



نام و نام خانوادگی: سهیل حاج کرم

نام آزمون: ۱۰۰ تست فیزیک فصل یک دوازدهم

شتاب ثابت



فصل 1: حرکت در راستای خط راست

حرکت با شتاب ثابت مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

1 متحرکی با شتاب ثابت از حال سکون به حرکت درمی آید و مسافتی را در مسیر مستقیم طی می کند. اگر در انتهای مسیر سرعت آن به $12 \frac{m}{s}$ برسد، سرعت آن در وسط مسیر چند متر بر ثانیه بوده است؟
متوسط - سنجش - ۱۳۹۴

۴ $6\sqrt{2}$

۳ ۶

۲ $3\sqrt{2}$

۱ ۳

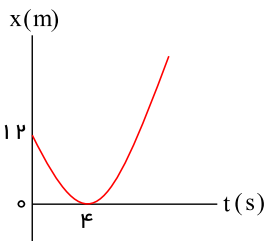
پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ اگر سرعت اولیه را v_0 و سرعت در نیمه مسیر را v_1 و سرعت در انتهای مسیر را v_2 فرض کنیم، می توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^2 - v_0^2 = 2a\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow v_1^2 - 0 = ax \\ v_2^2 - v_1^2 = 2a\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = ax \end{array} \right\} \Rightarrow v_1^2 = v_2^2 - v_0^2$$

$$\Rightarrow 2v_1^2 = v_2^2 \Rightarrow \sqrt{2}v_1 = v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

نمودار مکان-زمان یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۲ مطابق شکل زیر، نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی است. سرعت متحرک در لحظه $t = 8s$ چند متر بر ثانیه است؟
متوسط - سراسری - ۱۳۹۸



۱ ۳

۲ ۴

۳ ۶

۴ ۱۲

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱

$$\text{معادله مستقل از شتاب: } \Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow 0 - 12 = \frac{0 + v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = -6m/s$$

با توجه به شکل سهمی و اینکه رأس سهمی در $t = 4$ است، سرعت در $t = 8s$ هم اندازه سرعت در لحظه صفر است، پس: $v = +6m/s$

مقایسه چند حرکت و شتاب نسبی

۳ قطار A به طول ۲۰۰ متر با سرعت ثابت $40 \frac{m}{s}$ در حال حرکت است. قطار B به طول ۲۲۵ متر که روی ریل مجاور توقف کرده است، به محض اینکه قطار A کاملاً از آن عبور کرد، با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ در همان جهت حرکت قطار A شروع به حرکت می کند و سرعت خود را به $50 \frac{m}{s}$ می رساند و با همان سرعت حرکت خود را ادامه می دهد. قطار B چند ثانیه پس از شروع حرکت، از قطار A سبقت گرفته و از کنار آن کاملاً عبور می کند؟
سخت - سراسری - ۱۳۹۲

۴ ۱۰۵

۳ ۸۰

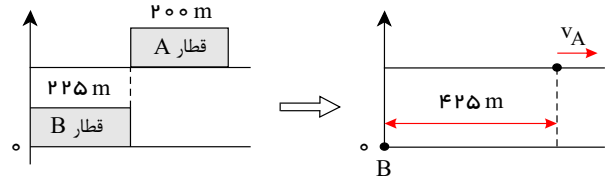
۲ ۸۲٫۵

۱ ۵۷٫۵

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ انتهای قطار B در حالت سکون را به عنوان مبدأ مختصات در نظر می گیریم. چون می خواهیم لحظه ای را بیابیم که قطار B به طور کامل از قطار A سبقت گرفته است، بنابراین معادله حرکت قطار B را نسبت به نقطه انتهایی آن و معادله حرکت قطار A را نسبت به نقطه ابتدایی آن می نویسیم. در این صورت در لحظه ای که قطار B به طور کامل از قطار A

سبقت می گیرد، این دو نقطه برهم منطبق می شوند.

$$x_A = 40t + 425 \quad (I)$$



حرکت قطار B از دو قسمت تشکیل شده است، ابتدا با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می کند تا سرعتش به $50 \frac{m}{s}$ برسد. قطار B این کار را در مدت $t = \frac{v}{a} = \frac{50}{2} = 25s$ انجام می دهد و

طی آن مسافت $625m = \frac{v^2}{2a} = \frac{50^2}{2 \times 2}$ را طی می کند. سپس با سرعت $50 \frac{m}{s}$ به مسیر خود ادامه می دهد. دقت کنید طی $25s$ ابتدایی حرکت، قطار B از قطار A سبقت نمی گیرد؛ بنابراین:

$$x_B = 50(t - 25) + 625 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} x_A = x_B \Rightarrow 40t + 425 = 50(t - 25) + 625 \Rightarrow 10t = 1050 \Rightarrow t = 105s$$

توقف - مقایسه جابه جایی و مسافت

۴ اتومبیلی روی یک خط راست با سرعت $108 \frac{km}{h}$ در حال حرکت است. راننده با دیدن مانعی در فاصله $165m$ ، با شتاب ثابت $3 \frac{m}{s^2}$ ترمز می کند و درست جلوی مانع می ایستد. اگر زمان واکنش راننده t_1 و زمانی که حرکت اتومبیل کندشونده بوده t_2 باشد، $\frac{t_2}{t_1}$ کدام است؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۶

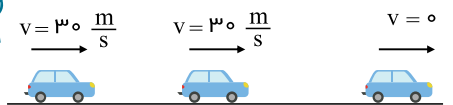
۲۰ ۴

۱۵ ۳

۱۰ ۲

۵ ۱

پاسخ: ۴ در مدت زمان واکنش راننده (t_1) متحرک با سرعت ثابت ($v = 108 \frac{km}{h} = 30 \frac{m}{s}$) حرکت می کند و در مدت زمان ترمز (t_2) اتومبیل با شتاب ثابت (کندشونده) حرکت می کند.



$$\underbrace{\Delta x_1, t_1 \quad \Delta x_2, t_2, a_2 = -3 \frac{m}{s^2}}_{\Delta x \text{ کل} = 165m}$$

($a = 0$) حرکت یکنواخت شتابدار با شتاب ثابت

ابتدا جابه جایی متحرک در مرحله دوم را با استفاده از رابطه $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ محاسبه می کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 900 = 2(-3)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 150m$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 165m \Rightarrow \Delta x_1 + 150 = 165 \Rightarrow \Delta x_1 = 15m$$

$$\Delta x_1 = vt_1 \Rightarrow 15 = 30t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}s$$

برای محاسبه زمان حرکت متحرک در مرحله دوم از معادله $v = at + v_0$ استفاده می کنیم.

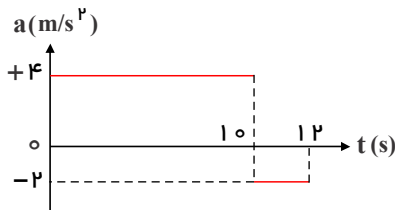
$$v = a_2 t_2 + v_0 \xrightarrow{\substack{v=0 \\ v_0=30 \\ a_2=-3}} 0 = (-3)t_2 + 30 \Rightarrow t_2 = 10s$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \text{ برابر است با: } \frac{t_2}{t_1}$$

سطح زیر نمودار $a-t$ و رسم نمودار از روی نمودار

۵) نمودار شتاب - زمان متحرکی که سرعتش در مبداء زمان $5 \frac{m}{s}$ است، به صورت شکل زیر می باشد، سرعت متوسط متحرک در این ۱۲ ثانیه، چند متر بر ثانیه است؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۴



- ۱) ۱۳٫۵
۲) ۱۴
۳) ۲۷
۴) ۲۸

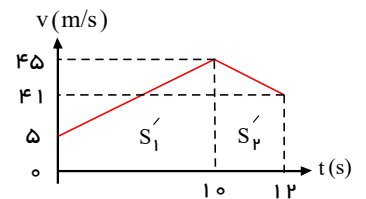
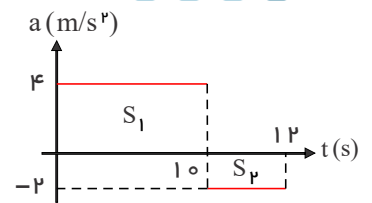
پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ برای حل این تست بهترین روش رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار شتاب - زمان می باشد.

$$S_1 = \frac{\Delta v}{(t_1 - t_0)} = v_{10} - v_0 \Rightarrow 40 = v_{10} - 5 \Rightarrow v_{10} = 45$$

$$S_2 = \frac{\Delta v}{(t_2 - t_1)} = v_{12} - v_{10} \Rightarrow -4 = v_{12} - 45 \Rightarrow v_{12} = 41$$

$$\Delta x = S'_1 + S'_2 = \frac{(5 + 45) \times 10}{2} + \frac{(45 + 41) \times 2}{2} = 336m$$

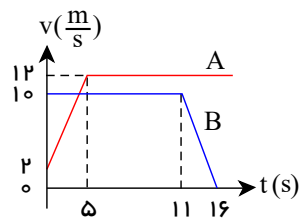
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{336}{12} = 28 \frac{m}{s}$$



نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۶) نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می کنند، مطابق شکل مقابل است. اگر در لحظه $t = 0$ هر دو در مکان $x = 0$ قرار داشته باشند، چند ثانیه پس از آن، دو متحرک به هم می رسند؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۰



- ۱) ۷٫۵
۲) ۸
۳) ۱۲٫۵
۴) ۱۲

پاسخ: ۴ ۳ ۲ ۱ در ابتدا متحرک A به دلیل سرعت کمتر از متحرک B عقب می افتد. جابه جایی متحرکها را تا لحظه $t = 11s$ به دست می آوریم.

$$\begin{cases} \Delta x_A = \frac{2 + 12}{2} \times 5 + 12 \times (11 - 5) = 35 + 72 = 107m \\ \Delta x_B = 10 \times 11 = 110m \end{cases}$$

در لحظه $t = 11s$ متحرک A هنوز به متحرک B نرسیده است و $3m$ از آن عقب تر است. فرض می کنیم در مدت t_0 بعد از لحظه $t = 11s$ متحرک A به B برسد.

$$a_B = \frac{0 - 10}{16 - 11} = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$\begin{cases} \Delta x_B = \frac{1}{2} a_B t_0^2 + v_{0B} t_0 = -t_0^2 + 10t_0 \\ \Delta x_A = v_A t_0 = 12t_0 \end{cases}$$

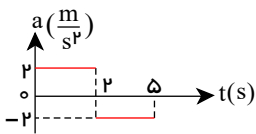
$$\Delta x_A = \Delta x_B + 3 \Rightarrow 12t_0 = (-t_0^2 + 10t_0) + 3$$

$$\Rightarrow t_0^2 + 2t_0 - 3 = 0 \Rightarrow t_0 = 1s$$

بنابراین A در لحظه $t = 11s + t_0 = 12s$ یعنی در لحظه $t' = 12s$ به B می رسد.

حرکت شامل چند بخش

۷) نمودار شتاب - زمان متحرکی در مسیر مستقیم مطابق شکل است. اگر سرعت متوسط متحرک در این مدت $6,4 \text{ m/s}$ باشد، سرعت اولیه آن چند متر بر ثانیه است؟



۵ (۲)

۴ (۱)

۸ (۴)

۶ (۳)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) روش اول: سرعت اولیه متحرک را v_0 در نظر می‌گیریم.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}(2)(2)^2 + v_0 \times 2 = 4 + 2v_0$$

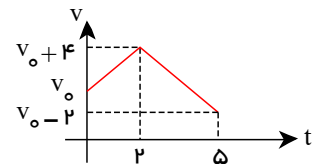
سرعت متحرک بعد از دو ثانیه

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2 \times 2 + v_0 = 4 + v_0$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \times (-2)(3)^2 + (4 + v_0) \times 3 \Rightarrow \Delta x_2 = -9 + 12 + 3v_0 = 3 + 3v_0$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 4 + 2v_0 + 3 + 3v_0 = 7 + 5v_0$$

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 6,4 = \frac{7 + 5v_0}{5} \Rightarrow 5v_0 + 7 = 32 \Rightarrow 5v_0 = 25 \Rightarrow v_0 = 5 \text{ m/s}$$

روش دوم: رسم نمودار $v-t$ از روی نمودار $a-t$:سطح زیر نمودار $v-t$ معرف جابه‌جایی می‌باشد:

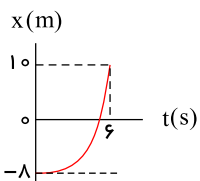
$$V_{av} = \frac{S}{\Delta t} \Rightarrow 6,4 = \frac{\frac{(v_0 + v_0 + 4) \times 2}{2} + \frac{(v_0 + 4 + v_0 - 2) \times 3}{2}}{5}$$

$$\Rightarrow v_0 = 5 \text{ m/s}$$

نمودار مکان-زمان یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۸) نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند مطابق شکل است. سرعت متحرک در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان عبور کرده است، چند $\frac{m}{s}$ است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۴



۲ (۲)

۰ (۱)

۸ (۴)

۴ (۳)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) با توجه به نمودار، شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در لحظه $t=0$ برابر صفر است، پس $v_0 = 0$ است.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}a(6)^2 + 0 - 8 \Rightarrow a = 1$$

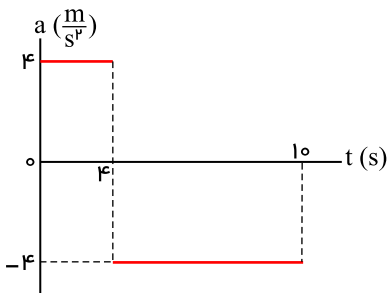
$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \times t^2 - 8 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4$$

لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند.

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 1 \times 4 + 0 = 4 \frac{m}{s}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۹) نمودار شتاب - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند به صورت شکل زیر است. اگر جابه‌جایی متحرک در این ۱۰ ثانیه ۱۵۶ متر باشد، سرعت اولیه متحرک چند متر بر ثانیه است؟



- پاسخ: ۱) ۲۰
۲) ۱۵
۳) ۱۰
۴) ۵

پاسخ: ۱) ۲) ۳) ۴) سرعت متحرک در لحظه صفر را v_0 فرض می‌کنیم و سرعت متحرک در لحظه‌های $t = 4s$ و $t = 10s$ را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار شتاب - زمان متحرک داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_4 = 4 \times 4 + v_0 = 16 + v_0 \\ v_{10} = -4 \times 6 + v_4 = -24 + 16 + v_0 = -8 + v_0 \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2} \times \Delta t$$

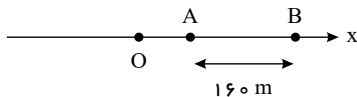
$$\Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{16 + v_0 + v_0}{2} \times 4 + \frac{-8 + v_0 + 16 + v_0}{2} \times 6 = 56 + 10v_0$$

$$\Rightarrow 156 = 56 + 10v_0 \Rightarrow 100 = 10v_0 \Rightarrow v_0 = 10 \frac{m}{s}$$

ترکیب معادلات - بازه‌های مختلف

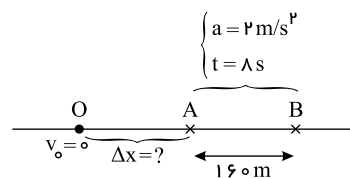
۱۰) مطابق شکل زیر، متحرکی با شتاب ثابت $2 m/s^2$ روی محور x حرکت می‌کند. اگر فاصله بین دو نقطه A و B را در مدت ۸ ثانیه طی کند و در نقطه O سرعتش صفر باشد، فاصله OA چند متر است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۹۸



- ۱) ۱۸
۲) ۳۶
۳) ۴۵
۴) ۷۲

پاسخ: ۱) ۲) ۳) ۴) در ابتدا با توجه به معلوم بودن زمان جابه‌جایی، شتاب و مقدار جابه‌جایی AB ، سرعت در نقطه A را می‌یابیم



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_A t \rightarrow 160 = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(8)^2 + v_A(8) \rightarrow v_A = 12 \left(\frac{m}{s}\right)$$

حال با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) بین دو نقطه O و A داریم:

$$V_A^2 - V_0^2 = 2a(\Delta x) \rightarrow (12)^2 - 0 = (2)(2)\Delta x \rightarrow \Delta x_{OA} = 36m$$

t ثانیه lam و آخر - بازه های زمانی برابر

۱۱) متحرکی با شتاب ثابت و سرعت اولیه v_0 در ۲ ثانیه اول حرکت خود، ۱۳ متر و در ۲ ثانیه سوم حرکت خود، ۲۵ متر را طی می کند. شتاب حرکت در SI کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

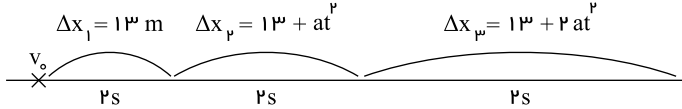
۲٫۵ (۲)

۱٫۵ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت در ابتدا یک خط راست، جابه جایی های متحرک در بازه های زمانی مساوی و متوالی، تشکیل یک دنباله با قدر نسبت at^2 می دهند. به عبارتی داریم:



$$\Delta x_3 = 13 + 2at^2 \xrightarrow[t=2s]{\Delta x_3 = 25m} 25 = 13 + 8a \rightarrow a = 1,5 \frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$t = 2s \Rightarrow \Delta x(\text{دو ثانیه اول}) = 2a + 2v_0 = 13 \Rightarrow a + v_0 = 6,5(I)$$

$$\begin{cases} t = 4s \Rightarrow \Delta x_4 = 8a + 4v_0 \\ t = 6s \Rightarrow \Delta x_6 = 18a + 6v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x(\text{دو ثانیه سوم}) = \Delta x_6 - \Delta x_4 = 10a + 2v_0 = 25 \Rightarrow 5a + v_0 = 12,5(II)$$

$$I, II \Rightarrow 4a = 12,5 - 6,5 \Rightarrow a = 1,5 \frac{m}{s^2}$$

حرکت شامل چند بخش

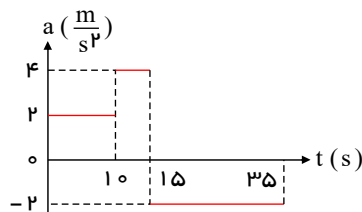
۱۲) نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x در لحظه $t = 0$ از مبدأ می گذرد، مطابق شکل زیر است. اگر $v_0 = -10 m/s$ باشد، بیشترین فاصله متحرک از مبدأ در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 35s$ ، چند متر است؟

۲۱۰ (۱)

۲۲۵ (۲)

۳۲۵ (۳)

۳۵۰ (۴)



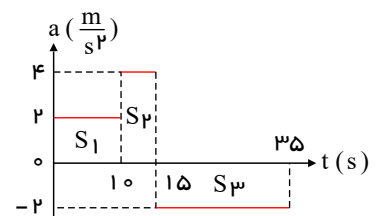
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ با رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار شتاب - زمان و بررسی سطح زیر نمودار سرعت - زمان می توانیم بیشترین فاصله از مبدأ را تعیین کنیم.

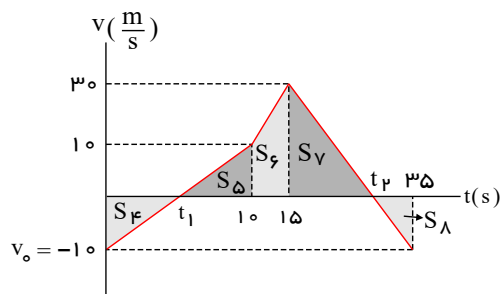
سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییرات سرعت می باشد.

$$S_1 = v_{10} - v_0 \Rightarrow 20 = v_{10} - (-10) \Rightarrow v_{10} = 10 \frac{m}{s}$$

$$S_2 = v_{15} - v_{10} \Rightarrow 20 = v_{15} - 10 \Rightarrow v_{15} = 30 \frac{m}{s}$$

$$S_3 = v_{35} - v_{15} \Rightarrow -40 = v_{35} - 30 \Rightarrow v_{35} = -10 \frac{m}{s}$$





$$\frac{30}{t_p - 15} = \frac{10}{35 - t_p} \Rightarrow t_p = 30s$$

در لحظه $t_p = 30s$ متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه اش (مبداء) قرار دارد.

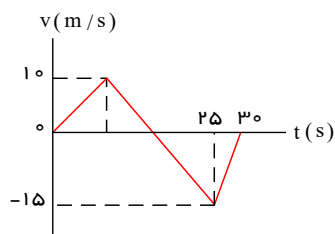
$$d_{max} = -S_A + S_B + S_C + S_D = \frac{10 + 30}{2} \times (15 - 10) + \frac{30 \times (30 - 15)}{2} = 325m$$

سطح زیر نمودار v-t

۱۳) نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل روبه رو است. بزرگی سرعت متوسط متحرک در مدتی که در سوی

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۰

مخالف محور x جابه جا می شود، چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۲٫۵

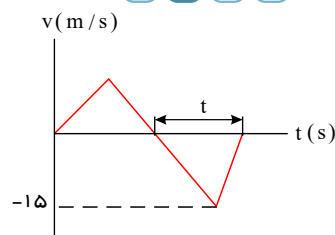
۲) ۷٫۵

۳) ۱۰٫۵

۴) ۱۲٫۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به نمودار اگر به اندازه t ثانیه جسم در خلاف جهت محور x حرکت کند، داریم:

$$|\Delta x| = S = \frac{15 \times t}{2} \Rightarrow |v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{15 \times t}{2t} = 7,5 \frac{m}{s}$$

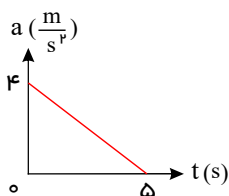


سطح زیر نمودار a-t و رسم نمودار از روی نمودار

۱۴) متحرکی با سرعت اولیه $6 \frac{m}{s}$ در مسیر مستقیم به حرکت درمی آید و نمودار شتاب - زمان آن به صورت مقابل است. حرکت این متحرک در

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۸۷

فاصله ی زمانی نشان داده شده چگونه است؟



۱) پیوسته کندشونده

۲) پیوسته تندشونده

۳) تندشونده و سپس کندشونده

۴) کندشونده و سپس تندشونده

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ نکته: سطح زیر نمودار a-t برابر Δv می باشد.

با توجه به نمودار ارائه شده در متن سؤال، مشخص است که شتاب متحرک در بازه ی زمانی نشان داده شده همواره مثبت است. برای به دست آوردن علامت سرعت زیر منحنی را در فاصله ی زمانی نشان داده شده به دست می آوریم.

$$S_{(0-5)} = \Delta v = \frac{4 \times 5}{2} = 10 \frac{m}{s}$$

$$\Delta v = 10 \Rightarrow v_5 - v_0 = 10 \Rightarrow v_5 - (-6) = 10 \Rightarrow v_5 = 4 \frac{m}{s}$$

اکنون با بررسی علامت سرعت و شتاب در این بازه ی زمانی داریم:

$$\text{کندشونده} \begin{cases} a_0 = 4 > 0 \\ v_0 = -6 < 0 \end{cases} \rightarrow a \cdot v < 0$$

تندشونده $a \cdot v > 0 \rightarrow a > 0$ (تندشونده) $v_0 = 4$ لحظه‌ی پایان بازه زمانی

مقایسه چند حرکت و شتاب نسبی

۱۵ دو متحرک روی خط مستقیمی به طرف یکدیگر در حرکت هستند. در زمانی که فاصله‌ی آنها ۱۱۲۵ متر است. سرعت متحرک اول $10 \frac{m}{s}$ تندشونده و سرعت متحرک دوم $20 \frac{m}{s}$ و آن هم تندشونده است. اگر شتاب متحرک اول $2 \frac{m}{s^2}$ و شتاب متحرک دوم $4 \frac{m}{s^2}$ باشد، پس از چند ثانیه به یکدیگر می‌رسند؟

۳۷٫۵ (۴)

۲۵ (۳)

۱۹٫۴ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ جهت مثبت را برای هر متحرک به‌طور جداگانه همان جهت حرکت خودش فرض می‌کنیم.

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_{01} t = \frac{1}{2} \times 2 t^2 + 10 t = t^2 + 10 t$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + v_{02} t = \frac{1}{2} \times 4 t^2 + 20 t = 2 t^2 + 20 t$$

$$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 1125 \Rightarrow 3 t^2 + 30 t = 1125$$

$$\Rightarrow t^2 + 10 t - 375 = 0 \Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 1500}}{2} = \frac{-10 \pm 40}{2}$$

$$\Rightarrow t_1 = 15 s, t_2 = -25 s \Rightarrow t = 15 s$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۱۶ معادله مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x = 2t^2 + 4t - 8$ است. در فاصله زمانی $t_1 = 0 s$ تا $t_2 = 2 s$ مسافتی که متحرک طی می‌کند، چند برابر اندازه جابه‌جایی آن است؟

۲ (۴)

۱٫۶ (۳)

۱٫۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ معادله مکان - زمان درجه ۲ بر حسب زمان است. بنابراین حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. (مشابه کتاب درسی از مشتق کمک نمی‌گیریم).

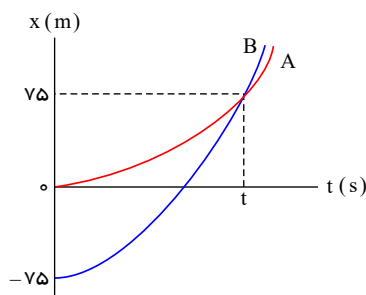
$$\begin{cases} x = 2t^2 + 4t - 8 \\ x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = +4 \\ v_0 = +4 \end{cases} \rightarrow v = at + v_0 = 4t + 4$$

مشخص است که $v \neq 0$ یعنی متحرک بر خط راست، بدون تغییر جهت است.

$$\frac{L}{|\Delta x|} = 1 \quad \text{بنابراین:}$$

نمودار مکان-زمان یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۱۷ نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که همزمان از حال سکون به حرکت درآمده‌اند، به صورت دو سهمی شکل زیر است. اگر شتاب متحرک A برابر $1.5 m/s^2$ باشد، نسبت سرعت متحرک B به سرعت متحرک A در لحظه‌ای که از A سبقت می‌گیرد، کدام است؟ متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۸



۱ ۱/۲
۲ ۲
۳ ۳
۴ ۱/۳

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ در لحظه سبقت، مکان دو متحرک یکسان و برابر ۷۵ متر است. پس معادله حرکت هریک را می‌نویسیم و با هم مساوی قرار می‌دهیم

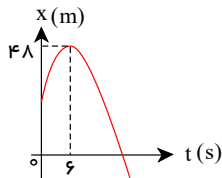
$$\begin{cases} A: v_A = a_A t + v_{0A} = 1.5 t, \text{ و } x_A = \frac{1}{2} \times 1.5 t^2 = 0.75 t^2 \\ B: v_B = a_B t + v_{0B} = a_B t, \text{ و } x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 - 75 \end{cases}$$

$$x_A = x_B = 75 \begin{cases} \text{در لحظه سبقت: } t = 10s \rightarrow x_A = 0.75t^2 = 75 \\ x_B = \frac{1}{2}a_B \times 10^2 - 75 = 75 \rightarrow a_B = 3m/s^2 \end{cases} \rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{3 \times 10}{1.5 \times 10} = 2$$

۱۸) نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر، به صورت سهمی است. اگر مسافت طی شده توسط متحرک در بازه

سخت - سراسری - ۱۳۹۳

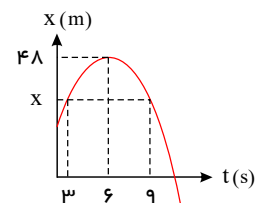
زمانی $t = 3s$ و $t = 9s$ برابر ۱۲ متر باشد، جابه جایی متحرک در این بازه چند متر است؟



- پاسخ: ۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

متحرک در این بازه صفر است. منحنی به صورت سهمی است، بنابراین نسبت به رأس سهمی ($t = 6s$) تقارن دارد. پس مکان متحرک در لحظات $t = 3$ و $t = 9$ یکسان می باشد و جابه جایی

$$\Delta x_{(3 \rightarrow 9)} = 0$$

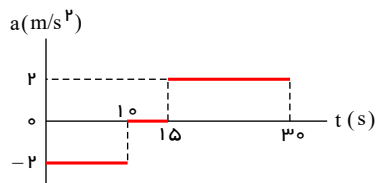


نمودار سرعت - زمان و شتاب - زمان در حرکت با شتاب ثابت

۱۹) نمودار شتاب - زمان متحرکی که با سرعت اولیه $30 m/s$ در جهت محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. سرعت متوسط متحرک در

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۸

بازه زمانی $t_1 = 10s$ تا $t_2 = 30s$ چند متر بر ثانیه است؟



- پاسخ: ۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱,۲۵ ۴) ۴۲,۵

روش های متفاوتی وجود دارد. می توان از رسم نمودار ($v - t$) و یافتن مساحت سطح زیر نمودار ($v - t$) استفاده نمود.

یک روش، مشخص نمودن سرعت در ابتدا و انتهای بازه های زمانی داده شده و یافتن جابه جایی های انجام شده در بازه است:

$$(در بازه زمانی صفر تا ۱۰s) \Rightarrow \begin{cases} v_{(10)} = at + v_0 = (-2)(10) + 30 = 10 m/s \\ v_{(0)} = 30 m/s \end{cases}$$

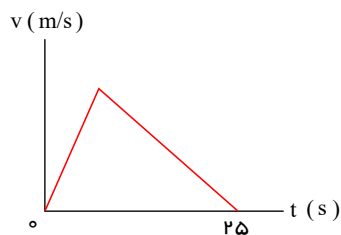
$$(در بازه زمانی ۱۰s تا ۱۵s) \Rightarrow \Delta x_1 = v \Delta t = v_{(10)} \Delta t = 10 \times 5 = 50m$$

$$(در بازه زمانی ۱۵s تا ۳۰s) \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_2 = \left(\frac{10 + 40}{2}\right)(15) = 25 \times 15 = 375 \\ v_{(15)} = v_{(10)} = 10 m/s \\ v_{(30)} = v_{(15)} + 2 \times 15 = 10 + 30 = 40 m/s \end{cases}$$

$$کل \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 50 + 375 = 425 \rightarrow v_{av} = \frac{425}{20} = 21,25$$

سطح زیر نمودار v-t

۲۰) نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مسیری مستقیم در حرکت است، به صورت شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در این ۲۵ ثانیه برابر 10 m/s باشد، بیشینه سرعت متحرک در ضمن حرکت، چند متر بر ثانیه است؟
متوسط - سراسری - ۱۳۹۸



- ۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۴۰
۴) ۵۰

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

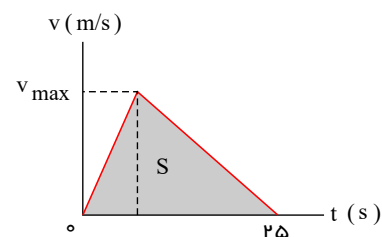
می دانیم که در این سوال که متحرک فقط در یک جهت حرکت کرده (همواره $v > 0$) و نمودار $v - t$ آن به صورت یک مثلث است. سرعت متوسطش، نصف ارتفاع مثلث است. یعنی:

$$v_{av} = \frac{1}{2} v_{max} \xrightarrow{v_{av} = 10 \frac{m}{s}} 10 = \frac{1}{2} v_{max} \rightarrow v_{max} = 20 \frac{m}{s}$$

$$\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \Delta x = S_{\text{مثلث}}$$

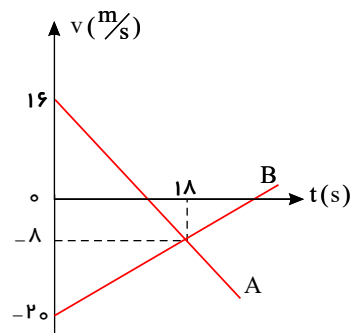
$$\Delta x = 10 \times 25 = 250$$

$$\frac{v \times 25}{2} = 10 \times 25 \Rightarrow v = 20 \text{ m/s}$$



نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۲۱) نمودار سرعت - زمان دو متحرک A, B که روی محور x حرکت می کنند، مطابق شکل زیر است. در مدتی که متحرک A در جهت محور x حرکت کرده است، بزرگی جابه جایی متحرک B، چند متر است؟
متوسط - سراسری - ۱۳۹۵



- ۱) ۱۸۶
۲) ۱۹۲
۳) ۲۰۰
۴) ۲۲۸

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا (t) لحظه ای را که تا آن لحظه متحرک در جهت محور x حرکت کرده است را به دست می آوریم:

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8 - 16}{18} = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3} \frac{m}{s^2}$$

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow{v_t=0} 0 = -\frac{4}{3} t + 16 \rightarrow t = 12s$$

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8 - (-20)}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{0B} t \xrightarrow{t=12s} \Delta x_B = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 12^2\right) + (-20 \times 12) = 48 - 240 = -192m$$

$$|\Delta x_B| = 192m$$

اکنون جابه جایی متحرک B را در مدت ۱۲s به دست می آوریم:

توقف - مقایسه جابه جایی و مسافت

۲۲) سرعت متحرکی با شتاب ثابت کاهش می یابد و بعد از ۱۲ ثانیه متحرک متوقف می شود. مسافتی که متحرک در ۶ ثانیه اول این حرکت طی می کند، چند برابر مسافتی است که متحرک در ۶ ثانیه پایانی طی می کند؟

سخت - سنجش - ۱۳۹۴

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) اگر سرعت اولیه را v_0 فرض کنیم، سرعت در لحظه $t = 6s$ (وسط زمان حرکت) برابر $\frac{v_0}{2}$ است.

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= \frac{v_0 + \frac{v_0}{2}}{2} \times 6 = 4.5v_0 \\ \Delta x_2 &= \frac{\frac{v_0}{2} + 0}{2} \times 6 = 1.5v_0 \end{aligned} \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = 3$$

مقایسه چند حرکت و شتاب نسبی

۲۳) در یک مسیر مستقیم اتومبیلی با سرعت ثابت $20 \frac{m}{s}$ در حرکت است. از ۳۶ متر جلوتر اتومبیل دیگری با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ از حال سکون در همان جهت به راه می افتد. در این حرکت اتومبیل ها دو بار از هم سبقت می گیرند. فاصله زمانی این دو سبقت چند ثانیه است؟

سخت - سراسری - ۱۳۸۳

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۰ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴)

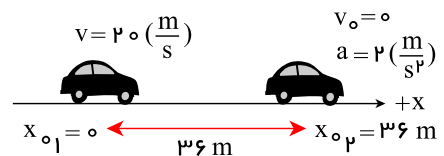
$$x_1 = vt + x_0 = 20t$$

$$x_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 0 + 36 = t^2 + 36$$

$$x_2 = x_1 \Rightarrow t^2 + 36 = 20t \Rightarrow t^2 - 20t + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 2)(t - 18) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 2s, t_2 = 18s \Rightarrow \Delta t = 16s$$



مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۲۴) متحرکی روی محور x حرکت می کند و معادله ی مکان - زمان آن در SI به صورت $x = -2t^2 + 12t - 40$ است. مسافتی که این متحرک در بازه ی زمانی صفر تا $t = 5s$ طی می کند، چند متر است؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۴

۲۶ (۴)

۲۴ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) با استفاده از رابطه $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ ، شتاب و سرعت اولیه را محاسبه می کنیم:

$$x = -2t^2 + 12t - 40 \rightarrow a = -4, v_0 = 12 \frac{m}{s}$$

برای محاسبه ی مسافت طی شده باید ابتدا لحظه ی توقف متحرک را به دست بیاوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 12 \xrightarrow{v=0} 0 = -4t + 12 \Rightarrow t = 3(s)$$

شرط توقف

حال مکان متحرک را در لحظات ابتدا، انتها و لحظه ی توقف به دست می آوریم:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = -40 & (1) \\ t_2 = 3 \rightarrow x_2 = -22 & (2) \\ t_3 = 5 \rightarrow x_3 = -30 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(1),(2)} \Delta x_1 = -22 - (-40) = 18 \\ \xrightarrow{(2),(3)} \Delta x_2 = -30 - (-22) = -8 \end{cases} \Rightarrow d = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 26$$

مسافت طی شده برابر مجموع اندازه ی جابه جایی های دو مرحله می باشد.

t ثانیة ln و آخر - بازه های زمانی برابر

۲۵) متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت در مسیر مستقیم شروع به حرکت می کند. جابه جایی این متحرک در ۲ ثانیة اول چند برابر جابه جایی آن در ثانیة دوم است؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴

۴
۳

۳
۲

۲

۱

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با نوشتن معادله جابه جایی برای ثانیة اول و دو ثانیة اول، می توان نسبت آنها را پیدا کرد.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2$$

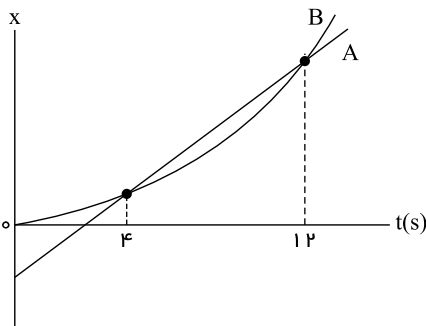
$$\begin{cases} t = 1s \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}a \times 1^2 = \frac{1}{2}a \text{ (ثانیة اول)} \\ t = 2s \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{1}{2}a \times 2^2 = 2a \text{ (دو ثانیة اول)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{جابه جایی دو ثانیة اول}}{\text{جابه جایی ثانیة دوم}} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_2 - \Delta x_1} = \frac{2a}{1.5a} = \frac{4}{3}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۲۶) نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B مطابق شکل زیر است. بزرگی سرعت متحرک B در چه لحظه ای برابر بزرگی سرعت متحرک A است؟ (نمودار B قسمتی از یک سهمی است).

متوسط - سراسری - ۱۳۹۹



۱۰ ۱

۸ ۲

۶ ۳

۵ ۴

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

فرض کنیم لحظه مورد نظر $t = t'$ است.

$$B: x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{oB}t + x_{oB}$$

$$A: x_A = v_{oA}t + x_{oA}$$

در $t = 4s$ و $t = 12s$: $x_A = x_B$ است:

$$t = 4s \Rightarrow \frac{1}{2}a_B \times 4^2 + v_{oB} \times 4 = v_{oA} \times 4 + x_{oA} \quad (1)$$

$$t = 12s \Rightarrow \frac{1}{2}a_B \times 12^2 + v_{oB} \times 12 = v_{oA} \times 12 + x_{oA} \quad (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \frac{1}{2}a_B(144 - 16) + \lambda v_{oB} = \lambda v_{oA} \Rightarrow 64a_B + \lambda v_{oB} = \lambda v_{oA}$$

$$\text{از طرفی: } \begin{cases} \lambda a_B + v_{oB} = v_{oA} = \text{ثابت} \\ v_B = a_B t + v_{oB} \end{cases} \Rightarrow \lambda a_B + v_{oB} = a_B t' + v_{oB} \Rightarrow t' = \lambda s$$

روش دوم:

چون نمودار B قسمتی از یک سهمی است، پس حرکت B شتابدار با شتاب ثابت است.

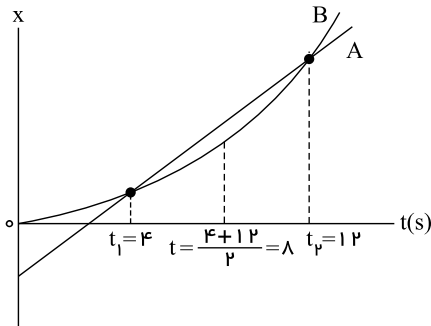
از طرف دیگر می دانیم که شیب خط A که دو نقطه از نمودار B را قطع کرده برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه $t_1 = 4s$ و $t_2 = 12s$ است.

پس تا اینجا دریافتیم که:

$$V_A = V_{avB}$$

و اما همه می دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، V_{av} بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر است با V در لحظه $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$

حال با این مقدمه می دانیم که

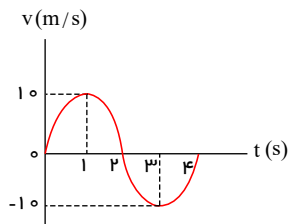


یعنی در لحظه $t = 8s$ سرعت متحرک B با سرعت متحرک A هم اندازه است.

سطح زیر نمودار v-t

۲۷) نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می کند مطابق شکل است. شتاب متوسط و سرعت متوسط در بازه زمانی ۱ تا ۳ ثانیه به ترتیب از راست به چپ برابر است با:

متوسط - سراسری - ۱۳۸۴



- ۱) ۰, ۰
- ۲) $0, -1.0 \frac{m}{s^2}$
- ۳) $-1.0 \frac{m}{s}, 0$
- ۴) $1.0 \frac{m}{s}, -1.0 \frac{m}{s^2}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می دانیم که سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه جایی متحرک است. در اینجا با توجه به تقارن نمودار داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-1.0 - 1.0}{3 - 1} = \frac{-2.0}{2} = -1.0 \frac{m}{s^2}$$

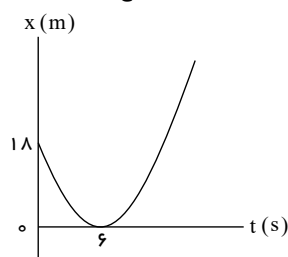
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{سطح زیر نمودار}}{\Delta t} = \frac{0}{\Delta t} = 0$$

سطح زیر نمودار در بازه ۱ تا ۳ ثانیه از دو قسمت با مساحت های مساوی تشکیل شده که یکی از آنها بالای محور افقی و مثبت است و دیگری در پایین محور افقی و منفی می باشد و بنابراین جمع جبری مساحت های آنها برابر صفر می شود.

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۲۸) مطابق شکل زیر، نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت یک سهمی است. شتاب حرکت چند متر بر مجذور ثانیه است؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۸



- ۱) ۳
- ۲) ۱
- ۳) -۱
- ۴) -۳

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول: از لحظه $t = 6$ تا لحظه $t = 0$ برمی گردیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0=0, t=6s, \Delta x=1.8m} 1.8 = \frac{1}{2} a (6)^2 \rightarrow a = 1 \frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

نمودار مکان - زمان یک سهمی است بنابراین حرکت بر روی محور x ، با شتاب ثابت است؛ در بازه زمانی صفر تا $t = 6s$ داریم:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \rightarrow 0 - 18 = \left(\frac{0 + v_0}{2}\right)(6) = 3v_0 \rightarrow v_0 = -6m/s$$

$$v = at + v_0 \rightarrow 0 = a \times 6 + (-6) \rightarrow a = 1m/s^2$$

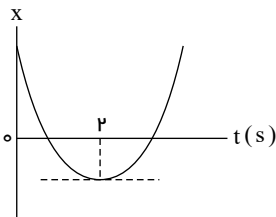
روش سوم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 & \text{در بازه زمانی} \\ v = at + v_0 & \text{صفر تا } 6s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{2}a \times 6^2 + v_0 \times 6 + 18 \rightarrow a = 1m/s^2 \\ 0 = a \times 6 + v_0 \rightarrow v_0 = -6a \end{cases}$$

۲۹) نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا

سخت- سراسری- ۱۳۹۹

$t_2 = 6s$ برابر $3 \frac{m}{s}$ باشد، مسافتی که متحرک در این بازه زمانی طی می کند، چند متر است؟



۱۳ ۱

۱۵ ۲

۱۷ ۳

۱۹ ۴

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

در $t = 2$ ، سرعت صفر است. در بازه زمانی 0 تا $t_1 = 2s$ داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2a + v_0 \Rightarrow v_0 = -2a \quad (*)$$

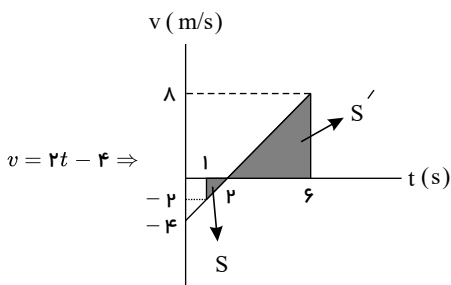
به کمک تعریف سرعت متوسط جابه جایی در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 6s$ را می یابیم:

$$v_{av} = \frac{x(t=6) - x(t=1)}{6 - 1} = 3 \Rightarrow \Delta x_{(1s-6s)} = 15m \quad (**)$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow{(*)} x = \frac{1}{2}at^2 - 2at + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = \frac{a}{2} - 2a + x_0 = -\frac{3}{2}a + x_0 \\ t_2 = 6s \Rightarrow x_2 = 18a - 12a + x_0 = 6a + x_0 \end{cases} \xrightarrow{(**)} \Delta x = 15m = 7.5a \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$\xrightarrow{(*)} v_0 = -4 \frac{m}{s} \Rightarrow v = 2t - 4$$

از رسم نمودار ($v - t$) کمک می گیریم:



$$\begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = -2 \frac{m}{s} \\ t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = 8 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow L = S + S' = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 1 + 16 = 17m$$

روش دوم:

$$2s \text{ تا } 6s \text{ در بازه زمانی صفر تا } 2s \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2a + v_0 \Rightarrow v_0 = -2a$$

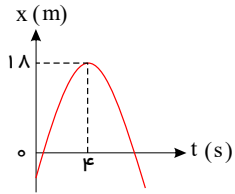
$$v_{av} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{(at + v_0) + v_0}{2} = \frac{1}{2}at + v_0$$

در بازه زمانی 0 تا $t_1 = 6s$ ، در رابطه فوق:

$$v_{av} = 3 = \frac{1}{2}a(6 - 1) + v_1 \xrightarrow{v_1 = v(t_1=1s) = (-2)} 3 = \frac{5}{2}a - 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

باقی راه حل شبیه روش اول است.

۳۰) نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر به صورت سهمی است. چند ثانیه پس از لحظه $t = 0$ بزرگی سرعت متحرک برابر بزرگی سرعت اولیه می شود؟
متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۳



۷ (۲)

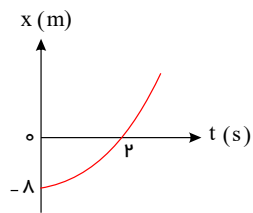
۹ (۴)

۶ (۱)

۸ (۳)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) حرکت نسبت به لحظه تغییر جهت تقارن دارد (لحظه $t = 4s$). بنابراین در لحظه $t = 8s$ بزرگی سرعت برابر سرعت اولیه می شود.

۳۱) متحرکی بدون سرعت اولیه و با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می کند و نمودار مکان - زمان آن مطابق شکل مقابل است. سرعت آن در لحظه $t = 2s$ چند متر بر ثانیه است؟
متوسط - سراسری - ۱۳۸۸



۴ (۲)

۸ (۴)

۲ (۱)

۶ (۳)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) روش اول: ابتدا شتاب حرکت را با بررسی جابه جایی بین $t = 0$ و $t = 2$ به دست می آوریم:

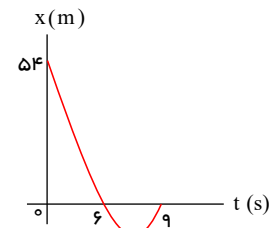
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times a \times 2^2 \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 4t + 0 \xrightarrow{t=2} v = 8 \frac{m}{s}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \times \Delta t \Rightarrow 8 = \frac{0 + v_2}{2} \times 2 \Rightarrow v_2 = 8 \frac{m}{s}$$

۳۲) نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت سهمی شکل روبه رو است. معادله سرعت - زمان آن در SI کدام است؟
متوسط - سنجش - ۱۳۹۴



$v = 2t - 15$ (۱)

$v = -2t + 15$ (۲)

$v = 4t - 30$ (۳)

$v = -4t + 30$ (۴)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) روش اول:

با توجه به نمودار $v_0 < 0$ و $a > 0$ است، پس تا اینجا گزینه های ۱ و ۳ صحیح هستند. از طرفی در لحظه $t = 15s$ ($t = 2t_s = 2 \times 7,5$) باید $v = v_0$ یعنی $\Delta v = 0$ باشد که فقط گزینه ۱ چنین است.

روش دوم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$\begin{cases} t = 6s, x = 0 \Rightarrow 0 = 18a + 6v_0 + 54 \Rightarrow 3a + v_0 = -9 \\ t = 9s, x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{81}{2}a + 9v_0 + 54 \Rightarrow 4,5a + v_0 = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1,5a = 3 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2} \Rightarrow v_0 = -15 \frac{m}{s} \Rightarrow v = 2t - 15$$

حرکت شامل چند بخش

۳۳ اتومبیلی از حال سکون با شتاب ثابت a_1 در مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کند. بعد از مدتی، ادامه‌ی مسیر را در همان جهت با شتاب ثابت

a_2 طی می‌کند تا بایستد. اگر مسافت طی شده در مرحله اول ۴ برابر مسافت طی شده در مرحله دوم باشد، اندازه‌ی a_2 چند برابر a_1 است؟

سخت - خارج از کشور - ۱۳۸۸

۱/۴ (۴)

۱/۲ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ اتومبیل از حالت سکون ($v_0 = 0$) با شتاب ثابت a_1 در مسیر مستقیم شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی بزرگی سرعت آن به v می‌رسد؛ پس از آن اتومبیل در همان جهت با شتاب ثابت a_2 حرکت خود را کند می‌کند تا پس از مدت زمانی سرعت آن به صفر برسد.

$$\text{مرحله اول حرکت: } v^2 - v_0^2 = 2a_1 \Delta x_1 \Rightarrow v^2 - 0 = 2a_1 \Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{v^2}{2a_1}$$

$$\text{مرحله دوم حرکت: } v_1^2 - v^2 = 2a_2 \Delta x_2 \Rightarrow 0 - v^2 = 2a_2 \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{-v^2}{2a_2}$$

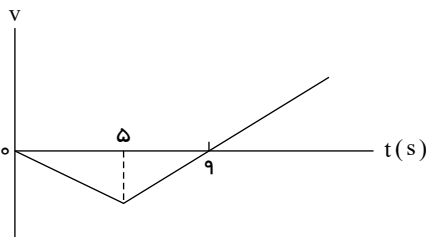
$$\Rightarrow \Delta x_1 = 4\Delta x_2 \Rightarrow \frac{v^2}{2a_1} = -4 \frac{v^2}{2a_2} \Rightarrow |a_2| = 4|a_1|$$

سطح زیر نمودار $v-t$

۳۴ نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر متحرک در لحظه $t = 0$ در مکان $x = 0$ باشد،

متوسط - سراسری - ۱۳۹۹

پس از چند ثانیه دوباره از این نقطه عبور می‌کند؟



۱۵ (۱)

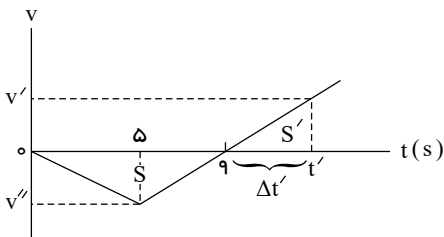
۱۶ (۲)

۱۸ (۳)

۲۰ (۴)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ برای اینکه متحرک مجدداً از مکان $x = x_0 = 0$ عبور کند بایستی جابه‌جایی متحرک از $t_1 = 0$ تا لحظه‌ای مانند t' صفر شده باشد.

می‌دانیم تفاضل مساحت بالای نمودار $(v-t)$ در محور t و زیر نمودار جابه‌جایی را می‌دهد، پس:



$$\Delta x = S' - S = 0 \Rightarrow S' = S \Rightarrow \frac{1}{2} v' \times \Delta t' = \frac{1}{2} \times |v''| \times 9 \quad (1)$$

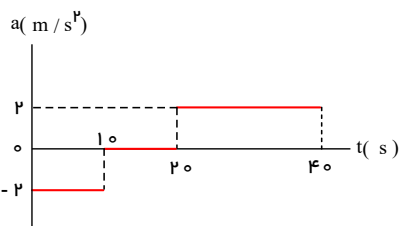
$$|v''| \left\{ \frac{4}{\Delta t'} \right\} \xrightarrow{\text{از تشابه دو مثلث}} \frac{v'}{|v''|} = \frac{\Delta t'}{4} \Rightarrow v' = \frac{1}{4} |v''| \times \Delta t' \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4} |v''| \times \Delta t' \right) \times \Delta t' = \frac{1}{2} |v''| \times 9 \Rightarrow \frac{\Delta t'^2}{4} = 9 \Rightarrow \Delta t'^2 = 36 \Rightarrow \Delta t' = 6 \text{ s} \Rightarrow t' = 9 + \Delta t' = 9 + 6 = 15 \text{ s}$$

حرکت شامل چند بخش

۳۵) نمودار شتاب - زمان متحرکی که از حال سکون روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی $t_1 = 20s$ تا $t_2 = 35s$

متوسط - سراسری - ۱۳۹۴



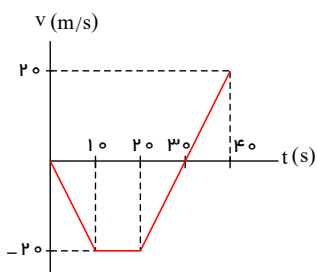
کدام مورد درست است؟

- ۱) حرکت تندشونده است.
- ۲) حرکت کندشونده است.
- ۳) جهت حرکت یک بار تغییر می‌کند.
- ۴) متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{cases} \Delta v(10 \text{ ثانیه اول}) = -2 \times 10 = -20 \frac{m}{s} \\ \Delta v(10 \text{ ثانیه دوم}) = 0 \\ \Delta v(20 \text{ ثانیه آخر}) = 2 \times (40 - 20) = +40 \frac{m}{s} \end{cases}$$

در بازه زمانی $20s$ تا $35s$ تانیه حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.



مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۳۶) متحرکی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت $a = 4 \frac{m}{s^2}$ و سرعت اولیه $v_0 = 6 \frac{m}{s}$ حرکت می‌کند. سرعت متوسط متحرک در دو ثانیه اول

متوسط - سراسری - ۱۳۸۱

حرکت چند متر بر ثانیه است؟

- ۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ این سوال را به سه روش حل می‌کنیم. می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط معادل میانگین سرعتهاست.

روش اول:

$$v = at + v_0 = 4t + 6$$

$$\begin{cases} t = 0s \rightarrow v_0 = 6 \frac{m}{s} \\ t = 2s \rightarrow v_2 = 14 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_0 + v_2}{2} = 10 \frac{m}{s}$$

روش دوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 معادل سرعت در لحظه $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ است.

در اینجا سرعت متوسط در دو ثانیه اول معادل با سرعت در لحظه $t = 1s$ است. $(t = \frac{0 + 2}{2} = 1s)$. بنابراین داریم:

$$v_{av} = v = at + v_0 \xrightarrow[t=1s, a=4 \frac{m}{s^2}, v_0=6]{v_0=6} v_{av} = 4 \times 1 + 6 = 10 \frac{m}{s}$$

روش سوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در t' ثانیه اول، از رابطه زیر نیز محاسبه می‌شود.

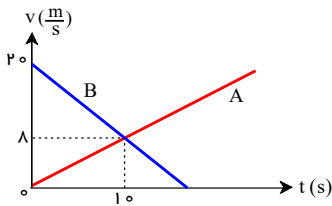
$$v_{av} = \frac{1}{2}at' + v_0 \xrightarrow[\text{دو ثانیه اول حرکت}]{t'=2} v_{av} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + 6 \rightarrow v_{av} = 10 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{4 \frac{m}{s^2}}{2s}, v_0 = 6 \frac{m}{s}$$

$$a = 4 \frac{m}{s^2}, v_0 = 6 \frac{m}{s}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۳۷) شکل روبه‌رو، نمودارهای سرعت - زمان دو متحرک را نشان می‌دهد که روی محور x حرکت می‌کنند. اگر دو متحرک در یک مکان باشند، فاصله بین آنها در لحظه $t = 10\text{ s}$ چند متر است؟
متوسط - سنجش - ۱۳۹۴



- ۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۱۰

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴) سطح زیر نمودار سرعت - زمان متحرک در فاصله زمانی صفر تا ۱۰ ثانیه، نشان‌دهنده جابه‌جایی آن متحرک است. بنابراین، جابه‌جایی این دو متحرک را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$\Delta x_A = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40\text{ m}, \quad \Delta x_B = \frac{20 + 8}{2} \times 10 = 140\text{ m}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بین متحرک} = (140 - 40) = 100\text{ m}$$

حرکت شامل چند بخش

۳۸) متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ روی خط راست به راه می‌افتد. پس از ۲۰ ثانیه سرعتش با آهنگ ثابت $4 \frac{m}{s^2}$ کاهش می‌یابد تا متوقف شود. از لحظه شروع حرکت تا لحظه توقف، متحرک چند متر جابه‌جا می‌شود؟
متوسط - سنجش - ۱۳۹۴

- ۱) ۲۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۸۰۰

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴)

ابتدا سرعت و جابه‌جایی متحرک را پس از ۲۰ s به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2 \times 20 + 0 \Rightarrow v = 40 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x_1 = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{40 + 0}{2} \times 20 = 400\text{ m}$$

در مرحله دوم بیان شده سرعت متحرک با آهنگ ثابت $4 \frac{m}{s^2}$ کاهش می‌یابد یعنی شتاب متحرک در این مرحله $-4 \frac{m}{s^2}$ است.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_2 \Rightarrow 0 - (40)^2 = 2(-4)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 200\text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = 400 + 200 = 600\text{ m}$$

سطح زیر نمودار $v-t$

۳۹) متحرکی در یک مسیر مستقیم از حال سکون با شتاب ثابت $3 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی حرکتش با شتاب ثابت $1 \frac{m}{s^2}$ کند می‌شود و در نهایت می‌ایستد. اگر مسافت طی شده در کل مسیر ۶۰۰ متر باشد، مسافت طی شده در ۳۰ ثانیه اول حرکت، چند متر است؟
سخت - سراسری - ۱۳۹۹

- ۱) ۴۰۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۵۵۰

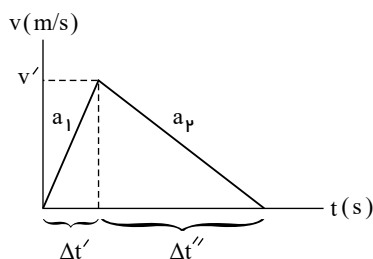
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴)

می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ برابر شتاب لحظه‌ای است.

نمودار $(v-t)$ را از ابتدا تا انتهای حرکت رسم می‌کنیم.

در هر بازه‌ای که شتاب ثابت است: $a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

بنابراین چون: $|a_1| = 3$ است: (۱) $\Delta t' = \frac{1}{3} \Delta t''$

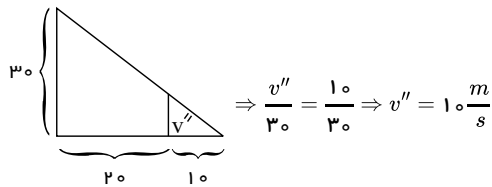
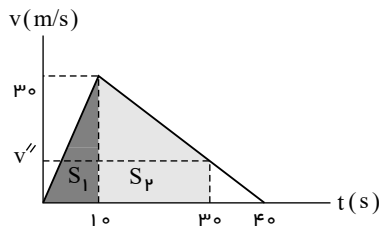


سطح زیر نمودار برابر 600 m است:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times v' \times (\Delta t' + \Delta t'') = 600 & (۲) \\ v' = a_1 \Delta t' = 3 \Delta t' & (۳) \end{cases}$$

$$(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3) \Rightarrow \frac{1}{2}(3\Delta t')(4\Delta t') = 600 \Rightarrow 6\Delta t'^2 = 600 \Rightarrow \Delta t' = 10s$$

$$\begin{cases} v' = 30 \frac{m}{s} \\ \Delta t'' = 30s \end{cases}$$



$$L = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 30 \times 10 + \frac{1}{2} \times 20 \times (10 + 30) = 150 + 400 = 550m$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۴۰) معادلهٔ سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -2t + 4$ است. بزرگی جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم چند متر است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۸

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ دو ثانیه سوم یعنی از ۴ تا ۶ ثانیه، پس در این دو لحظه، سرعت متحرک را یافته و سپس با استفاده از رابطهٔ مستقل از شتاب، جابه‌جایی‌اش را محاسبه می‌کنیم.

$$t_1 = 4s \Rightarrow v_1 = -2 \times 4 + 4 = -4 \frac{m}{s}$$

$$t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = -2 \times 6 + 4 = -8 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v_{av} \Delta t \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{-4 + (-8)}{2} \right) \times 2 = -12m \Rightarrow |\Delta x| = 12m$$

ترکیب معادلات - بازه‌های مختلف

۴۱) متحرکی با شتاب ثابت و بدون سرعت اولیه از نقطهٔ A به حرکت درمی‌آید و در ادامهٔ مسیر به نقطهٔ B و سپس C می‌رسد و فاصلهٔ 120 متری BC را در مدت 10 ثانیه طی می‌کند. اگر سرعت متحرک در نقطهٔ C ، $20 \frac{m}{s}$ باشد، فاصلهٔ بین A و B چند متر است؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۸۹

۲۲٫۵ (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

۲٫۵ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ در این سؤال، ۳ نقطه مهم در مسئله داریم، بین B و C (معلوم: v_C ، t ، x) و بین A و B (معلوم: v_A ، مجهول: x)، پس برای حل معادله بین A و B به a و v_B نیاز داریم که می‌توان از قسمت اول (BC) به دست آورد.

$$BC \text{ شتاب } \Delta x = \frac{v_B + v_C}{2} \times \Delta t \Rightarrow 120 = \frac{v_B + 20}{2} \times 10 \Rightarrow v_B = 4 \frac{m}{s}$$

$$BC \text{ مستقل از مکان } v_C = at + v_B \Rightarrow 20 = a \times 10 + 4 \Rightarrow a = 1,6 \frac{m}{s^2}$$

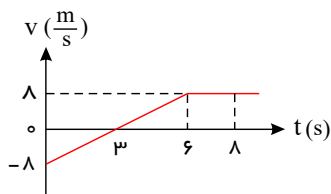
حال بین نقاط A و B می‌توان از معادله مستقل از زمان استفاده کرد:

$$AB \text{ مستقل از زمان } v_B^2 - v_A^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 16 - 0 = 2 \times 1,6 \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = 5m$$

سطح زیر نمودار v-t

۴۲) نمودار سرعت - زمان جسمی که در مسیر مستقیم حرکت می کند، مطابق شکل مقابل است. سرعت متوسط جسم در مدت ۸ ثانیه ی نشان داده شده چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۵



- ۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

سطح زیر نمودار، سرعت - زمان برابر جابه جایی می باشد؛ بنابراین داریم:

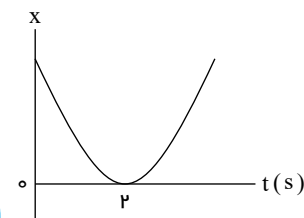
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{-8 \times 3}{2} + (8 + 2) \times \frac{5}{2}}{8} = \frac{-12 + 28}{8} = \frac{16}{8} = 2 \frac{m}{s}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۴۳) نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل روبه رو، به صورت سهمی است. کدام مورد درست است؟

سخت - خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱) مسافت طی شده در ۳ ثانیه اول برابر مسافت طی شده در ۳ ثانیه دوم است.
۲) مسافت طی شده در ۳ ثانیه اول برابر بزرگی جابه جایی این بازه زمانی است.
۳) بزرگی سرعت متوسط در ۴ ثانیه اول برابر بزرگی سرعت متوسط در بازه زمانی ۱s تا ۵s است.
۴) بزرگی سرعت متوسط در ۳ ثانیه اول برابر بزرگی سرعت متوسط در بازه زمانی ۱s تا ۴s است.

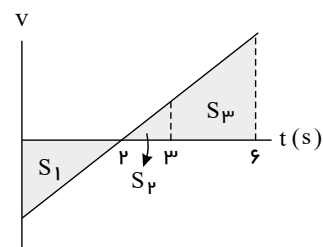


پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ نمودار سهمی است. پس حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. $a > 0$ و $v_0 < 0$ است. متحرک در $t = 2s$ تغییر جهت داده است و می دانیم هنگام بررسی

مسافت طی شده باید حواسمان به تغییر جهت دادن یا تغییر جهت ندادن جسم در بازه زمانی موردنظر باشد. اکنون گزینه ها را بررسی می کنیم:

رد گزینه (۱): متحرک در $t = 2s$ تغییر جهت داده بنابراین مسافت در بازه زمانی $t = 3s$ تا $t = 0$ (که متحرک در این بازه زمانی و در $t = 2s$ تغییر جهت داده) نمی تواند با مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t = 3s$ تا $t = 6s$ برابر باشد:

$$\begin{cases} L_{(0-3s)} = S_1 + S_2 \\ L_{(3s-6s)} = S_3 \end{cases} \Rightarrow S_1 + S_2 \neq S_3$$



برای سهولت در امر مقایسه می توانیم به a یک عدد فرضی نسبت دهیم مثلاً:

$$a = 1 \left(\frac{m}{s} \right) \Rightarrow v_{(t=2)} = a\Delta t + v_{(t=0)} \Rightarrow 0 = 2 \times 1 + v_0 \Rightarrow v_0 = -2 \frac{m}{s} \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow v = t - 2 \Rightarrow \begin{cases} t = 3s \Rightarrow v = 3 - 2 = 1 \frac{m}{s} \\ t = 6s \Rightarrow v = 6 - 2 = 4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |S_1| = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1m \\ S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 0.5\Delta m \\ S_3 = \frac{1}{2} \times 3 \times (1 + 4) = 7.5\Delta m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{(0-3s)} = |S_1| + S_2 = 1 + 0.5 = 1.5\Delta m \\ L_{(3-6s)} = S_3 = 7.5\Delta m \end{cases} \Rightarrow L_{(0-3s)} \neq L_{(3-6s)}$$

توجه: برای رد گزینه (۱) به طور شهودی نیز عمل بفرمائید! شتاب ثابت، تقارن، توجه به بازه های زمانی و ...
رد گزینه (۲):

$$\begin{cases} \Delta x_{(0-3s)} = S_2 - |S_1| \\ L_{(0-3s)} = S_2 + |S_1| \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{(0-3s)} \neq L_{(0-3s)}$$

رد گزینه (۳): شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است، پس به دلیل تقارن:

$$[(v_{av})_{0-3s} = \frac{x_{(t=3)} - x_{(t=0)}}{3 - 0} = 0] \neq [v_{(1s-5s)} (\neq 0)]$$

تأیید گزینه (۴): به دلیل اینکه شتاب ثابت است و تقارن در نمودار مکان - زمان،

$$\begin{cases} x_{(t=1s)} = x_{(t=3s)} \Rightarrow x_{(2)} - x_{(0)} = x_{(1)} - x_{(3)} \Rightarrow |x_{(2)} - x_{(1)}| = |x_{(3)} - x_{(1)}| \Rightarrow \Delta x_{(0-2s)} = \Delta x_{(1-3s)} \Rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta t_{(0-2s)}} \right| = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t_{(1-3s)}} \right| \Rightarrow (v_{av})_{0-2s} = (v_{av})_{1-3s} \\ x_{(t=0)} = x_{(t=4s)} \end{cases}$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۴۴) متحرکی در مسیر مستقیم و با شتاب ثابت فاصله ۸۰ متری از A تا B را در مدت ۸ ثانیه طی می کند و در لحظه رسیدن به نقطه B سرعتش به

متوسط - سراسری - ۱۳۸۹

۱۵ $\frac{m}{s}$ می رسد. شتاب متحرک چند متر بر مربع ثانیه است؟

۴) $\frac{5}{4}$

۳) $\frac{5}{2}$

۲) $\frac{3}{4}$

۱) $\frac{3}{2}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow 80 = \frac{15 + v_0}{2} \times 8 \Rightarrow v_0 = 5 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 15 = a \times 8 + 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \frac{m}{s^2}$$

t ثانیه نام و آخر - بازه های زمانی برابر

۴۵) معادله سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند در SI به صورت $v = 4t + 2$ است. مسافتی که این متحرک در ثانیه سوم طی

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴

می کند چند متر است؟

۴) ۱۴

۳) ۱۲

۲) ۱۰

۱) ۸

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ ثانیه سوم، فاصله زمانی بین $t = 2s$ تا $t = 3s$ است. سرعت متوسط را در این یک ثانیه حساب می کنیم.

$$\begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow v_1 = (4 \times 2 + 2) \frac{m}{s} = 10 \frac{m}{s} \\ t_2 = 3s \Rightarrow v_2 = (4 \times 3 + 2) \frac{m}{s} = 14 \frac{m}{s} \end{cases}, \bar{v} = \frac{v_2 + v_1}{2} = \frac{(14 + 10)}{2} \frac{m}{s} = 12 \frac{m}{s}$$

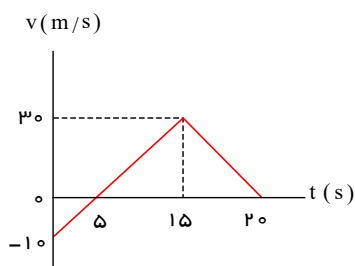
$$\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t = (12 \times 1)m = 12m$$

به این دلیل که متحرک تغییر جهت نداده است (سرعت پیوسته مثبت است)، اندازه جابه جایی با مسافت پیموده شده برابر است.

سطح زیر نمودار v-t

۴۶) نمودار سرعت - زمان متحرکی در مسیر مستقیم مطابق شکل مقابل است. سرعت متوسط آن در مدت ۲۰ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۳



۱) ۰٫۵

۲) ۲٫۵

۳) ۱۰

۴) ۱۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می دانیم که سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه جایی متحرک است. بنابراین داریم:

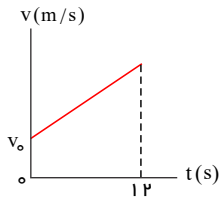
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{-10 \times 5}{2} + \frac{15 \times 30}{2}}{20} = \frac{-25 + 225}{20} = \frac{200}{20} \Rightarrow v_{av} = 10 \frac{m}{s}$$

۱۰۰ تست فیزیک فصل یک دوازدهم شتاب ثابت

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۴۷) نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در شکل روبه‌رو نشان داده شده است. سرعت متحرک در کدام لحظه برابر با سرعت متوسط آن در این ۱۲ ثانیه است؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴



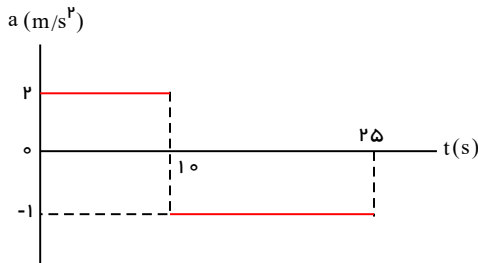
- ۱) پایان ثانیه ششم
- ۲) ابتدای ثانیه ششم
- ۳) در تمام لحظه‌ها
- ۴) در هیچ لحظه

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در هر بازه زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه وسط آن بازه زمانی است.

سطح زیر نمودار $a-t$ و رسم نمودار از روی نمودار

۴۸) نمودار شتاب - زمان متحرکی که از حال سکون روی محور x به حرکت درمی‌آید، مطابق شکل است. سرعت متحرک در لحظه $t = ۲۵$ s چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴



- ۱) ۵
- ۲) ۱۰
- ۳) ۱۵
- ۴) ۳۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ سطح زیر نمودار شتاب - زمان، برابر با تغییر سرعت است.

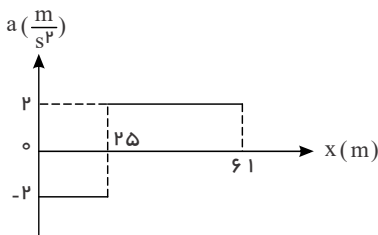
$$S = \Delta v = v_{۲۵} - v_0 \Rightarrow \Delta v = (2 \times 10) + (25 - 10)(-1) = 20 - 15 = 5 \frac{m}{s}$$

سرعت اولیه صفر است، پس سرعت در لحظه $t = ۲۵$ s برابر $۵ \frac{m}{s}$ است.

حرکت شامل چند بخش

۴۹) نمودار شتاب - مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر متحرک در لحظه $t = ۰$ از مبدأ با سرعت $۱۰ \frac{m}{s}$ عبور کند، سرعت آن در مکان $x = ۶۱$ m چند متر بر ثانیه است؟

سخت - سراسری - ۱۳۹۷



- ۱) ۲۲
- ۲) ۱۲
- ۳) ۸
- ۴) ۶

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ با استفاده از رابطه مستقل از زمان (سرعت - جابه‌جایی) می‌توان نوشت:

$$\text{مرحله اول: } V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow V^2 - 100 = 2(-2) \times 25 \Rightarrow V = 0$$

پس سرعت متحرک در مکان $x = ۲۵$ m برابر صفر است. اکنون برای محاسبه سرعت آن در مکان $x = ۶۱$ m خواهیم داشت:

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow V^2 - 0 = 2 \times 2 \times (61 - 25) \Rightarrow V^2 = 144 \Rightarrow V = 12 \frac{m}{s}$$

ترکیب معادلات - بازه‌های مختلف

۵۰) متحرکی روی خط راست با شتاب ثابت حرکت می‌کند و در مدت ۵ s، ۷۵ m جابه‌جا می‌شود و بزرگی سرعتش به $۲۰ \frac{m}{s}$ می‌رسد. در ۵ ثانیه بعدی سرعت متوسط متحرک چند متر بر ثانیه می‌شود؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۹

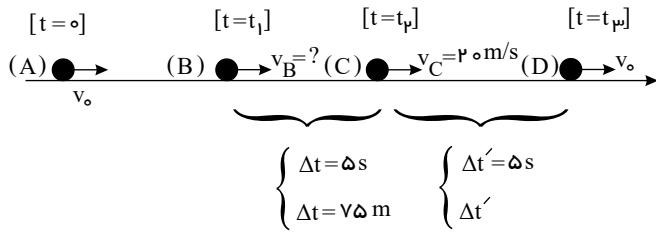
۳۵ ۴

۳۰ ۳

۲۵ ۲

۱۵ ۱

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴



گام اول: حرکت شتابدار با شتاب ثابت بر خط راست است. مدت ۵s یک بازه زمانی که ابتدا و انتهای این بازه زمانی در متن سؤال مشخص نشده است. فرض کنیم این بازه زمانی بین لحظه‌های t_1 و t_p باشد:

گام دوم: ابتدا تندی متحرک در مکان (B) و سپس شتاب حرکت (a) را می‌یابیم:

$$(B \rightarrow C): \Delta x = \left(\frac{v_B + v_C}{2}\right)(\Delta t) \rightarrow 75 = \left(\frac{v_B + 20}{2}\right)(5) \Rightarrow v_B + 20 = 30 \Rightarrow v_B = 10 \frac{m}{s} \rightarrow a = \frac{\Delta v_{BC}}{\Delta t_{BC}} = \frac{20 - 10}{5} = 2 \frac{m}{s^2} \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

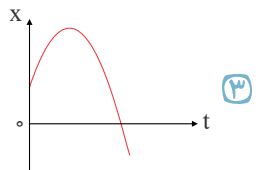
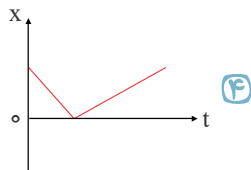
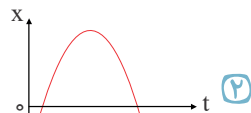
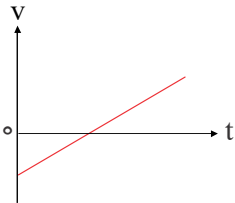
گام سوم:

$$(C \rightarrow D): \begin{cases} (v_{av})_{CD} = \left(\frac{v_D + v_C}{2}\right) = \left(\frac{20 + 20}{2}\right) = 20 \frac{m}{s} \\ v_D = v_C + a\Delta t' = 20 + 2 \times 5 = 30 \frac{m}{s} \end{cases}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۵۱) نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. نمودار مکان - زمان آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟ (منحنی‌های رسم شده در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ قسمتی از یک سهمی هستند).

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۸۵



پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ سرعت اولیه منفی است و حرکت در ابتدا کندشونده در جهت منفی و سپس تندشونده در جهت مثبت است.

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۵۲) معادله سرعت متحرکی در SI به صورت $v = 2t + 4$ است. مسافتی که متحرک در ثانیه‌ی چهارم حرکت طی می‌کند چند متر است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۲

۱۳ ۴

۱۲ ۳

۱۱ ۲

۱۰ ۱

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

سرعت اولیه و شتاب مثبت هستند و حرکت پیوسته تندشونده است و تغییر جهت وجود ندارد و مسافت طی شده با اندازه جابه‌جایی برابر است.

$$v = at = 4 \Rightarrow \begin{cases} t = 3s \Rightarrow v_3 = 10 \frac{m}{s} \\ t = 4s \Rightarrow v_4 = 12 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_3 + v_4}{2} \Delta t = \frac{10 + 12}{2} \times 1 = 11m$$

۵۳) معادله مکان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = -5t^2 + 5t + 12$ است. در مورد جهت حرکت و نوع آن کدام مطلب درست است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۸۳

۲) ابتدا در جهت محور و کندشونده

۱) همواره در جهت محور و کندشونده

۴) همواره در خلاف جهت محور و کندشونده

۳) ابتدا در خلاف جهت محور و کندشونده

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ به‌طور کلی در حرکت با شتاب ثابت، اگر ضرایب t^2 و t هم علامت باشند، حرکت همواره تندشونده و در جهت علامت ضریب t است.

ولی اگر ضرایب t^2 و t هم علامت نباشند، حرکت در ابتدا کندشونده (قبل از لحظه توقف $(t_s = |\frac{v_0}{a}|)$ در جهت علامت ضریب t و بعد از آن تندشونده (در خلاف علامت ضریب t) است.

$$x = -5t^2 + 5t + 12 \Rightarrow a = -10 \frac{m}{s^2}, v_0 = 5 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 = -10t + 5 = 0 \Rightarrow t = 0.5s$$

در ابتدای حرکت سرعت مثبت (هم علامت با ضریب t) و حرکت در جهت محور است و شتاب منفی و حرکت کندشونده است و در لحظه $t = 0.5s$ سرعت صفر می شود و جهت حرکت تغییر می کند.

مقایسه چند حرکت و شتاب نسبی

۵۴ دو متحرک از حال سکون با شتاب های $2 m/s^2$ و $8 m/s^2$ از نقطه A در مسیر مستقیم به مقصد نقطه B هم زمان به حرکت درمی آیند. اگر اختلاف زمانی رسیدن آن ها به مقصد ۳ ثانیه باشد، AB چند متر است؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۸۵

۷۲ ۴

۵۴ ۳

۴۸ ۲

۳۶ ۱

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ متحرکی که با شتاب کمتر شروع به حرکت می کند، دیرتر به نقطه B می رسد و بنابراین ۳ ثانیه بیشتر در راه است، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2}a(t+3)^2 = \frac{1}{2}a'(t)^2 \xrightarrow{a=2 \frac{m}{s^2}, a'=8 \frac{m}{s^2}} \frac{1}{2} \times 2 \times (t+3)^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 \Rightarrow t+3 = 2t \Rightarrow t = 3s$$

بنابراین متحرکی که با شتاب کمتر شروع به حرکت کرده، $6s$ در راه بوده است و داریم:

$$AB = \frac{1}{2}a(t+3)^2 \Rightarrow AB = \frac{1}{2} \times 2 \times (3+3)^2 = 36m$$

توقف - مقایسه جابه جایی و مسافت

۵۵ خودرویی با سرعت $54 \frac{km}{h}$ در حال حرکت است. هنگامی که خودرو به فاصله ۲۰ متری یک مانع می رسد، راننده با شتاب ثابت ترمز می کند و خودرو پس از ۲ ثانیه به مانع برخورد می کند. اندازه سرعت خودرو در لحظه برخورد چند کیلومتر بر ساعت است؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴

۳۶ ۴

۱۸ ۳

۱۰ ۲

۵ ۱

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با استفاده از معادله مستقل از زمان داریم:

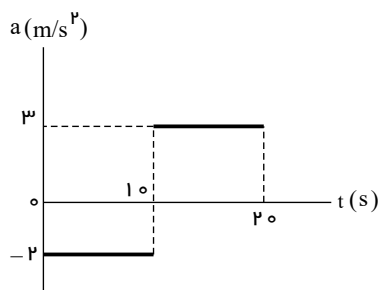
$$v_0 = 54 \frac{km}{h} = 15 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{v+v_0}{2} \times \Delta t \Rightarrow 20 = \frac{v+15}{2} \times 2 \Rightarrow v = 5 \frac{m}{s} = 18 \frac{km}{h}$$

سطح زیر نمودار $v-t$

۵۶ نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند و در لحظه $t = 0$ با سرعت اولیه $\vec{v}_0 = (10 \frac{m}{s})\vec{i}$ برای اولین بار از مبدأ مکان عبور می کند، مطابق شکل زیر است. در چه لحظه ای بر حسب ثانیه، متحرک برای سومین بار از مبدأ عبور می کند؟

متوسط - سراسری - ۱۳۹۹



۱۰ ۱

۴۰ ۲

۱۵ ۳

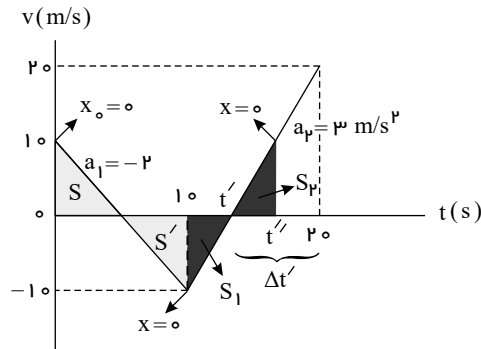
۵۰ ۴

۳۰ ۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا به کمک مفهوم شتاب، سرعت را در ثانیه های $t = 10$ و $t = 20$ می یابیم:

$$t = 10s \Rightarrow v = at + v_0 = (-2)(10) + 10 = -10 \frac{m}{s}$$

$$t = 20s \Rightarrow v_{(t=20s)} = at + v_{t=10s} = 3 \times 10 + (-10) = 20 \frac{m}{s}$$

نمودار $(v-t)$ را رسم می‌کنیم:

$$S = S' \Rightarrow x_{(t=10)} - x_{(t=0)} = S - S' = 0 \Rightarrow x_{(t=10)} = x_0 = 0$$

 S_2 مساحت مثلثی در بالای محور t است که $S_2 = S_1$ چون:

$$x_{(t=t'')} - x_{(t=10)} = S_2 - S_1 \Rightarrow 0 = S_2 - S_1 \Rightarrow S_2 = S_1$$

چون دو مثلث مشابه و هم مساحت هستند پس باید برابر باشند. طبق مفهوم شتاب از $t = t'$ تا $t = 20$ s یعنی در هر ثانیه سرعت $3 \frac{m}{s}$ افزایش یافته تا از 0 به $v_{t'} = 0$ به

$$\frac{m}{s} \Rightarrow v_{t'-20s} = 20 \frac{m}{s}$$

تغییرات سرعت
 زمان سپری شده
 $1s \rightarrow 3 \frac{m}{s} \Rightarrow \Delta t' = \frac{20}{3}s \Rightarrow t'' = t' + \frac{20}{3} = 10 + \frac{20}{3} = \frac{50}{3}s$

$$\Delta t' \rightarrow 20 \frac{m}{s} \text{ (از تساوی در مثلث کمک بگیرید.)}$$

مقایسه چند حرکت و شتاب نسبی

۵۷ دو متحرک روی خط راست با شتاب‌های ثابت a و $1,5 \frac{m}{s^2}$ از یک نقطه و از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و بعد از مدت t سرعت

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۶

آن‌ها به ترتیب $10 \frac{m}{s}$ و $22 \frac{m}{s}$ می‌شود. t چند ثانیه است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

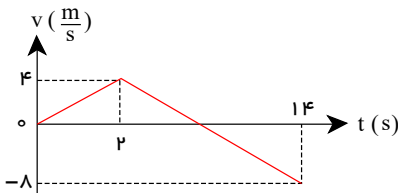
پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴)

$$v = at + \frac{v_0}{s} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = a_1 t \Rightarrow 10 = at & (1) \\ v_2 = a_2 t \Rightarrow 22 = (a + 1,5)t \end{cases} \Rightarrow 12 = 1,5t \Rightarrow t = 8s$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۵۸ متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت - زمان آن مطابق شکل روبه‌رو است. متحرک در ۱۴ ثانیه‌ی اول حرکت، چند ثانیه در

متوسط - سراسری - ۱۳۸۹

سوی مخالف محور x حرکت کرده است؟

۴ (۱)

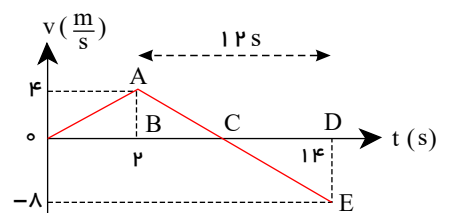
۶ (۲)

۱۲ (۳)

۸ (۴)

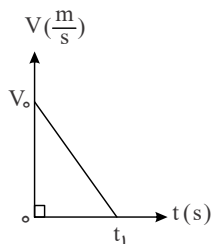
پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) با استفاده از شیب نمودار بین دو لحظه $t = 2s$ و $t = 14s$ با استفاده از تشابه مثلثها، لحظه تلاقی نمودار با محور زمان که همان لحظه تغییر جهت است را می‌یابیم.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD} \Rightarrow \frac{4}{12 - CD} = \frac{8}{CD} \Rightarrow CD = 24 - 2CD \Rightarrow CD = 8s$$

در نتیجه متحرک ۸ ثانیه دارای سرعت منفی بوده و در سوی خلاف محور x حرکت کرده است.

سطح زیر نمودار v-t

۵۹) نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر این متحرک در ۲ ثانیه اول ۳۶ متر و در ۲ ثانیه آخر ۴ متر جابه جا شده باشد، t_1 چند ثانیه است؟
سخت - خارج از کشور - ۱۳۹۷



۱۰ (۲)

۸ (۱)

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) در ۲ ثانیه آخر ۴ متر جابه جا شده و سرعت آن به صفر رسیده پس:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt \Rightarrow 4 = -\frac{1}{2}a \times 2^2 \Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

در ۲ ثانیه اول ۳۶ متر جابه جا شده است پس:

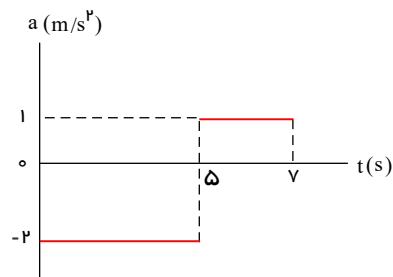
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 36 = \frac{1}{2} \times -2 \times 4 + v_0 \times 2 \Rightarrow v_0 = 20 \frac{m}{s}$$

در کل حرکت

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -2 \times t_1 + 20 \Rightarrow t_1 = 10s$$

سطح زیر نمودار a-t و رسم نمودار از روی نمودار

۶۰) نمودار شتاب - زمان متحرکی در SI به صورت شکل زیر است. اگر سرعت اولیه متحرک $20 \frac{m}{s}$ باشد، سرعت آن در لحظه $t = 7s$ چند متر بر ثانیه است؟
متوسط - سنجش - ۱۳۹۴



۸ (۱)

۱۲ (۲)

۱۰ (۳)

۱۴ (۴)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) تغییر سرعت برابر با سطح زیر نمودار شتاب - زمان است.

$$S = \Delta v = v_v - v_0$$

$$\Delta v = -2(5) + 1(7 - 5) = -10 + 2 = -8 \Rightarrow v_v - v_0 = -8 \Rightarrow v_v - 20 = -8 \Rightarrow v_v = 12 \frac{m}{s}$$

t ثانیه نام و آخر - بازه های زمانی برابر

۶۱) متحرکی با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم در زمان های مساوی و متوالی جابه جایی های x_1 و x_2 و x_3 را انجام می دهد، کدام متوسط - آزاد عصر - ۱۳۸۱ رابطه صحیح است؟

$x_2 + x_3 = 2x_1$ (۴)

$x_1 = x_2 = x_3$ (۳)

$x_1 + x_2 = x_3$ (۲)

$x_1 + x_3 = 2x_2$ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴)

$x_1 + x_3 = 2x_2$

در حرکت با شتاب ثابت جابه جایی در زمان های مساوی و متوالی تشکیل یک تصاعد عددی می دهند، بنابراین:

مقایسه چند حرکت و شتاب نسبی

۶۲ دو متحرک روی محور x از حال سکون با شتاب های a و $\frac{9}{16}a$ همزمان از یک نقطه به سوی مقصدی معین به حرکت درمی آیند و با فاصله زمانی

متوسط - سراسری - ۱۳۹۹

۲ ثانیه به مقصد می رسند. زمان حرکت جسمی که زودتر به مقصد می رسد، چند ثانیه است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گام اول: متحرک با شتاب a ، سریع تر از متحرک با شتاب $\frac{9}{16}a$ حرکت می کند. بنابراین اگر متحرک با شتاب a (را که با A نشان خواهیم داد) مسیر مستقیم معین شده را در مدت زمان Δt_A طی کند متحرک دوم (که با B نشان می دهیم) در مدت زمان $\Delta t_B = \Delta t_A + 2s$ همان مسیر را طی خواهد نمود:

$$\begin{cases} \Delta x_A = \frac{1}{2}a\Delta t_A^2 + v_{0A}\Delta t_A \\ \Delta x_B = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}a\right)(\Delta t_A + 2)^2 + v_{0B}\Delta t_B \end{cases} \xrightarrow[\substack{\Delta x_A = \Delta x_B \\ v_{0A} = v_{0B} = 0}]{\Delta x_A = \Delta x_B} a\Delta t_A^2 = \frac{9}{16}a(\Delta t_A + 2)^2 \Rightarrow \Delta t_A = \frac{3}{4}(\Delta t_A + 2) = \frac{3}{4}\Delta t_A + 1,5 \Rightarrow 0,25\Delta t_A = 1,5$$

$$\Rightarrow \Delta t_A = 6s$$

۶۳ دو متحرک A و B از یک نقطه بدون سرعت اولیه در یک مسیر مستقیم شروع به حرکت می کنند. اگر شتاب متحرک A ، 4 برابر شتاب

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۲

متحرک B باشد، در یک جابه جایی مساوی، سرعت متوسط متحرک A چند برابر سرعت متوسط متحرک B است؟

۴ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴)

$$\bar{v}_A = \frac{\Delta x}{\Delta t_A}, \bar{v}_B = \frac{\Delta x}{\Delta t_B} \Rightarrow \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$$

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{1}{2}a_A t_A^2 = \frac{1}{2}a_B t_B^2 \Rightarrow \left(\frac{t_B}{t_A}\right)^2 = \frac{a_A}{a_B} = 4$$

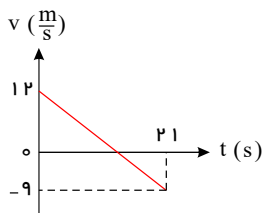
$$\Rightarrow \frac{t_B}{t_A} = 2 \Rightarrow \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = 2$$

سطح زیر نمودار $v-t$

۶۴ نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل روبه رو است. بزرگی جابه جایی متحرک در فاصله زمانی $t = 6s$

متوسط - سراسری - ۱۳۹۳

تا $t = 12s$ چند متر است؟



۱۲ (۱)

۱۸ (۲)

۲۲,۵ (۳)

۳۲,۵ (۴)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴)

با توجه به اینکه نمودار $v-t$ یک خط با شیب ثابت است، حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. پس شیب خط برابر شتاب حرکت متحرک است. بنابراین با پیدا کردن شتاب، معادله سرعت را نوشته و داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-9 - 12}{21 - 0} = -1 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0 = 12]{a = -1} v = -t + 12$$

$$\begin{cases} t_1 = 6 \rightarrow v_1 = -(6) + 12 = 6 \frac{m}{s} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = \frac{6 + 0}{2} \times (12 - 6) = 18m \\ t_2 = 12 \rightarrow v_2 = -12 + 12 = 0 \end{cases}$$

توقف - مقایسه جابه‌جایی و مسافت

۶۵) اتومبیلی با تندی (سرعت) ثابت $72 \frac{km}{h}$ در یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند که ناگهان راننده مانع ثابتی را در 52 متری خود می‌بیند و ترمز می‌کند و حرکت اتومبیل با شتاب ثابت $4 \frac{m}{s^2}$ کند می‌شود. اگر زمان واکنش راننده 0.5 ثانیه باشد، اتومبیل:

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱) ۲ متر قبل از مانع متوقف می‌شود.

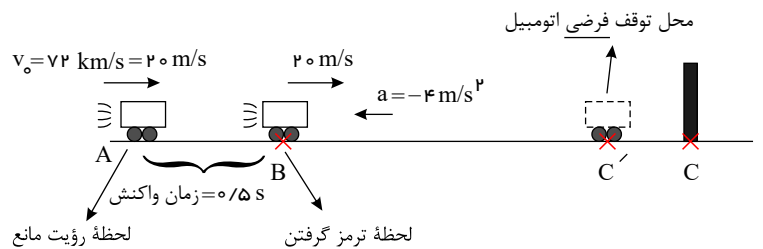
۲) ۲ متر قبل از مانع متوقف می‌شود.

۳) با تندی (سرعت) $8 \frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند.

۴) با تندی (سرعت) $4\sqrt{5} \frac{m}{s}$ به مانع برخورد می‌کند.

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ فرض کنیم جسم در نقطه C' متوقف می‌شود. طبق مفهوم شتاب $a = -4 \frac{m}{s^2}$ یعنی از $v_0 = +20 \frac{m}{s}$ در هر ثانیه $4 \frac{m}{s}$ کاسته می‌شود، پس از $5s$ متحرک متوقف می‌شود. جابه‌جایی جسم در این مدت:

$$\Delta x_{BC'} = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) \Delta t = \left(\frac{0 + 20}{2} \right) (5) = 50m$$



گام دوم: در مدت زمان واکنش راننده، اتومبیل در مدت $0.5m$ با تندی $20 \frac{m}{s}$ به مقدار $10m$ $\Delta x_{AB} = v \Delta t \Rightarrow \Delta x_{AB} = 10m$ گام سوم:

$$\Delta x_{AB} + \Delta x_{BC'} = 10 + 50 = 60m > \Delta x_{AC} = 52m$$

پس به مانع برخورد می‌کند. اما با چه تندی؟

$$v_C^2 - v_B^2 = 2a\Delta x_{BC} \Rightarrow v_C^2 - 20^2 = 2(-4)(52 - 10 = 42) \Rightarrow v_C^2 = 400 - 336 \Rightarrow v_C = 8 \frac{m}{s}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۶۶) اتومبیل A در جهت محور x با تندی ثابت $10 \frac{m}{s}$ در لحظه $t = 0$ از مبدأ محور عبور می‌کند و پس از $11s$ حرکتش با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ کند می‌شود. اتومبیل B نیز در جهت x در لحظه $t = 0$ با تندی اولیه $2 \frac{m}{s}$ از مبدأ محور عبور می‌کند و حرکتش با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ تند می‌شود و پس از 5 ثانیه با تندی ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. لحظه‌ای که دو اتومبیل به هم می‌رسند، تندی اتومبیل B چند متر بر ثانیه از تندی اتومبیل A بیشتر است؟

سخت - خارج از کشور - ۱۳۹۹

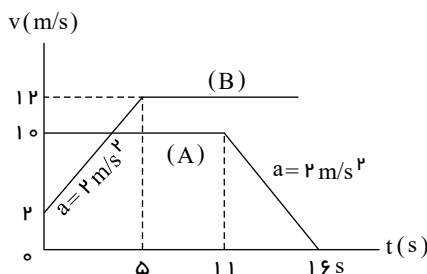
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ از نظر محاسبات یکی از تست‌های طولانی کنکور است. برای تسریع و سهولت در پاسخ‌دهی به این تست از نمودار $(v - t)$ کمک می‌گیریم؛



گام اول: نمودار $(v - t)$ هر دو متحرک را رسم می‌کنیم. سرعت متحرک (B) در پایان ثانیه پنجم:

$$v = at + v_0 = 2 \times 5 + 2 = 12 \frac{m}{s}$$

خواهد بود.

هر دو متحرک در مبدأ زمان در مبدأ مکان بوده‌اند:

$$x_{0A} = x_{0B} = 0$$

لحظه‌ای که دو اتومبیل به هم می‌رسند: $x_A = x_B$. بنابراین اگر لحظه مورد نظر را $t = t'$ در نظر بگیریم:

$$(t_p = t' \text{ تا } t_1 = 0 \text{ در بازه زمانی}) \Rightarrow \Delta x_A = \Delta x_B \text{ (جابه‌جایی دو متحرک یکسان است)}$$

گام دوم: سطح زیر نمودار $(v - t)$ برابر جابه‌جایی است؛ با کمی تأمل در شکل مشخص است که تا $t = 5s$ این اتفاق رخ نمی‌دهد. بینیم تا $t = 11s$ آیا جابه‌جایی دو متحرک (مساحت سطح زیر دو نمودار) یکسان می‌شود یا خیر؟

$$A: \Delta x_A = 11 \times 10 = 110m \text{ و } B: \Delta x_B = S + S = \frac{1}{2}(\Delta)(2 + 12) + 12 \times 6 = 35 + 72 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_A = 110m \\ \Delta x_B = 107m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_B < \Delta x_A \Rightarrow t' > 11s$$

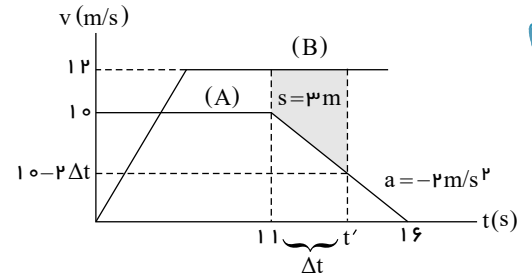
کافی است مساحت سطح زیر نمودار متحرک B از $t = 11s$ ، به بعد $3m$ بیشتر از مساحت سطح زیر نمودار A باشد.

گام سوم:

$$S = \frac{1}{2}(\Delta t)(2 + (12 - (10 - 2\Delta t))) = 3 \Rightarrow 2\Delta t + \Delta t^2 = 3 \Rightarrow \Delta t^2 + 2\Delta t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} -3s \\ 1s \end{cases} \Rightarrow t' = 12s$$

$$t' = 12s \begin{cases} v_B = 12 \frac{m}{s} \\ v_A = 10 - 2\Delta t = 10 - 2 \times 1 = 8 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_B - v_A = 12 - 8 = 4 \frac{m}{s}$$



سطح زیر نمودار v-t

۶۷) متحرکی روی محور x با شتاب ثابت حرکت می کند. اگر سرعت متحرک در لحظه $t = 0$ در جهت محور x باشد و بردار سرعت متوسط در 10 ثانیه اول حرکت برابر $\vec{v}_{av} = (7,5 \frac{m}{s})\vec{i}$ و تندی متوسط در این بازه $8,5 \frac{m}{s}$ باشد، مسافت طی شده در 2 ثانیه اول حرکت چند متر است؟

سخت- سراسری- ۱۴۰۰

۳۵ (۴)

۲۵ (۳)

۱۵ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: ۴ (۱، ۲، ۳، ۴) سرعت در $t = 0$ ، در جهت محور x است (دقت کنید در جهت محور x بودن الزاماً به مفهوم $x > 0$ بودن نیست بلکه یعنی جهت سرعت متحرک در جهت محور x است، درحالی که ممکن است $x < 0$ باشد). پس $v_0 > 0$ به کمک سرعت متوسط در 10 ثانیه اول حرکت جابه جایی متحرک را می یابیم:

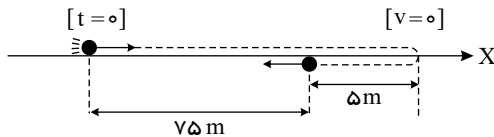
$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = v_{av}\vec{i} \Rightarrow \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\vec{i} = v_{av}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{av} \Rightarrow \Delta x = v_{av} \times 10 = 75m \quad (1)$$

تندی متوسط متحرک در همین مدت $8,5 \frac{m}{s}$ شده است، از اینکه تندی متوسط متحرک بیشتر از سرعت متوسط متحرک شده است، در می یابیم که الزاماً متحرک تغییر جهت داده است. یعنی مسافت طی شده بیشتر از جابه جایی است.

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{10} = 8,5 \Rightarrow L = 85m \quad (2)$$

با توجه به مقادیر (۱) و (۲):



حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. نمودار $(v-t)$ یک خط مایل است با $v_0 > 0$

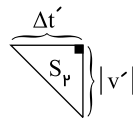
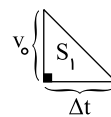
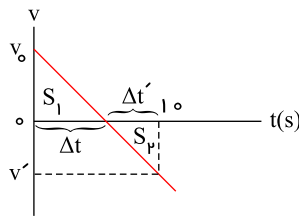
(1) , (2) $\Rightarrow S_1 = 10m, S_1 + |S_r| = 15m \Rightarrow |S_r| = 5m$

$$\frac{|v'|}{v_0} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}, \begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}v_0 \Delta t = 10 \\ S_r = \frac{1}{2}|v'| \Delta t' = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{|v'|}{|v|} \times \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ (3)

(3) $\rightarrow \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{10 - \Delta t'} = \frac{1}{2}$

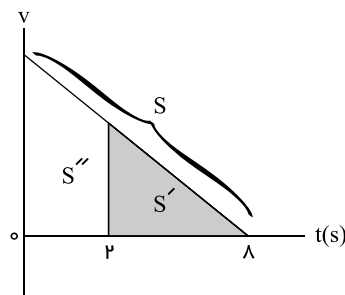
$\Rightarrow \Delta t' = 2s \Rightarrow \Delta t = 18s$



$\Rightarrow S' = ?$

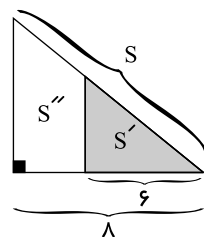
$\Rightarrow S''_{(0 \rightarrow 2s)} = \Delta x = L = ?$

$\Rightarrow S_1 = 10m$



$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{6}{18}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{S'}{10} = \frac{9}{16}$

$\Rightarrow S' = 45 \Rightarrow$ مجهول سوال $= S - S' = 10 - 45 = 35m$



توجه: می توان پس از مشخص شدن $\Delta t = 18s$, از روش زیر بهره برد به نحوی که: در بازه زمانی $(0 - 18s)$ و $(2s - 18s)$, به مسئله وارونه نگاه کنیم تا $v_0 = 0$ شود. آنگاه:

$(0 \rightarrow 18s) \rightarrow (18s \rightarrow 0) \Rightarrow \begin{cases} v_0 = v_{(t=18s)} = 0 \\ |\Delta x| = \frac{1}{2}a\Delta t^2 \Rightarrow 10 = \frac{1}{2}|a| \times 18^2 \Rightarrow |a| = 2,5 \frac{m}{s^2} \end{cases}$

$(2s \rightarrow 18s) \rightarrow (18s \rightarrow 2s) \Rightarrow \begin{cases} v_0 = v_{(t=18s)} = 0 \\ |\Delta x| = \frac{1}{2}a\Delta t^2 = \frac{1}{2}(2,5)6^2 = 45m \end{cases}$

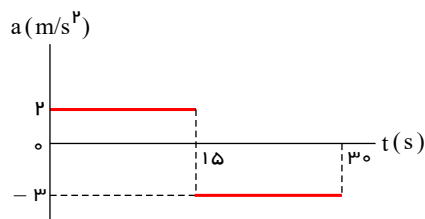
\Rightarrow مجهول تست $= S - S' = 10 - 45 = 35m$

سطح زیر نمودار a-t و رسم نمودار از روی نمودار

نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند و بردار سرعت اولیه آن در SI به صورت $\vec{v}_0 = -1 \hat{i}$ است، مطابق شکل زیر

سخت - خارج از کشور - ۱۳۹۹

است. بزرگی جابه جایی در ۵ ثانیه ششم، چند برابر بزرگی جابه جایی در ۵ ثانیه اول حرکت است؟

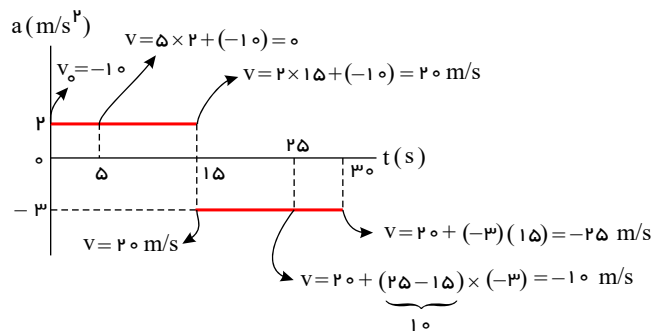


- ۱) ۳,۵
- ۲) ۲
- ۳) ۱,۵
- ۴) ۱

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: کافی است از مفهوم شتاب در هر بازه زمانی استفاده کرده، سرعت متحرک را در لحظات

$t = 5s$ و $t = 25s$ و $t = 30s$ می‌یابیم:



۵ ثانیه اول

$$\Delta x = \left(\frac{0 + (-10)}{2} \right) (\Delta t) = -25m \Rightarrow |\Delta x| = 25m$$

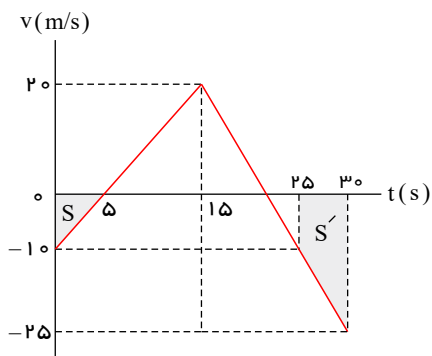
۵ ثانیه ششم

$$\Delta x' = \left(\frac{-25 + (-10)}{2} \right) (\Delta t) = \frac{-35 \times 5}{2} = -87.5m \Rightarrow |\Delta x'| = 87.5m \Rightarrow \left| \frac{\Delta x'}{\Delta x} \right| = \frac{87.5}{25} = 3.5$$

توجه: دقت کنیم در بازه زمانی داده شده شتاب ثابت بوده است. (در هر بازه زمانی جداگانه)

روش دوم: کافی است نمودار $(v - t)$ را رسم کنیم:

و در لحظات $t = 5s$ و $t = 25s$ و $t = 30s$ مشخص می‌کنیم و به کمک سطح زیر نمودار، جابه‌جایی در هر مرحله را محاسبه می‌کنیم.



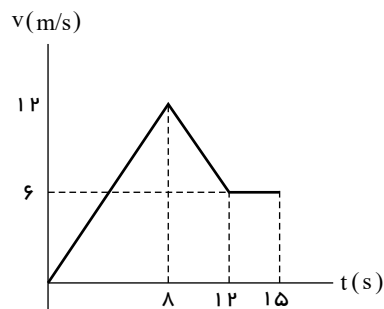
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 0 - S = -\frac{1}{2} \times 10 \times 5 = -25m \\ \Delta x' = 0 - S' = -\frac{1}{2} \times 5 \times (10 + 25) = -87.5m \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{\Delta x'}{\Delta x} \right| = \frac{87.5}{25} = 3.5$$

سطح زیر نمودار $v-t$

۶۹) نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظه $t_1 = 2s$ مکان متحرک در SI به صورت

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۹

$\vec{x}_1 = -6\vec{i}$ باشد، مکان متحرک در لحظه $t_2 = 15s$ در SI ، کدام است؟



- ۱) $93\vec{i}$
- ۲) $96\vec{i}$
- ۳) $105\vec{i}$
- ۴) $118\vec{i}$

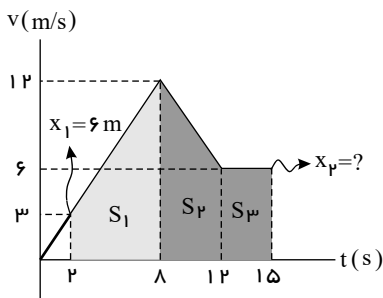
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ گام اول: ابتدا سرعت متحرک را در $t = 2s$ می‌یابیم. چندین روش وجود دارد. مثلاً اینکه از $t = 0$ تا $t = 8s$ شتاب ثابت است (چون شیب خط مماس بر

نمودار $v - t$ برابر شتاب بوده و شیب تغییر نموده است.)

$$a = (a_{av})_{0-8s} = (a_{av})_{0-2s} \Rightarrow \frac{12-0}{8-0} = \frac{v-0}{2-0} \Rightarrow v = 3 \frac{m}{s}$$

(برای یافتن v در $t = 2s$ راه‌های زیادی وجود دارد: معادله خط، تالس، مفهوم شتاب، معادله سرعت و ...)

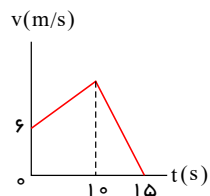
گام دوم: از $t = 2s$ تا $t = 15s$ مساحت زیر نمودار را یافته و کار تمام!



$$\Delta x = \Delta x_p - (-6) = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow x_p + 6 = \underbrace{\frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 12)}_{36} + \underbrace{\frac{1}{2} \times (4) \times (6 + 12)}_{36} + \underbrace{3 \times 6}_{18} \Rightarrow x_p + 6 = 99 \Rightarrow x_p = 93m \Rightarrow \vec{x}_p = 93\vec{i}$$

نمودار سرعت - زمان متحرکی بر مسیر مستقیم به شکل زیر و سرعت متوسط آن در ۱۵ ثانیه برابر $8 \frac{m}{s}$ است، بیشترین سرعت آن چند $\frac{m}{s}$ است؟

متوسط - آزاد عصر - ۱۳۸۱



۱۵ (۲)

۱۴ (۴)

۱۰ (۱)

۱۲ (۳)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴)

ابتدا با توجه به معلوم بودن سرعت متوسط و زمان کل حرکت، جابجایی را محاسبه می‌کنیم. پس از آن با استفاده از سطح محصور بین نمودار محور زمان (جابه‌جایی کل) مقدار مجهول را می‌یابیم.

سطح زیر نمودار $v-t$ معرف Δx می‌باشد:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 8 = \frac{\Delta x}{15} \Rightarrow \Delta x = 120m$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (6 + v) \times \frac{10}{2} + v \times \frac{5}{2} = 30 + 7.5v = 120 \Rightarrow v = \frac{90}{7.5} = 12m/s$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

متحرکی روی محور x ها از مکان $x_0 = 5m$ با سرعت اولیه $8 \frac{m}{s}$ و شتاب ثابت به حرکت درمی‌آید و در مکان $x = 8.5m$ سرعت آن به

متوسط - آزاد صبح - ۱۳۸۱

$6 \frac{m}{s}$ می‌رسد. معادله‌ی مکان این متحرک در SI کدام است؟

$x = -2t^2 + 8t + 5$ (۴)

$x = 4t^2 + 8t + 5$ (۳)

$x = -4t^2 + 8t + 5$ (۲)

$x = 2t^2 + 8t + 5$ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) برای نوشتن معادله‌ی مکان به a و v_0 نیاز داریم. v_0 مشخص است. پس باید ابتدا a را به دست آوریم، بنابراین طبق پارامترهای حرکت (معلوم: x, v, v_0).

مجهول: a) از معادله‌ی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 6^2 - 8^2 = 2 \times a \times (8.5 - 5) \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}$$

بنابراین معادله‌ی مکان - زمان اینگونه است:

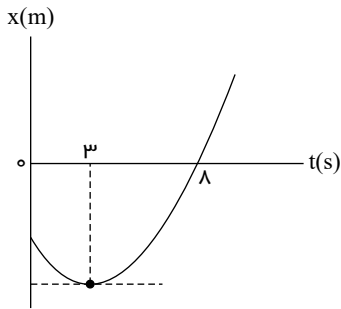
$$x = \frac{1}{2} \times (-4) \times t^2 + 8t + 5 \Rightarrow x = -2t^2 + 8t + 5$$

نمودار مکان-زمان یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۷۲) نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 8s$

متوسط - سراسری - ۱۴۰۰

چند برابر مسافت طی شده در این بازه زمانی است؟



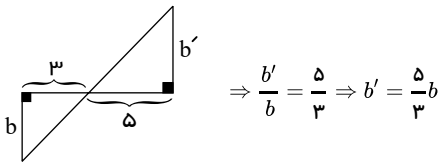
۱) $\frac{5}{17}$

۲) $\frac{5}{14}$

۳) $\frac{8}{17}$

۴) $\frac{9}{14}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ ساده‌ترین راه، رسم نمودار $(v - t)$ و استفاده از مساحت زیر نمودار آن‌هاست:



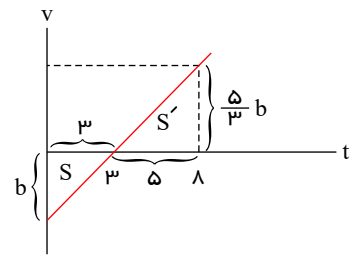
$$|S| = \frac{1}{2} (3)(b) = \frac{3b}{2}$$

$$S' = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}b \right) (5) = \frac{25b}{6}$$

$$\Delta x = S' - |S| = \frac{8}{3}b$$

$$L = S' + |S| = \frac{34}{6}b$$

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{\frac{8}{3}b}{\frac{34}{6}b} = \frac{8}{17}$$

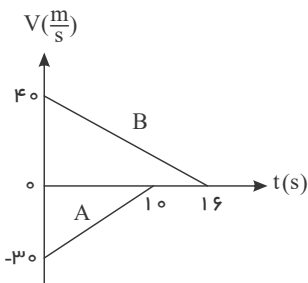


نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۷۳) نمودار سرعت - زمان دو قطار A و B که روی یک ریل مستقیم به طرف هم حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در لحظه $t = 0$ فاصله

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۷

قطارها از هم ۵۰۰ متر است. لحظه‌ای که قطار A می‌ایستد، قطار B در چه فاصله‌ای از آن قرار دارد؟



۱) ۲۵

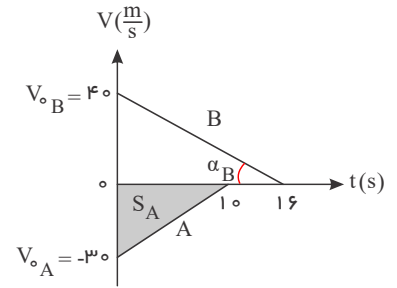
۲) ۷۵

۳) ۱۰۰

۴) ۱۲۵

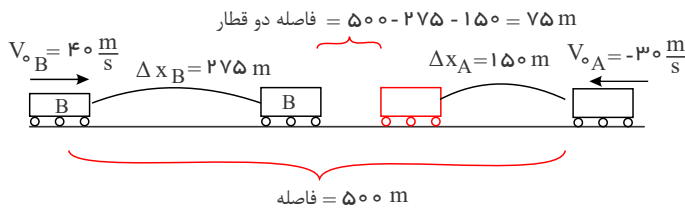
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ در لحظه $t = 10s$ قطار A می‌ایستد در نتیجه ابتدا باید جابه‌جایی قطار B را تا این لحظه پیدا کنیم:

$$\begin{cases} B \text{ شیب خط} = a_B = -\frac{40}{16} = -2,5 \frac{m}{s^2} \\ \Delta x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + V_{0B} t \\ \Rightarrow \Delta x_B = \frac{1}{2} (-2,5) 10^2 + 4 \times 10 \Rightarrow \Delta x_B = 275 m \end{cases}$$



جابه‌جایی متحرک A را با استفاده از سطح زیر نمودار A به دست می‌آوریم.

$$\Delta x_A = S_A = \frac{3 \times 10}{2} = 150 m$$



حرکت شامل چند بخش

متحرکی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت $5 \frac{m}{s^2}$ به حرکت درمی‌آید و پس از مدتی حرکتش یکنواخت می‌شود و در نهایت با همان شتاب $5 \frac{m}{s^2}$ حرکتش کند شده و می‌ایستد. اگر کل زمان حرکت ۲۵ ثانیه و سرعت متوسط در این مدت $20 \frac{m}{s}$ باشد، زمانی که حرکت متحرک یکنواخت بوده است، چند ثانیه است؟

سخت- سراسری- ۱۳۹۷

۲۰ (۴)

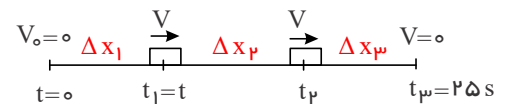
۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم اگر در حرکت شتاب‌دار ثابت سرعت متحرکی پس از t ثانیه از V_0 به V برسد و سپس در مرحله بعد، سرعتش را با همان شتاب کاهش داده به طوری که پس از t' ثانیه از V مجدداً به V_0 برسد، در این صورت ($\Delta x_1 = \Delta x_2$, $t = t'$) خواهد بود و داریم:

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 20 = \frac{\Delta x}{25} \Rightarrow \Delta x = 500 m$$



$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \Rightarrow 500 = \frac{V+0}{2} \times t + V(25-t) + \frac{V+0}{2} \times t$$

$$\xrightarrow{V=at} 500 = \frac{5t^2}{2} + 125t - 10t^2 + \frac{5t^2}{2} = -5t^2 + 125t \Rightarrow t^2 - 25t + 100 = 0$$

$$\Rightarrow (t-20)(t-5) = 0 \Rightarrow t = 20 s \text{ , } t = 5$$

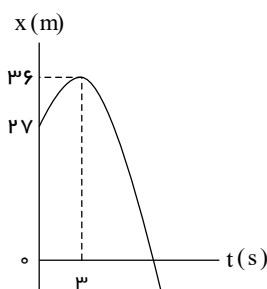
حال با داشتن مدت زمان t برای محاسبه مدت زمان حرکت یکنواخت متحرک داریم:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 25 s \Rightarrow t + \Delta t_2 + t = 25 \Rightarrow \Delta t_2 = 25 - 2t = 25 - 10 = 15 s \Rightarrow \Delta t_{\text{یکنواخت}} = 15 s$$

سطح زیر نمودار v-t

۷۵) شکل زیر، نمودار مکان - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مسافتی که متحرک در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 10$ s طی می‌کند، چند متر است؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۹



- پاسخ: ۱) ۴۰
۲) ۴۵
۳) ۵۸
۴) ۸۵

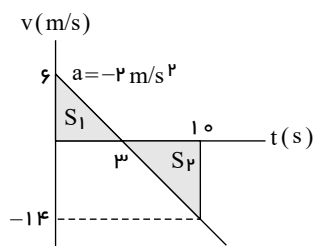
توجه: هنگامی که مسافت طی شده خواسته می‌شود باید توجه کنیم ممکن است حرکت رفت و برگشت باشد (در نمودار $(x - t)$ نقاط \min و \max در نمودار $(v - t)$ محور تقاطع نمودار با محور افقی t و تغییر علامت v). برای یافتن مسافت طی شده و نیز تندی متوسط S_{av} (که به مسافت طی شده توسط متحرک وابسته است). رسم نمودار $(v - t)$ و استفاده از مساحت سطح زیر نمودار آن یکی از راه‌کارهای مناسب است.

گام اول: سرعت اولیه را می‌یابیم. شتاب ثابت است و در $t = 3$ s، سرعت متحرک صفر است. (شیب خط مماس برابر سرعت در هر لحظه است).

$$(t_2 = 10 \text{ s تا } t_1 = 0 \text{ در بازه زمانی}) \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) \Delta t \Rightarrow 36 - 27 = \left(\frac{0 + v_0}{2}\right)(3 - 0) \Rightarrow 9 = \frac{3}{2}v_0 \Rightarrow v_0 = 6 \frac{m}{s} \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 6}{3 - 0} = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

گام دوم: نمودار $(v - t)$ را رسم می‌کنیم:



در هر ثانیه $2 \frac{m}{s}$ از تندی کاسته می‌شود، پس:

$$t = 3 \text{ s} \rightarrow v = 0$$

$$t = 10 \text{ s} \rightarrow v = 6 - 2 \times 10 = -14 \frac{m}{s}$$

$$t = 10 \text{ s تا } t = 0 \text{ از مسافت طی شده: } L = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 + \frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 9 + 49 = 58 \text{ m}$$

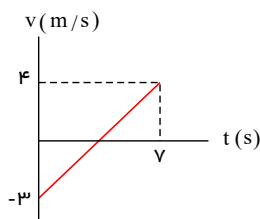
روش دوم: با استفاده از دنباله‌ای که جابه‌جایی‌ها در حرکت با شتاب ثابت در هر ثانیه تشکیل می‌دهد نیز به پاسخ رسید.

$$L = 58 \text{ m}$$

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۷۶) نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به صورت شکل زیر است. جابه‌جایی این متحرک در فاصله‌ی زمانی $t = 3$ s تا $t = 5$ s، چند متر است؟

متوسط - سنجش - ۱۳۹۴



- پاسخ: ۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

نمودار سرعت - زمان خط راست است، پس شتاب حرکت مقدار ثابتی است.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4 - (-3)}{7} = 1 \frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow x = \frac{1}{2}t^2 - 3t$$

$$\begin{cases} t_1 = 3s \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(9) - 3(3) = 4,5 - 9 = -4,5m \\ t_2 = 5s \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(25) - 15 = -2,5m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -2,5 - (-4,5) = 2m$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۷۷) متحرکی روی محور x ها از مکان $x_0 = 4m$ با سرعت اولیه $4 \frac{m}{s}$ و شتاب ثابت به حرکت درمی آید و در مکان $x = 10m$ سرعت آن به $8 \frac{m}{s}$ می رسد. معادله‌ی حرکت آن در SI کدام است؟
متوسط - آزاد عصر - ۱۳۸۹

۱) $x = -2t^2 + 4t + 4$ ۲) $x = t^2 + 4t + 4$ ۳) $x = 2t^2 + 4t + 4$ ۴) $x = -t^2 + 4t + 4$

پاسخ: ۴) در ابتدا با استفاده از رابطه سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان)، شتاب حرکت و پس از آن معادله حرکت را می‌نویسیم.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 8^2 - 4^2 = 2 \times a \times (10 - 4) \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

بنابراین معادله‌ی مکان - زمان اینگونه است:

$$x = \frac{1}{2} \times 4t^2 + 4t + 4 \Rightarrow x = 2t^2 + 4t + 4$$

۷۸) معادله حرکت جسمی در SI به صورت $x = 2t^3 - 6t^2 + 6t$ است. در بازه زمانی صفر تا ۲ ثانیه، کدام مورد درست است؟
سخت - سراسری - ۱۳۹۷

- ۱) شتاب متوسط برابر صفر است. ۲) جهت حرکت یک بار تغییر کرده است.
۳) حرکت ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است. ۴) حرکت ابتدا در جهت محور x و سپس خلاف جهت محور x است.

پاسخ: ۴) ابتدا معادله سرعت و شتاب متحرک را محاسبه کرده و سپس به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$x = 2t^3 - 6t^2 + 6t \Rightarrow V = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 12t + 6 \Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = 12t - 12$$

گزینه (۱):

$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow V_1 = 6 \\ t_2 = 2 \rightarrow V_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \bar{a} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{6 - 6}{2 - 0} = 0$$

گزینه (۲):

$$V = 0 \Rightarrow 6t^2 - 12t + 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

لحظه $t = 1(s)$ ریشه مضاعف معادله سرعت است، بنابراین در این لحظه سرعت صفر می‌شود اما تغییر جهت نمی‌دهد.

گزینه (۳): برای بررسی تندشونده یا کندشونده بودن حرکت، معادله سرعت و شتاب را تعیین علامت می‌کنیم:

$$V = 0 \Rightarrow 6t^2 - 12t + 6 = 0 \Rightarrow 6(t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$a = 0 \Rightarrow 12t - 12 = 0 \Rightarrow t = 1$$

بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

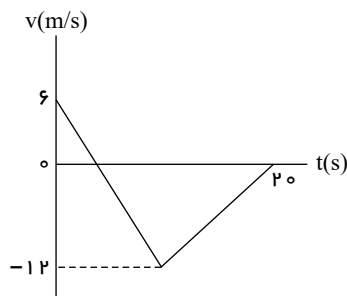
	t=1		
V	+	0	+
a	-	0	+
	تندشونده		کندشونده

گزینه (۴): با توجه به تعیین علامت سرعت و مضاعف بودن ریشه $t = 1(s)$ می‌توان نتیجه گرفت متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و سرعت همواره مثبت است یعنی حرکت همواره در جهت محور x است.

سطح زیر نمودار v-t

۷۹) شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند. تندی متوسط متحرک در مدتی که در خلاف جهت محور حرکت می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟

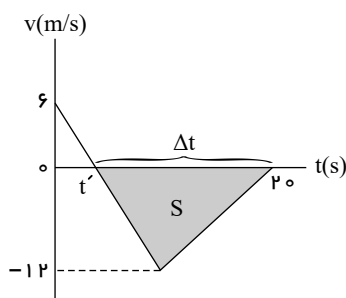
متوسط - سراسری - ۱۴۰۰



- پاسخ: ۱) صفر
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۹

پاسخ: ۱) ۲) ۳) ۴)

هنگامی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، $v > 0$ است و وقتی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، $v < 0$ است. پس در بازه زمانی صفر تا t' چون $v > 0$ است متحرک در جهت محور x و در بازه زمانی t' تا $t = 20s$ چون $v < 0$ است متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.



در بازه زمانی t' تا $t = 20s$:

$$L = (S) = \frac{1}{2}(12)(\Delta t)$$

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{6\Delta t}{\Delta t} = 6 \frac{m}{s}$$

توجه: نکته مهم این بود که نیازی به یافتن t' نبود. این سؤال در سال‌های اخیر مورد توجه طراحان بوده است.

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۸۰) معادله‌ی حرکت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $x = -t^2 + 6t + 20$ است. در کدام فاصله‌ی زمانی، این حرکت کندشونده است؟

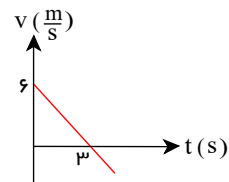
متوسط - خارج از کشور - ۱۳۸۵

- ۱) $t < 3$ ۲) $t < 4$ ۳) $6 < t$ ۴) $3 < t < 6$

پاسخ: ۱) ۲) ۳) ۴) بدیهی است که تا قبل از لحظه توقف یعنی $t_s = \left| \frac{v_0}{a} \right|$ حرکت کندشونده است.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = -t^2 + 6t + 20 \Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}, v_0 = 6 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 = -2t + 6$$



با توجه به نمودار سرعت - زمان حرکت متحرک قبل از $t = 3s$ کندشونده است.

۸۱) متحرکی بر مسیر مستقیم با شتاب ثابت مسافت ۱۲۰ متر را در ۸ ثانیه طی می‌کند، اگر سرعت متحرک در پایان مسیر ۵ برابر سرعت اولیه آن باشد شتاب حرکت چند $\frac{m}{s^2}$ است؟

متوسط - آزاد عصر - ۱۳۸۵

- ۱) ۲٫۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱٫۶

پاسخ: ۱) ۲) ۳) ۴) با استفاده از رابطه مستقل از شتاب، مقدار سرعت اولیه و البته سرعت نهایی ($v = 5v_0$) را یافته، پس از آن شتاب حرکت را تعیین می‌کنیم.

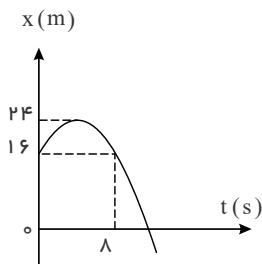
$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \times \Delta t \Rightarrow 120 = \frac{v_0 + 5v_0}{2} \times 8 \Rightarrow v_0 = 5 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 5 \times 5 = a \times 8 + 5 \Rightarrow a = 2,5 \frac{m}{s^2}$$

نمودار مکان-زمان یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۸۲) نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل زیر به صورت سهمی است. در بازه زمانی ۰ تا ۸s بزرگی شتاب متوسط و سرعت متوسط در SI، کدام است؟

متوسط - سراسری - ۱۳۹۷



۱) ۱ و صفر

۲) ۲ و صفر

۳) ۱ و ۱

۴) ۲ و ۲

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا سرعت متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{16 - 16}{8 - 0} = 0$$

نمودار مکان - زمان متحرک سهمی است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت حرکت شتاب ثابت است ($a = \bar{a}$). اکنون با توجه به اطلاعات روی نمودار بین لحظه $t = 4$ تا $t = 8$ و به کمک رابطه مستقل از سرعت اولیه داریم:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + Vt \Rightarrow 8 = -\frac{1}{2}a \times 4^2 + 0 \times 4 \Rightarrow a = -1 \frac{m}{s^2}$$

توجه: شیب نمودار $x - t$ در لحظه $t = 4$ برابر صفر است، یعنی در این لحظه $V = 0$ است.

توقف - مقایسه جابه‌جایی و مسافت

۸۳) اتومبیلی با سرعت 90 km/h در حرکت است. راننده ناگهان مانعی را در فاصله 80 متری خود می‌بیند و ترمز می‌کند. اگر زمان تأخیر در واکنش راننده $0,4 \text{ s}$ باشد و اندازه شتاب کند شدن اتومبیل در حین ترمز 5 m/s^2 باشد، اتومبیل:

متوسط - خارج از کشور - ۱۳۸۶

۲) به مانع برخورد می‌کند.

۱) در $7,5$ متری مانع می‌ایستد.

۴) در لحظه رسیدن به مانع متوقف می‌شود.

۳) در فاصله 1 متری مانع می‌ایستد.

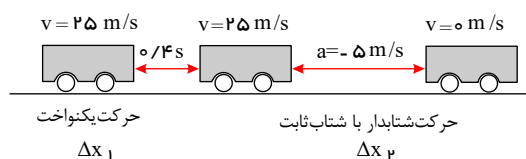
پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ در مدت $0,4 \text{ s}$ اتومبیل با سرعت ثابت (حرکت یکنواخت) و پس از آن با شتاب ثابت کندشونده حرکت می‌کند.

$$v_0 = 90 \div 3,6 = 25 \text{ m/s}$$

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t_1 = 25 \times 0,4 = 10 \text{ m}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 25^2 = 2(-5)\Delta x_2$$

$$\Rightarrow \Delta x_2 = 62,5 \text{ m}$$

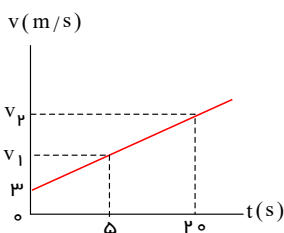


بنابراین از لحظه‌ای که راننده مانع را در 80 متری خود می‌بیند تا توقف کامل $72,5 \text{ m}$ جابه‌جا می‌شود، در نتیجه اتومبیل در $7,5$ متری مانع می‌ایستد.

نمودار سرعت-زمان و شتاب-زمان در حرکت با شتاب ثابت

۸۴) شکل زیر نمودار سرعت - زمان متحرکی را نشان می‌دهد که شتاب آن 2 m/s^2 است، سرعت متوسط این متحرک بین دو متوسط - آزاد صبح - ۱۳۸۲

لحظه $t_1 = 5 \text{ s}$ و $t_2 = 20 \text{ s}$ چند m/s است؟



۱) ۲۸

۲) ۱۴

۳) ۳۰

۴) ۱۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا می‌توان به کمک شتاب و سرعت اولیه، سرعت نقاط مورد نظر را به دست آورد و سپس می‌توان سرعت متوسط را محاسبه کرد:

$$v = at + v_0 \quad \begin{cases} t_1 = 5 \rightarrow v_1 = 2 \times 5 + 3 = 13 \text{ m/s} \\ t_2 = 20 \rightarrow v_2 = 2 \times 20 + 3 = 43 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow v_{av} = \frac{13 + 43}{2} = 28 \text{ m/s}$$

توقف - مقایسه جابه جایی و مسافت

۸۵) اتومبیلی با تندی ثابت در یک مسیر مستقیم در حال حرکت است. راننده با شتاب ثابت ترمز می کند و پس از طی مسافت ۱۵۰ متر، تندی اتومبیل

متوسط - خارج از کشور - ۱۴۰۰

نصف می شود. اتومبیل از لحظه ترمز تا توقف کامل چند متر را طی می کند؟

۳۰۰ (۴)

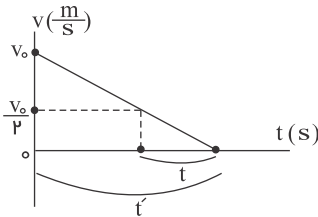
۲۵۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۱۷۵ (۱)

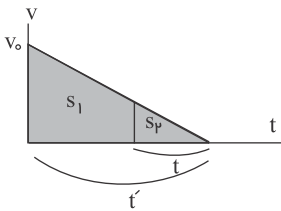
پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴)

اگر نمودار سرعت - زمان متحرک را از لحظه ترمز (شروع حرکت کندشونده) تا توقف رسم کنیم، داریم:



با توجه به تشابه مثلث ها:

$$\frac{t'}{t} = \frac{v_0}{\frac{v_0}{2}} = 2$$



از طرفی می دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه، معادل مجذور نسبت تشابه به آن هاست یعنی:

$$\frac{(S_2 + S_1)}{S_1} = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = 2^2 = 4$$

مساحت مثلث بزرگ

از طرفی می دانیم که:

$$S_2 = 3S_1$$

$$S_2 \rightarrow \Delta x = 150 \text{ m} \xrightarrow{S_1 \Delta x_1} 150 = 3 \Delta x' = 50 \text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = 150 + 50 \rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = 200 \text{ m}$$

حرکت شامل چند بخش

۸۶) نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی محور x از مکان $x_0 = -36 \text{ m}$ شروع به حرکت می کند، مطابق شکل روبه رو است. پس از چند ثانیه

سخت - خارج از کشور - ۱۳۸۹

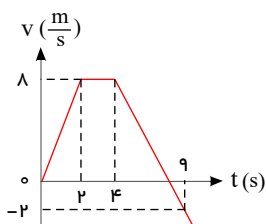
متحرک برای اولین بار از مبدأ مکان می گذرد؟

۶ (۲)

۲ (۱)

۱۰ (۴)

۸ (۳)



پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) سطح زیر نمودار در بازه $0 < t < 4 \text{ s}$ را به دست می آوریم.

$$S = \frac{4 + 2}{2} \times 8 = 24 \text{ m} = x_f - x_0 = x_f - (-36) \Rightarrow x_f = -12 \text{ m}$$

بنابراین متحرک 12 m دیگر باید جابه جا شود تا به مبدأ مکان برسد.

در $t > 4 \text{ s}$ داریم:

$$a = \frac{v_9 - v_4}{9 - 4} = \frac{(-2) - 8}{5} = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = -t^2 + 8t = +12 \Rightarrow (t - 6)(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ یا } t = 6 \Rightarrow t = 2 \text{ ق}$$

$$\Rightarrow t_{\text{رسیدن}} = 6s$$

مفاهیم اولیه و معادلات حرکت با شتاب ثابت بر خط راست

۸۷) متحرکی با شتاب ثابت روی محور x حرکت می کند و در لحظه های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 5s$ از مبدأ مکان عبور می کند و در لحظه ای که به مکان

$x = -1m$ می رسد، جهت حرکتش عوض می شود. تندی متوسط متحرک از لحظه $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 5s$ چند متر بر ثانیه است؟ سخت- سراسری- ۱۴۰۰

۶ (۴)

$\frac{17}{5}$ (۳)

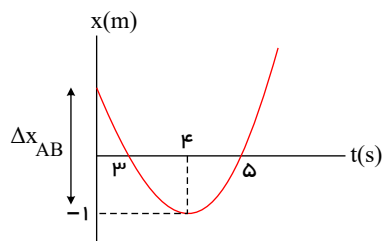
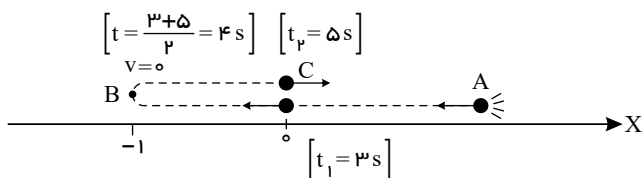
۳ (۲)

$\frac{13}{5}$ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴) هرگاه در یک حرکت شتابدار با شتاب ثابت a و v_0 مختلف علامت باشند، حرکت به صورت رفت و برگشت است. اگر در چنین شرایطی متحرک در لحظات t_1

و t_2 از یک مکان عبور نموده باشد، در $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ تغییر جهت داده و $v = 0$ شده است. چون در $x = -1(m)$ تغییر جهت داده (در $x < 0$) و در دو لحظه $t_1 = 3s$ و $t_2 = 5s$ نیز از

مبدأ مکان عبور نموده راهی وجود ندارد جز اینکه:



روش وارونه دیدن!

$$A \rightarrow B \rightarrow (B \rightarrow A) : \Delta x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = \lambda a \Rightarrow \Delta x_{AB} = 16m$$

$$B \rightarrow C \rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}a(1)^2 = 0.5a = 1 \rightarrow a = 2$$

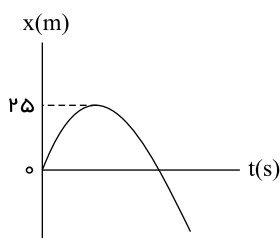
$$\Rightarrow x_0 = 15m \Rightarrow S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{16 + 1}{5} = \frac{17}{5} \frac{m}{s}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

۸۸) نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متحرک در مکان $x = -375m$ برابر $\frac{m}{s}$ ۴۰

متوسط - خارج از کشور - ۱۴۰۱

باشد، چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟



۱۵ (۲)

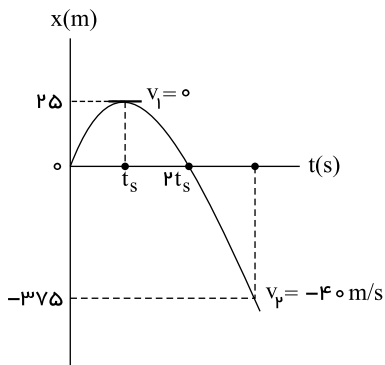
۲۰ (۱)

۵ (۴)

۱۰ (۳)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به اینکه جابه‌جایی متحرک از لحظه توقف ($v_1 = 0$) تا مکان $x = -375m$ معلوم است. $(\Delta x = -375 - 25 = -400m)$ و نیز معلوم بودن سرعت متحرک در مکان $x = -375m$ ، با استفاده از رابطه سرعت - جابه‌جایی، شتاب حرکت متحرک را می‌یابیم.



$$v_p^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \rightarrow (-40)^2 - 0 = 2(a)(-400) \rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

و در مدتی که $x > 0$ است، بردار مکان متحرک در جهت محور x است (که در اینجا معادل $2t_s$ است). بنابراین برای پیدا کردن t_s ، از رأس سهمی تا مبدأ مکان در امتداد محور x برمی‌گردیم، یعنی:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{\Delta x = -25m \\ a = -2 \frac{m}{s^2}}]{} -25 = \frac{1}{2}(-2)(t_s)^2 \rightarrow t_s = 5s$$

و مدتی که بردار مکان متحرک در جهت مثبت محور x است:

$$\Delta t = 2t_s = 10s$$

حرکت شامل چند بخش

۸۹ متحرکی با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی t_1 تا $t_1 + 16(s)$ برابر 400 متر است. اگر نیمی از این جابه‌جایی در 4 ثانیه اول و نیم دیگر آن در 12 ثانیه بعد از آن انجام شود، بزرگی شتاب حرکت در SI کدام است؟ متوسط - سراسری - 1401

$\frac{25}{6}$ (۴)

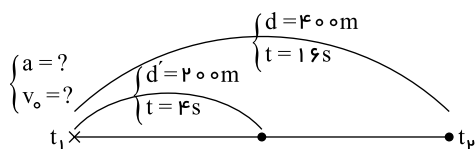
$\frac{25}{3}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

در ابتدا مسیر حرکت متحرک را به صورت زیر رسم کرده و یک‌بار معادله جابه‌جایی را در 4 ثانیه اول و بار دیگر در کل 16 ثانیه می‌نویسیم تا با حل یک دستگاه معادلات، بزرگی شتاب را بیابیم.



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

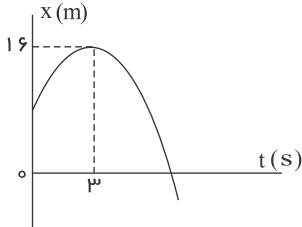
$$\begin{cases} \text{در چهار ثانیه اول: } 200 = \frac{1}{2}a(4)^2 + 4v_0 \\ \text{در کل 16 ثانیه: } 400 = \frac{1}{2}a(16)^2 + 16v_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 200 = 8a + 4v_0 \\ 400 = 128a + 16v_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{25}{6} \frac{m}{s^2} \\ v_0 = \frac{175}{3} \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$|a| = \frac{25}{6} \frac{m}{s^2}$$

و برای تعیین بزرگی شتاب:

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

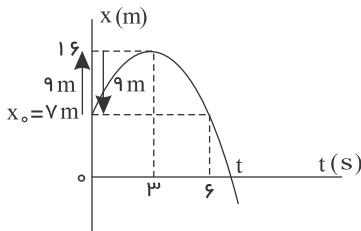
۹۰ نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در بازه زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 6s$ متوسط - خارج از کشور - 1400 تندی متوسط متحرک برابر $3 \frac{m}{s}$ باشد، چند ثانیه بردار مکان متحرک در جهت محور x است؟



- ۱ ۹
۲ ۸
۳ ۷
۴ ۳

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

چون حرکت با شتاب ثابت است، نمودار $x - t$ به صورت قسمتی از یک سهمی است و با توجه به وجود تقارن نسبت به راس سهمی داریم:



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow 3 = \frac{\ell}{6} \rightarrow \ell = 18m$$

یعنی در ۳ ثانیه اول ۹ متر در جهت محور رفته و در ۳ ثانیه بعد ۹ متر را برگشته است.

حال در ۳ ثانیه اول، از راس سهمی که $v = 0$ است، برمی‌گردیم: (در این ۳ ثانیه ۹ متر برمی‌گردیم.)

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \rightarrow -9 = \frac{1}{2} \times a \times (3)^2 \rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

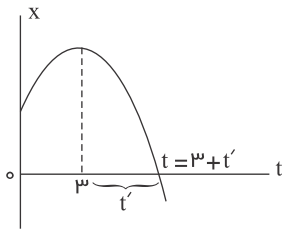
و برای تعیین زمان حرکت از $x = 16$ تا $x = 0$ (از لحظه مربوط به راس سهمی تا لحظه $x = 0$) داریم: (در راس سهمی $v = 0$ است)

$$\Delta x = \frac{1}{2}a't'^2 \rightarrow -16 = \frac{1}{2}(-2)t'^2 \rightarrow t' = 4s$$

پس در نهایت:

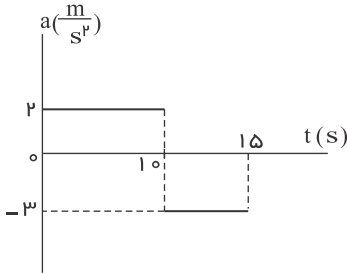
$$t = 3 + t' = 3 + 4 \rightarrow t = 7s$$

یعنی در مدت ۷ ثانیه اول $x > 0$ یعنی بردار مکان در جهت محور x است.



سطح زیر نمودار $a-t$ و رسم نمودار از روی نمودار

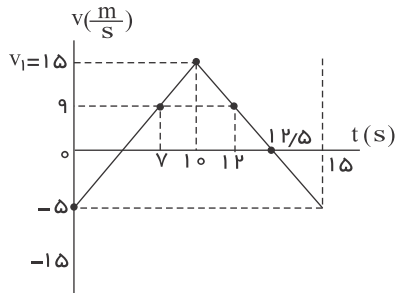
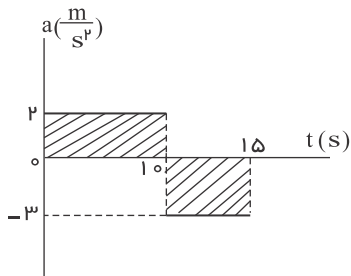
۹۱) نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظه $t = ۳s$ سرعت متحرک، $\vec{v} = (1 \frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = ۷s$ تا $t_2 = ۱۰s$ چند متر بر ثانیه است؟
سخت - خارج از کشور - ۱۴۰۰



- ۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۵

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

در ابتدا از روی نمودار $a-t$ داده شده نمودار $v-t$ را رسم کرده، سپس با تعیین جابه جایی (سطح محصور بین نمودار $v-t$ و محور زمان)، سرعت متوسط را می یابیم. قبل از هر چیزی داریم:



در سه ثانیه اول

$$V = at + v_0 \rightarrow 1 = 2 \times 3 + v_0 \rightarrow v_0 = -5 \frac{m}{s}$$

$$\Delta V_1 = 20 = v_1 - v_0 = v_1 - (-5) \rightarrow v_1 = 15 \frac{m}{s}$$

$$\Delta V_2 = -30 = v_2 - v_1 = v_2 - (15) \rightarrow v_2 = -15 \frac{m}{s}$$

$t_1 = ۷s$ در: $v = at + v_0 \rightarrow v = 2 \times 7 - 5 \rightarrow v = 9 \frac{m}{s}$

$t_2 = ۱۲s$ در: $v' = a't' + v'_0 \rightarrow v' = -3 \times 2 + 15 \rightarrow v' = 9 \frac{m}{s}$

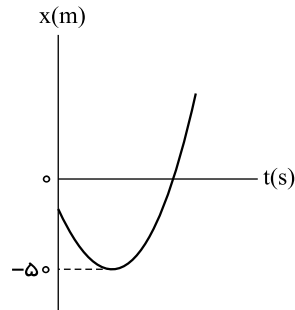
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 = S_{\text{خزانه}} = \frac{15+9}{2} \times 3 = 36m \\ \Delta x_2 = S'_{\text{خزانه}} = \frac{15+9}{2} \times 2 = 24m \end{array} \right. \rightarrow \Delta y_{\text{کل}} = 36 + 24 = 60m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{60}{12-7} \rightarrow v_{av} = 12 \frac{m}{s}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

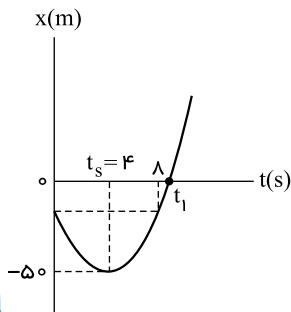
۹۲) نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است، و سرعت متوسط در ۸ ثانیه اول حرکت برابر صفر است. اگر در لحظه t_1 که متحرک از مبدأ محور عبور می‌کند، تندی آن $20 \frac{m}{s}$ باشد، سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 چند متر بر ثانیه است؟

سخت - خارج از کشور - ۱۴۰۱



- پاسخ:
- ۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴



یکی از روش‌ها برای تعیین سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت، استفاده از رابطه $v_{av} = \frac{v_2 + v_1}{2}$ است. (البته روش‌های دیگری نیز برای حل سؤال مثلاً تعریف سرعت متوسط $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ و ... نیز وجود دارد که خودتان می‌توانید آنها را تمرین کنید) به همین دلیل، بار اول با نوشتن رابطه سرعت - جابه‌جایی بین دو مکان $x_2 = 0$ و $x_1 = -5.0m$ (لحظه عبور از مبدأ مکان)، شتاب حرکت را می‌یابیم.

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(\Delta x) \xrightarrow[\substack{v_1=0, v_2=20 \frac{m}{s} \\ \Delta x = x_2 - x_1 = 0 - (-5.0) = 5.0m}]{(20)^2 - (0)^2 = (2)(a)(5.0)} a = 4 \frac{m}{s^2}$$

حال با توجه به اینکه در ۸ ثانیه اول حرکت، سرعت متوسط متحرک صفر شده، جابه‌جایی‌اش در این مدت صفر بوده، پس در $t_s = 4s$ متوقف شده و تغییر جهت داده است. بنابراین با نوشتن معادله سرعت در ۴ ثانیه اول داریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=4s]{v=0} 0 = (4)(4) + v_0 \Rightarrow v_0 = -16 \frac{m}{s}$$

و در نهایت برای تعیین سرعت متوسط در t_1 ثانیه اول حرکت داریم:

$$v_{av} = \frac{v_0 + v}{2} \xrightarrow[v=20 \frac{m}{s}]{v_0 = -16 \frac{m}{s}} v_{av} = \frac{-16 + 20}{2} \Rightarrow v_{av} = 2 \frac{m}{s}$$

حرکت شامل چند بخش

۹۳) متحرکی با شتاب ثابت $\vec{a} = (4 \frac{m}{s^2})\vec{i}$ در جهت محور x ، در حرکت است. اگر مسافتی که این متحرک در فاصله زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 3s$ طی می‌کند، ۴ متر بیشتر از مسافتی باشد که در ثانیه سوم طی می‌کند، سرعت اولیه آن چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - سراسری - ۱۴۰۱

۲) ۴

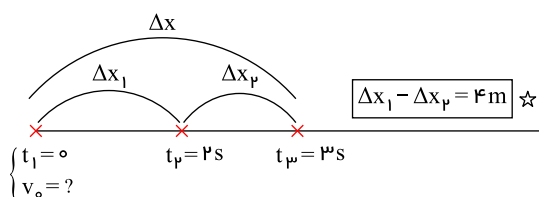
۴) ۳

۶) ۲

۸) ۱

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

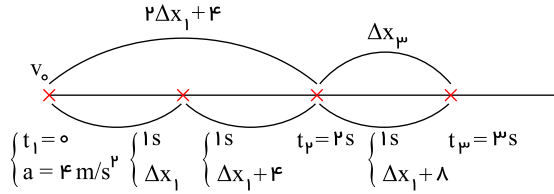
در ابتدا مسیر حرکت متحرک را به صورت زیر رسم می‌کنیم، سپس معادله جابه‌جایی متحرک را یک بار برای ۲ ثانیه اول و بار دیگر برای ۳ ثانیه اول می‌نویسیم یعنی:



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{a = \frac{4m}{s^2}} \begin{cases} \text{دو ثانیه اول} : \Delta x_1 = \frac{1}{2}(4)(2)^2 + 2v_0 \\ \text{سه ثانیه اول} : \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{1}{2}(4)(3)^2 + 3v_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = 8 + 2v_0 \\ \Delta x_1 + \Delta x_2 = 18 + 3v_0 \end{cases} \xrightarrow{\Delta x_1 = 8 + 2v_0} \Delta x_2 = 10 + v_0$$

و در نهایت داریم:

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = 4 \xrightarrow{\Delta x_1 = 8 + 2v_0, \Delta x_2 = 10 + v_0} 8 + 2v_0 - (10 + v_0) = 4 \Rightarrow v_0 = \frac{6m}{s}$$



با توجه به فرض مسئله

$$2\Delta x_1 + 4 - (\Delta x_1 + 8) = 4 \Rightarrow \Delta x_1 = 8m$$

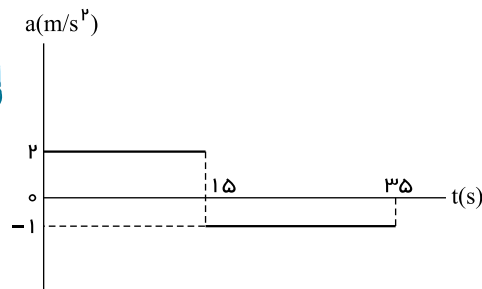
و در ادامه داریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 8 = \frac{1}{2}(4)(2)^2 + v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{6m}{s}$$

سطح زیر نمودار a-t و رسم نمودار از روی نمودار

۹۴) نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظه $t = 2s$ سرعت متحرک $\vec{v} = (-6 \frac{m}{s})\vec{i}$ و مکان متحرک $\vec{x} = (-16m)\vec{i}$ باشد، مکان متحرک در لحظه $t = 3.5s$ کدام است؟

سخت - سراسری - ۱۴۰۱



۱) $(275m)\vec{i}$

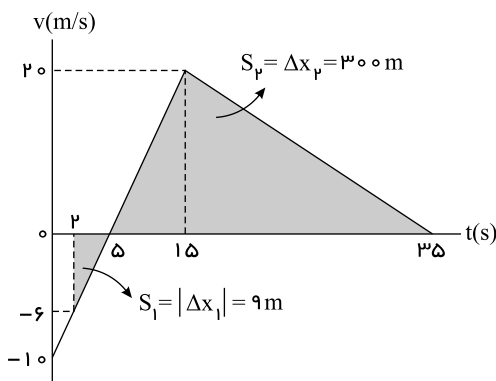
۲) $(300m)\vec{i}$

۳) $(375m)\vec{i}$

۴) $(400m)\vec{i}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

یکی از راه های حل این سؤال استفاده از نمودار سرعت - زمان است. برای رسم نمودار، در ابتدا سرعت اولیه متحرک را

محاسبه می کنیم. در ۱.۵ ثانیه اول، شتاب حرکت متحرک $\frac{4m}{s^2}$ است. بنابراین داریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v = -6 \frac{m}{s}, t = 2s} -6 = 2 \times 2 + v_0 \rightarrow v_0 = -10 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \xrightarrow{t = 1.5s} v = 2 \times 1.5 - 10 \rightarrow v = 20 \frac{m}{s}$$

حال سرعت متحرک در لحظه $t = 1.5s$ (لحظه ای که شتاب تغییر می کند) را محاسبه می کنیم.حال نمودار سرعت - زمان را رسم می کنیم. در ادامه مساحت محصور بین نمودار و محور زمان را می یابیم تا جابه جایی متحرک از لحظه $t = 2s$ تا $t = 3.5s$ را تعیین کنیم.

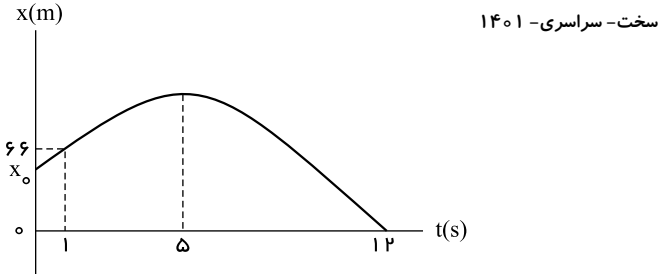
$$S_1 = |\Delta x_1| = 9m, \quad S_2 = \Delta x_2 = 300m$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -9 + 300 = 291m$$

$$\Delta x = x_p - x_1 \rightarrow 291 = x_p - (-16) \rightarrow x_p = 275m \rightarrow \vec{x} = 275\hat{i}$$

نمودار مکان-زمان یک یا دو متحرک در حرکت با شتاب ثابت

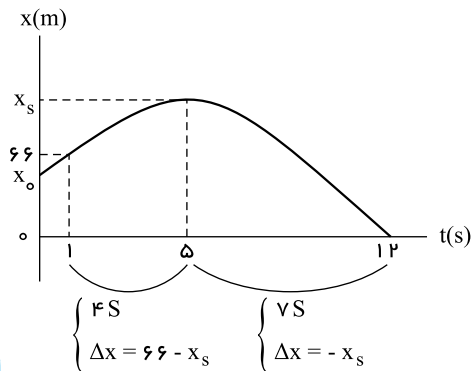
۹۵ نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. مکان اولیه متحرک (x_0) چند متر است؟



- ۱ ۵۸
۲ ۵۲
۳ ۴۸
۴ ۴۲

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

اگر مکان متحرک در راس سهمی را x_s بنامیم و معادله جابه جایی متحرک را از راس سهمی که در آن $v = 0$ است بنویسیم، داریم:



$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 66 - x_s = \frac{1}{2}a(4)^2 \\ -x_s = \frac{1}{2}a(7)^2 \end{cases} \rightarrow \frac{66 - x_s}{-x_s} = \frac{16}{49} \rightarrow x_s = 98m$$

و در ادامه برای تعیین شتاب داریم:

$$-x_s = \frac{1}{2}a(7)^2 \rightarrow -98 = \frac{1}{2}a(49) \rightarrow a = -\frac{4}{s^2}m$$

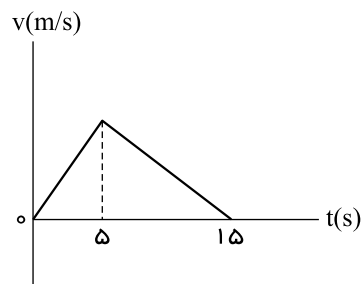
و در ۵ ثانیه اول:

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \rightarrow x_0 - x_s = \frac{1}{2}(-4)(5)^2 \xrightarrow{x_s=98} x_0 = 48m$$

سطح زیر نمودار $v-t$

۹۶ شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می کند. اگر جابه جایی در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 11s$ برابر 126 متر باشد، سرعت متحرک در لحظه $t = 12s$ چند متر بر ثانیه است؟

سخت- سراسری- ۱۴۰۱

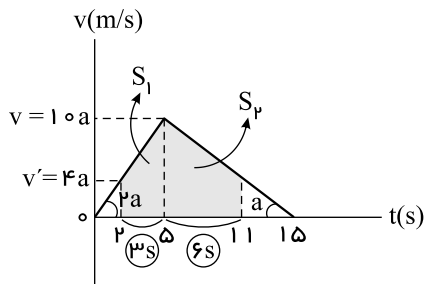


- ۱ ۳
۲ ۶
۳ ۸
۴ ۱۲

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

می دانیم که شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان با شتاب متحرک برابر است. با توجه به نمودار که شیب خط در ۵ ثانیه اول، دو برابر قدرمطلق شیب خط در ۱۰ ثانیه بعد است، می توانیم فرض کنیم که اگر شتاب حرکت در مرحله اول و دوم به ترتیب a_1 و a_2 باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_1 = 2a \\ |a_2| = a \end{cases}$$



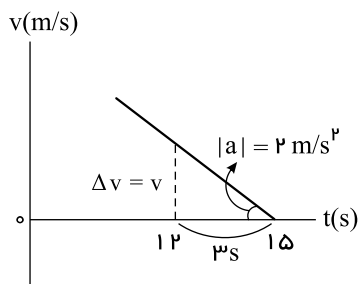
حال با توجه به اینکه سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه جایی متحرک است، مقدار a را به صورت زیر می یابیم:

$$S_1 = \frac{10a + 4a}{2} \times 5 = 21a$$

$$S_2 = \frac{10a + 4a}{2} \times 6 = 42a$$

$$S_1 + S_2 = 126 \rightarrow 21a + 42a = 126 \rightarrow 63a = 126 \rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

و در نهایت داریم:



$$|a| = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{v}{3} \Rightarrow v = 6 \frac{m}{s}$$

حرکت شامل چند بخش

۹۷ متحرکی در مسیر مستقیم با شتاب ثابت، از حالت سکون به حرکت درمی آید و پس از طی مسافت ۱۵ متر، سرعت آن به $6 \frac{m}{s}$ می رسد. این

متوسط - خارج از کشور - ۱۴۰۱

متحرک با همین شتاب، چند ثانیه دیگر به حرکت خود ادامه دهد تا کل مسافت طی شده به ۱۳۵ متر برسد؟

۵ ۴

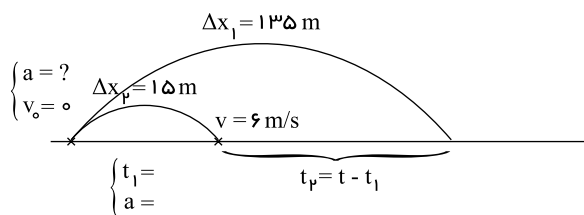
۱۰ ۳

۱۵ ۲

۲۰ ۱

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

اگر مسیر حرکت متحرک را به صورت زیر در نظر بگیریم، یک بار با نوشتن معادله مستقل از شتاب در مرحله اول، زمان مربوط به این مرحله و نیز با نوشتن معادله سرعت - جابه جایی (یا معادله مستقل از زمان) مقدار شتاب را محاسبه می کنیم. یعنی:



$$\Delta x_1 = \frac{v + v_0}{2} \times t_1 \Rightarrow 15 = \frac{6 + 0}{2} \times t_1 \Rightarrow t_1 = 5s$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{6 - 0}{5} \Rightarrow a = 1,2 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0=0} 135 = \left(\frac{1}{2}\right)(1,2)t^2 \Rightarrow t = 15s$$

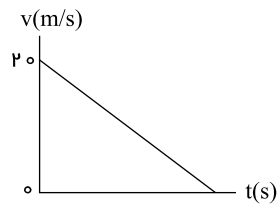
$$t_p = t - t_1 = 15 - 5 \Rightarrow t_p = 10s$$

حال برای پیدا کردن کل زمان حرکت در پیمودن ۱۳۵ متر داریم:

اما برای پیمودن زمان مربوط به مرحله دوم (در سؤال گفته شده چند ثانیه دیگر) داریم:

سطح زیر نمودار v-t

۹۸) نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. اگر مسافت طی شده در ۴ ثانیه اول، ۳۶ برابر مسافت متوسط - خارج از کشور - ۱۴۰۱ شده در ۲ ثانیه آخر باشد، بزرگی شتاب حرکت، چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱ (۲)

۱ (۱)

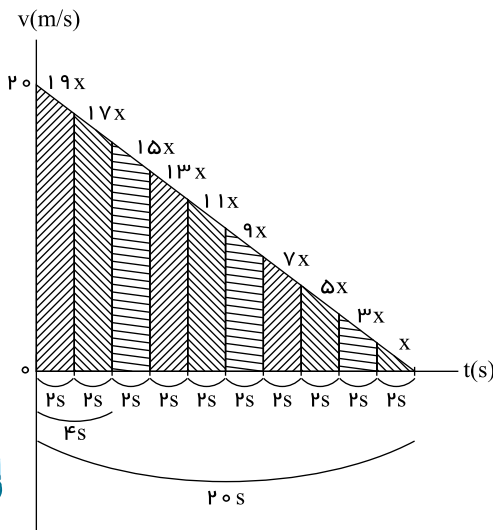
۲ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: ۱ (۲) ۳ (۴)

قبل از حل سؤال، باید دو نکته را یادآوری کنیم:

- اگر متحرکی از حال سکون و شتاب ثابت، در امتداد محور x شروع به حرکت کند، نسبت جابه جایی هایش در بازه های زمانی مساوی و متوالی، همانند نسبت اعداد فرد متوالی است. یعنی نسبت x به $3x$ به $5x$ به $7x$ و ...
 - سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، برابر جابه جایی متحرک است.
- حال با توجه به دو نکته یادشده، با تقسیم زمان حرکت به بازه های ۲ ثانیه ای، به حل سؤال می پردازیم، به گونه ای که اگر جابه جایی متحرک در دو ثانیه آخر را x بنامیم. (سطح زیر نمودار، در دو ثانیه آخر x باشد) در چهار ثانیه اول $36x$ یعنی مجموع $(17x + 19x)$ است.



پس داریم:

یعنی کل زمان حرکت ۲۰ ثانیه بوده، حال با توجه به شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان که برابر شتاب متحرک است، داریم:

$$a = \text{شیب خط} = -\frac{20}{20} \Rightarrow |a| = 1 \frac{m}{s^2}$$

حرکت شامل چند بخش

۹۹) اتومبیلی در لحظه $t = 0$ با شتاب ثابت شروع به حرکت می کند و پس از ۵ ثانیه سرعتش به $20 \frac{m}{s}$ می رسد. ۱۰ ثانیه با همین سرعت به حرکت خود ادامه می دهد و سپس با شتاب ثابت ترمز می کند و پس از ۴ ثانیه متوقف می شود. شتاب متوسط اتومبیل در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 17s$ چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۴۰۱

صفر (۴)

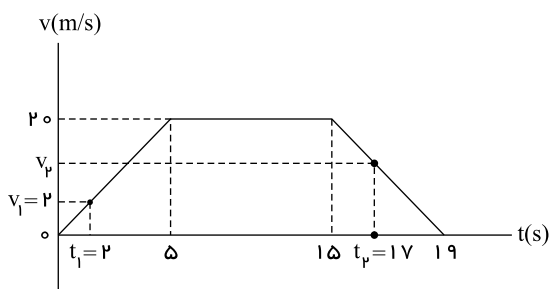
۲ (۳)

۲ (۲)

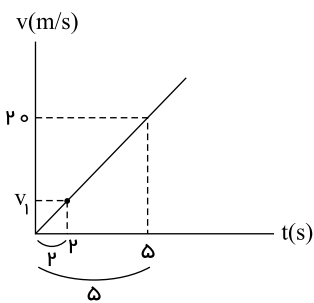
۹ (۱)

پاسخ: ۱ (۲) ۳ (۴)

یکی از مناسب ترین روش ها برای حل این گونه سؤالات که حرکت متحرک در چند مرحله متوالی بررسی می شود، رسم نمودار سرعت - زمان آن است. بنابراین داریم: (در پنج ثانیه اول با شتاب ثابت، حرکت تندشونده دارد، سپس به مدت ۱۰ ثانیه یعنی تا لحظه $t = 15s$ حرکت یکنواخت دارد و در نهایت در چهار ثانیه پایانی یعنی از $t = 15s$ تا $t = 19s$ حرکت کندشونده دارد و متوقف می شود.)

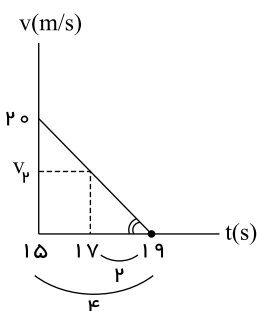


حال در پنج ثانیه اول با استفاده از تشابه دو مثلث مربوط به دو ثانیه اول و ۵ ثانیه اول مقدار v_1 را به دست می آوریم:



$$\text{شیب خط} = \frac{v_1}{2} = \frac{20}{5} \Rightarrow v_1 = 8 \frac{m}{s}$$

و در ۴ ثانیه آخر نیز به همین ترتیب:



$$|\text{شیب خط}| = \frac{v_2}{2} = \frac{20}{4} \Rightarrow v_2 = 10 \frac{m}{s}$$

و در نهایت با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 - 8}{17 - 2} \Rightarrow a_{av} = \frac{2}{15} \frac{m}{s^2}$$

سطح زیر نمودار v-t

۱۰۰ متحرکی با شتاب ثابت $4 \frac{m}{s^2}$ روی محور x حرکت می کند. اگر جابه جایی آن در بازه زمانی $t_1 = 9s$ تا $t_2 = 16s$ برابر صفر باشد، تندی متوسط آن در همین بازه زمانی چند متر بر ثانیه است؟

متوسط - خارج از کشور - ۱۴۰۱

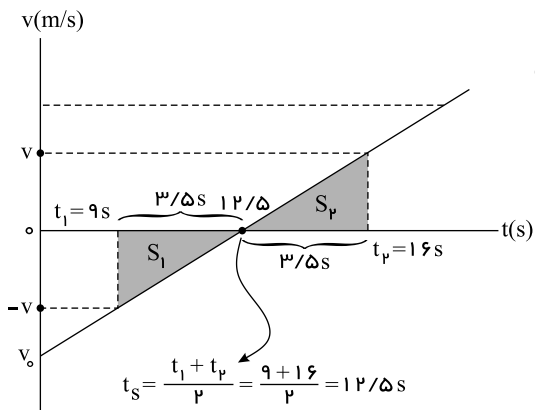
۱۴ (۴)

۱۰٫۵ (۳)

۷ (۲)

۳٫۵ (۱)

پاسخ: (۱) (۲) (۳) (۴)



از آنجایی که در حرکت در امتداد محور x با شتاب ثابت، جابه جایی متحرک در بازه زمانی داده شده صفر است، الزاماً متحرک در وسط این بازه زمانی متوقف شده و تغییر جهت داده است، پس تا قبل از توقف حرکت کندشونده و بعد از آن حرکت تندشونده دارد. بنابراین $v_0 < 0$ است و نمودار سرعت - زمان آن به صورت زیر خواهد بود.
(تذکر: اگر در حرکت با شتاب ثابت در امتداد خط راست، متحرک متوقف شده و تغییر جهت دهد، الزاماً سرعت اولیه (v_0) و شتاب حرکت (a) دارای علامت های قرینه اند)

حال با توجه به معلوم بودن شتاب حرکت، تندی متحرک در لحظه های t_1 و t_2 را محاسبه کرده و بعد از آن سطح محصور بین نمودار و محور زمان را به تعیین می کنیم تا مسافت طی شده در این مدت را به دست آورده و در نهایت تندی متوسط را محاسبه می کنیم.

$$a = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$|v| = at \xrightarrow{t=3,5s} |v| = 4 \times 3,5 \rightarrow |v| = 14 \frac{m}{s}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{3,5 \times 14}{2} = 24,5m \xrightarrow{\ell = S_1 + S_2} \ell = 24,5 + 24,5 = 49m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow s_{av} = \frac{49}{7} \rightarrow s_{av} = 7 \frac{m}{s}$$

پاسخنامه تشریحی

۱ اگر سرعت اولیه را v_0 و سرعت در نیمه مسیر را v_1 و سرعت در انتهای مسیر را v_2 فرض کنیم، می توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^2 - v_0^2 = 2a\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow v_1^2 - 0 = ax \\ v_2^2 - v_1^2 = 2a\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = ax \end{array} \right\} \Rightarrow v_1^2 = v_2^2 - v_1^2$$

$$\Rightarrow 2v_1^2 = v_2^2 \Rightarrow \sqrt{2}v_1 = v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

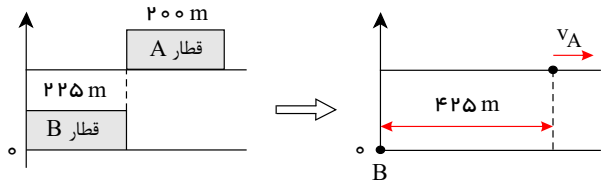
$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow 0 - 12 = \frac{0 + v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = -6m/s$$

با توجه به شکل سهمی و اینکه رأس سهمی در $t = 4$ است، سرعت در $t = 8s$ هم اندازه سرعت در لحظه صفر است، پس: $v = +6m/s$

۳ ۱ ۲ ۳ ۴ ۳ انتهای قطار B در حالت سکون را به عنوان مبدأ مختصات در نظر می گیریم. چون می خواهیم لحظه ای را بیابیم که قطار B به طور کامل از قطار A سبقت گرفته

است، بنابراین معادله حرکت قطار B را نسبت به نقطه انتهایی آن و معادله حرکت قطار A را نسبت به نقطه ابتدایی آن می نویسیم. در این صورت در لحظه ای که قطار B به طور کامل از قطار A سبقت می گیرد، این دو نقطه برهم منطبق می شوند.

$$x_A = 40t + 425 \quad (I)$$



حرکت قطار B از دو قسمت تشکیل شده است، ابتدا با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می کند تا سرعتش به $50 \frac{m}{s}$ برسد. قطار B این کار را در مدت $t = \frac{v}{a} = \frac{50}{2} = 25s$ انجام می دهد و

طی آن مسافت $\Delta x = \frac{v^2}{2a} = \frac{50^2}{2 \times 2} = 625m$ را طی می کند. سپس با سرعت $50 \frac{m}{s}$ به مسیر خود ادامه می دهد. دقت کنید طی $25s$ ابتدایی حرکت، قطار B از قطار A سبقت نمی گیرد؛

بنابراین:

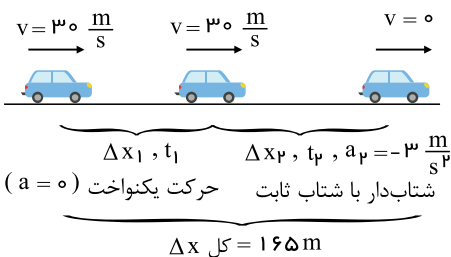
$$x_B = 50(t - 25) + 625 \quad (II)$$

(I),(II)

$$\rightarrow x_A = x_B \Rightarrow 40t + 425 = 50(t - 25) + 625 \Rightarrow 10t = 1050 \Rightarrow t = 105s$$

۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ۴ در مدت زمان واکنش راننده (t_1) متحرک با سرعت ثابت ($v = 108 \frac{km}{h} = 30 \frac{m}{s}$) حرکت می کند و در مدت زمان ترمز (t_2) اتومبیل با شتاب ثابت

(کندشونده) حرکت می کند.



ابتدا جابه جایی متحرک در مرحله دوم را با استفاده از رابطه $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ محاسبه می کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 900 = 2(-3)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 150m$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 165m \Rightarrow \Delta x_1 + 150 = 165 \Rightarrow \Delta x_1 = 15m$$

$$\Delta x_1 = vt_1 \Rightarrow 15 = 30t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}s$$

برای محاسبه زمان حرکت متحرک در مرحله دوم از معادله $v = at + v_0$ استفاده می کنیم.

$$v = a_2 t_2 + v_0 \xrightarrow{\substack{v=0 \\ v_0=30 \\ a_2=-3}} 0 = (-3)t_2 + 30 \Rightarrow t_2 = 10s$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \text{ برابر است با: } \frac{t_2}{t_1}$$

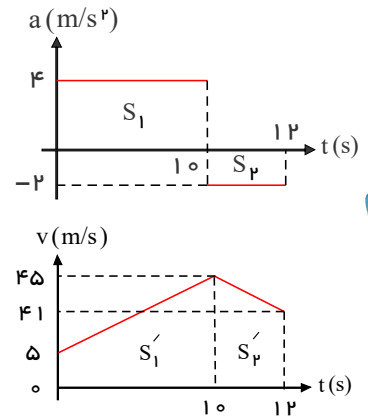
۵) برای حل این تست بهترین روش رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار شتاب - زمان می باشد.

$$S_1 = \frac{\Delta v}{(0-10)} = v_{10} - v_0 \Rightarrow 40 = v_{10} - 5 \Rightarrow v_{10} = 45$$

$$S_2 = \frac{\Delta v}{(10-12)} = v_{12} - v_{10} \Rightarrow -4 = v_{12} - 45 \Rightarrow v_{12} = 41$$

$$\Delta x = S'_1 + S'_2 = \frac{(5+45) \times 10}{2} + \frac{(45+41) \times 2}{2} = 336m$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{336}{12} = 28 \frac{m}{s}$$



۶) در ابتدا متحرک A به دلیل سرعت کمتر از متحرک B عقب می افتد. جابه جایی متحرک ها را تا لحظه $t = 11s$ به دست می آوریم.

$$\begin{cases} \Delta x_A = \frac{2+12}{2} \times 5 + 12 \times (11-5) = 35 + 72 = 107m \\ \Delta x_B = 10 \times 11 = 110m \end{cases}$$

در لحظه $t = 11s$ متحرک A هنوز به متحرک B نرسیده است و $3m$ از آن عقب تر است. فرض می کنیم در مدت t_0 بعد از لحظه $t = 11s$ متحرک A به B برسد.

$$a_B = \frac{0-10}{16-11} = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$\begin{cases} \Delta x_B = \frac{1}{2} a_B t_0^2 + v_{0B} t_0 = -t_0^2 + 10t_0 \\ \Delta x_A = v_A t_0 = 12t_0 \end{cases}$$

$$\Delta x_A = \Delta x_B + 3 \Rightarrow 12t_0 = (-t_0^2 + 10t_0) + 3$$

$$\Rightarrow t_0^2 + 2t_0 - 3 = 0 \Rightarrow t_0 = 1s$$

بنابراین A در لحظه $t = t_0 + 11s$ یعنی در لحظه $t = 12s$ به B می رسد.

۷) روش اول: سرعت اولیه متحرک را v_0 در نظر می گیریم.

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} (2)(2)^2 + v_0 \times 2 = 4 + 2v_0$$

سرعت متحرک بعد از دو ثانیه

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2 \times 2 + v_0 = 4 + v_0$$

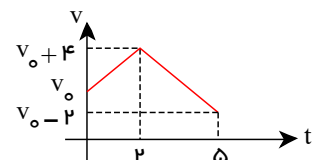
$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \times (-2)(3)^2 + (4 + v_0) \times 3 \Rightarrow \Delta x_2 = -9 + 12 + 3v_0 = 3 + 3v_0$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 4 + 2v_0 + 3 + 3v_0 = 7 + 5v_0$$

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 6.4 = \frac{7 + 5v_0}{5} \Rightarrow 5v_0 + 7 = 32 \Rightarrow 5v_0 = 25 \Rightarrow v_0 = 5m/s$$

روش دوم: رسم نمودار $v-t$ از روی نمودار $a-t$:

سطح زیر نمودار $v-t$ معرف جابه جایی می باشد:



$$V_{av} = \frac{S}{\Delta t} \Rightarrow 6.4 = \frac{\frac{(v_0 + v_0 + 4) \times 2}{2} + \frac{(v_0 + 4 + v_0 - 2) \times 3}{2}}{5}$$

$$\Rightarrow v_0 = 5m/s$$

۸) با توجه به نمودار، شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در لحظه $t = 0$ برابر صفر است، پس $v_0 = 0$ است.

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} a (6)^2 + 0 - 8 \Rightarrow a = 1$$

$$x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} \times t^2 - 8 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4$$

لحظه ای که متحرک از مبدأ عبور می کند.

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 1 \times 4 + 0 = 4 \frac{m}{s}$$

۹) سرعت متحرک در لحظه صفر را v_0 فرض می کنیم و سرعت متحرک در لحظه های $t = 4s$ و $t = 10s$ را به دست می آوریم. با توجه به نمودار شتاب - زمان

متحرک داریم:

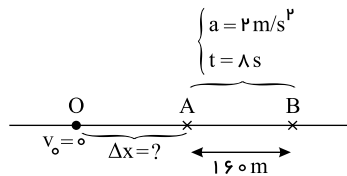
$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_4 = 4 \times 4 + v_0 = 16 + v_0 \\ v_{10} = -4 \times 6 + v_4 = -24 + 16 + v_0 = -8 + v_0 \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2} \times \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{16 + v_0 + v_0}{2} \times 4 + \frac{-1 + v_0 + 16 + v_0}{2} \times 6 = 56 + 10v_0$$

$$\Rightarrow 156 = 56 + 10v_0 \Rightarrow 100 = 10v_0 \Rightarrow v_0 = 10 \frac{m}{s}$$

در ابتدا با توجه به معلوم بودن زمان جابه‌جایی، شتاب و مقدار جابه‌جایی AB، سرعت در نقطه A را می‌یابیم



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_A t \rightarrow 160 = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(8)^2 + v_A(8) \rightarrow v_A = 12 \left(\frac{m}{s}\right)$$

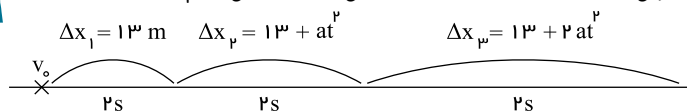
حال با استفاده از معادله سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) بین دو نقطه O و A داریم:

$$V_A^2 - V_0^2 = 2a(\Delta x) \xrightarrow{V_0=0} (12)^2 - 0 = (2)(2)\Delta x \rightarrow \Delta x_{OA} = 36m$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت در ابتدا یک خط راست، جابه‌جایی‌های متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، تشکیل یک دنباله با قدر نسبت at^2 می‌دهند. به عبارتی داریم:



$$\Delta x_3 = 13 + 2at^2 \xrightarrow{\Delta x_3 = 25m, t = 2s} 25 = 13 + 8a \rightarrow a = 1,5 \frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$t = 2s \Rightarrow \Delta x(\text{دو ثانیه اول}) = 2a + 2v_0 = 13 \Rightarrow a + v_0 = 6,5 (I)$$

$$\begin{cases} t = 4s \Rightarrow \Delta x_4 = 8a + 4v_0 \\ t = 6s \Rightarrow \Delta x_6 = 18a + 6v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x(\text{دو ثانیه سوم}) = \Delta x_6 - \Delta x_4 = 10a + 2v_0 = 25 \Rightarrow 5a + v_0 = 12,5 (II)$$

$$I, II \Rightarrow 4a = 12,5 - 6,5 \Rightarrow a = 1,5 \frac{m}{s^2}$$

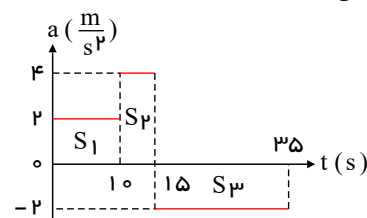
۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴ با رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار شتاب - زمان و بررسی سطح زیر نمودار سرعت - زمان می‌توانیم بیشترین فاصله از مبدأ را تعیین کنیم.

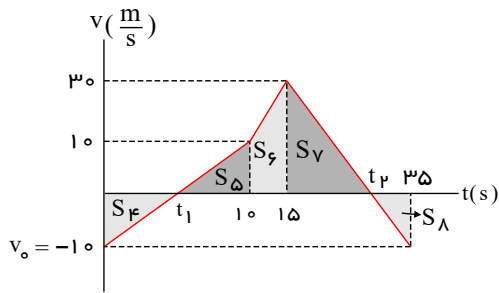
سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییرات سرعت می‌باشد.

$$S_1 = v_{10} - v_0 \Rightarrow 20 = v_{10} - (-10) \Rightarrow v_{10} = 10 \frac{m}{s}$$

$$S_2 = v_{15} - v_{10} \Rightarrow 20 = v_{15} - 10 \Rightarrow v_{15} = 30 \frac{m}{s}$$

$$S_3 = v_{35} - v_{15} \Rightarrow -40 = v_{35} - 30 \Rightarrow v_{35} = -10 \frac{m}{s}$$





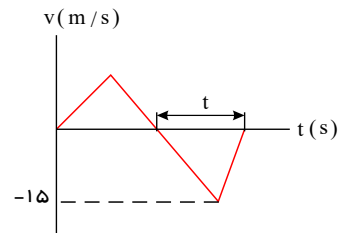
$$\frac{30}{t_p - 15} = \frac{10}{35 - t_p} \Rightarrow t_p = 30s$$

در لحظه $t_p = 30s$ متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه اش (مبداء) قرار دارد.

$$d_{max} = -S_f + S_d + S_p + S_v = \frac{10 + 30}{2} \times (15 - 10) + \frac{30 \times (30 - 15)}{2} = 325m$$

با توجه به نمودار اگر به اندازه t ثانیه جسم در خلاف جهت محور x حرکت کند، داریم:

$$|\Delta x| = S = \frac{15 \times t}{2} \Rightarrow |v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{15 \times t}{2t} = 7.5 \frac{m}{s}$$



نکته: سطح زیر نمودار $a - t$ برابر Δv می باشد. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳**

با توجه به نمودار ارائه شده در متن سؤال، مشخص است که شتاب متحرک در بازه زمانی نشان داده شده همواره مثبت است. برای به دست آوردن علامت سرعت سطح زیر منحنی را در فاصله ی زمانی نشان داده شده به دست می آوریم.

$$S_{(0-5)} = \Delta v = \frac{4 \times 5}{2} = 10 \frac{m}{s}$$

$$\Delta v = 10 \Rightarrow v_5 - v_0 = 10 \Rightarrow v_5 - (-6) = 10 \Rightarrow v_5 = 4 \frac{m}{s}$$

$$\text{لحظه ی شروع بازه زمانی} \begin{cases} a_0 = 4 > 0 \\ v_0 = -6 < 0 \end{cases} \rightarrow a \cdot v < 0 \text{ کندشونده}$$

$$\text{لحظه ی پایان بازه زمانی} (t = 5) \begin{cases} a > 0 \\ v_5 = 4 \end{cases} \rightarrow a \cdot v > 0 \text{ تندشونده}$$

اکنون با بررسی علامت سرعت و شتاب در این بازه زمانی داریم:

جهت مثبت را برای هر متحرک به طور جداگانه همان جهت حرکت خودش فرض می کنیم. **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵**

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_{01} t = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 10t = t^2 + 10t$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + v_{02} t = \frac{1}{2} \times 4t^2 + 20t = 2t^2 + 20t$$

$$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 1125 \Rightarrow 3t^2 + 30t = 1125$$

$$\Rightarrow t^2 + 10t - 375 = 0 \Rightarrow t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 1500}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{1600}}{2} = \frac{-10 \pm 40}{2}$$

$$\Rightarrow t_1 = 15s, t_2 = -25s \Rightarrow t = 15s$$

معادله مکان - زمان درجه ۲ بر حسب زمان است. بنابراین حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. (مشابه کتاب درسی از مشتق کمک نمی گیریم). **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶**

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 4t - 8 \\ x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = +4 \\ v_0 = +4 \end{cases} \rightarrow v = at + v_0 = 4t + 4$$

مشخص است که $v \neq 0$ یعنی متحرک بر خط راست، بدون تغییر جهت است.

$$\frac{L}{|\Delta x|} = 1 \quad \text{بنابراین:}$$

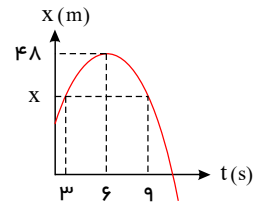
در لحظه سبقت، مکان دو متحرک یکسان و برابر ۷۵ متر است. پس معادله حرکت هریک را می نویسیم و با هم مساوی قرار می دهیم **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**

$$\begin{cases} A: v_A = a_A t + v_{0A} = 1.5t, \text{ و } x_A = \frac{1}{2} \times 1.5t^2 = 0.75t^2 \\ B: v_B = a_B t + v_{0B} = a_B t \text{ و } x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 - 75 \end{cases}$$

$$x_A = x_B = 75 \left\{ \begin{array}{l} \text{در لحظه سبقت: } t = 10s \rightarrow x_A = 0,75t^2 = 75 \\ x_B = \frac{1}{2}a_B \times 10^2 - 75 = 75 \rightarrow a_B = 3m/s^2 \end{array} \right. \rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{3 \times 10}{1,5 \times 10} = 2$$

منحنی به صورت سهمی است، بنابراین نسبت به رأس سهمی ($t = 6s$) تقارن دارد. پس مکان متحرک در لحظات $t = 3$ و $t = 9$ یکسان می‌باشد و جابه‌جایی متحرک در این بازه صفر است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$\Delta x_{(3 \rightarrow 9)} = 0$$



روش‌های متفاوتی وجود دارد. می‌توان از رسم نمودار ($v - t$) و یافتن مساحت سطح زیر نمودار ($v - t$) استفاده نمود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

یک روش، مشخص نمودن سرعت در ابتدا و انتهای بازه‌های زمانی داده شده و یافتن جابه‌جایی‌های انجام شده در بازه است:

$$(در بازه زمانی صفر تا ۱۰s) \Rightarrow \begin{cases} v_{(10)} = at + v_0 = (-2)(10) + 30 = 10 m/s \\ v_{(0)} = 30 m/s \end{cases}$$

$$(در بازه زمانی ۱۰s تا ۱۵s) \Rightarrow \Delta x_1 = v\Delta t = v_{(10)}\Delta t = 10 \times 5 = 50m$$

$$(در بازه زمانی ۱۵s تا ۳۰s) \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_2 = \left(\frac{10 + 40}{2}\right)(15) = 25 \times 15 = 375 \\ v_{(15)} = v_{(10)} = 10 m/s \\ v_{(30)} = v_{(15)} + 2 \times 15 = 10 + 30 = 40 m/s \end{cases}$$

$$\text{کل } \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 50 + 375 = 425 \rightarrow v_{av} = \frac{425}{20} = 21,25$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

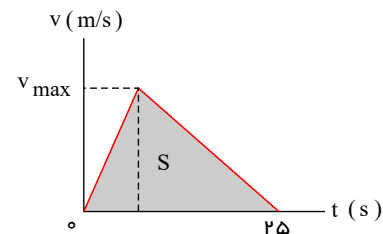
می‌دانیم که در این سوال که متحرک فقط در یک جهت حرکت کرده (همواره $v > 0$) و نمودار $v - t$ آن به صورت یک مثلث است. سرعت متوسطش، نصف ارتفاع مثلث است. یعنی:

$$v_{av} = \frac{1}{2}v_{max} \xrightarrow{v_{av} = 10 \frac{m}{s}} 10 = \frac{1}{2}v_{max} \rightarrow v_{max} = 20 \frac{m}{s}$$

$$\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \Delta x = S_{\text{مثلث}}$$

$$\Delta x = 10 \times 25 = 250$$

$$\frac{v \times 25}{2} = 10 \times 25 \Rightarrow v = 20 m/s$$



ابتدا (t) لحظه‌ای را که تا آن لحظه متحرک در جهت محور x حرکت کرده است را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8 - 16}{18} = \frac{-24}{18} = -\frac{4}{3} \frac{m}{s^2}$$

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow{v_t = 0} 0 = -\frac{4}{3}t + 16 \rightarrow t = 12s$$

اکنون جابه‌جایی متحرک B را در مدت $12s$ به دست می‌آوریم:

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8 - (-20)}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + v_{0B}t \xrightarrow{t=12s} \Delta x_B = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 12^2\right) + (-20 \times 12) = 48 - 240 = -192m$$

$$|\Delta x_B| = 192m$$

اگر سرعت اولیه را v_0 فرض کنیم، سرعت در لحظه $t = 6s$ (وسط زمان حرکت) برابر $\frac{v_0}{2}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

$$\Delta x_1 = \frac{v_0 + \frac{v_0}{2}}{2} \times 6 = 4,5v_0 \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_p} = 3$$

$$\Delta x_p = \frac{\frac{v_0}{2} + 0}{2} \times 6 = 1,5v_0$$

$$x_1 = vt + x_{01} = 20t$$

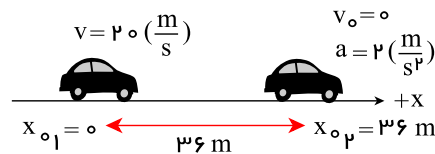
$$x_p = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_{0p} = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 0 + 36 = t^2 + 36$$

$$x_p = x_1 \Rightarrow t^2 + 36 = 20t \Rightarrow t^2 - 20t + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 2)(t - 18) = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = 2s, t_p = 18s \Rightarrow \Delta t = 16s$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳



۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴ با استفاده از رابطه $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ ، شتاب و سرعت اولیه را محاسبه می‌کنیم:

$$x = -2t^2 + 12t - 40 \rightarrow a = -4, v_0 = 12 \frac{m}{s}$$

برای محاسبه مسافت طی شده باید ابتدا لحظه توقف متحرک را به دست بیاوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 12 \xrightarrow{v=0} 0 = -4t + 12 \Rightarrow t = 3(s)$$

شرط توقف

حال مکان متحرک را در لحظات ابتدا، انتها و لحظه توقف به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = -40 & (1) \\ t_p = 3 \rightarrow x_p = -22 & (2) \\ t_p = 5 \rightarrow x_p = -30 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(1),(2)} \Delta x_1 = -22 - (-40) = 18 \\ \xrightarrow{(2),(3)} \Delta x_p = -30 - (-22) = -8 \end{cases} \Rightarrow d = |\Delta x_1| + |\Delta x_p| = 26$$

مسافت طی شده برابر مجموع اندازه‌های جابه‌جایی‌های دو مرحله می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

با نوشتن معادله جابه‌جایی برای ثانیه اول و دو ثانیه اول، می‌توان نسبت آنها را پیدا کرد.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 1s \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2}a \times 1^2 = \frac{1}{2}a \text{ (ثانیه اول)} \\ t = 2s \Rightarrow \Delta x_p = \frac{1}{2}a \times 2^2 = 2a \text{ (دو ثانیه اول)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\text{جابه‌جایی دو ثانیه اول}}{\text{جابه‌جایی ثانیه دوم}} = \frac{\Delta x_p}{\Delta x_p - \Delta x_1} = \frac{2a}{1,5a} = \frac{4}{3}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶

فرض کنیم لحظه مورد نظر $t = t'$ است.

$$B: x_B = \frac{1}{2}a_B t'^2 + v_{0B} t' + x_{0B}$$

$$A: x_A = v_A t' + x_{0A}$$

در $t = 4s$ و $t = 12s$: $x_A = x_B$

$$t = 4s \Rightarrow \frac{1}{2}a_B \times 4^2 + v_{0B} \times 4 = v_A \times 4 + x_{0A} \quad (1)$$

$$t = 12s \Rightarrow \frac{1}{2}a_B \times 12^2 + v_{0B} \times 12 = v_A \times 12 + x_{0A} \quad (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \frac{1}{2}a_B(144 - 16) + 8v_{0B} = 8v_A \Rightarrow 64a_B + 8v_{0B} = 8v_A$$

$$\text{از طرفی: } \begin{cases} \lambda a_B + v_{0B} = v_A = \text{ثابت} \\ v_B = a_B t' + v_{0B} \end{cases} \Rightarrow \lambda a_B + v_{0B} = a_B t' + v_{0B} \Rightarrow t' = 8s$$

روش دوم:

چون نمودار B قسمتی از یک سهمی است، پس حرکت B شتابدار با شتاب ثابت است.

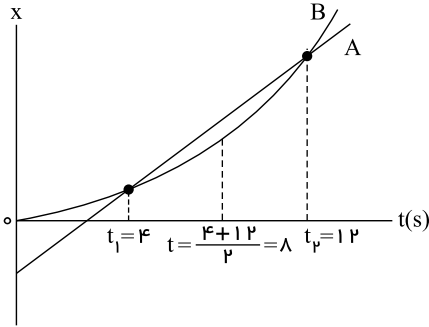
از طرف دیگر می‌دانیم که شیب خط A که دو نقطه از نمودار B را قطع کرده برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه $t_1 = 4s$ و $t_2 = 12s$ است.

پس تا اینجا دریافتیم که:

$$V_A = V_{avB}$$

و اما همه می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، V_{av} بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر است با V در لحظه $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

حال با این مقدمه می‌دانیم که



یعنی در لحظه $t = 8s$ سرعت متحرک B با سرعت متحرک A هم‌اندازه است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

می‌دانیم که سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. در اینجا با توجه به تقارن نمودار داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-10 - 10}{12 - 4} = \frac{-20}{8} = -2.5 \frac{m}{s^2}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{سطح زیر نمودار}}{\Delta t} = \frac{0}{\Delta t} = 0$$

سطح زیر نمودار در بازه‌ی ۱ تا ۳ ثانیه از دو قسمت با مساحت‌های مساوی تشکیل شده که یکی از آنها بالای محور افقی و مثبت است و دیگری در پایین محور افقی و منفی می‌باشد و بنابراین جمع جبری مساحت‌های آنها برابر صفر می‌شود.

روش اول: از لحظه $t = 6$ تا لحظه $t = 0$ برمی‌گردیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[\Delta x = 18m]{v_0 = 0, t = 6s} 18 = \frac{1}{2}a(6)^2 \rightarrow a = 1 \frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

نمودار مکان - زمان یک سهمی است بنابراین حرکت بر روی محور x ، با شتاب ثابت است؛ در بازه زمانی صفر تا $t = 6s$ داریم:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \rightarrow 0 - 18 = \left(\frac{0 + v_0}{2}\right)(6) = 3v_0 \rightarrow v_0 = -6m/s$$

$$v = at + v_0 \rightarrow 0 = a \times 6 + (-6) \rightarrow a = 1m/s^2$$

روش سوم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 & \xrightarrow[\text{صفر تا } 6s]{\text{در بازه زمانی}} \begin{cases} 0 = \frac{1}{2}a \times 6^2 + v_0 \times 6 + 18 \rightarrow a = 1m/s^2 \\ 0 = a \times 6 + v_0 \rightarrow v_0 = -6a \end{cases} \end{cases}$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹

در $t = 2$ ، سرعت صفر است. در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2s$ داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2a + v_0 \Rightarrow v_0 = -2a \quad (*)$$

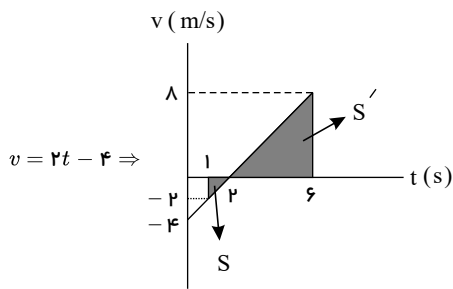
به کمک تعریف سرعت متوسط جابه‌جایی در بازه زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 6s$ را می‌یابیم:

$$v_{av} = \frac{x(t=6) - x(t=1)}{6 - 1} = 3 \Rightarrow \Delta x_{(1s-6s)} = 15m \quad (**)$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \xrightarrow{(*)} x = \frac{1}{2}at^2 - 2at + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = \frac{a}{2} - 2a + x_0 = -\frac{3}{2}a + x_0 \\ t_2 = 6s \Rightarrow x_2 = 18a - 12a + x_0 = 6a + x_0 \end{cases} \xrightarrow{(**)} \Delta x = 15m = 7.5a \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

$$\xrightarrow{(*)} v_0 = -4 \frac{m}{s} \Rightarrow v = 2t - 4$$

از رسم نمودار $(v - t)$ کمک می‌گیریم:



$$\begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = -2 \frac{m}{s} \\ t_r = 6s \Rightarrow v_r = 8 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow L = S + S' = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 1 + 16 = 17m$$

روش دوم:

$$2s \text{ بازه زمانی صفر تا } 2s \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 2a + v_0 \Rightarrow v_0 = -2a$$

$$v_{av} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{(at + v_0) + v_0}{2} = \frac{1}{2}at + v_0$$

در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_r = 6s$ ، در رابطه فوق:

$$v_{av} = 3 = \frac{1}{2}a(6 - 1) + v_1 \xrightarrow{v_1 = v(t_1 = 1s) = (-2)} 3 = \frac{5}{2}a - 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = -4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

باقی راه حل شبیه روش اول است.

حرکت نسبت به لحظه تغییر جهت تقارن دارد (لحظه $t = 4s$). بنابراین در لحظه $t = 8s$ بزرگی سرعت برابر سرعت اولیه می شود. 1 2 3 4 30

روش اول: ابتدا شتاب حرکت را با بررسی جابه جایی بین $t = 0$ و $t = 2$ به دست می آوریم: 1 2 3 4 31

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times a \times 2^2 \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 4t + 0 \xrightarrow{t=2} v = 8 \frac{m}{s}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_r}{2} \times \Delta t \Rightarrow 8 = \frac{0 + v_r}{2} \times 2 \Rightarrow v_r = 8 \frac{m}{s}$$

روش اول: 1 2 3 4 32

با توجه به نمودار $v_0 < 0$ و $a > 0$ است، پس تا اینجا گزینه های 1 و 3 صحیح هستند. از طرفی در لحظه $t = 1.5s$ ($t = 2t_s = 2 \times 0.75$) باید $v = v_0$ یعنی $\Delta v = 0$ باشد که فقط گزینه 1 چنین است.

روش دوم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$\begin{cases} t = 6s, x = 0 \Rightarrow 0 = 18a + 6v_0 + 54 \Rightarrow 3a + v_0 = -9 \\ t = 9s, x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{81}{2}a + 9v_0 + 54 \Rightarrow 4.5a + v_0 = -6 \end{cases} \Rightarrow 1.5a = 3 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2} \Rightarrow v_0 = -15 \frac{m}{s} \Rightarrow v = 2t - 15$$

اتومبیل از حالت سکون ($v_0 = 0$) با شتاب ثابت a_1 در مسیر مستقیم شروع به حرکت می کند و پس از مدتی بزرگی سرعت آن به v می رسد؛ پس از آن اتومبیل در همان جهت با شتاب ثابت a_r حرکت خود را کند می کند تا پس از مدت زمانی سرعت آن به صفر برسد. 1 2 3 4 33

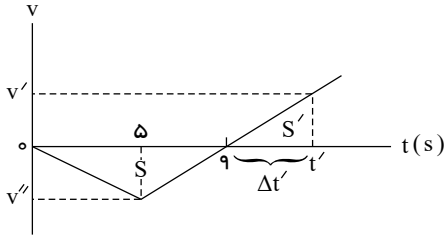
$$\text{مرحله اول حرکت: } v^2 - v_0^2 = 2a_1 \Delta x_1 \Rightarrow v^2 - 0 = 2a_1 \Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{v^2}{2a_1}$$

$$\text{مرحله دوم حرکت: } v_1^2 - v^2 = 2a_r \Delta x_r \Rightarrow 0 - v^2 = 2a_r \Delta x_r \Rightarrow \Delta x_r = \frac{-v^2}{2a_r}$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 = 4 \Delta x_r \Rightarrow \frac{v^2}{2a_1} = -4 \frac{v^2}{2a_r} \Rightarrow |a_r| = 4|a_1|$$

برای اینکه متحرک مجدداً از مکان $x = x_0 = 0$ عبور کند بایستی جابه جایی متحرک از $t_1 = 0$ تا لحظه ای مانند t' صفر شده باشد. 1 2 3 4 34

می‌دانیم تفاضل مساحت بالای محور t در نمودار $(v - t)$ و زیر محور t در این نمودار جابه‌جایی را می‌دهد، پس:



$$\Delta x = S' - S = 0 \Rightarrow S' = S \Rightarrow \frac{1}{2} v' \times \Delta t' = \frac{1}{2} \times |v''| \times 9 \quad (1)$$

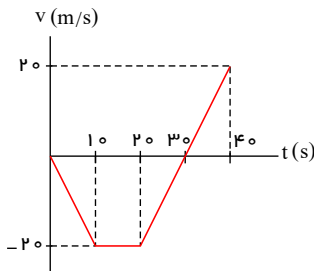
$$|v''| \left\{ \frac{4}{\Delta t'} \right\} \xrightarrow{\text{از تشبیه دو مثلث}} \frac{v'}{|v''|} = \frac{\Delta t'}{4} \Rightarrow v' = \frac{1}{4} |v''| \times \Delta t' \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} |v''| \times \Delta t' \right) \times \Delta t' = \frac{1}{2} \times |v''| \times 9 \Rightarrow \frac{\Delta t'^2}{4} = 9 \Rightarrow \Delta t'^2 = 36 \Rightarrow \Delta t' = 6s \Rightarrow t' = 9 + \Delta t' = 9 + 6 = 15s$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$\begin{cases} \Delta v(10 \text{ ثانیه اول}) = -2 \times 10 = -20 \frac{m}{s} \\ \Delta v(10 \text{ ثانیه دوم}) = 0 \\ \Delta v(20 \text{ ثانیه آخر}) = 2 \times (40 - 20) = +40 \frac{m}{s} \end{cases}$$

در بازه زمانی $20s$ تا 35 ثانیه حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است و متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.



این سوال را به سه روش حل می‌کنیم. می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط معادل میانگین سرعتهاست.

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۶

روش اول:

$$v = at + v_0 = 4t + 6$$

$$\begin{cases} t = 0s \rightarrow v_0 = 6 \frac{m}{s} \\ t = 2s \rightarrow v_1 = 14 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_0 + v_1}{2} = 10 \frac{m}{s}$$

روش دوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظه t_1 و t_2 معادل سرعت در لحظه $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ است.

در اینجا سرعت متوسط در دو ثانیه اول معادل با سرعت در لحظه $t = 1s$ است. $t = \frac{0 + 2}{2} = 1s$ ، بنابراین داریم:

$$v_{av} = v = at + v_0 \xrightarrow[t_0=6]{t=1s, a=4 \frac{m}{s^2}} v_{av} = 4 \times 1 + 6 = 10 \frac{m}{s}$$

روش سوم: در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در t' ثانیه اول، از رابطه زیر نیز محاسبه می‌شود.

$$v_{av} = \frac{1}{2} at' + v_0 \xrightarrow[t_0=6]{t'=2 \text{ ثانیه اول حرکت}} v_{av} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + 6 \rightarrow v_{av} = 10 \frac{m}{s}$$

$$a = 4 \frac{m}{s^2}, v_0 = 6 \frac{m}{s}$$

سطح زیر نمودار سرعت - زمان متحرک در فاصله زمانی صفر تا 10 ثانیه، نشان‌دهنده جابه‌جایی آن متحرک است. بنابراین، جابه‌جایی این دو متحرک را با هم

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۷

مقایسه می‌کنیم.

$$\Delta x_A = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40m, \quad \Delta x_B = \frac{20 + 8}{2} \times 10 = 140m$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بین متحرک} = (140 - 40) = 100m$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۸

ابتدا سرعت و جابه‌جایی متحرک را پس از $20s$ به دست می‌آوریم:

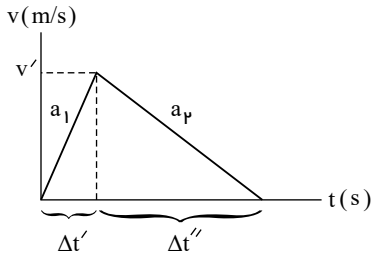
$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2 \times 20 + 0 \Rightarrow v = 40 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x_1 = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{40 + 0}{2} \times 20 = 400m$$

در مرحله دوم بیان شده سرعت متحرک با آهنگ ثابت $4m/s^2$ کاهش می یابد یعنی شتاب متحرک در این مرحله $-4m/s^2$ است.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_2 \Rightarrow 0 - (40)^2 = 2(-4)\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 200m$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = 400 + 200 = 600m$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۳۹

می دانیم شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ برابر شتاب لحظه ای است.

نمودار $(v - t)$ را از ابتدا تا انتهای حرکت رسم می کنیم.

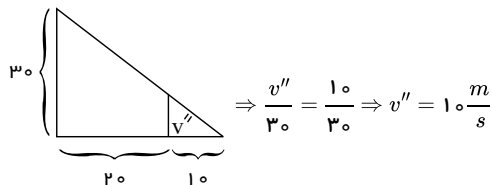
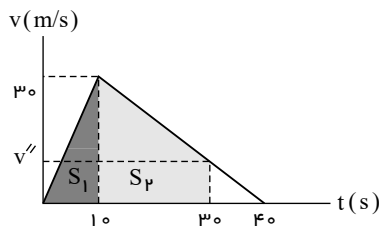
$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ است: شتاب ثابت است}$$

$$\Delta t' = \frac{1}{3} \Delta t'' \text{ (۱) بنابراین چون: } a_1 = 3 |a_2|$$

سطح زیر نمودار برابر $600m$ است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \times v' \times (\Delta t' + \Delta t'') = 600 \text{ (۲)} \\ v' = a_1 \Delta t' = 3 \Delta t' \text{ (۳) در قسمت اول حرکت} \end{array} \right.$$

$$(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3) \Rightarrow \frac{1}{2} (3 \Delta t') (4 \Delta t') = 600 \Rightarrow 6 \Delta t'^2 = 600 \Rightarrow \Delta t' = 10s \begin{cases} v' = 30 \frac{m}{s} \\ \Delta t'' = 30s \end{cases}$$



$$L = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 30 \times 10 + \frac{1}{2} \times 20 \times (10 + 30) = 150 + 400 = 550m$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۰

دو ثانیه سوم یعنی از 4 تا 6 ثانیه، پس در این دو لحظه، سرعت متحرک را یافته و سپس با استفاده از رابطه مستقل از شتاب، جابه جایی اش را محاسبه می کنیم.

$$t_1 = 4s \Rightarrow v_1 = -2 \times 4 + 4 = -4 \frac{m}{s}$$

$$t_2 = 6s \Rightarrow v_2 = -2 \times 6 + 4 = -8 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = v_{av} \Delta t \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{-4 + (-8)}{2} \right) \times 2 = -12m \Rightarrow |\Delta x| = 12m$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

در این سؤال، ۳ نقطه مهم در مسئله داریم، بین B و C (معلوم: v_C, t, x) و بین A و B (معلوم: v_A, x)، پس برای حل معادله بین A و B به a و v_B نیاز داریم که می توان از قسمت اول (BC) به دست آورد.

$$BC \text{ شتاب } \Delta x = \frac{v_B + v_C}{2} \times \Delta t \Rightarrow 120 = \frac{v_B + 20}{2} \times 10 \Rightarrow v_B = 4 \frac{m}{s}$$

$$BC \text{ مکان } v_C = at + v_B \Rightarrow 20 = a \times 10 + 4 \Rightarrow a = 1,6 \frac{m}{s^2}$$

حال بین نقاط A و B می توان از معادله مستقل از زمان استفاده کرد:

$$AB \text{ زمان مستقل از زمان } v_B^2 - v_A^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 16 - 0 = 2 \times 1,6 \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = 5m$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

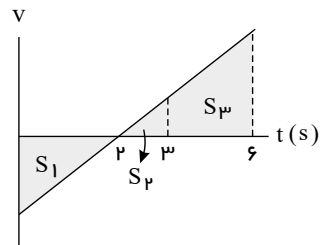
سطح زیر نمودار، سرعت - زمان برابر جابه جایی می باشد؛ بنابراین داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{-8 \times 3}{2} + (5 + 2) \times \frac{8}{2}}{8} = \frac{-12 + 28}{8} = \frac{16}{8} = 2 \frac{m}{s}$$

نمودار سهمی است. پس حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. $a > 0$ و $v_0 < 0$ است. متحرک در $t = 2s$ تغییر جهت داده است و می‌دانیم هنگام بررسی مسافت طی شده باید حواسمان به تغییر جهت دادن یا تغییر جهت ندادن جسم در بازه زمانی موردنظر باشد. اکنون گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

رد گزینه (۱): متحرک در $t = 2s$ تغییر جهت داده بنابراین مسافت در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 3s$ (که متحرک در این بازه زمانی و در $t = 2s$ تغییر جهت داده) نمی‌تواند با مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t = 3s$ تا $t = 6s$ برابر باشد:

$$\begin{cases} L_{(0-3s)} = S_1 + S_2 \\ L_{(3s-6s)} = S_3 \end{cases} \Rightarrow S_1 + S_2 \neq S_3$$



برای سهولت در امر مقایسه می‌توانیم به یک عدد فرضی نسبت دهیم مثلاً:

$$a = 1 \left(\frac{m}{s}\right) \Rightarrow v_{(t=2)} = a\Delta t + v_{(t=0)} \Rightarrow 0 = 2 \times 1 + v_0 \Rightarrow v_0 = -2 \frac{m}{s} \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow v = t - 2 \Rightarrow \begin{cases} t = 3s \Rightarrow v = 3 - 2 = 1 \frac{m}{s} \\ t = 6s \Rightarrow v = 6 - 2 = 4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |S_1| = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1m \\ S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 0,5m \\ S_3 = \frac{1}{2} \times 3 \times (1 + 4) = 7,5m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{(0-3s)} = |S_1| + S_2 = 1 + 0,5 = 1,5m \\ L_{(3-6s)} = S_3 = 7,5m \end{cases} \Rightarrow L_{(0-3s)} \neq L_{(3-6s)}$$

توجه: برای رد گزینه (۱) به‌طور شهودی نیز عمل بفرمایید! شتاب ثابت، تقارن، توجه به بازه‌های زمانی و ...
رد گزینه (۲):

$$\begin{cases} \Delta x_{(0-3s)} = S_2 - |S_1| \\ L_{(0-3s)} = S_2 + |S_1| \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{(0-3s)} \neq L_{(0-3s)}$$

رد گزینه (۳): شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان - زمان برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است، پس به دلیل تقارن:

$$[(v_{av})_{0-4s} = \frac{x_{(t=4)} - x_{(t=0)}}{4 - 0} = 0] \neq [v_{(1s-5s)} (\neq 0)]$$

تأیید گزینه (۴): به دلیل اینکه شتاب ثابت است و تقارن در نمودار مکان - زمان،

$$\begin{cases} x_{(t=1s)} = x_{(t=3s)} \\ x_{(t=0)} = x_{(t=4s)} \end{cases} \Rightarrow x_{(3)} - x_{(0)} = x_{(1)} - x_{(4)} = |x_{(4)} - x_{(1)}| \Rightarrow \Delta x_{(0-3s)} = |\Delta x_{(1-4s)}| \Rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta t_{(0-3s)}} \right| = \left| \frac{\Delta x}{\Delta t_{(1-4s)}} \right| \Rightarrow (v_{av})_{0-3s} = (v_{av})_{1-4s}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \Delta t \Rightarrow 8 = \frac{15 + v_0}{2} \times 8 \Rightarrow v_0 = 5 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 15 = a \times 8 + 5 \Rightarrow a = \frac{5}{4} \frac{m}{s^2}$$

ثانیه سوم، فاصله زمانی بین $t = 2s$ تا $t = 3s$ است. سرعت متوسط را در این یک ثانیه حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow v_1 = (4 \times 2 + 2) \frac{m}{s} = 10 \frac{m}{s} \\ t_2 = 3s \Rightarrow v_2 = (4 \times 3 + 2) \frac{m}{s} = 14 \frac{m}{s} \end{cases}, \bar{v} = \frac{v_2 + v_1}{2} = \left(\frac{14 + 10}{2}\right) \frac{m}{s} = 12 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t = (12 \times 1)m = 12m$$

به این دلیل که متحرک تغییر جهت نداده است (سرعت پیوسته مثبت است)، اندازه جابه‌جایی با مسافت پیموده شده برابر است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۶

می‌دانیم که سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. بنابراین داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{-10 \times 5}{2} + \frac{15 \times 3}{2}}{20} = \frac{-25 + 22,5}{20} = \frac{200}{20} = 10 \frac{m}{s}$$

در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در هر بازه زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه وسط آن بازه زمانی است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۷

سطح زیر نمودار شتاب - زمان، برابر با تغییر سرعت است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴۸

$$S = \Delta v = v_{2s} - v_{4s} \Rightarrow \Delta v = (2 \times 10) + (25 - 10)(-1) = 20 - 15 = 5 \frac{m}{s}$$

سرعت اولیه صفر است، پس سرعت در لحظه $t = 25s$ برابر $5 \frac{m}{s}$ است.

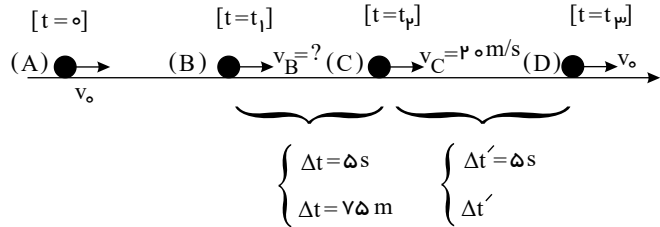
۴۹) با استفاده از رابطه مستقل از زمان (سرعت - جابه‌جایی) می‌توان نوشت:

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow V^2 - 100 = 2(-2) \times 25 \Rightarrow V = 0$$

پس سرعت متحرک در مکان $x = 25m$ برابر صفر است. اکنون برای محاسبه سرعت آن در مکان $x = 61m$ خواهیم داشت:

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow V^2 - 0 = 2 \times 2 \times (61 - 25) \Rightarrow V^2 = 144 \Rightarrow V = 12 \frac{m}{s}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۰



گام اول: حرکت شتابدار با شتاب ثابت بر خط راست است. مدت ۵s بازه زمانی که ابتدا و انتها این بازه زمانی در متن سؤال مشخص نشده است. فرض کنیم این بازه زمانی بین لحظه‌های t_1 و t_2 باشد:

گام دوم: ابتدا تندی متحرک در مکان (B) و سپس شتاب حرکت (a) را می‌یابیم:

$$(B \rightarrow C): \Delta x = \left(\frac{v_B + v_C}{2}\right)(\Delta t) \rightarrow 75 = \left(\frac{v_B + 20}{2}\right)(5) \Rightarrow v_B + 20 = 30 \Rightarrow v_B = 10 \frac{m}{s} \rightarrow a = \frac{\Delta v_{BC}}{\Delta t_{BC}} = \frac{20 - 10}{5} = 2 \frac{m}{s^2} \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

گام سوم:

$$(C \rightarrow D): \begin{cases} (v_{av})_{CD} = \left(\frac{v_D + v_C}{2}\right) = \left(\frac{v_0 + 20}{2}\right) = 25 \frac{m}{s} \\ v_D = v_C + a\Delta t' = 20 + 2 \times 5 = 30 \frac{m}{s} \end{cases}$$

۵۱) سرعت اولیه منفی است و حرکت در ابتدا کندشونده در جهت منفی و سپس تندشونده در جهت مثبت است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۱

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۲

سرعت اولیه و شتاب مثبت هستند و حرکت پیوسته تندشونده است و تغییر جهت وجود ندارد و مسافت طی شده با اندازه جابه‌جایی برابر است.

$$v = at = 4 \Rightarrow \begin{cases} t = 3s \Rightarrow v_3 = 10 \frac{m}{s} \\ t = 4s \Rightarrow v_4 = 12 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_3 + v_4}{2} \Delta t = \frac{10 + 12}{2} \times 1 = 11m$$

۵۳) به‌طور کلی در حرکت با شتاب ثابت، اگر ضرایب t و t' هم علامت باشند، حرکت همواره تندشونده و در جهت علامت ضریب t است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۳

ولی اگر ضرایب t و t' هم علامت نباشند، حرکت در ابتدا کندشونده (قبل از لحظه توقف $| \frac{v_0}{a} |$) در جهت علامت ضریب t و بعد از آن تندشونده (در خلاف علامت ضریب t) است.

$$x = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t + 12 \Rightarrow a = -10 \frac{m}{s^2}, v_0 = 5 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 = -10t + 5 = 0 \Rightarrow t = 0.5s$$

در ابتدای حرکت سرعت مثبت (هم علامت با ضریب t) و حرکت در جهت محور است و شتاب منفی و حرکت کندشونده است و در لحظه $t = 0.5s$ سرعت صفر می‌شود و جهت حرکت تغییر می‌کند.

۵۴) متحرکی که با شتاب کمتر شروع به حرکت می‌کند، دیرتر به نقطه‌ی B می‌رسد و بنابراین ۳ ثانیه بیشتر در راه است، بنابراین داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۴

$$\frac{1}{2}a(t+3)^2 = \frac{1}{2}a'(t)^2 \xrightarrow{a=2 \frac{m}{s^2}, a'=8 \frac{m}{s^2}} \frac{1}{2} \times 2 \times (t+3)^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times t^2 \Rightarrow t+3 = 2t \Rightarrow t = 3s$$

بنابراین متحرکی که با شتاب کمتر شروع به حرکت کرده، ۶s در راه بوده است و داریم:

$$AB = \frac{1}{2}a(t+3)^2 \Rightarrow AB = \frac{1}{2} \times 2 \times (3+3)^2 = 36m$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

با استفاده از معادله مستقل از زمان داریم:

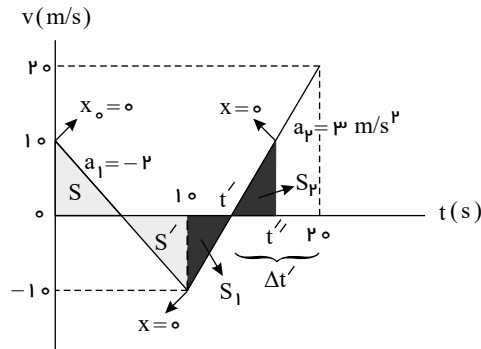
$$v_0 = 54 \frac{km}{h} = 15 \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \times \Delta t \Rightarrow 20 = \frac{v + 15}{2} \times 2 \Rightarrow v = 5 \frac{m}{s} = 18 \frac{km}{h}$$

۵۶) ابتدا به کمک مفهوم شتاب، سرعت را در ثانیه‌های $t = 10$ و $t = 20$ می‌یابیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵۶

$$t = 10s \Rightarrow v = at + v_0 = (-2)(10) + 10 = -10 \frac{m}{s}$$

$$t = 20s \Rightarrow v_{(t=20s)} = at + v_{t=10s} = 3 \times 10 + (-10) = 20 \frac{m}{s}$$

نمودار $(v-t)$ را رسم می‌کنیم:

$$S = S' \Rightarrow x_{(t=10)} - x_{(t=0)} = S - S' = 0 \Rightarrow x_{(t=10)} = x_0 = 0$$

 S_2 مساحت مثلثی در بالای محور t است که $S_2 = S_1$ چون:

$$x_{(t=t'')} - x_{(t=10)} = S_2 - S_1 \Rightarrow 0 = S_2 - S_1 \Rightarrow S_2 = S_1$$

چون دو مثلث مشابه و هم مساحت هستند پس باید برابر باشند. طبق مفهوم شتاب از $t = t'$ تا $t = 20$ s یعنی در هر ثانیه سرعت $3 \frac{m}{s}$ افزایش یافته تا از $v_{t'} = 0$ به

$$v_{t'=20} = 20 \frac{m}{s} \text{ برسد.}$$

$$\begin{aligned} \text{تغییرات سرعت} & \quad \text{زمان سپری شده} \\ 1s & \rightarrow 3 \frac{m}{s} \Rightarrow \Delta t' = \frac{20}{3} s \Rightarrow t'' = t' + \frac{20}{3} = 10 + \frac{20}{3} = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

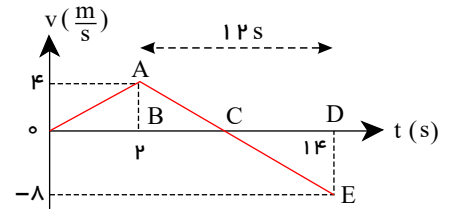
$$\Delta t' \rightarrow 20 \frac{m}{s} \text{ (} t' = 10 \text{) از تساوی در مثلث کمک بگیرید.}$$

 1 2 3 4 57

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = a_1 t \Rightarrow 10 = at & (1) \\ v_2 = a_2 t \Rightarrow 22 = (a + 1.5)t \end{cases} \Rightarrow 12 = 1.5t \Rightarrow t = 8s$$

با استفاده از شیب نمودار بین دو لحظه $t = 2s$ و $t = 14s$ با استفاده از تشابه مثلثها، لحظه تلاقی نمودار با محور زمان که همان لحظه تغییر جهت است را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{CD} & \Rightarrow \frac{4}{12 - CD} = \frac{8}{CD} \\ \Rightarrow CD = 24 - 2CD & \Rightarrow CD = 8s \end{aligned}$$



در نتیجه متحرک 8 ثانیه دارای سرعت منفی بوده و در سوی خلاف محور x حرکت کرده است.

در 2 ثانیه آخر 4 متر جابه‌جا شده و سرعت آن به صفر رسیده پس: 1 2 3 4 59

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt \Rightarrow 4 = -\frac{1}{2}a \times 2^2 \Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

در 2 ثانیه اول 36 متر جابه‌جا شده است پس:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 36 = \frac{1}{2} \times -2 \times 4 + v_0 \times 2 \Rightarrow v_0 = 20 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -2 \times t_1 + 20 \Rightarrow t_1 = 10s$$

تغییر سرعت برابر با سطح زیر نمودار شتاب - زمان است. 1 2 3 4 60

$$S = \Delta v = v_2 - v_1$$

$$\Delta v = -2(5) + 1(7 - 5) = -10 + 2 = -8 \Rightarrow v_2 - v_1 = -8 \Rightarrow v_2 - 20 = -8 \Rightarrow v_2 = 12 \frac{m}{s}$$

 1 2 3 4 61

$$x_1 + x_2 = 2x_3$$

در حرکت با شتاب ثابت جابه‌جایی در زمان‌های مساوی و متوالی تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهند، بنابراین:

گام اول: متحرک با شتاب a ، سریع‌تر از متحرک با شتاب $\frac{9}{16}a$ حرکت می‌کند. بنابراین اگر متحرک با شتاب a (را که با A نشان خواهیم داد) مسیر مستقیم

معین شده را در مدت زمان Δt_A طی کند متحرک دوم (که با B نشان می‌دهیم) در مدت زمان $\Delta t_B = \Delta t_A + 2s$ همان مسیر را طی خواهد نمود:

$$\begin{cases} \Delta x_A = \frac{1}{2}a\Delta t_A^2 + v_{0A}\Delta t_A \\ \Delta x_B = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}a\right)(\Delta t_A + 2)^2 + v_{0B}\Delta t_B \end{cases} \quad \begin{aligned} \Delta x_A = \Delta x_B & \rightarrow a\Delta t_A^2 = \frac{9}{16}a(\Delta t_A + 2)^2 \Rightarrow \Delta t_A = \frac{3}{4}(\Delta t_A + 2) = \frac{3}{4}\Delta t_A + 1.5 \Rightarrow 0.25\Delta t_A = 1.5 \\ v_{0A} = v_{0B} = 0 & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta t_A = 6s$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۳

$$\bar{v}_A = \frac{\Delta x}{\Delta t_A}, \bar{v}_B = \frac{\Delta x}{\Delta t_B} \Rightarrow \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = \frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$$

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{1}{2} a_A t_A^2 = \frac{1}{2} a_B t_B^2 \Rightarrow \left(\frac{t_B}{t_A}\right)^2 = \frac{a_A}{a_B} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{t_B}{t_A} = 2 \Rightarrow \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_B} = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۴

با توجه به اینکه نمودار $v-t$ یک خط با شیب ثابت است، حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. پس شیب خط برابر شتاب حرکت متحرک است. بنابراین با پیدا کردن شتاب، معادله سرعت را نوشته و داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-9 - 12}{21 - 0} = -1 \frac{m}{s^2}$$

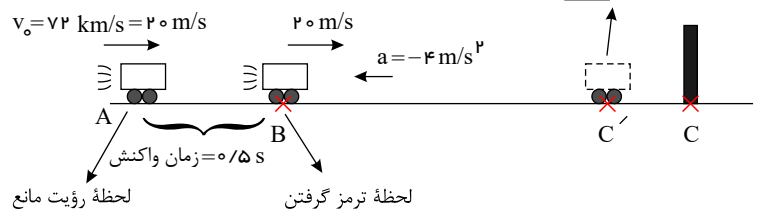
$$v = at + v_0 \xrightarrow{v_0 = 12} v = -t + 12$$

$$\begin{cases} t_1 = 6 \rightarrow v_1 = -(6) + 12 = 6 \frac{m}{s} \Rightarrow \Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = \frac{6 + 0}{2} \times (12 - 6) = 18m \\ t_2 = 12 \rightarrow v_2 = -12 + 12 = 0 \end{cases}$$

فرض کنیم جسم در نقطه C' متوقف می‌شود. طبق مفهوم شتاب $a = -1 \frac{m}{s^2}$ یعنی از $v_0 = +2 \frac{m}{s}$ در هر ثانیه $1 \frac{m}{s}$ کاسته می‌شود، پس از $2s$ متحرک متوقف می‌شود. جابه‌جایی جسم در این مدت:

$$\Delta x_{BC'} = \left(\frac{v + v_0}{2}\right) \Delta t = \left(\frac{0 + 2}{2}\right)(2) = 2m$$

محل توقف فرضی اتومبیل



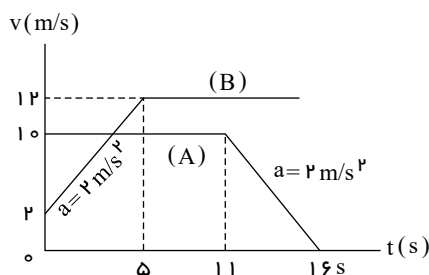
گام دوم: در مدت زمان واکنش راننده، اتومبیل در مدت $0.5m$ با تندی $2 \frac{m}{s}$ به مقدار $1m$ $\Delta x_{AB} = v \Delta t \Rightarrow \Delta x_{AB} = 1m$ گام سوم:

$$\Delta x_{AB} + \Delta x_{BC'} = 1 + 2 = 3m > \Delta x_{AC} = 36m$$

پس به مانع برخورد می‌کند. اما با چه تندی؟

$$v_C^2 - v_B^2 = 2a \Delta x_{BC} \Rightarrow v_C^2 - 2^2 = 2(-1)(2) \Rightarrow v_C^2 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow v_C = 0 \frac{m}{s}$$

از نظر محاسبات یکی از تست‌های طولانی کنکور است. برای تسریع و سهولت در پاسخ‌دهی به این تست از نمودار $(v-t)$ کمک می‌گیریم:



گام اول: نمودار $(v-t)$ هر دو متحرک را رسم می‌کنیم. سرعت متحرک (B) در پایان ثانیه پنجم: $v = at + v_0 = 2 \times 5 + 2 = 12 \frac{m}{s}$ خواهد بود.

هر دو متحرک در مبدأ زمان در مبدأ مکان بوده‌اند:

$$x_{0A} = x_{0B} = 0$$

لحظه‌ای که دو اتومبیل به هم می‌رسند: $x_A = x_B$. بنابراین اگر لحظه مورد نظر را $t = t'$ در نظر بگیریم:

$$(t_2 = t' \text{ تا } t_1 = 0 \text{ در بازه زمانی}) \Rightarrow \Delta x_A = \Delta x_B \text{ (جابه‌جایی دو متحرک یکسان است)}$$

گام دوم: سطح زیر نمودار $(v-t)$ برابر جابه‌جایی است؛ با کمی تأمل در شکل مشخص است که تا $t = 5s$ این اتفاق رخ نمی‌دهد. بینیم تا $t = 11s$ آیا جابه‌جایی دو متحرک (مساحت سطح زیر دو نمودار) یکسان می‌شود یا خیر؟

$$A: \Delta x_A = 11 \times 10 = 110m \text{ و } B: \Delta x_B = \frac{S}{2} + \frac{S}{2} = \frac{1}{2}(5)(2+12) + 12 \times 6 = 35 + 72 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_A = 110m \\ \Delta x_B = 107m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_B < \Delta x_A \Rightarrow t' > 11s$$

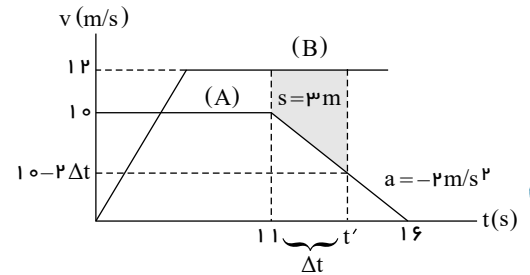
کافی است مساحت سطح زیر نمودار متحرک B از $t = 11s$ ، به بعد $3m$ بیشتر از مساحت سطح زیر نمودار A باشد.

گام سوم:

$$S = \frac{1}{2}(\Delta t)(2 + (12 - (10 - 2\Delta t))) = 3 \Rightarrow 2\Delta t + \Delta t^2 = 3 \Rightarrow \Delta t^2 + 2\Delta t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} -3s \\ 1s \end{cases} \Rightarrow t' = 12s$$

$$t' = 12s \begin{cases} v_B = 12 \frac{m}{s} \\ v_A = 10 - 2\Delta t = 10 - 2 \times 1 = 8 \frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v_B - v_A = 12 - 8 = 4 \frac{m}{s}$$



سرعت در $t = 0$ در جهت محور x است (دقت کنید در جهت محور x بودن الزاماً به مفهوم $x > 0$ بودن نیست بلکه یعنی جهت سرعت متحرک در جهت

(+) محور x است، درحالی که ممکن است $x < 0$ باشد.) پس $v_0 > 0$

به کمک سرعت متوسط در 10 ثانیه اول حرکت جابه‌جایی متحرک را می‌یابیم:

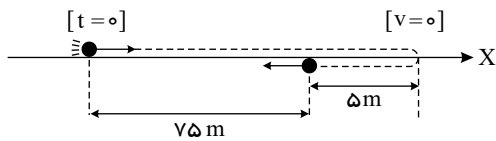
$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = v_r \vec{i} \Rightarrow \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \vec{i} = v_r \vec{i}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_r \Rightarrow \Delta x = v_r \times 10 = 75m \quad (1)$$

تندی متوسط متحرک در همین مدت $75 \frac{m}{s}$ شده است، از اینکه تندی متوسط متحرک بیشتر از سرعت متوسط متحرک شده است، در می‌یابیم که الزاماً متحرک تغییر جهت داده است. یعنی مسافت طی شده بیشتر از جابه‌جایی است.

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{10} = 7.5 \Rightarrow L = 75m \quad (2)$$

با توجه به مقادیر (1) و (2):



حرکت شتابدار با شتاب ثابت است. نمودار $(v - t)$ یک خط مایل است با $v_0 > 0$

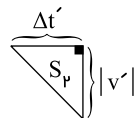
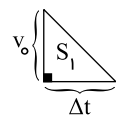
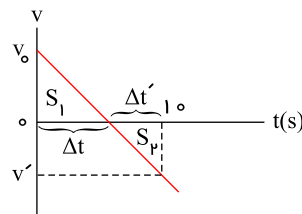
$$(1), (2) \Rightarrow S_1 = 75m, S_1 + |S_2| = 150m \Rightarrow |S_2| = 75m$$

$$\frac{|v'|}{v_0} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}, \begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} v_0 \Delta t = 75 \\ S_2 = \frac{1}{2} |v'| \Delta t' = 75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{|v'|}{v_0} \times \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{75}{75} = 1 \quad (3)$$

$$\rightarrow \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{1}{4} \frac{\Delta t'}{10 - \Delta t'} = \frac{1}{4}$$

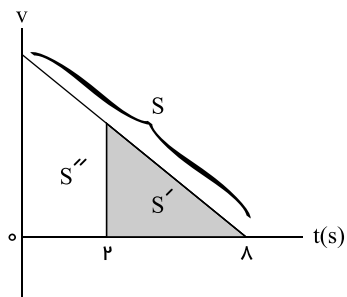
$$\Rightarrow \Delta t' = 2s \Rightarrow \Delta t = 8s$$



$$\Rightarrow S' = ?$$

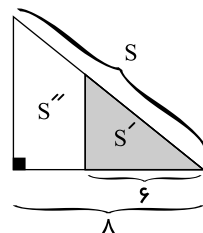
$$\Rightarrow S''_{(0-2s)} = \Delta x = L = ?$$

$$\Rightarrow S_1 = 10m$$



$$\Rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{S'}{10} = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S' = 45 \Rightarrow \text{مجهول سوال} = S - S' = 10 - 45 = 35m$$



توجه: می توان پس از مشخص شدن $\Delta t = 10s$ ، از روش زیر بهره برد به نحوی که: در بازه زمانی $(0 - 10s)$ و $(10s - 20s)$ ، به مسئله وارونه نگاه کنیم تا $v_0 = 0$ شود. آنگاه:

$$(0 \rightarrow 10s) \rightarrow (10s \rightarrow 0) \Rightarrow \begin{cases} v_0 = v_{(t=10s)} = 0 \\ |\Delta x| = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} |a| \times 10^2 \Rightarrow |a| = 2 \frac{m}{s^2} \end{cases}$$

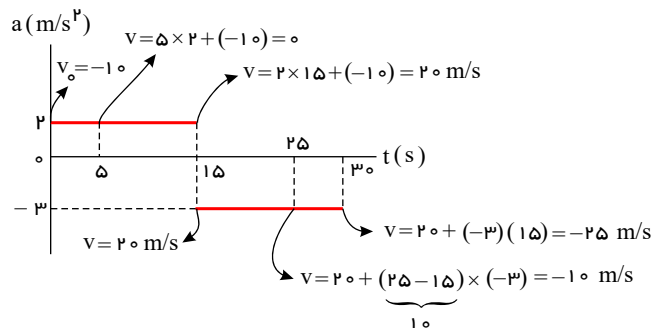
$$(10s \rightarrow 20s) \rightarrow (10s \rightarrow 10s) \Rightarrow \begin{cases} v_0 = v_{(t=10s)} = 0 \\ |\Delta x| = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{1}{2} (2) (10)^2 = 100m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجهول تست} = S - S' = 10 - 45 = 35m$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶۸

روش اول: کافی است از مفهوم شتاب در هر بازه زمانی استفاده کرده، سرعت متحرک را در لحظات

$t = 5s$ و $t = 15s$ و $t = 30s$ می یابیم:



هفتام اول

$$\Delta x = \left(\frac{0 + (-10)}{2}\right)(5) = -25m \Rightarrow |\Delta x| = 25m$$

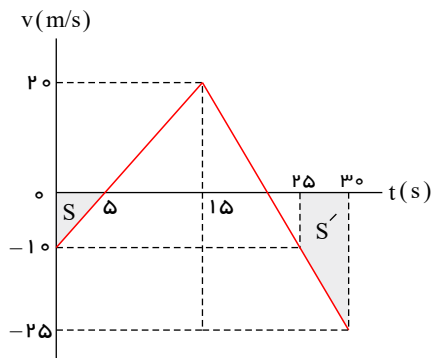
هفتامی ششم

$$\Delta x' = \left(\frac{-25 + (-10)}{2}\right)(5) = \frac{-35 \times 5}{2} = -87.5m \Rightarrow |\Delta x'| = 87.5m \Rightarrow \left|\frac{\Delta x'}{\Delta x}\right| = \frac{87.5}{25} = 3.5$$

توجه: دقت کنیم در بازه زمانی داده شده شتاب ثابت بوده است. (در هر بازه زمانی جداگانه)

روش دوم: کافی است نمودار $(v - t)$ را رسم کنیم:

در لحظات $t = 5s$ و $t = 15s$ و $t = 30s$ مشخص می کنیم و به کمک سطح زیر نمودار، جابه جایی در هر مرحله را محاسبه می کنیم.

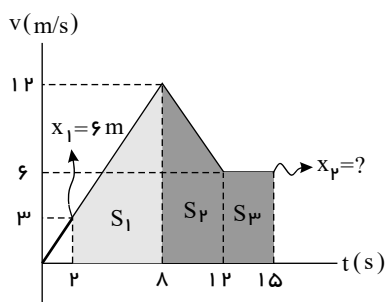


$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 0 - S = -\frac{1}{2} \times 10 \times 5 = -25m \\ \Delta x' = 0 - S' = -\frac{1}{2} \times 5 \times (10 + 25) = -87.5m \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{\Delta x'}{\Delta x} \right| = \frac{87.5}{25} = 3.5$$

گام اول: ابتدا سرعت متحرک را در $t = 2s$ می‌یابیم. چندین روش وجود دارد. مثلاً اینکه از $t = 0$ تا $t = 8s$ شتاب ثابت است (چون شیب خط مماس بر نمودار $v - t$ برابر شتاب بوده و شیب تغییر ننموده است).

$$a = (a_{av})_{0-8s} = (a_{av})_{0-2s} \Rightarrow \frac{12 - 0}{8 - 0} = \frac{v - 0}{2 - 0} \Rightarrow v = 3 \frac{m}{s}$$

(برای یافتن v در $t = 2s$ راه‌های زیادی وجود دارد: معادله خط، تالس، مفهوم شتاب، معادله سرعت و ...)
گام دوم: از $t = 2s$ تا $t = 15s$ مساحت زیر نمودار را یافته و کار تمام!



$$\Delta x = \Delta x_p - (-6) = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow x_p + 6 = \underbrace{\frac{1}{2} \times 6 \times (3 + 12)}_{36} + \underbrace{\frac{1}{2} \times (4) \times (6 + 12)}_{36} + \underbrace{3 \times 6}_{18} \Rightarrow x_p + 6 = 99 \rightarrow x_p = 93m \Rightarrow \vec{x}_p = 93\vec{i}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۰

ابتدا با توجه به معلوم بودن سرعت متوسط و زمان کل حرکت، جابه‌جایی را محاسبه می‌کنیم. پس از آن با استفاده از سطح محصور بین نمودار محور زمان (جابه‌جایی کل) مقدار مجهول را می‌یابیم.
سطح زیر نمودار $v - t$ معرف Δx می‌باشد:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 8 = \frac{\Delta x}{15} \Rightarrow \Delta x = 120m$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_p = (6 + v) \frac{10}{2} + v \times \frac{5}{2} = 30 + 7.5v = 120 \Rightarrow v = \frac{90}{7.5} = 12m/s$$

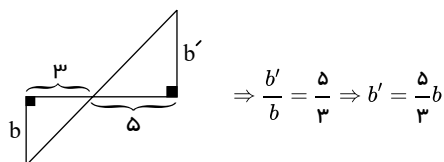
۱ ۲ ۳ ۴ ۷۱
مجهول: a از معادله‌ی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم. برای نوشتن معادله‌ی مکان به a و v_0 نیاز داریم. v_0 مشخص است. پس باید ابتدا a را به دست آوریم، بنابراین طبق پارامترهای حرکت (معلوم: x, v, v_0).

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 6^2 - 12^2 = 2 \times a \times (8.5 - 5) \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}$$

بنابراین معادله‌ی مکان - زمان اینگونه است:

$$x = \frac{1}{2} \times (-4) \times t^2 + 12t + 5 \Rightarrow x = -2t^2 + 12t + 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۲
ساده‌ترین راه، رسم نمودار $(v - t)$ و استفاده از مساحت زیر نمودار آن‌هاست:



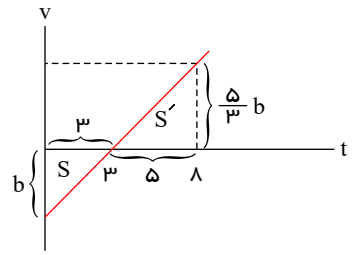
$$|S| = \frac{1}{2}(3)(b) = \frac{3b}{2}$$

$$S' = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}b\right)(5) = \frac{25b}{6}$$

$$\Delta x = S' - |S| = \frac{1}{3}b$$

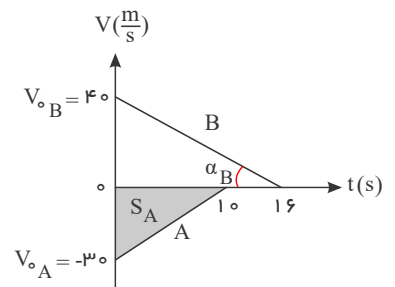
$$L = S' + |S| = \frac{34}{6}b$$

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{\frac{1}{3}b}{\frac{34}{6}b} = \frac{1}{17}$$



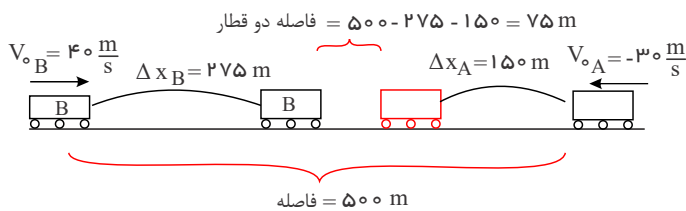
در لحظه $t = 10s$ قطار A می‌ایستد در نتیجه ابتدا باید جابه‌جایی قطار B را تا این لحظه پیدا کنیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۳)

$$\begin{cases} B \text{ شیب خط } = a_B = -\frac{40}{16} = -2,5 \frac{m}{s^2} \\ \Delta x_B = \frac{1}{2}a_B t^2 + V_{0B}t \\ \Rightarrow \Delta x_B = \frac{1}{2}(-2,5)10^2 + 4 \times 10 \Rightarrow \Delta x_B = 275m \end{cases}$$



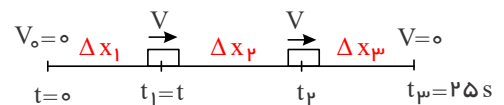
جابه‌جایی متحرک A را با استفاده از سطح زیر نمودار A به دست می‌آوریم.

$$\Delta x_A = S_A = \frac{3 \times 10}{2} = 150m$$



می‌دانیم اگر در حرکت شتاب‌دار ثابت سرعت متحرکی پس از t ثانیه از V_0 به V برسد و سپس در مرحله بعد، سرعتش را با همان شتاب کاهش داده به طوری که پس از t' ثانیه از V مجدداً به V_0 برسد، در این صورت ($\Delta x_1 = \Delta x_2$, $t = t'$) خواهد بود و داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۴)

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 20 = \frac{\Delta x}{25} \Rightarrow \Delta x = 500m$$



$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow 500 = \frac{V+0}{2} \times t + V(25-t) + \frac{V+0}{2} \times t$$

$$\xrightarrow{V=at} 500 = \frac{5t^2}{2} + 125t - 10t^2 + \frac{5t^2}{2} = -5t^2 + 125t \Rightarrow t^2 - 25t + 100 = 0$$

$$\Rightarrow (t-20)(t-5) = 0 \Rightarrow t = 20s \text{ غ ق ق}, t = 5 \text{ ق ق}$$

حال با داشتن مدت زمان t برای محاسبه مدت زمان حرکت یکنواخت متحرک داریم:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 25s \Rightarrow t + \Delta t_2 + t = 25 \Rightarrow \Delta t_2 = 25 - 2t = 25 - 10 = 15s \Rightarrow \Delta t_{\text{یکنواخت}} = 15s$$

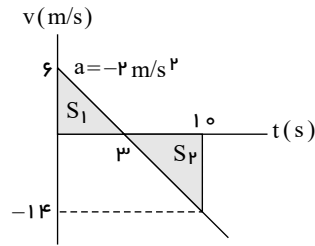
توجه: هنگامی که مسافت طی شده خواسته می‌شود باید توجه کنیم ممکن است حرکت رفت و برگشت باشد (در نمودار $(x-t)$ نقاط \max و \min در نمودار) استفاده از مساحت سطح زیر نمودار آن یکی از راه‌کارهای مناسب است. (۱) (۲) (۳) (۴) (۷۵)

گام اول: سرعت اولیه را می‌یابیم. شتاب ثابت است و در $t = 3s$ ، سرعت متحرک صفر است. (شیب خط مماس برابر سرعت در هر لحظه است.)

$$(t_2 = 3s \text{ تا } t_1 = 0 \text{ در بازه زمانی } 0) \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{v+v_0}{2}\right)\Delta t \Rightarrow 36 - 27 = \left(\frac{0+v_0}{2}\right)(3-0) \Rightarrow 9 = \frac{3}{2}v_0 \Rightarrow v_0 = 6 \frac{m}{s} \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-6}{3-0} = -2 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

گام دوم: نمودار $(v - t)$ را رسم می‌کنیم:



در هر ثانیه $\frac{m}{s}$ از تندی کاسته می‌شود، پس:

$$t = 3s \rightarrow v = 0$$

$$t = 10s \rightarrow v = 6 - 2 \times 10 = -14 \frac{m}{s}$$

$$L = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 + \frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 9 + 49 = 58m$$

روش دوم: با استفاده از دنباله‌ای که جابه‌جایی‌ها در حرکت با شتاب ثابت در هر ثانیه تشکیل می‌دهد نیز به پاسخ رسید.

$$L = 58m \text{ مسافت طی شده}$$

نمودار سرعت - زمان خط راست است، پس شتاب حرکت مقدار ثابتی است. (۷۶) ۱ ۲ ۳ ۴

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4 - (-3)}{1} = 1 \frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow x = \frac{1}{2}t^2 - 3t$$

$$\begin{cases} t_1 = 3s \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(9) - 3(3) = 4,5 - 9 = -4,5m \\ t_2 = 5s \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(25) - 15 = -2,5m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -2,5 - (-4,5) = 2m$$

در ابتدا با استفاده از رابطه سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان)، شتاب حرکت و پس از آن معادله حرکت را می‌نویسیم. (۷۷) ۱ ۲ ۳ ۴

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 8^2 - 4^2 = 2 \times a \times (10 - 4) \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

بنابراین معادله‌ی مکان - زمان اینگونه است:

$$x = \frac{1}{2} \times 4t^2 + 4t + 4 \Rightarrow x = 2t^2 + 4t + 4$$

ابتدا معادله سرعت و شتاب متحرک را محاسبه کرده و سپس به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم. (۷۸) ۱ ۲ ۳ ۴

$$x = 2t^2 - 6t + 6 \Rightarrow V = \frac{dx}{dt} = 4t - 6 \Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = 4$$

گزینه (۱):

$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow V_1 = 6 \\ t_2 = 2 \rightarrow V_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \bar{a} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{2 - 6}{2 - 0} = -2$$

گزینه (۲):

$$\text{شرط تغییر جهت حرکت: } V = 0 \Rightarrow 4t^2 - 12t + 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

لحظه $t = 1(s)$ ریشه مضاعف معادله سرعت است، بنابراین در این لحظه سرعت صفر می‌شود اما تغییر جهت نمی‌دهد.

گزینه (۳): برای بررسی تندشونده یا کندشونده بودن حرکت، معادله سرعت و شتاب را تعیین علامت می‌کنیم:

$$V = 0 \Rightarrow 4t^2 - 12t + 6 = 0 \Rightarrow 2(t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$a = 0 \Rightarrow 12t - 12 = 0 \Rightarrow t = 1$$

بنابراین حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

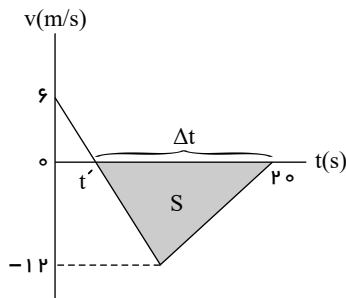
	t=1	
V	+	+
a	-	+
	کندشونده	تندشونده

گزینه (۴): باتوجه به تعیین علامت سرعت و مضاعف بودن ریشه $t = 1(s)$ می‌توان نتیجه گرفت متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و سرعت همواره مثبت است یعنی حرکت همواره در جهت محور

x است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷۹

هنگامی که متحرک در جهت محور x حرکت می کند، $v > 0$ است و وقتی در خلاف جهت محور x حرکت می کند، $v < 0$ است. پس در بازه زمانی صفر تا t' چون $v > 0$ است متحرک در جهت محور x و در بازه زمانی t' تا $t = 20s$ چون $v < 0$ است متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می کند.



در بازه زمانی t' تا $20s$:

$$L = (S) = \frac{1}{2}(12)(\Delta t)$$

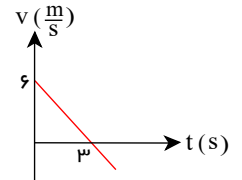
$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{6\Delta t}{\Delta t} = 6 \frac{m}{s}$$

توجه: نکته مهم این بود که نیازی به یافتن t' نبود. این سؤال در سال های اخیر مورد توجه طراحان بوده است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۰ بدیهی است که تا قبل از لحظه توقف یعنی $t_s = \left| \frac{v_0}{a} \right|$ حرکت کندشونده است.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = -t^2 + 6t + 20 \Rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}, v_0 = 6 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 = -2t + 6$$



با توجه به نمودار سرعت - زمان حرکت متحرک قبل از $t = 3s$ کندشونده است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۱ با استفاده از رابطه مستقل از شتاب، مقدار سرعت اولیه و البته سرعت نهایی ($v = 5v_0$) را یافته، پس از آن شتاب حرکت را تعیین می کنیم.

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \times \Delta t \Rightarrow 120 = \frac{v_0 + 5v_0}{2} \times 8 \Rightarrow v_0 = 5 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 5 \times 5 = a \times 8 + 5 \Rightarrow a = 2,5 \frac{m}{s^2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۲ ابتدا سرعت متوسط را محاسبه می کنیم:

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{16 - 16}{8 - 0} = 0$$

نمودار مکان - زمان متحرک سهمی است، بنابراین می توان نتیجه گرفت حرکت شتاب ثابت است ($a = \bar{a}$). اکنون با توجه به اطلاعات روی نمودار بین لحظه $t = 4$ تا $t = 0$ به کمک رابطه مستقل از سرعت اولیه داریم:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + Vt \Rightarrow 8 = -\frac{1}{2}a \times 4^2 + 0 \times 4 \Rightarrow a = -1 \frac{m}{s^2}$$

توجه: شیب نمودار $x - t$ در لحظه $t = 4$ برابر صفر است، یعنی در این لحظه $V = 0$ است.

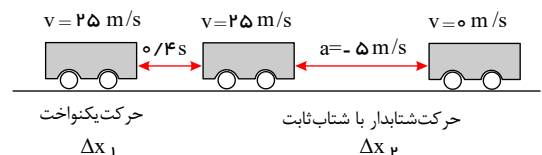
۱ ۲ ۳ ۴ ۸۳ در مدت $0,4s$ اتومبیل با سرعت ثابت (حرکت یکنواخت) و پس از آن با شتاب ثابت کندشونده حرکت می کند.

$$v_0 = 90 \div 3,6 = 25 m/s$$

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t_1 = 25 \times 0,4 = 10 m$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 25^2 = 2(-5)\Delta x_2$$

$$\Rightarrow \Delta x_2 = 62,5 m$$

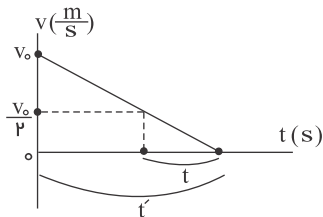


بنابراین از لحظه ای که راننده مانع را در 80 متری خود می بیند تا توقف کامل $72,5m$ جابه جا می شود، در نتیجه اتومبیل در $7,5$ متری مانع می ایستد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۴ ابتدا می توان به کمک شتاب و سرعت اولیه، سرعت نقاط مورد نظر را به دست آورد و سپس می توان سرعت متوسط را محاسبه کرد:

$$v = at + v_0 \begin{cases} t_1 = 5 \rightarrow v_1 = 2 \times 5 + 3 = 13 m/s \\ t_2 = 20 \rightarrow v_2 = 2 \times 20 + 3 = 43 m/s \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow v_{av} = \frac{13 + 43}{2} = 28 m/s$$

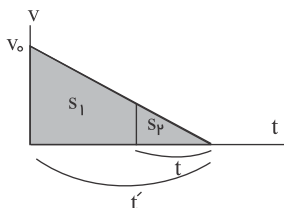
اگر نمودار سرعت - زمان متحرک را از لحظه ترمز (شروع حرکت کندشونده) تا توقف رسم کنیم، داریم:



با توجه به تشابه مثلث‌ها:

$$\frac{t'}{t} = \frac{v_0}{\frac{v_0}{2}} = 2$$

از طرفی می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه، معادل مجذور نسبت تشابه به آن‌هاست یعنی:



$$\frac{(S_2 + S_1)}{S_1} = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = 2^2 = 4$$

مساحت مثلث بزرگ

از طرفی می‌دانیم که:

$$S_2 = 3S_1 \quad S_2 = \Delta x = 150m \rightarrow 150 = 3\Delta x' = 50m$$

$$\Delta x_{\text{کل}} = 150 + 50 \rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = 200m$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۶ سطح زیر نمودار در بازه $0 < t < 4s$ را به دست می‌آوریم.

$$S = \frac{4+2}{2} \times 8 = 24m = x_f - x_0 = x_f - (-36) \Rightarrow x_f = -12m$$

بنابراین متحرک $12m$ دیگر باید جابه‌جا شود تا به مبدا مکان برسد.

در $t > 4s$ داریم:

$$a = \frac{v_1 - v_f}{t_1 - t_f} = \frac{(-2) - 8}{5 - 4} = -2 \frac{m}{s^2}$$

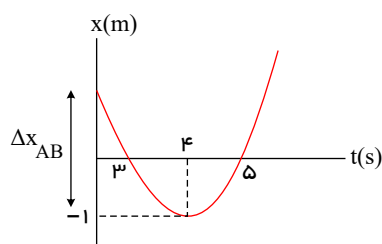
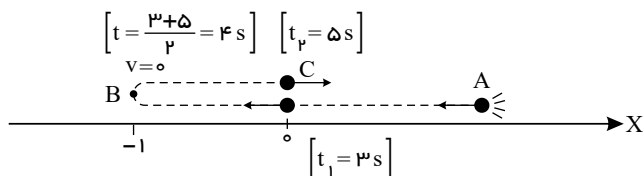
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = -t^2 + 8t = +12 \Rightarrow (t-6)(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ یا } t = 6 \Rightarrow t = 2 \text{ ق ق}$$

$$\Rightarrow t_{\text{رسیدن}} = 6s$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۷ هرگاه در یک حرکت شتابدار با شتاب ثابت a و v_0 مختلف‌العلامت باشند، حرکت به صورت رفت و برگشت است. اگر در چنین شرایطی متحرک در لحظات t_1

و t_2 از یک مکان عبور نموده باشد، در $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ تغییر جهت داده و $v = 0$ شده است. چون در $x = -1(m)$ تغییر جهت داده (در $x < 0$) و در دو لحظه $t_1 = 3s$ و $t_2 = 5s$ نیز از

مبدأ مکان عبور نموده راهی وجود ندارد جز اینکه:



روش وارونه دیدن!

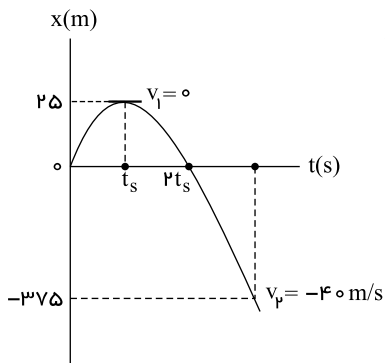
$$A \rightarrow B \rightarrow (B \rightarrow A) : \Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 = \lambda a \Rightarrow \Delta x_{AB} = 16m$$

$$B \rightarrow C \rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} a (1)^2 = 0.5a = 1 \rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow x_o = 15m \Rightarrow S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{16+1}{5} = \frac{17}{5} \frac{m}{s}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۸

با توجه به اینکه جابه‌جایی متحرک از لحظه توقف ($v_1 = 0$) تا مکان $x = -375m$ معلوم است. ($\Delta x = -375 - 25 = -400m$) و نیز معلوم بودن سرعت متحرک در مکان $x = -375m$ ، با استفاده از رابطه سرعت - جابه‌جایی، شتاب حرکت متحرک را می‌یابیم.



$$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x \rightarrow (-40)^2 - 0 = 2(a)(-400) \rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

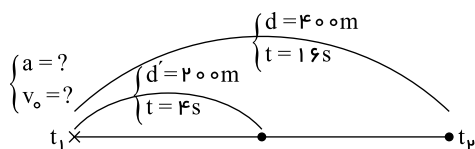
و مدتی که $x > 0$ است، بردار مکان متحرک در جهت محور x است (که در اینجا معادل $2t_s$ است). بنابراین برای پیدا کردن t_s ، از رأس سهمی تا مبدأ مکان در امتداد محور x برمی‌گردیم، یعنی:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{\Delta x = -25m} \\ \xrightarrow{a = -2 \frac{m}{s^2}} \end{matrix} \rightarrow -25 = \frac{1}{2} (-2) (t_s)^2 \rightarrow t_s = 5s$$

و مدتی که بردار مکان متحرک در جهت مثبت محور x است:

$$\Delta t = 2t_s = 10s$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸۹



در ابتدا مسیر حرکت متحرک را به صورت زیر رسم کرده و یک‌بار معادله جابه‌جایی را در ۴ ثانیه اول و بار دیگر در کل ۱۶ ثانیه می‌نویسیم تا با حل یک دستگاه معادلات، بزرگی شتاب را بیابیم.

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_o t$$

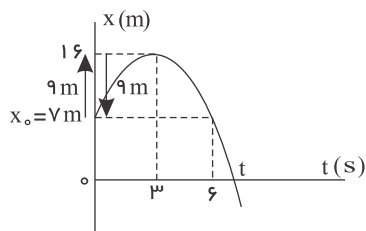
$$\begin{cases} \text{در چهار ثانیه اول: } 200 = \frac{1}{2} a (4)^2 + 4v_o \\ \text{در کل ۱۶ ثانیه: } 400 = \frac{1}{2} a (16)^2 + 16v_o \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 200 = \lambda a + 4v_o \\ 400 = 128a + 16v_o \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{25}{6} \frac{m}{s^2} \\ v_o = \frac{175}{3} \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$|a| = \frac{25}{6} \frac{m}{s^2}$$

و برای تعیین بزرگی شتاب:

۱ ۲ ۳ ۴ ۹۰

چون حرکت با شتاب ثابت است، نمودار $x - t$ به صورت قسمتی از یک سهمی است و با توجه به وجود تقارن نسبت به رأس سهمی داریم:



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow 3 = \frac{\ell}{6} \rightarrow \ell = 18m$$

یعنی در ۳ ثانیه اول ۹ متر در جهت محور رفته و در ۳ ثانیه بعد ۹ متر را برگشته است.

حال در ۳ ثانیه اول، از راس سهمی که $v = 0$ است، برمی گردیم: (در این ۳ ثانیه ۹ متر برمی گردیم.)

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \rightarrow -9 = \frac{1}{2} \times a \times (3)^2 \rightarrow a = -2 \frac{m}{s^2}$$

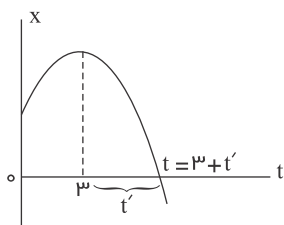
و برای تعیین زمان حرکت از $x = 0$ تا $x = 16$ (از لحظه مربوط به راس سهمی تا لحظه $x = 0$) داریم: (در راس سهمی $v = 0$ است)

$$\Delta x = \frac{1}{2}a't'^2 \rightarrow -16 = \frac{1}{2}(-2)t'^2 \rightarrow t' = 4s$$

پس در نهایت:

$$t = 3 + t' = 3 + 4 \rightarrow t = 7s$$

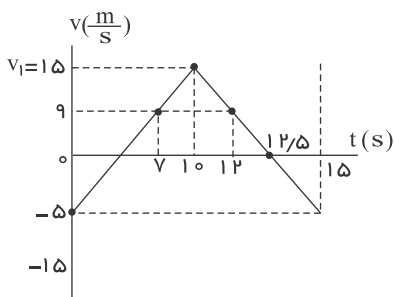
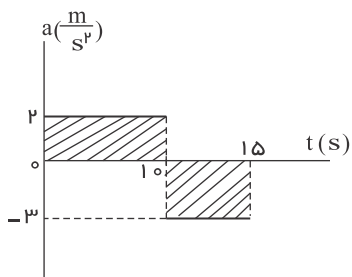
یعنی در مدت ۷ ثانیه اول $x > 0$ یعنی بردار مکان در جهت محور x است.



۱ ۲ ۳ ۴ ۹۱

در ابتدا از روی نمودار $a - t$ داده شده نمودار $v - t$ را رسم کرده، سپس با تعیین جابه جایی (سطح

محصور بین نمودار $v - t$ و محور زمان)، سرعت متوسط را می یابیم. قبل از هر چیزی داریم:



در سه ثانیه اول

$$V = at + v_0 \rightarrow 15 = 2 \times 3 + v_0 \rightarrow v_0 = -5 \frac{m}{s}$$

$$\Delta V_1 = 20 = v_1 - v_0 = v_1 - (-5) \rightarrow v_1 = 15 \frac{m}{s}$$

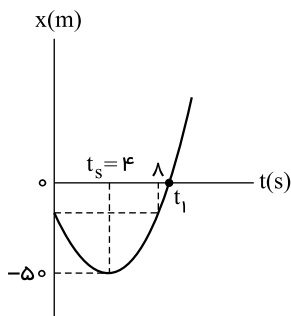
$$\Delta V_2 = -30 = v_2 - v_1 = v_2 - (15) \rightarrow v_2 = -15 \frac{m}{s}$$

$$t_1 = 7s \text{ در } v = at + v_0 \rightarrow v = 2 \times 7 - 5 \rightarrow v = 9 \frac{m}{s}$$

$$t_2 = 12s \text{ در } v' = a't' + v'_0 \rightarrow v' = -3 \times 2 + 15 \rightarrow v' = 9 \frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = S_{\text{خوشه}} = \frac{15+9}{2} \times 3 = 36m \\ \Delta x_2 = S'_{\text{خوشه}} = \frac{15+9}{2} \times 2 = 24m \end{cases} \rightarrow \Delta y_{\text{کل}} = 36 + 24 = 60m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{60}{12-7} \rightarrow v_{av} = 12 \frac{m}{s}$$



یکی از روش‌ها برای تعیین سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت، استفاده از رابطه $v_{av} = \frac{v_2 + v_1}{2}$ است. (البته روش‌های دیگری نیز برای حل

سؤال مثلاً تعریف سرعت متوسط $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ و ... نیز وجود دارد که خودتان می‌توانید آنها را تمرین کنید)

به همین دلیل، بار اول با نوشتن رابطه سرعت - جابه‌جایی بین دو مکان $x_2 = 0$ و $x_1 = -50m$ (لحظه عبور از مبدأ مکان)، شتاب حرکت را می‌یابیم.

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(\Delta x) \xrightarrow[\substack{v_1 = 0, v_2 = 20 \frac{m}{s} \\ \Delta x = x_2 - x_1 = 0 - (-50) = 50m}]{(20)^2 - (0)^2 = (2)(a)(50)} \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

حال با توجه به اینکه به اینک ۸ ثانیه اول حرکت، سرعت متوسط متحرک صفر شده، جابه‌جایی‌اش در این مدت صفر بوده، پس در $t_s = 4s$ متوقف شده و تغییر جهت داده است. بنابراین با نوشتن معادله سرعت در ۴ ثانیه اول داریم:

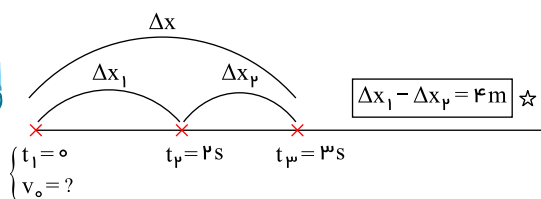
$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=4s]{v=0} 0 = (4)(4) + v_0 \Rightarrow v_0 = -16 \frac{m}{s}$$

و در نهایت برای تعیین سرعت متوسط در t_1 ثانیه اول حرکت داریم:

$$v_{av} = \frac{v_0 + v}{2} \xrightarrow[v=20 \frac{m}{s}]{v_0 = -16 \frac{m}{s}} v_{av} = \frac{-16 + 20}{2} \Rightarrow v_{av} = 2 \frac{m}{s}$$

در ابتدا مسیر حرکت متحرک را به صورت زیر رسم می‌کنیم، سپس معادله جابه‌جایی متحرک را یک بار برای ۲ ثانیه

اول و بار دیگر برای ۳ ثانیه اول می‌نویسیم یعنی:



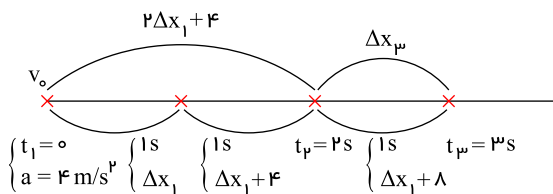
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{a=4 \frac{m}{s^2}} \begin{cases} \text{دو ثانیه اول: } \Delta x_1 = \frac{1}{2}(4)(2)^2 + 2v_0 \\ \text{سه ثانیه اول: } \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{1}{2}(4)(3)^2 + 3v_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = 8 + 2v_0 \\ \Delta x_1 + \Delta x_2 = 18 + 3v_0 \end{cases} \xrightarrow{\Delta x_1 = 8 + 2v_0} \Delta x_2 = 10 + v_0$$

و در نهایت داریم:

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = 4 \xrightarrow[\Delta x_2 = 10 + v_0]{\Delta x_1 = 8 + 2v_0} 8 + 2v_0 - (10 + v_0) = 4 \Rightarrow v_0 = 6 \frac{m}{s}$$

روش دوم: اگر بازه‌های زمانی را به صورت بازه‌های یک ثانیه‌ای در نظر بگیریم، می‌دانیم که جابه‌جایی‌های این متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی یک ثانیه‌ای، تشکیل یک دنباله عددی را می‌دهند که قدر نسبت آن

$a = 4$ (شتاب حرکت) است. بنابراین داریم:



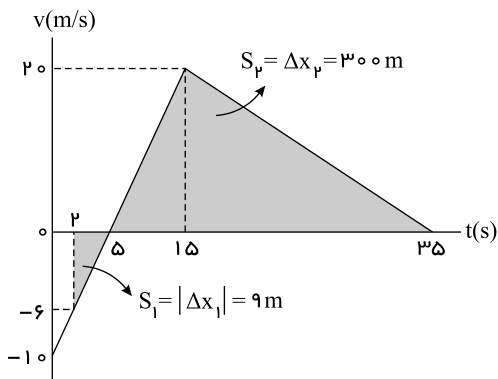
$$\xrightarrow{\text{با توجه به فرض مسئله}} 2\Delta x_1 + 4 - (\Delta x_1 + 8) = 4 \Rightarrow \Delta x_1 = 8m$$

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 8 = \frac{1}{2}(4)(1)^2 + v_0 \Rightarrow v_0 = 6 \frac{m}{s}$$

و در ادامه داریم:

یکی از راه‌های حل این سؤال استفاده از نمودار سرعت - زمان است. برای رسم نمودار، در ابتدا سرعت اولیه متحرک را

محاسبه می‌کنیم. در ۱۵ ثانیه اول، شتاب حرکت متحرک $\frac{m}{s^2}$ است، بنابراین داریم:



$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=2s]{v=-6 \frac{m}{s}} -6 = 2 \times 2 + v_0 \rightarrow v_0 = -10 \frac{m}{s}$$

حال سرعت متحرک در لحظه $t = 15s$ (لحظه‌ای که شتاب تغییر می‌کند) را محاسبه می‌کنیم.

$$v = at + v_0 \xrightarrow[t=15s]{} v = 2 \times 15 - 10 \rightarrow v = 20 \frac{m}{s}$$

حال نمودار سرعت - زمان را رسم می‌کنیم. در ادامه مساحت محصور بین نمودار و محور زمان را می‌یابیم تا جابه‌جایی متحرک از لحظه $t = 2s$ تا $t = 35s$ را تعیین کنیم.

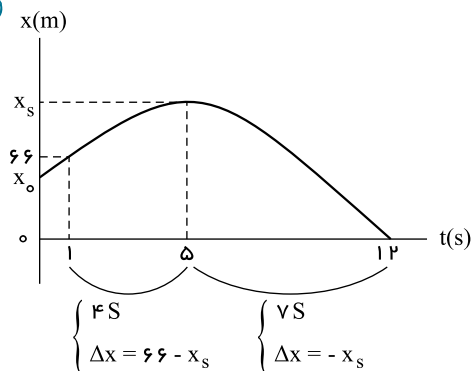
$$S_1 = |\Delta x_1| = 9m, \quad S_p = \Delta x_p = 300m$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_p = -9 + 300 = 291m$$

$$\Delta x = x_p - x_1 \rightarrow 291 = x_p - (-16) \rightarrow x_p = 275m \rightarrow \vec{x} = 275\vec{i}$$

اگر مکان متحرک در راس سهمی را x_s بنامیم و معادله جابه‌جایی متحرک را از راس سهمی که در آن $v = 0$ است بنویسیم،

داریم:



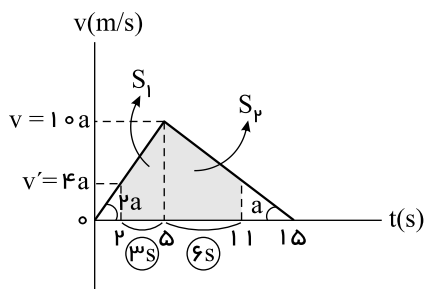
$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 66 - x_s = \frac{1}{2}(a)(4)^2 \\ -x_s = \frac{1}{2}(a)(7)^2 \end{cases} \rightarrow \frac{66 - x_s}{-x_s} = \frac{16}{49} \rightarrow x_s = 98m$$

$$-x_s = \frac{1}{2}a(7)^2 \rightarrow -98 = \frac{1}{2}a(49) \rightarrow a = -\frac{4}{s^2}m$$

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \rightarrow x_0 - x_s = \frac{1}{2}(-4)(5)^2 \xrightarrow{x_s=98} x_0 = 48m$$

و در ادامه برای تعیین شتاب داریم:

و در ۵ ثانیه اول:



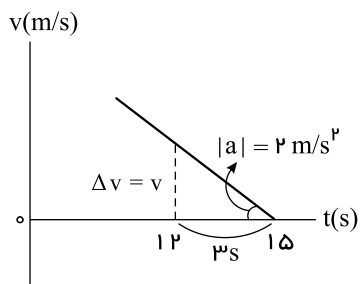
می دانیم که شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان با شتاب متحرک برابر است. با توجه به نمودار که شیب خط در ۵ ثانیه اول، دو برابر قدرمطلق شیب خط در ۱۰ ثانیه بعد است، می توانیم فرض کنیم که اگر شتاب حرکت در مرحله اول و دوم به ترتیب a_1 و a_2 باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_1 = 2a \\ |a_2| = a \end{cases}$$

حال با توجه به اینکه سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه جایی متحرک است، مقدار a را به صورت زیر می یابیم:

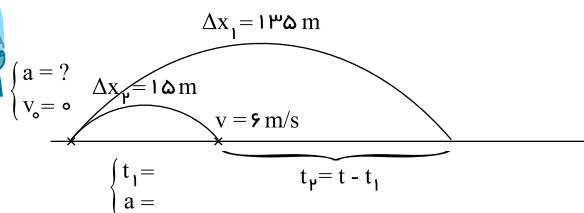
$$S_1 + S_2 = 126 \rightarrow \frac{10a+4a}{2} \times 5 + \frac{10a+0}{2} \times 10 = 126 \rightarrow 21a + 42a = 126 \rightarrow 63a = 126 \rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

و در نهایت داریم:



$$|a| = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{v}{3} \Rightarrow v = 6 \frac{m}{s}$$

اگر مسیر حرکت متحرک را به صورت زیر در نظر بگیریم، یک بار با نوشتن معادله مستقل از شتاب در مرحله اول، زمان مربوط به این مرحله و نیز با نوشتن معادله سرعت - جابه جایی (یا معادله مستقل از زمان) مقدار شتاب را محاسبه می کنیم. یعنی:



$$\Delta x_1 = \frac{v + v_0}{2} \times t_1 \Rightarrow 15 = \frac{6 + 0}{2} \times t_1 \Rightarrow t_1 = 5s$$

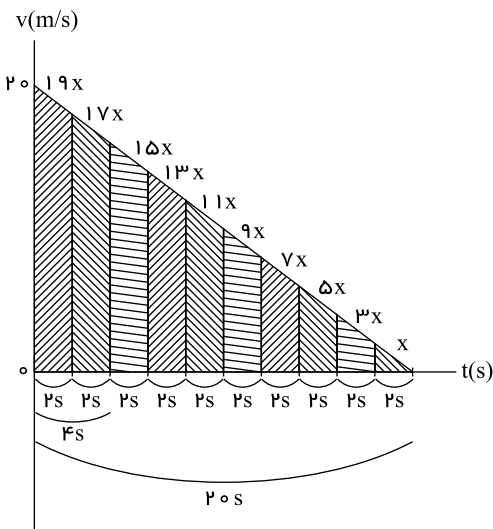
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{6 - 0}{5} \Rightarrow a = 1,2 \frac{m}{s^2}$$

حال برای پیدا کردن کل زمان حرکت در پیمودن ۱۳۵ متر داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \rightarrow 135 = \left(\frac{1}{2}\right)(1,2)t^2 \Rightarrow t = 15s$$

اما برای پیمودن زمان مربوط به مرحله دوم (در سؤال گفته شده چند ثانیه دیگر) داریم:

$$t_2 = t - t_1 = 15 - 5 \Rightarrow t_2 = 10s$$



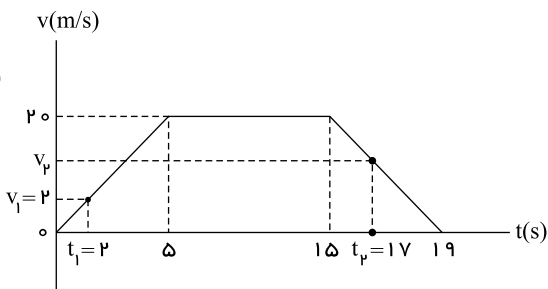
قبل از حل سؤال، باید دو نکته را یادآوری کنیم:

- ۱) اگر متحرکی از حال سکون و شتاب ثابت، در امتداد محور x شروع به حرکت کند، نسبت جابه‌جایی‌هایش در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، همانند نسبت اعداد فرد متوالی است. یعنی نسبت x به $3x$ به $5x$ به $7x$ و ...
- ۲) سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، برابر جابه‌جایی متحرک است. حال با توجه به دو نکته یادشده، با تقسیم زمان حرکت به بازه‌های ۲ ثانیه‌ای، به حل سؤال می‌پردازیم. به گونه‌ای که اگر جابه‌جایی متحرک در دو ثانیه آخر را x بنامیم. (سطح زیر نمودار، در دو ثانیه آخر x باشد) در چهار ثانیه اول $36x$ یعنی مجموع $(17x + 19x)$ است.

پس داریم:

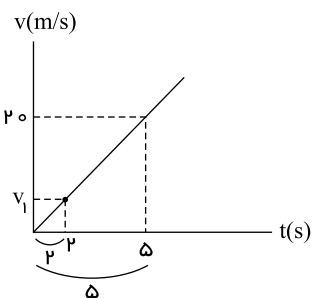
یعنی کل زمان حرکت 20 ثانیه بوده، حال با توجه به شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان که برابر شتاب متحرک است، داریم:

$$a = \text{شیب خط} = -\frac{v_0}{20} \Rightarrow |a| = 1 \frac{m}{s^2}$$



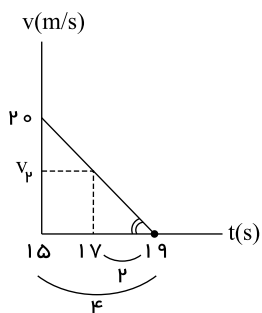
- یکی از مناسب‌ترین روش‌ها برای حل این گونه سؤالات که حرکت متحرک در چند مرحله متوالی بررسی می‌شود، رسم نمودار سرعت - زمان آن است. بنابراین داریم: (در پنج ثانیه اول با شتاب ثابت، حرکت تندشونده دارد، سپس به مدت 10 ثانیه یعنی تا لحظه $t = 15s$ حرکت یکنواخت دارد و در نهایت در چهار ثانیه پایانی یعنی از $t = 15s$ تا $t = 19s$ حرکت کندشونده دارد و متوقف می‌شود).

حال در پنج ثانیه اول با استفاده از تشابه دو مثلث مربوط به دو ثانیه اول و 5 ثانیه اول مقدار v_1 را به دست می‌آوریم:



$$\text{شیب خط} = \frac{v_1}{2} = \frac{v_0}{5} \Rightarrow v_1 = 8 \frac{m}{s}$$

و در 4 ثانیه آخر نیز به همین ترتیب:

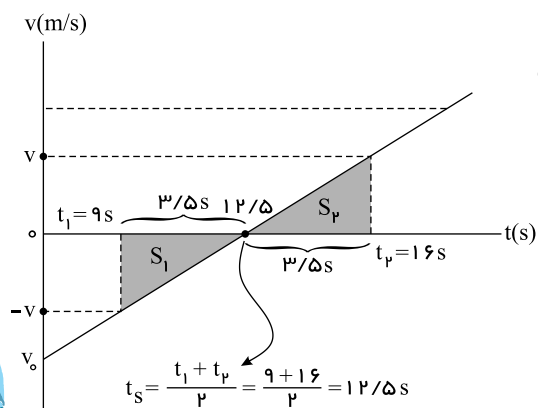


$$|\text{شیب خط}| = \frac{v_p}{2} = \frac{20}{4} \Rightarrow v_p = 10 \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_p - v_1}{t_p - t_1} = \frac{10 - 0}{17 - 2} \Rightarrow a_{av} = \frac{2}{15} \frac{m}{s^2}$$

و در نهایت با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰۰



از آنجایی که در حرکت در امتداد محور x با شتاب ثابت، جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی داده شده صفر است، الزاماً متحرک در وسط این بازه زمانی متوقف شده و تغییر جهت داده است، پس تا قبل از توقف حرکت کندشونده و بعد از آن حرکت تندشونده دارد. بنابراین $v_0 < 0$ است و نمودار سرعت - زمان آن به صورت زیر خواهد بود.
(تذکر: اگر در حرکت با شتاب ثابت در امتداد خط راست، متحرک متوقف شده و تغییر جهت دهد، الزاماً سرعت اولیه (v_0) و شتاب حرکت (a) دارای علامت‌های قریب‌هاند)

حال با توجه به معلوم بودن شتاب حرکت، تندی متحرک در لحظه‌های t_1 و t_p را محاسبه کرده و بعد از آن سطح محصور بین نمودار و محور زمان را به تعیین می‌کنیم تا مسافت طی شده در این مدت را به دست آورده و در نهایت تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم.

$$a = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$|v| = at \xrightarrow{t=3.5s} |v| = 4 \times 3.5 \rightarrow |v| = 14 \frac{m}{s}$$

$$S_1 = S_p = \frac{3.5 \times 14}{2} = 24.5 m \xrightarrow{\ell = S_1 + S_p} \ell = 24.5 + 24.5 = 49 m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \rightarrow s_{av} = \frac{49}{7} \rightarrow s_{av} = 7 \frac{m}{s}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴

۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴

۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴

۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴
۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴