# فصل 4 : معادله ها و نامعادله ها

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله های قدرمطلقی

**۱** در بازهٔ $(a, b)$، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |۲x^۲ - ۴|$ در زیر خط $y = ۲x$ واقع است. بیش‌ترین مقدار $b - a$، کدام است؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۹

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

## نامعادله

**۲** به‌ازای چند عدد طبیعی نامعادلهٔ $\frac{x^۴ - ۲x^۳ + x^۲}{x^۲ - ۵x + ۶} \leq ۰$ برقرار است؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۳** اگر نامساوی $(x^۲ - x - ۶)(۲x^۲ + ax + b) \geq ۰$ همواره برقرار باشد، حاصل $a - b$ کدام است ؟ سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) ۱۰ ۲) $-۱۰$ ۳) $-۱۴$ ۴) نشدنی

**۴** اگر هر دو عبارت $A = (۲x + ۱)(x - ۴)$ و $B = \frac{(b^۲ - x)(۲x + ۱)}{ax + b}$ جدول تعیین علامت کاملاً یکسانی داشته باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) ۲ ۲) $-۲$ ۳) ۴ ۴) $-۴$

## نامعادله های قدرمطلقی

**۵** در بازهٔ $(a,b)$، نمودار تابع $y=(x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار تابع $y=۴x^۴$ است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟ سخت- خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۶** چند جمله‌ای درجه دوم $y=(m-۱)x^۲-۴(m-۱)x+۴m+n$ همواره منفی است. مجموعهٔ مقادیر ممکن برای $n$ کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) $(-\infty,-۴)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(-۴,۱)$ ۴) $(۴,+\infty)$

## درس دوم: سهمی

**۷** به‌ازای چه مقادیری از $a$، سهمی به معادلهٔ $y=(a-۱)x^۲+(۲a-۱)x+a$ فقط از ناحیهٔ اول محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $(-\infty,۱)$ ۴) $\varnothing$

**۸** نقطهٔ $(۳, ۴)$ رأس یک سهمی درجه دوم است که نمودار آن، پاره‌خطی به طول ۸ روی محور $x$ها جدا می‌کند. نمودار این منحنی محور $y$ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

سخت- ۱۳۹۷ -smart

① $\frac{۷}{۴}$ ② $\frac{۷}{۲}$ ③ $\frac{۴}{۳}$ ④ $\frac{۵}{۳}$

## درس سوم: تعیین علامت | نامعادله

**۹** اگر عبارت $ax^۲ - bx + b$ همواره منفی باشد، مجموعهٔ مقادیر ممکن برای $\frac{b}{a}$ کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) $(۰, ۴)$ ۲) $(-۴, ۰)$ ۳) $(۰, ۱)$ ۴) $(-۱, ۰)$

## درس دوم: سهمی

**۱۰** اگر بالاترین نقطهٔ سهمی $y = mx^۲ + ۲\sqrt{۳x + m + ۲}$ در ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات باشد، حدود $m$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) $m < -۳$ ۲) $-۳ < m < ۱$ ۳) $-۳ < m < -۱$ ۴) $-۱ < m < ۰$

## درس سوم: تعیین علامت | نامعادله های قدرمطلقی

**۱۱** مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|۲x + ۱| < x - ۱$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) $(-۲, ۰)$ ۲) $(۱, +\infty)$ ۳) $\varnothing$ ۴) $(-\infty, ۱)$

## درس دوم: سهمی

**۱۲** نمودار سهمی به معادلهٔ $y = a^۲x^۲ + bx - c^۲$ محور $x$ها را در نقاطی به‌طول ۲ و $-۳$ قطع می‌کند. اگر این سهمی از نقطهٔ $(۳, ۳)$ عبور کند، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۸})$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۱۰}$

**۱۳** رأس سهمی به معادلهٔ $y = -x^۲ - ۲a^۲x + b$ روی خط $y = ۲x$ قرار داد. این سهمی از کدام نواحی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) اول و دوم ۲) سوم و چهارم ۳) فقط اول ۴) فقط چهارم

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله

**۱۴** اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۲x - ۳)(x^۲ + mx + m) < ۰$ به‌صورت بازهٔ $(-\infty, \frac{۳}{۲})$ باشد، $m$ چه مقادیری می‌تواند باشد؟ سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) $۰ \leq m \leq ۴$ ۲) $۰ < m < ۴$ ۳) $-۴ < m < ۴$ ۴) $-۴ \leq m \leq ۴$

**۱۵** نابرابری $\frac{(۲m-۱)x^۲-(m-۱)x-۳}{x^۲+x+۱} \geq -۳$ به ازای تمام مقادیر حقیقی $x$ برقرار است. مجموعهٔ مقادیر ممکن $m$ کدام است؟

smart- سخت- ۱۴۰۰

۱) $\{۴\}$ ۲) $\{۰,۲\}$ ۳) $\{-۲,۴\}$ ۴) $\{-۱,۲۶\}$

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۱۶** اگر جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=\frac{bx(x-a)^۲}{ax^۲+bx+c}$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه مجموعهٔ مقادیر ممکن برای $b$ کدام است؟

smart- سخت- ۱۳۹۸

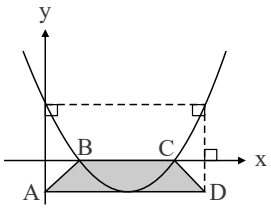
| x | | −۱ | | ۰ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p(x) | + | ت ن | + | ۰ | − | ۰ | − |

۱) $\{\ \}$ ۲) $\{۴\}$ ۳) $\{-۴\}$ ۴) $\{۴,-۴\}$

## درس دوم: سهمی

**۱۷** در شکل زیر، سهمی رسم شده مربوط به نمودار تابع به معادلهٔ $y = ۲x^۲ - ۱۲x + ۱۶$ است. اگر پاره‌خط افقی $AD$ بر رأس سهمی مماس باشد، مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ کدام است؟

smart- سخت- ۱۳۹۷

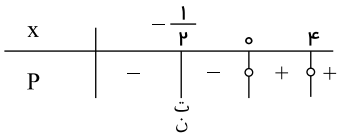



۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۲۴

## درس سوم: تعیین علامت — تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۱۸** جدول تعیین علامت عبارت $p = \frac{-x(x-a)^۲}{ax^۲ + bx + c}$ به‌صورت زیر است. چند مقدار برای $b$ وجود دارد؟

smart- سخت- ۱۴۰۰




۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

## نامعادله های قدرمطلقی

**۱۹** مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|\frac{x+۲}{x-۲}| \leq |\frac{x-۱}{x+۱}|$ به‌صورت $[a,+\infty)-\{b\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

## نامعادله

**۲۰** موشکی از بالای یک سکوی پرتاب به ارتفاع ۱۵ متر، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این موشک از سطح زمین در ثانیهٔ $t$ از رابطهٔ $h(t)=-۳t^۲+۱۸t+۱۵$ محاسبه شود، در چه بازهٔ زمانی ارتفاع موشک از سطح زمین در مسیر برگشت به سطح زمین، بیشتر از ۳۰ متر خواهد بود؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) $(۱,۷)$ ۲) $(۱,۵)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۲,۷)$

**۲۱** اگر مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $ax^۲-۶x+b<۰$ بازهٔ $(۱,b)$ باشد، حاصل $a^۲b+b^۲a$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۹ -smart

۱) ۳۰ ۲) $-۳۰$ ۳) ۳۶ ۴) $-۳۶$

**۲۲** اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x-۱}{x+۱} < \frac{x+a}{x}$ به‌صورت بازهٔ $(b, -\frac{۱}{۳}] \cup (۰, +\infty)$ باشد، $a-b$ کدام است؟ smart- سخت- ۱۳۹۸

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۲

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۲۳** مجموعه جواب نامعادلهٔ $ax^۲ + bx + c < ۰$ به صورت $(-۲, ۳)$ است. اگر $a$ عددی صحیح باشد، $b+c$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟ smart- سخت- ۱۳۹۷

۱) ۱۴ ۲) $-۱۴$ ۳) ۱۰ ۴) $-۱۰$

## درس دوم: سهمی

**۲۴** به‌ازای کدام مجموعه مقادیر $m$، نمودار سهمی $y = mx^۲ - x^۲ + m + ۲\sqrt{۲x}$ از نواحی اول و دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) $m < ۱$
۲) $m \geq ۲$
۳) $m \leq -۱$
۴) $m \leq -۱$ یا $m \geq ۲$

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله های قدرمطلقی

**۲۵** اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|ax + ۵| < ۳$ به صورت بازهٔ $(b, ۴)$ باشد، $a + b$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) ۱
۲) $-۱$
۳) ۳
۴) ۱۵٫۵

**۲۶** مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $||x + ۳| - ۲| < ۱$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) $(-۴, -۲) \cup (-۲, ۰)$
۲) $(-۶, -۴) \cup (-۲, ۰)$
۳) $(۰, ۲) \cup (۴, ۶)$
۴) $(-۶, -۳) \cup (-۳, -۲)$

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۲۷** اگر $f(x)=-x^۲+bx+c$ و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ برابر با $x=-۱$ و $x=۳$ باشند، عبارت $A=\frac{f(x)}{(x^۲-x+۱)(-x^۲+۴x-۳)}$ به‌ازای چند مقدار صحیح $x$، منفی است؟ سخت- ۱۳۹۶ -smart

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

## نامعادله

**۲۸** مجموعه جواب نامعادلات $\begin{cases} ۲x-۱<۱۳ \\ -۳<۵x-۱ \end{cases}$ را به‌صورت $|x-\alpha|<\beta$ نوشته‌ایم، حاصل $\alpha+\beta$ کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۷

**۲۹** به ازای چند مقدار صحیح و نامنفی برای $x$ ممکن است هر دو نامساوی $۳x+y<۸$ و $۲x+۳<۳y-۵$ برقرار باشند؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴

**۳۰** یک جسم از بالای یک ساختمان که ۲۰ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ $t$ از رابطهٔ $h = -۵t^۲ + ۲۰t + ۲۰$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین در مسیر برگشت به سطح زمین بیشتر از ۳۵ متر خواهد بود؟

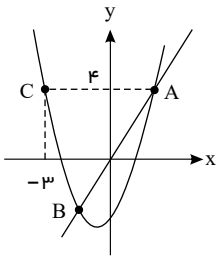
smart- سخت- ۱۳۹۹

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(۲,۳)$ ۳) $(۰,۳)$ ۴) $(۱,۲)$

## درس دوم: سهمی

**۳۱** در نمودار زیر خط $d$ نمودار سهمی را در نقاط $A = (x_A, ۴)$ و $B = (-۱, -۲)$ قطع کرده است. مجموع طول و عرض نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات کدام است؟

smart- سخت- ۱۳۹۹




۱) $-۱$ ۲) $-۳,۵$
۳) $-۲,۵$ ۴) $-۳$

## درس سوم: تعیین علامت

تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۳۲** اگر عبارت $y = ۴x^۲ + (m+۲)x + ۱$ همواره مثبت باشد، عبارت $y = x^۲ + ۳x + m$ چگونه است؟

smart- سخت- ۱۳۹۹

۱) همواره مثبت ۲) همواره منفی ۳) مثبت یا صفر ۴) مثبت یا صفر یا منفی

## نامعادله

**۳۳** سه مخزن کروی تو در تو را که هم‌مرکز هستند، در نظر بگیرید. حجم بزرگترین مخزن برابر با $۳۶\pi$ و حجم کوچکترین مخزن برابر با $\frac{۳۲}{۳}\pi$ است، شعاع مخزن میانی، کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۳۴** در چند جمله‌ای $p(x)=ax^۲+bx+c$ اگر $\frac{\Delta}{۴a}$ منفی باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

سخت- ۱۳۹۶ -smart

۱) معادلهٔ $p(x)=۰$ همواره ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۲) چندجمله‌ای $P(x)$ همواره مثبت است.

۳) چند جمله‌ای $P(x)$ همواره منفی است.

۴) علامت $P(x)$ به علامت $a$ وابسته است.

**۳۵** جدول تعیین علامت کدام عبارت زیر به‌صورت مقابل است؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart

| x | $-\infty$ | | $-۱$ | | $۲$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p | | $-$ | ۰ | $+$ | ۰ | $+$ | |

۱) $p=x^۳-۳x^۲+۴$

۲) $p=x^۲+x-۶$

۳) $p=x^۳-۳x-۲$

۴) $p=x^۲-x+۲$

## نامعادله

**۳۶** اگر $(-\infty, \frac{۳m-۱}{۲}] \cup (\frac{m+۱}{۳}, +\infty) = \mathbb{R}$ باشد، حدود $m$ کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) $(-\infty, \frac{۵}{۷}]$ ۲) $[\frac{۵}{۷}, +\infty)$ ۳) $(-\infty, \frac{۱}{۷}]$ ۴) $[\frac{۱}{۷}, +\infty)$

**۳۷** مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۳x+۱۲}{x^۲+mx-n} \leq ۰$ به صورت $(-\infty\ ,\ -۷) \cup [-۴\ ,\ ۵)$ است. حاصل $m+n$ کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۳۳ ۲) ۲۸ ۳) ۳۷ ۴) ۲۶

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۳۸** جدول تعیین علامت عبارت $A = (x+۳)((۵-a)x-۲)$ به صورت مقابل است. حاصل $\frac{۱}{a+۱}$ کدام می‌تواند باشد؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

| x | | $-۳$ | | $a-۲$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | + | ۰ | − | ۰ | + |

۱) ۰/۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۳

## نامعادله های قدرمطلقی

**۳۹** اگر مجموعه جواب نامعادله $|x-۳a| \geq ۲b-۳$ به‌صورت $(-\infty, b] \cup [۴, +\infty)$ باشد، حاصل $۲a+b$ کدام است؟ smart- سخت- ۱۴۰۰

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

## نامعادله

**۴۰** اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-۱}{x+۳} - \frac{x-۲}{x+۲} < -۱$ برابر $(۲n-۱, m-۴)$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x+n| \leq m$ کدام است؟ smart- سخت- ۱۴۰۰

۱) $(-۱, ۳)$ ۲) $[-۱, ۳]$ ۳) $[-۳, ۱]$ ۴) $(-۳, ۱)$

## درس دوم: سهمی

**۴۱** اگر پایین‌ترین نقطهٔ سهمی $y = x^۲ - m(x-۱) + ۴$ روی نیمساز ربع دوم (در ناحیهٔ دوم) قرار داشته باشد، مجموع مقادیر قابل قبول برای $m$ کدام است؟ smart- سخت- ۱۳۹۹

۱) $-۲$ ۲) ۸ ۳) $-۴$ ۴) ۶

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله

**۴۲** اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^{۴}+x^{۲}\leq ۴x^{۴}+۴$ به‌صورت $[a,b]\cup[c,d]$ باشد، آن‌گاه $a+b+c+d$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) $-۲$ ۲) $-۱$ ۳) صفر ۴) ۱

**۴۳** اگر اشتراک مجموعهٔ جواب دو نامعادلهٔ $۳x-۱<۸$ و $۳x-۱>-۲$ را به‌صورت $|x-\alpha|<\beta$ بنویسیم، $\alpha+\beta$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) $-۳$ ۲) $-۲$ ۳) ۲ ۴) ۳

## نامعادله های قدرمطلقی

**۴۴** اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x+۲|+b<a$ به صورت $(n,m)$ باشد، $m+n$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) $۲a-۲b$ ۲) $a-b$ ۳) ۴ ۴) $-۴$

**۴۵** مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{\sqrt{x-|x|+۲}}>۰$ کدام است؟ (کامل‌ترین گزینه را انتخاب نمایید.) سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $(-۱,۰]$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $(-۱,+\infty)$

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۴۶** اگر نتیجهٔ جدول تعیین علامت عبارت $P(x)=\frac{-۲(x^۲-a^۲)(x+b)}{(۳x-c)^۲}$ به‌صورت زیر باشد، $a^۲b-c$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۹ -smart

| x | $-\infty$ | $-۳$ | $-۲$ | $۳$ | $۵$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | + | ۰ | − | ۰ | + | ۰ | − | ت ن | − |

۱) ۳ ۲) $-۳۳$ ۳) $-۳$ ۴) ۳۳

## نامعادله

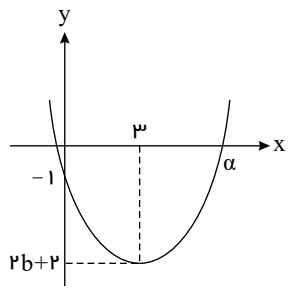
**۴۷** نمودار $y=\sqrt{x^۲-۲x+۱}$ در بازهٔ $(-\infty,a)$ بالاتر از نمودار $y=|x|$ قرار دارد، بیشترین مقدار $a$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۹ -smart

۱) $-۱$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

## درس دوم: سهمی

**۴۸** اگر نمودار سهمی $y = x^۲ + bx + c$ به‌صورت زیر باشد، مقدار $\alpha$ کدام است؟

smart- ۱۳۹۹ -سخت




۱) $۶ + \sqrt{۱۰}$

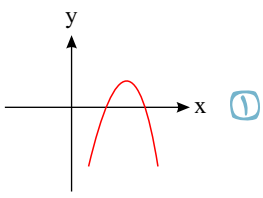
۲) $۳ + \sqrt{۱۰}$

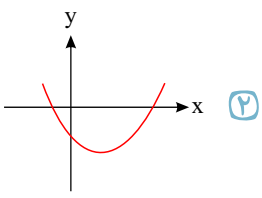
۳) $۳ + ۲\sqrt{۱۰}$

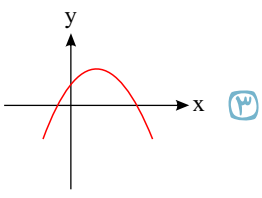
۴) $۶ + ۲\sqrt{۱۰}$

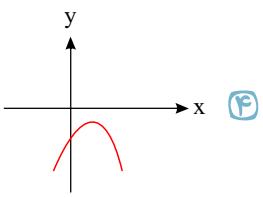
**۴۹** نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ بافرض $a < -۱$ ، $b > ۳$ و $c > ۲$ کدام‌یک می‌تواند باشد؟

smart- ۱۳۹۹ -سخت

۱)



۲)



۳)



۴)


## درس سوم: تعیین علامت نامعادله

**۵۰** اگر جدول تعیین علامت عبارت $P=(۲x-۱)(ax^۲+۳x+b)$ به‌صورت

| x | | $-۲$ | | $c$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $-$ | ۰ | $+$ | ۰ | $+$ |

باشد، حاصل $abc$ کدام است؟

smart- سخت- ۱۳۹۹

۱) $-۲$ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) $-۸$

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

**۵۱** به‌ازای کدام مقدار $m$، مجموع مجذورات دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $۲x^۲-mx+m-۱=۰$ برابر ۴ است؟

smart- سخت- ۱۳۹۸

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) $-۲$ ۴) $-۶$

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله

**۵۲** به ازای کدام مقدار $x$، نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲-۴}-۳$ بالای محور $x$ هاست؟

smart- سخت- ۱۳۹۷

۱) $(۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-\sqrt{۶})$ ۳) $(-\sqrt{۶},-۲)\cup(۲,\sqrt{۶})$ ۴) $(-\infty,۲)$

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن | حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

**۵۳** یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، محیط این قاب عکس چقدر است؟

سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) ۷۰ ۲) ۳۵ ۳) ۱۴۰ ۴) ۹۰

**۵۴** اگر $x = k$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $mx^2 - (2m+3)x + m + 2 = 0$ باشد، حاصل $12mk$ کدام است؟

سخت- منتآزمون- ۱۴۰۱

۱) $-3$ ۲) $-9$ ۳) ۶ ۴) ۱۲

## درس سوم: تعیین علامت | نامعادله های قدرمطلقی

**۵۵** نامعادلهٔ $\frac{-x^۲+۴x-۸}{-۲x^۲+(m+۲)x-۸} > ۰$ به ازای هر عدد حقیقی برقرار است. $m$ چند عدد صحیح را می‌تواند اختیار کند؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۱۶ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

### نامعادله

**۵۶** مجموع اعداد طبیعی که در نامعادلهٔ $\frac{x^۴-۱۲x^۳+۳۶x^۲}{x^۲-۶x+۵} \leq ۰$ صدق می‌کنند، کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

### تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۵۷** نامعادلهٔ $(x^۲-۵x+۶)(۲x^۲+ax+b) \geq ۰$ به ازای هر عدد حقیقی $x$ برقرار است، حاصل $a+b$ کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۲ ۲) $-۴$

۳) $-۱۰$ ۴) غیرممکن است نامعادله داده شده به ازای هر $x$ برقرار باشد.

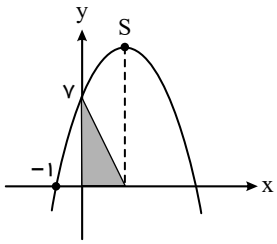
## نامعادله

**۵۸** اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۴x - x^۲ \geq ۱ - b + ۵x + (a - ۳)x^۲$ به‌صورت $[۳, +\infty)$ باشد، $۵a + b$ کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) $-۷$ ۴) $-۶$

## درس دوم: سهمی

**۵۹** اگر نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت زیر و مساحت مثلث هاشورخورده برابر با ۱۰٫۵ باشد، حاصل $\frac{c - a}{b}$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۹ -smart




۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۱

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله

**۶۰** اگر رأس سهمی‌های $y = ۲x^۲ - mx + ۲$ و $y = ۳x^۲ - mx + ۳$ در یک ناحیه از محورهای مختصات باشند، $m$ چند مقدار صحیح را نمی‌تواند اختیار کند؟ (محورهای مختصات را جزو نواحی مختصات در نظر نگیرید.) سخت- ۱۳۹۹ -smart

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

**۶۱** اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x^۲ + ۴x - ۲۱}{۳x + ۱} \leq ۰$ به‌صورت $(-\infty, a] \cup (b, c]$ باشد، حاصل $a + b - c$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۸ -smart

۱) $-\frac{۱۳}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) $-\frac{۳۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳}$

## درس دوم: سهمی

**۶۲** نمودار یک سهمی محور طول‌ها را در نقاطی به طول‌های $-۱$ و ۳ قطع می‌کند و بیش‌ترین مقدار عرض نقاط روی سهمی برابر ۴ است. در این‌صورت عرض نقطه‌ای به‌طول ۵ روی این سهمی کدام است؟

سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) صفر ۲) $-۲۴$ ۳) ۲ ۴) $-۱۲$

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن | حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

**۶۳** اگر ۲ $= x$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $۳x^۲ + m^۲x + ۲n = ۱۳x - ۸$ باشد، مقدار $۲m + ۳n$ کدام می‌تواند باشد؟

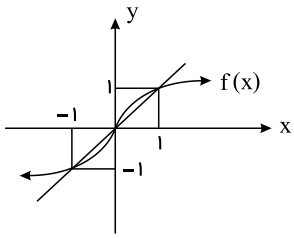
سخت- منتآزمون- ۱۴۰۲

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $-۴$ ۴) $-۳$

## درس سوم: تعیین علامت | تعیین علامت چند جمله ای درجه اول

**۶۴** با توجه به نمودار $y = f(x)$ جواب نامعادلهٔ $\frac{x - f^{-۱}(x)}{f^۲(x) - f(x)} \geq ۰$ کدام است؟

سخت- ۱۴۰۰ -smart




۱) $(-\infty, -۱] \cup \{۰, ۱\}$
۲) $(-\infty, -۱)$
۳) $(-\infty, -۱]$
۴) $[-۱, +\infty) - \{۰, ۱\}$

## نامعادله های قدرمطلقی

**۶۵** مجموعهٔ همهٔ مقدارهای $x$ که به‌ازای آن عبارت $\frac{(x^۲-۶x+۹)\sqrt{x+۵}}{x^۲-x-۶}$ منفی می‌باشد برابر با مجموعه جواب کدام نامعادلهٔ زیر است؟

سخت- ۱۳۹۹ -smart

۱) $|x|<\frac{۳}{۲}$
۲) $|x|>\frac{۳}{۲}$
۳) $|x-\frac{۱}{۲}|>\frac{۵}{۲}$
۴) $|x-\frac{۱}{۲}|<\frac{۵}{۲}$

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۶۶** با توجه به جدول زیر که مربوط به تعیین علامت عبارت $P=\frac{ax+c}{۲x^۲-ax-۴}$ است، حاصل $c+k$ کدام است؟

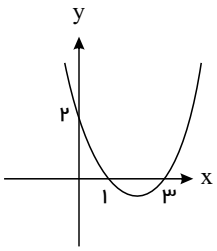
سخت- ۱۳۹۹ -smart

| x | | k | | a | |
|---|---|---|---|---|---|
| P | − | ت‌ن | + | ت‌ن | + |

۱) ۵
۲) $-۳$
۳) $-۵$
۴) ۳

## درس دوم: سهمی

**۶۷** شکل مقابل نمودار تابع $y = ax^۲ + bx + c$ است. عرض پایین‌ترین نقطه‌ی این سهمی چقدر است؟




سخت- ۱۳۹۷ -smart

۱) $-\frac{۱}{۳}$

۲) $-\frac{۲}{۳}$

۳) $-\frac{۳}{۲}$

۴) $-\frac{۱۲۸}{۲۷}$

## درس سوم: تعیین علامت — تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۶۸** جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم $P = ۲x^۲ + bx + ۵$ به‌صورت زیر است. جدول تعیین علامت عبارت $A = -۲kx^۲ - ۴b - ۸$ کدام است؟

سخت- منتآزمون- ۱۴۰۲

| x | | ۱ | | k | |
|---|---|---|---|---|---|
| P | + | ۰ | − | ۰ | + |

۱)

| x | | −۲ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | + | ۰ | − | ۰ | + |

۲)

| x | | −۴ | | ۴ | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | + | ۰ | − | ۰ | + |

۳)

| x | | −۲ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | − | ۰ | + | ۰ | − |

۴)

| x | | −۴ | | ۴ | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | − | ۰ | + | ۰ | − |

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن | حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

**۶۹** اگر $m \in (\alpha, \beta)$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-۱)x^۲ + (m+۲)x + ۲m = ۰$، دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. حداکثر مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

سخت- منتآزمون- ۱۴۰۲

۱) $\frac{۱۶}{۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{۷}$ ۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۷}$

**۷۰** در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائمه $۲x$ و $x$ است. اگر مجموع اندازه‌های محیط و مساحت آن $۲\sqrt{۵} + ۱۰$ باشد، آنگاه $x$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

## درس سوم: تعیین علامت | تعیین علامت چند جمله ای درجه اول

**۷۱** مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر $x$ که به ازای آنها عبارت $(x^۲ + x + ۱)(x^۲ - ۴x + ۳)$ مثبت شود، کدام است؟

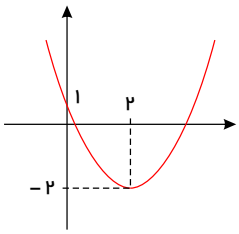
سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) $۱ < x < ۳$ ۲) $-۳ < x < -۱$ ۳) $x < ۱$ یا $x > ۳$ ۴) $x < -۳$ یا $x > -۱$

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۷۲** کدام گزینه نمایش صحیحی‌از تعیین علامت صحیح سهمی مقابل است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۶




۱)

| x | | $-۲-۲\sqrt{۲}$ | | $-۲+۲\sqrt{۲}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| y | + | ۰ | − | ۰ | + |

۲)

| x | | $-۲$ | | $+۲$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| y | + | ۰ | − | ۰ | + |

۳)

| $x$ | |
|---|---|
| $y$ | + |

۴)

| x | | $\frac{۲(۳-\sqrt{۶})}{۳}$ | | $\frac{۲(۳+\sqrt{۶})}{۳}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| y | + | ۰ | − | ۰ | + |

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن | حل معادله درجه دوم به کمک ریشه گیری

**۷۳** در حل معادلهٔ $x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$ به روش مربع کامل از کدام گزینه جذر گرفته می‌شود؟

سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) ۹
۲) $\frac{۱۷}{۴}$
۳) $\frac{۹}{۴}$
۴) ۱۱

## درس سوم: تعیین علامت | نامعادله

**۷۴** مجموعه جواب نامعادله‌ی $-۴x(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{x^۲}) \geq -۲x-\frac{۱}{x}-۱$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) $[۳,+\infty)$ ۲) $(\frac{۳}{۲},۳)$ ۳) $(-۳,۳)-\{\frac{۳}{۲}\}$ ۴) $(۰,۳)$

### نامعادله های قدرمطلقی

**۷۵** مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^۲-۲x|<x$ کدام بازه است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۰,۳)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۱,۳)$

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن | حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

**۷۶** تعداد جواب‌های معادله‌ی $\frac{۲x^۲-۱۰x}{x^۲-۵x}=x-۳$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

## درس سوم: تعیین علامت | نامعادله های قدرمطلقی

**۷۷** مجموعه جواب نامعادله‌ی $|\frac{x-۲}{۲x+۱}|>۱$ کدام بازه است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) $(-۳,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ ۲) $(-۲,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(-۳,-\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن | حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

**۷۸** در معادله‌ی $۳x^۲ - ۱۵x + m = ۰$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بزرگتر باشد، آنگاه $m$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) $\frac{۵۹}{۵}$ ۲) $\frac{۶۳}{۵}$ ۳) $\frac{۵۹}{۴}$ ۴) $\frac{۶۳}{۴}$

**۷۹** اگر $ab \neq ۰$ و $|a| \neq |b|$ باشد، آنگاه تعداد مقادیر متمایز $x$ که در معادلهٔ $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$ صدق می‌کند، کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

**۸۰** عددی دو برابر عددی دیگر و مربع آن برابر مکعب عدد دیگر است. میانگین این دو عدد کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

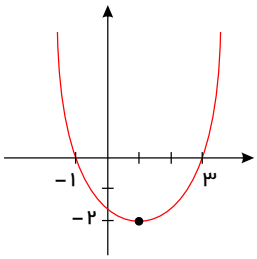
۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

**۸۱** به ازای کدام مقدار $m$ ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲$ معکوس هم‌اند؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) $-۲$ ۲) $-۱$ ۳) $۱$ ۴) $۲$

## درس دوم: سهمی

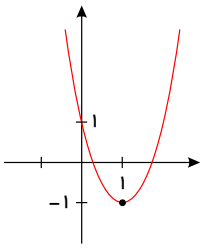
**۸۲** معادله سهمی شکل زیر کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶




۱) $y = x^۲ - x - ۳$ ۲) $y = ۲x^۲ + x - ۱$

۳) $y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + x + \frac{۳}{۲}$ ۴) $y = \frac{۱}{۲}x^۲ - x - \frac{۳}{۲}$

**۸۳** معادله سهمی شکل زیر کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶




۱) $y = ۲x^۲ + ۴x + ۱$

۲) $y = ۲x^۲ - ۲x + ۱$

۳) $y = ۲x^۲ - ۴x + ۱$

۴) $y = -۲x^۲ - ۴x + ۱$

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله

**۸۴** اگر نامعادلهٔ $\frac{ax^۲ - \frac{۱}{۲}ax - ۳}{-x^۲ - x - ۱} \leq ۳$ به ازای تمام مقادیر $x$ برقرار باشد $a$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۶

۱) هر مقدار
۲) $-۶$
۳) ۶
۴) هیچ مقدار

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن — حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

**۸۵** در کدام گزینه قدر مطلق تفاضل دو ریشه بزرگ‌تر است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۷

۱) $۶x^۲ = ۱۸$
۲) $۲x^۲ - ۳۰ = ۰$
۳) $(۲x - ۳)^۲ - ۲۴ = ۱۲$
۴) $x^۲ - ۲x + ۳ = ۴$

## درس سوم: تعیین علامت | تعیین علامت چند جمله ای درجه اول

**۸۶** اگر بازهٔ $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۵})$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که عبارت $D = (ax+b)(cx+d)$ در آن بازه مثبت است، حاصل $\frac{ad}{bc}$ کدام می‌تواند باشد؟ $(ac < ۰)$

سخت- منتا- ۱۳۹۷

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $-\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ۴) $-\frac{۶}{۵}$

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن | حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

**۸۷** معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲ - ۸x - ۱ = ۰$، پس از مربع کامل کردن به صورت $a(x-x_۰)^۲ + y_۰ = ۰$ درآمده است. حاصل $x_۰ + y_۰$ چقدر است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۷

۱) ۷ ۲) $-۱۱$ ۳) ۱۱ ۴) $-۷$

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله

**۸۸** به ازای چند مقدار صحیح و نامنفی برای $x$ ممکن است هر دو نامساوی $2x+y<7$ و $-3y<2x+1$ ۴ برقرار شوند؟ سخت- منتا- ۱۳۹۷

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

## درس دوم: سهمی

**۸۹** اگر سهمی $y=ax^2-bx+c$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{4}{b}$ و محور طول‌ها را فقط در نقطه‌ای به طول $-2$ قطع کند، $a$ کدام است؟ (سهمی پایین محور $x$ها قرار دارد). سخت- منتا- ۱۳۹۷

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-2$ ۴) $-\frac{1}{4}$

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله

**۹۰** مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x(x-3)^2+4}{x^2-6x+11}<2$ کدام است؟ (کامل‌ترین گزینه را انتخاب نمایید.) سخت- منتا- ۱۳۹۷

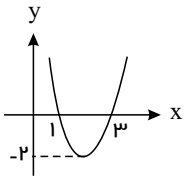
۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$ ۳) $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ ۴) $(-\infty,1)$

**۹۱** اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۲x+۶}{x^۲+ax+b} \leq ۰$ به‌صورت $(-\infty, -۵) \cup [-۳, ۲)$ باشد، حاصل $ab$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۷

۱) $-۲۰$ ۲) $۲۰$ ۳) $-۳۰$ ۴) $۳۰$

## درس دوم: سهمی

**۹۲** اگر نمودار زیر، مربوط به سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ باشد، آن‌گاه مقدار $a$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۷




۱) $-۱$ ۲) $۲$
۳) $۳$ ۴) $۴$

## درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن | حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

**۹۳** اگر $x + y = ۶$ و $xy = ۴$، حاصل عبارت $x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ کدام است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) $\sqrt{۵۰}$ ۲) $\sqrt{۴۰}$ ۳) $\sqrt{۴۵}$ ۴) $\sqrt{۳۵}$

## درس سوم: تعیین علامت | نامعادله

**۹۴** مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۵x - ۱ \leq ۲x^۲ - x - ۳ \leq x - ۳$، شامل چند عدد صحیح است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

## تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

**۹۵** جدول تعیین علامت کدام‌یک از چندجمله‌ای‌های زیر به‌صورت زیر می‌باشد؟ سخت- منتا- ۱۳۹۸

| x | | $-۲$ | | $۱$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ |

۱) $y = x^۲ + x - ۲$
۲) $y = x^۲ - x + ۲$
۳) $y = x^۳ + ۳x^۲ - ۴$
۴) $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۴$

## درس دوم: سهمی

**۹۶** اگر سهمی $y = ax^۲ - bx + c$ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۴}{b}$ قطع کند و با محور طول‌ها فقط در نقطه‌ای به طول $-۲$ مشترک باشد، $a$ کدام است؟ (سهمی پایین محور $x$ ها قرار دارد.) سخت- منتا- ۱۳۹۹

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $-۲$
۴) $-\frac{۱}{۴}$

## درس سوم: تعیین علامت نامعادله

**۹۷** چند عدد صحیح در نامعادلهٔ $\frac{۳x-۱}{۲x+۱} < ۱ < ۲$ صدق نمی‌کند؟

سخت- منتا- ۱۳۹۹

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

## درس دوم: سهمی

**۹۸** اگر رأس سهمی $y = ax^۲ + ۲ax - ۳$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرار داشته باشد و سهمی محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض $b$ قطع کند، حاصل $a \cdot b$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۹

۱) $-۳$ ۲) $-۲$ ۳) $-۶$ ۴) ۶

**۹۹** سهمی $y = ۲x^۲ + ax + b$ نسبت به خط $x = -\frac{۵}{۴}$ متقارن است و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ قطع می‌کند. $\frac{a}{b}$ کدام است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۹

۱) $-\frac{۵}{۱۱}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۵}$

**۱۰۰** اگر رأس یک سهمی روی نیم‌ساز ناحیه اول باشد و محور $x$ها را در نقاطی به طول‌های $۱-$ و ۳ قطع کند، آن‌گاه این سهمی محور $y$ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

سخت- منتا- ۱۳۹۹

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{-۳}{۴}$ ۳) ۳ ۴) $-۳$

# پاسخ‌نامه تشریحی

**۱** ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: باید نامعادلهٔ $|۲x^۲ - ۴| < ۲x$ را حل کنیم می‌دانیم که ریشه‌های داخل قدرمطلق $\pm\sqrt{۲}$ هستند.

$$x < -\sqrt{۲} : ۲x^۲ - ۴ < ۲x \to ۲x^۲ - ۲x - ۴ < ۰ \to x^۲ - x - ۲ < ۰ \to (x-۲)(x+۱) < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing$$

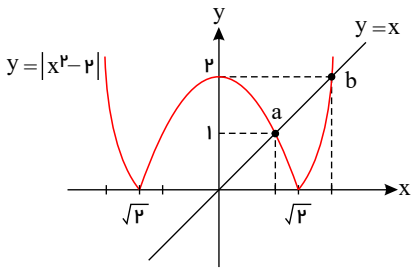
$$-\sqrt{۲} \le x \le \sqrt{۲} : -۲x^۲ + ۴ < ۲x \to ۲x^۲ + ۲x - ۴ > ۰ \to x^۲ + x - ۲ > ۰ \to (x+۲)(x-۱) > ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -۲ \text{ یا } x > ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۱ < x < \sqrt{۲}$$

$$x > \sqrt{۲} : ۲x^۲ - ۴ < ۲x \to ۲x^۲ - ۲x - ۴ < ۰ \to x^۲ - x - ۲ < ۰ \to (x-۲)(x+۱) < ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \sqrt{۲} < x < ۲$$

از اجتماع جواب‌های بدست‌آمده به جواب $x \in (۱, ۲)$ می‌رسیم بنابراین $b - a = ۱$ است.

روش دوم: تابع $y = |۲x^۲ - ۴|$ و $y = ۲x$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم در چه بازه‌ای تابع $y = |۲x^۲ - ۴|$ زیر تابع $y = ۲x$ قرار دارد.

$$|۲x^۲ - ۴| < ۲x \to |۲(x^۲ - ۲)| < ۲x \to |x^۲ - ۲| < x$$




برای این منظور باید نقاط $a, b$ را پیدا کنیم.

$$|x^۲ - ۲| = x \to \begin{cases} x^۲ - ۲ = x \to x^۲ - x - ۲ = ۰ \to (x-۲)(x+۱) = ۰ \to \begin{cases} x = ۲ & b \\ x = -۱ & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ x^۲ - ۲ = -x \to x^۲ + x - ۲ = ۰ \to (x+۲)(x-۱) = ۰ \to \begin{cases} x = -۲ & \text{غ ق ق} \\ x = ۱ & a \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین جواب مسأله بازهٔ $(۱, ۲)$ است و $b - a = ۱$ است.

**۲** ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{x^۴ - ۲x^۳ + x^۲}{x^۲ - ۵x + ۶} \le ۰ \Rightarrow \frac{x^۲(x^۲ - ۲x + ۱)}{(x-۳)(x-۲)} \le ۰ \Rightarrow \frac{x^۲(x-۱)^۲}{(x-۳)(x-۲)} \le ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ (x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ (x-۳) = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ (x-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \end{cases} \Rightarrow$$

| | ۰ | | ۱ | | ۲ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲$ | + | ○ | + | | + | | + | |
| $(x-۱)^۲$ | + | | + | ○ | + | | + | |
| $(x-۳)$ | − | | − | | − | | − | ○ + |
| $(x-۲)$ | − | | − | | − | ○ | + | |
| $\frac{x^۲(x-۱)^۲}{(x-۳)(x-۲)}$ | + | ○ | + | ○ | + | ن − ت | ن − ت | + |

$x \in \{۰, ۱\} \cup (۲, ۳)$ : ۱ عدد طبیعی

**۳** ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $ab > ۰ \Rightarrow \begin{cases} a, b > ۰ \\ \text{یا} \\ a, b < ۰ \end{cases}$

$(x^۲ - x - ۶)(۲x^۲ + ax + b) \geq ۰$

عبارت $x^۲ - x - ۶$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲ - x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۲ \end{cases}$$

| x | | -۲ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲ - x - ۶$ | + | ۰ | − | ۰ | + |

برای اینکه عبارت مورد نظر همواره مثبت باشد باید تعیین علامتی عیناً مشابه تعیین علامت $x^۲ - x - ۶$ داشته باشد بنابراین باید ریشه‌های دو عبارت مشابه باشند و به بیان دیگر عبارت $۲x^۲ + ax + b$ باید ضریبی از $x^۲ - x - ۶$ باشد.

$$x^۲ - x - ۶ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۲x - ۱۲ = ۲x^۲ + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = -۱۲ \end{cases} \Rightarrow a - b = -۲ - (-۱۲) = ۱۰$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = (۲x+۱)(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = \dfrac{-۱}{۲} \\ x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \end{cases}$$

| | | $-\frac{۱}{۲}$ | | ۴ | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | + | ۰ | − | ۰ | + |

$$B = \frac{(b^۲ - x)(۲x+۱)}{(ax+b)} \Rightarrow \begin{cases} b^۲ - x = ۰ \xrightarrow{x=۴} b^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow b = \pm ۲ \\ a = ۰ \end{cases}$$

دقت کنید اگر مخرج ریشه داشته باشد، عبارت در آن تعریف نشده خواهد بود، بنابراین لازم است مخرج کسر فاقد ریشه باشد تا جدول تعیین علامت یکسان با عبارت $A$ داشته باشد.

با توجه به مخرج $(b)$؛ علامت $b$ باید منفی باشد تا به‌ازای $x > ۴$ عبارت مثبت باشد.

$b = -۲ \rightarrow a + b = -۲$

۵ ۱ ۲ ۳ ۴ باید نامعادلهٔ $(x-۱)^۲ > ۴x^۴$ را حل کنیم.

$$(x-۱)^۲ > ۴x^۴ \rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲} > \sqrt{۴x^۴} \rightarrow |x-۱| > ۲x^۲$$

$$x \geq ۱ : x - ۱ > ۲x^۲ \rightarrow ۲x^۲ - x + ۱ < ۰ \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a>۰, \Delta<۰} \varnothing \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \quad (I)$$

$$x < ۱ : -x + ۱ > ۲x^۲ \rightarrow ۲x^۲ + x - ۱ < ۰$$

| x | | $-\infty$ | | -۱ | | $\frac{۱}{۲}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | + | ۰ | − | ۰ | + | | | |

$\longrightarrow -۱ < x < \frac{۱}{۲}$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۱ < x < \frac{۱}{۲} \quad (II)$$

از اجتماع $I$ و $II$ به جواب $x \in (-۱, \frac{۱}{۲})$ می‌رسیم و بیش‌ترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{۳}{۲}$ برابر $\frac{۱}{۲} - (-۱)$ است.

۶ ۱ ۲ ۳ ۴ برای این‌که چندجمله‌ای درجه دوم همواره منفی باشد، باید ضریب $x^۲$ و $\Delta$ هر دو منفی باشند. پس:

$m - ۱ < ۰ \Rightarrow m < ۱$

$\Delta = ۱۶(m-۱)^۲ - ۴(m-۱)(۴m+n) = (۴(m-۱)(۴(m-۱) - (۴m+n))$

$= ۴(m-۱)(-۴-n) = -۴(m-۱)(n+۴) < ۰$

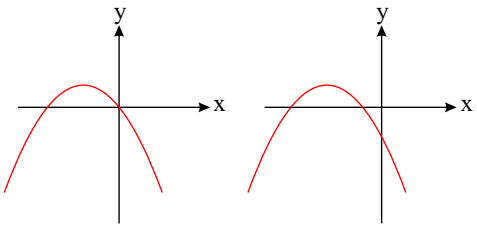
$\Rightarrow (m-۱)(n+۴) > ۰$

چون $m - ۱ < ۰$؛ بنابراین باید:

$n + ۴ < ۰ \Rightarrow n < -۴$

**۷** ۱ ۲ ۳ ۴

نمودار سهمی مورد نظر باید به یکی از دو صورت مقابل باشد:




پس اولاً ضریب $x^۲$ باید منفی باشد:

$$a-۱<۰\Rightarrow a<۱\quad (۱)$$

طول محل برخورد نمودار با محور $x$ها را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(a-۱)x^۲+(۲a-۱)x+a=۰$$

$$\Delta=(۲a-۱)^۲-۴(a-۱)a=۱$$

$$x=\frac{-(۲a-۱)\pm ۱}{۲(a-۱)}\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=\dfrac{a}{۱-a}\end{cases}$$

طبق نمودار سهمی باید، $\frac{a}{a-۱}$ نامثبت باشد پس داریم:

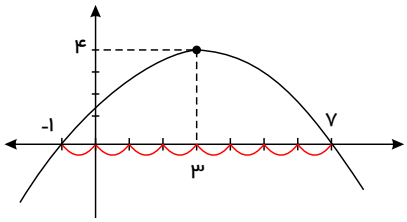
$$\frac{a}{۱-a}\le ۰\Rightarrow a\le ۰ \text{ یا } a>۱\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} a\le ۰$$

**۸** ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: ریشه‌های سهمی (نقاط تلاقی با محور $x$ها) از طول رأس سهمی به یک فاصله‌اند.

با رسم نمودار سهمی داریم:




$$y=ax^۲+bx+c\Rightarrow\begin{cases}(-۱,۰):a-b+c=۰ & (I)\\ (۷,۰):۴۹a+۷b+c=۰ & (II)\\ (۳,۴):۹a+۳b+c=۴ & (III)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{I,III}\begin{cases}a-b+c=۰\\ ۹a+۳b+c=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۹a-۹b+۹c=۰\\ ۹a+۳b+c=۴\end{cases}$$

$$-۱۲b+۸c=-۴\quad (IV)$$

$$\xrightarrow{I,II}\begin{cases}a-b+c=۰\\ ۴۹a+۷b+c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۴۹a-۴۹b+۴۹c=۰\\ ۴۹a+۷b+c=۴\end{cases}$$

$$-۵۶b+۴۸c=۰\quad (V)$$

$$\xrightarrow{IV,V}\begin{cases}-۱۲b+۸c=-۴\\ -۵۶a+۴۸c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۳b+۲c=-۱\\ -۷a+۶c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۲۱a+۱۴c=-۷\\ -۲۱a+۱۸c=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴c=۷\Rightarrow c=\frac{۷}{۴}$$

راه‌حل دوم:

طول پاره‌خطی که روی محور $x$ها جدا شده است، ۸ واحد است. چون رأس سهمی وسط پاره‌خط است، پس یک نقطه روی محور $x$ها ۴ واحد جلوتر از ۳ و یک نقطه ۴ واحد عقب‌تر از ۳ است.

$$\begin{cases}x_۱=۳-۴=-۱\\ x_۲=۳+۴=۷\end{cases}\xrightarrow{\text{معادلهٔ سهمی}} y=a(x+۱)(x-۷)$$

$$\xrightarrow{\text{نقطهٔ }(۳,۴)\text{ در منحنی صدق می‌کند}} a(۳+۱)(۳-۷)=۴\Rightarrow -۱۶a=۴\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۴}(x+۱)(x-۷)\xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}}-\frac{۱}{۴}(۰+۱)(۰-۷)=\frac{۷}{۴}$$

**۹** ۱ ۲ ۳ ۴ باید ضریب $x^۲$ و $\Delta$ هر دو منفی باشند تا عبارت درجهٔ دوم همواره منفی باشد. بنابراین $a<۰$ و

$$\Delta=b^۲-۴ab<۰\Rightarrow b(b-۴a)<۰$$

| x | | $۴a$ | | $۰$ |
|---|---|---|---|---|
| $b(b-۴a)$ | + | ۰ | − | ۰ + |

با توجه به جدول تعیین علامت بالا باید $۴a < b < ۰$ پس با توجه به منفی بودن $a$ داریم:

$$\frac{۴a}{a} > \frac{b}{a} > \frac{۰}{a}$$
$$۴ > \frac{b}{a} > ۰$$

یعنی $\frac{b}{a} \in (۰, ۴)$.

**۱۰** ۱ ۲ ۳ ۴ رأس سهمی در ربع چهارم واقع شده است. بنابراین:

$$S \text{ :رأس سهمی} \begin{cases} x_S > ۰ \Rightarrow \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۲m} = \frac{-\sqrt{۳}}{m} > ۰ \Rightarrow m < ۰ \\ y_S < ۰ \Rightarrow f(\frac{-b}{۲a}) = f(\frac{-\sqrt{۳}}{m}) = m(\frac{-\sqrt{۳}}{m})^۲ + ۲\sqrt{۳}(\frac{-\sqrt{۳}}{m}) + (m+۲) < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{m} - \frac{۶}{m} + m + ۲ = \frac{-۳}{m} + m + ۲ = \frac{m^۲ + ۲m - ۳}{m} < ۰$$

$$\xrightarrow{m<۰} m^۲ + ۲m - ۳ > ۰ \Rightarrow (m+۳)(m-۱) > ۰ \Rightarrow \begin{cases} m+۳ = ۰ \Rightarrow m = -۳ \\ m-۱ = ۰ \Rightarrow m = ۱ \end{cases}$$

| | | $-۳$ | | $۱$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m^۲+۲m-۳$ | + | ۰ | − | ۰ | + |

$\Rightarrow m < -۳$ یا $m > ۱ \xrightarrow{m<۰} m < -۳$

**۱۱** ۱ ۲ ۳ ۴

$$|۲x+۱| < x-۱ \Rightarrow \begin{cases} -x+۱ < ۲x+۱ \Rightarrow ۳x > ۰ \Rightarrow x > ۰ \ (I) \\ ۲x+۱ < x-۱ \Rightarrow x < -۲ \ (II) \\ x \text{ شرط نهان} : \ x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \ (III) \quad (\text{باتوجه به } |۲x-۱| < x-۱) \end{cases}$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) = \varnothing$$

**۱۲** ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

می‌دانیم: مختصات رأس سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$، برابر است با: $S\left|\begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ f(-\frac{b}{۲a}) \end{matrix}\right.$

فاصله در نقاط $A$ و $B$ برابر است با: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$

$$y = a^۲x^۲ + bx - c^۲$$

نقاط $(۲, ۰)$، $(-۳, ۰)$ و $(۳, ۳)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\xrightarrow{(۲,۰)} ۴a^۲ + ۲b - c^۲ = ۰ \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-۳,۰)} ۹a^۲ - ۳b - c^۲ = ۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(۳,۳)} ۹a^۲ + ۳b - c^۲ = ۳ \quad (III)$$

$$(I), (II) : - \begin{cases} ۴a^۲ + ۲b - c^۲ = ۰ \\ ۹a^۲ - ۳b - c^۲ = ۰ \end{cases}$$
$$-۵a^۲ + ۵b = ۰ \Rightarrow ۵(b - a^۲) = ۰ \Rightarrow b - a^۲ = ۰ \Rightarrow b = a^۲$$

با جایگذاری $b = a^۲$ در معادلات $(II)$ و $(III)$ داریم:

$$\begin{cases} ۴b + ۲b - c^۲ = ۰ \\ ۹b + ۳b - c^۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶b - c^۲ = ۰ \\ ۱۲b - c^۲ = ۳ \end{cases}$$
$$۶b = ۳ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$۶b - c^۲ = ۰ \Rightarrow ۶b = c^۲ \xrightarrow{b=\frac{۱}{۲}} ۳ = c^۲$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی داریم:

$$y = \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}x - ۳$$

$$S\left|\begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ f(-\frac{b}{۲a}) \end{matrix}\right. \Rightarrow S\left|\begin{matrix} \frac{-\frac{۱}{۲}}{۲(\frac{۱}{۲})} = -\frac{۱}{۲} \\ f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} - ۳ = \frac{۱}{۸} - \frac{۲}{۸} - \frac{۲۴}{۸} = \frac{-۲۵}{۸} \end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} S(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۲۵}{۸}) \\ A(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۸}) \end{cases} \Rightarrow |AS| = \sqrt{(\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}))^۲ + (-\frac{۱}{۸} - (-\frac{۲۵}{۸}))^۲} = \sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$$

روش دوم:

چون سهمی موردنظر دارای ۲ ریشهٔ ۲ و $-۳$ است، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = a^۲(x-۲)(x+۳) \xrightarrow{(۳,۳)} ۳ = a^۲(۳-۲)(۳+۳) \Rightarrow a^۲ = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

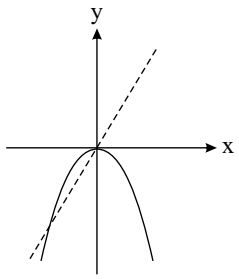
$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲}(x-۲)(x+۳) = \frac{۱}{۲}(x^۲ + x - ۶) = \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}x - ۳$$

$$x_{\text{راس}} = -\frac{b}{۲a} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{۲\times\frac{۱}{۲}} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y_{\text{راس}} = \frac{۱}{۲}\times(-\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲}\times(-\frac{۱}{۲}) - ۳$$

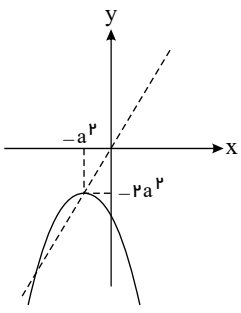
$$= \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۴} - ۳ = -\frac{۲۵}{۸} \Rightarrow S' = (-\frac{۱}{۲}, -\frac{۲۵}{۸})$$

$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ } S' \text{ از } (\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۸}) = \sqrt{(\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}))^۲ + (-\frac{۱}{۸} - (-\frac{۲۵}{۸}))^۲} = \sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$$

**۱۳** ۱ ۲ ۳ ۴ چون ضریب $x^۲$ منفی است، پس سهمی از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند و گزینه‌های «۲» و «۴» رد می‌شوند. می‌دانیم سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ دارای رأس به طول $-\frac{b}{۲a}$ است. پس سهمی با معادلهٔ $y = -x^۲ - ۲a^۲x + b$ دارای رأس به طول $-a^۲$ است. از آن‌جا که این رأس روی خط $y = ۲x$ نیز قرار دارد، پس مختصات آن $(-a^۲, -۲a^۲)$ است. بنابراین نمودار سهمی به یکی از دو صورت زیر خواهد بود:




$(a = ۰)$




$(a \neq ۰)$

بنابراین سهمی از ناحیه‌های اول و دوم عبور نمی‌کند.

**۱۴** ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم:

عبارت درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت است هرگاه $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$

عبارت درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره منفی است هرگاه $\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a < ۰ \end{cases}$

جدول تعیین علامت را با اطلاعات مسئله رسم می‌کنیم:

| x | | $\frac{۳}{۲}$ | |
|---|---|---|---|
| ۲x-۳ | − | ۰ | + |
| $x^۲+mx+m$ | ? | | ? |
| y | − | ۰ | + |

با توجه به جدول تعیین علامت، عبارت $x^۲ + mx + m$ همواره باید مثبت باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} a > ۰ \Rightarrow ۱ > ۰ \\ \Delta < ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m < ۰ \Rightarrow m(m-۴) < ۰ \end{cases}$$

$$m(m-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \\ m - ۴ = ۰ \Rightarrow m = ۴ \end{cases}$$

| | ۰ | | ۴ | |
|---|---|---|---|---|
| $m^۲ - ۴m$ | + | ۰ | − | ۰ | + |

$$\Rightarrow ۰ \le m \le ۴$$

دقت کنید جواب $m = ۰$، معادلهٔ اصلی را تبدیل به $y = (۲x-۳) \times x^۲$ می‌کند که $x = ۰$ یک جواب این معادله است و جدول تعیین علامت متفاوت می‌گردد.

همچنین اگر $m = ۴$ باشد، معادلهٔ اصلی تبدیل به $y = (۲x-۳)(x^۲ + ۴x + ۴)$ می‌شود که $x = -۲$ یک جواب این معادله است و جدول تعیین علامت متفاوت می‌گردد.

بنابراین بازهٔ جواب مورد قبول برای $m$، بازهٔ $۰ < m < ۴$ است.

**۱۵** ۱ ۲ ۳ ۴ نابرابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{(۲m-۱)x^۲ - (m-۱)x - ۳}{x^۲ + x + ۱} + ۳ \ge ۰ \Rightarrow \frac{(۲m-۱)x^۲ - (m-۱)x - ۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۳}{x^۲ + x + ۱} \ge ۰ \Rightarrow \frac{(۲m+۲)x^۲ + (۴-m)x}{x^۲ + x + ۱} \ge ۰$$

چون عبارت $x^۲ + x + ۱$ همواره مثبت است $(\Delta < ۰)$، پس باید صورت کسر فوق همواره نامنفی باشد:

$$(۲m+۲)x^۲ + (۴-m)x \ge ۰ \Rightarrow x((۲m+۲)x + ۴ - m) \ge ۰$$

اگر عبارت درجهٔ دوم بالا دو ریشهٔ $x = ۰$ و $x = \frac{m-۴}{۲m+۲}$ را داشته باشد، علامت آن در ریشه‌ها تغییر خواهد کرد. پس این دو ریشه باید برابر باشند:

$$\frac{m-۴}{۲m+۲} = ۰ \Rightarrow m = ۴$$

توجه کنید که در این صورت نابرابری به شکل $x(۱۰x) \ge ۰$ خواهد بود که همواره برقرار است.

پس مجموعهٔ مقادیر ممکن $m$ مجموعهٔ $\{۴\}$ است.

**۱۶** ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم:

تابع در اطراف ریشه‌های ساده و مکرّر مرتبهٔ فرد، تغییر علامت می‌دهد.
و در اطراف ریشه‌های مضاعف و مکرّر مرتبهٔ زوج، تغییر علامت نمی‌دهد.

| x | | −۱ | | ۰ | | ۲ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p(x) | + | ت ن | + | ۰ | − | ۰ | − |

از جدول تعیین علامت چنین برداشت می‌شود که ۰ و ۲ ریشه‌های صورت کسر و $-۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر $P(x)$ باشد، درنتیجه $\Delta$ در مخرج کسر صفر است، پس:

$$\begin{cases} a = ۲ \\ a - b + c = ۰ \\ \Delta = b^۲ - ۴ac = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b - ۲ \ (I) \\ b^۲ - ۸c = ۰ \end{cases} \Rightarrow b^۲ - ۸b + ۱۶ = ۰ \Rightarrow (b-۴)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow b = ۴ \xrightarrow{(I)} c = ۲$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{۴x(x-۲)^۲}{۲(x+۱)^۲}$$

درنتیجه به‌ازای $x > ۰$، حاصل عبارت مثبت و به‌ازای $x < ۰$، حاصل عبارت منفی است، پس علامت $P(x)$ به‌دست آمده مغایر با علامت‌های مندرج در جدول تعیین علامت است. پس مقداری برای $b$ وجود ندارد.

**۱۷** ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم:

در سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$، رأس سهمی نقطه‌ای $S\left|\begin{matrix} \frac{-b}{۲a} \\ f(\frac{-b}{۲a}) \end{matrix}\right.$ است.

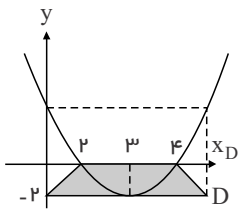
مساحت ذوزنقه برابر است با: $S = \frac{\text{مجموع دو قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$

$$y = ۲x^۲ - ۱۲x + ۱۶ \Rightarrow S\left|\begin{matrix} \frac{-b}{۲a} = \frac{۱۲}{۴} = ۳ \\ f(۳) = ۲ \times ۹ - ۱۲ \times ۳ + ۱۶ = ۱۸ - ۳۶ + ۱۶ = -۲ \end{matrix}\right.$$

$$y = ۲x^۲ - ۱۲x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۸ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = ۲ \end{cases}$$

نقاط هم‌ارز روی سهمی نسبت به خط تقارن قرینه‌اند: $y(D)=y(۰)$

بنابراین:




$$۳-۰=x_D-۳\Rightarrow x_D=۶$$

مساحت ذوزنقه:

$$S=\frac{(۶+۲)\times ۲}{۲}=۸$$

**۱۸** ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به جدول تعیین علامت، چون در $x=۴$ عبارت $p$ تغییر علامت نداده و مقدار $p$ برابر صفر است، پس $x=۴$ ریشهٔ مضاعف صورت کسر است.

$$(x-a)^۲=(x-۴)^۲\Rightarrow a=۴\Rightarrow p=\frac{-x(x-۴)^۲}{۴x^۲+bx+c}$$

عبارت $p$ در $x=-\frac{۱}{۲}$ تعریف نشده و در این نقطه تغییر علامت نداده است، پس $x=-\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

$$۴x^۲+bx+c=۴(x+\frac{۱}{۲})^۲=۴(x^۲+x+\frac{۱}{۴})$$

$$۴x^۲+bx+c=۴x^۲+۴x+۱\Rightarrow\begin{cases}b=۴\\c=۱\end{cases}$$

توجه کنید که تعیین علامت عبارت $p=\frac{-x(x-۴)^۲}{(۲x+۱)^۲}$ با جدول داده شده مطابقت ندارد.

| x | | $-\frac{۱}{۲}$ | | ۰ | | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | + | ت ن | + | ۰ | − | ۰ − |

بنابراین هیچ مقداری برای $a$، $b$ و $c$ وجود ندارد.

**۱۹** ۱ ۲ ۳ ۴ نامعادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$|\frac{x-۱}{x+۱}|\le|\frac{x+۲}{x-۲}|\Rightarrow|x-۱||x-۲|\le|x+۱||x+۲|\quad,\quad x\neq-۱\quad,\quad ۲$$

$$\Rightarrow|x^۲-۳x+۲|\le|x^۲+۳x+۲|\Rightarrow(x^۲-۳x+۲)^۲\le(x^۲+۳x+۲)^۲$$

$$(x^۲-۳x+۲)^۲-(x^۲+۳x+۲)^۲\le۰$$

$$\Rightarrow(x^۲-۳x+۲+x^۲+۳x+۲)(x^۲-۳x+۲-x^۲-۳x-۲)\le۰$$

$$(۲x^۲+۴)(-۶x)\le۰\Rightarrow x\ge۰$$

بنابراین مجموعه جواب‌های نامعادله به‌صورت $[۰,+\infty)-\{۲\}$ است. پس $a=۰$ و $b=۲$ و درنتیجه $a+b=۲$.

**۲۰** ۱ ۲ ۳ ۴

$$h>۳۰\to-۳t^۲+۱۸t+۱۵>۳۰\to-۳t^۲+۱۸t-۱۵>۰$$

$$t^۲-۶t+۵<۰$$

| t | | ۱ | | ۵ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t^۲-۶t+۵$ | + | ۰ | − | ۰ | + |

$$\Rightarrow ۱<t<۵$$

موشک تا رأس سهمی بالا می‌رود سپس برمی‌گردد.

$$t=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۱۸}{۲(-۳)}=۳$$

از لحظهٔ $t=۳$ تا $t=۵$ موشک در حال برگشت به سمت زمین است. لذا جواب $۳<t<۵$ خواهد بود. $(۳,۵)$

**۲۱** ۱ ۲ ۳ ۴

طبق جواب $(۱,b)$ جدول به شکل زیر است.

$$ax^۲-۶x+b<۰$$

| x | | ۱ | | b | |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax^۲-۶x+b$ | + | ۰ | − | ۰ | + |

$a>۰$

ریشه‌های عبارت‌اند. داریم: $\begin{cases} x=۱ \\ x=b \end{cases}$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=۱} a-۶+b=۰ \Rightarrow a+b=۶ \\ \xrightarrow{x=b} ab^۲-۶b+b=۰ \Rightarrow ab^۲-۵b=۰ \\ \Rightarrow b(ab-۵)=۰ \rightarrow \begin{cases} b=۰ \text{ غ ق ق } (b>۱) \\ ab=۵ \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=۶ \\ ab=۵ \end{cases} \Rightarrow (a+b)ab=a^۲b+b^۲a=۶\times۵=۳۰$$

**۲۲** ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{x-۱}{x+۱}<\frac{x+a}{x} \Rightarrow \frac{x-۱}{x+۱}-\frac{x+a}{x}<۰ \Rightarrow \frac{x(x-۱)-(x+۱)(x+a)}{x(x+۱)}<۰$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲-x-x^۲-(a+۱)x-a}{x(x+۱)}<۰ \Rightarrow \frac{-(a+۲)x-a}{x(x+۱)}<۰$$

| x | $-\infty$ | b | $-\frac{۱}{۳}$ | ۰ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{-(a+۲)x-a}{x(x+۱)}$ | | + ن ت | − ○ | + ن ت | − |

$$x(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases} \Rightarrow b=-۱$$

$$-(a+۲)x-a=۰ \xrightarrow{x=\frac{-۱}{۳}} \frac{(a+۲)}{۳}-a=۰ \Rightarrow a+۲-۳a=۰ \Rightarrow -۲a+۲=۰ \Rightarrow a=۱$$

درنتیجه داریم:

$$a-b=۱-(-۱)=۲$$

**۲۳** ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم: $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های عبارت درجه دوم $a(x-x_۱)(x-x_۲)=۰$ هستند

عبارت $ax^۲+bx+c$ در بازهٔ $(-۲,۳)$ منفی است.

نتیجه می‌گیریم: اولاً ۳ و $-۲$ ریشه‌های عبارت هستند بنابراین:

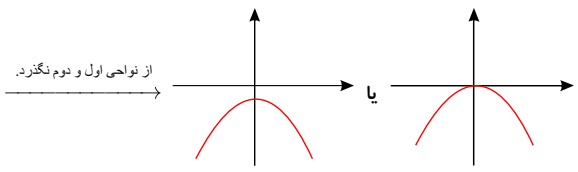
$$a(x+۲)(x-۳)=a(x^۲-x-۶)=ax^۲-ax-۶a=ax^۲+bx+c$$
$$\Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=-۶a \end{cases} \Rightarrow b+c=-۷a$$

ثانیاً $a$ عددی مثبت است، چرا که بین دو ریشه علامت عبارت مخالف علامت $a$ است.

با توجه به این دو مورد حاصل $b+c$ باید عددی مضرب $-۷$ باشد که تنها گزینهٔ مضرب $-۷$ گزینهٔ ۲ است.

**۲۴** ۱ ۲ **۳** ۴

$$y=mx^۲-x^۲+m+۲\sqrt{۲}x \rightarrow y=\underbrace{(m-۱)}_{a}x^۲+\underbrace{۲\sqrt{۲}x}_{b}+\underbrace{m}_{c}$$




$$\longrightarrow a<۰ \text{ , } \Delta \leq ۰$$

بنابراین نمودار زیر محور $x$ها یا بر آن مماس است:

$$a<۰ \Rightarrow m-۱<۰ \Rightarrow m<۱ \quad (۱)$$

$$\Delta \leq ۰ \Rightarrow b^۲-۴ac=(۲\sqrt{۲})^۲-۴(m-۱)(m) \leq ۰ \Rightarrow ۸-۴m^۲+۴m \leq ۰ \Rightarrow m^۲-m-۲ \geq ۰$$

$$\Rightarrow (m+1)(m-2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccccc} m & & -1 & & 2 & \\ \hline \text{عبارت} & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow \quad m \leq -1 \text{ یا } m \geq 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} m \leq -1$$

**۲۵** ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

$$|ax+5| < 3 \Rightarrow -3 < ax+5 < 3 \Rightarrow -8 < ax < -2$$

$$\xrightarrow[a>0]{\text{فرض}} \begin{cases} \frac{-8}{a} < x < \frac{-2}{a} \\ b < x < 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{a} = 4 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$ با فرض اولیهٔ $a > 0$ تناقض دارد پس قابل قبول نیست.

$$\xrightarrow[a<0]{\text{فرض}} \begin{cases} \frac{-2}{a} < x < -\frac{8}{a} \\ b < x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-8}{a} = 4 \Rightarrow a = -2 \\ \frac{-2}{a} = b \Rightarrow \frac{-2}{-2} = b \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

**۲۶** ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

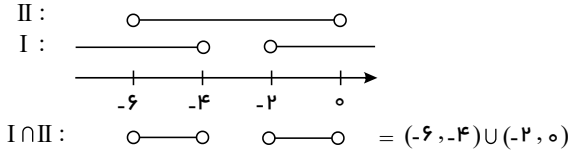
$|x| > a \Rightarrow x > a$ یا $x < -a$

$$||x+3| - 2| < 1 \Rightarrow -1 < |x+3| - 2 < 1$$

$$\Rightarrow 1 < |x+3| < 3$$

$$I = |x+3| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 1 \Rightarrow x > -2 \\ x+3 < -1 \Rightarrow x < -4 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$$

$$II = |x+3| < 3 \Rightarrow -3 < x+3 < 3 \Rightarrow -6 < x < 0 \Rightarrow x \in (-6, 0)$$




**۲۷** ۱ ۲ ۳ ۴ $f(x)$ عبارتی درجه ۲ است و ضریب $x^2$ در آن منفی است؛ پس علامت آن در بین دو ریشه‌اش مثبت (مخالف علامت $a$) و در خارج از دو ریشه‌اش منفی (موافق علامت $a$) خواهد بود.

عبارات درجهٔ ۲ مخرج را نیز به‌همین ترتیب تعیین علامت می‌کنیم و جدول را تشکیل می‌دهیم:

$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$ ریشه ندارد $\Rightarrow$ ($a$ موافق علامت) همواره مثبت است.

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \xrightarrow{x(-1)} x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$ بین دو ریشه مثبت و خارج از دو ریشه منفی است.

| x | | -۱ | | ۱ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | − | ۰ | + | + | ۰ | − | |
| $x^2-x+1$ | + | | + | + | | + | |
| $-x^2+4x-3$ | − | | − | ۰ | + | ۰ | − |
| A | + | ۰ | − | ت ن | + | ت ن | + |

عبارت $A$ در بازهٔ $(-1, 1)$ منفی است و در این بازه تنها عدد صحیح موجود عبارتست از $x = 0$.

**۲۸** ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 1 < 13 \Rightarrow 2x < 14 \Rightarrow x < 7 \\ 5x - 1 > -3 \Rightarrow 5x > -2 \Rightarrow x > -\frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{5} < x < 7$$

میانگین ۷ و $-\frac{2}{5}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{5} + 7\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2+35}{5}\right) = \frac{33}{10}$$

$$-\frac{2}{5} - \frac{33}{10} < x - \frac{33}{10} < 7 - \frac{33}{10} \Rightarrow -\frac{37}{10} < x - \frac{33}{10} < \frac{37}{10} \Rightarrow |x - \frac{33}{10}| < \frac{37}{10} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{33}{10} \\ \beta = \frac{37}{10} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{33}{10} + \frac{37}{10} = 7$$

**۲۹** ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\left.\begin{array}{l} ۳x+y<۸ \xrightarrow{\times ۳} ۹x+۳y<۲۴ \\ ۵-۳y<۲x+۳ \Rightarrow -۲x-۳y<-۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۹x-۲x<۲۴-۲$$

$$\Rightarrow ۷x<۲۲ \Rightarrow x<\frac{۲۲}{۷}$$

مقادیر صحیح و نامنفی برای $x$ عبارتند از:

$$x=۰,۱,۲,۳$$

چهار مقدار هستند.

**۳۰** ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا چون می‌خواهیم فاصلهٔ جسم از زمین بیشتر از ۳۵ متر باشد، داریم:

$$h>۳۵ \Rightarrow -۵t^۲+۲۰t+۲۰>۳۵ \Rightarrow -۵t^۲+۲۰t-۱۵>۰ \Rightarrow t^۲-۴t+۳<۰ \Rightarrow (t-۱)(t-۳)<۰$$

| t | | ۱ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|
| h | + | | − | | + |

$\Rightarrow ۱<t<۳$

حال می‌بایست دقت کنیم جسم از نقطهٔ رأس سهمی به بعد در حال برگشت به سطح زمین است، پس زمان مربوط به نقطهٔ رأس را می‌یابیم.

$$\text{رأس سهمی}: t_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲۰}{۲\times(-۵)}=\frac{-۲۰}{-۱۰}=۲$$

پس زمانی که فاصلهٔ توپ از سطح زمین بیشتر از ۳۵ و توپ در مسیر بازگشت است.

$$۲<t<۳ \Rightarrow t\in(۲,۳)$$

**۳۱** ۱ ۲ ۳ **۴** با توجه به این که خط از دو نقطهٔ $(۰,۰)$ و $B=(-۱,-۲)$ عبور می‌کند، معادلهٔ خط به‌صورت $y=۲x$ است. طول نقطهٔ $A$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=۲x \xrightarrow{y_A=۴} x_A=۲$$

اگر معادلهٔ سهمی را به‌صورت $y=ax^۲+bx+c$ در نظر بگیریم، سه نقطهٔ $B=(-۱,-۲)$، $C=(-۳,۴)$ و $A=(۲,۴)$ در این معادله صدق می‌کند:

بنابراین:

$$\begin{cases} a-b+c=-۲ \\ ۹a-۳b+c=۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق}} ۸a-۲b=۶$$

$$\begin{cases} ۹a-۳b+c=۴ \\ ۴a+۲b+c=۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق}} ۵a-۵b=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۱ \\ c=-۲ \end{cases}$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=x^۲+x-۲$ است. اکنون برای به‌دست آوردن مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات داریم:

$$\xrightarrow{y=۰} x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=-۲, x=۱$$

$$\xrightarrow{x=۰} y=۰+۰-۲ \Rightarrow y=-۲ \Rightarrow -۲+۱-۲=-۳$$

**۳۲** ۱ ۲ ۳ **۴** برای آن‌که عبارت درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد باید $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد.

$$\Delta=b^۲-۴ac=(m+۲)^۲-۴(۴)(۱)=m^۲+۴m+۴-۱۶=m^۲+۴m-۱۲$$

$$\Delta<۰ \Rightarrow m^۲+۴m-۱۲<۰$$

جدول تعیین علامت را برای $m^۲+۴m-۱۲$ رسم می‌کنیم.

$$m^۲+۴m-۱۲=(m+۶)(m-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=-۶ \\ m=۲ \end{cases}$$

| m | $-\infty$ | | $-۶$ | | ۲ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^۲+۴m-۱۲$ | + | ۰ | − | ۰ | + | |

بنابراین برای آن‌که $\Delta<۰$ باشد باید $-۶<m<۲$ باشد.

برای عبارت $y=x^۲+۳x+m$، $\Delta$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\Delta=b^۲-۴ac=۳^۲-۴(۱)(m)=۹-۴m$$

می‌دانیم که $-۶<m<۲$ است در نتیجه:

$$-۶<m<۲ \xrightarrow{\times ۴} -۲۴<۴m<۸ \xrightarrow{\times(-۱)} -۸<-۴m<۲۴ \xrightarrow{+۹} ۱<۹-۴m<۳۳ \rightarrow ۱<\Delta<۳۳$$

از آن‌جا که دلتای این عبارت همواره مثبت است، دو ریشهٔ حقیقی دارد پس هم ممکن است صفر شود، هم منفی و هم مثبت.

**۳۳** ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم:

حجم کره به شعاع $r$ از رابطهٔ $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ به‌دست می‌آید.

حجم بزرگ‌ترین مخزن > حجم مخزن میانی > حجم کوچک‌ترین مخزن

$$\frac{۳۲}{۳}\pi < \frac{۴}{۳}\pi r^۳ < ۳۶\pi \xrightarrow{\times \frac{۳}{۴\pi}} ۸ < r^۳ < ۲۷ \Rightarrow ۲^۳ < r^۳ < ۳^۳ \xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }} ۲ < r < ۳$$

تنها گزینهٔ بین ۲ و ۳، گزینهٔ ۳ است یعنی $\sqrt{۵}$

**۳۴** ۱ ۲ ۳ **۴** اگر $\frac{\Delta}{۴a}$ باشد، $\Delta$ و $a$ هم علامت نیستند:

۱) $\begin{cases} a > ۰ \\ \Delta < ۰ \end{cases} \Rightarrow$ چند جمله‌ای همواره مثبت است.

۲) $\begin{cases} a < ۰ \\ \Delta > ۰ \end{cases}$

در این حالت $P(x)$ دو ریشه دارد؛ یعنی $P(x)$ تغییر علامت می‌دهد؛

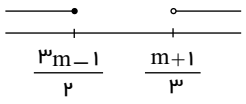
پس علامت $P(x)$ به علامت $a$ بستگی دارد.

**۳۵** **۱** ۲ ۳ ۴ طبق جدول، عبارت $p$ در $x = ۲$ تغییر علامت نداده است، پس عبارت $p$ شامل $(x-۲)^۲$ است. همچنین $p$ در $x = -۱$ تغییر علامت داده و برای $x < -۱$ علامت $p$ منفی و برای $x > -۱$ علامت $p$ مثبت است، پس عبارت $p$ شامل $x+۱$ است و داریم:

$$p = (x+۱)(x-۲)^۲ = (x+۱)(x^۲ - ۴x + ۴) = x^۳ - ۴x^۲ + ۴x + x^۲ - ۴x + ۴$$

$$p = x^۳ - ۳x^۲ + ۴$$

**۳۶** ۱ **۲** ۳ ۴ با در نظر گرفتن نمودار زیر، مشخص است که اجتماع دو بازه $(-\infty, \frac{۳m-۱}{۲}]$ و $(\frac{m+۱}{۳}, +\infty)$ زمانی $\mathbb{R}$ است که: $\frac{۳m-۱}{۲} \geq \frac{m+۱}{۳}$ پس:




$$\frac{۳m-۱}{۲} \geq \frac{m+۱}{۳} \xrightarrow{\times ۶} ۳(۳m-۱) \geq ۲(m+۱) \Rightarrow ۹m - ۳ \geq ۲m + ۲ \Rightarrow ۷m \geq ۵ \Rightarrow m \geq \frac{۵}{۷}$$

**۳۷** ۱ ۲ **۳** ۴ باتوجه به مجموعه جواب نامعادله، می‌توان فهمید که تعیین علامت عبارت $\frac{۳x+۱۲}{x^۲+mx-n}$ به صورت مقابل است.

| x | $-\infty$ | $-۷$ | $-۴$ | $۵$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $۳x+۱۲$ | − | − | + | + | |
| $x^۲+mx-n$ | + | − | − | + | |
| $\frac{۳x+۱۲}{x^۲+mx-n}$ | − | ت ن | + | ت ن | + |

پس $-۷$ و $۵$ ریشه‌های $x^۲ + mx - n = ۰$ هستند.

$$x^۲ + mx - n = (x+۷)(x-۵) = x^۲ + ۲x - ۳۵ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = ۳۵ \end{cases} \Rightarrow m + n = ۳۷$$

**۳۸** **۱** ۲ ۳ ۴ باتوجه به جدول تعیین علامت داده شده، $a-۲$ ریشهٔ عبارت $A$ است و از $-۳$ نیز بزرگ‌تر است.

$$a - ۲ > -۳ \Rightarrow \boxed{a > -۱} \quad \boxed{۱}$$

$$A = (x+۳)((۵-a)x - ۲) = (۵-a)x^۲ - ۲x + (۱۵ - ۳a)x - ۶$$

ضریب $x^۲$ برابر $۵-a$ است و چون بین دو ریشه علامت منفی است، پس $۵-a$ باید مثبت باشد.

$$۵ - a > ۰ \Rightarrow \boxed{a < ۵} \quad \boxed{۲}$$

$$\boxed{۱} \cap \boxed{۲} : -۱ < a < ۵$$

$x = a - ۲$ ریشهٔ معادلهٔ $(۵-a)x - ۲ = ۰$ است.

$$(۵-a)(a-۲) - ۲ = ۰ \Rightarrow ۵a - ۱۰ - a^۲ + ۲a - ۲ = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۷a + ۱۲ = ۰ \Rightarrow (a-۳)(a-۴) = ۰ \Rightarrow a = ۳ \ , \ a = ۴$$

$$a = ۳ \rightarrow \frac{۱}{a+۱} = \frac{۱}{۳+۱} = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵$$

$$a = ۴ \rightarrow \frac{۱}{a+۱} = \frac{۱}{۴+۱} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

**۳۹** ۱ **۲** ۳ ۴ اگر $n \geq ۰$ و مجموعهٔ جواب نامعادله $|x-m| \geq n$ به‌صورت $(-\infty, k_۱] \cup [k_۲, +\infty)$ باشد، آن‌گاه:

$$m = \frac{k_1 + k_2}{2}$$
$$n = \frac{k_2 - k_1}{2}$$
$$|x - 3a| \geq 2b - 3$$

چون مجموعهٔ $(-\infty, b] \cup [4, +\infty)$ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x - 3a| \geq 2b - 3$ است لذا:

$$3a = \frac{b+4}{2}\ ,\ 2b - 3 = \frac{4-b}{2} \Rightarrow 4b - 6 = 4 - b \rightarrow b = 2\ ,\ 3a = \frac{2+4}{2} \Rightarrow a = 1$$
$$2a + b = 2(1) + 2 = 4$$

**۴۰** ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-2}{x+2} + 1 < 0 \rightarrow \frac{(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 6) + x^2 + 5x + 6}{(x+3)(x+2)} < 0$$
$$\frac{x^2 + 5x + 10}{x^2 + 5x + 6} < 0\ ,\ x^2 + 5x + 10 = 0 \rightarrow \frac{\Delta < 0}{a > 0} \rightarrow x^2 + 5x + 10 > 0$$

عبارت $x^2 + 5x + 10$ همواره مثبت است پس می‌توانیم پس می‌توانیم آن را از نامعادله حذف کنیم. در نتیجه باید مخرج کسر منفی شود.

$$x^2 + 5x + 6 < 0 \rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = -2\ ,\ x = -3$$

مجموعهٔ جواب $(-3, -2)$

| x | | $-3$ | | $-2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+5x+6$ | + | ○ | − | ○ | + |
| | | ج | | | |

$$(2n - 1, m - 4) = (-3, -2) \rightarrow 2n - 1 = -3, m - 4 = -2 \rightarrow n = -1, m = 2$$
$$|x - 1| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

**۴۱** ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا معادلهٔ سهمی را مرتب می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - mx + m + 4$$

می‌دانیم که اگر $a > 0$ باشد، مختصات پایین‌ترین نقطهٔ سهمی به‌صورت $(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ است. چون این نقطه روی نیمساز ربع دوم یعنی خط $y = -x$ قرار دارد. بنابراین مختصات نقطه در خط صدق می‌کند (توجه کنید که چون پایین‌ترین نقطه روی نیمساز ناحیهٔ دوم است طول آن منفی است.)

$$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{m}{2} < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -(\frac{-b}{2a}) \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = \frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{\Delta}{2} = b \Rightarrow \Delta = -2b \quad (1)$$

با توجه به معادلهٔ $y = x^2 - mx + m + 4$ داریم:

$$\xrightarrow{(1)} b^2 - 4ac = m^2 - 4(1)(m+4) = -2(-m)$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m - 16 = +2m \Rightarrow m^2 - 6m - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (m-8)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 8 & \text{غ.ق.ق} \\ m = -2 \end{cases}$$

توجه کنید که در $m = 8$ شرط $m < 0$ صدق نمی‌کند.

**۴۲** ۱ ۲ ۳ ۴

$$x^6 + 4 \leq 4x^4 + x^2 \Rightarrow x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 \leq 0 \Rightarrow x^4(x^2 - 4) - (x^2 - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^4 - 1) \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x^2 - 1)(x^2 + 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \quad \text{(همواره مثبت است و ریشه ندارد.)} \end{cases}$$

| | $-۲$ | | $-۱$ | | $۱$ | | $۲$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-۲$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $+$ |
| $x+۲$ | $-$ | $\circ$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $+$ |
| $x^۲-۱$ | $+$ | | $+$ | $\circ$ | $-$ | $\circ$ | $+$ | $+$ |
| $x^۲+۱$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $+$ |
| $A$ | $+$ | $\circ$ | $-$ | $\circ$ | $+$ | $\circ$ | $-$ | $\circ$ $+$ |

$$\Rightarrow x \in [-۲,-۱] \cup [۱,۲]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=-۱ \\ c=۱ \\ d=۲ \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=۰$$

**۴۳** ۱ ۲ ۳ **۴**

$$۳x-۱<۸ \Rightarrow ۳x<۹ \Rightarrow x<۳ \quad (I)$$

$$-۲<۳x-۱ \Rightarrow ۳x+۱>۰ \Rightarrow ۳x>-۱ \Rightarrow x>\frac{-۱}{۳} \quad (II)$$

$$(I)\wedge(II): \frac{-۱}{۳}<x<۳ \xrightarrow[-\frac{۴}{۳}]{\text{طرفین}} \frac{-۵}{۳}<x-\frac{۴}{۳}<\frac{۵}{۳} \Rightarrow |x-\frac{۴}{۳}|<\frac{۵}{۳}$$

$$\begin{cases} \alpha=\frac{۴}{۳} \\ \beta=\frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۴}{۳}+\frac{۵}{۳}=\frac{۹}{۳}=۳$$

**۴۴** ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: $|x|<a \Rightarrow -a<x<a, a\geq ۰$

$$|x+۲|+b<a \Rightarrow |x+۲|<a-b$$

$$\Rightarrow b-a<x+۲<a-b \Rightarrow b-a-۲<x<a-b-۲ \Rightarrow \begin{cases} n=b-a-۲ \\ m=a-b-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow m+n=a-b-۲+b-a-۲=-۴$$

**۴۵** ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: **زیر رادیکال به فرجه زوج، فقط اعداد نامنفی تعریف شده هستند.**

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

$\frac{\text{عدد}}{۰}$ : **تعریف نشده**

$$\frac{۱}{\sqrt{x-|x|+۲}}>۰ \Rightarrow \sqrt{x-|x|+۲}>۰ \Rightarrow x-|x|+۲>۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq ۰ : |x|=x \rightarrow x-|x|+۲>۰ \Rightarrow ۲>۰ \Rightarrow x\in\mathbb{R} \xrightarrow{x\geq ۰} x\in[۰,+\infty) & (I) \\ x<۰ : |x|=-x \Rightarrow x-(-x)+۲>۰ \Rightarrow ۲x+۲>۰ \Rightarrow ۲x>-۲ \\ \Rightarrow x>-۱ \Rightarrow x\in(-۱,+\infty) \xrightarrow{x<۰} x\in(-۱,۰) & (II) \end{cases}$$

$$I\cup II=(-۱,+\infty)$$

**۴۶** ۱ ۲ ۳ ۴

**از آنجایی که ریشهٔ مخرج در جدول تعریف نشده می‌باشد، پس ریشهٔ مخرج ۵ می‌باشد.**

$$۳x-c=۰ \Rightarrow ۳x=c \Rightarrow ۳\times(۵)=c \Rightarrow c=۱۵$$

**از طرفی $x^۲-a^۲$ دارای دو ریشهٔ قرینه می‌باشد، پس:**

$$x^۲-a^۲=۰ \Rightarrow x^۲=a^۲ \Rightarrow x=\pm a$$

**در نتیجه به جدول و دو ریشهٔ قرینه $a=\pm ۳$ می‌باشد و ریشهٔ باقی‌مانده در صورت کسر $x=-۲$ است، پس:**

$$x+b=۰ \Rightarrow x=-b=-۲ \Rightarrow b=۲$$

**در نتیجه با محاسبات بالا داریم:**

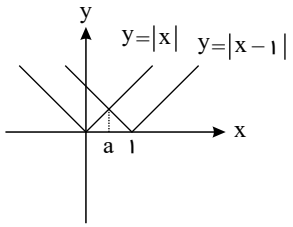
$$a^۲b-c=(۹)\times(۲)-۱۵=۱۸-۱۵=۳$$

**۴۷** ۱ ۲ ۳ **۴**

**نمودار $y=\sqrt{x^۲-۲x+۱}$ بالاتر از نمودار $y=|x|$ قرار دارد، یعنی:**

$$\sqrt{x^۲-۲x+۱}>|x| \Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲}>|x| \Rightarrow |x-۱|>|x|$$

برای به‌دست آوردن جواب نامعادله از روش رسم نمودار کمک می‌گیریم:




از روی شکل کاملاً مشخص است که نمودار $y=|x-1|$ در بازهٔ $(-\infty,a)$، بالاتر از نمودار $y=|x|$ قرار دارد. برای یافتن مقدار $a$ باید دو شاخهٔ متقاطع مربوط از دو نمودار را مساوی هم قرار دهیم.

$$\begin{cases} y=|x| \Rightarrow y=x \\ y=|x-1| \Rightarrow y=-x+1 \end{cases} \Rightarrow x=-x+1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

**۴۸** ۱ ۲ ۳ ۴ طبق نمودار، عرض از مبدأ سهمی $-1$ است. پس $c=-1$.

$$y=x^2+bx-1$$

رأس سهمی نقطهٔ $(3,2b+2)$ است، پس در معادله سهمی صدق می‌کند:

$$9+3b-1=2b+2 \Rightarrow b=-6$$

پس معادلهٔ سهمی به‌صورت $y=x^2-6x-1$ است. حال محل برخورد سهمی را با محور طول‌ها به‌دست می‌آوریم. باید معادلهٔ $x^2-6x-1=0$ را حل کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=36+4=40$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{40}}{2}=3\pm\sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3+\sqrt{10} \\ x_2=3-\sqrt{10} \end{cases}$$

طبق نمودار $\alpha>0$ است، پس $\alpha=3+\sqrt{10}$.

**۴۹** ۱ ۲ ۳ ۴ در سهمی $y=ax^2+bx+c$ از آنجا که $a<0$ است، دهانهٔ سهمی رو به پایین است. یعنی:

طول رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$x=-\frac{b}{2a} \xrightarrow{b>0\,,\,a<0} x>0$$

دلتای سهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac \xrightarrow{a<0\,,\,c>0} ac<0 \Rightarrow b^2-4ac>0$$

پس این سهمی در دو نقطه محور $x$ها را قطع می‌کند.

به‌ازای $x=0$ نیز $y=c$ است و چون $c>0$ است، درنتیجه گزینهٔ «۳» صحیح است.

**۵۰** ۱ ۲ ۳ ۴ چون در دو طرف $x=-2$ تغییر علامت وجود دارد، پس $x=-2$ ریشهٔ ساده عبارت $P$ است و باید عبارت $ax^2+3x+b$ را صفر کند. همچنین چون در دو طرف $x=c$ تغییر علامتی وجود ندارد پس ریشهٔ مضاعف عبارت $P$ است و باید ریشهٔ عبارت $ax^2+3x+b$ با ریشهٔ عبارت $2x-1$ یعنی $x=\frac{1}{2}$ یکسان باشد. پس $x=\frac{1}{2}$ نیز باید عبارت $ax^2+3x+b$ را صفر کند.

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}=c$$

$$ax^2+3x+b=0 \begin{cases} \xrightarrow{x=-2} 4a+b=6 \\ \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{4}a+b=-\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{از حل دستگاه}} \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc=(2)(-2)(\frac{1}{2})=-2$$

**۵۱** ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم: در معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ مجموع ریشه‌ها $\frac{-b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $\frac{c}{a}$ است.

ریشه‌های معادله را $\alpha$ و $\beta$ درنظر می‌گیریم و داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=4 \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4 \quad (I)$$

باتوجه به روابط ریشه‌ها داریم:

$$\begin{cases} \text{جمع ریشه‌ها}: \alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-(-m)}{۲}=\dfrac{m}{۲} \\ \text{ضرب ریشه‌ها}: \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m-۱}{۲} \end{cases} \quad (II)$$

$$(I),(II): \ (\frac{m}{۲})^۲-۲(\frac{m-۱}{۲})=۴ \Rightarrow \frac{m^۲}{۴}-m+۱=۴ \Rightarrow m^۲-۴m-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (m-۶)(m+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۶ \\ m=-۲ \end{cases}$$

طبق صورت مسئله ریشه‌ها حقیقی هستند، پس $\Delta>۰$ که به‌ازای $m=-۲$ برقرار است، پس $m=-۲$ قابل قبول است.

$$\Delta=b^۲-۴ac \Rightarrow \begin{cases} m=-۲ \Rightarrow \Delta=۲۸>۰ \ \checkmark \\ m=۶ \Rightarrow \Delta=-۴<۰ \ \times \end{cases}$$

**۵۲** ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم: هرگاه نمودار تابع درجه دومی بالای محور $x$ ها باشد آن تابع مثبت است.

$$\frac{x^۲}{x^۲-۴}-۳>۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۳x^۲+۱۲}{x^۲-۴}>۰ \Rightarrow \frac{-۲x^۲+۱۲}{x^۲-۴}>۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲x^۲+۱۲=۰ \Rightarrow x^۲=۶ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۶} \\ x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm۲ \end{cases}$$

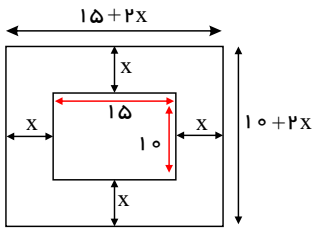
| x | $-\sqrt{۶}$ | $-۲$ | $۲$ | $\sqrt{۶}$ |
|---|---|---|---|---|
| $-۲x^۲+۱۲$ | − ۰ | + | + | + ۰ − |
| $x^۲-۴$ | + | + ۰ | − ۰ | + + |
| $\frac{-۲x^۲+۱۲}{x^۲-۴}$ | − ۰ | + تن | − تن | + ۰ − |

$$\Rightarrow x \in (-\sqrt{۶},-۲) \cup (۲,\sqrt{۶})$$

**۵۳** ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

فاصلهٔ هر لبهٔ عکس تا قاب را $x$ فرض می‌کنیم و با توجه به شکل داریم:




مساحت قاب: $(۱۵+۲x)(۱۰+۲x)=(۲x)^۲+(۱۰+۱۵)۲x+۱۰\times۱۵=۴x^۲+۵۰x+۱۵۰=۳۰۰$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۵۰x-۱۵۰=۰ \Rightarrow x^۲+۱۲/۵x-۳۷/۵=۰ \Rightarrow (x+۱۵)(x-۲/۵)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱۵=۰ \Rightarrow x=-۱۵ \quad \text{غ ق ق} \\ x-۲/۵=۰ \Rightarrow x=۲/۵ \end{cases}$$

محیط قاب: $[(۱۵+۲x)+(۱۰+۲x)]\times۲=[۲۰+۱۵]\times۲=۳۵\times۲=۷۰$

**۵۴** ۱ **۲** ۳ ۴

نکته: در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $\Delta=۰$ باشد، معادله ریشهٔ مضاعف $x=-\dfrac{b}{۲a}$ دارد.

با توجه به نکتهٔ فوق، داریم:

$$mx^۲-(۲m+۳)x+m+۲=۰ \ , \Delta=۰ \Rightarrow b^۲-۴ac=۰ \Rightarrow (۲m+۳)^۲-۴m(m+۲)=۰ \Rightarrow ۴m^۲+۱۲m+۹-۴m^۲-۸m=۰$$

$$\Rightarrow ۴m=-۹ \Rightarrow m=-\frac{۹}{۴}$$

حال ریشهٔ مضاعف را محاسبه می‌کنیم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-(۲m+۳)}{۲m}=\frac{۲m+۳}{۲m}=\frac{۲m}{۲m}+\frac{۳}{۲m}=۱+\frac{۳}{۲m}$$

با جایگذاری $m=-\dfrac{۹}{۴}$ داریم:

$$x=۱+\frac{۳}{۲(-\frac{۹}{۴})}=۱-\frac{۳}{\frac{۹}{۲}}=۱-\frac{۶}{۹}=۱-\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow k=\frac{۱}{۳}$$

خواستهٔ سوال برابر است با:

$$۱۲mk = ۱۲(-\frac{۹}{۴}) \times \frac{۱}{۳} = -۹$$

**۵۵** ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا علامت عبارت صورت را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{-x^۲ + ۴x - ۸}{-۲x^۲ + (m+۲)x - ۸} > ۰$$

صورت $\Delta = ۴^۲ - ۴(-۱)(-۸) = ۱۶ - ۳۲ = -۱۶ < ۰$

ضریب $x^۲ = -۱ < ۰$

عبارت $-x^۲ + ۴x - ۸$ همواره منفی است. پس نامعادلهٔ فوق زمانی برقرار است که مخرج همواره منفی باشد.

$$-۲x^۲ + (m+۲)x - ۸ < ۰ \Rightarrow \begin{cases} a < ۰ \Rightarrow -۲ < ۰ \checkmark \\ \Delta < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m+۲)^۲ - ۴ \times (-۲)(-۸) < ۰ \Rightarrow (m+۲)^۲ - ۶۴ < ۰$$

$$\Rightarrow (m+۲-۸)(m+۲+۸) < ۰ \Rightarrow (m-۶)(m+۱۰) < ۰$$

| $m$ | | $-۱۰$ | | $۶$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(m-۶)(m+۱۰)$ | $+$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ |

$$\Rightarrow -۱۰ < m < ۶ \rightarrow m = -۹, -۸, \cdots, ۵$$

تعداد مقادیر صحیح $m$ عبارتند از: ۱۵

**۵۶** ۱ ۲ ۳ ۴ با تجزیه صورت و مخرج کسر داریم:

$$\frac{x^۲(x^۲ - ۱۲x + ۳۶)}{(x-۱)(x-۵)} \leq ۰ \Rightarrow \frac{x^۲(x-۶)^۲}{(x-۱)(x-۵)} \leq ۰$$

عبارات $x^۲$ و $(x-۶)^۲$ همواره نامنفی هستند، پس تعیین علامت کسر به صورت زیر است:

| x | | ۰ | | ۱ | | ۵ | | ۶ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲$ | + | ۰ | + | + | + | + | + | ۰ | + |
| $(x-۶)^۲$ | + | + | + | + | + | + | + | ۰ | + |
| $(x-۱)(x-۵)$ | + | + | + | ۰ | − | ۰ | + | + | + |
| $\frac{x^۲(x-۶)^۲}{(x-۱)(x-۵)}$ | + | ۰ | + | ت ن | − | ت ن | + | ۰ | + |

توجه کنید که ریشه‌های صورت کسر را نیز باید درنظر بگیریم، پس جواب نامعادله به صورت زیر است.

$$x = ۰ \ , \ ۱ < x < ۵ \ , \ x = ۶ \Rightarrow x \in (۱ \ , \ ۵) \cup \{۰ \ , \ ۶\}$$

$$\text{اعداد طبیعی جواب} = ۲ \ , \ ۳ \ , \ ۴ \ , \ ۶ \Rightarrow \text{مجموع} = ۲ + ۳ + ۴ + ۶ = ۱۵$$

**۵۷** ۱ ۲ ۳ ۴ با یافتن ریشه‌های $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$(x-۲)(x-۳) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \ , \ x = ۳ \Rightarrow$$

| x | | ۲ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲ - ۵x + ۶$ | + | ۰ | − | ۰ | + |

برای اینکه نامعادلهٔ داده شده همواره برقرار باشد، تعیین علامت عبارت $۲x^۲ + ax + b$ باید عین تعیین علامت عبارت $x^۲ - ۵x + ۶$ باشد و چون ضریب $x^۲$ در $۲x^۲ + ax + b$ برابر ۲ است، پس این عبارت، ۲ برابر $x^۲ - ۵x + ۶$ است.

$$۲(x^۲ - ۵x + ۶) = ۲x^۲ - ۱۰x + ۱۲ = ۲x^۲ + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -۱۰ \\ b = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۱۰ + ۱۲ = ۲$$

**۵۸** ۱ ۲ ۳ ۴ در نامعادلهٔ درجهٔ دوم اگر $ax^۲ + bx + c = ۰$ دو ریشه $x_۱, x_۲$ داشته باشد و $x_۱ < x_۲$ جواب نامعادله یا به صورت $[x_۱, x_۲]$ یا $(x_۱, x_۲)$ یا $(-\infty, x_۱] \cup [x_۲, +\infty)$ یا $(-\infty, x_۱) \cup (x_۲, +\infty)$ خواهد بود.

$$(a-۳)x^۲ + ۵x + b - ۱ \geq x^۲ - ۴x \rightarrow (a-۴)x^۲ + ۹x + b - ۱ \geq ۰$$

با توجه به اینکه جواب نامعادله به‌صورت $[۳, +\infty)$ است لذا نامعادله نمی‌تواند درجه ۲ باشد بنابراین:

$$a - ۴ = ۰ \rightarrow a = ۴$$

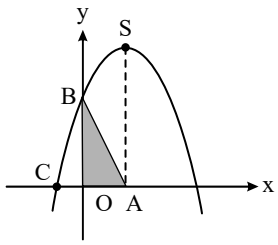
پس نامعادله به‌صورت $۹x + b - ۱ \geq ۰$ خواهد بود.

$$x \geq \frac{۱-b}{۹} \rightarrow \text{مجموعهٔ جواب} = [\frac{۱-b}{۹}, +\infty) \rightarrow \frac{۱-b}{۹} = ۳ \rightarrow ۱ - b = ۲۷ \rightarrow b = -۲۶$$

$$۵a + b = ۵ \times ۴ + (-۲۶) = -۶$$

**۵۹** ۱ ۲ ۳ ۴ نقطهٔ $B\begin{vmatrix} ۰ \\ ۷ \end{vmatrix}$ را در سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$۷ = a(۰)^۲ + b(۰) + c \Rightarrow c = ۷$




حال نقطهٔ $C\left|\begin{matrix}-۱\\ ۰\end{matrix}\right.$ را در سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$۰ = a(-۱)^۲ + b(-۱) + ۷ \Rightarrow a - b + ۷ = ۰ \ (*)$

مختصات نقطهٔ $A$ به‌صورت $A\left|\begin{matrix}-\frac{b}{۲a}\\ ۰\end{matrix}\right.$ است. زیرا طول نقطهٔ $A$ با طول رأس سهمی برابر است.

مساحت مثلث $ABO$ برابر ۱۰٫۵ است:

$$S_{\overset{\Delta}{ABO}} = ۱۰٫۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۷)\left(-\frac{b}{۲a}\right) = ۱۰٫۵ \Rightarrow ۷\left(-\frac{b}{۲a}\right) = ۲۱ \Rightarrow \frac{-b}{۲a} = ۳ \Rightarrow b = -۶a$$

$$(*) \Rightarrow a - b + ۷ = ۰ \xrightarrow{b=-۶a} a - (-۶a) + ۷ = ۰ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow b = ۶ \Rightarrow \frac{c-a}{b} = \frac{۷-(-۱)}{۶} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

**۶۰** ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم: در سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ رأس سهمی برابر است با:

$$\text{طول رأس سهمی} : \frac{-b}{۲a} \quad , \quad \text{عرض رأس سهمی} = \frac{-\Delta}{۴a} = -\frac{(b^۲ - ۴ac)}{۴a}$$

طول رأس سهمی $y = ۲x^۲ - mx + ۲$ برابر با $x_۱ = \frac{m}{۴}$ و طول رأس سهمی $y = ۳x^۲ - mx + ۳$ نیز برابر با $x_۲ = \frac{m}{۶}$ است. پس هر دو سهمی دارای طول رأس هم‌علامت هستند.

بنابراین کافی است عرض رأس دو سهمی هم‌علامت باشد. داریم:

$$y = ۲x^۲ - mx + ۲ \Rightarrow \text{عرض رأس سهمی} : y_۱ = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{m^۲ - ۱۶}{۸}$$

$$y = ۳x^۲ - mx + ۳ \Rightarrow \text{عرض رأس سهمی} : y_۲ = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{m^۲ - ۳۶}{۱۲}$$

برای این‌که $y_۲$ و $y_۱$ هم‌علامت باشند، باید داشته باشیم:

یعنی:

$$P(m) = \frac{(m^۲ - ۱۶)(m^۲ - ۳۶)}{۸ \times ۱۲} > ۰$$

| m | $-\infty$ | $-۶$ | $-۴$ | $۴$ | $۶$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^۲-۱۶$ | + | + | ۰ | − | ۰ | + |
| $m^۲-۳۶$ | + | ۰ | − | − | ۰ | + |
| P(m) | + | ۰ | − | ۰ | + | ۰ | − | ۰ | + |

یعنی $m \in (-\infty, -۶) \cup (-۴, ۴) \cup (۶, +\infty)$

بنابراین $m$ مقادیر صحیح $۶, -۵, -۴, ۴, ۵, ۶-$ را نمی‌توان اختیار کند.

**۶۱** ۱ ۲ **۳** ۴

$$\frac{x^۲ + ۴x - ۲۱}{۳x + ۱} \leq ۰ \Rightarrow \frac{(x+۷)(x-۳)}{۳x+۱} \leq ۰$$

| | $-۷$ | $-\frac{۱}{۳}$ | $۳$ | |
|---|---|---|---|---|
| x+۷ | − ۰ | + | + | + |
| x−۳ | − | − | − ۰ | + |
| ۳x+۱ | − | − ۰ | + | + |
| $\frac{(x+۷)(x-۳)}{۳x+۱}$ | − ۰ | + ت ن | − ۰ | + |

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -۷] \cup (-\frac{۱}{۳}, ۳] \Rightarrow \begin{cases} a = -۷ \\ b = -\frac{۱}{۳} \\ c = ۳ \end{cases} \Rightarrow a + b - c = \frac{-۳۱}{۳}$$

**۶۲** ۱ ۲ ۳ **۴**

میدانیم: اگر سهمی محور $x$ها را در دو نقطهٔ $b$ و $a$ قطع کند معادلهٔ سهمی $y = k(x-a)(x-b)$ است.

رأس سهمی روی محور تقارن سهمی قرار دارد.

$$\begin{cases} (-۱, ۰) \\ (۳, ۰) \end{cases} \Rightarrow y = k(x-۳)(x+۱)$$

چون سهمی محور $x$ها را در دو نقطهٔ ۳ و $-۱$ قطع کرده بنابراین خط تقارن سهمی خط $x = \frac{۳-۱}{۲} = ۱$ است که نقطه رأس سهمی روی آن قرار دارد. با توجه به ماکسیمم سهمی که ۴ است، نقطهٔ $(۱, ۴)$ روی سهمی قرار دارد.

$$y = k(x-۳)(x+۱) \xrightarrow{(۱,۴)} ۴ = k(۱-۳)(۱+۱) \Rightarrow ۴ = k(-۴) \Rightarrow k = -۱$$

$$y = -(x-۳)(x+۱) \Rightarrow y = -x^۲ + ۲x + ۳ \xrightarrow{x=۵} y = -۲۵ + ۱۰ + ۳ = -۱۲$$

**۶۳** ۱ ۲ ۳ ۴

راه اول: می‌دانیم ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ برابر $x = -\frac{b}{۲a}$ است.

پس ابتدا معادلهٔ داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

$$۳x^۲ + (m^۲ - ۱۳)x + ۲n + ۸ = ۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ مضاعف} = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow ۲ = -\frac{m^۲ - ۱۳}{۶} \Rightarrow -۱۲ = m^۲ - ۱۳ \Rightarrow m^۲ = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

با جای‌گذاری $m^۲ = ۱$ و $x = ۲$ در معادله داریم:

$$۳(۲)^۲ + (۱ - ۱۳)(۲) + ۲n + ۸ = ۰ \Rightarrow ۱۲ - ۲۴ + ۲n + ۸ = ۰ \Rightarrow ۲n = ۴ \Rightarrow n = ۲$$

$$\begin{cases} m = ۱, n = ۲ \Rightarrow ۲m + ۳n = ۸ \\ m = -۱, n = ۲ \Rightarrow ۲m + ۳n = ۴ \end{cases}$$

راه دوم: اگر $x = \alpha$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، معادله به‌صورت $a(x-\alpha)^۲ = ۰$ است.

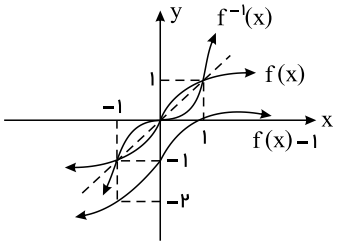
$$۳x^۲ + (m^۲ - ۱۳)x + ۲n + ۸ = ۳(x-۲)^۲ = ۳x^۲ - ۱۲x + ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} m^۲ - ۱۳ = -۱۲ \Rightarrow m = \pm ۱ \\ ۲n + ۸ = ۱۲ \Rightarrow n = ۲ \end{cases}$$

و ادامه مانند راه اول است.

**۶۴** ۱ ۲ **۳** ۴

$$\frac{x - f^{-۱}(x)}{f^۲(x) - f(x)} \geq ۰ \rightarrow \frac{x - f^{-۱}(x)}{f(x)(f(x)-۱)} \geq ۰$$

معادله خط $y = x$ است که با قرینهٔ $f(x)$ نسبت به این خط $f^{-۱}(x)$ را می‌یابیم.




| | $-\infty$ | | $-۱$ | | $۰$ | | $۱$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - f^{-۱}(x)$ | + | ○ | − | ○ | + | ○ | − | | |
| $f(x)$ | − | | − | | + | | + | | |
| $f(x)-۱$ | − | | − | | − | | + | | |
| | + | ○ | − | ت ن | − | ت ن | − | | |

**۶۵** ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{(x-۳)^۲\sqrt{x+۵}}{(x-۳)(x+۲)} \xrightarrow[\text{صورت و مخرج}]{\text{ریشه‌های}} x = ۳, x = -۵, x = -۲$$

به $\sqrt{x+۵}$ توجه کنید، اولاً زیرا رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، پس $x \geq -۵$، ثانیاً حاصل رادیکال با فرجهٔ زوج، منفی نمی‌شود. پس $\sqrt{x+۵} \geq ۰$ جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

| | $-۵$ | | $-۲$ | | $۳$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-۳$ | | − | | − | ○ | + |
| $\sqrt{x+۵}$ | ○ | + | | + | | + |
| $x+۲$ | | − | ○ | + | | + |
| $\frac{(x-۳)\sqrt{x+۵}}{x+۲}$ | ○ | + | ت ن | − | ت ن | + |

توجه: $x=۳$ هم‌ریشهٔ صورت است و هم‌مخرج

با توجه به جدول تعیین علامت، حاصل عبارت در فاصلهٔ $-۲<x<۳$ منفی است. برای پاسخ می‌نویسیم:

$$-۲<x<۳\Rightarrow -۲-\frac{۱}{۲}<x-\frac{۱}{۲}<۳-\frac{۱}{۲}\Rightarrow -\frac{۵}{۲}<x-\frac{۱}{۲}<\frac{۵}{۲}\Rightarrow |x-\frac{۱}{۲}|<\frac{۵}{۲}$$

**۶۶** ۱ ۲ **۳** ۴ کسر داده شده در ریشه‌های مخرج یعنی $x=a$ و $x=k$ تعریف نشده است. از آن‌جایی که عبارت $P$ در $x=a$ تغییر علامت نداده است، پس $x=a$ ریشهٔ صورت کسر نیز می‌باشد. همچنین علامت ضریب $x$ در صورت کسر (یعنی $a$) باید مثبت باشد.

$$x=a\xrightarrow{\text{در صورت}} a^۲+c=۰$$

$$x=a\xrightarrow{\text{در مخرج}} ۲a^۲-a^۲-۴=۰\Rightarrow a^۲=۴\xrightarrow{a>۰} a=۲$$

$$a^۲+c=۰\xrightarrow{a=۲} ۴+c=۰\Rightarrow c=-۴$$

$$a=۲\xrightarrow{\text{جایگذاری در مخرج}} ۲x^۲-۲x-۴=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۱=k \\ x=۲ \end{cases}$$

$$c+k=-۱-۴=-۵$$

**۶۷** ۱ **۲** ۳ ۴

می‌دانیم: فاصله ریشه‌ها از رأس سهمی یکسان است و رأس سهمی نقطهٔ $S\left|\begin{matrix}\frac{-b}{۲a}\\ \frac{-\Delta}{۴a}\end{matrix}\right.$ است.

معادلهٔ سهمی به ریشه‌های $x_۱$ و $x_۲$ برابر است با $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$

$$\text{طول رأس}=\frac{۱+۳}{۲}=۲\Rightarrow \frac{-b}{۲a}=۲\quad ,\quad y=a(x-۱)(x-۳)$$

$$\text{عرض از مبدأ}\ C=۲\Rightarrow ۲=a(۰-۱)(۰-۳)\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{-b}{۲a}=\frac{-b}{\frac{۴}{۳}}=\frac{-۳b}{۴}=۲\Rightarrow b=\frac{-۸}{۳}$$

$$y=ax^۲+bx+c\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x^۲-\frac{۸}{۳}x+۲$$

$$\Rightarrow y_{\min}=f(۲)=\frac{۲}{۳}\times ۲\times ۲-\frac{۸}{۳}\times ۲+۲=\frac{۸}{۳}-\frac{۱۶}{۳}+\frac{۶}{۳}=\frac{-۲}{۳}$$

**۶۸** ۱ ۲ **۳** ۴ با توجه به جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم $P=۲x^۲+bx+۵$ مشخص می‌شود که $x=۱$ جواب معادلهٔ $P=۰$ است.

$$۲x^۲+bx+۵=۰\xrightarrow{x=۱} ۲+b+۵=۰\Rightarrow b=-۷$$

$$P=۲x^۲-۷x+۵$$

مقدار $k$ جواب دیگر معادلهٔ $P=۰$ است.

$$۲x^۲-۷x+۵=۰\Rightarrow \Delta=۴۹-۴۰=۹\Rightarrow x=\frac{۷\pm ۳}{۴}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵}{۲} \\ x=۱ \end{cases}$$

پس $k=\frac{۵}{۲}$ است. حال عبارت $A=-۲kx^۲-۴b-۸$ را با توجه به $k=\frac{۵}{۲}$ و $b=-۷$ تعیین علامت می‌کنیم.

$$A=-۲\times\frac{۵}{۲}x^۲-۴(-۷)-۸=-۵x^۲+۲۰\xrightarrow{A=۰} -۵x^۲+۲۰=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲$$

| x | | $-۲$ | | $۲$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | − | ۰ | + | ۰ | − |

**۶۹** ۱ ۲ ۳ **۴**

$$(m-۱)x^۲+(m+۲)x+۲m=۰\Rightarrow a=m-۱, b=m+۲, c=۲m$$

برای اینکه معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز داشته باشد، باید $\Delta>۰$ باشد. بنابراین:

$$b^۲-۴ac>۰\Rightarrow (m+۲)^۲-۴(m-۱)(۲m)>۰\Rightarrow m^۲+۴m+۴-۸m^۲+۸m>۰\Rightarrow -۷m^۲+۱۲m+۴>۰$$

کافی است ریشه‌های معادلهٔ بالا را به دست آوریم:

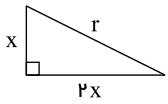
| m | | $-\frac{۲}{۷}$ | | $۲$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta$ | − | ۰ | + | ۰ | − |

$$\Rightarrow m\in(-\frac{۲}{۷},۲)$$

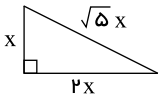
بنابراین $\beta=۲$ و $\alpha=-\frac{۲}{۷}$ است و $\beta-\alpha=۲+\frac{۲}{۷}=\frac{۱۶}{۷}$

**۷۰** ۱ ۲ ۳ ۴

**با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث روبه‌رو داریم:**




$$r^۲ = x^۲ + (۲x)^۲ = x^۲ + ۴x^۲ = ۵x^۲ \Rightarrow r = \sqrt{۵}x$$




**اندازهٔ محیط** $= x + ۲x + \sqrt{۵}x = (۳ + \sqrt{۵})x$

**اندازهٔ مساحت** $= \dfrac{۲x \times x}{۲} = x^۲$

**با توجه به مجموع اندازه‌های محیط و مساحت، طبق فرض داریم:**

$$x^۲ + (۳ + \sqrt{۵})x = ۱۰ + ۲\sqrt{۵}$$
$$x^۲ + (۳ + \sqrt{۵})x - (۱۰ + ۲\sqrt{۵}) = ۰$$
$$\Delta = (۳ + \sqrt{۵})^۲ + ۴(۱)(۱۰ + ۲\sqrt{۵}) = ۹ + ۶\sqrt{۵} + ۵ + ۴۰ + ۸\sqrt{۵}$$
$$= ۴۹ + ۱۴\sqrt{۵} + ۵ = (۷ + \sqrt{۵})^۲ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۷ + \sqrt{۵}$$

$$x_۱, x_۲ = \frac{-۳ - \sqrt{۵} \pm (۷ + \sqrt{۵})}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-۳ - \sqrt{۵} - ۷ - \sqrt{۵}}{۲} = \dfrac{-۱۰ - ۲\sqrt{۵}}{۲} = -۵ - \sqrt{۵} \quad \text{غ.ق.ق} \\ x_۲ = \dfrac{-۳ - \sqrt{۵} + ۷ + \sqrt{۵}}{۲} = \dfrac{۴}{۲} = ۲ \end{cases}$$

**۷۱** ۱ ۲ ۳ ۴

**ابتدا ریشه‌ها را بدست می‌آوریم.**

$$(x^۲ + x + ۱)(x^۲ - ۴x + ۳) = ۰$$

$$\begin{cases} x^۲ + x + ۱ = ۰ \to \Delta = ۱^۲ - ۴ \times ۱ \times ۱ = ۱ - ۴ = -۳ \to \Delta < ۰ \text{ ریشه ندارد} \\ x^۲ - ۴x + ۳ = ۰ \to (x - ۱)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \end{cases} \end{cases}$$

| x | | ۱ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲ + x + ۱$ | + | | + | | + |
| $x^۲ - ۴x + ۳$ | + | ۰ | − | ۰ | + |
| کل | + | ۰ | − | ۰ | + |

$x < ۱$ یا $x > ۳$

**۷۲** ۱ ۲ ۳ ۴

**باتوجه به رأس سهمی $(۲, -۲)$ و $(۰, ۱)$ داریم:**

$$y = ax^۲ + bx + c \xrightarrow{(۰,۱)} ۰ + ۰ + c = ۱ \Rightarrow \boxed{c = ۱}$$

$$\xrightarrow{(۲,-۲)} ۴a + ۲b + ۱ = -۲ \Rightarrow ۴a + ۲b = -۳ \quad (I)$$

$$\text{طول رأس} : \frac{-b}{۲a} = ۲ \Rightarrow -b = ۴a \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I, II} -b + ۲b = -۳ \Rightarrow \boxed{b = -۳}$$

$$-b = ۴a \Rightarrow ۳ = ۴a \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

$$y = \frac{۳}{۴}x^۲ - ۳x + ۱ \Rightarrow \frac{۳}{۴}x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \to \Delta = ۹ - ۴(\frac{۳}{۴})(۱) = ۹ - ۳ = ۶$$

$$x_۱, x_۲ = \frac{۳ \pm \sqrt{۶}}{\frac{۳}{۲}} \begin{cases} x_۱ = \dfrac{(۳ + \sqrt{۶})}{\frac{۳}{۲}} = \dfrac{۲(۳ + \sqrt{۶})}{۳} \\ x_۲ = \dfrac{(۳ - \sqrt{۶})}{\frac{۳}{۲}} = \dfrac{۲(۳ - \sqrt{۶})}{۳} \end{cases}$$

**در بین دو ریشه، علامت $y$ مخالف علامت $a$ ؛ یعنی منفی است.**

**۷۳** ۱ ۲ ۳ ۴

$$\underbrace{x^۲ + ۳x}_{\text{بخشی از اتحاد مربع دو جمله‌ای}} - ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۳x = ۲$$

$$x^۲ + ۳x = ۲ \xrightarrow[\text{معادله اضافه می‌کنیم}]{\text{به دو طرف } (\frac{۳}{۲})^۲} x^۲ + ۳x + (\frac{۳}{۲})^۲ = ۲ + (\frac{۳}{۲})^۲ \Rightarrow (x + \frac{۳}{۲})^۲ = ۲ + \frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x + \frac{۳}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۱۷}{۴}}$$

**۷۴** ۱ ۲ ۳ ۴

$$-۴x(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{x^۲}) \geq -۲x - \frac{۱}{x} - ۱ \Rightarrow -۲x - \frac{۴}{x} \geq -۲x - \frac{۱}{x} - ۱ \Rightarrow \frac{-۳}{x} + ۱ \geq ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{x} + \frac{x}{x} \geq ۰ \Rightarrow \frac{-۳ + x}{x} \geq ۰$$

| x | | ۰ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-۳+x$ | | ‖ | − | ۰ | + |
| x | | ۰ | + | | + |
| $\frac{-۳+x}{x}$ | | ت ن | − | ۰ | + |

$$\Rightarrow x \in [۳, +\infty)$$

**۷۵** ۱ ۲ ۳ ۴

$$|x^۲ - ۲x| < x \xrightarrow{\text{توان } ۲} (x^۲ - ۲x)^۲ < x^۲ \Rightarrow x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ < x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲(x^۲ - ۴x + ۳) < ۰ \Rightarrow x^۲(x - ۱)(x - ۳) < ۰$$

| x | | ۰ | | ۱ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲$ | | ۰ | + | | + | | + |
| $(x-۱)(x-۳)$ | | | + | ۰ | − | ۰ | + |
| کل | | ۰ | + | ۰ | − | ۰ | + |

$$\Rightarrow x \in (۱, ۳)$$

**۷۶** ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{۲x^۲ - ۱۰x}{x^۲ - ۵x} = x - ۳ \Rightarrow \frac{۲(x^۲ - ۵x)}{x^۲ - ۵x} = x - ۳ \Rightarrow ۲ = x - ۳ \Rightarrow x = ۵$$

این جواب مخرج را صفر می‌کند؛ بنابراین معادله ریشه ندارد.

**۷۷** ۱ ۲ ۳ ۴

$$\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right| > ۱ \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-۲}{۲x+۱} > ۱ \Rightarrow \frac{-x-۳}{۲x+۱} > ۰ \quad (۱) \\ \frac{x-۲}{۲x+۱} < -۱ \Rightarrow \frac{۳x-۱}{۲x+۱} < ۰ \quad (۲) \end{cases}$$

۱)

| x | | $-۳$ | | $-\frac{۱}{۲}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x-۳$ | + | ۰ | − | | − |
| $۲x+۱$ | − | | − | ۰ | + |
| کل | − | ۰ | + ت ن | | − |

$$\Rightarrow x \in (-۳, -\frac{۱}{۲})$$

۲)

| x | | $-\frac{۱}{۲}$ | | $\frac{۱}{۳}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۳x-۱$ | − | | − | ۰ | + |
| $۲x+۱$ | − | ۰ | + | | + |
| کل | + ت ن | | − | ۰ | + |

$$\Rightarrow x \in (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳})$$

$$\xrightarrow{۱ \cup ۲} (-۳, -\frac{۱}{۲}) \cup (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳})$$

**۷۸** ۱ ۲ ۳ ۴

در معادله‌ی درجه دو $ax^۲ + bx + c = ۰$ اختلاف ریشه‌ها برابر است با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$|x_۲ - x_۱| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$۳x^۲ - ۱۵x + m = ۰$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۲\Rightarrow\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{|a|}=۲\Rightarrow\frac{\sqrt{(-۱۵)^۲-(۴\times۳\times m)}}{|۳|}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۱۵^۲-۱۲m}}{۳}=۲\Rightarrow\sqrt{۲۲۵-۱۲m}=۶\xrightarrow{\text{توان }۲}۲۲۵-۱۲m=۳۶$$

$$\Rightarrow ۱۸۹=۱۲m\Rightarrow m=\frac{۱۸۹}{۱۲}=\frac{۶۳}{۴}$$

**۷۹** ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}\Rightarrow\frac{ax-a^۲+bx-b^۲}{ab}=\frac{ax-a^۲+bx-b^۲}{x^۲-(a+b)x+ab}$$

به تساوی کسری رسیدیم که صورت‌های آن‌ها با هم برابرند پس دو حالت داریم:

یا صورت‌ها صفرند:

$$ax-a^۲+bx-b^۲=۰\Rightarrow ax+bx=a^۲+b^۲\Rightarrow x(a+b)=a^۲+b^۲\Rightarrow\boxed{x=\frac{a^۲+b^۲}{a+b}}$$

یا مخرج کسرها با هم برابرند:

$$x^۲-(a+b)x+ab=ab\Rightarrow x^۲-(a+b)x=۰\Rightarrow x(x-(a+b))=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=۰}\\ x-(a+b)=۰\rightarrow\boxed{x=a+b}\end{cases}$$

پس سه جواب داریم

**۸۰** ۱ ۲ **۳** ۴

$$\left.\begin{matrix}y=۲x\xrightarrow{\text{توان }۲}y^۲=(۲x)^۲=۴x^۲\\ y^۲=x^۳\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow x^۳=۴x^۲\Rightarrow x^۳-۴x^۲=۰\xrightarrow{\text{فاکتور }x^۲}x^۲(x-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲=۰\Rightarrow x=۰\\ x-۴=۰\Rightarrow x=۴\end{cases}$$

برای $y$ داریم:

$$y=۲x\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow\frac{x+y}{۲}=\frac{۰+۰}{۲}=۰\\ x=۴\Rightarrow y=۸\Rightarrow x+y=\frac{۴+۸}{۲}=۶\end{cases}$$

**۸۱** ۱ **۲** ۳ ۴

در معادله‌ی درجه دو $ax^۲+bx+c=۰$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با: $\frac{c}{a}$

$$mx^۲+۳x+m^۲=۲\Rightarrow mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰\rightarrow\begin{cases}c=m^۲-۲\\ a=m\end{cases}$$

ریشه‌ها معکوس هم‌اند پس حاصل‌ضرب آن‌ها یک است پس $\frac{c}{a}=۱$ است.

$$\frac{c}{a}=۱\Rightarrow\frac{m^۲-۲}{m}=۱\Rightarrow m^۲-۲=m\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\xrightarrow{\text{تجزیه‌ی جمله مشترک}}(m-۲)(m+۱)=۰$$

$$\begin{cases}m-۲=۰\Rightarrow m=۲\\ m+۱=۰\Rightarrow m=-۱\end{cases}$$

هردو جواب بدست آمده را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}m=۲\rightarrow ۲x^۲+۳x+۲=۰\rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=۳^۲-(۴\times۲\times۲)=۹-۱۶=-۷\Rightarrow\Delta<۰:\text{ ریشه ندارد}\\ m=-۱\rightarrow -x^۲+۳x-۱=۰\rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=۳^۲-(۴\times(-۱)\times(-۱))=۹-۴=۵\Rightarrow\Delta>۰:\text{ ریشه‌ی حقیقی دارد}\end{cases}$$

پس $m=-۱$ پاسخ است.

**۸۲** ۱ ۲ ۳ **۴** دو نقطه $(۳,۰)$ و $(-۱,۰)$ نقاط برخورد منحنی با محور $x$ها هستند پس ریشه‌های معادلهٔ سهمی ۳ و $-۱$ هستند و معادلهٔ سهمی را می‌توان اینگونه نوشت:

$$y=a(x-۳)(x+۱)=a(x^۲-۲x-۳)\xrightarrow[\text{رأس سهمی}]{(۱,-۲)}-۲=a(۱^۲-۲-۳)$$

$$\Rightarrow -۲=a(-۴)\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x^۲-۲x-۳)=\frac{۱}{۲}x^۲-x-\frac{۳}{۲}$$

**۸۳** ۱ ۲ **۳** ۴ سهمی از نقاط $(۰,۱)$ ، $(۱,-۱)$ می‌گذرد؛ معادله سهمی را $y=ax^۲+bx+c$ فرض می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{(0,1)} 1 = a\times 0^2 + b\times 0 + c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = ax^2 + bx + 1\\ \xrightarrow{(1,-1)} -1 = a\times 1^2 + b\times 1 + 1 \Rightarrow a + b = -2\\ \text{راس سهمی}: \xrightarrow{x=1} \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow -b = 2a \Rightarrow b = -2a\end{array}\right\} a = 2\ ,\ b = -4 \Bigg\} \Rightarrow y = 2x^2 - 4x + 1$$

**۸۴** ۱ ۲ ۳ ۴

عبارت درجهٔ دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $\Delta < 0$ , $a < 0$ همواره منفی است.

عبارت $-x^2 - x - 1$ همواره منفی است؛ چون در آن $\Delta < 0$ , $a < 0$ است؛ پس می‌توان طرفین نامعادله را در آن ضرب کرد؛ در این صورت جهت نامعادله عوض می‌شود:

$$\xrightarrow{\times(-x^2-x-1)} ax^2 - \frac{1}{2}ax - 3 \geq -3x^2 - 3x - 3 \to (a+3)x^2 + (3 - \frac{1}{2}a)x \geq 0$$

برای آنکه نامعادلهٔ فوق همواره برقرار باشد باید $\Delta \leq 0$ و ضریب $x^2$ مثبت باشد:

$$\Delta \leq 0 \to (3 - \frac{1}{2}a)^2 - 4(a+3)\times 0 \leq 0 \to (3 - \frac{1}{2}a)^2 \leq 0$$

از آنجا که عبارت $(3 - \frac{1}{2}a)^2$ نامنفی است، فقط حالت تساوی در نامساوی فوق برقرار است:

$$(3 - \frac{1}{2}a)^2 = 0 \to 3 - \frac{1}{2}a = 0 \to 3 = \frac{1}{2}a \to a = 6 \quad (1)$$

از طرفی ضریب $x^2$ باید مثبت باشد:

$$a + 3 > 0 \to a > -3 \quad (2)$$

و اشتراک ۱ و ۲ عبارتست از : $a = 6$

**۸۵** ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $ax^2 + bx + c = 0$ و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوی $x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$ برابر است با $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بررسی گزینه‌ها:

۱) $6x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} = |x_2 - x_1| = |\sqrt{3} + \sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

۲) $2x^2 - 30 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 30 \Rightarrow x = \pm\sqrt{15} \Rightarrow |x_2 - x_1| = |\sqrt{15} + \sqrt{15}| = 2\sqrt{15}$

۳) $(2x-3)^2 - 24 = 12 \Rightarrow (2x-3)^2 = 36 \Rightarrow 2x - 3 = \pm 6$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 6 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = 4/5 \\ 2x - 3 = -6 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -1/5 \end{cases}$$

$$|x_1 - x_2| = |4/5 + 1/5| = 6$$

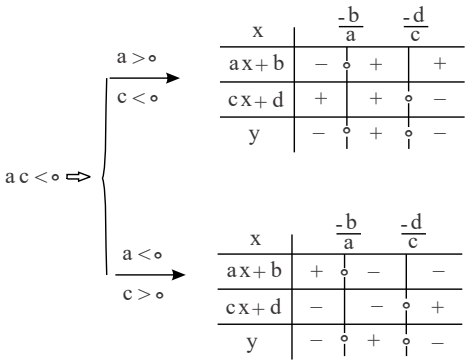
۴) $x^2 - 2x + 3 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

$$|x_1 - x_2| = |1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۲ پاسخ تست است.

**۸۶** ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: تعیین علامت چندجمله‌ای $y=(ax+b)(cx+d)$ به‌صورت زیر است:




می‌دانیم: تعیین علامت چندجمله‌ای $y=(ax+b)(cx+d)$ به‌صورت زیر است:

با توجه به کادر بالا داریم:

$$\begin{cases}\frac{-b}{a}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow ۲b=a\\ \frac{-d}{c}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow -۵d=۳c\end{cases}\Rightarrow \frac{ad}{bc}=\frac{۲b\times d}{b\times\frac{-۵d}{۳}}=\frac{-۶}{۵}$$

**۸۷** ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ پس از مربع کامل شدن به فرم $a(x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{\Delta}{۴a}=۰$ درمی‌آید.

بنابراین:

$$۲x^۲-۸x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-۸\\ c=-۱\end{cases}$$

$$a(x-x_۰)^۲+y_۰=a(x+\frac{b}{۲a})^۲-\frac{\Delta}{۴a}\Rightarrow\begin{cases}x_۰=\frac{-b}{۲a}\\ y_۰=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-b^۲+۴ac}{۴a}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_۰=\frac{-(-۸)}{۲(۲)}=\frac{۸}{۴}=۲\\ y_۰=\frac{-(-۸)^۲+۴(۲)(-۱)}{۴(۲)}=\frac{-۶۴-۸}{۸}=\frac{-۷۲}{۸}=-۹\end{cases}$$

$$x_۰+y_۰=۲-۹=-۷$$

**۸۸** ۱ **۲** ۳ ۴

$$۲x+y<۷\xrightarrow{\times ۳}۶x+۳y<۲۱$$

$$+\begin{cases}۶x+۳y<۲۱\\ ۴-۳y<۲x+۱\end{cases}$$

$$۶x+۴<۲x+۲۲\Rightarrow ۴x<۱۸\Rightarrow x<\frac{۱۸}{۴}\Rightarrow x\le ۴$$

مقادیر صحیح و نامنفی برای $x$ عبارتند از ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ که ۵ تا هستند.

**۸۹** ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

می‌دانیم: هرگاه در سهمی به معادلهٔ $ax^۲+bx+c$، $\Delta=۰$ شود، سهمی محور $x$ها را فقط در یک نقطه به طول $x=\frac{-b}{۲a}$ قطع می‌کند. (یک ریشهٔ مضاعف دارد)

$$y=ax^۲+bx+c\xrightarrow[y=\frac{-۴}{b}]{x=۰}c=\frac{-۴}{b}$$

$$\Delta=۰\Rightarrow b^۲-۴ac=۰\Rightarrow b^۲-۴(a)(\frac{-۴}{b})=۰\Rightarrow b^۲+\frac{۱۶a}{b}=۰\Rightarrow b^۳+۱۶a=۰$$

$$x=\frac{-(-b)}{۲a}=-۲\Rightarrow b=-۴a$$

$$b^۳+۱۶a=۰\xrightarrow{b=-۴a}-۶۴a^۳+۱۶a=۰\Rightarrow ۱۶a(-۴a^۲+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰ \quad \text{غ ق ق}\\ -۴a^۲=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2} \xrightarrow[a<0]{\text{سهمی پایین محور ها}} a = \frac{-1}{2}$$

**۹۰** ۱ ۲ ۳ ۴

$$\frac{x(x-3)^2+4}{x^2-6x+11} < 2 \Rightarrow \frac{x(x-3)^2+4}{x^2-6x+11} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{x(x-3)^2+4-2x^2+12x-22}{x^2-6x+11} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-3)^2-(2x^2-12x-18)}{x^2+6x+11} < 0 \Rightarrow \frac{x(x-3)^2-2(x^2+6x-9)}{x^2-6x+11} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-3)^2-2(x-3)^2}{x^2-6x+11} < 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2(x-2)}{x^2-6x+11} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ (x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x^2-6x+11 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\Delta = 36-4(1)(11) = 36-44 = -8 < 0 \\ a = 1 > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \text{همواره مثبت} \end{cases}$$

| | | ۲ | ۳ | |
|---|---|---|---|---|
| $(x-3)^2$ | + | + | 0 | + |
| $x-2$ | − | 0 | + | + |
| $x^2-6x+11$ | + | + | + | + |
| $\frac{(x-3)^2(x-2)}{x^2-6x+11}$ | − | 0 | + | 0 + |

$\Rightarrow x < 2$

**۹۱** ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به مجموعهٔ جواب، ریشهٔ معادله صورت $x = -3$ و ریشه‌های مخرج $-5, 2$ است. بنابراین معادلهٔ مخرج به صورت $(x-2)(x+5)$ است. بنابراین:

$$(x+5)(x-2) = x^2+3x-10 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -10 \end{cases} \Rightarrow ab = -30$$

**۹۲** ۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: رأس سهمی به معادلهٔ $ax^2+bx+c$ نقطهٔ $S\left|\begin{array}{l}-\frac{b}{2a} \\ f(-\frac{b}{2a})\end{array}\right.$ است.

$$y = ax^2+bx+c$$

$$\xrightarrow{(1,0)} a+b+c = 0$$

$$\xrightarrow{(3,0)} 9a+3b+c = 0$$

$$\xrightarrow{8a+2b=0 \quad (I)}$$

$$x_S = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$\xrightarrow{(2,-2)} \begin{cases} 4a+2b+c = -2 \\ a+b+c = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{3a+b=-2 (II)}$$

$$\xrightarrow{I,II} \begin{cases} 8a+2b = 0 \\ 3a+b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a+2b = 0 \\ 6a+2b = -4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{2a=4 \Rightarrow a=2}$$

**۹۳** ۱ ۲ ۳ ۴

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{x} = A \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2y+y^2x+2xy\sqrt{xy} = A^2 \Rightarrow xy(x+y+2\sqrt{xy}) = A^2$$

$$\Rightarrow 4(6+4) = A^2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{40} \xrightarrow{A>0} A = \sqrt{40}$$

**۹۴** ۱ ۲ ۳ ۴

$$x-3 \le 2x^2-x-3 \le 5x-1$$

$$(I): \; x-3 \le 2x^2-x-3 \Rightarrow 2x^2-x-3-x+3 \ge 0 \Rightarrow 2x^2-2x \ge 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-1) \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

| | ۰ | | ۱ | |
|---|---|---|---|---|
| $۲x^۲-۲x$ | + | ۰ − | ۰ | + |

$\Rightarrow x \in (-\infty, ۰] \cup [۱, +\infty) \quad (I)$

$(II): \; ۲x^۲ - x - ۳ \le ۵x - ۱ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۳ - ۵x + ۱ \le ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۶x - ۲ \le ۰$

$$\Rightarrow x^۲ - ۳x - ۱ \le ۰ \Rightarrow \begin{cases} \Delta = ۹ - ۴(۱)(-۱) = ۹ + ۴ = ۱۳ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۱۳ \\ x = \dfrac{۳ \pm \sqrt{۱۳}}{۲} \end{cases}$$

| | $\frac{۳-\sqrt{۱۳}}{۲}$ | | $\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x^۲-۳x-۱$ | + | ۰ − | ۰ | + |

$\Rightarrow x \in [\dfrac{۳ - \sqrt{۱۳}}{۲}, \dfrac{۳ + \sqrt{۱۳}}{۲}] \quad (II)$

$(I) \wedge (II): [\dfrac{۳ - \sqrt{۱۳}}{۲}, ۰] \cup [۱, \dfrac{۳ + \sqrt{۱۳}}{۲}]$ : ۴ عدد صحیح ۰ و ۱ و ۲ و ۳ در این مجموعه جواب قرار دارد.

**۹۵** ۱ ۲ **۳** ۴

**می‌دانیم:**

> تابع در اطراف ریشه‌های ساده و مکرّر مرتبهٔ فرد، تغییر علامت می‌دهد.
> و در اطراف ریشه های مضاعف و مکرّر مرتبهٔ زوج، تغییر علامت نمی‌دهد.

بنابراین $x = -۲$ ریشهٔ مضاعف و $x = ۱$ ریشهٔ ساده است و داریم:

$$y = (x+۲)^۲(x-۱) = (x^۲ + ۴x + ۴)(x-۱) = x^۳ + ۴x^۲ + ۴x - x^۲ - ۴x - ۴$$

$$\Rightarrow y = x^۳ + ۳x^۲ - ۴$$

**۹۶** **۱** ۲ ۳ ۴ سهمی موردنظر با محور $x$ فقط در نقطه‌ای به طول $x = -۲$ مشترک است، یعنی یک ریشه مضاعف دارد و معادلهٔ آن به شکل زیر است:

$$y = a(x+۲)^۲$$

سهمی، محور عرض‌ها را در $-\dfrac{۴}{b}$ قطع می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} x = ۰ \Rightarrow y = ۴a = -\frac{۴}{b} \Rightarrow b = -\frac{۱}{a} \\ y = a(x+۲)^۲ = ax^۲ + ۴ax + ۴a = ax^۲ - bx + c \Rightarrow ۴a = -b \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۴a = -(-\frac{۱}{a}) \Rightarrow a^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{سهمی پایین محور } x \text{ ها قرار دارد.}} a = -\frac{۱}{۲}$$

**۹۷** ۱ ۲ ۳ **۴** نامعادلهٔ اصلی را به‌صورت دو نامعادله می‌نویسیم و سپس بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$(۱) \quad \frac{۳x-۱}{۲x+۱} > ۱ \Rightarrow \frac{۳x-۱}{۲x+۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۳x-۱-(۲x+۱)}{۲x+۱} > ۰ \Rightarrow \frac{x-۲}{۲x+۱} > ۰$$

برای به دست آوردن جواب جدول تعیین علامت زیر را درنظر بگیرید:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{۱}{۲}$ | | $۲$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-۲$ | − | | | − | ۰ | + |
| $۲x+۱$ | − | | ۰ | + | | + |
| $\frac{x-۲}{۲x+۱}$ | + | | ت ن | − | ۰ | + |

باتوجه به جدول تعیین علامت داریم:

$(۱)$ جواب : $x > ۲$ یا $x < -\dfrac{۱}{۲}$

$$(۲) \quad \frac{۳x-۱}{۲x+۱} < ۲ \Rightarrow \frac{۳x-۱-۲(۲x+۱)}{۲x+۱} < ۰ \Rightarrow \frac{-x-۳}{۲x+۱} < ۰ \Rightarrow \frac{x+۳}{۲x+۱}$$

برای به دست آوردن جواب جدول تعیین علامت زیر را درنظر بگیرید:

| $x$ | $-\infty$ | $-۳$ | | $-\frac{۱}{۲}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+۳$ | $-$ | ۰ | $+$ | | $+$ |
| $۲x+۱$ | $-$ | | $-$ | ۰ | $+$ |
| $\frac{x+۳}{۲x+۱}$ | $+$ | ت ن | $-$ | ت ن | $+$ |

باتوجه به جدول تعیین علامت جواب (۲) برابر است با:

$$\text{جواب (۲)} : x < -۳ \text{ یا } x > -\frac{۱}{۲}$$

جواب نهایی برابر است با:

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱),(۲)}} x < -۳ \text{ یا } x > ۲$$

پس اعداد $-۳, -۲, -۱, ۰, ۱$ و ۲ یعنی ۶ عدد صحیح در این نامعادله صدق نمی‌کند.

**۹۸** ۱ ۲ ۳ **۴** طول رأس سهمی برابر است با:

$$x = \frac{-b'}{۲a'} = \frac{-۲a}{۲a} = -۱$$

با جای‌گذاری $x = -۱$ در ضابطهٔ سهمی، عرض رأس آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{x=-۱} y = a(-۱)^۲ + ۲a(-۱) - ۳ \Rightarrow y = -a - ۳$$

بنابراین مختصات رأس سهمی $(-۱, -a-۳)$ است.

چون رأس سهمی روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم است، پس:

$$\xrightarrow{y=x} -a - ۳ = -۱$$

$$\Rightarrow -a = ۲ \Rightarrow a = -۲ \quad (۱)$$

مقدار $a = -۲$ را در ضابطهٔ سهمی جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\xrightarrow{a=-۲} y = -۲x^۲ - ۴x - ۳ \xrightarrow[\text{محل برخورد سهمی با محور } y \text{ ها}]{x=۰}$$

$$y = -۳ \Rightarrow b = -۳ \quad (۲)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$a \times b = (-۲)(-۳) = ۶$$

**۹۹** ۱ **۲** ۳ ۴

در سهمی $y = a'x^۲ + b'x + c'$، خط تقارن $x = -\frac{b'}{۲a'}$ است.

در سهمی داده شده خط تقارن به‌صورت $x = -\frac{a}{۲ \times ۲}$ است:

$$\frac{-a}{۲ \times ۲} = -\frac{۵}{۴} \Rightarrow a = ۵$$

سهمی محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ قطع می‌کند پس سهمی از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ می‌گذرد. بنابراین:

$$y = ۲x^۲ + ۵x + b \xrightarrow{(\frac{۱}{۲}, ۰)} ۰ = ۲ \times (\frac{۱}{۲})^۲ + ۵ \times \frac{۱}{۲} + b \Rightarrow b = -۳$$

$$\frac{a}{b} = \frac{۵}{-۳} = -\frac{۵}{۳}$$

**۱۰۰** ۱ ۲ ۳ ۴ **۱**

رأس سهمی روی نیم‌ساز ربع اول است، پس مختصات آن‌را به صورت $S(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم و چون سهمی محور $x$ها را در نقاط $-۱$ و ۳ قطع کرده‌اند، پس معادلهٔ آن را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y = a(x+۱)(x-۳)$$

محل رأس سهمی روی محور تقارن سهمی است، پس میانگین طول نقاط برخورد با محور طول‌ها، طول رأس سهمی را نتیجه می‌دهد:

$$x_s = \frac{۳ + (-۱)}{۲} = ۱$$

رأس سهمی روی $\begin{vmatrix} ۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$ نیم‌ساز ناحیهٔ اول است؛ پس نقطهٔ در سهمی صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{\binom{1}{1}} 1 = a(1+1)(1-3) \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3) \xrightarrow{x=0} y = \frac{3}{4}$$

# پاسخ‌نامه کلیدی

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |