از چند ثانیه به یکدیگر می‌رسند؟ سخت- سراسری- ۱۳۸۲

① ۱۵ ② ۱۹٫۴ ③ ۲۵ ④ ۳۷٫۵

پاسخ: ④ ③ ② **①** جهت مثبت را برای هر متحرک به‌طور جداگانه همان جهت حرکت خودش فرض می‌کنیم.

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_{01}t = \frac{1}{2}\times 2t^2 + 10t = t^2 + 10t$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a_2t^2 + v_{02}t = \frac{1}{2}\times 4t^2 + 20t = 2t^2 + 20t$$

$$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 1125 \Rightarrow 3t^2 + 30t = 1125$$

$$\Rightarrow t^2 + 10t - 375 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{25+375}}{1}$$

$$\Rightarrow t_1 = 15s\,,\ t_2 = -25s \Rightarrow t = 15s$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۱۶ معادلهٔ مکان – زمان متحرکی در SI به‌صورت $x = 2t^2 + 4t - 8$ است. در فاصلهٔ زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 2s$، مسافتی که متحرک طی می‌کند، چند برابر اندازهٔ جابه‌جایی آن است؟ متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

① ۱ ② ۱٫۵ ③ ۱٫۶ ④ ۲

پاسخ: ④ ③ ② **①** معادلهٔ مکان – زمان درجهٔ ۲ برحسب زمان است. بنابراین حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. (مشابه کتاب درسی از مشتق کمک نمی‌گیریم.)

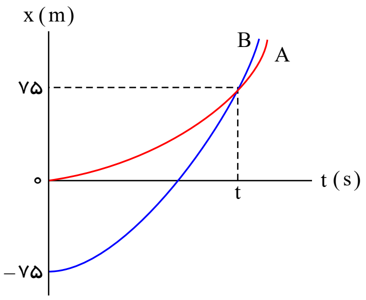
$$\begin{cases} x = 2t^2 + 4t - 8 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = +4 \\ v_0 = +4 \end{cases} \rightarrow v = at + v_0 = 4t + 4$$

مشخص است که $v \neq 0$ یعنی متحرک بر خط راست، بدون تغییر جهت است.

بنابراین: $\frac{L}{|\Delta x|} = 1$

نمودار مکان–زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۱۷ نمودار مکان – زمان دو متحرک A و B که همزمان از حال سکون به حرکت درآمده‌اند، به‌صورت دو سهمی شکل زیر است. اگر شتاب متحرک A برابر $1/5\,m/s^2$ باشد، نسبت سرعت متحرک B به سرعت متحرک A در لحظه‌ای که B از A سبقت می‌گیرد، کدام است؟ متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸



① $\frac{1}{2}$ ② ۲ ③ ۳ ④ $\frac{10}{3}$

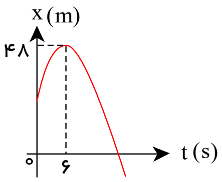
پاسخ: ④ ③ **②** ① در لحظهٔ سبقت، مکان دو متحرک یکسان و برابر ۷۵ متر است، پس معادلهٔ حرکت هریک را می‌نویسیم و با هم مساوی قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} A:\ v_A = a_At_t + v_{0A} = 1/5t\ ,\ \text{و}\ x_A = \frac{1}{2}\times 1/5t^2 = 0/75t^2 \\ B:\ v_B = a_Bt_t + v_{0B} = a_Bt\ \text{و}\ x_B = \frac{1}{2}a_Bt^2 - 75 \end{cases}$$

$$x_A = x_B = ۷۵ \begin{cases} x_A = ۰٫۷۵t^۲ = ۷۵ \rightarrow \boxed{t = ۱۰s} \ : \text{در لحظه سبقت} \\ x_B = \frac{۱}{۲}a_B \times ۱۰^۲ - ۷۵ = ۷۵ \rightarrow a_B = ۳\,m/s^۲ \end{cases} \rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{۳ \times ۱۰}{۱٫۵ \times ۱۰} = ۲$$

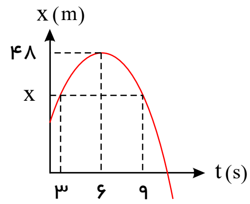
۱۸ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر، به‌صورت سهمی است. اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t = ۳s$ و $t = ۹s$ برابر ۱۲ متر باشد، جابه‌جایی متحرک در این بازه چند متر است؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۳



۱) صفر
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۲

پاسخ: ۱ منحنی به‌صورت سهمی است، بنابراین نسبت به رأس سهمی ($t = ۶s$) تقارن دارد. پس مکان متحرک در لحظات $t = ۳$ و $t = ۹$ یکسان می‌باشند و جابه‌جایی متحرک در این بازه صفر است.

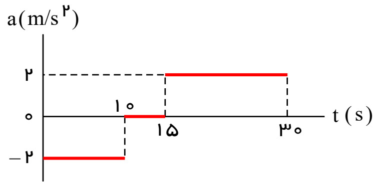


$$\Delta x_{(۳ \rightarrow ۹)} = ۰$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۱۹ نمودار شتاب - زمان متحرکی که با سرعت اولیهٔ $۳۰\,m/s$ در جهت محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱۰s$ تا $t_۲ = ۳۰s$، چند متر بر ثانیه است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸



۱) ۱۵
۲) ۲۰
۳) ۲۱٫۲۵
۴) ۴۲٫۵

پاسخ: ۳ روش‌های متفاوتی وجود دارد. می‌توان از رسم نمودار $(v - t)$ و یافتن مساحت سطح زیر نمودار $(v - t)$ استفاده نمود.

یک روش، مشخص نمودن سرعت در ابتدا و انتهای بازه‌های زمانی داده‌شده و یافتن جابه‌جایی‌های انجام شده در بازه است:

$$(\text{در بازهٔ زمانی صفر تا } ۱۰s) \Rightarrow \begin{cases} v_{(۱۰)} = at + v_۰ = (-۲)(۱۰) + ۳۰ = ۱۰\,m/s \\ v_{(۰)} = ۳۰\,m/s \end{cases}$$

$$(\text{در بازهٔ زمانی } ۱۰s \text{ تا } ۱۵s) \Rightarrow \Delta x_۱ = v\Delta t = v_{(۱۰)}\Delta t = ۱۰ \times ۵ = ۵۰m$$

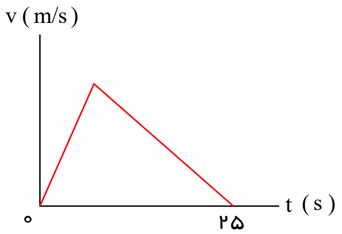
$$(\text{در بازهٔ زمانی } ۱۵s \text{ تا } ۳۰s) \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_۲ = (\frac{۱۰ + ۴۰}{۲})(۱۵) = ۲۵ \times ۱۵ = ۳۷۵ \\ v_{(۱۵)} = v_{(۱۰)} = ۱۰\,m/s \\ v_{(۳۰)} = v_{(۱۵)} + ۲ \times ۱۵ = ۱۰ + ۳۰ = ۴۰\,m/s \end{cases}$$

$$\text{کل } \Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۵۰ + ۳۷۵ = ۴۲۵ \rightarrow v_{av} = \frac{۴۲۵}{۲۰} = ۲۱٫۲۵$$

سطح زیر نمودار v-t

۲۰) نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مسیری مستقیم در حرکت است، به‌صورت شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در این ۲۵ ثانیه برابر $۱۰ \, m/s$ باشد، بیشینهٔ سرعت متحرک در ضمن حرکت، چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۹۸

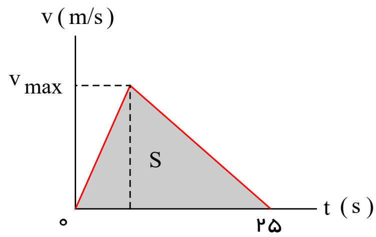


۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۴۰
۴) ۵۰

پاسخ: ۱

می‌دانیم که در این سوال که متحرک فقط در یک جهت حرکت کرده (همواره $v > ۰$) و نمودار $v - t$ آن به صورت یک مثلث است. سرعت متوسطش، نصف ارتفاع مثلث است. یعنی:

$$v_{av} = \frac{۱}{۲} v_{\max} \xrightarrow{V_{av}=۱۰\frac{m}{s}} ۱۰ = \frac{۱}{۲} v_{\max} \to v_{\max} = ۲۰ \frac{m}{s}$$



$$S_{\text{مثلث}} = \Delta x = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲}$$

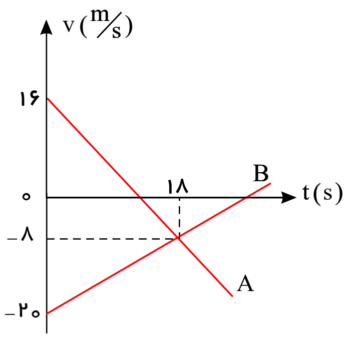
$$\Delta x = ۱۰ \times ۲۵ = ۲۵۰$$

$$\frac{v \times ۲۵}{۲} = ۱۰ \times ۲۵ \Rightarrow v = ۲۰ \, m/s$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۲۱) نمودار سرعت - زمان دو متحرک B, A که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در مدتی که متحرک A در جهت محور x حرکت کرده است، بزرگی جابه‌جایی متحرک B، چند متر است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۹۵



۱) ۱۸۶
۲) ۱۹۲
۳) ۲۰۰
۴) ۲۲۸

پاسخ: ۲

ابتدا (t) لحظه‌ای را که تا آن لحظه متحرک در جهت محور x حرکت کرده است را به‌دست می‌آوریم:

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۸ - ۱۶}{۱۸} = \frac{-۲۴}{۱۸} = -\frac{۴}{۳} \frac{m}{s^۲}$$

$$v_A = a_A t + v_{\circ A} \xrightarrow{v_t = ۰} ۰ = -\frac{۴}{۳} t + ۱۶ \to t = ۱۲s$$

اکنون جابه‌جایی متحرک B را در مدت $۱۲s$ به‌دست می‌آوریم:

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۸ - (-۲۰)}{۱۸} = \frac{۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳} \frac{m}{s^۲}$$

$$\Delta x_B = \frac{۱}{۲} a_B t^۲ + v_{\circ B} t \xrightarrow{t'=۱۲s} \Delta x_B = (\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times ۱۲^۲) + (-۲۰ \times ۱۲) = ۴۸ - ۲۴۰ = -۱۹۲m$$

$$|\Delta x_B| = ۱۹۲m$$

توقف – مقایسهٔ جابه‌جایی و مسافت

۲۲) سرعت متحرکی با شتاب ثابت کاهش می‌یابد و بعد از ۱۲ ثانیه متحرک متوقف می‌شود. مسافتی که متحرک در ۶ ثانیه اول این حرکت طی می‌کند، چند برابر مسافتی است که متحرک در ۶ ثانیهٔ پایانی طی می‌کند؟ سخت- سنجش- ۱۳۹۴

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: ۳ اگر سرعت اولیه را v_0 فرض کنیم، سرعت در لحظهٔ $t = 6s$ (وسط زمان حرکت) برابر $\frac{v_0}{2}$ است.

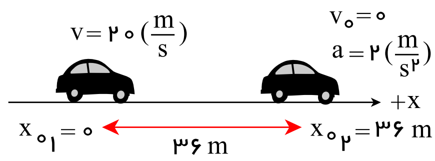
$$\left.\begin{array}{l} (\text{۶ ثانیهٔ اول})\ \Delta x_1 = \dfrac{v_0 + \frac{v_0}{2}}{2} \times 6 = 4/5 v_0 \\ (\text{۶ ثانیهٔ پایانی})\ \Delta x_2 = \dfrac{\frac{v_0}{2} + 0}{2} \times 6 = 1/5 v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = 3$$

مقایسهٔ چند حرکت و شتاب نسبی

۲۳) در یک مسیر مستقیم اتومبیلی با سرعت ثابت $20\frac{m}{s}$ در حرکت است. از ۳۶ متر جلوتر اتومبیل دیگری با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ از حال سکون در همان جهت به راه می‌افتد. در این حرکت اتومبیل‌ها دو بار از هم سبقت می‌گیرند. فاصلهٔ زمانی این دو سبقت چند ثانیه است؟ سخت- سراسری- ۱۳۸۳

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ: ۳



$$x_1 = vt + x_{0_1} = 20t$$
$$x_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_{0_2} = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 0 + 36 = t^2 + 36$$
$$x_2 = x_1 \Rightarrow t^2 + 36 = 20t \Rightarrow t^2 - 20t + 36 = 0$$
$$\Rightarrow (t-2)(t-18) = 0$$
$$\Rightarrow t_1 = 2s,\ t_2 = 18s \Rightarrow \Delta t = 16s$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۲۴) متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و معادله‌ی مکان – زمان آن در SI به‌صورت $x = -2t^2 + 12t - 40$ است. مسافتی که این متحرک در بازه‌ی زمانی صفر تا $t = 5s$ طی می‌کند، چند متر است؟ متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۴

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

پاسخ: ۴ با استفاده از رابطهٔ $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$، شتاب و سرعت اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$x = -2t^2 + 12t - 40 \to a = -4\ ,\ v_0 = 12\frac{m}{s}$$

برای محاسبه‌ی مسافت طی شده باید ابتدا لحظه‌ی توقف متحرک را به‌دست بیاوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 12 \xrightarrow[\text{شرط توقف}]{v=0} 0 = -4t + 12 \Rightarrow t = 3(s)$$

حال مکان متحرک را در لحظات ابتدا، انتها و لحظه‌ی توقف به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \to x_1 = -40\ (1) \\ t_2 = 3 \to x_2 = -22\ (2) \\ t_3 = 5 \to x_3 = -30\ (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(1),(2)} \Delta x_1 = -22 - (-40) = 18 \\ \xrightarrow{(2),(3)} \Delta x_2 = -30 - (-22) = -8 \end{cases} \Rightarrow d = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 26$$

مسافت طی شده برابر مجموع اندازه‌ی جابه‌جایی‌های دو مرحلهٔ می‌باشد.

t ثانیهٔ nام و آخر – بازه های زمانی برابر

۲۵) متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت در مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی این متحرک در ۲ ثانیه اول چند برابر جابه‌جایی آن در ثانیه دوم است؟

متوسط – سنجش – ۱۳۹۴

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: ۴

با نوشتن معادلهٔ جابه‌جایی برای ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ اول، می‌توان نسبت آنها را پیدا کرد.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲$$

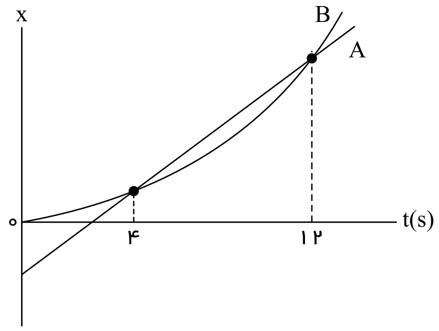
$$\begin{cases} t = ۱s \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}a \times ۱^۲ = \frac{۱}{۲}a \,(\text{ثانیهٔ اول}) \\ t = ۲s \Rightarrow \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}a \times ۲^۲ = ۲a \,(\text{دو ثانیهٔ اول}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{جابه‌جایی دو ثانیهٔ اول}}{\text{جابه‌جایی ثانیهٔ دوم}} = \frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۲ - \Delta x_۱} = \frac{۲a}{۱/۵a} = \frac{۴}{۳}$$

نمودار مکان–زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۲۶) نمودار مکان – زمان دو متحرک A و B مطابق شکل زیر است. بزرگی سرعت متحرک B در چه لحظه‌ای برابر بزرگی سرعت متحرک A است؟ (نمودار B قسمتی از یک سهمی است.)

متوسط – سراسری – ۱۳۹۹



۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۵

پاسخ: ۲

فرض کنیم لحظهٔ موردنظر $t = t'$ است.

$$B : x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_{۰B}t + \cancel{x_{۰B}}$$

$$A : x_A = v_A t + x_{۰A}$$

در $t = ۴s$ و $t = ۱۲s$: $x_A = x_B$ است:

$$t = ۴s \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_B \times ۴^۲ + v_{۰B} \times ۴ = v_A \times ۴ + x_{۰A} \quad (۱)$$

$$t = ۱۲s \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_B \times ۱۲^۲ + v_{۰B} \times ۱۲ = v_A \times ۱۲ + x_{۰A} \quad (۲)$$

$$(۲) - (۱) \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_B(۱۴۴ - ۱۶) + ۸v_{۰B} = ۸v_A \Rightarrow ۶۴a_B + ۸v_{۰B} = ۸v_A$$

$$\text{از طرفی:} \begin{cases} ۸a_B + v_{۰B} = v_A = \text{ثابت} \\ v_B = a_B t + v_{۰B} \end{cases} \Rightarrow ۸a_B + \cancel{v_{۰B}} = a_B t' + \cancel{v_{۰B}} \Rightarrow t' = ۸s$$

روش دوم:

چون نمودار B قسمتی از یک سهمی است، پس حرکت B شتابدار با شتاب ثابت است.

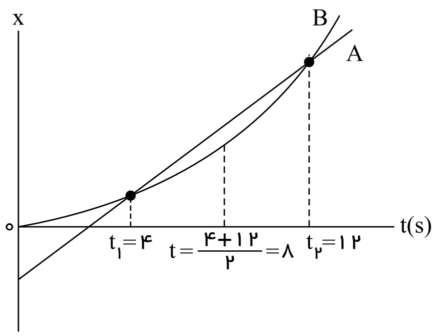
از طرف دیگر می‌دانیم که شیب خط A که دو نقطهٔ از نمودار B را قطع کرده برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ $t_۱ = ۴s$ و $t_۲ = ۱۲s$ است.

پس تا اینجا دریافتیم که:

$V_A = V_{av_B}$

و اما همه می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، V_{av} بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر است با V در لحظهٔ $t = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$.

حال با این مقدمه می‌دانیم که

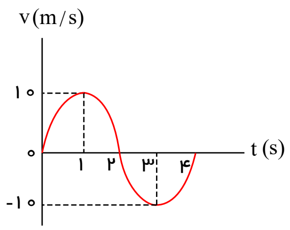


یعنی در لحظهٔ $t = 8s$ سرعت متحرک B با سرعت متحرک A هم‌اندازه است.

سطح زیر نمودار v-t

۲۷ نمودار سرعت – زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند مطابق شکل است. شتاب متوسط و سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی ۱ تا ۳ ثانیه به‌ترتیب از راست به چپ برابر است با:

متوسط – سراسری – ۱۳۸۴



۱) $0, 0$

۲) $0, -10\dfrac{m}{s^2}$

۳) $-10\dfrac{m}{s}, 0$

۴) $10\dfrac{m}{s}, -10\dfrac{m}{s^2}$

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

می‌دانیم که سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. در اینجا با توجه به تقارن نمودار داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-10 - 10}{3 - 1} = \frac{-20}{2} = -10\frac{m}{s^2}$$

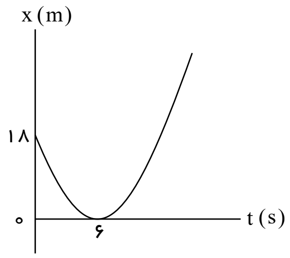
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{سطح زیر نمودار}}{\Delta t} = \frac{0}{\Delta t} = 0$$

سطح زیر نمودار در بازه‌ی ۱ تا ۳ ثانیه از دو قسمت با مساحت‌های مساوی تشکیل شده که یکی از آنها بالای محور افقی و مثبت است و دیگری در پایین محور افقی و منفی می‌باشد و بنابراین جمع جبری مساحت‌های آنها برابر صفر می‌شود.

نمودار مکان–زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۲۸ مطابق شکل زیر، نمودار مکان – زمان متحرکی به‌صورت یک سهمی است. شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

متوسط – خارج از کشور – ۱۳۹۸



۱) ۳

۲) ۱

۳) -1

۴) -3

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ روش اول: از لحظهٔ $t = 6$ تا لحظهٔ $t = 0$ برمی‌گردیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[\Delta x = 18m]{v_0 = 0,\, t = 6s} 18 = \frac{1}{2}a(6)^2 \to a = 1\frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

نمودار مکان – زمان یک سهمی است بنابراین حرکت بر روی محور x، با شتاب ثابت است؛ در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۶s$ داریم:

$$\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t \rightarrow ۰ - ۱۸ = (\frac{۰ + v_۰}{۲})(۶) = ۳v_۰ \rightarrow v_۰ = -۶m/s$$

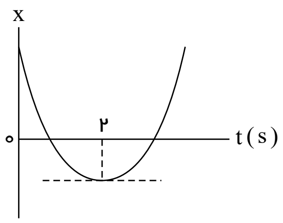
$$v = at + v_۰ \rightarrow ۰ = a \times ۶ + (-۶) \rightarrow a = ۱m/s^۲$$

روش سوم:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ v = at + v_۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{صفر تا } ۶s]{\text{در بازهٔ زمانی}} \begin{cases} ۰ = \frac{۱}{۲}a \times ۶^۲ + v_۰ \times ۶ + ۱۸ \rightarrow a = ۱m/s^۲ \\ ۰ = a \times ۶ + v_۰ \rightarrow v_۰ = -۶a \end{cases}$$

۲۹ نمودار مکان – زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۶s$ برابر $۳\frac{m}{s}$ باشد، مسافتی که متحرک در این بازهٔ زمانی طی می‌کند، چند متر است؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۹



۱) ۱۳

۲) ۱۵

۳) ۱۷

۴) ۱۹

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ روش اول:

در $t = ۲$، سرعت صفر است. در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۲s$ داریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۲a + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۲a \quad (*)$$

به کمک تعریف سرعت متوسط جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۶s$ را می‌یابیم:

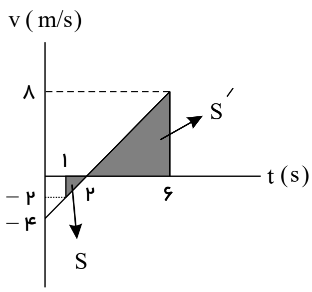
$$v_{av} = \frac{x_{(t=۶)} - x_{(t=۱)}}{۶ - ۱} = ۳ \Rightarrow \Delta x_{(۱s-۶s)} = ۱۵m \quad (**)$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow{(*)} x = \frac{۱}{۲}at^۲ - ۲at + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱s \Rightarrow x_۱ = \frac{a}{۲} - ۲a + x_۰ = -\frac{۳}{۲}a + x_۰ \\ t_۲ = ۶s \Rightarrow x_۲ = ۱۸a - ۱۲a + x_۰ = ۶a + x_۰ \end{cases} \xrightarrow{(**)} \Delta x = ۱۵m = ۷/۵a \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

$$\xrightarrow{(*)} v_۰ = -۴\frac{m}{s} \Rightarrow v = ۲t - ۴$$

از رسم نمودار $(v - t)$ کمک می‌گیریم:

$v = ۲t - ۴ \Rightarrow$



$$\begin{cases} t_۱ = ۱s \Rightarrow v_۱ = -۲\frac{m}{s} \\ t_۲ = ۶s \Rightarrow v_۲ = ۸\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow L = S + S' = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱ + \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۴ = ۱ + ۱۶ = ۱۷m$$

روش دوم:

$$\text{در بازهٔ زمانی صفر تا } ۲s \Rightarrow v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۲a + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۲a$$

$$v_{av} = \frac{v + v_۰}{۲} = \frac{(at + v_۰) + v_۰}{۲} = \frac{۱}{۲}at + v_۰$$

در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۶s$، در رابطهٔ فوق:

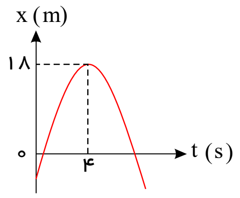
$$v_{av} = ۳ = \frac{۱}{۲}a(۶ - ۱) + v_۱ \xrightarrow{v_۱ = v_{(t_۱ = ۱s)} = (-۲)} ۳ = \frac{۵}{۲}a - ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = -۴\frac{m}{s} \end{cases}$$

باقی راه‌حل شبیه روش اول است.

۳۰ نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر به‌صورت سهمی است. چند ثانیه پس ازلحظه‌ی $t=0$ بزرگی سرعت متحرک برابر بزرگی سرعت اولیه می‌شود؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۳

(۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

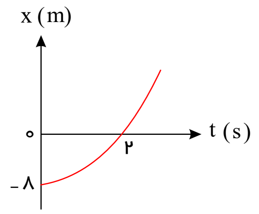


پاسخ: ۳ حرکت نسبت به لحظه تغییر جهت تقارن دارد (لحظهٔ $t=4s$). بنابراین در لحظهٔ $t=8s$ بزرگی سرعت برابر سرعت اولیه می‌شود.

۳۱ متحرکی بدون سرعت اولیه و با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند و نمودار مکان - زمان آن مطابق شکل مقابل است. سرعت آن در لحظهٔ $t=2s$ چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۸

(۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۸



پاسخ: ۴ روش اول: ابتدا شتاب حرکت را با بررسی جابه‌جایی بین $t=0$ و $t=2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow 8=\frac{1}{2}\times a\times 2^2 \Rightarrow a=4\frac{m}{s^2}$$

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=4t+0 \xrightarrow{t=2} v=8\frac{m}{s}$$

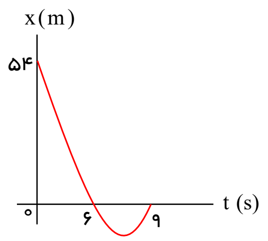
روش دوم:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\times\Delta t \Rightarrow 8=\frac{0+v_2}{2}\times 2 \Rightarrow v_2=8\frac{m}{s}$$

۳۲ نمودار مکان - زمان متحرکی به‌صورت سهمی شکل روبه‌رو است. معادله سرعت - زمان آن در SI کدام است؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴

(۱) $v=2t-15$
(۲) $v=-2t+15$
(۳) $v=4t-30$
(۴) $v=-4t+30$



پاسخ: ۱ روش اول:

با توجه به نمودار $v_0<0$ و $a>0$ است، پس تا اینجا گزینه‌های ۱ و ۳ صحیح هستند. از طرفی در لحظهٔ $t=15s$ $(t=2t_s=2\times 7{,}5)$ باید $v=v_0$ یعنی $\Delta v=0$ باشد که فقط گزینهٔ ۱ چنین است.

روش دوم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

$$\begin{cases} t=6s\,,\ x=0 \Rightarrow 0=18a+6v_0+54 \Rightarrow 3a+v_0=-9 \\ t=9s\,,\ x=0 \Rightarrow 0=\frac{81}{2}a+9v_0+54 \Rightarrow 4{,}5a+v_0=-6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1{,}5a=3 \Rightarrow a=2\frac{m}{s^2} \Rightarrow v_0=-15\frac{m}{s} \Rightarrow v=2t-15$$

حرکت شامل چند بخش

۳۳) اتومبیلی از حال سکون با شتاب ثابت a_1 در مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کند. بعد از مدتی، ادامه‌ی مسیر را در همان جهت با شتاب ثابت a_2 طی می‌کند تا بایستد. اگر مسافت طی شده در مرحلهٔ اول ۴ برابر مسافت طی شده در مرحلهٔ دوم باشد، اندازه‌ی a_2 چند برابر a_1 است؟

سخت- خارج از کشور- ۱۳۸۸

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: (۱) **(۲)** (۳) (۴) اتومبیل از حالت سکون $(v_0 = 0)$ با شتاب ثابت a_1 در مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی بزرگی سرعت آن به v می‌رسد؛ پس از آن اتومبیل در همان جهت با شتاب ثابت a_2 حرکت خود را کند می‌کند تا پس از مدت زمانی سرعت آن به صفر برسد.

مرحلهٔ اول حرکت: $v^2 - v_0^2 = 2a_1\Delta x_1 \Rightarrow v^2 - 0 = 2a_1\Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = \dfrac{v^2}{2a_1}$

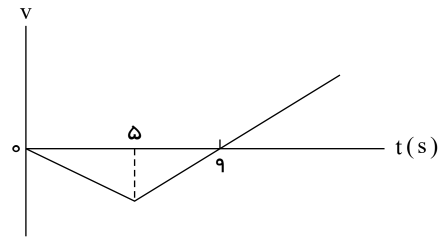
مرحلهٔ دوم حرکت: $v_1^2 - v^2 = 2a_2\Delta x_2 \Rightarrow 0 - v^2 = 2a_2\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \dfrac{-v^2}{2a_2}$

$$\Rightarrow \Delta x_1 = 4\Delta x_2 \Rightarrow \frac{v^2}{2a_1} = -4\frac{v^2}{2a_2} \Rightarrow |a_2| = 4|a_1|$$

سطح زیر نمودار v-t

۳۴) نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر متحرک در لحظهٔ $t = 0$، در مکان $x = 0$ باشد، پس از چند ثانیه دوباره از این نقطه عبور می‌کند؟

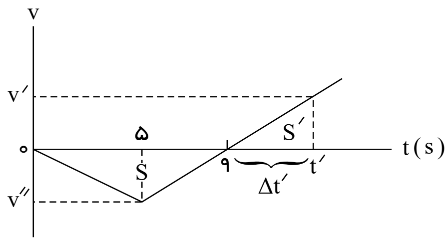
متوسط- سراسری- ۱۳۹۹



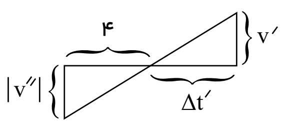
۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

پاسخ: **(۱)** (۲) (۳) (۴) برای اینکه متحرک مجدداً از مکان $x = x_0 = 0$ عبور کند بایستی جابه‌جایی متحرک از $t_1 = 0$ تا لحظه‌ای مانند t' صفر شده باشد.

می‌دانیم تفاضل مساحت بالای محور t در نمودار $(v - t)$ و زیر محور t در این نمودار جابه‌جایی را می‌دهد، پس:



$$\Delta x = S' - S = 0 \Rightarrow S' = S \Rightarrow \frac{1}{2}v' \times \Delta t' = \frac{1}{2} \times |v''| \times 9 \quad (1)$$



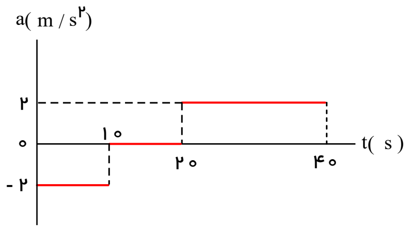
$$\xrightarrow{\text{از تشابه دو مثلث}} \frac{v'}{|v''|} = \frac{\Delta t'}{4} \Rightarrow v' = \frac{1}{4}|v''| \times \Delta t' \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{4}\cancel{|v''|} \times \Delta t')(\Delta t') = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{|v''|} \times 9 \Rightarrow \frac{\Delta t'^2}{4} = 9 \Rightarrow \Delta t'^2 = 36 \Rightarrow \Delta t' = 6s \Rightarrow t' = 9 + \Delta t' = 9 + 6 = 15s$$

حرکت شامل چند بخش

۳۵ نمودار شتاب - زمان متحرکی که از حال سکون روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازهٔ زمانی $t_1 = ۲۰s$ تا $t_2 = ۳۵s$، کدام مورد درست است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۹۴



۱) حرکت تندشونده است.

۲) حرکت کندشونده است.

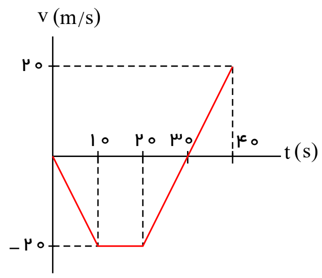
۳) جهت حرکت یک بار تغییر می‌کند.

۴) متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

پاسخ: ۳

$$\begin{cases} \Delta v(\text{۱۰ ثانیهٔ اول}) = -۲ \times ۱۰ = -۲۰ \ \dfrac{m}{s} \\ \Delta v(\text{۱۰ ثانیهٔ دوم}) = ۰ \\ \Delta v(\text{۲۰ ثانیهٔ آخر}) = ۲ \times (۴۰ - ۲۰) = +۴۰ \ \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

در بازهٔ زمانی $۲۰s$ تا ۳۵ ثانیه حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.



مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۳۶ متحرکی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت $a = ۴\dfrac{m}{s^۲}$ و سرعت اولیهٔ $v_0 = ۶\dfrac{m}{s}$ حرکت می‌کند. سرعت متوسط متحرک در دو ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری ۱۳۸۱

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: ۲ این سوال را به سه روش حل می‌کنیم. می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط معادل میانگین سرعت‌هاست.

روش اول:

$$v = at + v_0 = ۴t + ۶$$

$$\begin{cases} t = ۰s \to v_0 = ۶\frac{m}{s} \\ t = ۲s \to v_۲ = ۱۴\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_0 + v_۲}{۲} = ۱۰\frac{m}{s}$$

روش دوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظهٔ t_1 و $t_۲$ معادل سرعت در لحظهٔ $t = \dfrac{t_1 + t_۲}{۲}$ است.

در اینجا سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول معادل با سرعت در لحظهٔ $t = ۱s$ است. $(t = \dfrac{۰ + ۲}{۲} = ۱s)$، بنابراین داریم:

$$v_{av} = v = at + v_0 \xrightarrow[v_0 = ۶]{t = ۱s, a = ۴\frac{m}{s^۲}} v_{av} = ۴ \times ۱ + ۶ = ۱۰\frac{m}{s^۲}$$

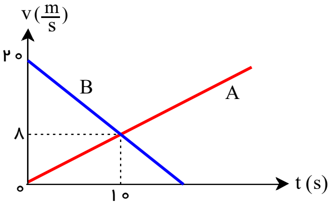
روش سوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در t' ثانیهٔ اول، از رابطهٔ زیر نیز محاسبه می‌شود.

$$v_{av} = \frac{۱}{۲}at' + v_0 \xrightarrow[a = ۴\frac{m}{s^۲}, v_0 = ۶\frac{m}{s}]{t' = ۲ \text{ در ثانیهٔ اول حرکت}} v_{av} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲ + ۶ \to v_{av} = ۱۰\frac{m}{s}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۳۷) شکل روبه‌رو، نمودارهای سرعت - زمان دو متحرک را نشان می‌دهد که روی محور x حرکت می‌کنند. اگر دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان باشند، فاصلهٔ بین آنها در لحظهٔ $t = ۱۰s$ چند متر است؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴



۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۱۰

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ سطح زیر نمودار سرعت - زمان متحرک در فاصلهٔ زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه، نشان‌دهندهٔ جابه‌جایی آن متحرک است. بنابراین، جابه‌جایی این دو متحرک را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$\Delta x_A = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۸ = ۴۰m \ , \ \Delta x_B = \frac{۲۰+۸}{۲} \times ۱۰ = ۱۴۰m$$

$\Rightarrow$ فاصلهٔ بین متحرک $= (۱۴۰ - ۴۰) = ۱۰۰m$

حرکت شامل چند بخش

۳۸) متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ روی خط راست به راه می‌افتد. پس از ۲۰ ثانیه سرعتش با آهنگ ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ کاهش می‌یابد تا متوقف شود. از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ توقف، متحرک چند متر جابه‌جا می‌شود؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴

۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۸۰۰

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

ابتدا سرعت و جابه‌جایی متحرک را پس از $۲۰s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲ \times ۲۰ + ۰ \Rightarrow v = ۴۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta x_۱ = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{۴۰+۰}{۲} \times ۲۰ = ۴۰۰m$$

در مرحله دوم بیان شده سرعت متحرک با آهنگ ثابت $۴m/s^۲$ کاهش می‌یابد یعنی شتاب متحرک در این مرحله $-۴m/s^۲$ است.

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x_۲ \Rightarrow ۰ - (۴۰)^۲ = ۲(-۴)\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲ = ۲۰۰m$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = ۴۰۰ + ۲۰۰ = ۶۰۰m$$

سطح زیر نمودار v-t

۳۹) متحرکی در یک مسیر مستقیم از حال سکون با شتاب ثابت $۳\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی حرکتش با شتاب ثابت $۱\frac{m}{s^۲}$ کند می‌شود و درنهایت می‌ایستد. اگر مسافت طی شده در کل مسیر ۶۰۰ متر باشد، مسافت طی شده در ۳۰ ثانیهٔ اول حرکت، چند متر است؟

سخت - سراسری - ۱۳۹۹

۱) ۴۰۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۵۵۰

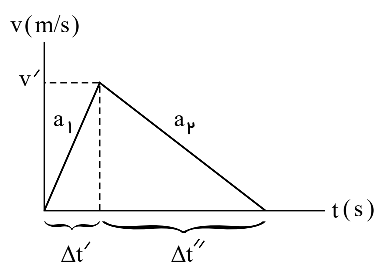
پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ برابر شتاب لحظه‌ای است.

نمودار $(v - t)$ را از ابتدا تا انتهای حرکت رسم می‌کنیم.

در هر بازه‌ای که شتاب ثابت است: $a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

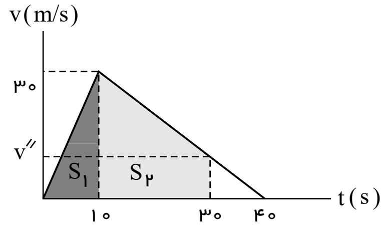
بنابراین چون: $a_۱ = ۳\ |a_۲|$ است: $\Delta t' = \frac{۱}{۳}\Delta t''$ (۱)

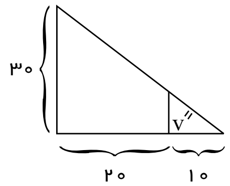


سطح زیر نمودار برابر $۶۰۰m$ است:

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲} \times v' \times (\Delta t' + \Delta t'') = ۶۰۰ & (۲) \\ \text{در قسمت اول حرکت:}\ v' = a_۱\Delta t' = ۳\Delta t' & (۳) \end{cases}$$

$$(1)\text{ و }(2)\text{ و }(3) \Rightarrow \frac{1}{2}(3\Delta t')(4\Delta t') = 600 \Rightarrow 6\Delta t'^2 = 600 \Rightarrow \Delta t' = 10s \begin{cases} v' = 30\frac{m}{s} \\ \Delta t'' = 30s \end{cases}$$





$$\Rightarrow \frac{v''}{30} = \frac{10}{30} \Rightarrow v'' = 10\frac{m}{s}$$

$$L = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 30 \times 10 + \frac{1}{2} \times 20 \times \underbrace{(10 + 30)}_{40} = 150 + 400 = 550m$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۴۰ معادلهٔ سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v = -2t + 4$ است. بزرگی جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم چند متر است؟

متوسط - سراسری ۱۳۸۸

(۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

پاسخ: (۴) (۳) (۲) **(۱)** دو ثانیه سوم یعنی از ۴ تا ۶ ثانیه، پس در این دو لحظه، سرعت متحرک را یافته و سپس با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی‌اش را محاسبه می‌کنیم.

$$t_1 = 4s \Rightarrow v_1 = -2 \times 4 + 4 = -4\frac{m}{s}$$

$$t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = -2 \times 6 + 4 = -8\frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v_{av}\Delta t \Rightarrow \Delta x = (\frac{-4 + (-8)}{2}) \times 2 = -12m \Rightarrow |\Delta x| = 12m$$

ترکیب معادلات - بازه‌های مختلف

۴۱ متحرکی با شتاب ثابت و بدون سرعت اولیه از نقطهٔ A به حرکت درمی‌آید و در ادامهٔ مسیر به نقطهٔ B و سپس C می‌رسد و فاصلهٔ ۱۲۰ متری BC را در مدت ۱۰ ثانیه طی می‌کند. اگر سرعت متحرک در نقطهٔ C، $20\frac{m}{s}$ باشد، فاصلهٔ بین A و B چند متر است؟

متوسط - خارج از کشور ۱۳۸۹

(۱) ۲٫۵ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۲۲٫۵

پاسخ: (۴) (۳) **(۲)** (۱) در این سؤال، ۳ نقطه مهم در مسئله داریم، بین B و C (معلوم: x, t, v_C) و بین B و A (معلوم: v_A، مجهول: x)، پس برای حل معادله بین A و B به a و v_B نیاز داریم که می‌توان از قسمت اول (BC) به‌دست آورد.

$$BC\ \text{مستقل از شتاب}: \Delta x = \frac{v_B + v_C}{2} \times \Delta t \Rightarrow 120 = \frac{v_B + 20}{2} \times 10 \Rightarrow v_B = 4\frac{m}{s}$$

$$BC\ \text{مستقل از مکان}: v_C = at + v_B \Rightarrow 20 = a \times 10 + 4 \Rightarrow a = 1/6\frac{m}{s^2}$$

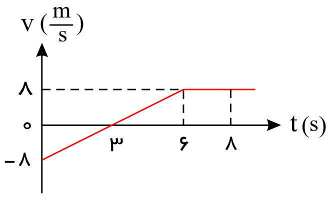
حال بین نقاط A و B می‌توان از معادله مستقل از زمان استفاده کرد:

$$AB\ \text{مستقل از زمان}: v_B^2 - v_A^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 16 - 0 = 2 \times 1/6 \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = 5m$$

سطح زیر نمودار v-t

۴۲) نمودار سرعت - زمان جسمی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. سرعت متوسط جسم درمدت ۸ ثانیه‌ی نشان داده شده چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۵



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

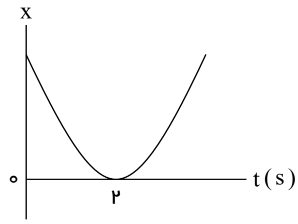
سطح زیر نمودار، سرعت - زمان برابر جابه‌جایی می‌باشد؛ بنابراین داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{-۸ \times ۳}{۲} + (۵+۲) \times \frac{۸}{۲}}{۸} = \frac{-۱۲ + ۲۸}{۸} = \frac{۱۶}{۸} = ۲\frac{m}{s}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۴۳) نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل روبه‌رو، به‌صورت سهمی است. کدام مورد درست است؟

سخت - خارج از کشور - ۱۳۹۹

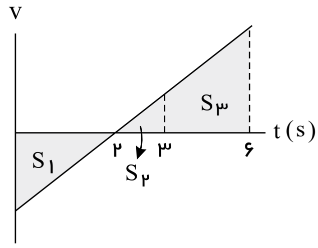


۱) مسافت طی شده در ۳ ثانیهٔ اول برابر مسافت طی شده در ۳ ثانیهٔ دوم است.
۲) مسافت طی شده در ۳ ثانیهٔ اول برابر بزرگی جابه‌جایی این بازهٔ زمانی است.
۳) بزرگی سرعت متوسط در ۴ ثانیهٔ اول برابر بزرگی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = ۱s$ تا $t_۲ = ۵s$ است.
۴) بزرگی سرعت متوسط در ۳ ثانیهٔ اول برابر بزرگی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = ۱s$ تا $t_۲ = ۴s$ است.

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ نمودار سهمی است. پس حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. $a > ۰$ و $v_۰ < ۰$ است. متحرک در $t = ۲s$ تغییر جهت داده است و می‌دانیم هنگام بررسی مسافت طی شده باید حواسمان به تغییر جهت دادن یا تغییر جهت ندادن جسم در بازهٔ زمانی موردنظر باشد. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

رد گزینهٔ (۱): متحرک در $t = ۲s$ تغییر جهت داده بنابراین مسافت در بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۳s$ (که متحرک در این بازهٔ زمانی و در $t = ۲s$ تغییر جهت داده) نمی‌تواند با مسافت طی شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t = ۳s$ تا $t = ۶s$ برابر باشد:

$$\begin{cases} L_{(۰-۳s)} = S_۱ + S_۲ \\ L_{(۳s-۶s)} = S_۳ \end{cases} \Rightarrow S_۱ + S_۲ \neq S_۳$$



برای سهولت در امر مقایسه می‌توانیم به a یک عدد فرضی نسبت دهیم مثلاً:

$$a = ۱(\frac{m}{s}) \Rightarrow v_{(t=۲)} = a\Delta t + v_{(t=۰)} \Rightarrow ۰ = ۲ \times ۱ + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۲\frac{m}{s} \Rightarrow v = at + v_۰ \Rightarrow v = t - ۲ \Rightarrow \begin{cases} t = ۳s \Rightarrow v = ۳ - ۲ = ۱\frac{m}{s} \\ t = ۶s \Rightarrow v = ۶ - ۲ = ۴\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |S_۱| = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱ = ۱m \\ S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۱ = ۰/۵m \\ S_۳ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times \underbrace{(۱+۴)}_{۵} = ۷/۵m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{(۰-۳s)} = |S_۱| + S_۲ = ۱ + ۰/۵ = ۱/۵m \\ L_{(۳-۶s)} = S_۳ = ۷/۵m \end{cases} \Rightarrow L_{(۰-۳s)} \neq L_{(۳-۶s)}$$

توجه: برای رد گزینهٔ (۱) به‌طور شهودی نیز عمل بفرمائید! شتاب ثابت، تقارن، توجه به بازه‌های زمانی و ...

رد گزینهٔ (۲):

$$\begin{cases} \Delta x_{(۰-۳s)} = S_۲ - |S_۱| \\ L_{(۰-۳s)} = S_۲ + |S_۱| \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{(۰-۳s)} \neq L_{(۰-۳s)}$$

رد گزینهٔ (۳): شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است، پس به دلیل تقارن:

$$[(v_{av})_{۰-۴s} = \frac{x_{(t=۴)} - x_{(t=۰)}}{۴ - ۰} = ۰] \neq [v_{(۱s-۵s)}(\neq ۰)]$$

تأیید گزینهٔ (۴): به دلیل اینکه شتاب ثابت است و تقارن در نمودار مکان - زمان،

$$\begin{cases} x_{(t=1s)} = x_{(t=3s)} \\ x_{(t=0)} = x_{(t=4s)} \end{cases} \Rightarrow x_{(3)} - x_{(0)} = x_{(1)} - x_{(4)} = |x_{(4)} - x_{(1)}| \Rightarrow \Delta x_{(0-3s)} = |\Delta x_{(1-4s)}| \Rightarrow |\frac{\Delta x}{\Delta t_{(0-3s)}}| = |\frac{\Delta x}{\Delta t_{(1-4s)}}| \Rightarrow (v_{av})_{0-3s} = (v_{av})_{1-4s}$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۴۴) متحرکی در مسیر مستقیم و با شتاب ثابت فاصلهٔ ۸۰ متری از A تا B را در مدت ۸ ثانیه طی می‌کند و در لحظهٔ رسیدن به نقطهٔ B سرعتش به $15\frac{m}{s}$ می‌رسد. شتاب متحرک چند متر بر مربع ثانیه است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۹

۱) $\frac{3}{2}$　　۲) $\frac{3}{4}$　　۳) $\frac{5}{2}$　　۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: ۴

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2}\Delta t \Rightarrow 80 = \frac{15 + v_0}{2} \times 8 \Rightarrow v_0 = 5\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 15 = a \times 8 + 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4}\frac{m}{s^2}$$

t ثانیهٔ n‌ام و آخر - بازه های زمانی برابر

۴۵) معادله سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به‌صورت $v = 4t + 2$ است. مسافتی که این متحرک در ثانیه سوم طی می‌کند چند متر است؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۱۴

پاسخ: ۳ — ثانیه سوم، فاصله زمانی بین $t = 2s$ تا $t = 3s$ است. سرعت متوسط را در این یک ثانیه حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow v_1 = (4 \times 2 + 2)\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s} \\ t_2 = 3s \Rightarrow v_2 = (4 \times 3 + 2)\frac{m}{s} = 14\frac{m}{s} \end{cases} , \quad \bar{v} = \frac{v_2 + v_1}{2} = (\frac{14 + 10}{2})\frac{m}{s} = 12\frac{m}{s}$$

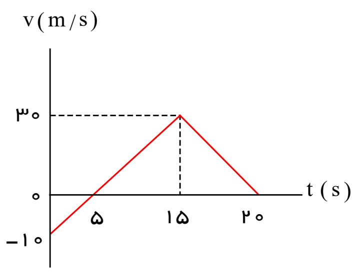
$$\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t = (12 \times 1)m = 12m$$

به این دلیل که متحرک تغییر جهت نداده است (سرعت پیوسته مثبت است)، اندازه جابه‌جایی با مسافت پیموده شده برابر است.

سطح زیر نمودار v-t

۴۶) نمودار سرعت - زمان متحرکی در مسیر مستقیم مطابق شکل مقابل است. سرعت متوسط آن در مدت ۲۰ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۳



۱) ۰٫۵
۲) ۲٫۵
۳) ۱۰
۴) ۱۵

پاسخ: ۳

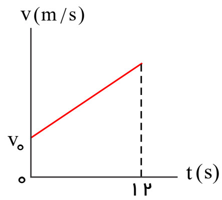
می‌دانیم که سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. بنابراین داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{-10 \times 5}{2} + \frac{15 \times 30}{2}}{20} = \frac{-25 + 225}{20} = \frac{200}{20} \Rightarrow v_{av} = 10\frac{m}{s}$$

نمودار سرعت–زمان و شتاب–زمان در حرکت با شتاب ثابت

۴۷ نمودار سرعت – زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در شکل روبه‌رو نشان داده شده است. سرعت متحرک در کدام لحظه برابر با سرعت متوسط آن در این ۱۲ ثانیه است؟

متوسط – سنجش – ۱۳۹۴



۱) پایان ثانیهٔ ششم

۲) ابتدای ثانیهٔ ششم

۳) در تمام لحظه‌ها

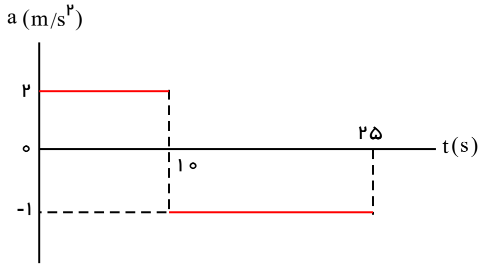
۴) در هیچ لحظه

پاسخ: ۴ ۳ ۲ **۱** در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر سرعت لحظهٔ وسط آن بازهٔ زمانی است.

سطح زیر نمودار a–t و رسم نمودار از روی نمودار

۴۸ نمودار شتاب – زمان متحرکی که از حال سکون روی محور x به حرکت درمی‌آید، مطابق شکل است. سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = ۲۵s$ چند متر بر ثانیه است؟

متوسط – سنجش – ۱۳۹۴



۱) ۵

۲) ۱۰

۳) ۱۵

۴) ۳۵

پاسخ: ۴ ۳ ۲ **۱** سطح زیر نمودار شتاب – زمان، برابر با تغییر سرعت است.

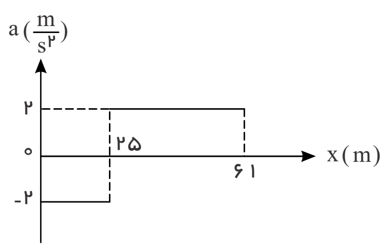
$$S = \Delta v = v_{۲۵} - \cancel{v_{\circ}}^{\circ} \Rightarrow \Delta v = (۲ \times ۱\circ) + (۲۵ - ۱\circ)(-۱) = ۲\circ - ۱۵ = ۵\frac{m}{s}$$

سرعت اولیه صفر است، پس سرعت در لحظهٔ $t = ۲۵s$ برابر $۵\frac{m}{s}$ است.

حرکت شامل چند بخش

۴۹ نمودار شتاب – مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر متحرک در لحظهٔ $t = \circ$ از مبدأ با سرعت $۱\circ\frac{m}{s}$ عبور کند، سرعت آن در مکان $x = ۶۱m$ چند متر بر ثانیه است؟

سخت – سراسری – ۱۳۹۷



۱) ۲۲

۲) ۱۲

۳) ۸

۴) ۶

پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱ با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان (سرعت – جابه‌جایی) می‌توان نوشت:

مرحلهٔ اول: $V^{۲} - V_{\circ}^{۲} = ۲a\Delta x \Rightarrow V^{۲} - ۱\circ\circ = ۲(-۲) \times ۲۵ \Rightarrow V = \circ$

پس سرعت متحرک در مکان $x = ۲۵m$ برابر صفر است. اکنون برای محاسبهٔ سرعت آن در مکان $x = ۶۱m$ خواهیم داشت:

$$V^{۲} - V_{\circ}^{۲} = ۲a\Delta x \Rightarrow V^{۲} - \circ = ۲ \times ۲ \times (۶۱ - ۲۵) \Rightarrow V^{۲} = ۱۴۴ \Rightarrow V = ۱۲\frac{m}{s}$$

ترکیب معادلات – بازه‌های مختلف

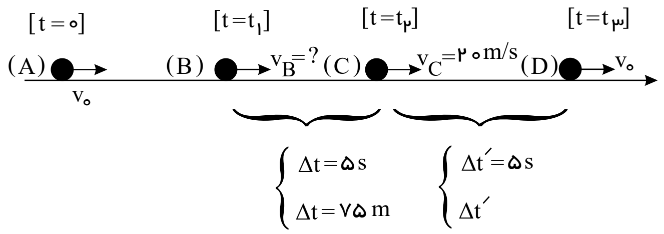
۵۰ متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت حرکت می‌کند و در مدت $۵s$، $۷۵m$ جابه‌جا می‌شود و بزرگی سرعتش به $۲\circ\frac{m}{s}$ می‌رسد. در ۵ ثانیهٔ بعدی سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه می‌شود؟

متوسط – خارج از کشور – ۱۳۹۹

۱) ۱۵ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵

پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱

گام اول: حرکت شتابدار با شتاب ثابت بر خط راست است. مدت $5s$ یک بازهٔ زمانی که ابتدا و انتهای این بازهٔ زمانی در متن سؤال مشخص نشده است. فرض کنیم این بازهٔ زمانی بین لحظه‌های t_1 و t_2 باشد:



گام دوم: ابتدا تندی متحرک در مکان (B) و سپس شتاب حرکت (a) را می‌یابیم:

$$(B \to C): \Delta x = (\frac{v_B + v_C}{2})(\Delta t) \to 75 = (\frac{v_B + 20}{2})(5) \Rightarrow v_B + 20 = 30 \Rightarrow v_B = 10\frac{m}{s} \to a = \frac{\Delta v_{BC}}{\Delta t_{BC}} = \frac{20-10}{5} = 2\frac{m}{s^2} \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

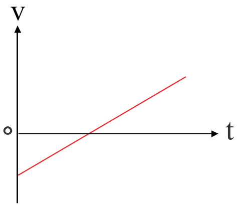
گام سوم:

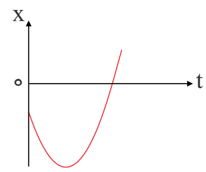
$$(C \to D): \begin{cases} (v_{av})_{CD} = (\frac{v_D + v_C}{2}) = (\frac{30+20}{2}) = 25\frac{m}{s} \\ v_D = v_C + a\Delta t' = 20 + 2 \times 5 = 30\frac{m}{s} \end{cases}$$

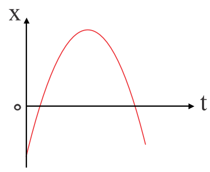
نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

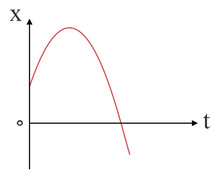
۵۱) نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. نمودار مکان - زمان آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟ (منحنی‌های رسم شده در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ قسمتی از یک سهمی هستند.)

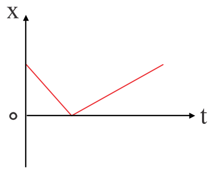
متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۵



۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: ۴ ۳ ۲ **۱** سرعت اولیه منفی است و حرکت در ابتدا کندشونده در جهت منفی و سپس تندشونده در جهت مثبت است.

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۵۲) معادلهٔ سرعت متحرکی در SI به‌صورت $v = 2t + 4$ است. مسافتی که متحرک در ثانیه‌ی چهارم حرکت طی می‌کند چند متر است؟

متوسط- سراسری- ۱۳۸۲

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱

سرعت اولیه و شتاب مثبت هستند و حرکت پیوسته تندشونده است و تغییر جهت وجود ندارد و مسافت طی شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر است.

$$v = at = 4 \Rightarrow \begin{cases} t = 3s \Rightarrow v_3 = 10\frac{m}{s} \\ t = 4s \Rightarrow v_4 = 12\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_3 + v_4}{2}\Delta t = \frac{10+12}{2} \times 1 = 11m$$

۵۳) معادلهٔ مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = -5t^2 + 5t + 12$ است. در مورد جهت حرکت و نوع آن کدام مطلب درست است؟

متوسط- سراسری- ۱۳۸۳

۱) همواره در جهت محور و کندشونده
۲) ابتدا در جهت محور و کندشونده
۳) ابتدا در خلاف جهت محور و کندشونده
۴) همواره در خلاف جهت محور و کندشونده

پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱ به‌طور کلی در حرکت با شتاب ثابت، اگر ضرایب t^2 و t هم‌علامت باشند، حرکت همواره تندشونده و در جهت علامت ضریب t است.

ولی اگر ضرایب t^2 و t هم‌علامت نباشند، حرکت در ابتدا کندشونده (قبل از لحظهٔ توقف $(t_s = |\frac{v_0}{a}|$ در جهت علامت ضریب t و بعد از آن تندشونده (در خلاف علامت ضریب t) است.

$$x = -5t^2 + 5t + 12 \Rightarrow a = -10\frac{m}{s^2}, v_0 = 5\frac{m}{s}$$
$$v = at + v_0 = -10t + 5 = 0 \Rightarrow t = 0/5s$$

در ابتدای حرکت سرعت مثبت (هم‌علامت با ضریب t) و حرکت در جهت محور است و شتاب منفی و حرکت کندشونده است و در لحظهٔ $t = 0/5s$ سرعت صفر می‌شود و جهت حرکت تغییر می‌کند.

مقایسهٔ چند حرکت و شتاب نسبی

۵۴ دو متحرک از حال سکون با شتاب‌های $2\,m/s^2$ و $8\,m/s^2$ از نقطه‌ی A در مسیر مستقیم به مقصد نقطه‌ی B هم‌زمان به حرکت درمی‌آیند. اگر اختلاف زمانی رسیدن آن‌ها به مقصد ۳ ثانیه باشد، AB چند متر است؟ متوسط- خارج از کشور- ۱۳۸۵

① ۳۶ ② ۴۸ ③ ۵۴ ④ ۷۲

پاسخ: ④ ③ ② **①** متحرکی که با شتاب کمتر شروع به حرکت می‌کند، دیرتر به نقطه‌ی B می‌رسد و بنابراین ۳ ثانیه بیشتر در راه است، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2}a(t+3)^2 = \frac{1}{2}a'(t)^2 \xrightarrow[a'=8\frac{m}{s^2}]{a=2\frac{m}{s^2}} \frac{1}{2} \times 2 \times (t+3)^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 \Rightarrow t+3 = 2t \Rightarrow t = 3\,s$$

بنابراین متحرکی که با شتاب کمتر شروع به حرکت کرده، $6\,s$ در راه بوده است و داریم:

$$AB = \frac{1}{2}a(t+3)^2 \Rightarrow AB = \frac{1}{2} \times 2 \times (3+3)^2 = 36\,m$$

توقف - مقایسهٔ جابه‌جایی و مسافت

۵۵ خودرویی با سرعت $54\frac{km}{h}$ در حال حرکت است. هنگامی که خودرو به فاصله ۲۰ متری یک مانع می‌رسد، راننده با شتاب ثابت ترمز می‌کند و خودرو پس از ۲ ثانیه به مانع برخورد می‌کند. اندازه سرعت خودرو در لحظه برخورد چند کیلومتر بر ساعت است؟ متوسط- سنجش- ۱۳۹۴

① ۵ ② ۱۰ ③ ۱۸ ④ ۳۶

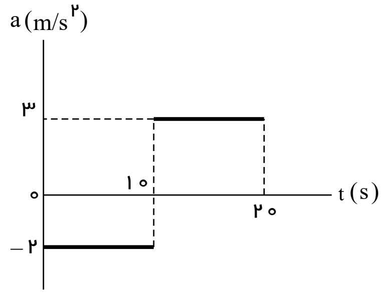
پاسخ: ④ **③** ② ①

با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان داریم:

$$v_0 = 54\frac{km}{h} = 15\frac{m}{s}$$
$$\Delta x = \frac{v+v_0}{2} \times \Delta t \Rightarrow 20 = \frac{v+15}{2} \times 2 \Rightarrow v = 5\frac{m}{s} = 18\frac{km}{h}$$

سطح زیر نمودار v-t

۵۶ نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t = 0$ با سرعت اولیهٔ $\vec{v_0} = (10\frac{m}{s})\vec{i}$ برای اولین بار از مبدأ مکان عبور می‌کند، مطابق شکل زیر است. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، متحرک برای سومین بار از مبدأ عبور می‌کند؟ متوسط- سراسری- ۱۳۹۹

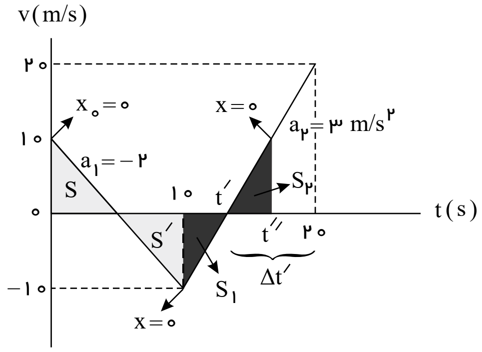


① ۱۰
② $\frac{40}{3}$
③ ۱۵
④ $\frac{50}{3}$

پاسخ: **④** ③ ② ① ابتدا به کمک مفهوم شتاب، سرعت را در ثانیه‌های $t = 10$ و $t = 20$ می‌یابیم:

$$t = 10s \Rightarrow v = at + v_0 = (-2)(10) + 10 = -10\frac{m}{s}$$
$$t = 20s \Rightarrow v_{(t=20s)} = at + v_{t=10s} = 3 \times 10 + (-10) = 20\frac{m}{s}$$

نمودار $(v-t)$ را رسم می‌کنیم:



$S=S' \Rightarrow x_{(t=۱۰)}-x_{(t=۰)}=S-S'=۰ \Rightarrow x_{(t=۱۰)}=x_۰=۰$

$S_۲$ مساحت مثلثی در بالای محور t است که $S_۲=S_۱$ چون:

$x_{(t=t'')}-x_{(t=۱۰)}=S_۲-S_۱ \Rightarrow ۰=S_۲-S_۱ \Rightarrow S_۲=S_۱$

چون دو مثلث مشابه و هم مساحت هستند پس باید برابر باشند. طبق مفهوم شتاب از $t=t'$ تا $t=۲۰s$، $a=۳\frac{m}{s^۲}$ یعنی در هر ثانیه سرعت $۳\frac{m}{s}$ افزایش یافته تا از $v_{t'}=۰$ به $v_{t'-۲۰s}=۲۰\frac{m}{s}$ برسد.

$\overset{\text{زمان سپری شده}}{۱s} \rightarrow \overset{\text{تغییرات سرعت}}{۳\frac{m}{s}} \Rightarrow \Delta t'=\frac{۲۰}{۳}s \Rightarrow t''=t'+\frac{۲۰}{۳}=۱۰+\frac{۲۰}{۳}=\frac{۵۰}{۳}s$

$\Delta t' \rightarrow ۲۰\frac{m}{s}$ (چرا؟ از تساوی در مثلث کمک بگیرید. $t'=۱۰$)

مقایسهٔ چند حرکت و شتاب نسبی

۵۷ دو متحرک روی خط راست با شتاب‌های ثابت a و $a+۱/۵\frac{m}{s^۲}$ از یک نقطه و از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و بعد از مدت t، سرعت آن‌ها به‌ترتیب $۱۰\frac{m}{s}$ و $۲۲\frac{m}{s}$ می‌شود. t چند ثانیه است؟

متوسط – خارج از کشور – ۱۳۹۶

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

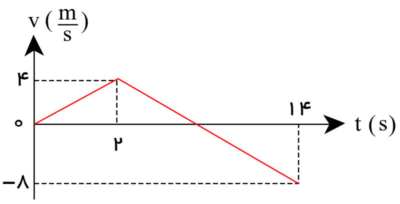
پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱

$v=at+\cancel{v_۰} \Rightarrow \begin{cases} v_۱=a_۱t \Rightarrow ۱۰=at \quad (۱) \\ v_۲=a_۲t \Rightarrow ۲۲=(a+۱/۵)t \end{cases} \Rightarrow ۱۲=۱/۵t \Rightarrow t=۸s$

نمودار سرعت–زمان و شتاب–زمان در حرکت با شتاب ثابت

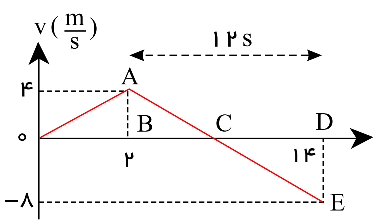
۵۸ متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت – زمان آن مطابق شکل روبه‌رو است. متحرک در ۱۴ ثانیه‌ی اول حرکت، چند ثانیه در سوی مخالف محور x حرکت کرده است؟

متوسط – سراسری – ۱۳۸۹



۱) ۴
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) ۸

پاسخ: **۴** ۳ ۲ ۱ با استفاده از شیب نمودار بین دو لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۱۴s$ با استفاده از تشابه مثلثها، لحظهٔ تلاقی نمودار با محور زمان که همان لحظهٔ تغییر جهت است را می‌یابیم.

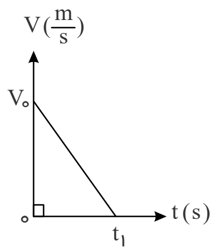


$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{CD} \Rightarrow \frac{۴}{۱۲-CD}=\frac{۸}{CD}$
$\Rightarrow CD=۲۴-۲CD \Rightarrow CD=۸s$

درنتیجه متحرک ۸ ثانیه دارای سرعت منفی بوده و در سوی خلاف محور xها حرکت کرده است.

سطح زیر نمودار v-t

۵۹) نمودار سرعت ــ زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر این متحرک در ۲ ثانیهٔ اول ۳۶ متر و در ۲ ثانیهٔ آخر ۴ متر جابه‌جا شده باشد، t_1 چند ثانیه است؟ سخت- خارج از کشور- ۱۳۹۷



۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

پاسخ: ۲ در ۲ ثانیهٔ آخر ۴ متر جابه‌جا شده و سرعت آن به صفر رسیده پس:

$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt \Rightarrow ۴ = -\frac{۱}{۲}a \times ۲^۲ \Rightarrow a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

در ۲ ثانیهٔ اول ۳۶ متر جابه‌جا شده است پس:

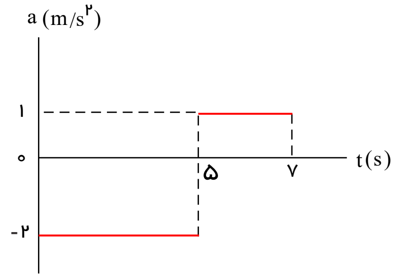
$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t \Rightarrow ۳۶ = \frac{۱}{۲} \times -۲ \times ۴ + v_\circ \times ۲ \Rightarrow v_\circ = ۲۰\frac{m}{s}$$

در کل حرکت

$$v = at + v_\circ \Rightarrow ۰ = -۲ \times t_۱ + ۲۰ \Rightarrow t_۱ = ۱۰s$$

سطح زیر نمودار a-t و رسم نمودار از روی نمودار

۶۰) نمودار شتاب - زمان متحرکی در SI به‌صورت شکل زیر است. اگر سرعت اولیه متحرک $۲۰\frac{m}{s}$ باشد، سرعت آن در لحظه $t = ۷s$ چند متر بر ثانیه است؟ متوسط- سنجش- ۱۳۹۴



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۰
۴) ۱۴

پاسخ: ۲ تغییرسرعت برابر با سطح زیر نمودار شتاب - زمان است.

$$S = \Delta v = v_۷ - v_\circ$$
$$\Delta v = -۲(۵) + ۱(۷-۵) = -۱۰ + ۲ = -۸ \Rightarrow v_۷ - v_\circ = -۸ \Rightarrow v_۷ - ۲۰ = -۸ \Rightarrow v_۷ = ۱۲\frac{m}{s}$$

t ثانیهٔ nام و آخر - بازه های زمانی برابر

۶۱) متحرکی با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم در زمان‌های مساوی و متوالی جابه‌جایی‌های $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ را انجام می‌دهد، کدام رابطه صحیح است؟ متوسط- آزاد عصر- ۱۳۸۱

۱) $x_۱ + x_۳ = ۲x_۲$
۲) $x_۱ + x_۲ = x_۳$
۳) $x_۱ = x_۲ = x_۳$
۴) $x_۲ + x_۳ = ۲x_۱$

پاسخ: ۱

در حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی در زمان‌های مساوی و متوالی تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهند، بنابراین:

$$x_۱ + x_۳ = ۲x_۲$$

مقایسهٔ چند حرکت و شتاب نسبی

۶۲) دو متحرک روی محور x از حال سکون با شتاب‌های a و $\frac{۹}{۱۶}a$ همزمان از یک نقطه به سوی مقصدی معین به حرکت درمی‌آیند و با فاصلهٔ زمانی ۲ ثانیه به مقصد می‌رسند. زمان حرکت جسمی که زودتر به مقصد می‌رسد، چند ثانیه است؟ متوسط – سراسری ۱۳۹۹

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱

گام اول: متحرک با شتاب a، سریع‌تر از متحرک با شتاب $\frac{۹}{۱۶}a$ حرکت می‌کند. بنابراین اگر متحرک با شتاب a (را که با A نشان خواهیم داد) مسیر مستقیم معین شده را در مدت زمان Δt_A طی کند متحرک دوم (که با B نشان می‌دهیم) در مدت زمان $\Delta t_B = \Delta t_A + ۲s$ همان مسیر را طی خواهد نمود:

$$\begin{cases} \Delta x_A = \frac{۱}{۲}a\Delta t_A^۲ + v_{\circ A}\Delta t_A \\ \Delta x_B = \frac{۱}{۲}(\frac{۹}{۱۶}a)(\Delta t_A + ۲)^۲ + v_{\circ B}\Delta t_B \end{cases} \xrightarrow[v_{\circ A}=v_{\circ B}=\circ]{\Delta x_A=\Delta x_B} a\Delta t_A^۲ = \frac{۹}{۱۶}a(\Delta t_A + ۲)^۲ \Rightarrow \Delta t_A = \frac{۳}{۴}(\Delta t_A + ۲) = \frac{۳}{۴}\Delta t_A + ۱{,}۵ \Rightarrow \circ{,}۲۵\Delta t_A = ۱{,}۵$$

$$\Rightarrow \Delta t_A = ۶s$$

۶۳) دو متحرک A و B از یک نقطه بدون سرعت اولیه در یک مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کنند. اگر شتاب متحرک A، ۴ برابر شتاب متحرک B باشد، در یک جابه‌جایی مساوی، سرعت متوسط متحرک A چند برابر سرعت متوسط متحرک B است؟ متوسط – خارج از کشور ۱۳۹۲

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۴

پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱

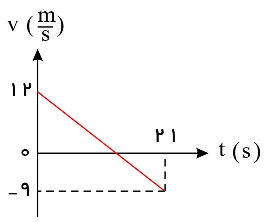
$$\bar{v}_A = \frac{\Delta x}{\Delta t_A}, \bar{v}_B = \frac{\Delta x}{\Delta t_B} \Rightarrow \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$$

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_A t_A^۲ = \frac{۱}{۲}a_B t_B^۲ \Rightarrow (\frac{t_B}{t_A})^۲ = \frac{a_A}{a_B} = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{t_B}{t_A} = ۲ \Rightarrow \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = ۲$$

سطح زیر نمودار v-t

۶۴) نمودار سرعت – زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. بزرگی جابه‌جایی متحرک در فاصله‌ی زمانی $t = ۶s$ تا $t = ۱۲s$ چند متر است؟ متوسط – سراسری ۱۳۹۳



۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) ۲۲٫۵
۴) ۳۲٫۵

پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱

با توجه به اینکه نمودار v-t یک خط با شیب ثابت است، حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. پس شیب خط برابر شتاب حرکت متحرک است. بنابراین با پیدا کردن شتاب، معادلهٔ سرعت را نوشته و داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۹ - ۱۲}{۲۱ - \circ} = -۱\frac{m}{s^۲}$$

$$v = at + v_\circ \xrightarrow[v_\circ=۱۲]{a=-۱} v = -t + ۱۲$$

$$\begin{cases} t_۱ = ۶ \to v_۱ = -(۶) + ۱۲ = ۶\frac{m}{s} \\ t_۲ = ۱۲ \to v_۲ = -۱۲ + ۱۲ = \circ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}\Delta t = \frac{۶ + \circ}{۲} \times (۱۲ - ۶) = ۱۸m$$

توقف – مقایسهٔ جابه‌جایی و مسافت

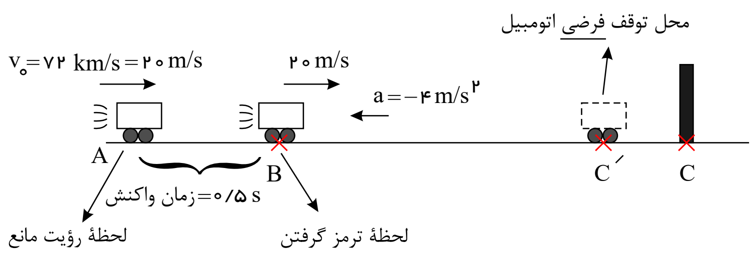
۶۵ اتومبیلی با تندی (سرعت) ثابت $۷۲\frac{km}{h}$ در یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند که ناگهان راننده مانع ثابتی را در ۵۲ متری خود می‌بیند و ترمز می‌کند و حرکت اتومبیل با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ کند می‌شود. اگر زمان واکنش راننده ۰٫۵ ثانیه باشد، اتومبیل:

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۹

(۱) ۲ متر قبل از مانع متوقف می‌شود.
(۲) در لحظهٔ رسیدن به مانع متوقف می‌شود.
(۳) با تندی (سرعت) $۸\frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند.
(۴) با تندی (سرعت) $۴\sqrt{۵}\frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند.

پاسخ: (۴) (۳) (۲) (۱) فرض کنیم جسم در نقطهٔ C' متوقف می‌شود. طبق مفهوم شتاب ($a = -۴\frac{m}{s^۲}$ یعنی از $v_۰ = +۲۰\frac{m}{s}$ در هر ثانیه $۴\frac{m}{s}$ کاسته می‌شود)، پس از $۵s$ متحرک متوقف می‌شود. جابه‌جایی جسم در این مدت:

$$\Delta x_{BC'} = (\frac{v+v_۰}{۲})\Delta t = (\frac{۰+۲۰}{۲})(۵) = ۵۰m$$



گام دوم: در مدت زمان واکنش راننده، اتومبیل در مدت $۰٫۵m$ با تندی $۲۰\frac{m}{s}$ به مقدار $\Delta x_{AB} = v\Delta t \Rightarrow \Delta x_{AB} = ۱۰m$.

گام سوم:

$$\Delta x_{AB} + \Delta x_{BC'} = ۱۰ + ۵۰ = ۶۰m > \Delta x_{AC} = ۵۲m$$

پس به مانع برخورد می‌کند. امّا با چه تندی؟

$$v_C^۲ - v_B^۲ = ۲a\Delta x_{BC} \Rightarrow v_C^۲ - ۲۰^۲ = ۲(-۴)(\underbrace{۴۲}_{(۵۲-۱۰=۴۲)}) \Rightarrow v_C^۲ = ۴۰۰ - ۳۳۶ \Rightarrow v_C = ۸\frac{m}{s}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۶۶ اتومبیل A در جهت محور x با تندی ثابت $۱۰\frac{m}{s}$ در لحظهٔ $t=۰$ از مبدأ محور عبور می‌کند و پس از $۱۱s$ حرکتش با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ کند می‌شود. اتومبیل B نیز در جهت x در لحظهٔ $t=۰$ با تندی اولیهٔ $۲\frac{m}{s}$ از مبدأ محور عبور می‌کند و حرکتش با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ تند می‌شود و پس از ۵ ثانیه با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. لحظه‌ای که دو اتومبیل به‌هم می‌رسند، تندی اتومبیل B چند متر بر ثانیه از تندی اتومبیل A بیشتر است؟

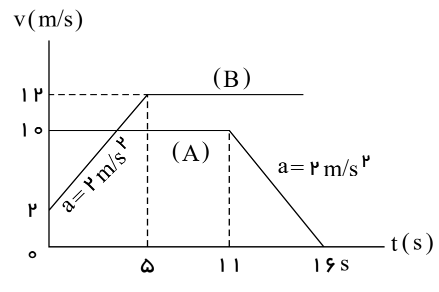
سخت- خارج از کشور- ۱۳۹۹

(۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

پاسخ: (۴) (۳) (۲) (۱) از نظر محاسبات یکی از تست‌های طولانی کنکور است. برای تسریع و سهولت در پاسخ‌دهی به این تست از نمودار $(v-t)$ کمک می‌گیریم؛

گام اول: نمودار $(v-t)$ هر دو متحرک را رسم می‌کنیم. سرعت متحرک (B) در پایان ثانیهٔ پنجم:

$v = at + v_۰ = ۲\times ۵ + ۲ = ۱۲\frac{m}{s}$ خواهد بود.



هر دو متحرک در مبدأ زمان در مبدأ مکان بوده‌اند:

$$x_{۰A} = x_{۰B} = ۰$$

لحظه‌ای که دو اتومبیل به‌هم می‌رسند: $x_A = x_B$. بنابراین اگر لحظهٔ موردنظر را $t = t'$ درنظر بگیریم:

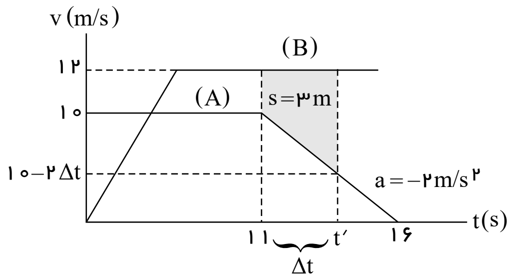
$$(t_۲ = t' \text{ تا } t_۱ = ۰ \text{ در بازهٔ زمانی}) \Rightarrow \Delta x_A = \Delta x_B \text{ (جابه‌جایی دو متحرک یکسان است)}$$

گام دوم: سطح زیر نمودار $(v-t)$ برابر جابه‌جایی است؛ با کمی تأمل در شکل مشخص است که تا $t = ۵s$ این اتفاق رُخ نمی‌دهد. ببینیم تا $t = ۱۱s$ آیا جابه‌جایی دو متحرک (مساحت سطح زیر دو نمودار) یکسان می‌شود یا خیر؟

$A: \Delta x_A = 11 \times 10 = 110m$ و $B: \Delta x_B = \underset{\text{ذوزنقه}}{S} + \underset{\text{مستطیل}}{S} = \frac{1}{2}(5)\underbrace{(2+12)}_{14} + 12 \times 6 = 35 + 72 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_A = 110m \\ \Delta x_B = 107m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_B < \Delta x_A \Rightarrow t' > 11s$

$\Rightarrow$ کافی است مساحت سطح زیر نمودار متحرک B از $t = 11s$، به بعد $3m$ بیشتر از مساحت سطح زیر نمودار A باشد.

گام سوم:



$$S = \frac{1}{2}(\Delta t)\underbrace{(2 + (12 - (10 - 2\Delta t)))}_{4+2\Delta t} = 3 \Rightarrow 2\Delta t + \Delta t^2 = 3 \Rightarrow \Delta t^2 + 2\Delta t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow -3s \\ \searrow 1s \checkmark \end{matrix} \Rightarrow t' = 12s$$

$$t' = 12s \begin{cases} v_B = 12\frac{m}{s} \\ v_A = 10 - 2\Delta t = 10 - 2 \times 1 = 8\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_B - v_A = 12 - 8 = 4\frac{m}{s}$$

سطح زیر نمودار v-t

۶۷) متحرکی روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند. اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 0$ در جهت محور x باشد و بردار سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر $\vec{v}_{av} = (7/5\frac{m}{s})\vec{i}$ و تندی متوسط در این بازه $8/5\frac{m}{s}$ باشد، مسافت طی‌شده در ۲ ثانیهٔ اول حرکت چند متر است؟

سخت - سراسری - ۱۴۰۰

۱) ۵   ۲) ۱۵   ۳) ۲۵   ۴) ۳۵

پاسخ: ۴ سرعت در $t = 0$، در جهت محور x است (دقت کنید در جهت محور x بودن الزاماً به مفهوم $x > 0$ بودن نیست بلکه یعنی جهت سرعت متحرک در جهت $(+)$ محور x است، درحالی که ممکن است $x < 0$ باشد.) پس $v_0 > 0$.

به کمک سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت جابه‌جایی متحرک را می‌یابیم:

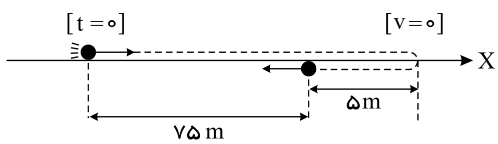
$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{\Delta x}}{\Delta t} = 7/5\vec{i} \Rightarrow (\frac{\Delta x}{\Delta t})\vec{i} = 7/5\vec{i}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = 7/5 \Rightarrow \Delta x = 7/5 \times 10 = 75m \quad (1)$$

تندی متوسط متحرک در همین مدت $8/5\frac{m}{s}$ شده است، از اینکه تندی متوسط متحرک بیشتر از سرعت متوسط متحرک شده است، در می‌یابیم که الزاماً متحرک تغییر جهت داده است. یعنی مسافت طی شده بیشتر از جابه‌جایی است.

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{10} = 8/5 \Rightarrow L = 85m \quad (2)$$

با توجه به مقادیر (۱) و (۲):



حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. نمودار $(v - t)$ یک خط مایل است با $v_0 > 0$

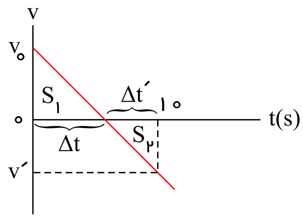
$(۱)\,,\,(۲) \Rightarrow S_۱ = ۸۰m\,,\; S_۱ + |S_۲| = ۸۵m \Rightarrow |S_۲| = ۵m$

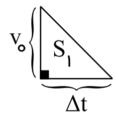
$$\frac{|v'|}{v_۰} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\,,\;\begin{cases} S_۱ = \frac{۱}{۲}v_۰\Delta t = ۸۰ \\ S_۲ = \frac{۱}{۲}|v'|\Delta t' = ۵ \end{cases}$$

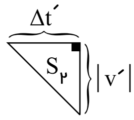
$$\Rightarrow \frac{|v'|}{|v|} \times \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{۵}{۸۰} = \frac{۱}{۱۶} \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۳)} \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^۲ = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{۱}{۴}\;\; \frac{\Delta t'}{۱۰ - \Delta t'} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = ۲s \Rightarrow \Delta t = ۸s$$



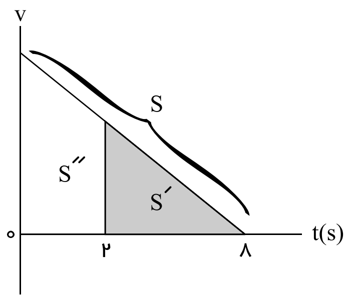




$\Rightarrow S' = ?$

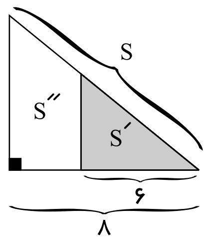
$\Rightarrow S''_{(۰-۲s)} = \Delta x = L = ?$

$\Rightarrow S_۱ = ۸۰m$



$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{۶}{۸}\right)^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \frac{S'}{۸۰} = \frac{۹}{۱۶}$$

$\Rightarrow S' = ۴۵ \Rightarrow$ مجهول سؤال $= S - S' = ۸۰ - ۴۵ = ۳۵m$



توجه: می‌توان پس از مشخص شدن $\Delta t = ۸s$، از روش زیر بهره برد به نحوی که: در بازهٔ زمانی $(۰ - ۸s)$ و $(۲s - ۸s)$، به مسئله وارونه نگاه کنیم تا $v_۰ = ۰$ شود. آنگاه:

$$(۰ \to ۸s) \to (۸s \to ۰) \Rightarrow \begin{cases} v_۰ = v_{(t=۸s)} = ۰ \\ |\Delta x| = \frac{۱}{۲}a\Delta t^۲ \Rightarrow ۸۰ = \frac{۱}{۲}|a| \times ۸^۲ \Rightarrow |a| = ۲/۵\frac{m}{s^۲} \end{cases}$$

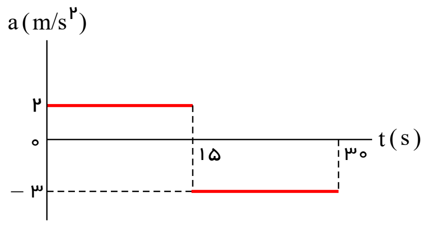
$$(۲s \to ۸s) \to (۸s \to ۲s) \begin{cases} v_۰ = v_{(t=۸s)} = ۰ \\ |\Delta x| = \frac{۱}{۲}a\Delta t^۲ = \frac{۱}{۲}(۲/۵)۶^۲ = ۴۵m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجهول تست $= S - S' = ۸۰ - ۴۵ = ۳۵m$

سطح زیر نمودار a–t و رسم نمودار از روی نمودار

۶۸ نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند و بردار سرعت اولیهٔ آن در SI به‌صورت $\vec{v}_۰ = -۱۰\vec{i}$ است، مطابق شکل زیر است. بزرگی جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ ششم، چند برابر بزرگی جابه‌جایی در ۵ ثانیهٔ اول حرکت است؟

سخت- خارج از کشور- ۱۳۹۹



۱) ۳/۵

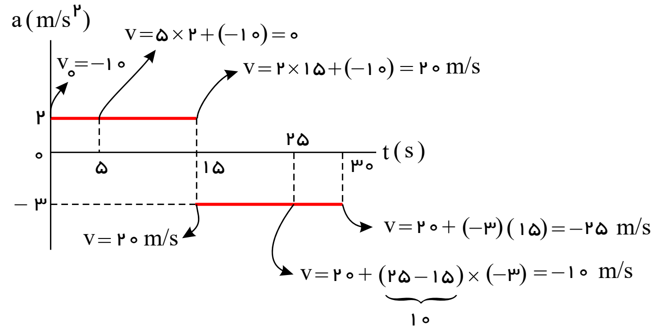
۲) ۲

۳) ۱/۵

۴) ۱

پاسخ: ۴ ۳ ۲ **۱**

روش اول: کافی است از مفهوم شتاب در هر بازهٔ زمانی استفاده کرده، سرعت متحرک را در لحظات $t = ۵s$ و $t = ۲۵s$ و $t = ۳۰s$ می‌یابیم:



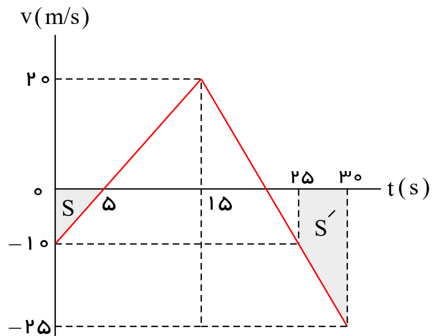
$$\underbrace{\text{در بازهٔ زمانی صفر تا } ۵s}_{\text{۵ ثانیهٔ اول}} \Rightarrow \Delta x = (\frac{۰ + (-۱۰)}{۲})(۵) = -۲۵m \rightarrow |\Delta x| = ۲۵m$$

$$\underbrace{\text{در بازهٔ زمانی } ۲۵s \text{ تا } ۳۰s}_{\text{۵ ثانیهٔ ششم}} \Rightarrow \Delta x' = (\frac{-۲۵ + (-۱۰)}{۲})(۵) = \frac{-۳۵ \times ۵}{۲} = -۸۷/۵m \Rightarrow |\Delta x'| = ۸۷/۵m \Rightarrow |\frac{\Delta x'}{\Delta x}| = \frac{۸۷/۵}{۲۵} = ۳/۵$$

توجه: دقت کنیم در بازهٔ زمانی داده شده شتاب ثابت بوده است. (در هر بازهٔ زمانی جداگانه)

روش دوم: کافی است نمودار $(v - t)$ را رسم کنیم:

v را در لحظات $t = ۵s$ و $t = ۲۵s$ و $t = ۳۰s$ مشخص می‌کنیم و به کمک سطح زیر نمودار، جابه‌جایی در هر مرحله را محاسبه می‌کنیم.



$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = ۰ - S = -\frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۵ = -۲۵m \\ \Delta x' = ۰ - S' = -\frac{۱}{۲} \times ۵ \times (۱۰ + ۲۵) = -۸۷/۵m \end{cases} \Rightarrow |\frac{\Delta x'}{\Delta x}| = \frac{۸۷/۵}{۲۵} = ۳/۵$$

سطح زیر نمودار v-t

۶۹ **نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t_۱ = ۲s$ مکان متحرک در SI به‌صورت $\vec{x_۱} = -۶\vec{i}$ باشد، مکان متحرک در لحظهٔ $t_۲ = ۱۵s$ در SI، کدام است؟**

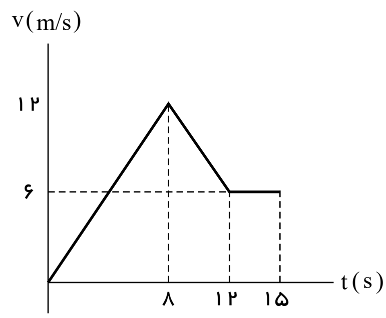
متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱) $۹۳\vec{i}$

۲) $۹۶\vec{i}$

۳) $۱۰۵\vec{i}$

۴) $۱۱۸\vec{i}$

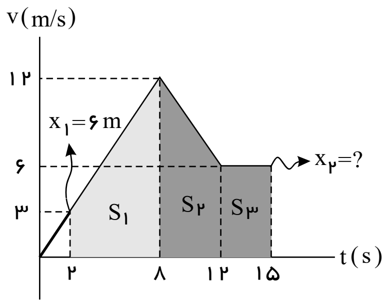


پاسخ: ۴ ۳ ۲ **۱** گام اول: ابتدا سرعت متحرک را در $t = ۲s$ می‌یابیم. چندین روش وجود دارد. مثلاً اینکه از $t = ۰$ تا $t = ۸s$ شتاب ثابت است (چون شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ برابر شتاب بوده و شیب تغییر ننموده است.)

$a = (a_{av})_{۰-۸s} = (a_{av})_{۰-۲s} \Rightarrow \frac{۱۲-۰}{۸-۰} = \frac{v-۰}{۲-۰} \Rightarrow v = ۳\frac{m}{s}$

(برای یافتن v در $t = ۲s$ راه‌های زیادی وجود دارد: معادلهٔ خط، تالس، مفهوم شتاب، معادلهٔ سرعت و ...)

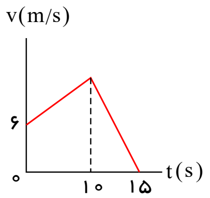
گام دوم: از $t = ۲s$ تا $t = ۱۵s$ مساحت سطح زیر نمودار را یافته و کار تمام!



$$\Delta x = \Delta x_۲ - (-۶) = S_۱ + S_۲ + S_۳ \Rightarrow x_۲ + ۶ = \underbrace{\frac{۱}{۲} \times ۶ \times (۳+۱۲)}_{۴۵} + \underbrace{\frac{۱}{۲}(۴)(۶+۱۲)}_{۳۶} + \underbrace{۳ \times ۶}_{۱۸} \Rightarrow x_۲ + ۶ = ۹۹ \to x_۲ = ۹۳m \Rightarrow \vec{x}_۲ = ۹۳\vec{i}$$

۷۰ نمودار سرعت - زمان متحرکی بر مسیر مستقیم به شکل زیر و سرعت متوسط آن در ۱۵ ثانیه برابر $۸\frac{m}{s}$ است، بیشترین سرعت آن چند $\frac{m}{s}$ است؟

متوسط - آزاد عصر - ۱۳۸۱



۱) ۱۰ ۲) ۱۵

۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: ۳

ابتدا با توجه به معلوم بودن سرعت متوسط و زمان کل حرکت، جابه‌جایی را محاسبه می‌کنیم. پس از آن با استفاده از سطح محصور بین نمودار محور زمان (جابه‌جایی کل) مقدار مجهول را می‌یابیم. سطح زیر نمودار $v - t$ معرف Δx می‌باشد:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۸ = \frac{\Delta x}{۱۵} \Rightarrow \Delta x = ۱۲۰m$$

$$\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = (۶+v)\frac{۱۰}{۲} + v \times \frac{۵}{۲} = ۳۰ + ۷{,}۵v = ۱۲۰ \Rightarrow v = \frac{۹۰}{۷{,}۵} = ۱۲m/s$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۷۱ متحرکی روی محور xها از مکان $x_۰ = ۵m$ با سرعت اولیه $۸\frac{m}{s}$ و شتاب ثابت به حرکت درمی‌آید و در مکان $x = ۸{,}۵m$ سرعت آن به $۶\frac{m}{s}$ می‌رسد. معادله‌ی مکان این متحرک در SI کدام است؟

متوسط - آزاد صبح - ۱۳۸۱

۱) $x = ۲t^۲ + ۸t + ۵$ ۲) $x = -۴t^۲ + ۸t + ۵$ ۳) $x = ۴t^۲ + ۸t + ۵$ ۴) $x = -۲t^۲ + ۸t + ۵$

پاسخ: ۴

برای نوشتن معادله‌ی مکان به a و $v_۰$ نیاز داریم، $v_۰$ مشخص است. پس باید ابتدا a را به‌دست آوریم، بنابراین طبق پارامترهای حرکت (معلوم: $x, v, v_۰$، مجهول: a) از معادله‌ی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم.

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۶^۲ - ۸^۲ = ۲ \times a \times (۸{,}۵ - ۵) \Rightarrow a = -۴\frac{m}{s^۲}$$

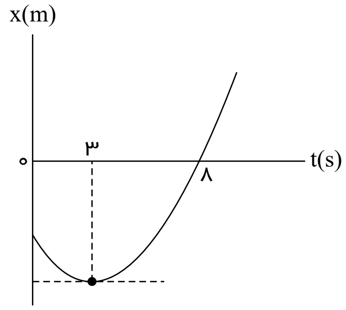
بنابراین معادله‌ی مکان - زمان اینگونه است:

$$x = \frac{۱}{۲} \times (-۴) \times t^۲ + ۸t + ۵ \Rightarrow x = -۲t^۲ + ۸t + ۵$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۷۲ نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰s$ تا $t_۲ = ۸s$ چند برابر مسافت طی‌شده در این بازهٔ زمانی است؟

متوسط- سراسری- ۱۴۰۰



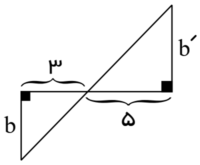
۱) $\frac{۵}{۱۷}$

۲) $\frac{۵}{۱۴}$

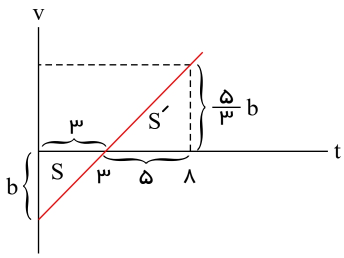
۳) $\frac{۸}{۱۷}$

۴) $\frac{۹}{۱۴}$

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ ساده‌ترین راه، رسم نمودار $(v-t)$ و استفاده از مساحت زیر نمودار آن‌هاست:



$$\Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow b' = \frac{۵}{۳}b$$



$$|S| = \frac{۱}{۲}(۳)(b) = \frac{۳b}{۲}$$

$$S' = \frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۳}b)(۵) = \frac{۲۵}{۶}b$$

$$\Delta x = S' - |S| = \frac{۸}{۳}b$$

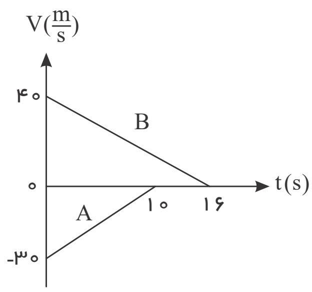
$$L = S' + |S| = \frac{۳۴}{۶}b$$

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{\frac{۸}{۳}b}{\frac{۳۴}{۶}b} = \frac{۸}{۱۷}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۷۳ نمودار سرعت ـ زمان دو قطار A و B که روی یک ریل مستقیم به طرف هم حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در لحظهٔ $t = ۰$ فاصلهٔ قطارها از هم ۵۰۰ متر است. لحظه‌ای که قطار A می‌ایستد، قطار B در چه فاصله‌ای از آن قرار دارد؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۷



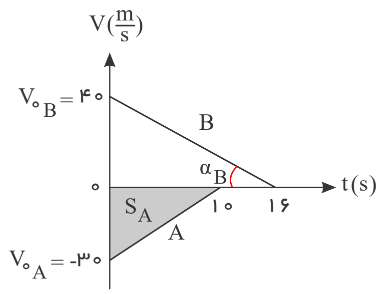
۱) ۲۵

۲) ۷۵

۳) ۱۰۰

۴) ۱۲۵

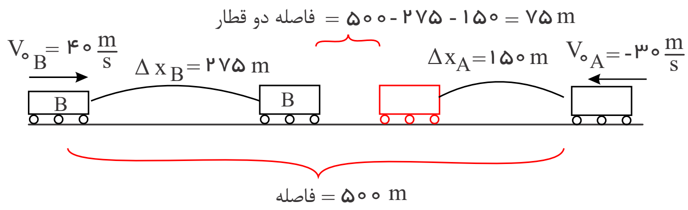
پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ در لحظهٔ $t = ۱۰s$ قطار A می‌ایستد درنتیجه ابتدا باید جابه‌جایی قطار B را تا این لحظه پیدا کنیم:



$$\begin{cases} B\ \text{شیب خط} = a_B = -\frac{۴۰}{۱۶} = -۲/۵\frac{m}{s^۲} \\ \Delta x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + V_{\circ B}t \\ \Rightarrow \Delta x_B = \frac{۱}{۲}(-۲/۵)۱۰^۲ + ۴ \times ۱۰ \Rightarrow \Delta x_B = ۲۷۵m \end{cases}$$

جابه‌جایی متحرک A را با استفاده از سطح زیر نمودار A به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_A = S_A = \frac{۳ \times ۱۰}{۲} = ۱۵۰m$$

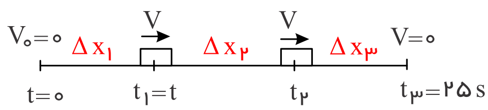


حرکت شامل چند بخش

(۷۴) متحرکی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت $۵\frac{m}{s^۲}$ به حرکت درمی‌آید و پس از مدتی حرکتش یکنواخت می‌شود و درنهایت با همان شتاب $۵\frac{m}{s^۲}$ حرکتش کند شده و می‌ایستد. اگر کل زمان حرکت ۲۵ ثانیه و سرعت متوسط در این مدت $۲۰\frac{m}{s}$ باشد، زمانی که حرکت متحرک یکنواخت بوده است، چند ثانیه است؟ سخت- سراسری- ۱۳۹۷

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

پاسخ: (۴) **(۳)** (۲) (۱) می‌دانیم اگر در حرکت شتاب‌دار ثابت سرعت متحرکی پس از t ثانیه از $V_{\circ}$ به V برسد و سپس در مرحلهٔ بعد، سرعتش را با همان شتاب کاهش داده به‌طوری که پس از t' ثانیه از V مجدداً به $V_{\circ}$ برسد، در این‌صورت $(\Delta x_۱ = \Delta x_۳\ ,\ t = t')$ خواهد بود و داریم:



$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۲۰ = \frac{\Delta x}{۲۵} \Rightarrow \Delta x = ۵۰۰m$$

$$\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ + \Delta x_۳ \Rightarrow ۵۰۰ = \frac{V+\circ}{۲} \times t + V(۲۵ - ۲t) + \frac{V+\circ}{۲} \times t$$

$$\xrightarrow{V=at} ۵۰۰ = \frac{۵t^۲}{۲} + ۱۲۵t - ۱۰t^۲ + \frac{۵t^۲}{۲} = -۵t^۲ + ۱۲۵t \Rightarrow t^۲ - ۲۵t + ۱۰۰ = \circ$$

$$\Rightarrow (t-۲۰)(t-۵) = \circ \Rightarrow t = ۲۰s\ \text{غ ق ق}\ ,\ t = ۵\ \text{ق ق}$$

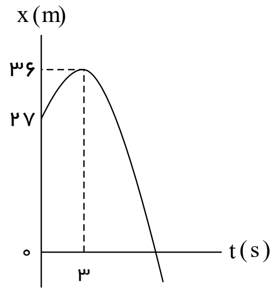
حال با داشتن مدت زمان t برای محاسبهٔ مدت زمان حرکت یکنواخت متحرک داریم:

$$\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳ = ۲۵s \Rightarrow t + \Delta t_۲ + t = ۲۵ \Rightarrow \Delta t_۲ = ۲۵ - ۲t = ۲۵ - ۱۰$$
$$= ۱۵s \Rightarrow \Delta t_{\text{یکنواخت}} = ۱۵s$$

سطح زیر نمودار v-t

۷۵ شکل زیر، نمودار مکان - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مسافتی که متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۱۰s$ طی می‌کند، چند متر است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۹



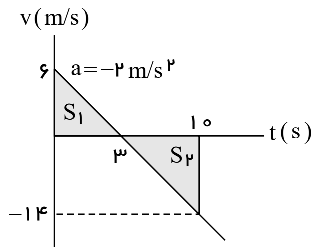
(۱) ۴۰
(۲) ۴۵
(۳) ۵۸
(۴) ۸۵

پاسخ: (۴) **(۳)** (۲) (۱) توجه: هنگامی که مسافت طی شده خواسته می‌شود باید توجه کنیم ممکن است حرکت رفت و برگشت باشد (در نمودار $(x-t)$ نقاط max و min و در نمودار $(v-t)$ محور تقاطع نمودار با محور افقی t و تغییر علامت v). برای یافتن مسافت طی شده و نیز تندی متوسط S_{av} (که به مسافت طی شده توسط متحرک وابسته است.) رسم نمودار $(v-t)$ و استفاده از مساحت سطح زیر نمودار آن یکی از راه‌کارهای مناسب است.

گام اول: سرعت اولیه را می‌یابیم. شتاب ثابت است و در $t = ۳s$، سرعت متحرک صفر است. (شیب خط مماس برابر سرعت در هر لحظه است.)

$$(\text{در بازهٔ زمانی } t_۱ = ۰ \text{ تا } t_۲ = ۳s) \Rightarrow \Delta x = (\frac{v + v_۰}{۲})\Delta t \Rightarrow ۳۶ - ۲۷ = (\frac{۰ + v_۰}{۲})(۳ - ۰) \Rightarrow ۹ = \frac{۳}{۲}v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۶\frac{m}{s} \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰ - ۶}{۳ - ۰} = -۲\frac{m}{s^۲}$$
$$\Rightarrow a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

گام دوم: نمودار $(v-t)$ را رسم می‌کنیم:



در هر ثانیه $۲\frac{m}{s}$ از تندی کاسته می‌شود، پس:

$$t = ۳s \rightarrow v = ۰$$
$$t = ۱۰s \rightarrow v = ۶ - ۲ \times ۱۰ = -۱۴\frac{m}{s}$$
$$\text{مسافت طی شده از } t = ۰ \text{ تا } t = ۱۰s : L = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۳ + \frac{۱}{۲} \times ۱۴ \times ۷ = ۹ + ۴۹ = ۵۸m$$

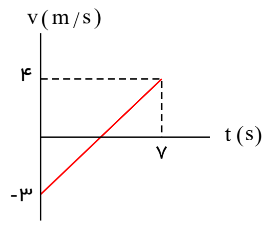
روش دوم: با استفاده از دنباله‌ای که جابه‌جایی‌ها در حرکت با شتاب ثابت در هر ثانیهٔ تشکیل می‌دهد نیز به پاسخ رسید.

$$\text{مسافت طی‌شده } L = ۵۸m$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۷۶ نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به‌صورت شکل زیر است. جابه‌جایی این متحرک در فاصله‌ی زمانی $t = ۳s$ تا $t = ۵s$، چند متر است؟

متوسط- سنجش- ۱۳۹۴



(۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

پاسخ: (۴) (۳) (۲) **(۱)** نمودار سرعت - زمان خط راست است، پس شتاب حرکت مقدار ثابتی است.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۴ - (-۳)}{۷} = ۱\frac{m}{s^۲}$$
$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}t^۲ - ۳t$$

$$\begin{cases} t_1 = ۳s \Rightarrow x_1 = \frac{۱}{۲}(۹) - ۳(۳) = ۴/۵ - ۹ = -۴/۵m \\ t_۲ = ۵s \Rightarrow x_۲ = \frac{۱}{۲}(۲۵) - ۱۵ = -۲/۵ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱ = -۲/۵ - (-۴/۵) = ۲m$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۷۷ متحرکی روی محور xها از مکان $x_\circ = ۴m$ با سرعت اولیه $۴\frac{m}{s}$ و شتاب ثابت به حرکت درمی‌آید و در مکان $x = ۱۰m$ سرعت آن به $۸\frac{m}{s}$ می‌رسد. معادله‌ی حرکت آن در SI کدام است؟

متوسط- آزاد عصر - ۱۳۸۹

۱) $x = -۲t^۲ + ۴t + ۴$ ۲) $x = t^۲ + ۴t + ۴$ ۳) $x = ۲t^۲ + ۴t + ۴$ ۴) $x = -t^۲ + ۴t + ۴$

پاسخ: ۴ **۳** ۲ ۱ در ابتدا با استفاده از رابطه سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان)، شتاب حرکت و پس از آن معادله حرکت را می‌نویسیم.

$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۸^۲ - ۴^۲ = ۲ \times a \times (۱۰ - ۴) \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

بنابراین معادله‌ی مکان - زمان اینگونه است:

$$x = \frac{۱}{۲} \times ۴t^۲ + ۴t + ۴ \Rightarrow x = ۲t^۲ + ۴t + ۴$$

۷۸ معادلهٔ حرکت جسمی در SI به‌صورت $x = ۲t^۳ - ۶t^۲ + ۶t$ است. در بازهٔ زمانی صفر تا ۲ ثانیه، کدام مورد درست است؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۷

۱) شتاب متوسط برابر صفر است.

۲) جهت حرکت یک بار تغییر کرده است.

۳) حرکت ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است.

۴) حرکت ابتدا در جهت محور x و سپس خلاف جهت محور x است.

پاسخ: ۴ ۳ ۲ **۱** ابتدا معادلهٔ سرعت و شتاب متحرک را محاسبه کرده و سپس به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$x = ۲t^۳ - ۶t^۲ + ۶t \Rightarrow V = \frac{dx}{dt} = ۶t^۲ - ۱۲t + ۶ \Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = ۱۲t - ۱۲$$

گزینهٔ (۱):

$$\begin{cases} t_۱ = \circ \rightarrow V_۱ = ۶ \\ t_۲ = ۲ \rightarrow V_۲ = ۶ \end{cases} \Rightarrow \bar{a} = \frac{V_۲ - V_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۶ - ۶}{۲ - \circ} = \circ$$

گزینهٔ (۲):

شرط تغییر جهت حرکت: $V = \circ \Rightarrow ۶t^۲ - ۱۲t + ۶ = \circ \Rightarrow t^۲ - ۲t + ۱ = \circ$

$$\Rightarrow (t - ۱)^۲ = \circ \Rightarrow t = ۱$$

لحظهٔ $t = ۱(s)$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ سرعت است، بنابراین در این لحظه سرعت صفر می‌شود اما تغییر جهت نمی‌دهد.

گزینهٔ (۳): برای بررسی تندشونده یا کندشونده بودن حرکت، معادلهٔ سرعت و شتاب را تعیین علامت می‌کنیم:

$V = \circ \Rightarrow ۶t^۲ - ۱۲t + ۶ = \circ \Rightarrow ۶(t - ۱)^۲ = \circ \Rightarrow t = ۱$ ریشهٔ مضاعف

$a = \circ \Rightarrow ۱۲t - ۱۲ = \circ \Rightarrow t = ۱$ ریشهٔ ساده

بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

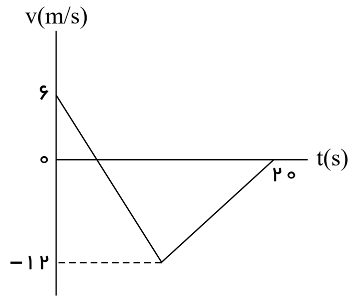
	t=۱	
V	+	+
a	−	+
	کندشونده	تندشونده

گزینهٔ (۴): باتوجه به تعیین علامت سرعت و مضاعف بودن ریشهٔ $t = ۱(s)$ می‌توان نتیجه گرفت متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و سرعت همواره مثبت است یعنی حرکت همواره در جهت محور x است.

سطح زیر نمودار v-t

۷۹) شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. تندی متوسط متحرک در مدتی که در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری- ۱۴۰۰



۱) صفر

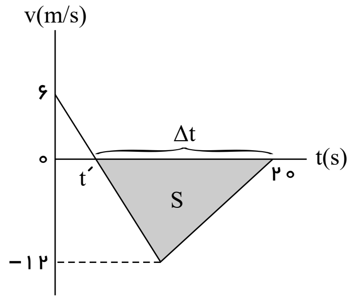
۲) ۶

۳) ۸

۴) ۹

پاسخ: ۴ ۳ **۲** ۱

هنگامی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، $v > 0$ است و وقتی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، $v < 0$ است. پس در بازهٔ زمانی صفر تا t'، چون $v > 0$ است متحرک در جهت محور x و در بازهٔ زمانی t' تا $t = 20s$ چون $v < 0$ است متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.



در بازهٔ زمانی t' تا $t = 20s$:

$$L = (S) = \frac{1}{2}(12)(\Delta t)$$

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{6\Delta t}{\Delta t} = 6\frac{m}{s}$$

توجه: نکته مهم این بود که نیازی به یافتن t' نبود. این سؤال در سال‌های اخیر مورد توجه طراحان بوده است.

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۸۰) معادله‌ی حرکت متحرکی که روی محور xها حرکت می‌کند در SI به‌صورت $x = -t^2 + 6t + 20$ است. در کدام فاصله‌ی زمانی، این حرکت کندشونده است؟

متوسط - خارج از کشور- ۱۳۸۵

۱) $t < 3$

۲) $t < 4$

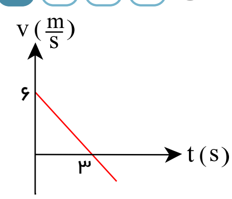
۳) $6 < t$

۴) $3 < t < 6$

پاسخ: ۴ ۳ ۲ **۱** بدیهی است که تا قبل از لحظهٔ توقف یعنی $t_s = |\frac{v_0}{a}|$، حرکت کندشونده است.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = -t^2 + 6t + 20 \Rightarrow a = -2\frac{m}{s^2}, \ v_0 = 6\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 = -2t + 6$$



با توجه به نمودار سرعت - زمان حرکت متحرک قبل از $t = 3s$ کندشونده است.

۸۱) متحرکی بر مسیر مستقیم با شتاب ثابت مسافت ۱۲۰ متر را در ۸ ثانیه طی می‌کند، اگر سرعت متحرک در پایان مسیر ۵ برابر سرعت اولیه آن باشد شتاب حرکت چند $\frac{m}{s^2}$ است؟

متوسط - آزاد عصر - ۱۳۸۵

۱) ۲/۵

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۱/۶

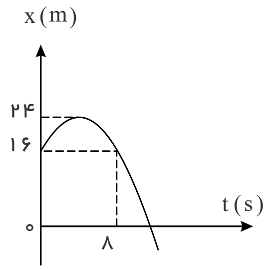
پاسخ: ۴ ۳ ۲ **۱** با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب، مقدار سرعت اولیه و البته سرعت نهایی ($v = 5v_0$) را یافته، پس از آن شتاب حرکت را تعیین می‌کنیم.

$$\Delta x = \frac{v_\circ + v}{۲} \times \Delta t \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{v_\circ + ۵v_\circ}{۲} \times ۸ \Rightarrow v_\circ = ۵\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_\circ \Rightarrow ۵ \times ۵ = a \times ۸ + ۵ \Rightarrow a = ۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۸۲) نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل زیر به‌صورت سهمی است. در بازهٔ زمانی ∘ تا $۸s$ بزرگی شتاب متوسط و سرعت متوسط در SI، کدام است؟ متوسط - سراسری - ۱۳۹۷



۱) ۱ و صفر

۲) ۲ و صفر

۳) ۱ و ۱

۴) ۲ و ۲

پاسخ: ۱ ابتدا سرعت متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۶ - ۱۶}{۸ - ∘} = ∘$$

نمودار مکان - زمان متحرک سهمی است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت حرکت شتاب ثابت است $(a = \bar{a})$، اکنون با توجه به اطلاعات روی نمودار بین لحظهٔ $t = ∘$ تا $t = ۴$ و به کمک رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه داریم:

$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + Vt \Rightarrow ۸ = -\frac{۱}{۲}a \times ۴^۲ + ∘ \times ۴ \Rightarrow a = -۱\frac{m}{s^۲}$$

توجه: شیب نمودار $x - t$ در لحظهٔ ۴ $t =$ برابر صفر است، یعنی در این لحظه $V = ∘$ است.

توقف - مقایسهٔ جابه‌جایی و مسافت

۸۳) اتومبیلی با سرعت $۹∘km/h$ در حرکت است. راننده ناگهان مانعی را در فاصلهٔ ۸∘ متری خود می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر زمان تأخیر در واکنش راننده $∘/۴s$ باشد و اندازهٔ شتاب کند شدن اتومبیل در حین ترمز $۵m/s^۲$ باشد، اتومبیل: متوسط - خارج از کشور - ۱۳۸۶

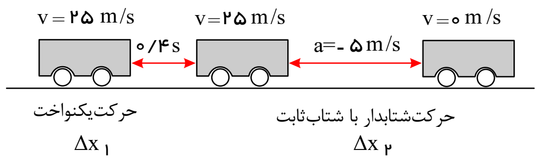
۱) در ۷/۵ متری مانع می‌ایستد.

۲) به مانع برخورد می‌کند.

۳) در فاصلهٔ ۱∘ متری مانع می‌ایستد.

۴) در لحظهٔ رسیدن به مانع متوقف می‌شود.

پاسخ: ۱ در مدت $∘/۴s$ اتومبیل با سرعت ثابت (حرکت یکنواخت) و پس از آن با شتاب ثابت کندشونده حرکت می‌کند.



$$v_\circ = ۹∘ \div ۳/۶ = ۲۵m/s$$

$$\Delta x_۱ = v_\circ \Delta t_۱ = ۲۵ \times ∘/۴ = ۱∘m$$

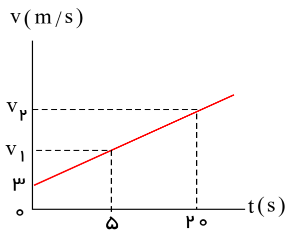
$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ∘ - ۲۵^۲ = ۲(-۵)\Delta x_۲$$

$$\Rightarrow \Delta x_۲ = ۶۲/۵m$$

بنابراین از لحظه‌ای که راننده مانع را در ۸∘ متری خود می‌بیند تا توقف کامل $۷۲/۵m$ جابه‌جا می‌شود، درنتیجه اتومبیل در ۷/۵ متری مانع می‌ایستد.

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۸۴) شکل زیر نمودار سرعت - زمان متحرکی را نشان می‌دهد که شتاب آن $۲m/s^۲$ است، سرعت متوسط این متحرک بین دو لحظهٔ $t_۱ = ۵s$ و $t_۲ = ۲∘s$ چند m/s است؟ متوسط - آزاد صبح - ۱۳۸۲



۱) ۲۸

۲) ۱۴

۳) ۳∘

۴) ۱۵

پاسخ: ۱ ابتدا می‌توان به کمک شتاب و سرعت اولیه، سرعت نقاط موردنظر را به‌دست آورد و سپس می‌توان سرعت متوسط را محاسبه کرد:

$$v = at + v_\circ \begin{cases} t_1 = ۵ \rightarrow v_1 = ۲ \times ۵ + ۳ = ۱۳m/s \\ t_۲ = ۲۰ \rightarrow v_۲ = ۲ \times ۲۰ + ۳ = ۴۳m/s \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_1 + v_۲}{۲} \Rightarrow v_{av} = \frac{۱۳ + ۴۳}{۲} = ۲۸\,m/s$$

توقف - مقایسهٔ جابه‌جایی و مسافت

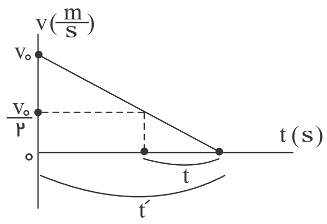
۸۵ اتومبیلی با تندی ثابت در یک مسیر مستقیم در حال حرکت است. راننده با شتاب ثابت ترمز می‌کند و پس از طی مسافت ۱۵۰ متر، تندی اتومبیل نصف می‌شود. اتومبیل از لحظهٔ ترمز تا توقف کامل چند متر را طی می‌کند؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) ۱۷۵ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۳۰۰

پاسخ: ۲

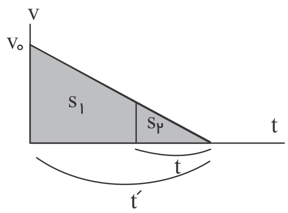
اگر نمودار سرعت - زمان متحرک را از لحظهٔ ترمز (شروع حرکت کندشونده) تا توقف رسم کنیم، داریم:



با توجه به تشابه مثلث‌ها:

$$\frac{t'}{t} = \frac{v_\circ}{\frac{v_\circ}{۲}} = ۲$$

از طرفی می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه، معادل مجذور نسبت تشابه به آن‌هاست یعنی:



$$\text{مساحت مثلث بزرگ}\frac{(S_۲ + S_1)}{S_1} = (\frac{t'}{t})^۲ = ۲^۲ = ۴$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$S_۲ = \Delta x = ۱۵۰m \xrightarrow[S_1 \Delta x_1]{S_۲ = ۳S_1} ۱۵۰ = ۳\Delta x' = ۵۰m$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = ۱۵۰ + ۵۰ \rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = ۲۰۰m$$

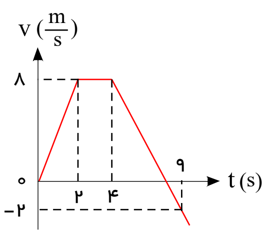
حرکت شامل چند بخش

۸۶ نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x از مکان $x_\circ = -۳۶m$ شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. پس از چند ثانیه متحرک برای اولین بار از مبدأ مکان می‌گذرد؟

سخت- خارج از کشور- ۱۳۸۹

۱) ۲ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۰



پاسخ: ۲ سطح زیر نمودار در بازهٔ $۰ < t < ۴s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$S = \frac{۴ + ۲}{۲} \times ۸ = ۲۴m = x_۴ - x_\circ = x_۴ - (-۳۶) \Rightarrow x_۴ = -۱۲m$$

بنابراین متحرک $۱۲m$ دیگر باید جابه‌جا شود تا به مبداء مکان برسد.

در $t > ۴s$ داریم:

$$a = \frac{v_9 - v_4}{9 - 4} = \frac{(-2) - 8}{5} = -2\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_\circ t = -t^2 + 8t = +12 \Rightarrow (t-6)(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ یا } t = 6 \Rightarrow t = 2 \text{ ق ق}$$

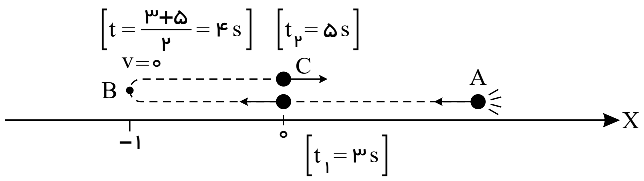
$$\Rightarrow t_{\text{رسیدن}} = 6s$$

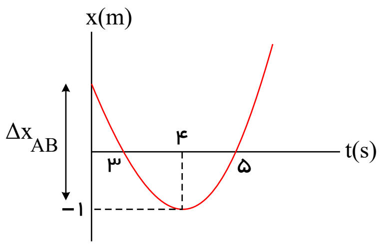
مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۸۷) متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند و در لحظه‌های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 5s$ از مبدأ مکان عبور می‌کند و در لحظه‌ای که به مکان $x = -1m$ می‌رسد، جهت حرکتش عوض می‌شود. تندی متوسط متحرک از لحظهٔ $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 5s$ چند متر بر ثانیه است؟ سخت- سراسری- ۱۴۰۰

۱) $\frac{13}{5}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{17}{5}$ ۴) ۶

پاسخ: ۳ هرگاه در یک حرکت شتابدار با شتاب ثابت a و $v_\circ$ مختلف‌العلامت باشند، حرکت به‌صورت رفت و برگشت است. اگر در چنین شرایطی متحرک در لحظات t_1 و t_2 از یک مکان عبور نموده باشد، در $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ تغییر جهت داده و $v = 0$ شده است. چون در $x = -1(m)$ تغییر جهت داده (در $x < 0$) و در دو لحظهٔ $t_1 = 3s$ و $t_2 = 5s$ نیز از مبدأ مکان عبور نموده راهی وجود ندارد جز اینکه:





روش وارونه دیدن!

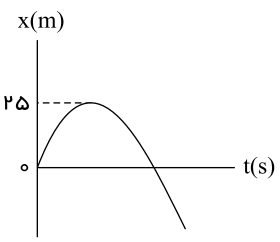
$$A \not\to B \to (B \to A) : \Delta x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = 8a$$

$$B \to C \to \Delta x = \frac{1}{2}a(1)^2 = 0/5a = 1 \to a = 2 \quad \Rightarrow \Delta x_{AB} = 16m$$

$$\Rightarrow x_\circ = 15m \Rightarrow S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{16+1}{5} = \frac{17}{5}\frac{m}{s}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

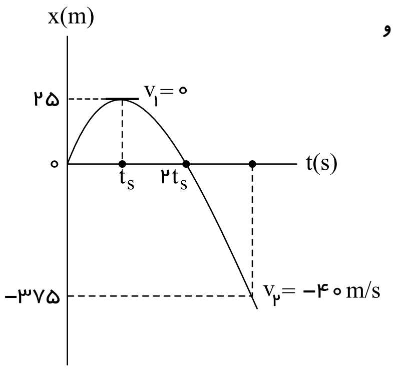
۸۸) نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متحرک در مکان $x = -375m$ برابر $40\frac{m}{s}$ باشد، چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟ متوسط- خارج از کشور- ۱۴۰۱



۱) ۲۰ ۲) ۱۵
۳) ۱۰ ۴) ۵

پاسخ: ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به اینکه جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ توقف ($v_1 = 0$) تا مکان $x = -375m$ معلوم است. ($\Delta x = -375 - 25 = -400m$) و نیز معلوم بودن سرعت متحرک در مکان $x = -375m$، با استفاده از رابطهٔ سرعت - جابه‌جایی، شتاب حرکت متحرک را می‌یابیم.



$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \to (-40)^2 - 0 = 2(a)(-400) \to a = -2\frac{m}{s^2}$$

و در مدتی که $x > 0$ است، بردار مکان متحرک در جهت محور x است (که در اینجا معادل $2t_s$ است.) بنابراین برای پیدا کردن t_s، از رأس سهمی تا مبدأ مکان در امتداد محور x برمی‌گردیم، یعنی:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \xrightarrow[a=-2\frac{m}{s^2}]{\Delta x = -25m} -25 = \frac{1}{2}(-2)(t_s)^2 \to t_s = 5s$$

و مدتی که بردار مکان متحرک در جهت مثبت محور x است:

$$\Delta t = 2t_s = 10s$$

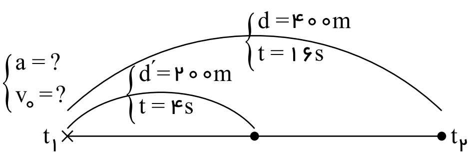
حرکت شامل چند بخش

۸۹) متحرکی با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + 16(s)$ برابر ۴۰۰ متر است. اگر نیمی از این جابه‌جایی در ۴ ثانیه اول و نیم دیگر آن در ۱۲ ثانیه بعد از آن انجام شود، بزرگی شتاب حرکت در SI کدام است؟ متوسط - سراسری ۱۴۰۱

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{25}{3}$ ۴) $\frac{25}{6}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴**

در ابتدا مسیر حرکت متحرک را به‌صورت زیر رسم کرده و یک‌بار معادلهٔ جابه‌جایی را در ۴ ثانیهٔ اول و بار دیگر در کل ۱۶ ثانیه می‌نویسیم تا با حل یک دستگاه معادلات، بزرگی شتاب را بیابیم.



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$\begin{cases} \text{در چهار ثانیهٔ اول} : 200 = \frac{1}{2}a(4)^2 + 4v_0 \\ \text{در کل ۱۶ ثانیه} : 400 = \frac{1}{2}a(16)^2 + 16v_0 \end{cases} \to \begin{cases} 200 = 8a + 4v_0 \\ 400 = 128a + 16v_0 \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{25}{6}\frac{m}{s^2} \\ v_0 = \frac{175}{3}\frac{m}{s} \end{cases}$$

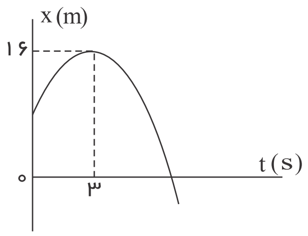
و برای تعیین بزرگی شتاب:

$$|a| = \frac{25}{6}\frac{m}{s^2}$$

نمودار مکان–زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۹۰ نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در بازهٔ زمانی $t_1 = \circ s$ تا $t_2 = ۶s$ تندی متوسط متحرک برابر $۳\frac{m}{s}$ باشد، چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟

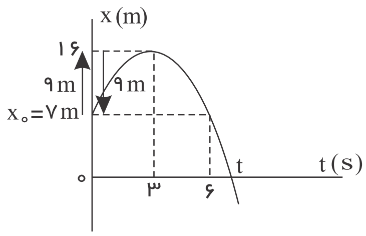
متوسط- خارج از کشور- ۱۴۰۰



۱) ۹
۲) ۸
۳) ۷
۴) ۳

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

چون حرکت با شتاب ثابت است، نمودار $x - t$ به صورت قسمتی از یک سهمی است و با توجه به وجود تقارن نسبت به راس سهمی داریم:



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \to ۳ = \frac{\ell}{۶} \to \ell = ۱۸m$$

یعنی در ۳ ثانیه اول ۹ متر در جهت محور رفته و در ۳ ثانیه بعد ۹ متر را برگشته است.

حال در ۳ ثانیه اول، از راس سهمی که $v = \circ$ است، برمی‌گردیم: (در این ۳ ثانیه ۹ متر برمی‌گردیم.)

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t \to -۹ = \frac{۱}{۲} \times a \times (۳)^۲ \to a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

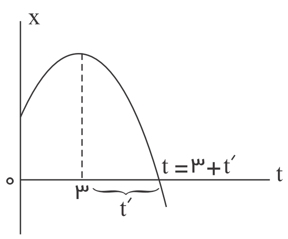
و برای تعیین زمان حرکت از $x = ۱۶$ تا $x = \circ$ (از لحظهٔ مربوط به راس سهمی تا لحظهٔ $x = \circ$) داریم: (در راس سهمی $v = \circ$ است)

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}a' t'^۲ \to -۱۶ = \frac{۱}{۲}(-۲)t'^۲ \to t' = ۴s$$

پس در نهایت:

$$t = ۳ + t' = ۳ + ۴ \to t = ۷s$$

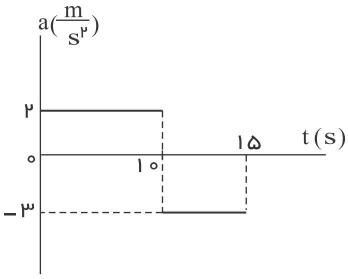
یعنی در مدت ۷ ثانیهٔ اول $x > \circ$ یعنی بردار مکان در جهت محور x است.



سطح زیر نمودار a-t و رسم نمودار از روی نمودار

(۹۱) نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t = ۳s$ سرعت متحرک، $\vec{v} = (۱\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۷s$ تا $t_۲ = ۱۰s$ چند متر بر ثانیه است؟

سخت- خارج از کشور- ۱۴۰۰



(۱) ۶

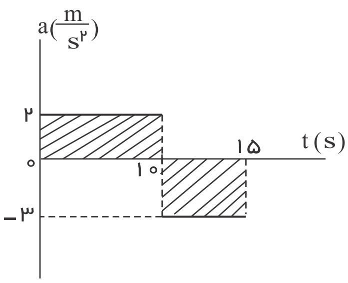
(۲) ۹

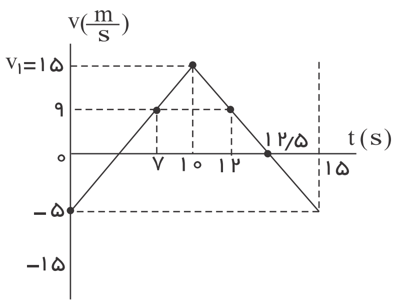
(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

پاسخ: (۴) (۳) (۲) (۱)

در ابتدا از روی نمودار $a - t$ داده شده نمودار $v - t$ را رسم کرده، سپس با تعیین جابه‌جایی (سطح محصور بین نمودار $v - t$ و محور زمان)، سرعت متوسط را می‌یابیم. قبل از هر چیزی داریم:





$$V = at + v_\circ \xrightarrow{\text{در سه ثانیهٔ اول}} ۱ = ۲ \times ۳ + v_\circ \rightarrow v_\circ = -۵\frac{m}{s}$$

$$\Delta V_۱ = ۲۰ = v_۱ - v_\circ = v_۱ - (-۵) \rightarrow v_۱ = ۱۵\frac{m}{s}$$

$$\Delta V_۲ = -۳۰ = v_۲ - v_۱ = v_۲ - (۱۵) \rightarrow v_۲ = -۱۵\frac{m}{s}$$

$$t_۱ = ۷s \text{ در} : v = at + v_\circ \rightarrow v = ۲ \times ۷ - ۵ \rightarrow v = ۹\frac{m}{s}$$

$$t_۲ = ۱۲s \text{ در} : v' = a't' + v'_\circ \rightarrow v' = -۳ \times ۲ + ۱۵ \rightarrow v' = ۹\frac{m}{s}$$

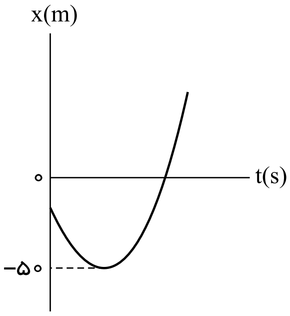
$$\begin{cases} \Delta x_۱ = S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱۵+۹}{۲} \times ۳ = ۳۶m \\ \Delta x_۲ = S'_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱۵+۹}{۲} \times ۲ = ۲۴m \end{cases} \rightarrow \Delta y_{\text{کل}} = ۳۶ + ۲۴ = ۶۰m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶۰}{۱۲ - ۷} \rightarrow v_{av} = ۱۲\frac{m}{s}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

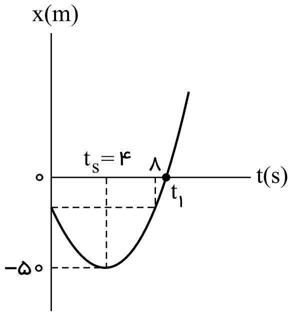
۹۲ نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است، و سرعت متوسط در ۸ ثانیهٔ اول حرکت برابر صفر است. اگر در لحظهٔ t_1 که متحرک از مبدأ محور عبور می‌کند، تندی آن $۲۰\frac{m}{s}$ باشد، سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 چند متر بر ثانیه است؟

سخت- خارج از کشور- ۱۴۰۱



(۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) ۱۶

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱



یکی از روش‌ها برای تعیین سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت، استفاده از رابطهٔ $v_{av} = \frac{v_2 + v_1}{2}$ است. (البته روش‌های دیگری نیز برای حل سؤال مثلاً تعریف سرعت متوسط $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ و ... نیز وجود دارد که خودتان می‌توانید آنها را تمرین کنید)

به همین دلیل، بار اول با نوشتن رابطهٔ سرعت - جابه‌جایی بین دو مکان $x_1 = -50m$ و $x_2 = 0$ (لحظهٔ عبور از مبدأ مکان)، شتاب حرکت را می‌یابیم.

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(\Delta x) \xrightarrow[v_1=0, v_2=20\frac{m}{s}]{\Delta x = x_2 - x_1 = 0-(-50)=50m} (20)^2 - (0)^2 = (2)(a)(50) \Rightarrow a = 4\frac{m}{s^2}$$

حال با توجه به اینکه در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، سرعت متوسط متحرک صفر شده، جابه‌جایی‌اش در این مدت صفر بوده ، پس در $t_s = 4s$ متوقف شده و تغییر جهت داده است. بنابراین با نوشتن معادلهٔ سرعت در ۴ ثانیهٔ اول داریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=4s]{v=0} 0 = (4)(4) + v_0 \Rightarrow v_0 = -16\frac{m}{s}$$

و در نهایت برای تعیین سرعت متوسط در t_1 ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$v_{av} = \frac{v_0 + v}{2} \xrightarrow[v=20\frac{m}{s}]{v_0 = -16\frac{m}{s}} v_{av} = \frac{-16 + 20}{2} \Rightarrow v_{av} = 2\frac{m}{s}$$

حرکت شامل چند بخش

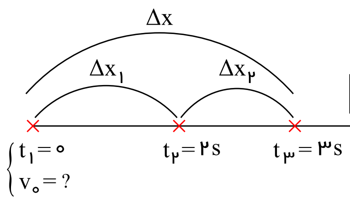
۹۳ متحرکی با شتاب ثابت $\vec{a} = (4\frac{m}{s^2})\vec{i}$ در جهت محور x، در حرکت است. اگر مسافتی که این متحرک در فاصلهٔ زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 2s$ طی می‌کند، ۴ متر بیشتر از مسافتی باشد که در ثانیهٔ سوم طی می‌کند، سرعت اولیهٔ آن چند متر بر ثانیه است؟

متوسط- سراسری- ۱۴۰۱

(۱) ۸
(۲) ۶
(۳) ۴
(۴) ۲

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

در ابتدا مسیر حرکت متحرک را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم، سپس معادلهٔ جابه‌جایی متحرک را یک‌بار برای ۲ ثانیهٔ اول و بار دیگر برای ۳ ثانیهٔ اول می‌نویسیم یعنی:



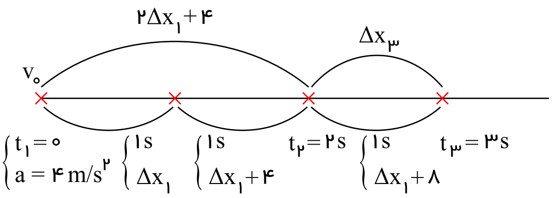
☆ $\boxed{\Delta x_1 - \Delta x_2 = 4m}$

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{a=4\frac{m}{s^2}}\begin{cases}\text{دو ثانیهٔ اول}:\Delta x_1=\frac{1}{2}(4)(2)^2+2v_0\\ \text{سه ثانیهٔ اول}:\Delta x_1+\Delta x_2=\frac{1}{2}(4)(3)^2+3v_0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\Delta x_1=8+2v_0\\ \Delta x_1+\Delta x_2=18+3v_0\xrightarrow{\Delta x_1=8+2v_0}\Delta x_2=10+v_0\end{cases}$$

و در نهایت داریم:

$$\Delta x_1-\Delta x_2=4\xrightarrow[\Delta x_2=10+v_0]{\Delta x_1=8+2v_0}8+2v_0-(10+v_0)=4\Rightarrow v_0=6\frac{m}{s}$$

روش دوم: اگر بازه‌های زمانی را به‌صورت بازه‌های یک ثانیه‌ای در نظر بگیریم، می‌دانیم که جابه‌جایی‌های این متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی یک ثانیه‌ای، تشکیل یک دنبالهٔ عددی را می‌دهند که قدر نسبت آن $a=4$ (شتاب حرکت) است. بنابراین داریم:



$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرض مسئله}}2\Delta x_1+4-(\Delta x_1+8)=4\Rightarrow\Delta x_1=8m$$

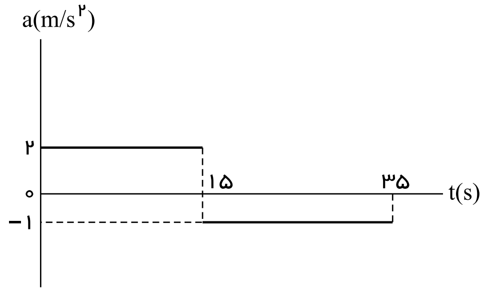
و در ادامه داریم:

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 8=\frac{1}{2}(4)(1)^2+v_0\Rightarrow v_0=6\frac{m}{s}$$

سطح زیر نمودار a-t و رسم نمودار از روی نمودار

۹۴ نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t=2s$ سرعت متحرک $\vec{v}=(-6\frac{m}{s})\vec{i}$ و مکان متحرک $\vec{x}=(-16m)\vec{i}$ باشد، مکان متحرک در لحظهٔ $t=35s$ کدام است؟

سخت- سراسری ۱۴۰۱



(۱) $(275m)\vec{i}$

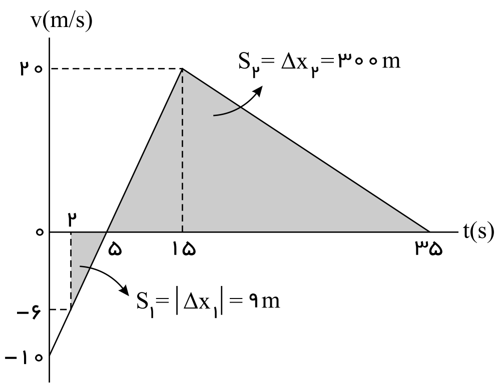
(۲) $(300m)\vec{i}$

(۳) $(375m)\vec{i}$

(۴) $(400m)\vec{i}$

پاسخ: ۱

یکی از راه‌های حل این سؤال استفاده از نمودار سرعت - زمان است. برای رسم نمودار، در ابتدا سرعت اولیهٔ متحرک را محاسبه می‌کنیم. در ۱۵ ثانیهٔ اول، شتاب حرکت متحرک $2\frac{m}{s^2}$ است، بنابراین داریم:



$$v=at+v_0\xrightarrow[t=2s]{v=-6\frac{m}{s}}-6=2\times2+v_0\rightarrow v_0=-10\frac{m}{s}$$

حال سرعت متحرک در لحظهٔ $t=15s$ (لحظه‌ای که شتاب تغییر می‌کند) را محاسبه می‌کنیم.

$$v=at+v_0\xrightarrow{t=15s}v=2\times15-10\rightarrow v=20\frac{m}{s}$$

حال نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. در ادامه مساحت محصور بین نمودار و محور زمان را می‌یابیم تا جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ $t=2s$ تا $t=35s$ را تعیین کنیم.

$$S_1=|\Delta x_1|=9m\quad,\quad S_2=\Delta x_2=300m$$

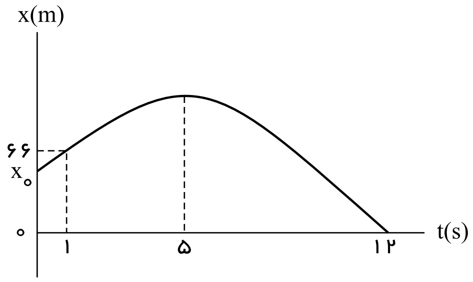
$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2=-9+300=291m$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \to 291 = x_2 - (-16) \to x_2 = 275m \to \vec{x} = 275\vec{i}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۹۵ نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. مکان اولیه متحرک (x_0) چند متر است؟

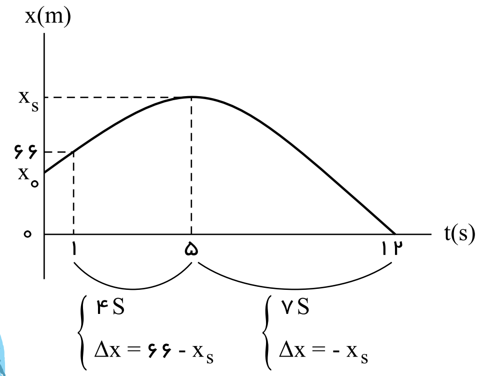
سخت- سراسری- ۱۴۰۱



۱) ۵۸
۲) ۵۲
۳) ۴۸
۴) ۴۲

پاسخ: ۴ **۳** ۲ ۱

اگر مکان متحرک در راس سهمی را x_s بنامیم و معادلهٔ جابه‌جایی متحرک را از راس سهمی که در آن $v = 0$ است بنویسیم، داریم:



$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \to \begin{cases} 66 - x_s = \frac{1}{2}(a)(4)^2 \\ -x_s = \frac{1}{2}(a)(7)^2 \end{cases} \to \frac{66 - x_s}{-x_s} = \frac{16}{49} \to x_s = 98m$$

و در ادامه برای تعیین شتاب داریم:

$$-x_s = \frac{1}{2}a(7)^2 \to -98 = \frac{1}{2}a(49) \to a = -4\frac{m}{s^2}$$

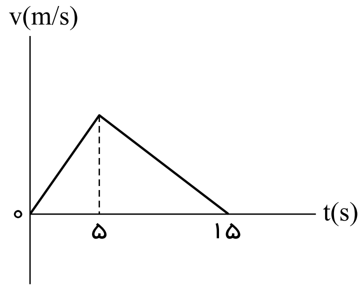
و در ۵ ثانیهٔ اول:

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \to x_0 - x_s = \frac{1}{2}(-4)(5)^2 \xrightarrow{x_s = 98} x_0 = 48m \end{cases}$$

سطح زیر نمودار v-t

۹۶ شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. اگر جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 11s$ برابر ۱۲۶ متر باشد، سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 12s$ چند متر بر ثانیه است؟

سخت- سراسری- ۱۴۰۱

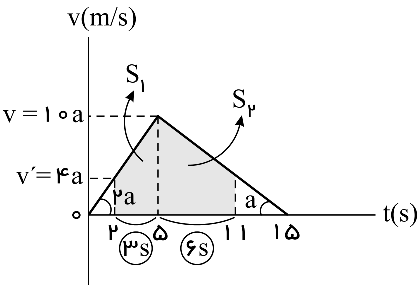


۱) ۳
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۲

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان با شتاب متحرک برابر است. با توجه به نمودار که شیب خط در ۵ ثانیهٔ اول، دو برابر قدرمطلق شیب خط در ۱۰ ثانیهٔ بعد است، می‌توانیم فرض کنیم که اگر شتاب حرکت در مرحلهٔ اول و دوم به ترتیب a_1 و a_2 باشد، خواهیم داشت:

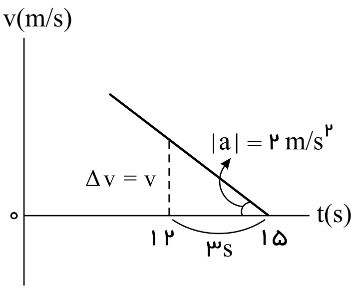
$$\begin{cases} a_1 = ۲a \\ |a_2| = a \end{cases}$$



حال با توجه به اینکه سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است، مقدار a را به‌صورت زیر می‌یابیم:

$$S_1 + S_2 = ۱۲۶ \xrightarrow[S_2 = \frac{۱۰a+۴a}{۲} \times ۶ = ۴۲a]{S_1 = \frac{۱۰a+۴a}{۲} \times ۳ = ۲۱a} ۲۱a + ۴۲a = ۱۲۶ \to ۶۳a = ۱۲۶ \to a = ۲\frac{m}{s^2}$$

و در نهایت داریم:



$$|a| = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۲ = \frac{v}{۳} \Rightarrow v = ۶\frac{m}{s}$$

حرکت شامل چند بخش

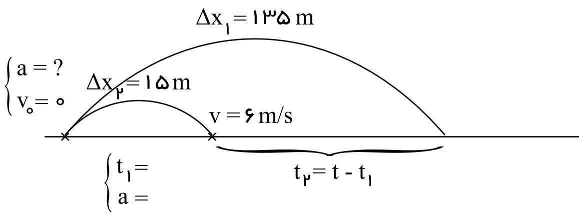
۹۷ متحرکی در مسیر مستقیم با شتاب ثابت، از حالت سکون به حرکت درمی‌آید و پس از طی مسافت ۱۵ متر، سرعت آن به $۶\frac{m}{s}$ می‌رسد. این متحرک با همین شتاب، چند ثانیهٔ دیگر به حرکت خود ادامه دهد تا کل مسافت طی‌شده به ۱۳۵ متر برسد؟

متوسط - خارج از کشور ۱۴۰۱

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

اگر مسیر حرکت متحرک را به‌صورت زیر در نظر بگیریم، یک بار با نوشتن معادلهٔ مستقل از شتاب در مرحلهٔ اول، زمان مربوط به این مرحله و نیز با نوشتن معادلهٔ سرعت - جابه‌جایی (یا معادلهٔ مستقل از زمان) مقدار شتاب را محاسبه می‌کنیم. یعنی:



$$\Delta x_1 = \frac{v + v_0}{۲} \times t_1 \Rightarrow ۱۵ = \frac{۶ + ۰}{۲} \times t_1 \Rightarrow t_1 = ۵s$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{۶ - ۰}{۵} \Rightarrow a = ۱/۲\frac{m}{s^2}$$

حال برای پیدا کردن کل زمان حرکت در پیمودن ۱۳۵ متر داریم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0 = ۰} ۱۳۵ = (\frac{۱}{۲})(۱/۲)t^2 \Rightarrow t = ۱۵s$$

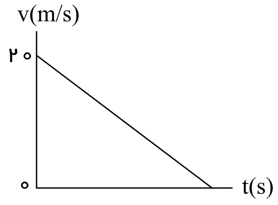
اما برای پیمودن زمان مربوط به مرحلهٔ دوم (در سؤال گفته‌شده چند ثانیهٔ دیگر) داریم:

$$t_2 = t - t_1 = ۱۵ - ۵ \Rightarrow t_2 = ۱۰s$$

سطح زیر نمودار v-t

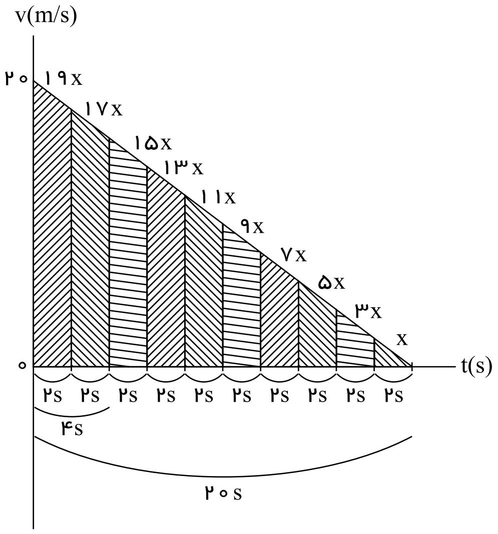
۹۸ نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر مسافت طی‌شده در ۴ ثانیهٔ اول، ۳۶ برابر مسافت طی‌شده در ۲ ثانیهٔ آخر باشد، بزرگی شتاب حرکت، چند متر بر مربع ثانیه است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۴۰۱



(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) ۲

پاسخ: ۲



قبل از حل سؤال، باید دو نکته را یادآوری کنیم:

۱) اگر متحرکی از حال سکون و شتاب ثابت، در امتداد محور x شروع به حرکت کند، نسبت جابه‌جایی‌هایش در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، همانند نسبت اعداد فرد متوالی است. یعنی نسبت x به $۳x$ به $۵x$ به $۷x$ و ...

۲) سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، برابر جابه‌جایی متحرک است.

حال با توجه به دو نکتهٔ یادشده، با تقسیم زمان حرکت به بازه‌های ۲ ثانیه‌ای، به حل سؤال می‌پردازیم، به‌گونه‌ای که اگر جابه‌جایی متحرک در دو ثانیهٔ آخر را x بنامیم. (سطح زیر نمودار، در دو ثانیهٔ آخر x باشد) در چهار ثانیهٔ اول $۳۶x$ یعنی مجموع $(۱۷x + ۱۹x)$ است.

پس داریم:

یعنی کل زمان حرکت ۲۰ ثانیه بوده، حال با توجه به شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان که برابر شتاب متحرک است، داریم:

$$a = \text{شیب خط} = -\frac{۲۰}{۲۰} \Rightarrow |a| = ۱\frac{m}{s^۲}$$

حرکت شامل چند بخش

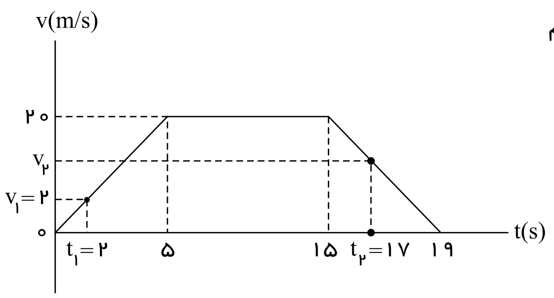
۹۹ اتومبیلی در لحظهٔ $t = ۰$ با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و پس از ۵ ثانیه سرعتش به $۲۰\frac{m}{s}$ می‌رسد. ۱۰ ثانیه با همین سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و سپس با شتاب ثابت ترمز می‌کند و پس از ۴ ثانیه متوقف می‌شود. شتاب متوسط اتومبیل در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۱۷s$ چند متر بر ثانیه است؟

متوسط- خارج از کشور- ۱۴۰۱

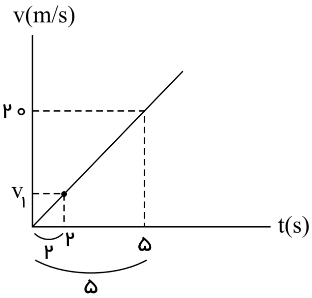
(۱) $\frac{۹}{۲}$ (۲) $\frac{۲}{۵}$ (۳) $\frac{۲}{۱۵}$ (۴) صفر

پاسخ: ۳

یکی از مناسب‌ترین روش‌ها برای حل این‌گونه سؤالات که حرکت متحرک در چند مرحلهٔ متوالی بررسی می‌شود، رسم نمودار سرعت - زمان آن است. بنابراین داریم: (در پنج ثانیهٔ اول با شتاب ثابت، حرکت تندشونده دارد، سپس به مدت ۱۰ ثانیه یعنی تا لحظهٔ $t = ۱۵s$ حرکت یکنواخت دارد و در نهایت در چهار ثانیهٔ پایانی یعنی از $t = ۱۵s$ تا $t = ۱۹s$ حرکت کندشونده دارد و متوقف می‌شود.)

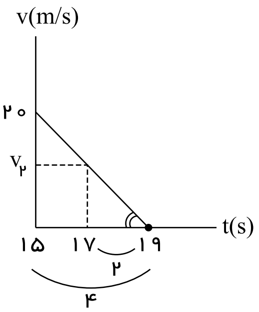


حال در پنج ثانیهٔ اول با استفاده از تشابه دو مثلث مربوط به دو ثانیهٔ اول و ۵ ثانیهٔ اول مقدار $v_۱$ را به دست می‌آوریم:



$$\text{شیب خط} = \frac{v_۱}{۲} = \frac{۲۰}{۵} \Rightarrow v_۱ = ۸\frac{m}{s}$$

و در ۴ ثانیهٔ آخر نیز به همین ترتیب:



$$|\text{شیب خط}| = \frac{v_۲}{۲} = \frac{۲۰}{۴} \Rightarrow v_۲ = ۱۰\frac{m}{s}$$

و در نهایت با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۰ - ۸}{۱۷ - ۲} \Rightarrow a_{av} = \frac{۲}{۱۵}\frac{m}{s^۲}$$

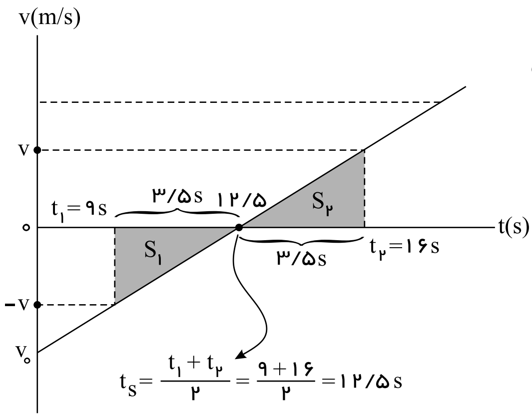
سطح زیر نمودار v-t

۱۰۰ متحرکی با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ روی محور x حرکت می‌کند. اگر جابه‌جایی آن در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۹s$ تا $t_۲ = ۱۶s$ برابر صفر باشد، تندی متوسط آن در همین بازهٔ زمانی چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۴۰۱

۱) ۳٫۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰٫۵ ۴) ۱۴

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴



از آنجایی که در حرکت در امتداد محور x با شتاب ثابت ، جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی داده‌شده صفر است، الزاماً متحرک در وسط این بازهٔ زمانی متوقف شده و تغییر جهت داده است، پس تا قبل از توقف حرکت کندشونده و بعد از آن حرکت تندشونده دارد. بنابراین $v_۰ < ۰$ است و نمودار سرعت - زمان آن به‌صورت زیر خواهد بود.

(تذکر: اگر در حرکت با شتاب ثابت در امتداد خط راست، متحرک متوقف شده و تغییر جهت دهد، الزاماً سرعت اولیهٔ ($v_۰$) و شتاب حرکت (a) دارای علامت‌های قرینه‌اند)

حال با توجه به معلوم بودن شتاب حرکت، تندی متحرک در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ را محاسبه کرده و بعد از آن سطح محصور بین نمودار و محور زمان را به تعیین می‌کنیم تا مسافت طی‌شده در این مدت را به دست آورده و در نهایت تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم.

$$|v| = at \xrightarrow[t=۳/۵s]{a=۴\frac{m}{s^۲}} |v| = ۴ \times ۳/۵ \rightarrow |v| = ۱۴\frac{m}{s}$$

$$S_۱ = S_۲ = \frac{۳/۵ \times ۱۴}{۲} = ۲۴/۵m \xrightarrow{\ell = S_۱ + S_۲} \ell = ۲۴/۵ + ۲۴/۵ = ۴۹m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow s_{av} = \frac{۴۹}{۷} \rightarrow s_{av} = ۷\frac{m}{s}$$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ — **۴** ۳ ۲ ۱ اگر سرعت اولیه را $v_۰$ و سرعت در نیمه مسیر را $v_۱$ و سرعت در انتهای مسیر را $v_۲$ فرض کنیم، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v_۱^۲ - v_۰^۲ = ۲a(\frac{x}{۲}) \Rightarrow v_۱^۲ - ۰ = ax \\ v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a(\frac{x}{۲}) \Rightarrow ۱۲^۲ - v_۱^۲ = ax \end{cases} \Rightarrow v_۱^۲ = ۱۲^۲ - v_۱^۲$$

$$\Rightarrow ۲v_۱^۲ = ۱۲^۲ \Rightarrow \sqrt{۲}v_۱ = ۱۲ \Rightarrow v_۱ = \frac{۱۲}{\sqrt{۲}} = ۶\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

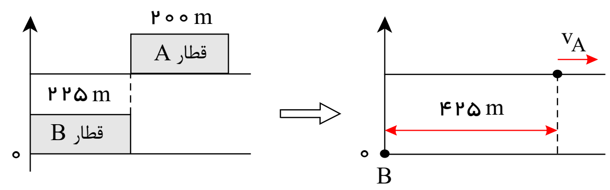
۲ — ۴ **۳** ۲ ۱

معادلهٔ مستقل از شتاب : $\Delta x = \frac{v+v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow ۰ - ۱۲ = \frac{۰+v_۰}{۲} \times ۴ \Rightarrow v_۰ = -۶m/s$

با توجه به شکل سهمی و اینکه رأس سهمی در $t = ۴$ است، سرعت در $t = ۸s$، هم‌اندازهٔ سرعت در لحظهٔ صفر است، پس: $v = +۶m/s$

۳ — **۴** ۳ ۲ ۱ انتهای قطار B در حالت سکون را به‌عنوان مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. چون می‌خواهیم لحظه‌ای را بیابیم که قطار B به‌طور کامل از قطار A سبقت گرفته است، بنابراین معادلهٔ حرکت قطار B را نسبت به نقطهٔ انتهایی آن و معادلهٔ حرکت قطار A را نسبت به نقطهٔ ابتدایی آن می‌نویسیم. در این صورت در لحظه‌ای که قطار B به‌طور کامل از قطار A سبقت می‌گیرد، این دو نقطه برهم منطبق می‌شوند.

$x_A = ۴۰t + ۴۲۵ \quad (I)$

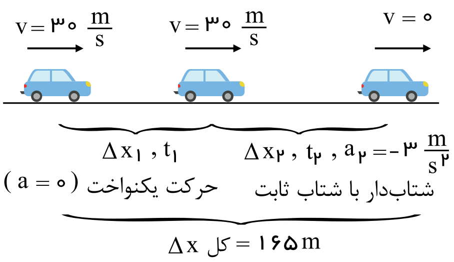


حرکت قطار B از دو قسمت تشکیل شده است، ابتدا با شتاب $۲\frac{m}{s}$ شروع به حرکت می‌کند تا سرعتش به $۵۰\frac{m}{s}$ برسد. قطار B این کار را در مدت $t = \frac{v}{a} = \frac{۵۰}{۲} = ۲۵s$ انجام می‌دهد و طی آن مسافت $\Delta x = \frac{v^۲}{۲a} = \frac{۵۰^۲}{۲ \times ۲} = ۶۲۵m$ را طی می‌کند. سپس با سرعت $۵۰\frac{m}{s}$ به مسیر خود ادامه می‌دهد. دقت کنید طی $۲۵s$ ابتدایی حرکت، قطار B از قطار A سبقت نمی‌گیرد؛ بنابراین:

$x_B = ۵۰(t - ۲۵) + ۶۲۵ \quad (II)$

$$\xrightarrow{(I),(II)} x_A = x_B \Rightarrow ۴۰t + ۴۲۵ = ۵۰(t-۲۵) + ۶۲۵ \Rightarrow ۱۰t = ۱۰۵۰ \Rightarrow t = ۱۰۵s$$

۴ — **۴** ۳ ۲ ۱ در مدت زمان واکنش راننده ($t_۱$) متحرک با سرعت ثابت ($v = ۱۰۸\frac{km}{h} = ۳۰\frac{m}{s}$) حرکت می‌کند و در مدت زمان ترمز ($t_۲$) اتومبیل با شتاب ثابت (کندشونده) حرکت می‌کند.



ابتدا جابه‌جایی متحرک در مرحلهٔ دوم را با استفاده از رابطهٔ $v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x$ محاسبه می‌کنیم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۹۰۰ = ۲(-۳)\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲ = ۱۵۰m$$

$$\Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۱۶۵m \Rightarrow \Delta x_۱ + ۱۵۰ = ۱۶۵ \Rightarrow \Delta x_۱ = ۱۵m$$

$$\Delta x_۱ = vt_۱ \Rightarrow ۱۵ = ۳۰t_۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{۲}s$$

برای محاسبهٔ زمان حرکت متحرک در مرحلهٔ دوم از معادلهٔ $v = at + v_۰$ استفاده می‌کنیم.

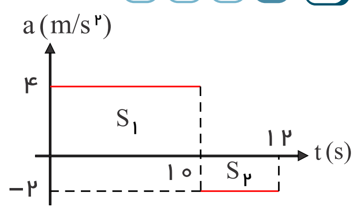
$$v = a_۲t_۲ + v_۰ \xrightarrow[v_۰=۳۰,\ a=-۳]{v=۰} ۰ = (-۳)t_۲ + ۳۰ \Rightarrow t_۲ = ۱۰s$$

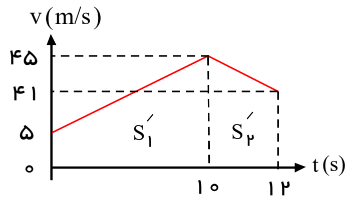
$\frac{t_۲}{t_۱}$ برابر است با: $\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۱۰}{\frac{۱}{۲}} = ۲۰$

۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)** برای حل این تست بهترین روش رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار شتاب - زمان می‌باشد.

$S_۱ = \underset{(۰-۱۰)}{\Delta v} = v_{۱۰} - v_۰ \Rightarrow ۴۰ = v_{۱۰} - ۵ \Rightarrow v_{۱۰} = ۴۵$

$S_۲ = \underset{(۱۰-۱۲)}{\Delta v} = v_{۱۲} - v_{۱۰} \Rightarrow -۴ = v_{۱۲} - ۴۵ \Rightarrow v_{۱۲} = ۴۱$





$$\Delta x = S'_۱ + S'_۲ = \frac{(۵+۴۵)\times ۱۰}{۲} + \frac{(۴۵+۴۱)\times ۲}{۲} = ۳۳۶m$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳۳۶}{۱۲} = ۲۸\frac{m}{s}$$

۶ (۱) (۲) (۳) **(۴)** در ابتدا متحرک A به دلیل سرعت کمتر از متحرک B عقب می‌افتد. جابه‌جایی متحرک‌ها را تا لحظهٔ $t = ۱۱s$ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \Delta x_A = \dfrac{۲+۱۲}{۲} \times ۵ + ۱۲ \times (۱۱-۵) = ۳۵ + ۷۲ = ۱۰۷m \\ \Delta x_B = ۱۰ \times ۱۱ = ۱۱۰m \end{cases}$$

در لحظهٔ $t = ۱۱s$ متحرک A هنوز به متحرک B نرسیده است و $۳m$ از آن عقب‌تر است. فرض می‌کنیم در مدت $t_۰$ بعد از لحظهٔ $t = ۱۱s$، متحرک A به B برسد.

$$a_B = \frac{۰ - ۱۰}{۱۶ - ۱۱} = -۲\ \frac{m}{s^۲}$$

$$\begin{cases} \Delta x_B = \dfrac{۱}{۲} a_B t_۰^۲ + v_{۰B} t = -t_۰^۲ + ۱۰t_۰ \\ \Delta x_A = v_A t_۰ = ۱۲t_۰ \end{cases}$$

$$\Delta x_A = \Delta x_B + ۳ \Rightarrow ۱۲t_۰ = (-t_۰^۲ + ۱۰t_۰) + ۳$$

$$\Rightarrow t_۰^۲ + ۲t_۰ - ۳ = ۰ \Rightarrow t_۰ = ۱s$$

بنابراین A در لحظه $t' = t_۰ + ۱۱s$، یعنی در لحظهٔ $t' = ۱۲s$ به B می‌رسد.

۷ (۱) **(۲)** (۳) (۴) روش اول: سرعت اولیهٔ متحرک را $v_۰$ در نظر می‌گیریم.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}(۲)(۲)^۲ + v_۰ \times ۲ = ۴ + ۲v_۰$$

سرعت متحرک بعد از دو ثانیه

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲ \times ۲ + v_۰ = ۴ + v_۰$$

$$\Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t = \frac{۱}{۲} \times (-۲)(۳)^۲ + (۴ + v_۰) \times ۳ \Rightarrow \Delta x_۲ = -۹ + ۱۲ + ۳v_۰ = ۳ + ۳v_۰$$

$$\Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۴ + ۲v_۰ + ۳ + ۳v_۰ = ۷ + ۵v_۰$$

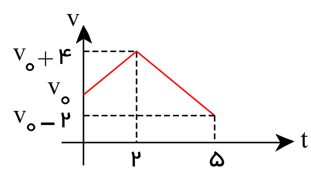
$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۶/۴ = \frac{۷ + ۵v_۰}{۵} \Rightarrow ۵v_۰ + ۷ = ۳۲ \Rightarrow ۵v_۰ = ۲۵ \Rightarrow v_۰ = ۵m/s$$

روش دوم: رسم نمودار $v - t$ از روی نمودار $a - t$:

سطح زیر نمودار $v - t$ معرف جابه‌جایی می‌باشد:

$$V_{av} = \frac{S}{\Delta t} \Rightarrow ۶/۴ = \frac{\dfrac{(v_۰ + v_۰ + ۴)\times ۲}{۲} + \dfrac{(v_۰ + ۴ + v_۰ - ۲)\times ۳}{۲}}{۵}$$

$$\Rightarrow v_۰ = ۵m/s$$



۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴) با توجه به نمودار، شیب خط مماس بر نمودار $x - t$ در لحظهٔ $t = ۰$ برابر صفر است، پس $v_۰ = ۰$ است.

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰ \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱}{۲}a(۶)^۲ + ۰ - ۸ \Rightarrow a = ۱$$

لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند. $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰ \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲} \times t^۲ - ۸ \Rightarrow t^۲ = ۱۶ \Rightarrow t = ۴$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۱ \times ۴ + ۰ = ۴\frac{m}{s}$$

۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴) سرعت متحرک در لحظهٔ صفر را $v_۰$ فرض می‌کنیم و سرعت متحرک در لحظه‌های $t = ۴s$ و $t = ۱۰s$ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به نمودار شتاب - زمان متحرک داریم:

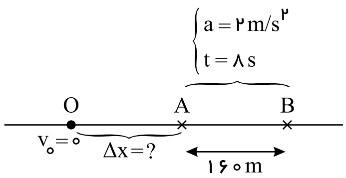
$$v = at + v_۰ \Rightarrow \begin{cases} v_۴ = ۴ \times ۴ + v_۰ = ۱۶ + v_۰ \\ v_{۱۰} = -۴ \times ۶ + v_۴ = -۲۴ + ۱۶ + v_۰ = -۸ + v_۰ \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_۲ + v_۱}{۲} \times \Delta t$$

$$\Rightarrow \ \Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = \frac{۱۶ + v_۰ + v_۰}{۲} \times ۴ + \frac{-۸ + v_۰ + ۱۶ + v_۰}{۲} \times ۶ = ۵۶ + ۱۰v_۰$$

$$\Rightarrow ۱۵۶ = ۵۶ + ۱۰\,v_۰ \Rightarrow ۱۰۰ = ۱۰v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۱۰\frac{m}{s}$$

۱۰ ۱ **۲** ۳ ۴ در ابتدا با توجه به معلوم بودن زمان جابه‌جایی، شتاب و مقدار جابه‌جایی AB، سرعت در نقطه A را می‌یابیم



$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_A t \rightarrow ۱۶۰ = (\frac{۱}{۲})(۲)(۸)^۲ + V_A(۸) \rightarrow v_A = ۱۲(\frac{m}{s})$$

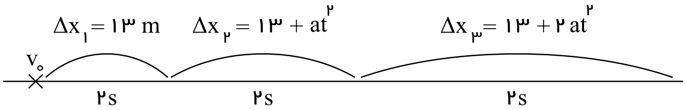
حال با استفاده از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی (مستقل از زمان) بین دو نقطهٔ o و A داریم:

$$V_A^۲ - V_۰^۲ = ۲a(\Delta x) \xrightarrow{V_۰ = ۰} (۱۲)^۲ - ۰ = (۲)(۲)\Delta x \rightarrow \Delta x_{OA} = ۳۶m$$

۱۱ **۱** ۲ ۳ ۴

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت در ابتدا یک خط راست، جابه‌جایی‌های متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، تشکیل یک دنباله با قدر نسبت $at^۲$ می‌دهند. به عبارتی داریم:



$$\Delta x_۳ = ۱۳ + ۲at^۲ \xrightarrow[t = ۲s]{\Delta x_۳ = ۲۵m} ۲۵ = ۱۳ + ۸a \rightarrow a = ۱/۵\frac{m}{s^۲}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t$$

$$t = ۲s \Rightarrow \ \Delta x(\text{دو ثانیهٔ اول}) = ۲a + ۲v_۰ = ۱۳ \Rightarrow \ a + v_۰ = ۶/۵(I)$$

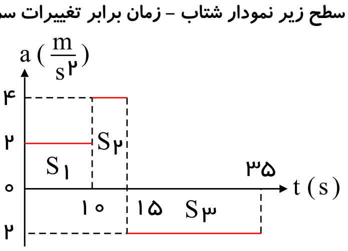
$$\begin{cases} t = ۴s \Rightarrow \ \Delta x_۴ = ۸a + ۴v_۰ \\ t = ۶s \Rightarrow \ \Delta x_۶ = ۱۸a + ۶v_۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \Delta x(\text{دو ثانیهٔ سوم}) = \ \Delta x_۶ - \ \Delta x_۴ = ۱۰a + ۲v_۰ = ۲۵ \Rightarrow \ ۵a + v_۰ = ۱۲/۵(II)$$

$$I, II \ \Rightarrow \ ۴a = ۱۲/۵ - ۶/۵ \Rightarrow \ a = ۱/۵ \ \frac{m}{s^۲}$$

۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴ با رسم نمودار سرعت – زمان از روی نمودار شتاب – زمان و بررسی سطح زیر نمودار سرعت – زمان می‌توانیم بیشترین فاصله از مبدأ را تعیین کنیم.

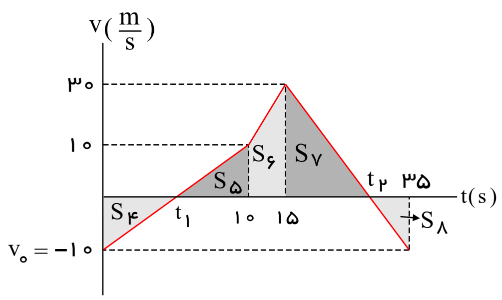
سطح زیر نمودار شتاب – زمان برابر تغییرات سرعت می‌باشد.



$$S_۱ = v_{۱۰} - v_۰ \Rightarrow ۲۰ = v_{۱۰} - (-۱۰) \Rightarrow v_{۱۰} = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$S_۲ = v_{۱۵} - v_{۱۰} \Rightarrow ۲۰ = v_{۱۵} - ۱۰ \Rightarrow v_{۱۵} = ۳۰\frac{m}{s}$$

$$S_۳ = v_{۳۵} - v_{۱۵} \Rightarrow -۴۰ = v_{۳۵} - ۳۰ \Rightarrow v_{۳۵} = -۱۰\frac{m}{s}$$

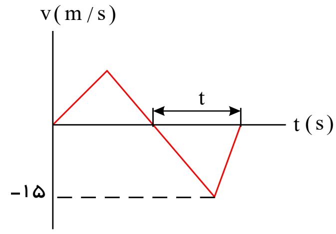


$$\frac{۳۰}{t_۲-۱۵}=\frac{۱۰}{۳۵-t_۲}\Rightarrow t_۲=۳۰s$$

در لحظهٔ $t_۲=۳۰s$ متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه‌اش (مبداء) قرار دارد.

$$d_{max}=-\cancel{S_۴}+\cancel{S_۵}+S_۶+S_۷=\frac{۱۰+۳۰}{۲}\times(۱۵-۱۰)+\frac{۳۰\times(۳۰-۱۵)}{۲}=۳۲۵m$$

۱۳) (۴) (۳) **(۲)** (۱) با توجه به نمودار اگر به اندازهٔ t ثانیه جسم در خلاف جهت محور x حرکت کند، داریم:



$$|\Delta x|=S=\frac{۱۵\times t}{۲}\Rightarrow|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{\frac{۱۵\times t}{۲}}{t}=۷/۵\frac{m}{s}$$

۱۴) **(۴)** (۳) (۲) (۱) نکته: سطح زیر نمودار $a-t$ برابر Δv می‌باشد.

با توجه به نمودار ارائه شده در متن سؤال، مشخص است که شتاب متحرک در بازه‌ی زمانی نشان داده شده همواره مثبت است. برای به‌دست آوردن علامت سرعت سطح زیر منحنی را در فاصله ی زمانی نشان داده شده به‌دست می‌آوریم.

$$S_{(۰-۵)}=\Delta v=\frac{۴\times ۵}{۲}=۱۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta v=۱۰\Rightarrow v_۵-v_۰=۱۰\Rightarrow v_۵-(-۶)=۱۰\Rightarrow v_۵=۴\frac{m}{s}$$

اکنون با بررسی علامت سرعت و شتاب در این بازه‌ی زمانی داریم:

لحظه‌ی شروع بازه زمانی $\begin{cases}a_۰=۴>۰\\ v_۰=-۶<۰\end{cases}\rightarrow a\cdot v<۰$ کندشونده

لحظه‌ی پایان بازه زمانی $(t=۵)$ $\begin{cases}a>۰\\ v_۵=۴\end{cases}\rightarrow a\cdot v>۰$ تندشونده

۱۵) (۴) (۳) (۲) **(۱)** جهت مثبت را برای هر متحرک به‌طور جداگانه همان جهت حرکت خودش فرض می‌کنیم.

$$\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}a_۱t^۲+v_{۰۱}t=\frac{۱}{۲}\times ۲t^۲+۱۰t=t^۲+۱۰t$$

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}a_۲t^۲+v_{۰۲}t=\frac{۱}{۲}\times ۴t^۲+۲۰t=۲t^۲+۲۰t$$

$$|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|=۱۱۲۵\Rightarrow ۳t^۲+۳۰t=۱۱۲۵$$

$$\Rightarrow t^۲+۱۰t-۳۷۵=۰\Rightarrow t=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۳۷۵}}{۱}$$

$$\Rightarrow t_۱=۱۵s\,,\,t_۲=-۲۵s\Rightarrow t=۱۵s$$

۱۶) (۴) (۳) (۲) **(۱)** معادلهٔ مکان - زمان درجهٔ ۲ برحسب زمان است. بنابراین حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. (مشابه کتاب درسی از مشتق کمک نمی‌گیریم.)

$$\begin{cases}x=۲t^۲+۴t-۸\\ x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{۲}=۲\rightarrow a=+۴\\ v_۰=+۴\end{cases}\rightarrow v=at+v_۰=۴t+۴$$

مشخص است که $v\neq ۰$ یعنی متحرک بر خط راست، بدون تغییر جهت است.

بنابراین: $\frac{L}{|\Delta x|}=۱$

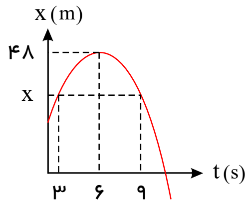
۱۷) (۴) (۳) **(۲)** (۱) در لحظهٔ سبقت، مکان دو متحرک یکسان و برابر ۷۵ متر است، پس معادلهٔ حرکت هریک را می‌نویسیم و با هم مساوی قرار می‌دهیم

$$\begin{cases}A:\ v_A=a_At_t+v_{۰A}=۱/۵t\ ,\ x_A=\frac{۱}{۲}\times ۱/۵t^۲=۰/۷۵t^۲\\ B:\ v_B=a_Bt_t+v_{۰B}=a_Bt\ \text{و}\ x_B=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲-۷۵\end{cases}$$

$$x_A = x_B = 75 \begin{cases} x_A = 0/75t^2 = 75 \rightarrow \boxed{t = 10s} \ : \text{در لحظهٔ سبقت} \\ x_B = \frac{1}{2}a_B \times 10^2 - 75 = 75 \rightarrow a_B = 3\,m/s^2 \end{cases} \rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{3 \times 10}{1/5 \times 10} = 2$$

۱۸ گزینه ۱ منحنی به‌صورت سهمی است، بنابراین نسبت به رأس سهمی ($t = 6s$) تقارن دارد. پس مکان متحرک در لحظات $t = 3$ و $t = 9$ یکسان می‌باشند و جابه‌جایی متحرک در این بازه صفر است.

$$\Delta x_{(3 \rightarrow 9)} = 0$$



۱۹ گزینه ۳ روش‌های متفاوتی وجود دارد. می‌توان از رسم نمودار $(v - t)$ و یافتن مساحت سطح زیر نمودار $(v - t)$ استفاده نمود.

یک روش، مشخص نمودن سرعت در ابتدا و انتهای بازه‌های زمانی داده‌شده و یافتن جابه‌جایی‌های انجام شده در بازه است:

$$(\text{در بازهٔ زمانی صفر تا } 10s) \Rightarrow \begin{cases} v_{(10)} = at + v_0 = (-2)(10) + 30 = 10\,m/s \\ v_{(0)} = 30\,m/s \end{cases}$$

$$(\text{در بازهٔ زمانی } 10s \text{ تا } 15s) \Rightarrow \Delta x_1 = v\Delta t = v_{(10)}\Delta t = 10 \times 5 = 50m$$

$$(\text{در بازهٔ زمانی } 15s \text{ تا } 30s) \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_2 = (\frac{10 + 40}{2})(15) = 25 \times 15 = 375 \\ v_{(15)} = v_{(10)} = 10\,m/s \\ v_{(30)} = v_{(15)} + 2 \times 15 = 10 + 30 = 40\,m/s \end{cases}$$

$$\text{کل } \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 50 + 375 = 425 \rightarrow v_{av} = \frac{425}{20} = 21/25$$

۲۰ گزینه ۱

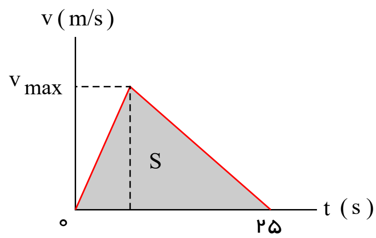
می‌دانیم که در این سوال که متحرک فقط در یک جهت حرکت کرده (همواره $v > 0$) و نمودار $v - t$ آن به صورت یک مثلث است. سرعت متوسطش، نصف ارتفاع مثلث است. یعنی:

$$v_{av} = \frac{1}{2}v_{\max} \xrightarrow{V_{av} = 10\frac{m}{s}} 10 = \frac{1}{2}v_{\max} \rightarrow v_{\max} = 20\frac{m}{s}$$

$$\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \Delta x = S_{\text{مثلث}}$$

$$\Delta x = 10 \times 25 = 250$$

$$\frac{v \times 25}{2} = 10 \times 25 \Rightarrow v = 20\,m/s$$



۲۱ گزینه ۲ ابتدا لحظه‌ای (t) را که تا آن لحظه متحرک در جهت محور x حرکت کرده است را به‌دست می‌آوریم:

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8 - 16}{18} = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3}\frac{m}{s^2}$$

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow{v_t = 0} 0 = -\frac{4}{3}t + 16 \rightarrow t = 12s$$

اکنون جابه‌جایی متحرک B را در مدت $12s$ به‌دست می‌آوریم:

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8 - (-20)}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}\frac{m}{s^2}$$

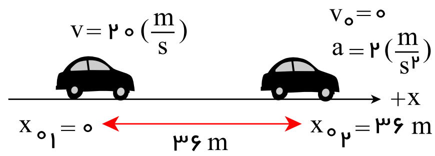
$$\Delta x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B} t \xrightarrow{t' = 12s} \Delta x_B = (\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 12^2) + (-20 \times 12) = 48 - 240 = -192m$$

$$|\Delta x_B| = 192m$$

۲۲ گزینه ۳ اگر سرعت اولیه را v_0 فرض کنیم، سرعت در لحظهٔ $t = 6s$ (وسط زمان حرکت) برابر $\frac{v_0}{2}$ است.

$$\text{(۶ ثانیهٔ اول)}\ \Delta x_۱ = \frac{v_۰ + \frac{v_۰}{۲}}{۲} \times ۶ = ۴/۵ v_۰$$
$$\text{(۶ ثانیهٔ پایانی)}\ \Delta x_۲ = \frac{\frac{v_۰}{۲} + ۰}{۲} \times ۶ = ۱/۵ v_۰$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta x_۱}{\Delta x_۲} = ۳$$

۲۳ (۱) (۲) **(۳)** (۴)



$$x_۱ = vt + x_{۰_۱} = ۲۰t$$
$$x_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_{۰_۲} = \frac{۱}{۲} \times ۲t^۲ + ۰ + ۳۶ = t^۲ + ۳۶$$
$$x_۲ = x_۱ \Rightarrow t^۲ + ۳۶ = ۲۰t \Rightarrow t^۲ - ۲۰t + ۳۶ = ۰$$
$$\Rightarrow (t-۲)(t-۱۸) = ۰$$
$$\Rightarrow t_۱ = ۲s\ ,\ t_۲ = ۱۸s \Rightarrow \quad \Delta t = ۱۶s$$

۲۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)** با استفاده از رابطهٔ $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰$، شتاب و سرعت اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$x = -۲t^۲ + ۱۲t - ۴۰ \rightarrow a = -۴\ ,\ v_۰ = ۱۲\frac{m}{s}$$

برای محاسبه‌ی مسافت طی شده باید ابتدا لحظه‌ی توقف متحرک را به‌دست بیاوریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = -۴t + ۱۲ \xrightarrow[\text{شرط توقف}]{v=۰} ۰ = -۴t + ۱۲ \Rightarrow t = ۳(s)$$

حال مکان متحرک را در لحظات ابتدا، انتها و لحظه‌ی توقف به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t_۱ = ۰ \rightarrow x_۱ = -۴۰\ (۱) \\ t_۲ = ۳ \rightarrow x_۲ = -۲۲\ (۲) \\ t_۳ = ۵ \rightarrow x_۳ = -۳۰\ (۳) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(۱),(۲)} \Delta x_۱ = -۲۲ - (-۴۰) = ۱۸ \\ \xrightarrow{(۲),(۳)} \Delta x_۲ = -۳۰ - (-۲۲) = -۸ \end{cases} \Rightarrow d = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = ۲۶$$

مسافت طی شده برابر مجموع اندازه‌ی جابه‌جایی‌های دو مرحلهٔ می‌باشد.

۲۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

با نوشتن معادلهٔ جابه‌جایی برای ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ اول، می‌توان نسبت آنها را پیدا کرد.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲$$

$$\begin{cases} t = ۱s \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}a \times ۱^۲ = \frac{۱}{۲}a\ (\text{ثانیهٔ اول}) \\ t = ۲s \Rightarrow \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}a \times ۲^۲ = ۲a\ (\text{دو ثانیهٔ اول}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{جابه‌جایی دو ثانیهٔ اول}}{\text{جابه‌جایی ثانیهٔ دوم}} = \frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۲ - \Delta x_۱} = \frac{۲a}{۱/۵a} = \frac{۴}{۳}$$

۲۶ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

فرض کنیم لحظهٔ موردنظر $t = t'$ است.

$$B : x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_{۰B} t + \cancel{x_{۰B}}^{\,۰}$$
$$A : x_A = v_A t + x_{۰A}$$

در $t = ۴s$ و $t = ۱۲s$: $x_A = x_B$ است:

$$t = ۴s \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_B \times ۴^۲ + v_{۰B} \times ۴ = v_A \times ۴ + x_{۰A} \quad (۱)$$
$$t = ۱۲s \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_B \times ۱۲^۲ + v_{۰B} \times ۱۲ = v_A \times ۱۲ + x_{۰A} \quad (۲)$$
$$(۲) - (۱) \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_B(۱۴۴ - ۱۶) + ۸v_{۰B} = ۸v_A \Rightarrow ۶۴a_B + ۸v_{۰B} = ۸v_A$$

$$\text{از طرفی:} \begin{cases} ۸a_B + v_{۰B} = v_A = \text{ثابت} \\ v_B = a_B t + v_{۰B} \end{cases} \Rightarrow ۸a_B + \cancel{v_{۰B}} = a_B t' + \cancel{v_{۰B}} \Rightarrow t' = ۸s$$

روش دوم:

چون نمودار B قسمتی از یک سهمی است، پس حرکت B شتابدار با شتاب ثابت است.

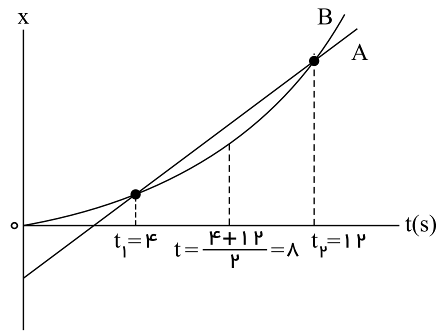
از طرف دیگر می‌دانیم که شیب خط A که دو نقطهٔ از نمودار B را قطع کرده برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ $t_1 = ۴s$ و $t_2 = ۱۲s$ است.

پس تا اینجا دریافتیم که:

$$V_A = V_{av_B}$$

و اما همه می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، V_{av} بین دو لحظهٔ t_1 و t_2 برابر است با V در لحظهٔ $t = \frac{t_1 + t_2}{۲}$.

حال با این مقدمه می‌دانیم که



یعنی در لحظهٔ $t = ۸s$ سرعت متحرک B با سرعت متحرک A هم‌اندازه است.

۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم که سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. در اینجا با توجه به تقارن نمودار داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-۱۰ - ۱۰}{۳ - ۱} = \frac{-۲۰}{۲} = -۱۰\frac{m}{s^2}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{سطح زیر نمودار}}{\Delta t} = \frac{۰}{\Delta t} = ۰$$

سطح زیر نمودار در بازه‌ی ۱ تا ۳ ثانیه از دو قسمت با مساحت‌های مساوی تشکیل شده که یکی از آنها بالای محور افقی و مثبت است و دیگری در پایین محور افقی و منفی می‌باشد و بنابراین جمع جبری مساحت‌های آنها برابر صفر می‌شود.

۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول: از لحظهٔ $t = ۶$ تا لحظهٔ $t = ۰$ برمی‌گردیم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^2 + v_{\circ}t \xrightarrow[\Delta x = ۱۸m]{v_{\circ}=۰, t=۶s} ۱۸ = \frac{۱}{۲}a(۶)^2 \rightarrow a = ۱\frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

نمودار مکان - زمان یک سهمی است بنابراین حرکت بر روی محور x، با شتاب ثابت است؛ در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۶s$ داریم:

$$\Delta x = \frac{v + v_{\circ}}{۲}\Delta t \rightarrow ۰ - ۱۸ = (\frac{۰ + v_{\circ}}{۲})(۶) = ۳v_{\circ} \rightarrow v_{\circ} = -۶m/s$$

$$v = at + v_{\circ} \rightarrow ۰ = a \times ۶ + (-۶) \rightarrow a = ۱m/s^2$$

روش سوم:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^2 + v_{\circ}t + x_{\circ} \\ v = at + v_{\circ} \end{cases} \xrightarrow[\text{صفر تا } ۶s]{\text{در بازهٔ زمانی}} \begin{cases} ۰ = \frac{۱}{۲}a \times ۶^2 + v_{\circ} \times ۶ + ۱۸ \rightarrow a = ۱m/s^2 \\ ۰ = a \times ۶ + v_{\circ} \rightarrow v_{\circ} = -۶a \end{cases}$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

در $t = ۲$، سرعت صفر است. در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰$ تا $t_2 = ۲s$ داریم:

$$v = at + v_{\circ} \Rightarrow ۰ = ۲a + v_{\circ} \Rightarrow v_{\circ} = -۲a \quad (*)$$

به کمک تعریف سرعت متوسط جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $t_1 = ۱s$ تا $t_2 = ۶s$ را می‌یابیم:

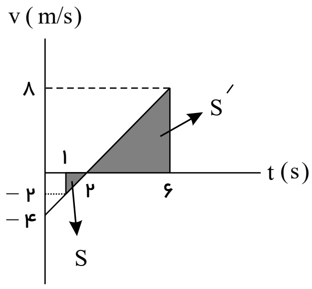
$$v_{av} = \frac{x_{(t=۶)} - x_{(t=۱)}}{۶ - ۱} = ۳ \Rightarrow \Delta x_{(۱s-۶s)} = ۱۵m \quad (**)$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^2 + v_{\circ}t + x_{\circ} \xrightarrow{(*)} x = \frac{۱}{۲}at^2 - ۲at + x_{\circ} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = ۱s \Rightarrow x_1 = \frac{a}{۲} - ۲a + x_{\circ} = -\frac{۳}{۲}a + x_{\circ} \\ t_2 = ۶s \Rightarrow x_2 = ۱۸a - ۱۲a + x_{\circ} = ۶a + x_{\circ} \end{cases} \xrightarrow{(**)} \Delta x = ۱۵m = ۷/۵a \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^2}$$

$$\xrightarrow{(*)} v_{\circ} = -۴\frac{m}{s} \Rightarrow v = ۲t - ۴$$

از رسم نمودار $(v - t)$ کمک می‌گیریم:

$v = ۲t - ۴ \Rightarrow$



$$\begin{cases} t_۱ = ۱s \Rightarrow v_۱ = -۲\frac{m}{s} \\ t_۲ = ۶s \Rightarrow v_۲ = ۸\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow L = S + S' = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱ + \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۴ = ۱ + ۱۶ = ۱۷m$$

روش دوم:

در بازهٔ زمانی صفر تا $۲s$ $\Rightarrow v = at + v_\circ \Rightarrow \circ = ۲a + v_\circ \Rightarrow v_\circ = -۲a$

$$v_{av} = \frac{v + v_\circ}{۲} = \frac{(at + v_\circ) + v_\circ}{۲} = \frac{۱}{۲}at + v_\circ$$

در بازهٔ زمانی $t_۱ = \circ$ تا $t_۲ = ۶s$، در رابطهٔ فوق:

$$v_{av} = ۳ = \frac{۱}{۲}a(۶ - ۱) + v_۱ \xrightarrow{v_۱ = v_{(t_۱ = ۱s)} = (-۲)} ۳ = \frac{۵}{۲}a - ۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲\frac{m}{s^۲} \\ v_\circ = -۴\frac{m}{s} \end{cases}$$

باقی راه‌حل شبیه روش اول است.

۳۰ ۴ ۳ ۲ ۱ حرکت نسبت به لحظهٔ تغییر جهت تقارن دارد (لحظهٔ $t = ۴s$). بنابراین در لحظهٔ $t = ۸s$ بزرگی سرعت برابر سرعت اولیه می‌شود.

۳۱ ۴ ۳ ۲ ۱ روش اول: ابتدا شتاب حرکت را با بررسی جابه‌جایی بین $t = \circ$ و $t = ۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t \Rightarrow ۸ = \frac{۱}{۲} \times a \times ۲^۲ \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

$$v = at + v_\circ \Rightarrow v = ۴t + \circ \xrightarrow{t=۲} v = ۸\frac{m}{s}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \times \Delta t \Rightarrow ۸ = \frac{\circ + v_۲}{۲} \times ۲ \Rightarrow v_۲ = ۸\frac{m}{s}$$

۳۲ ۴ ۳ ۲ ۱ روش اول:

با توجه به نمودار $v_\circ < \circ$ و $a > \circ$ است، پس تا اینجا گزینه‌های ۱ و ۳ صحیح هستند. از طرفی در لحظهٔ $t = ۱۵s$ $(t = ۲t_s = ۲ \times ۷{,}۵)$ باید $v = v_\circ$ یعنی $\Delta v = \circ$ باشد که فقط گزینهٔ ۱ چنین است.

روش دوم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ$$

$$\begin{cases} t = ۶s\,,\ x = \circ \Rightarrow \circ = ۱۸a + ۶v_\circ + ۵۴ \Rightarrow ۳a + v_\circ = -۹ \\ t = ۹s\,,\ x = \circ \Rightarrow \circ = \frac{۸۱}{۲}a + ۹v_\circ + ۵۴ \Rightarrow ۴{,}۵a + v_\circ = -۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱{,}۵a = ۳ \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲} \Rightarrow v_\circ = -۱۵\frac{m}{s} \Rightarrow v = ۲t - ۱۵$$

۳۳ ۴ ۳ ۲ ۱ اتومبیل از حالت سکون $(v_\circ = \circ)$ با شتاب ثابت $a_۱$ در مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی بزرگی سرعت آن به v می‌رسد؛ پس از آن اتومبیل در همان جهت با شتاب ثابت $a_۲$ حرکت خود را کند می‌کند تا پس از مدت زمانی سرعت آن به صفر برسد.

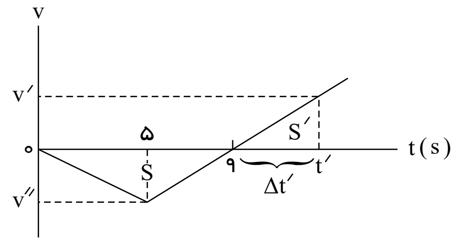
مرحلهٔ اول حرکت: $v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a_۱\Delta x_۱ \Rightarrow v^۲ - \circ = ۲a_۱\Delta x_۱ \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{v^۲}{۲a_۱}$

مرحلهٔ دوم حرکت: $v_۱^۲ - v^۲ = ۲a_۲\Delta x_۲ \Rightarrow \circ - v^۲ = ۲a_۲\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲ = \frac{-v^۲}{۲a_۲}$

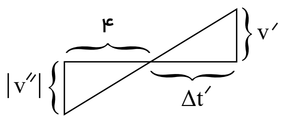
$$\Rightarrow \Delta x_۱ = ۴\Delta x_۲ \Rightarrow \frac{v^۲}{۲a_۱} = -۴\frac{v^۲}{۲a_۲} \Rightarrow |a_۲| = ۴|a_۱|$$

۳۴ ۴ ۳ ۲ ۱ برای اینکه متحرک مجدداً از مکان $x = x_\circ = \circ$ عبور کند بایستی جابه‌جایی متحرک از $t_۱ = \circ$ تا لحظه‌ای مانند t' صفر شده باشد.

می‌دانیم تفاضل مساحت بالای محور t در نمودار $(v-t)$ و زیر محور t در این نمودار جابه‌جایی را می‌دهد، پس:



$$\Delta x = S' - S = ۰ \Rightarrow S' = S \Rightarrow \frac{۱}{۲}v' \times \Delta t' = \frac{۱}{۲}\times |v''| \times ۹ \quad (۱)$$



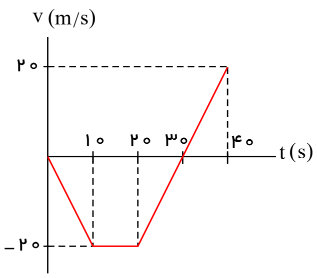
$$\xrightarrow{\text{از تشابه دو مثلث}} \frac{v'}{|v''|} = \frac{\Delta t'}{۴} \Rightarrow v' = \frac{۱}{۴}|v''|\times \Delta t' \quad (۲)$$

$$(۱)\ \text{و}\ (۲) \Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}} \times \left(\frac{۱}{۴}\cancel{|v''|}\times \Delta t'\right)(\Delta t') = \cancel{\frac{۱}{۲}}\ \cancel{|v''|}\times ۹ \Rightarrow \frac{\Delta t'^۲}{۴} = ۹ \Rightarrow \Delta t'^۲ = ۳۶ \Rightarrow \Delta t' = ۶s \Rightarrow t' = ۹ + \Delta t' = ۹ + ۶ = ۱۵s$$

۳۵ (۴) **(۳)** (۲) (۱)

$$\begin{cases} \Delta v(\text{۱۰ ثانیهٔ اول}) = -۲ \times ۱۰ = -۲۰\ \frac{m}{s} \\ \Delta v(\text{۱۰ ثانیهٔ دوم}) = ۰ \\ \Delta v(\text{۲۰ ثانیهٔ آخر}) = ۲\times(۴۰ - ۲۰) = +۴۰\ \frac{m}{s} \end{cases}$$

در بازهٔ زمانی $۲۰s$ تا ۳۵ ثانیه حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.



۳۶ (۴) (۳) **(۲)** (۱) این سوال را به سه روش حل می‌کنیم. می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط معادل میانگین سرعت‌هاست.

روش اول:

$$v = at + v_۰ = ۴t + ۶$$

$$\begin{cases} t = ۰s \rightarrow v_۰ = ۶\frac{m}{s} \\ t = ۲s \rightarrow v_۲ = ۱۴\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_۰ + v_۲}{۲} = ۱۰\frac{m}{s}$$

روش دوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ معادل سرعت در لحظهٔ $t = \frac{t_۱ + t_۲}{۲}$ است.

در اینجا سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول معادل با سرعت در لحظهٔ $t = ۱s$ است. $(t = \frac{۰ + ۲}{۲} = ۱s)$، بنابراین داریم:

$$v_{av} = v = at + v_۰ \xrightarrow[v_۰=۶]{t=۱s,\ a=۴\frac{m}{s^۲}} v_{av} = ۴ \times ۱ + ۶ = ۱۰\frac{m}{s^۲}$$

روش سوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در t' ثانیه اول، از رابطهٔ زیر نیز محاسبه می‌شود.

$$v_{av} = \frac{۱}{۲}at' + v_۰ \xrightarrow[\frac{a=\frac{۴}{۵}\frac{m}{s},v_۰=۶\frac{m}{s}}{a=۴\ s^۲,v_۰=۶\frac{m}{s}}]{t'=۲\ \text{دو ثانیهٔ اول حرکت}} v_{av} = \frac{۱}{۲}\times ۴ \times ۲ + ۶ \rightarrow v_{av} = ۱۰\frac{m}{s}$$

۳۷ (۴) **(۳)** (۲) (۱) سطح زیر نمودار سرعت – زمان متحرک در فاصلهٔ زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه، نشان‌دهندهٔ جابه‌جایی آن متحرک است. بنابراین، جابه‌جایی این دو متحرک را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$\Delta x_A = \frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ۸ = ۴۰m\ ,\ \Delta x_B = \frac{۲۰ + ۸}{۲}\times ۱۰ = ۱۴۰m$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ بین متحرک} = (۱۴۰ - ۴۰) = ۱۰۰m$$

۳۸ (۴) **(۳)** (۲) (۱)

ابتدا سرعت و جابه‌جایی متحرک را پس از $۲۰s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲\times ۲۰ + ۰ \Rightarrow v = ۴۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta x_۱ = \frac{v+v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{۴۰+۰}{۲} \times ۲۰ = ۴۰۰m$$

در مرحله دوم بیان شده سرعت متحرک با آهنگ ثابت $۴m/s^۲$ کاهش می‌یابد یعنی شتاب متحرک در این مرحله $-۴m/s^۲$ است.

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x_۲ \Rightarrow ۰ - (۴۰)^۲ = ۲(-۴)\Delta x_۲ \Rightarrow \Delta x_۲ = ۲۰۰m$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = ۴۰۰ + ۲۰۰ = ۶۰۰m$$

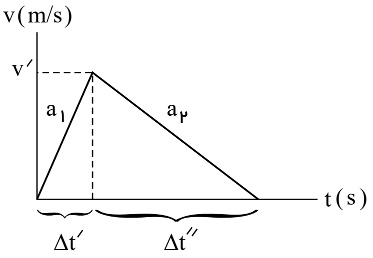
۳۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ برابر شتاب لحظه‌ای است.

نمودار $(v-t)$ را از ابتدا تا انتهای حرکت رسم می‌کنیم.

در هر بازه‌ای که شتاب ثابت است: $a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

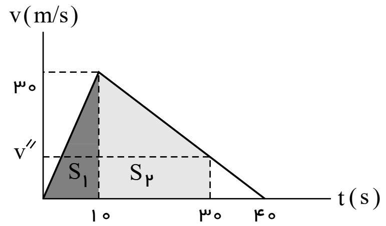
بنابراین چون: $a_۱ = ۳\,|a_۲|$ است: $\Delta t' = \frac{۱}{۳}\Delta t''$ (۱)

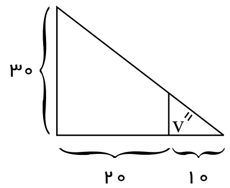


سطح زیر نمودار برابر $۶۰۰m$ است:

$$\begin{cases} \frac{۱}{۲} \times v' \times (\Delta t' + \Delta t'') = ۶۰۰ \quad (۲) \\ \text{در قسمت اول حرکت}: v' = a_۱\Delta t' = ۳\Delta t' \quad (۳) \end{cases}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \text{ و } (۳) \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۳\Delta t')(۴\Delta t') = ۶۰۰ \Rightarrow ۶\Delta t'^۲ = ۶۰۰ \Rightarrow \Delta t' = ۱۰s \begin{cases} \nearrow v' = ۳۰\frac{m}{s} \\ \searrow \Delta t'' = ۳۰s \end{cases}$$





$$\Rightarrow \frac{v''}{۳۰} = \frac{۱۰}{۳۰} \Rightarrow v'' = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$L = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۳۰ \times ۱۰ + \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times \underbrace{(۱۰+۳۰)}_{۴۰} = ۱۵۰ + ۴۰۰ = ۵۵۰m$$

۴۰ ۴ ۳ ۲ **۱** دو ثانیه سوم یعنی از ۴ تا ۶ ثانیه، پس در این دو لحظه، سرعت متحرک را یافته و سپس با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی‌اش را محاسبه می‌کنیم.

$$t_۱ = ۴s \Rightarrow v_۱ = -۲ \times ۴ + ۴ = -۴\frac{m}{s}$$

$$t_۲ = ۶s \Rightarrow v_۲ = -۲ \times ۶ + ۴ = -۸\frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v_{av}\Delta t \Rightarrow \Delta x = (\frac{-۴+(-۸)}{۲}) \times ۲ = -۱۲m \Rightarrow |\Delta x| = ۱۲m$$

۴۱ ۴ ۳ **۲** ۱ در این سؤال، ۳ نقطه مهم در مسئله داریم، بین B و C (معلوم: x, t, v_C) و بین B و A (معلوم: v_A، مجهول: x)، پس برای حل معادله بین A و B به a و v_B نیاز داریم که می‌توان از قسمت اول (BC) به‌دست آورد.

$$BC \text{ مستقل از شتاب}: \Delta x = \frac{v_B + v_C}{۲} \times \Delta t \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{v_B + ۲۰}{۲} \times ۱۰ \Rightarrow v_B = ۴\frac{m}{s}$$

$$BC \text{ مستقل از مکان}: v_C = at + v_B \Rightarrow ۲۰ = a \times ۱۰ + ۴ \Rightarrow a = ۱/۶\frac{m}{s^۲}$$

حال بین نقاط A و B می‌توان از معادله مستقل از زمان استفاده کرد:

$$AB \text{ مستقل از زمان}: v_B^۲ - v_A^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۱۶ - ۰ = ۲ \times ۱/۶ \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = ۵m$$

۴۲ ۴ ۳ ۲ **۱**

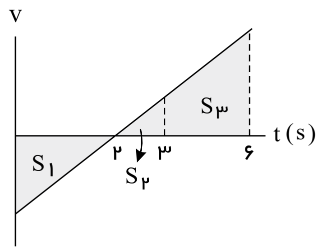
سطح زیر نمودار، سرعت - زمان برابر جابه‌جایی می‌باشد؛ بنابراین داریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{-۸\times ۳}{۲}+(۵+۲)\times\frac{۸}{۲}}{۸}=\frac{-۱۲+۲۸}{۸}=\frac{۱۶}{۸}=۲\frac{m}{s}$$

۴۳) ۴ نمودار سهمی است. پس حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. $a>۰$ و $v_۰<۰$ است. متحرک در $t=۲s$ تغییر جهت داده است و می‌دانیم هنگام بررسی مسافت طی شده باید حواسمان به تغییر جهت دادن یا تغییر جهت ندادن جسم در بازهٔ زمانی موردنظر باشد. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

رد گزینهٔ (۱): متحرک در $t=۲s$ تغییر جهت داده بنابراین مسافت در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۳s$ (که متحرک در این بازهٔ زمانی و در $t=۲s$ تغییر جهت داده) نمی‌تواند با مسافت طی شده توسط متحرک در بازهٔ زمانی $t=۳s$ تا $t=۶s$ برابر باشد:

$$\begin{cases}L_{(۰-۳s)}=S_۱+S_۲\\ L_{(۳s-۶s)}=S_۳\end{cases}\Rightarrow S_۱+S_۲\neq S_۳$$



برای سهولت در امر مقایسه می‌توانیم به a یک عدد فرضی نسبت دهیم مثلاً:

$$a=۱(\frac{m}{s})\Rightarrow v_{(t=۲)}=a\Delta t+v_{(t=۰)}\Rightarrow ۰=۲\times۱+v_۰\Rightarrow v_۰=-۲\frac{m}{s}\Rightarrow v=at+v_۰\Rightarrow v=t-۲\Rightarrow\begin{cases}t=۳s\Rightarrow v=۳-۲=۱\frac{m}{s}\\ t=۶s\Rightarrow v=۶-۲=۴\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|S_۱|=\frac{۱}{۲}\times۲\times۱=۱m\\ S_۲=\frac{۱}{۲}\times۱\times۱=۰/۵m\\ S_۳=\frac{۱}{۲}\times۳\times\underbrace{(۱+۴)}_{۵}=۷/۵m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L_{(۰-۳s)}=|S_۱|+S_۲=۱+۰/۵=۱/۵m\\ L_{(۳-۶s)}=S_۳=۷/۵m\end{cases}\Rightarrow L_{(۰-۳s)}\neq L_{(۳-۶s)}$$

توجه: برای رد گزینهٔ (۱) به‌طور شهودی نیز عمل بفرمائید! شتاب ثابت، تقارن، توجه به بازه‌های زمانی و ...

رد گزینهٔ (۲):

$$\begin{cases}\Delta x_{(۰-۳s)}=S_۲-|S_۱|\\ L_{(۰-۳s)}=S_۲+|S_۱|\end{cases}\Rightarrow\Delta x_{(۰-۳s)}\neq L_{(۰-۳s)}$$

رد گزینهٔ (۳): شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان برابر سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی است، پس به دلیل تقارن:

$$[(v_{av})_{۰-۴s}=\frac{x_{(t=۴)}-x_{(t=۰)}}{۴-۰}=۰]\neq[v_{(۱s-۵s)}(\neq۰)]$$

تأیید گزینهٔ (۴): به دلیل اینکه شتاب ثابت است و تقارن در نمودار مکان - زمان،

$$\begin{cases}x_{(t=۱s)}=x_{(t=۳s)}\\ x_{(t=۰)}=x_{(t=۴s)}\end{cases}\Rightarrow x_{(۳)}-x_{(۰)}=x_{(۱)}-x_{(۴)}=|x_{(۴)}-x_{(۱)}|\Rightarrow\Delta x_{(۰-۳s)}=|\Delta x_{(۱-۴s)}|\Rightarrow|\frac{\Delta x}{\Delta t_{(۰-۳s)}}|=|\frac{\Delta x}{\Delta t_{(۱-۴s)}}|\Rightarrow(v_{av})_{۰-۳s}=(v_{av})_{۱-۴s}$$

۴۴) ۴

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}\Delta t\Rightarrow ۸۰=\frac{۱۵+v_۰}{۲}\times۸\Rightarrow v_۰=۵\frac{m}{s}$$

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۱۵=a\times۸+۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}\frac{m}{s^۲}$$

۴۵) ۳ ثانیه سوم، فاصله زمانی بین $t=۲s$ تا $t=۳s$ است. سرعت متوسط را در این یک ثانیه حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}t_۱=۲s\Rightarrow v_۱=(۴\times۲+۲)\frac{m}{s}=۱۰\frac{m}{s}\\ t_۲=۳s\Rightarrow v_۲=(۴\times۳+۲)\frac{m}{s}=۱۴\frac{m}{s}\end{cases},\quad\bar{v}=\frac{v_۲+v_۱}{۲}=(\frac{۱۴+۱۰}{۲})\frac{m}{s}=۱۲\frac{m}{s}$$

$$\Delta x=\bar{v}\cdot\Delta t=(۱۲\times۱)m=۱۲m$$

به این دلیل که متحرک تغییر جهت نداده است (سرعت پیوسته مثبت است)، اندازه جابه‌جایی با مسافت پیموده شده برابر است.

۴۶) ۳

می‌دانیم که سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. بنابراین داریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{-۱۰\times۵}{۲}+\frac{۱۵\times۳۰}{۲}}{۲۰}=\frac{-۲۵+۲۲۵}{۲۰}=\frac{۲۰۰}{۲۰}\Rightarrow v_{av}=۱۰\frac{m}{s}$$

۴۷) ۱ در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر سرعت آن لحظهٔ وسط آن بازهٔ زمانی است.

۴۸) ۱ سطح زیر نمودار شتاب - زمان، برابر با تغییر سرعت است.

$$S=\Delta v=v_{۲۵}-\cancel{v_۰}^{۰}\Rightarrow\Delta v=(۲\times۱۰)+(۲۵-۱۰)(-۱)=۲۰-۱۵=۵\frac{m}{s}$$

سرعت اولیه صفر است، پس سرعت در لحظه $t=۲۵s$ برابر $۵\frac{m}{s}$ است.

۴۹) ۱ **۲** ۳ ۴ — با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان (سرعت - جابه‌جایی) می‌توان نوشت:

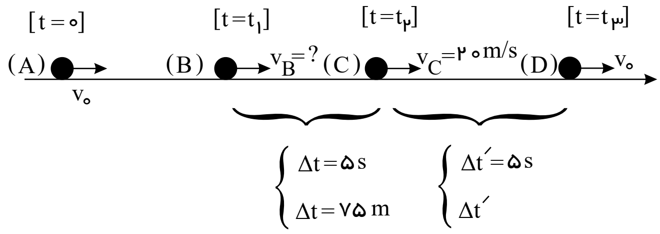
مرحلهٔ اول: $V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow V^2 - 100 = 2(-2)\times 25 \Rightarrow V = 0$

پس سرعت متحرک در مکان $x = 25m$ برابر صفر است. اکنون برای محاسبهٔ سرعت آن در مکان $x = 61m$ خواهیم داشت:

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow V^2 - 0 = 2\times 2\times (61 - 25) \Rightarrow V^2 = 144 \Rightarrow V = 12\frac{m}{s}$$

۵۰) ۱ **۲** ۳ ۴

گام اول: حرکت شتابدار با شتاب ثابت بر خط راست است. مدت $5s$ یک بازهٔ زمانی که ابتدا و انتهای این بازهٔ زمانی در متن سؤال مشخص نشده است. فرض کنیم این بازهٔ زمانی بین لحظه‌های t_1 و t_2 باشد:



گام دوم: ابتدا تندی متحرک در مکان (B) و سپس شتاب حرکت (a) را می‌یابیم:

$$(B\to C): \Delta x = (\frac{v_B + v_C}{2})(\Delta t) \to 75 = (\frac{v_B + 20}{2})(5) \Rightarrow v_B + 20 = 30 \Rightarrow v_B = 10\frac{m}{s} \to a = \frac{\Delta v_{BC}}{\Delta t_{BC}} = \frac{20 - 10}{5} = 2\frac{m}{s^2} \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

گام سوم:

$$(C\to D): \begin{cases} (v_{av})_{CD} = (\frac{v_D + v_C}{2}) = (\frac{30 + 20}{2}) = 25\frac{m}{s} \\ v_D = v_C + a\Delta t' = 20 + 2\times 5 = 30\frac{m}{s} \end{cases}$$

۵۱) **۱** ۲ ۳ ۴ — سرعت اولیه منفی است و حرکت در ابتدا کندشونده در جهت منفی و سپس تندشونده در جهت مثبت است.

۵۲) ۱ **۲** ۳ ۴

سرعت اولیه و شتاب مثبت هستند و حرکت پیوسته تندشونده است و تغییر جهت وجود ندارد و مسافت طی شده با اندازهٔ جابه‌جایی برابر است.

$$v = at = 4 \Rightarrow \begin{cases} t = 3s \Rightarrow v_3 = 10\frac{m}{s} \\ t = 4s \Rightarrow v_4 = 12\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_3 + v_4}{2}\Delta t = \frac{10 + 12}{2}\times 1 = 11m$$

۵۳) ۱ **۲** ۳ ۴ — به‌طور کلی در حرکت با شتاب ثابت، اگر ضرایب t^2 و t هم‌علامت باشند، حرکت همواره تندشونده و در جهت علامت ضریب t است.

ولی اگر ضرایب t^2 و t هم‌علامت نباشند، حرکت در ابتدا کندشونده (قبل از لحظهٔ توقف $(t_s = |\frac{v_0}{a}|)$ در جهت علامت ضریب t و بعد از آن تندشونده (در خلاف علامت ضریب t) است.

$$x = -5t^2 + 5t + 12 \Rightarrow a = -10\frac{m}{s^2}, \ v_0 = 5\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 = -10t + 5 = 0 \Rightarrow t = 0/5s$$

در ابتدای حرکت سرعت مثبت (هم‌علامت با ضریب t) و حرکت در جهت محور است و شتاب منفی و حرکت کندشونده است و در لحظهٔ $t = 0/5s$ سرعت صفر می‌شود و جهت حرکت تغییر می‌کند.

۵۴) **۱** ۲ ۳ ۴ — متحرکی که با شتاب کمتر شروع به حرکت می‌کند، دیرتر به نقطه‌ی B می‌رسد و بنابراین ۳ ثانیه بیشتر در راه است، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2}a(t+3)^2 = \frac{1}{2}a'(t)^2 \xrightarrow[a'=8\frac{m}{s^2}]{a=2\frac{m}{s^2}} \frac{1}{2}\times 2\times (t+3)^2 = \frac{1}{2}\times 8\times t^2 \Rightarrow t + 3 = 2t \Rightarrow t = 3s$$

بنابراین متحرکی که با شتاب کمتر شروع به حرکت کرده، $6s$ در راه بوده است و داریم:

$$AB = \frac{1}{2}a(t+3)^2 \Rightarrow AB = \frac{1}{2}\times 2\times (3+3)^2 = 36m$$

۵۵) ۱ ۲ **۳** ۴

با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان داریم:

$$v_0 = 54\frac{km}{h} = 15\frac{m}{s}$$

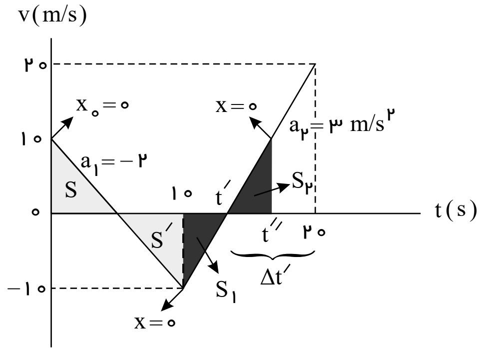
$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2}\times \Delta t \Rightarrow 20 = \frac{v + 15}{2}\times 2 \Rightarrow v = 5\frac{m}{s} = 18\frac{km}{h}$$

۵۶) ۱ ۲ ۳ **۴** — ابتدا به کمک مفهوم شتاب، سرعت را در ثانیه‌های $t = 10$ و $t = 20$ می‌یابیم:

$$t = 10s \Rightarrow v = at + v_0 = (-2)(10) + 10 = -10\frac{m}{s}$$

$$t = 20s \Rightarrow v_{(t=20s)} = at + v_{t=10s} = 3\times 10 + (-10) = 20\frac{m}{s}$$

نمودار $(v-t)$ را رسم می‌کنیم:



$$S=S'\Rightarrow x_{(t=10)}-x_{(t=0)}=S-S'=0\Rightarrow x_{(t=10)}=x_0=0$$

S_2 مساحت مثلثی در بالای محور t است که $S_2=S_1$ چون:

$$x_{(t=t'')}-x_{(t=10)}=S_2-S_1\Rightarrow 0=S_2-S_1\Rightarrow S_2=S_1$$

چون دو مثلث مشابه و هم مساحت هستند پس باید برابر باشند. طبق مفهوم شتاب از $t=t'$ تا $t=20s$، $a=3\frac{m}{s^2}$ یعنی در هر ثانیه سرعت $3\frac{m}{s}$ افزایش یافته تا از $v_{t'}=0$ به $v_{t'-20s}=20\frac{m}{s}$ برسد.

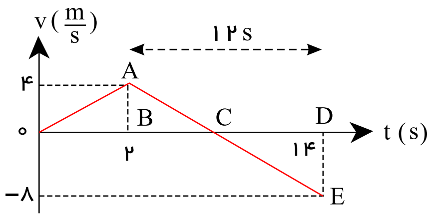
$$\overset{\text{زمان سپری شده}}{1s}\rightarrow\overset{\text{تغییرات سرعت}}{3\frac{m}{s}}\Rightarrow\Delta t'=\frac{20}{3}s\Rightarrow t''=t'+\frac{20}{3}=10+\frac{20}{3}=\frac{50}{3}s$$

$\Delta t'\rightarrow 20\frac{m}{s}$ ($t'=10$ چرا؟ از تساوی در مثلث کمک بگیرید.)

۵۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$v=at+\cancel{v_0}\Rightarrow\begin{cases}v_1=a_1t\Rightarrow 10=at\quad(1)\\ v_2=a_2t\Rightarrow 22=(a+1/5)t\end{cases}\Rightarrow 12=1/5t\Rightarrow t=8s$$

۵۸ ۱ ۲ ۳ **۴** با استفاده از شیب نمودار بین دو لحظهٔ $t=2s$ و $t=14s$ با استفاده از تشابه مثلثها، لحظهٔ تلاقی نمودار با محور زمان که همان لحظهٔ تغییر جهت است را می‌یابیم.



$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{CD}\Rightarrow\frac{4}{12-CD}=\frac{8}{CD}$$
$$\Rightarrow CD=24-2CD\Rightarrow CD=8s$$

درنتیجه متحرک ۸ ثانیه دارای سرعت منفی بوده و در سوی خلاف محور xها حرکت کرده است.

۵۹ ۱ **۲** ۳ ۴ در ۲ ثانیهٔ آخر ۴ متر جابه‌جا شده و سرعت آن به صفر رسیده پس:

$$\Delta x=-\frac{1}{2}at^2+vt\Rightarrow 4=-\frac{1}{2}a\times 2^2\Rightarrow a=-2\frac{m}{s^2}$$

در ۲ ثانیهٔ اول ۳۶ متر جابه‌جا شده است پس:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 36=\frac{1}{2}\times -2\times 4+v_0\times 2\Rightarrow v_0=20\frac{m}{s}$$

در کل حرکت

$$v=at+v_0\Rightarrow 0=-2\times t_1+20\Rightarrow t_1=10s$$

۶۰ ۱ **۲** ۳ ۴ تغییرسرعت برابر با سطح زیر نمودار شتاب – زمان است.

$$S=\Delta v=v_7-v_0$$
$$\Delta v=-2(5)+1(7-5)=-10+2=-8\Rightarrow v_7-v_0=-8\Rightarrow v_7-20=-8\Rightarrow v_7=12\frac{m}{s}$$

۶۱ **۱** ۲ ۳ ۴

در حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی در زمان‌های مساوی و متوالی تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهند، بنابراین: $x_1+x_3=2x_2$

۶۲ ۱ **۲** ۳ ۴ گام اول: متحرک با شتاب a، سریع‌تر از متحرک با شتاب $\frac{9}{16}a$ حرکت می‌کند. بنابراین اگر متحرک با شتاب a (را که با A نشان خواهیم داد) مسیر مستقیم معین شده را در مدت زمان Δt_A طی کند متحرک دوم (که با B نشان می‌دهیم) در مدت زمان $\Delta t_B=\Delta t_A+2s$ همان مسیر را طی خواهد نمود:

$$\begin{cases}\Delta x_A=\frac{1}{2}a\Delta t_A^2+v_{0A}\Delta t_A\\ \Delta x_B=\frac{1}{2}(\frac{9}{16}a)(\Delta t_A+2)^2+v_{0B}\Delta t_B\end{cases}\xrightarrow[v_{0A}=v_{0B}=0]{\Delta x_A=\Delta x_B}a\Delta t_A^2=\frac{9}{16}a(\Delta t_A+2)^2\Rightarrow\Delta t_A=\frac{3}{4}(\Delta t_A+2)=\frac{3}{4}\Delta t_A+1/5\Rightarrow 0/25\Delta t_A=1/5$$

$\Rightarrow \Delta t_A = ۶s$

۶۳) ۱ ۲ ۳ ۴

$$\bar{v}_A = \frac{\Delta x}{\Delta t_A}, \bar{v}_B = \frac{\Delta x}{\Delta t_B} \Rightarrow \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$$

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{۱}{۲}a_A t_A^۲ = \frac{۱}{۲}a_B t_B^۲ \Rightarrow (\frac{t_B}{t_A})^۲ = \frac{a_A}{a_B} = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{t_B}{t_A} = ۲ \Rightarrow \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = ۲$$

۶۴) ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به اینکه نمودار v-t یک خط با شیب ثابت است، حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. پس شیب خط برابر شتاب حرکت متحرک است. بنابراین با پیدا کردن شتاب، معادلهٔ سرعت را نوشته و داریم:

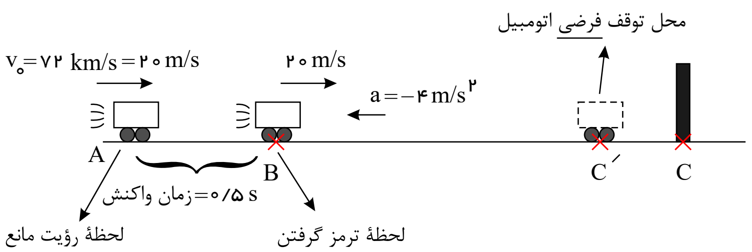
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۹ - ۱۲}{۲۱ - ۰} = -۱\frac{m}{s^۲}$$

$$v = at + v_۰ \xrightarrow[v_۰ = ۱۲]{a=-۱} v = -t + ۱۲$$

$$\begin{cases} t_۱ = ۶ \rightarrow v_۱ = -(۶) + ۱۲ = ۶\frac{m}{s} \\ t_۲ = ۱۲ \rightarrow v_۲ = -۱۲ + ۱۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}\Delta t = \frac{۶ + ۰}{۲} \times (۱۲ - ۶) = ۱۸m$$

۶۵) ۱ ۲ ۳ ۴ فرض کنیم جسم در نقطهٔ C' متوقف می‌شود. طبق مفهوم شتاب ($a = -۴\frac{m}{s^۲}$ یعنی از $v_۰ = +۲۰\frac{m}{s}$ در هر ثانیه $۴\frac{m}{s}$ کاسته می‌شود)، پس از $۵s$ متحرک متوقف می‌شود. جابه‌جایی جسم در این مدت:

$$\Delta x_{BC'} = (\frac{v + v_۰}{۲})\Delta t = (\frac{۰ + ۲۰}{۲})(۵) = ۵۰m$$



گام دوم: در مدت زمان واکنش راننده، اتومبیل در مدت $۰/۵m$ با تندی $۲۰\frac{m}{s}$ به مقدار $\Delta x_{AB} = v\Delta t \Rightarrow \Delta x_{AB} = ۱۰m$.

گام سوم:

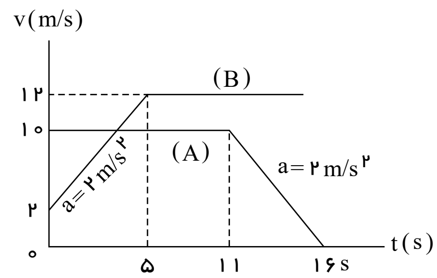
$$\Delta x_{AB} + \Delta x_{BC'} = ۱۰ + ۵۰ = ۶۰m > \Delta x_{AC} = ۵۲m$$

پس به مانع برخورد می‌کند. امّا با چه تندی؟

$$v_C^۲ - v_B^۲ = ۲a\Delta x_{BC} \Rightarrow v_C^۲ - ۲۰^۲ = ۲(-۴)(\underbrace{۴۲}_{(۵۲-۱۰=۴۲)}) \Rightarrow v_C^۲ = ۴۰۰ - ۳۳۶ \Rightarrow v_C = ۸\frac{m}{s}$$

۶۶) ۱ ۲ ۳ ۴ از نظر محاسبات یکی از تست‌های طولانی کنکور است. برای تسریع و سهولت در پاسخ‌دهی به این تست از نمودار $(v - t)$ کمک می‌گیریم؛

گام اول: نمودار $(v - t)$ هر دو متحرک را رسم می‌کنیم. سرعت متحرک (B) در پایان ثانیهٔ پنجم $v = at + v_۰ = ۲ \times ۵ + ۲ = ۱۲\frac{m}{s}$ خواهد بود.



هر دو متحرک در مبدأ زمان در مبدأ مکان بوده‌اند:

$$x_{۰A} = x_{۰B} = ۰$$

لحظه‌ای که دو اتومبیل به‌هم می‌رسند: $x_A = x_B$. بنابراین اگر لحظهٔ موردنظر را $t = t'$ درنظر بگیریم:

$(t_۲ = t'$ تا $t_۱ = ۰$ در بازهٔ زمانی $) \Rightarrow \Delta x_A = \Delta x_B$ (جابه‌جایی دو متحرک یکسان است)

گام دوم: سطح زیر نمودار $(v - t)$ برابر جابه‌جایی است؛ با کمی تأمل در شکل مشخص است که $t = ۵s$ تا $t = ۱۱s$ این اتفاق رُخ نمی‌دهد. ببینیم تا $t = ۱۱s$ آیا جابه‌جایی دو متحرک (مساحت سطح زیر دو نمودار) یکسان می‌شود یا خیر؟

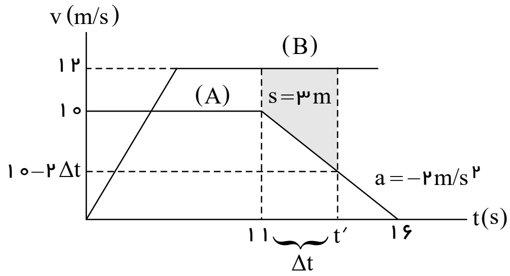
$$A: \Delta x_A = ۱۱ \times ۱۰ = ۱۱۰m \text{ و } B: \Delta x_B = \underset{\text{ذوزنقه}}{S} + \underset{\text{مستطیل}}{S} = \frac{۱}{۲}(۵)\underbrace{(۲ + ۱۲)}_{۱۴} + ۱۲ \times ۶ = ۳۵ + ۷۲ \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_A = ۱۱۰m \\ \Delta x_B = ۱۰۷m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_B < \Delta x_A \Rightarrow t' > ۱۱s$$

$\Rightarrow$ کافی است مساحت سطح زیر نمودار متحرک B از $t = ۱۱s$ به بعد $۳m$ بیشتر از مساحت سطح زیر نمودار A باشد.

گام سوم:

$$S = \frac{۱}{۲}(\Delta t)(\underbrace{۲ + (۱۲ - (۱۰ - ۲\Delta t))}_{۴+۲\Delta t}) = ۳ \Rightarrow ۲\Delta t + \Delta t^۲ = ۳ \Rightarrow \Delta t^۲ + ۲\Delta t - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۲}}{۲} = \frac{-۲ \pm ۴}{۲} \begin{cases} -۳s \\ ۱s \checkmark \end{cases} \Rightarrow t' = ۱۲s$$



$$t' = ۱۲s \begin{cases} v_B = ۱۲\frac{m}{s} \\ v_A = ۱۰ - ۲\Delta t = ۱۰ - ۲ \times ۱ = ۸\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_B - v_A = ۱۲ - ۸ = ۴\frac{m}{s}$$

۶۷ ۱ ۲ ۳ **۴** سرعت در $t = ۰$، در جهت محور x است (دقت کنید در جهت محور x بودن الزاماً به مفهوم $x > ۰$ بودن نیست بلکه یعنی جهت سرعت متحرک در جهت $(+)$ محور x است، درحالی که ممکن است $x < ۰$ باشد.) پس $v_۰ > ۰$.

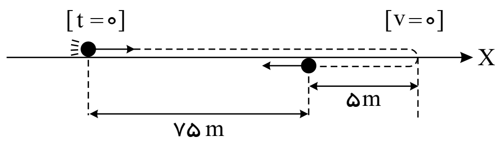
به کمک سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت جابه‌جایی متحرک را می‌یابیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = ۷/۵\vec{i} \Rightarrow (\frac{\Delta x}{\Delta t})\vec{i} = ۷/۵\vec{i}$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = ۷/۵ \Rightarrow \Delta x = ۷/۵ \times ۱۰ = ۷۵m \quad (۱)$$

تندی متوسط متحرک در همین مدت $۸/۵\frac{m}{s}$ شده است، از اینکه تندی متوسط متحرک بیشتر از سرعت متوسط متحرک شده است، در می‌یابیم که الزاماً متحرک تغییر جهت داده است. یعنی مسافت طی شده بیشتر از جابه‌جایی است.

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{۱۰} = ۸/۵ \Rightarrow L = ۸۵m \quad (۲)$$

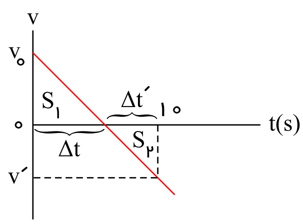
با توجه به مقادیر (۱) و (۲):

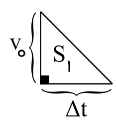


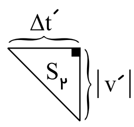
حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. نمودار $(v - t)$ یک خط مایل است با $v_۰ > ۰$

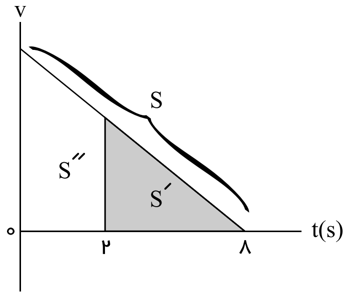
$$(۱)\,,\,(۲) \Rightarrow S_۱ = ۸۰m\,,\; S_۱ + |S_۲| = ۸۵m \Rightarrow |S_۲| = ۵m$$

$$\frac{|v'|}{v_۰} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\,,\; \begin{cases} S_۱ = \frac{۱}{۲}v_۰\Delta t = ۸۰ \\ S_۲ = \frac{۱}{۲}|v'|\Delta t' = ۵ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{|v'|}{|v|} \times \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{۵}{۸۰} = \frac{۱}{۱۶} \quad (۳)$$
$$\xrightarrow{(۳)} (\frac{\Delta t'}{\Delta t})^۲ = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{۱}{۴}\; \frac{\Delta t'}{۱۰ - \Delta t'} = \frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \Delta t' = ۲s \Rightarrow \Delta t = ۸s$$





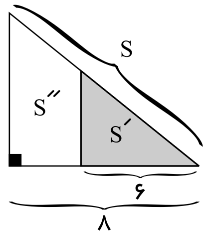




$\Rightarrow S' = ?$

$\Rightarrow S''_{(۰-۲s)} = \Delta x = L = ?$

$\Rightarrow S_۱ = ۸۰m$



$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = (\frac{۶}{۸})^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \frac{S'}{۸۰} = \frac{۹}{۱۶}$$

$\Rightarrow S' = ۴۵ \Rightarrow$ مجهول سؤال $= S - S' = ۸۰ - ۴۵ = ۳۵m$

توجه: می‌توان پس از مشخص شدن $\Delta t = ۸s$، از روش زیر بهره برد به نحوی که: در بازهٔ زمانی $(۰ - ۸s)$ و $(۲s - ۸s)$، به مسئله وارونه نگاه کنیم تا $v_۰ = ۰$ شود. آنگاه:

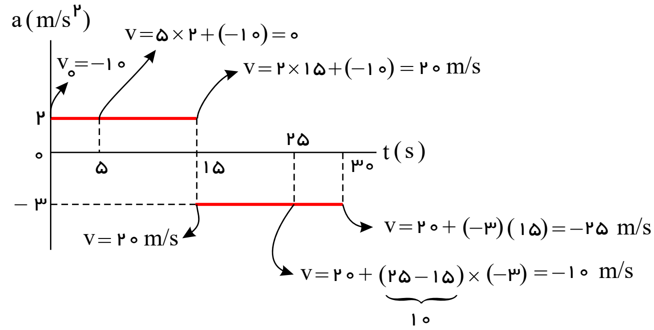
$$(۰ \to ۸s) \to (۸s \to ۰) \Rightarrow \begin{cases} v_۰ = v_{(t=۸s)} = ۰ \\ |\Delta x| = \frac{۱}{۲}a\Delta t^۲ \Rightarrow ۸۰ = \frac{۱}{۲}|a| \times ۸^۲ \Rightarrow |a| = ۲/۵\frac{m}{s^۲} \end{cases}$$

$$(۲s \to ۸s) \to (۸s \to ۲s) \begin{cases} v_۰ = v_{(t=۸s)} = ۰ \\ |\Delta x| = \frac{۱}{۲}a\Delta t^۲ = \frac{۱}{۲}(۲/۵)۶^۲ = ۴۵m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجهول تست $= S - S' = ۸۰ - ۴۵ = ۳۵m$

۶۸ ۴ ۳ ۲ **۱**

روش اول: کافی است از مفهوم شتاب در هر بازهٔ زمانی استفاده کرده، سرعت متحرک را در لحظات $t = ۵s$ و $t = ۲۵s$ و $t = ۳۰s$ می‌یابیم:



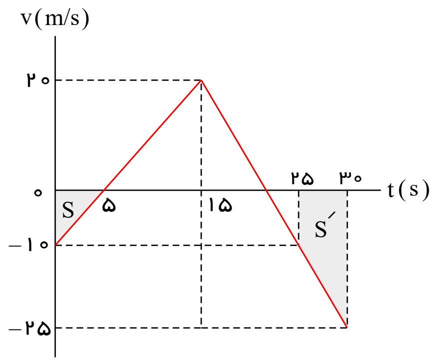
$\underbrace{\text{در بازهٔ زمانی صفر تا } ۵s}^{\text{۵ ثانیهٔ اول}} \Rightarrow \Delta x = (\frac{۰ + (-۱۰)}{۲})(۵) = -۲۵m \to |\Delta x| = ۲۵m$

$\underbrace{\text{در بازهٔ زمانی } ۲۵s \text{ تا } ۳۰s}_{\text{۵ ثانیهٔ ششم}} \Rightarrow \Delta x' = (\frac{-۲۵ + (-۱۰)}{۲})(۵) = \frac{-۳۵ \times ۵}{۲} = -۸۷/۵m \Rightarrow |\Delta x'| = ۸۷/۵m \Rightarrow |\frac{\Delta x'}{\Delta x}| = \frac{۸۷/۵}{۲۵} = ۳/۵$

توجه: <u>دقت کنیم در بازهٔ زمانی داده شده شتاب ثابت بوده است. (در هر بازهٔ زمانی جداگانه)</u>

روش دوم: کافی است نمودار $(v - t)$ را رسم کنیم:

v را در لحظات $t = ۵s$ و $t = ۲۵s$ و $t = ۳۰s$ مشخص می‌کنیم و به کمک سطح زیر نمودار، جابه‌جایی در هر مرحله را محاسبه می‌کنیم.



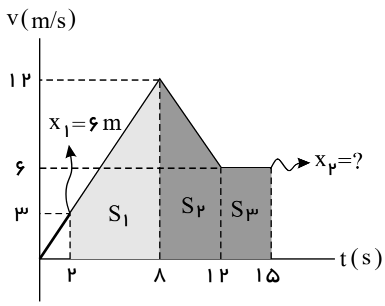
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = ۰ - S = -\frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ۵ = -۲۵m \\ \Delta x' = ۰ - S' = -\frac{۱}{۲}\times ۵ \times (۱۰+۲۵) = -۸۷٫۵m \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{\Delta x'}{\Delta x}\right| = \frac{۸۷٫۵}{۲۵} = ۳٫۵$$

۶۹) ۴ ۳ ۲ **۱** گام اول: ابتدا سرعت متحرک را در $t = ۲s$ می‌یابیم. چندین روش وجود دارد. مثلاً اینکه از $t = ۰$ تا $t = ۸s$ شتاب ثابت است (چون شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ برابر شتاب بوده و شیب تغییر ننموده است.)

$$a = (a_{av})_{۰-۸s} = (a_{av})_{۰-۲s} \Rightarrow \frac{۱۲-۰}{۸-۰} = \frac{v-۰}{۲-۰} \Rightarrow v = ۳\frac{m}{s}$$

(برای یافتن v در $t = ۲s$ راه‌های زیادی وجود دارد: معادلهٔ خط، تالس، مفهوم شتاب، معادلهٔ سرعت و ...)

گام دوم: از $t = ۲s$ تا $t = ۱۵s$ مساحت سطح زیر نمودار را یافته و کار تمام!



$$\Delta x = \Delta x_۲ - (-۶) = S_۱ + S_۲ + S_۳ \Rightarrow x_۲ + ۶ = \underbrace{\frac{۱}{۲}\times ۶ \times (۳+۱۲)}_{۴۵} + \underbrace{\frac{۱}{۲}(۴)(۶+۱۲)}_{۳۶} + \underbrace{۳\times ۶}_{۱۸} \Rightarrow x_۲ + ۶ = ۹۹ \to x_۲ = ۹۳m \Rightarrow \vec{x}_۲ = ۹۳\vec{i}$$

۷۰) ۴ **۳** ۲ ۱

ابتدا با توجه به معلوم بودن سرعت متوسط و زمان کل حرکت، جابه‌جایی را محاسبه می‌کنیم. پس از آن با استفاده از سطح محصور بین نمودار محور زمان (جابه‌جایی کل) مقدار مجهول را می‌یابیم. سطح زیر نمودار $v - t$ معرف Δx می‌باشد:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۸ = \frac{\Delta x}{۱۵} \Rightarrow \Delta x = ۱۲۰m$$

$$\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = (۶+v)\frac{۱۰}{۲} + v \times \frac{۵}{۲} = ۳۰ + ۷٫۵v = ۱۲۰ \Rightarrow v = \frac{۹۰}{۷٫۵} = ۱۲m/s$$

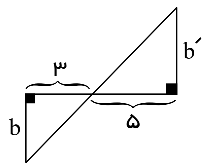
۷۱) **۴** ۳ ۲ ۱ برای نوشتن معادله‌ی مکان به a و $v_۰$ نیاز داریم، $v_۰$ مشخص است. پس باید ابتدا a را به‌دست آوریم، بنابراین طبق پارامترهای حرکت (معلوم: $x, v, v_۰$، مجهول: a) از معادله‌ی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم.

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۶^۲ - ۸^۲ = ۲ \times a \times (۸٫۵ - ۵) \Rightarrow a = -۴\frac{m}{s^۲}$$

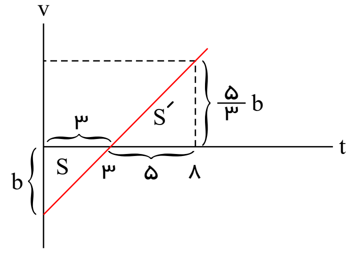
بنابراین معادله‌ی مکان - زمان اینگونه است:

$$x = \frac{۱}{۲} \times (-۴) \times t^۲ + ۸t + ۵ \Rightarrow x = -۲t^۲ + ۸t + ۵$$

۷۲) ۴ **۳** ۲ ۱ ساده‌ترین راه، رسم نمودار $(v - t)$ و استفاده از مساحت زیر نمودار آن‌هاست:



$$\Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow b' = \frac{۵}{۳}b$$



$$|S| = \frac{1}{2}(3)(b) = \frac{3b}{2}$$

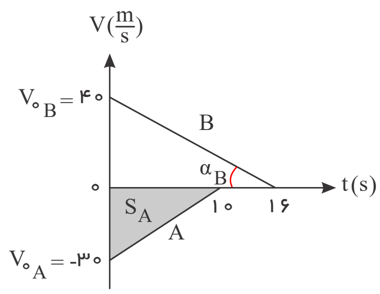
$$S' = \frac{1}{2}(\frac{5}{3}b)(5) = \frac{25}{6}b$$

$$\Delta x = S' - |S| = \frac{8}{3}b$$

$$L = S' + |S| = \frac{34}{6}b$$

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{\frac{8}{3}b}{\frac{34}{6}b} = \frac{8}{17}$$

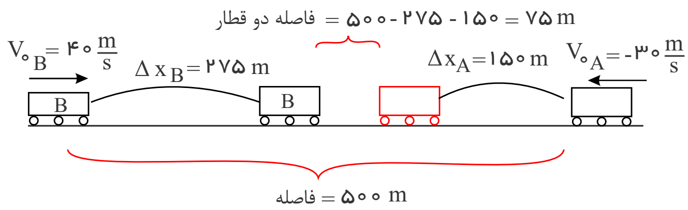
(۷۳) (۴) (۳) **(۲)** (۱) در لحظهٔ $t = 10s$ قطار A می‌ایستد درنتیجه ابتدا باید جابه‌جایی قطار B را تا این لحظه پیدا کنیم:



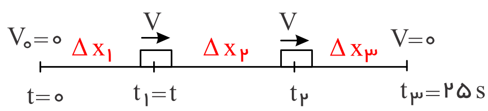
$$\begin{cases} B \text{ شیب خط} = a_B = -\frac{40}{16} = -2/5\frac{m}{s^2} \\ \Delta x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + V_{\circ B}t \\ \Rightarrow \Delta x_B = \frac{1}{2}(-2/5)10^2 + 4 \times 10 \Rightarrow \Delta x_B = 275m \end{cases}$$

جابه‌جایی متحرک A را با استفاده از سطح زیر نمودار A به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta x_A = S_A = \frac{3 \times 10}{2} = 150m$$



(۷۴) (۴) **(۳)** (۲) (۱) می‌دانیم اگر در حرکت شتاب‌دار ثابت سرعت متحرکی پس از t ثانیه از $V_\circ$ به V برسد و سپس در مرحلهٔ بعد، سرعتش را با همان شتاب کاهش داده به‌طوری که پس از t' ثانیه از V مجدداً به $V_\circ$ برسد، در این‌صورت $(\Delta x_1 = \Delta x_3 \ , \ t = t')$ خواهد بود و داریم:



$$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 20 = \frac{\Delta x}{25} \Rightarrow \Delta x = 500m$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \Rightarrow 500 = \frac{V+0}{2} \times t + V(25 - 2t) + \frac{V+0}{2} \times t$$

$$\xrightarrow{V=at} 500 = \frac{5t^2}{2} + 125t - 10t^2 + \frac{5t^2}{2} = -5t^2 + 125t \Rightarrow t^2 - 25t + 100 = 0$$

$$\Rightarrow (t-20)(t-5) = 0 \Rightarrow t = 20s \text{ غ ق ق } \ , \ t = 5 \text{ ق ق}$$

حال با داشتن مدت زمان t برای محاسبهٔ مدت زمان حرکت یکنواخت متحرک داریم:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 25s \Rightarrow t + \Delta t_2 + t = 25 \Rightarrow \Delta t_2 = 25 - 2t = 25 - 10$$
$$= 15s \Rightarrow \Delta t_{\text{یکنواخت}} = 15s$$

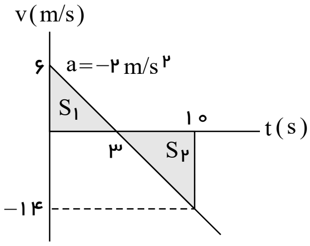
(۷۵) (۴) **(۳)** (۲) (۱) توجه: هنگامی که مسافت طی شده خواسته می‌شود باید توجه کنیم ممکن است حرکت رفت و برگشت باشد (در نمودار $(x-t)$ نقاط max و min و در نمودار $(v-t)$ محور تقاطع نمودار با محور افقی t و تغییر علامت v). برای یافتن مسافت طی شده و نیز تندی متوسط S_{av} (که به مسافت طی شده توسط متحرک وابسته است.) رسم نمودار $(v-t)$ و استفاده از مساحت سطح زیر نمودار آن یکی از راه‌کارهای مناسب است.

گام اول: سرعت اولیه را می‌یابیم. شتاب ثابت است و در $3s$، $t =$ سرعت متحرک صفر است. (شیب خط مماس برابر سرعت در هر لحظه است.)

$$(t_2 = 3s \text{ تا } t_1 = 0 \text{ در بازهٔ زمانی }) \Rightarrow \Delta x = (\frac{v+v_\circ}{2})\Delta t \Rightarrow 36 - 27 = (\frac{0+v_\circ}{2})(3-0) \Rightarrow 9 = \frac{3}{2}v_\circ \Rightarrow v_\circ = 6\frac{m}{s} \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-6}{3-0} = -2\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a = -2\frac{m}{s^2}$$

گام دوم: نمودار $(v-t)$ را رسم می‌کنیم:



در هر ثانیه $۲\frac{m}{s}$ از تندی کاسته می‌شود، پس:

$t=۳s \to v=۰$

$t=۱۰s \to v=۶-۲\times ۱۰=-۱۴\frac{m}{s}$

مسافت طی شده از $t=۰$ تا $t=۱۰s$: $L=S_۱+S_۲=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۳+\frac{۱}{۲}\times ۱۴\times ۷=۹+۴۹=۵۸m$

روش دوم: با استفاده از دنباله‌ای که جابه‌جایی‌ها در حرکت با شتاب ثابت در هر ثانیهٔ تشکیل می‌دهد نیز به پاسخ رسید.

مسافت طی‌شده $L=۵۸m$

۷۶ ۴ ۳ ۲ ۱ نمودار سرعت – زمان خط راست است، پس شتاب حرکت مقدار ثابتی است.

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۴-(-۳)}{۷}=۱\frac{m}{s^۲}$$

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}t^۲-۳t$$

$$\begin{cases} t_۱=۳s \Rightarrow x_۱=\frac{۱}{۲}(۹)-۳(۳)=۴/۵-۹=-۴/۵m \\ t_۲=۵s \Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۲}(۲۵)-۱۵=-۲/۵ \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_۲-x_۱=-۲/۵-(-۴/۵)=۲m$$

۷۷ ۴ ۳ ۲ ۱ در ابتدا با استفاده از رابطه سرعت – جابه‌جایی (مستقل از زمان)، شتاب حرکت و پس از آن معادله حرکت را می‌نویسیم.

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۸^۲-۴^۲=۲\times a\times(۱۰-۴) \Rightarrow a=۴\frac{m}{s^۲}$$

بنابراین معادله‌ی مکان – زمان اینگونه است:

$$x=\frac{۱}{۲}\times ۴t^۲+۴t+۴ \Rightarrow x=۲t^۲+۴t+۴$$

۷۸ ۴ ۳ ۲ ۱ ابتدا معادلهٔ سرعت و شتاب متحرک را محاسبه کرده و سپس به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$x=۲t^۳-۶t^۲+۶t \Rightarrow V=\frac{dx}{dt}=۶t^۲-۱۲t+۶ \Rightarrow a=\frac{dV}{dt}=۱۲t-۱۲$$

گزینهٔ (۱):

$$\begin{cases} t_۱=۰ \to V_۱=۶ \\ t_۲=۲ \to V_۲=۶ \end{cases} \Rightarrow \bar{a}=\frac{V_۲-V_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{۶-۶}{۲-۰}=۰$$

گزینهٔ (۲):

شرط تغییر جهت حرکت: $V=۰ \Rightarrow ۶t^۲-۱۲t+۶=۰ \Rightarrow t^۲-۲t+۱=۰$

$\Rightarrow (t-۱)^۲=۰ \Rightarrow t=۱$

لحظهٔ $t=۱(s)$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ سرعت است، بنابراین در این لحظه سرعت صفر می‌شود اما تغییر جهت نمی‌دهد.

گزینهٔ (۳): برای بررسی تندشونده یا کندشونده بودن حرکت، معادلهٔ سرعت و شتاب را تعیین علامت می‌کنیم:

$V=۰ \Rightarrow ۶t^۲-۱۲t+۶=۰ \Rightarrow ۶(t-۱)^۲=۰ \Rightarrow t=۱$ ریشهٔ مضاعف

$a=۰ \Rightarrow ۱۲t-۱۲=۰ \Rightarrow t=۱$ ریشهٔ ساده

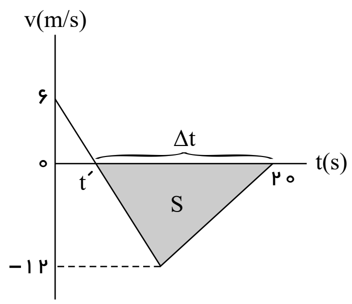
بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

	t=1	
V	+	+
a	−	+
	کندشونده	تندشونده

گزینهٔ (۴): باتوجه به تعیین علامت سرعت و مضاعف بودن ریشهٔ $t=۱(s)$ می‌توان نتیجه گرفت متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و سرعت همواره مثبت است یعنی حرکت همواره در جهت محور x است.

۷۹ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

هنگامی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، $v > ۰$ است و وقتی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، $v < ۰$ است. پس در بازهٔ زمانی صفر تا t'، چون $v > ۰$ است متحرک در جهت محور x و در بازهٔ زمانی t' تا $t = ۲۰s$ چون $v < ۰$ است متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.



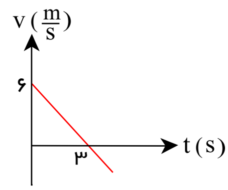
در بازهٔ زمانی t' تا $t = ۲۰s$:

$$L = (S) = \frac{۱}{۲}(۱۲)(\Delta t)$$
$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{۶\Delta t}{\Delta t} = ۶\frac{m}{s}$$

توجه: نکته مهم این بود که نیازی به یافتن t' نبود. این سؤال در سال‌های اخیر مورد توجه طراحان بوده است.

۸۰ **(۱)** (۲) (۳) (۴) بدیهی است که تا قبل از لحظهٔ توقف یعنی $t_s = |\frac{v_\circ}{a}|$، حرکت کندشونده است.

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t + x_\circ = -t^۲ + ۶t + ۲۰ \Rightarrow a = -۲\frac{m}{s^۲}, \ v_\circ = ۶\frac{m}{s}$$
$$v = at + v_\circ = -۲t + ۶$$



با توجه به نمودار سرعت – زمان حرکت متحرک قبل از $t = ۳s$ کندشونده است.

۸۱ **(۱)** (۲) (۳) (۴) با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب، مقدار سرعت اولیه و البته سرعت نهایی ($v = ۵v_\circ$) را یافته، پس از آن شتاب حرکت را تعیین می‌کنیم.

$$\Delta x = \frac{v_\circ + v}{۲} \times \Delta t \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{v_\circ + ۵v_\circ}{۲} \times ۸ \Rightarrow v_\circ = ۵\frac{m}{s}$$
$$v = at + v_\circ \Rightarrow ۵ \times ۵ = a \times ۸ + ۵ \Rightarrow a = ۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

۸۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴) ابتدا سرعت متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۶ - ۱۶}{۸ - ۰} = ۰$$

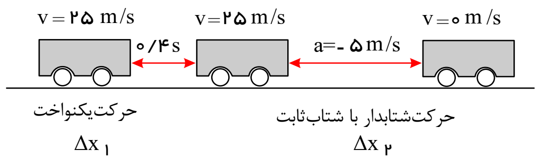
نمودار مکان – زمان متحرک سهمی است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت حرکت شتاب ثابت است ($a = \overline{a}$)، اکنون با توجه به اطلاعات روی نمودار بین لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۴$ و به کمک رابطهٔ مستقل از سرعت اولیه داریم:

$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + Vt \Rightarrow ۸ = -\frac{۱}{۲}a \times ۴^۲ + ۰ \times ۴ \Rightarrow a = -۱\frac{m}{s^۲}$$

توجه: شیب نمودار $x - t$ در لحظهٔ ۴ $t =$ برابر صفر است، یعنی در این لحظه $V = ۰$ است.

۸۳ **(۱)** (۲) (۳) (۴) در مدت $۰/۴s$ اتومبیل با سرعت ثابت (حرکت یکنواخت) و پس از آن با شتاب ثابت کندشونده حرکت می‌کند.

$$v_\circ = ۹۰ \div ۳/۶ = ۲۵m/s$$
$$\Delta x_۱ = v_\circ \Delta t_۱ = ۲۵ \times ۰/۴ = ۱۰m$$
$$v^۲ - v_\circ^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۲۵^۲ = ۲(-۵)\Delta x_۲$$
$$\Rightarrow \Delta x_۲ = ۶۲/۵m$$



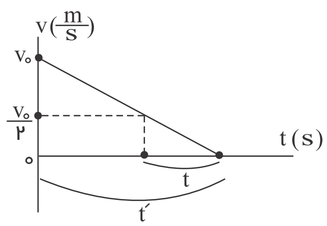
بنابراین از لحظه‌ای که راننده مانع را در ۸۰ متری خود می‌بیند تا توقف کامل $۷۲/۵m$ جابه‌جا می‌شود، درنتیجه اتومبیل در ۷/۵ متری مانع می‌ایستد.

۸۴ **(۱)** (۲) (۳) (۴) ابتدا می‌توان به کمک شتاب و سرعت اولیه، سرعت نقاط موردنظر را به‌دست آورد و سپس می‌توان سرعت متوسط را محاسبه کرد:

$$v = at + v_\circ \begin{cases} t_۱ = ۵ \rightarrow v_۱ = ۲ \times ۵ + ۳ = ۱۳m/s \\ t_۲ = ۲۰ \rightarrow v_۲ = ۲ \times ۲۰ + ۳ = ۴۳m/s \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \Rightarrow v_{av} = \frac{۱۳ + ۴۳}{۲} = ۲۸\,m/s$$

۸۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

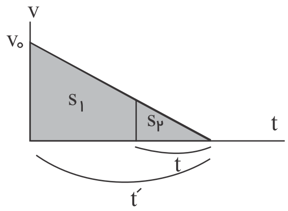
اگر نمودار سرعت ـ زمان متحرک را از لحظهٔ ترمز (شروع حرکت کندشونده) تا توقف رسم کنیم، داریم:



با توجه به تشابه مثلث‌ها:

$$\frac{t'}{t} = \frac{v_\circ}{\frac{v_\circ}{۲}} = ۲$$

از طرفی می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه، معادل مجذور نسبت تشابه به آن‌هاست یعنی:



$$\underset{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\frac{(S_۲ + S_۱)}{S_۱}} = (\frac{t'}{t})^۲ = ۲^۲ = ۴$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$S_۲ = \Delta x = ۱۵۰m \xrightarrow[S_۱ \Delta x_۱]{S_۲ = ۳S_۱} ۱۵۰ = ۳\Delta x' = ۵۰m$$

$$\Delta x_{کل} = ۱۵۰ + ۵۰ \to \Delta x_{کل} = ۲۰۰m$$

۸۶ (۴) (۳) (۲) (۱) سطح زیر نمودار در بازهٔ $۰ < t < ۴s$ را به‌دست می‌آوریم.

$$S = \frac{۴ + ۲}{۲} \times ۸ = ۲۴m = x_۴ - x_\circ = x_۴ - (-۳۶) \Rightarrow x_۴ = -۱۲m$$

بنابراین متحرک $۱۲m$ دیگر باید جابه‌جا شود تا به مبداء مکان برسد.

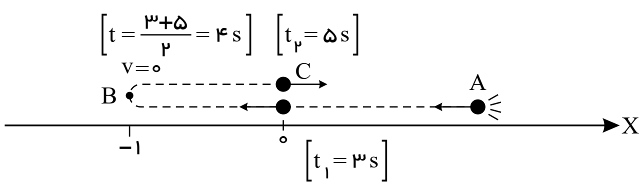
در $t > ۴s$ داریم:

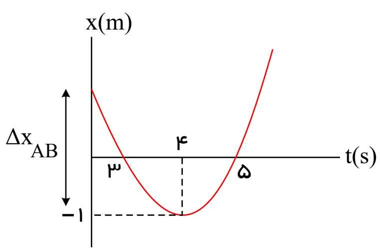
$$a = \frac{v_۹ - v_۴}{۹ - ۴} = \frac{(-۲) - ۸}{۵} = -۲\frac{m}{s^۲}$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_\circ t = -t^۲ + ۸t = +۱۲ \Rightarrow (t - ۶)(t - ۲) = ۰ \Rightarrow t = ۲ \text{ یا } t = ۶ \Rightarrow t = ۲ \text{ ق ق}$$

$$\Rightarrow t_{رسیدن} = ۶s$$

۸۷ (۴) (۳) (۲) (۱) هرگاه در یک حرکت شتابدار با شتاب ثابت a و $v_\circ$ مختلف‌العلامت باشند، حرکت به‌صورت رفت و برگشت است. اگر در چنین شرایطی متحرک در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ از یک مکان عبور نموده باشد، در $t = \frac{t_۱ + t_۲}{۲}$ تغییر جهت داده و $v = ۰$ شده است. چون در $x = -۱(m)$ تغییر جهت داده (در $x < ۰$) و در دو لحظهٔ $t_۱ = ۳s$ و $t_۲ = ۵s$ نیز از مبدأ مکان عبور نموده راهی وجود ندارد جز اینکه:





روش وارونه دیدن!

$$A \not\to B \to (B \to A) : \Delta x = \frac{۱}{۲}a(\Delta t)^۲ = ۸a$$

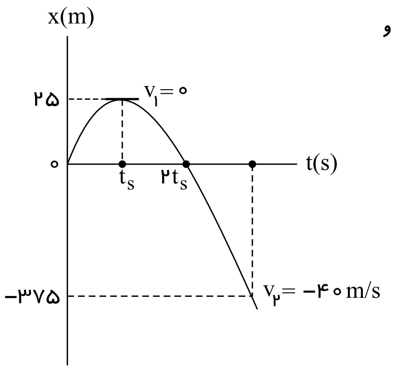
$$\Rightarrow \Delta x_{AB} = ۱۶m$$

$$B \to C \to \Delta x = \frac{۱}{۲}a(۱)^۲ = ۰/۵a = ۱ \to a = ۲$$

$$\Rightarrow x_۰ = ۱۵m \Rightarrow S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{۱۶+۱}{۵} = \frac{۱۷}{۵}\frac{m}{s}$$

۸۸ ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به اینکه جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ توقف ($v_۱ = ۰$) تا مکان $x = -۳۷۵m$ معلوم است. ($\Delta x = -۳۷۵ - ۲۵ = -۴۰۰m$) و نیز معلوم بودن سرعت متحرک در مکان $x = -۳۷۵m$، با استفاده از رابطهٔ سرعت - جابه‌جایی، شتاب حرکت متحرک را می‌یابیم.



$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a\Delta x \to (-۴۰)^۲ - ۰ = ۲(a)(-۴۰۰) \to a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

و در مدتی که $x > ۰$ است، بردار مکان متحرک در جهت محور x است (که در اینجا معادل $۲t_s$ است.) بنابراین برای پیدا کردن t_s، از رأس سهمی تا مبدأ مکان در امتداد محور x برمی‌گردیم، یعنی:

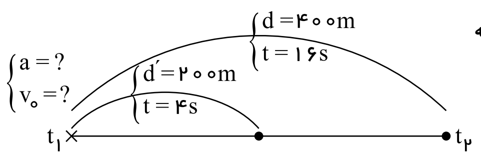
$$\begin{cases} v_۱ = ۰ \\ \Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ \end{cases} \xrightarrow[a=-۲\frac{m}{s^۲}]{\Delta x = -۲۵m} -۲۵ = \frac{۱}{۲}(-۲)(t_s)^۲ \to t_s = ۵s$$

و مدتی که بردار مکان متحرک در جهت مثبت محور x است:

$$\Delta t = ۲t_s = ۱۰s$$

۸۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

در ابتدا مسیر حرکت متحرک را به‌صورت زیر رسم کرده و یک‌بار معادلهٔ جابه‌جایی را در ۴ ثانیهٔ اول و بار دیگر در کل ۱۶ ثانیه می‌نویسیم تا با حل یک دستگاه معادلات، بزرگی شتاب را بیابیم.



$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t$$

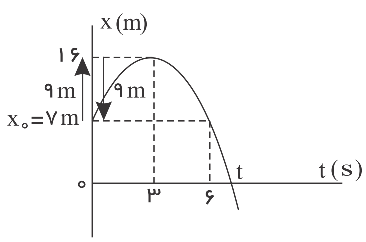
$$\begin{cases} \text{در چهار ثانیهٔ اول} : ۲۰۰ = \frac{۱}{۲}a(۴)^۲ + ۴v_۰ \\ \text{در کل ۱۶ ثانیه} : ۴۰۰ = \frac{۱}{۲}a(۱۶)^۲ + ۱۶v_۰ \end{cases} \to \begin{cases} ۲۰۰ = ۸a + ۴v_۰ \\ ۴۰۰ = ۱۲۸a + ۱۶v_۰ \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{۲۵}{۶}\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = \frac{۱۷۵}{۳}\frac{m}{s} \end{cases}$$

و برای تعیین بزرگی شتاب:

$$|a| = \frac{۲۵}{۶}\frac{m}{s^۲}$$

۹۰ ۱ ۲ **۳** ۴

چون حرکت با شتاب ثابت است، نمودار $x - t$ به صورت قسمتی از یک سهمی است و با توجه به وجود تقارن نسبت به راس سهمی داریم:



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \to ۳ = \frac{\ell}{۶} \to \ell = ۱۸m$$

یعنی در ۳ ثانیه اول ۹ متر در جهت محور رفته و در ۳ ثانیه بعد ۹ متر را برگشته است.

حال در ۳ ثانیه اول، از راس سهمی که $v = ۰$ است، برمی‌گردیم: (در این ۳ ثانیه ۹ متر برمی‌گردیم.)

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t \to -۹ = \frac{۱}{۲} \times a \times (۳)^۲ \to a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

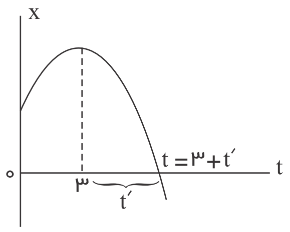
و برای تعیین زمان حرکت از $x = ۱۶$ تا $x = ۰$ (از لحظهٔ مربوط به راس سهمی تا لحظهٔ $x = ۰$) داریم: (در راس سهمی $v = ۰$ است)

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}a't'^۲ \to -۱۶ = \frac{۱}{۲}(-۲)t'^۲ \to t' = ۴s$$

پس در نهایت:

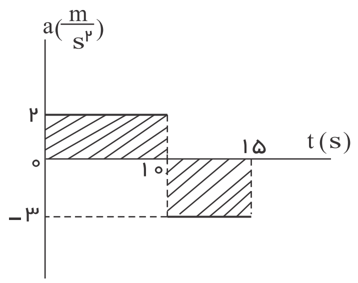
$$t = ۳ + t' = ۳ + ۴ \to t = ۷s$$

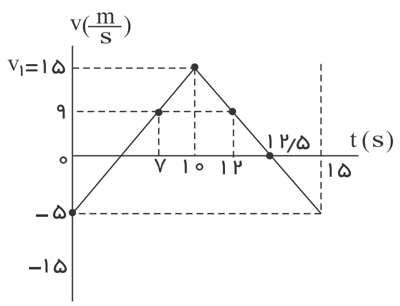
یعنی در مدت ۷ ثانیهٔ اول $x > ۰$ یعنی بردار مکان در جهت محور x است.



(۹۱) ۱ ۲ ۳ ۴

در ابتدا از روی نمودار $a - t$ داده شده نمودار $v - t$ را رسم کرده، سپس با تعیین جابه‌جایی (سطح محصور بین نمودار $v - t$ و محور زمان)، سرعت متوسط را می‌یابیم. قبل از هر چیزی داریم:





$$V = at + v_۰ \xrightarrow{\text{در سه ثانیهٔ اول}} ۱ = ۲ \times ۳ + v_۰ \to v_۰ = -۵\frac{m}{s}$$

$$\Delta V_۱ = ۲۰ = v_۱ - v_۰ = v_۱ - (-۵) \to v_۱ = ۱۵\frac{m}{s}$$

$$\Delta V_۲ = -۳۰ = v_۲ - v_۱ = v_۲ - (۱۵) \to v_۲ = -۱۵\frac{m}{s}$$

$$t_۱ = ۷s \text{ در } : v = at + v_۰ \to v = ۲ \times ۷ - ۵ \to v = ۹\frac{m}{s}$$

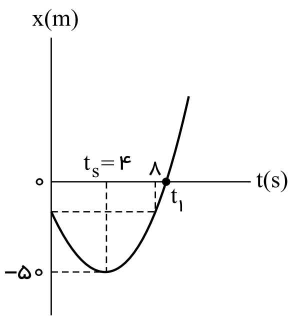
$$t_۲ = ۱۲s \text{ در } : v' = a't' + v'_۰ \to v' = -۳ \times ۲ + ۱۵ \to v' = ۹\frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} \Delta x_۱ = S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱۵+۹}{۲} \times ۳ = ۳۶m \\ \Delta x_۲ = S'_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱۵+۹}{۲} \times ۲ = ۲۴m \end{cases} \to \Delta y_{\text{کل}} = ۳۶ + ۲۴ = ۶۰m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶۰}{۱۲ - ۷} \to v_{av} = ۱۲\frac{m}{s}$$

۹۲ ۴ ۳ ۲ ۱

یکی از روش‌ها برای تعیین سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت، استفاده از رابطهٔ $v_{av}=\frac{v_2+v_1}{2}$ است. (البته روش‌های دیگری نیز برای حل سؤال مثلاً تعریف سرعت متوسط $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ و ... نیز وجود دارد که خودتان می‌توانید آنها را تمرین کنید)
به همین دلیل، بار اول با نوشتن رابطهٔ سرعت - جابه‌جایی بین دو مکان $x_1=-50m$ و $x_2=0$ (لحظهٔ عبور از مبدأ مکان)، شتاب حرکت را می‌یابیم.



$$v_2^2-v_1^2=2a(\Delta x)\xrightarrow[v_1=0,\,v_2=20\frac{m}{s}]{\Delta x=x_2-x_1=0-(-50)=50m}(20)^2-(0)^2=(2)(a)(50)\Rightarrow a=4\frac{m}{s^2}$$

حال با توجه به اینکه در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، سرعت متوسط متحرک صفر شده، جابه‌جایی‌اش در این مدت صفر بوده ، پس در $t_s=4s$ متوقف شده و تغییر جهت داده است. بنابراین با نوشتن معادلهٔ سرعت در ۴ ثانیهٔ اول داریم:

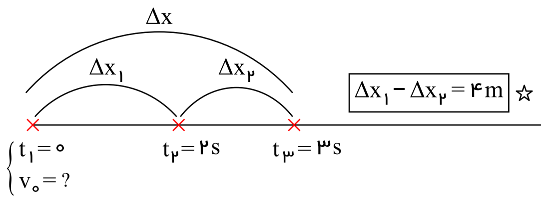
$$v=at+v_0\xrightarrow[t=4s]{v=0}0=(4)(4)+v_0\Rightarrow v_0=-16\frac{m}{s}$$

و در نهایت برای تعیین سرعت متوسط در t_1 ثانیهٔ اول حرکت داریم:

$$v_{av}=\frac{v_0+v}{2}\xrightarrow[v=20\frac{m}{s}]{v_0=-16\frac{m}{s}}v_{av}=\frac{-16+20}{2}\Rightarrow v_{av}=2\frac{m}{s}$$

۹۳ ۴ ۳ ۲ ۱

در ابتدا مسیر حرکت متحرک را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم، سپس معادلهٔ جابه‌جایی متحرک را یک‌بار برای ۲ ثانیهٔ اول و بار دیگر برای ۳ ثانیهٔ اول می‌نویسیم یعنی:

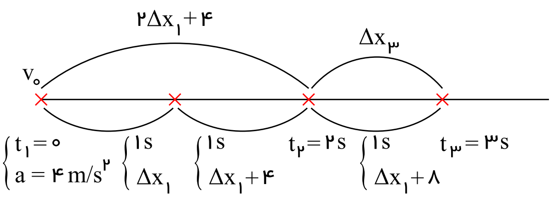


$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow{a=4\frac{m}{s^2}}\begin{cases}\text{دو ثانیهٔ اول}:\ \Delta x_1=\frac{1}{2}(4)(2)^2+2v_0\\ \text{سه ثانیهٔ اول}:\ \Delta x_1+\Delta x_2=\frac{1}{2}(4)(3)^2+3v_0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\Delta x_1=8+2v_0\\ \Delta x_1+\Delta x_2=18+3v_0\xrightarrow{\Delta x_1=8+2v_0}\Delta x_2=10+v_0\end{cases}$$

و در نهایت داریم:

$$\Delta x_1-\Delta x_2=4\xrightarrow[\Delta x_2=10+v_0]{\Delta x_1=8+2v_0}8+2v_0-(10+v_0)=4\Rightarrow v_0=6\frac{m}{s}$$

روش دوم: اگر بازه‌های زمانی را به‌صورت بازه‌های یک ثانیه‌ای در نظر بگیریم، می‌دانیم که جابه‌جایی‌های این متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی یک ثانیه‌ای، تشکیل یک دنبالهٔ عددی را می‌دهند که قدر نسبت آن $a=4$ (شتاب حرکت) است. بنابراین داریم:



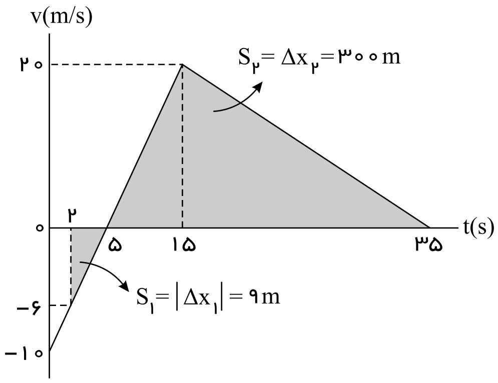
$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرض مسئله}}2\Delta x_1+4-(\Delta x_1+8)=4\Rightarrow\Delta x_1=8m$$

و در ادامه داریم:

$$\Delta x_1=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow 8=\frac{1}{2}(4)(1)^2+v_0\Rightarrow v_0=6\frac{m}{s}$$

۹۴ ۴ ۳ ۲ **۱**

یکی از راه‌های حل این سؤال استفاده از نمودار سرعت - زمان است. برای رسم نمودار، در ابتدا سرعت اولیهٔ متحرک را محاسبه می‌کنیم. در ۱۵ ثانیهٔ اول، شتاب حرکت متحرک $2\frac{m}{s^2}$ است، بنابراین داریم:



$$v = at + v_\circ \xrightarrow[t=2s]{v=-6\frac{m}{s}} -6 = 2\times 2 + v_\circ \to v_\circ = -10\frac{m}{s}$$

حال سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 15s$ (لحظه‌ای که شتاب تغییر می‌کند) را محاسبه می‌کنیم.

$$v = at + v_\circ \xrightarrow{t=15s} v = 2\times 15 - 10 \to v = 20\frac{m}{s}$$

حال نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. در ادامه مساحت محصور بین نمودار و محور زمان را می‌یابیم تا جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ $t = 2s$ تا $t = 35s$ را تعیین کنیم.

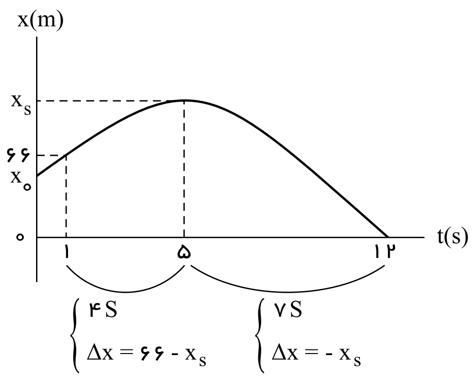
$$S_1 = |\Delta x_1| = 9m \quad , \quad S_2 = \Delta x_2 = 300m$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -9 + 300 = 291m$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \to 291 = x_2 - (-16) \to x_2 = 275m \to \vec{x} = 275\vec{i}$$

۹۵ ۴ **۳** ۲ ۱

اگر مکان متحرک در راس سهمی را x_s بنامیم و معادلهٔ جابه‌جایی متحرک را از راس سهمی که در آن $v = 0$ است بنویسیم، داریم:



$$\begin{cases} v_\circ = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \to \begin{cases} 66 - x_s = \frac{1}{2}(a)(4)^2 \\ -x_s = \frac{1}{2}(a)(7)^2 \end{cases} \to \frac{66 - x_s}{-x_s} = \frac{16}{49} \to x_s = 98m$$

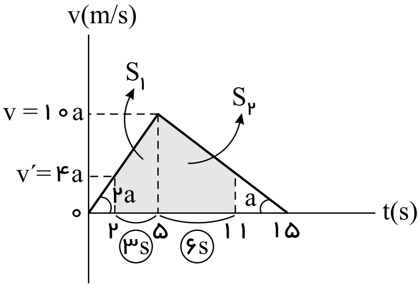
و در ادامه برای تعیین شتاب داریم:

$$-x_s = \frac{1}{2}a(7)^2 \to -98 = \frac{1}{2}a(49) \to a = -4\frac{m}{s^2}$$

و در ۵ ثانیهٔ اول:

$$\begin{cases} v_\circ = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \to x_\circ - x_s = \frac{1}{2}(-4)(5)^2 \xrightarrow{x_s=98} x_\circ = 48m \end{cases}$$

۹۶ ۴ ۳ **۲** ۱



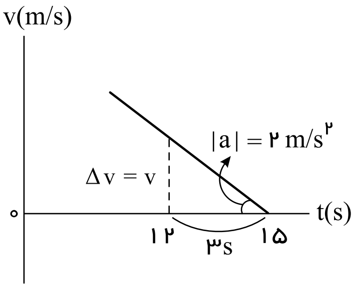
می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان با شتاب متحرک برابر است. با توجه به نمودار که شیب خط در ۵ ثانیهٔ اول، دو برابر قدرمطلق شیب خط در ۱۰ ثانیهٔ بعد است، می‌توانیم فرض کنیم که اگر شتاب حرکت در مرحلهٔ اول و دوم به ترتیب $a_۱$ و $a_۲$ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_۱ = ۲a \\ |a_۲| = a \end{cases}$$

حال با توجه به اینکه سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است، مقدار a را به‌صورت زیر می‌یابیم:

$$S_۱ + S_۲ = ۱۲۶ \xrightarrow[S_۲ = \frac{۱۰a + ۴a}{۲} \times ۶ = ۴۲a]{S_۱ = \frac{۱۰a + ۴a}{۲} \times ۳ = ۲۱a} ۲۱a + ۴۲a = ۱۲۶ \to ۶۳a = ۱۲۶ \to a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

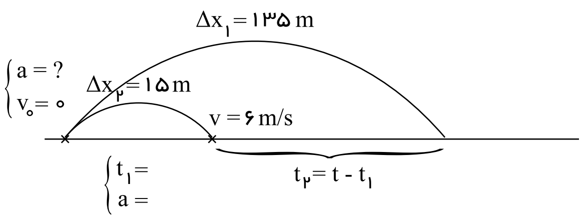
و در نهایت داریم:



$$|a| = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۲ = \frac{v}{۳} \Rightarrow v = ۶\frac{m}{s}$$

۹۷ ۴ **۳** ۲ ۱

اگر مسیر حرکت متحرک را به‌صورت زیر در نظر بگیریم، یک بار با نوشتن معادلهٔ مستقل از شتاب در مرحلهٔ اول، زمان مربوط به این مرحله و نیز با نوشتن معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی (یا معادلهٔ مستقل از زمان) مقدار شتاب را محاسبه می‌کنیم. یعنی:



$$\Delta x_۱ = \frac{v + v_۰}{۲} \times t_۱ \Rightarrow ۱۵ = \frac{۶ + ۰}{۲} \times t_۱ \Rightarrow t_۱ = ۵s$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_۰}{t} = \frac{۶ - ۰}{۵} \Rightarrow a = ۱/۲\frac{m}{s^۲}$$

حال برای پیدا کردن کل زمان حرکت در پیمودن ۱۳۵ متر داریم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t \xrightarrow{v_۰ = ۰} ۱۳۵ = (\frac{۱}{۲})(۱/۲)t^۲ \Rightarrow t = ۱۵s$$

اما برای پیمودن زمان مربوط به مرحلهٔ دوم (در سؤال گفته‌شده چند ثانیهٔ دیگر) داریم:

$$t_۲ = t - t_۱ = ۱۵ - ۵ \Rightarrow t_۲ = ۱۰s$$

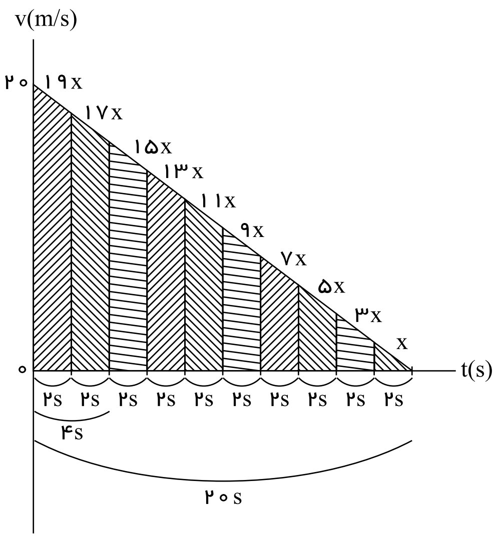
۹۸ ① ❷ ③ ④

قبل از حل سؤال، باید دو نکته را یادآوری کنیم:

۱) اگر متحرکی از حال سکون و شتاب ثابت، در امتداد محور x شروع به حرکت کند، نسبت جابه‌جایی‌هایش در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، همانند نسبت اعداد فرد متوالی است. یعنی نسبت x به $۳x$ به $۵x$ به $۷x$ و ...

۲) سطح محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان، برابر جابه‌جایی متحرک است.

حال با توجه به دو نکتهٔ یادشده، با تقسیم زمان حرکت به بازه‌های ۲ ثانیه‌ای، به حل سؤال می‌پردازیم، به‌گونه‌ای که اگر جابه‌جایی متحرک در دو ثانیهٔ آخر را x بنامیم. (سطح زیر نمودار، در دو ثانیهٔ آخر x باشد) در چهار ثانیهٔ اول $۳۶x$ یعنی مجموع $(۱۷x + ۱۹x)$ است.



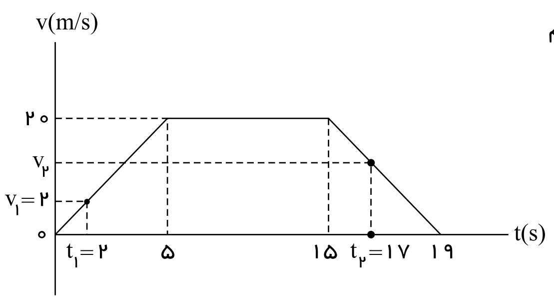
پس داریم:

یعنی کل زمان حرکت ۲۰ ثانیه بوده، حال با توجه به شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان که برابر شتاب متحرک است، داریم:

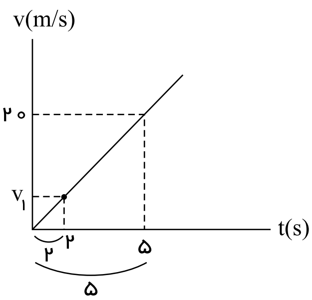
$$a = \text{شیب خط} = -\frac{۲۰}{۲۰} \Rightarrow |a| = ۱\frac{m}{s^۲}$$

۹۹ ① ② ❸ ④

یکی از مناسب‌ترین روش‌ها برای حل این‌گونه سؤالات که حرکت متحرک در چند مرحلهٔ متوالی بررسی می‌شود، رسم نمودار سرعت – زمان آن است. بنابراین داریم: (در پنج ثانیهٔ اول با شتاب ثابت، حرکت تندشونده دارد، سپس به مدت ۱۰ ثانیه یعنی تا لحظهٔ $t = ۱۵s$ حرکت یکنواخت دارد و در نهایت در چهار ثانیهٔ پایانی یعنی از $t = ۱۵s$ تا $t = ۱۹s$ حرکت کندشونده دارد و متوقف می‌شود.)

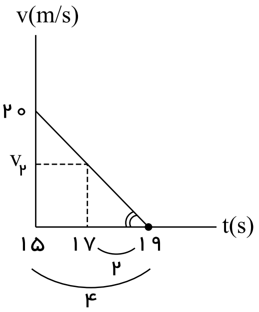


حال در پنج ثانیهٔ اول با استفاده از تشابه دو مثلث مربوط به دو ثانیهٔ اول و ۵ ثانیهٔ اول مقدار $v_۱$ را به دست می‌آوریم:



$$\text{شیب خط} = \frac{v_۱}{۲} = \frac{۲۰}{۵} \Rightarrow v_۱ = ۸\frac{m}{s}$$

و در ۴ ثانیهٔ آخر نیز به همین ترتیب:



$$|\text{شیب خط}| = \frac{v_۲}{۲} = \frac{۲۰}{۴} \Rightarrow v_۲ = ۱۰\frac{m}{s}$$

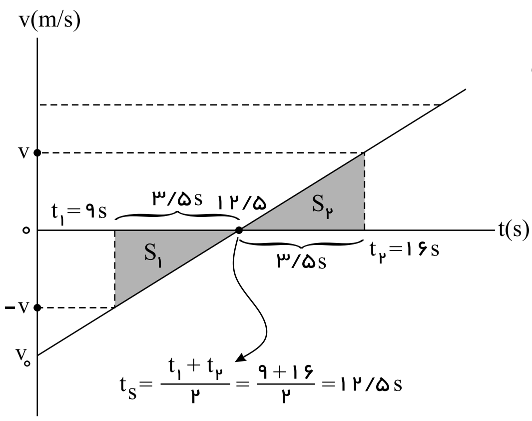
و در نهایت با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۰ - ۸}{۱۷ - ۲} \Rightarrow a_{av} = \frac{۲}{۱۵}\frac{m}{s^۲}$$

۱۰۰ ۱ ۲ ۳ ۴

از آنجایی که در حرکت در امتداد محور x با شتاب ثابت ، جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی داده‌شده صفر است، الزاماً متحرک در وسط این بازهٔ زمانی متوقف شده و تغییر جهت داده است، پس تا قبل از توقف حرکت کندشونده و بعد از آن حرکت تندشونده دارد. بنابراین $v_۰ < ۰$ است و نمودار سرعت - زمان آن به‌صورت زیر خواهد بود.

(تذکر: اگر در حرکت با شتاب ثابت در امتداد خط راست، متحرک متوقف شده و تغییر جهت دهد، الزاماً سرعت اولیهٔ ($v_۰$) و شتاب حرکت (a) دارای علامت‌های قرینه‌اند)



حال با توجه به معلوم بودن شتاب حرکت، تندی متحرک در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ را محاسبه کرده و بعد از آن سطح محصور بین نمودار و محور زمان را به تعیین می‌کنیم تا مسافت طی‌شده در این مدت را به دست آورده و در نهایت تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم.

$$|v| = at \xrightarrow[t=۳/۵s]{a=۴\frac{m}{s^۲}} |v| = ۴ \times ۳/۵ \rightarrow |v| = ۱۴\frac{m}{s}$$

$$S_۱ = S_۲ = \frac{۳/۵ \times ۱۴}{۲} = ۲۴/۵m \xrightarrow{\ell = S_۱ + S_۲} \ell = ۲۴/۵ + ۲۴/۵ = ۴۹m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow s_{av} = \frac{۴۹}{۷} \rightarrow s_{av} = ۷\frac{m}{s}$$

پاسخ‌نامه کلیدی

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۴	۲۶	۲	۵۱	۱	۷۶	۱
۲	۳	۲۷	۲	۵۲	۲	۷۷	۳
۳	۴	۲۸	۲	۵۳	۲	۷۸	۱
۴	۴	۲۹	۳	۵۴	۱	۷۹	۲
۵	۴	۳۰	۳	۵۵	۳	۸۰	۱
۶	۴	۳۱	۴	۵۶	۴	۸۱	۱
۷	۲	۳۲	۱	۵۷	۲	۸۲	۱
۸	۳	۳۳	۲	۵۸	۴	۸۳	۱
۹	۳	۳۴	۱	۵۹	۲	۸۴	۱
۱۰	۲	۳۵	۳	۶۰	۲	۸۵	۲
۱۱	۱	۳۶	۲	۶۱	۱	۸۶	۲
۱۲	۳	۳۷	۳	۶۲	۲	۸۷	۳
۱۳	۲	۳۸	۳	۶۳	۲	۸۸	۳
۱۴	۴	۳۹	۴	۶۴	۲	۸۹	۴
۱۵	۱	۴۰	۱	۶۵	۳	۹۰	۳
۱۶	۱	۴۱	۲	۶۶	۳	۹۱	۳
۱۷	۲	۴۲	۱	۶۷	۴	۹۲	۱
۱۸	۱	۴۳	۴	۶۸	۱	۹۳	۲
۱۹	۳	۴۴	۴	۶۹	۱	۹۴	۱
۲۰	۱	۴۵	۳	۷۰	۳	۹۵	۳
۲۱	۲	۴۶	۳	۷۱	۴	۹۶	۲
۲۲	۳	۴۷	۱	۷۲	۳	۹۷	۳
۲۳	۳	۴۸	۱	۷۳	۲	۹۸	۲
۲۴	۴	۴۹	۲	۷۴	۳	۹۹	۳
۲۵	۴	۵۰	۲	۷۵	۳	۱۰۰	۲