۱ سه بردار a, b, c مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ ولی $b\neq c$.

۲ فرض کنید $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ به‌ترتیب بردارهایی به طول ۱، ۲ و ۳ باشد با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$، مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ را محاسبه کنید.

۳ اگر a و b دو بردار در فضای سه‌بعدی باشند، ثابت کنید:

$$a\cdot(a\times b)=0$$

۴ اگر a, b دو بردار در فضای سه‌بعدی باشند، ثابت کنید اندازهٔ $a\times b$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. (θ زاویهٔ بین دو بردار a, b است.)

$$|a\times b|=|a|\,|b|\sin\theta$$

۵ فرض کنید a, b, c سه بردار بوده که در یک صفحه قرار ندارند. ثابت کنید حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی این سه بردار از رابطهٔ $V=|a\cdot(b\times c)|$ به دست می‌آید.

۶ مقدار m را طوری بیابید که سه بردار $a=2i+(m+1)j-3k$، $b=2j+k$ و $c=-i+j+k$ هم‌صفحه باشند.

۷ اگر $a+b+c=\vec{0}$، ثابت کنید: $a\times b=b\times c=c\times a$

۸ سه نقطهٔ $A(1,2,-1)$ و $B(3,1,2)$ و $C(-1,4,1)$ مفروضند. مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشند، چقدر است؟

۹ مقدار m را طوری بیابید که تصویر قائم بردار $a=(m-1,2,-1)$ در امتداد بردار b، بردار $a'=(1,3,-4)$ باشد.

۱۰ با استفاده از نامساوی کوشی - شوارتز اثبات کنید:

$$(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)$$

۱۱ اگر $8x+15y+z=3$، کمترین مقدار عبارت $16x^2+25y^2+2z^2$ را به دست آورید.

۱۲ اگر سه نقطهٔ $A=j+k$ و $B=\sqrt{3}i+2j-k$ و $C=\sqrt{3}i+2j+k$ سه رأس یک مثلث باشند، مقدار زاویهٔ A را به دست آورید.

۱۳ اگر دو بردار a و b هم طول بوده و $|a-b|=1$ و $|a+b|=\sqrt{3}$ باشد، زاویهٔ بین a و b چقدر است؟

۱۴ اگر طول دو بردار a و b برابر بوده و زاویهٔ بین آنها θ باشد، ثابت کنید:

$$|a+b|=2\,|a|\cos\frac{\theta}{2}$$

۱۵ اگر طول دو بردار a و b برابرهم بوده و زاویهٔ بین آنها θ باشد، ثابت کنید:

$$|a-b|=2\,|a|\sin\frac{\theta}{2}$$

۱۶ اگر a, b, c سه بردار باشد به‌طوری که $a+b+c=\vec{0}$ ثابت کنید:

$$a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=-\frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2}{2}$$

۱۷ اگر بردار a' تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b باشد، ثابت کنید:

$$a'=\frac{a\cdot b}{|b|^2}b$$

۱۸ ثابت کنید θ زاویهٔ بین دو بردار a و b از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}$$

(۱۹) مکان هندسی نقاطی از صفحهٔ xoz را به دست آورید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $A(۲,۰,۱)$، $\sqrt{۲}$ برابر فاصلهٔ آنها تا نقطهٔ $B(۱,۱,۱)$ باشد.

(۲۰) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر .... است.

(۲۱) سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض‌اند.

الف) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

(۲۲) اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌ترتیب ۴ و ۶ بوده و $\vec{a}\cdot\vec{b}=۱۲$ باشد، مساحت مثلث بناشده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست بیاورید.

(۲۳) مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۱,m,-۱۱)$، $\vec{b}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۱,۳)$ در یک صفحه باشند.

(۲۴) ثابت کنید: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{۰}$.

(۲۵) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری که $|\vec{a}|=۳\ ,\ |\vec{b}|=۲۶\ ,\ |\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را محاسبه کنید.

(۲۶) اگر $\vec{a}=(-۱,-۳,۰)\ ,\ \vec{b}=(۳,-۴,۲)\ ,\ \vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید. (سوال تکراری است)

(۲۷) برای هریک از بردارهای a و b که در زیر آمده است تصویر قائم a را در امتداد بردار b به دست آورید.

الف) $a=(۲,-۱,۲)\quad,\quad b=i$

ب) $a=(۲,۳,۱)\quad,\quad b=(۳,۲,۱)$

ج) $a=(۱,۱,۰)\quad,\quad b=(-۱,۲,۴)$

(۲۸) مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A=(۳,۵,۷)$، $B=(۵,۵,۰)$ و $C=(-۴,۰,۴)$ داده شده است را بیابید.

(۲۹) سه بردار a، b و c مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟

(۳۰) اگر $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ سه بردار در فضای سه‌بعدی باشند، ثابت کنید:

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

(۳۱) مقدار m و n را طوری به دست آورید که بردار $a=(m-۲,-۳,n+۱)$ بر دو بردار $b=(۲,۳,۴)$ و $c=(-۱,۲,۱)$ عمود باشد.

(۳۲) مثلث ABC با رئوس $A(۱,۲,۱)$ و $B=(۱,۱,۰)$ و C روی محور yها مفروض است. زاویهٔ حادهٔ B از مثلث ABC را طوری به دست آورید که مساحت مثلث $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد.

(۳۳) اگر $۳a+b=(-۳,۱,۲)$ و $a-۴b=(۰,۲,۱)$ باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی دو بردار a و b را به دست آورید.

(۳۴) اگر $|a|=۳$ و $|b|=۴$ و اندازهٔ تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b برابر ۲ باشد، مساحت مثلث ساخته‌شده روی دو بردار $۲a+۳b$ و $b-۲a$ را به دست آورید.

(۳۵) اگر حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی سه بردار a، b و c برابر ۸ واحد مکعب باشد، حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی بردارهای $a-۲b$، $۲a+c$ و $a-b-c$ را به دست آورید.

(۳۶) بردارهای $a=(۱,۲,۰)$ و $b=(۲,۱,۳)$ و $c=(-۱,۴,۱)$ قطرهای وجوه مجاور یک متوازی‌السطوح هستند که همگی از یک نقطه می‌گذرند، مقدار حجم آن را به دست آورید.

(۳۷) اگر بردار a'' قرینهٔ بردار a نسبت به بردار $b=(۱,-۱,۱)$ بوده و $a\cdot b=۶$ باشد، مساحت مثلث بناشده. روی دو بردار $a\,,a''$ چه مضربی از $|a\times b|$ است؟

(۳۸) کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر بردار a یک ضلع متوازی‌الاضلاع و بردار d یک قطر آن باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S=|a\times d|$

ب) اگر d و d' قطرهای یک متوازی‌الاضلاع باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با: $S=|d\times d'|$

۳۹) اگر k, j, i بردارهای یکه باشند حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$(۳j-k)\cdot[(۲k-i)\times(۲i-j)]$

۴۰) اگر $a\cdot j=۴$ و $a\cdot k=۵$ حاصل اندازهٔ $a\times i$ را به دست آورید.

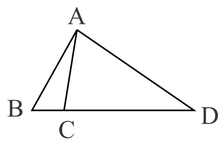
۴۱) اگر a و b و c سه برابر غیر صفر باشند، کدام‌یک درست است؟

الف) $a\times b+c\times a=\vec{\circ}\Rightarrow b=c$

ب) $a\times b=\vec{\circ}\Rightarrow a\parallel b$

۴۲) با توجه به شکل مقابل، درستی و نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:الف) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}>\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

ب) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$



۴۳) اگر $\sqrt{۲}x+۳y-z=-۲$، کمترین مقدار عبارت $x^۲+y^۲+z^۲$ را به دست آورید.

۴۴) اگر $A=(۱,\circ,-۱)$، $B=(۱,۱,۱)$ و $C=(-۱,۱,\circ)$ سه نقطه در فضا باشند، تصویر قائم بردار $۲OA+OB$ بر امتداد بردار $۲OC-OB$ را به دست آورید.

۴۵) اگر زاویهٔ دو بردار u و v با محور xها به‌ترتیب $\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$ بوده و $|u|=\sqrt{۲}$ و $|v|=۲$ باشند، اندازهٔ تصویر قائم بردار $u+v$ روی محور xها را به دست آورید.

۴۶) کسینوس زاویهٔ بین دو قطر یک مستطیل به اضلاع ۶ و ۱۰ را به دست آورید.

۴۷) اگر $۹a^۲+۳b^۲+c^۲=۳$، بیشترین مقدار $|۳a-b+۲c|$ را به دست آورید.

۴۸) اگر θ زاویهٔ بین دو بردار b, a حاده بوده و تصویر قائم و قرینهٔ بردار a نسبت به بردار b به‌ترتیب a' و a'' باشند. ثابت کنید:

$a'\cdot a''=|a|^۲\cdot\cos^۲\theta$

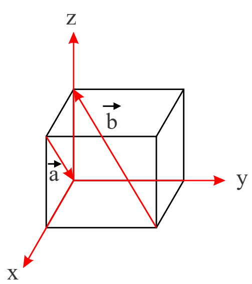
۴۹) اگر a' و a'' به‌ترتیب تصویر قائم و قرینهٔ بردار a نسبت به بردار b باشند، درستی و نادرستی هریک از موارد زیر را تعیین کنید:

الف) $(a-\frac{a\cdot b}{|b|^۲}b)\perp b$

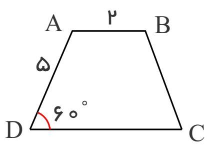
ب) $\frac{a'\cdot a''}{a\cdot a'}=۱$

پ) $(a-a')\cdot(a+a'')=\circ$

۵۰) در مکعب مقابل زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.



۵۱) در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مقابل حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ را به دست آورید.



۵۲) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹\circ^\circ)$، ثابت کنید:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-|AB|^۲$

۵۳) دو نقطهٔ $A(۱,۲,-۱)$ و $B(۳,\circ,۱)$ مفروض‌اند. اگر نقطهٔ M در فضا بوده به‌طوری که $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=۱۳$، فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ $N(۲,۱,\circ)$ را به دست آورید.

۵۷) اندازهٔ بردارهای b و c به‌ترتیب برابر ۳ و ۲ است. اگر $۲a+b+c=\vec{۰}$، حاصل عبارت $a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c$ را به دست آورید.

۵۸) فرض کنید c,b,a به‌ترتیب بردارهایی به طول $\sqrt{۳},۲,۱$ باشند؛ اگر زاویهٔ بین a و b برابر $\frac{\pi}{۳}$، زاویهٔ بین a و c برابر $\frac{\pi}{۶}$ و زاویهٔ بین b و c برابر $\frac{۵\pi}{۶}$ باشد، اندازهٔ بردار $۲a-۳b+c$ را به دست آورید.

۵۹) سه بردار c,b,a به طول یک واحد مفروض‌اند. در صورتی که $۲a+۳b+۴c=\vec{۰}$ اندازهٔ بردار $۳a+۴b$ را به دست آورید.

۶۰) برای دو بردار غیر صفر a و b رابطهٔ $|۲a-b|=|a+b|$ برقرار است. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $(۲b-a)\perp a$ ب) $|a|=۲|b|$

۶۱) بردار غیرصفر $V=(|a|,a,a-|a|)$ مفروض است. درستی و نادرستی هریک از عبارات زیر را تعیین کنید:

الف) اگر V بر محور zها عمود باشد، زاویهٔ آن با محور oy حاده است.

ب) اگر V با محور zها زاویهٔ منفرجه بسازد، زاویهٔ آن با محور oy حاده است..

پ) اگر V با محور yها زاویهٔ حاده بسازد، زاویهٔ آن با ox حاده و عمود بر محور zهاست.

۶۲) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) زاویهٔ بین a و b منفرجه است، اگر و فقط اگر $a\cdot b<۰$.

ب) $a+b$ و $a-b$ عمود برهم‌اند، اگر و فقط اگر زاویهٔ بین a و b برابر $\frac{\pi}{۴}$ باشد.

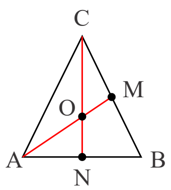
پ) $a\cdot b=a\cdot c\Rightarrow b=c$

ت) اگر $a\cdot b=۲+a\cdot c$، آنگاه زاویهٔ بین a و $b-c$ حاده است.

۶۳) اگر بردار a در صفحهٔ xoz بوده و $|a|=۲$ و این بردار بر بردار $b=i-j+k$ عمود باشد، حاصل هریک از موارد زیر را به دست آورید.

الف) $a\cdot i$ ب) $a\cdot j$ پ) $a\cdot k$

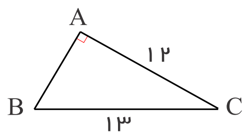
۶۴) مثلث متساوی‌الاضلاع مقابل به ضلع $\sqrt{۳}$ مفروض است. اگر N,M به‌ترتیب وسط اضلاع BC و AB باشند، حاصل $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BO}$ را به دست آورید.



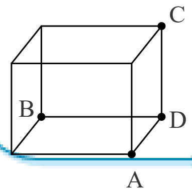
۶۵) فرض کنید $a=(m,-۱,۱)$، $b=(۱,n,۲)$ و $a\cdot b=۳$؛ مقدار n,m را طوری به دست آورید که $|a+b|=۳\sqrt{۲}$ باشد.

۶۶) فرض کنید زاویهٔ بین دو بردار a و b حاده بوده و $|a|=۲$ و $|b|=\sqrt{۲}$ باشد. اگر $|۲a+b|^۲=۱۲a\cdot b$، اندازهٔ تصویر قائم بردار a در امتداد بردار b را به دست آورید.

۶۷) در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ را به دست آورید.



۶۸) در مکعب شکل مقابل به ضلع ۲ واحد، حاصل عبارت $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ را به دست آورید.



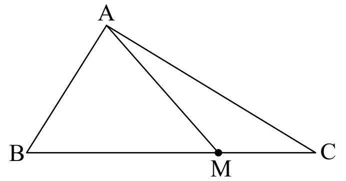
۷۵) اگر $|a|=|b|=|a+b|$ هریک از زوایای زیر چقدر است؟

الف) زاویهٔ بین a و b　　ب) زاویهٔ بین a و $a-b$　　پ) زاویهٔ بین b و $a-b$

ت) زاویهٔ بین b و $-a-b$　　ث) زاویهٔ بین $a+b$ و $a-b$

۷۶) در مثلث ABC، اگر M نقطهٔ وسط BC و N نقطهٔ وسط AC و O نقطهٔ وسط MN باشد، ثابت کنید: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+۲\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O}$

۷۷) در شکل مقابل اگر $\overrightarrow{BM}=۴\overrightarrow{MC}$، ثابت کنید: $\overrightarrow{AM}=\frac{۱}{۵}\overrightarrow{AB}+\frac{۴}{۵}\overrightarrow{AC}$



۷۸) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. اگر $\overrightarrow{AB}=(۳,۲,۱)$ و $\overrightarrow{AC}=(۱,۱,-۱)$ باشد، طول بردار $\overrightarrow{DB}$ را به دست آورید.

۷۹) دو بردار $a=(۰,۰,-۴)$ و $b=(-۲,۱,۲)$ در فضا مفروض‌اند. برداری به طول $۴\sqrt{۶}$ را به دست آورید که در خلاف راستای نیمساز داخلی زاویهٔ بین دو بردار a و b باشد.

۸۰) بردار $\vec{a}'$ قرینهٔ بردار $\vec{a}(۳,-۱,-۲)$ نسبت به محور yها و بردار $\vec{b}'$ قرینهٔ بردار $b(m\ ,n\ ,-۱)$ نسبت به محور xهاست. اگر b' در امتداد a' باشد، اندازهٔ بردار $a'+۲b'$ کدام است؟

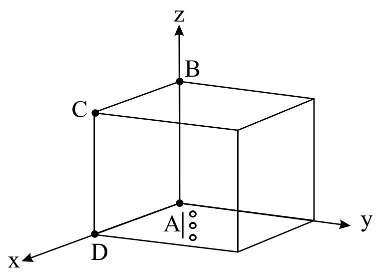
۸۱) مقدار b و a را چنان بیابید که نقاط $A(۱,۲a-۱,-۲)$، $B(b-۱,a-b,۴)$ و $C(۱,۲,۱)$ تشکیل مثلث ندهند.

۸۲) مقدار α طوری تغییر می‌کند که نقطهٔ $M=(۱,\alpha-۱,\alpha+۳)$ در زمان $t_۰$ کمترین فاصلهٔ خود را با محور xها اختیار می‌کند. فاصلهٔ نقطهٔ M تا محور yها را در زمان $t_۰$ به دست آورید.

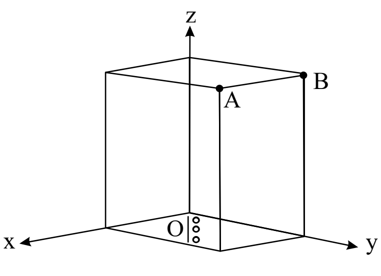
۸۳) اگر اندازهٔ تصاویرقائم بردار $\vec{V}$ بر صفحات مختصات xoy و xoz و yoz به‌ترتیب برابر $۴\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ و $۴\sqrt{۳}$ باشد، طول بردار $\vec{V}$ را به دست آورید.

۸۴) اگر تصویرقائم نقطهٔ $A(m,۱,۲)$ بر صفحهٔ yoz برابر B و قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به صفحهٔ xoy برابر C باشد، مقدار m را طوری به دست آورید که طول میانهٔ وارد بر ضلع BC برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد.

۸۵) طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل مقابل به‌ترتیب ۲ و ۳ و ۴ است. حدود تغییرات m و n را طوری به دست آورید که نقطهٔ $(۲n-p-۱,p-۱,m+p)$ در وجه $ABCD$ قرار گیرد.



۸۶) طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل مقابل به‌ترتیب ۲، ۳ و ۴ است. حدود تغییرات m را طوری به دست آورید که نقطهٔ $(m+n+p\ ,n+۲\ ,p-۱)$ روی یال AB قرار گیرد.



۸۹) درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) نقطهٔ $A = (-۱, ۵, ۷)$ در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

ب) نقطهٔ $B = (۳, ۲, -۱)$ در ناحیهٔ پنجم قرار دارد.

پ) معادلهٔ $z = ۳$ در فضا معادلهٔ یک خط است.

ت) معادلهٔ $\begin{cases} y = ۵ \\ z = ۲ \end{cases}$ معادلهٔ خطی موازی محور xهاست.

ث) بردار $\overrightarrow{V} = (۰, ۰, ۵)$ عمود بر صفحهٔ xoy است.

ج) بردار $\overrightarrow{V} = (-۲, ۰, ۳)$ موازی محور yهاست.

۹۰) چهار نقطهٔ $A(۲, ۱, ۳)$ و $B(-۱, ۱, ۳)$ و $C(۲, -۱, ۳)$ و $D(-۱, -۱, ۳)$ مفروض هستند.

الف) معادلات مشخص‌کنندهٔ سطح محدودشده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.

۹۱) الف) مختصات چند نقطه را مشخص کنید که در رابطهٔ $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ صدق کنند و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

ب) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادلهٔ $x = ۰$ دارد؟

۹۲) درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف) نقطهٔ $A(۲, -۳, ۰)$ روی صفحهٔ xoy قرار دارد.

۹۳) بردارهای $\vec{a} = (۱, -۳, ۲)$ و $\vec{b} = (-۲, ۱, -۵)$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بنویسید.

۹۴) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۲۶$ و اندازهٔ ضرب خارجی $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۷۲$ مفروض‌اند. اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کمتر از ۹۰° باشد، مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید. (تکراری)

۹۵) مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (۲, -۱, ۳)$ ، $\vec{b} = (۰, m, -۱)$ ، $\vec{c} = (۱, -۲, ۳)$ در یک صفحه باشند.

۹۶) تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۲ \ , \ -۱ \ , \ ۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (۱ \ , \ -۱ \ , \ ۰)$ بیابید.

۹۷) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند؛ به‌طوری که $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۲۶$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۷۲$. اگر زاویه بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را به دست آورید.

۹۸) اگر طول و عرض و ارتفاع اتاقی ۴ متر و ۵ متر و ۳ متر باشد، طول قطر اتاق که دو نقطه مقابل را به هم وصل می‌کند را به دست آورید.

۹۹) در فضای سه‌بعدی نقطه A روی محور xها به طول ۲ و نقطه B در صفحه yoz با عرض -۳ و ارتفاع ۴ مفروض است، اصله وسط پاره‌خط AB تا مبدا مختصات را به دست آورید.

۱۰۰) ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{b}$ بر امتداد $\vec{a}$ برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

۱۰۱) شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-۲ < y \leq -۱ \ , \ y < -x^۲ + ۱$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.

۱۰۲) معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور Zها در نقطه به مختصات $A = (۰, ۰, ۳)$ عمود باشد، به‌صورت .... است.

۱۰۳) حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a} = (۱ \ , ۰ \ , -۱)$ و $\vec{b} = (۰ \ , ۲ \ , ۲)$ و $\vec{c} = (۲ \ , -۳ \ , ۰)$ تولید می‌شود.

۱۰۴) مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a} = (۲ \ , m \ , -۱)$ و $\vec{b} = (m + ۱ \ , ۳ \ , ۲)$ بر هم عمود باشند.

۱۰۵) الف) در فضای سه‌بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ ، معادلهٔ محور .... است.

ب) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\vec{b} = r\vec{a}$ آنگاه $|\vec{b}| = |r||\vec{a}|$. (درست - نادرست)

پ) شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $-۱ < x \leq ۲ \ , \ y = x^۲$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.

ت) طول بردار $\vec{a} = (۰ \ , -۳ \ , ۴)$ را به دست آورید.

۱۰۶) برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=\circ$.

۱۰۷) اگر $A=(۲,-۱,۳)$ و $B=(۳,۱,۴)$ و $C=(-۱,۱,\circ)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۱۰۸) سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,\circ)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض‌اند.

الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ به دست آورید.

ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

۱۰۹) ثابت کنید: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.

۱۱۰) اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$، $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۱۱۱) مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a}=(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۲,\circ,۱)$ به وجود می‌آید.

۱۱۲) بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,\circ)$ را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ بیابید.

۱۱۳) نقاط $A=(۱,۲,۱)$ و $B=(۲,۲,۱)$ و $C=(۳,۲,-۱)$ را در فضا در نظر می‌گیریم، کدام‌یک روی خط $\begin{cases} y=۲ \\ z=۱ \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

۱۱۴) الف) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x=\circ \\ z=\circ \end{cases}$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ چه شکلی است؟ . چه ارتباطی با نمودار $x=\circ$ دارد؟

ب) اگر $\vec{a}=(۲,-۱,۳)$ و $\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}$ باشد اندازهٔ بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ را به دست آورید.

۱۱۵) نقاط $A(۱,۲,۱)$ و $B(۳,۱,۳)$ و $C(۱,۵,۴)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانهٔ AM و محیط مثلث را محاسبه کنید.

۱۱۶) اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ و $\vec{a}\neq\vec{\circ}$ و $\vec{b}\neq\vec{c}$، کدام نادرست است؟

۱) $\vec{a}$ بر $\vec{b}-\vec{c}$ عمود است.

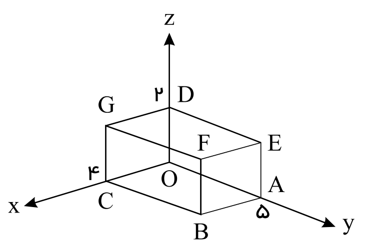
۲) $\vec{a}$ با $\vec{b}-\vec{c}$ موازی است.

۳) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\circ$

۴) $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه‌اند.

۱۱۷) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کمتر از ۹۰ درجه است. اگر $|\vec{a}|=۶$ و $|\vec{b}|=۵$ و $|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|=۱۸$ حاصل $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ را به دست آورید؟

۱۱۸) در مکعب مستطیل شکل مقابل، $OC=۴$ و $OD=۲$ و $OA=۵$ می‌باشد. فاصلهٔ رأس F از وسط OC را بیابید؟



۱۱۹) در مثلث ABC، $A=(۲,-۱,۱)$ و $B=(۳,۱,\circ)$ و $C=(m,\circ,۲)$، میانهٔ ضلع BC، بر آن ضلع عمود می‌باشد. مقدار m را به دست آورید.

۱۲۰) تصویر قائم نقطهٔ $A(-۲,۳,۵)$ بر صفحهٔ xoy، نقطهٔ A' می‌باشد. اگر $B(۳,-۱,۴)$ باشد، طول $A'B$ را بیابید؟

۱۲۱) اگر $A=(-۱,۲,\circ)$ و $B=(۱,\circ,-۱)$ و $C=(\circ,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۱۲۲) بردارهای $\vec{a}=(۱,۲,۳)$ و $\vec{b}=(-۲,\circ,۲)$ مفروض‌اند:

الف) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را محاسبه کنید.

۱۲۳) بردارهای $\vec{a}=(-۲,\circ,۲)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) خط $\begin{cases} x = ۵ \\ y = ۲ \end{cases}$ با محور zها موازی است.

۱۲۵) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف) برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = ۰$ است.

۱۲۶) درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، به‌طوری که $rA = rB$ آن‌گاه داریم: $A = B$.

ب) مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است.

پ) اگر زاویهٔ بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آنگاه ضرب داخلی آنها یک عدد حقیقی مثبت است.

۱۲۷) به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) اگر $y = b$ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای $R^۳$ باشد که از نقطهٔ $A = (۲, -۳, ۴)$ بگذرد، مقدار عددی b چقدر است؟

ب) معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $R^۳$ است؟

پ) در فضای $R^۳$، نقطهٔ A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحهٔ yoz و نقطهٔ $B = (-۴, ۶, -۳)$ مفروض‌اند. مختصات وسط AB را بیابید.

۱۲۸) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوح بناشده توسط سه بردار برابر .... است.

۱۲۹) درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید.

الف) برای دو بردار واحد $\vec{j}$, $\vec{i}$ حاصل‌ضرب خارجی $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{۰}$ است.

۱۳۰) سه بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (۰, ۲, ۱)$ در نظر بگیرید.

الف) اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، $cos\theta$ را بیابید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید.

۱۳۱) سه بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (۰, ۲, ۱)$ را در نظر بگیرید:

الف) طول بردار $۲\vec{b} - \vec{c}$ را به‌دست آورید.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b} + \vec{c}$ ایجاد می‌شود را به‌دست آورید.

۱۳۲) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

الف) نقطه با مختصات $(-۲, ۳, -۴)$ در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه‌بعدی واقع است.

۱۳۳) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||b|$، در این صورت زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

۱۳۴) بردارهای $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ را در نظر بگیرید.

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

۱۳۵) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) بردار $\vec{a} = ۲\vec{j} - \vec{k}$ در فضا سه‌بعدی بر صفحهٔ مختصات سه‌بعدی .... منطبق است. (xoz, yoz, xoy)

۱۳۶) درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) برای سه بردار $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در $\mathrm{R}^۲$ داریم: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

۱۳۷) نقطهٔ A به طول ۲ روی محور xها و نقطهٔ B روی صفحهٔ xoz به طول ۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه‌بعدی مفروض‌اند.

الف) مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.

ب طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

پ مختصات وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

پاسخنامه تشریحی

۱

$$a\cdot b=a\cdot c\Rightarrow a\cdot b-a\cdot c=\circ\Rightarrow a\cdot(b-c)=\circ$$

$$|a||b-c|\cos\theta=\circ\Rightarrow \text{یا:}\begin{cases}|a|=\circ\Rightarrow a=\vec{\circ}=(\circ,\circ,\circ)\quad(۱)\\|b-c|=\circ\Rightarrow b-c=\circ\Rightarrow b=c\\\cos\theta=\circ\Rightarrow\theta=۹\circ^\circ\Rightarrow a\perp(b-c)\quad(۲)\end{cases}$$

از آنجا که می‌خواهیم $b\neq c$ باشد، بنابراین مثال‌هایی می‌توان ارائه داد که یکی از دو حالت (۱) یا (۲) اتفاق بیفتد. مثالی در مورد حالت (۱):

$$\begin{cases}\vec{a}=(\circ,\circ,\circ)\ ,\ b=(۱,۲,۳)\ ,\ c=(-۱,۷,۵)\ ,\ b\neq c\\\Rightarrow\begin{cases}a\cdot b=\circ+\circ+\circ=\circ\\a\cdot c=\circ+\circ+\circ=\circ\end{cases}\Rightarrow a\cdot b=a\cdot c\end{cases}$$

مثالی در مورد حالت (۲):

$$b=(۱,۲,-۱)\ ,\ c=(۳,۲,۴)\xrightarrow{b\neq c}b-c=(-۲,\circ,-۵)$$

حال کافی است بردار a را طوری در نظر بگیریم که ضرب داخلی آن در $b-c$ برابر صفر شود.

$$a=(۵,\circ,-۲)\Rightarrow\begin{cases}a\cdot b=۵+\circ+۲=۷\\a\cdot c=۱۵+\circ-۸=۷\end{cases}\Rightarrow a\cdot b=a\cdot c$$

۲

$$|a|=۲\ ,\ |b|=۱\ ,\ |c|=۳\qquad a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=?$$

$$\text{فرض:}\ a+b+c=\vec{\circ}\xrightarrow{\text{توان دوم}}\underbrace{|a+b+c|^۲}_{\circ}=|a|^۲+|b|^۲+|c|^۲+۲a\cdot b+۲a\cdot c+۲b\cdot c$$

$$\Rightarrow\circ=۴+۱+۹+۲(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)\Rightarrow a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=-۷$$

$$\xrightarrow{+}۲(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)=-۱۴\Rightarrow a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=-۷$$

۳

$$\text{فرض:}\begin{cases}a=(a_۱,a_۲,a_۳)\\b=(b_۱,b_۲,b_۳)\end{cases}$$

$$a\times b=(a_۲b_۳-a_۳b_۲,a_۳b_۱-a_۱b_۳,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

$$\Rightarrow a\cdot(a\times b)=(a_۱,a_۲,a_۳)\cdot(a_۲b_۳-a_۳b_۲,a_۳b_۱-a_۱b_۳,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

$$=\underbrace{a_۱a_۲b_۳}-\underline{a_۱a_۳b_۲}+\underline{\underline{a_۲a_۳b_۱}}-\underbrace{a_۲a_۱b_۳}+\underline{a_۳a_۱b_۲}-\underline{\underline{a_۳a_۲b_۱}}=\circ\Rightarrow a\cdot(a\times b)=\circ$$

۴

$$\text{فرض:}\begin{cases}a=(a_۱,a_۲,a_۳)\\b=(b_۱,b_۲,b_۳)\end{cases}\xrightarrow{\times}a\times b=(a_۲b_۳-a_۳b_۲,a_۳b_۱-a_۱b_۳,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

$$\xrightarrow{\text{توان دوم اندازه}}|a\times b|^۲=(a_۲b_۳-a_۳b_۲)^۲+(a_۳b_۱-a_۱b_۳)^۲+(a_۱b_۲-a_۲b_۱)^۲$$

$$=a_۲^۲b_۳^۲+a_۳^۲b_۲^۲-۲a_۲a_۳b_۲b_۳+a_۳^۲b_۱^۲+a_۱^۲b_۳^۲-۲a_۱a_۳b_۱b_۳+a_۱^۲b_۲^۲+a_۲^۲b_۱^۲-۲a_۱a_۲b_۱b_۲$$

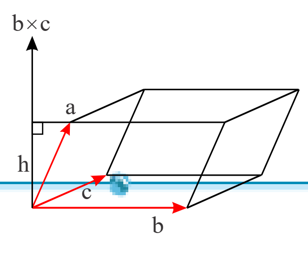
$$=(a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲)-(\underbrace{a_۱^۲b_۱^۲+a_۲^۲b_۲^۲+a_۳^۲b_۳^۲+۲a_۲a_۳b_۲b_۳+۲a_۱a_۳b_۱b_۳+۲a_۱a_۲b_۱b_۲}_{(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)^۲=(a\cdot b)^۲})$$

$$=|a|^۲|b|^۲-(a\cdot b)^۲=|a|^۲|b|^۲-|a|^۲|b|^۲\cos^۲\theta$$

$$=|a|^۲|b|^۲(۱-\cos^۲\theta)=|a|^۲|b|^۲\sin^۲\theta=(|a|\,|b|\sin\theta)^۲\xrightarrow{\text{جذر}}|a\times b|=|a|\,|b|\sin\theta$$

۵

اثبات: می‌دانیم اندازهٔ تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b از رابطهٔ $|a'|=\dfrac{|a\cdot b|}{|b|}$ **به دست می‌آید.**



$$h = \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|b \times c|}$$

$$\text{حجم} V = \text{مساحت قاعده} \times h = |b \times c| \frac{|a \cdot (b \times c)|}{|b \times c|} \Rightarrow V = |a \cdot (b \times c)|$$

۶

حل دترمینان ۳×۳ به روش ساروس:

$V = ۰$ (حجم) $\Rightarrow$ **سه بردار هم‌صفحه‌اند.**

$$V = |a \cdot (b \times c)| = ۰ \Rightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & m+۱ & -۳ & ۲ & m+۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۱ & -۱ & ۱ \end{array}\right| = ۰$$

$$|(۴ - m - ۱ + ۰) - (۶ + ۲ + ۰)| = ۰ \Rightarrow m = -۵$$

۷

فرض: $a + b + c = \vec{۰}$

طرفین فرض را یک‌بار در a و بار دیگر در b ضرب خارجی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \xrightarrow{a\times} \underbrace{a \times a}_{=۰} + a \times b + a \times c = \underbrace{a \times \vec{۰}}_{=۰} \Rightarrow a \times b = -a \times c \Rightarrow a \times b = c \times a \ (۱) \\ \xrightarrow{b\times} b \times a + \underbrace{b \times b}_{=۰} + b \times c = \underbrace{b \times \vec{۰}}_{=۰} \Rightarrow b \times c = -b \times a \Rightarrow b \times c = a \times b \ (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \quad a \times b = b \times c = c \times a$$

۸

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (۲, -۱, ۳), \overrightarrow{AC} = (-۲, ۲, ۲)$$

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ -۲ & ۲ & ۲ \end{vmatrix} = i(-۲ - ۶) - j(۴ + ۶) + k(۴ - ۲) = -۸i - ۱۰j + ۲k$$

$$\xrightarrow{\text{اندازه}} \text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = \sqrt{۶۴ + ۱۰۰ + ۴} = \sqrt{۱۶۸} = ۲\sqrt{۴۲}$$

۹ اگر $a' = (۱, ۳, -۴)$ تصویر قائم بردار $a = (m - ۱, ۲, -۱)$ در امتداد بردار b باشد، می‌دانیم:

$$a \cdot a' = |a'|^۲$$

زیرا:

$$\begin{cases} a \cdot a' = a \cdot \dfrac{a \cdot b}{|b|^۲} b = \dfrac{(a \cdot b)}{|b|^۲}(a \cdot b) = \dfrac{(a \cdot b)^۲}{|b|^۲} = |a'|^۲ \\ a' = \dfrac{a \cdot b}{|b|^۲} b \Rightarrow |a'| = \dfrac{|a \cdot b|}{|b|^۲}|b| = \dfrac{|a \cdot b|}{|b|} \end{cases}$$

$$a \cdot a' = |a'|^۲ \Rightarrow m - ۱ + ۶ + ۴ = ۱ + ۹ + ۱۶ \Rightarrow m = ۱۷$$

۱۰

حکم: $(x + y + z)^۲ \leq ۳(x^۲ + y^۲ + z^۲)$

$$\begin{cases} \text{نامساوی کوشی - شوارتز:} \ |u \cdot v| \leq |u|\,|v| \\ \text{فرض:} \begin{cases} u = (x, y, z) \\ v = (۱, ۱, ۱) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow |x + y + z| \leq \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} \times \sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (x + y + z)^۲ \leq ۳(x^۲ + y^۲ + z^۲)$$

۱۱

$$\begin{cases} \min(\underline{\underline{۱۶x^۲}} + \underline{\underline{۲۵y^۲}} + \underline{\underline{۲z^۲}}) = ? \\ \text{جذر تک‌تک:} \ u = (۴x, ۵y, \sqrt{۲}z) \Rightarrow v = (۲, ۳, \dfrac{۱}{\sqrt{۲}}) \\ \underbrace{۸x + ۱۵y + z}_{u \cdot v} = ۳ \end{cases}$$

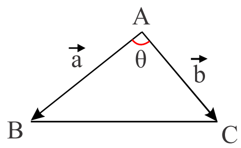
نامساوی کوشی – شوارتز: $|u\cdot v|\le |u|\,|v| \Rightarrow 3 \le \sqrt{16x^2+25y^2+2z^2}\times \underbrace{\sqrt{4+9+\frac{1}{2}}}_{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \le \sqrt{16x^2+25y^2+2z^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{2}{3} \le 16x^2+25y^2+2z^2$$

$$\Rightarrow \min(16x^2+25y^2+2z^2)=\frac{2}{3}$$

۱۲

$A=(0,1,1)\ ,\ B=(\sqrt{3},2,-1)\ ,\ C=(\sqrt{3},2,1)\ ,\ \theta=?$



$$\begin{cases} a=\overrightarrow{AB}=B-A=(\sqrt{3},1,-2) \\ b=\overrightarrow{AC}=C-A=(\sqrt{3},1,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}=\frac{3+1+0}{\sqrt{3+1+4}\times\sqrt{3+1}}=\frac{4}{2\sqrt{2}\times 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\theta=\frac{\pi}{4}$$

۱۳

$$\begin{cases} |a+b|=\sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} |a|^2+|b|^2+2a\cdot b=3 \\ |a-b|=1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} |a|^2+|b|^2-2a\cdot b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a|^2+|b|^2=2 \\ 2a\cdot b=1 \Rightarrow a\cdot b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

طبق فرض $|a|=|b|$، پس:

$$\begin{cases} 2|a|^2=2 \to |a|^2=1 \\ |a|^2\cos\theta=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$$

۱۴

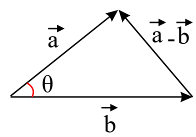
$$\begin{cases} \text{فرض مسئله}: |a|=|b| \\ |a+b|^2 \overset{\text{اتحاد}}{=\!=} |a|^2+|b|^2+2a\cdot b=|a|^2+|b|^2+2\,|a|\,|b|\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow |a+b|^2=2|a|^2+2|a|^2\cos\theta=2|a|^2\underbrace{(1+\cos\theta)}_{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=4|a|^2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} |a+b|=2\,|a|\cos\frac{\theta}{2}$$

۱۵ طبق قضیهٔ کسینوس‌ها:

$$|a-b|^2=|a|^2+|b|^2-2\,|a|\,|b|\cos\theta$$



فرض مسئله: $|a|=|b| \Rightarrow |a-b|^2=2|a|^2-2|a|^2\cos\theta=2|a|^2\underbrace{(1-\cos\theta)}_{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$$\Rightarrow |a-b|^2=4|a|^2\sin^2\frac{\theta}{2} \xrightarrow{\text{جذر}} |a-b|=2\,|a|\sin\frac{\theta}{2}$$

۱۶

$$a+b+c=\vec{0} \xrightarrow{\text{اندازه}} |a+b+c|=0$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} |a|^2+|b|^2+|c|^2+\underbrace{2a\cdot b+2a\cdot c+2b\cdot c}_{2(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)}=0$$

$$\Rightarrow a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=-\frac{|a|^2+|b|^2+|c|^2}{2}$$

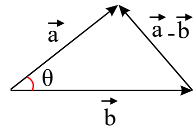
۱۷

۱۴۰ سوال تشریحی هندسه دوازدهم فصل سه

$$\Rightarrow r=\frac{a\cdot b}{|b|^{۲}}\xrightarrow{\text{طبق (۱)}} a'=\frac{a\cdot b}{|b|^{۲}}b$$

۱۸ فرض می‌کنیم دو بردار $a=(a_۱,a_۲)$ و $b=(b_۱,b_۲)$ در فضای دوبعدی باشند. مطابق شکل ضلع سوم مثلث برابر است با:

$$a-b=(a_۱-b_۱,a_۲-b_۲)$$



$$\begin{cases}|a|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}\quad |b|=\sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲}\quad |a-b|=\sqrt{(a_۱-b_۱)^۲+(a_۲-b_۲)^۲}\\ |a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲\,|a|\,|b|\cos\theta\Rightarrow ۲\,|a|\,|b|\cos\theta=|a|^۲+|b|^۲-|a-b|^۲ \text{ :طبق قضیهٔ کسینوس‌ها}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲\,|a|\,|b|\cos\theta=a_۱^۲+a_۲^۲+b_۱^۲+b_۲^۲-\left[(a_۱-b_۱)^۲+(a_۲-b_۲)^۲\right]$$

$$=a_۱^۲+a_۲^۲+b_۱^۲+b_۲^۲-(a_۱^۲+b_۱^۲-۲a_۱b_۱+a_۲^۲+b_۲^۲-۲a_۲b_۲)=۲a_۱b_۱+۲a_۲b_۲$$

$$\Rightarrow |a|\,|b|\cos\theta=\underbrace{a_۱b_۱+a_۲b}_{a\cdot b\text{(تعریف ضرب داخلی)}}\Rightarrow \cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}$$

رابطهٔ فوق در فضای ۳بعدی نیز قابل تعمیم است.

۱۹

$$\begin{cases}M\in xoz\Rightarrow M=(x,۰,z)\\ A(۲,۰,۱)\quad,\quad B(۱,۱,۱)\quad,\quad |MA|=\sqrt{۲}\,|MB|\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+(z-۱)^۲}=\sqrt{۲}\times\sqrt{(x-۱)^۲+۱+(z-۱)^۲}\Rightarrow x^۲+(z-۱)^۲=۰$$

مجموع دو مقدار نامنفی برابر صفر شده، در نتیجه:

$$x^۲+(z-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۰\,,\,z=۱$$

یعنی مکان هندسی موردنظر، نقطهٔ $M=(۰,۰,۱)$ است.

۲۰

الف صفر یا $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$

۲۱

الف

بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(۱,۴,۱)\times(۲,۱,-۲)=(-۹,۴,-۷)$$

ب

حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$V=|a\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|(۲,۳,۱)\cdot(-۲,-۲,-۳)|=|-۱۳|=۱۳$$

۲۲

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۱۲}{۴\times۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

روش اول:

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+(\vec{a}\cdot\vec{b})^۲=|\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲\to|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+(۱۲)^۲=(۴)^۲(۶)^۲\to|\vec{a}\times\vec{b}|=۱۲\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=۶\sqrt{۳}$$

۲۳

$$\vec{b}\times\vec{c}=(۲,۳,-۱)\times(۱,-۱,۳)=(۸,-۷,-۵)$$

شرط در یک صفحه بودن: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=۰\to(۱,m,-۱۱)\cdot(۸,-۷,-۵)=۸-۷m+۵۵=۰\to m=۹$

۲۴

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\Leftrightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{o}|\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=۰\xleftrightarrow{|\vec{a}|\neq۰\;,\;|\vec{b}|\neq۰}\sin\theta=۰\Leftrightarrow\theta=۰\vee\theta=\pi\Leftrightarrow\vec{a}||\vec{b}$$

۲۵

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\Rightarrow۷۲=۳\times۲۶\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}\to\cos\theta=\pm\sqrt{۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^۲}=\pm\frac{۵}{۱۳}\;\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۳\times۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳})=\pm۳۰$$

$\vec b + \vec c = (۲,-۳,۶)$ ، $\vec a = \dfrac{\vec a\cdot(\vec b+\vec c)}{|(\vec b+\vec c)|^{۲}}(\vec b+\vec c) = \dfrac{(-۱,-۳,۰)(۲,-۳,۶)}{۴۹}(۲,-۳,۶) = \dfrac{۱}{۷}(۲,-۳,۶)$

۲۷

تصویر قائم بردار a در امتداد b: $a' = \dfrac{a\cdot b}{|b|^{۲}}b$

الف) $\begin{cases} a=(۲,-۱,۲) \\ b=i=(۱,۰,۰) \Rightarrow |b|=۱ \end{cases} \Rightarrow a\cdot b = ۲+۰+۰=۲ \Rightarrow a' = \dfrac{۲}{۱}b = ۲b = (۲,۰,۰)$

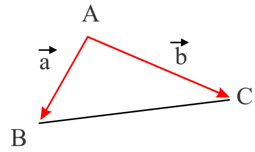
ب) $\begin{cases} a=(۲,۳,۱) \Rightarrow a\cdot b = ۶+۶+۱=۱۳ \\ b=(۳,۲,۱) \Rightarrow |b| = \sqrt{۹+۴+۱} = \sqrt{۱۴} \end{cases} \Rightarrow a' = \dfrac{۱۳}{۱۴}b = \dfrac{۱۳}{۱۴}(۳,۲,۱)$

ج) $\begin{cases} a=(۱,۱,۰) \Rightarrow a\cdot b = -۱+۲+۰=۱ \\ b=(-۱,۲,۴) \Rightarrow |b| = \sqrt{۱+۴+۱۶} = \sqrt{۲۱} \end{cases} \Rightarrow a' = \dfrac{۱}{۲۱}b = \dfrac{۱}{۲۱}(-۱,۲,۴)$

۲۸

$A(۳,۵,۷)$ ، $B(۵,۵,۰)$ ، $C(-۴,۰,۴)$

فرض: $\begin{cases} \vec a = \overrightarrow{AB} = B-A = (۲,۰,-۷) \\ \vec b = \overrightarrow{AC} = C-A = (-۷,-۵,-۳) \end{cases}$



$\Rightarrow a\times b = \begin{array}{c}(۲,۰,-۷)\times \\ (-۷,-۵,-۳) \\ \hline \end{array}$

$a\times b = (-۳۵,۵۵,-۱۰) = ۵(-۷,۱۱,-۲)$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{۱}{۲}|a\times b| = \dfrac{۵}{۲}\sqrt{۴۹+۱۲۱+۴} = \dfrac{۵}{۲}\sqrt{۱۷۴}$

۲۹

$a\times b = a\times c \Rightarrow a\times b - a\times c = \vec{۰} \Rightarrow a\times(b-c) = \vec{۰}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=\vec{۰} \quad (۱) \\ b-c=\vec{۰} \Rightarrow b=c \\ a \parallel (b-c) \quad (۲) \end{cases}$ $\Rightarrow$ صورت مسئله حالتی را می‌خواهد که $b\neq c$ یعنی حالت (۱) یا حالت (۲)

مثال حالت (۱):

$\begin{cases} a=\vec{۰}=(۰,۰,۰) \\ b=(۱,۲,۵) \\ c=(۳,۱,۴) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\times b = (۰,۰,۰)\times(۱,۲,۵) = (۰,۰,۰) = \vec{۰} \\ a\times c = (۰,۰,۰)\times(۳,۱,۴) = (۰,۰,۰) = \vec{۰} \\ b\neq c \end{cases} \Rightarrow a\times b = a\times c$

مثال حالت (۲):

$\begin{cases} b=(۱,۲,۵) \\ c=(۳,۱,۴) \end{cases} \xrightarrow{b\neq c} b-c = (-۲,۱,۱) \xrightarrow[\text{مثلاً } a=۲(b-c)]{\text{باید: } a\parallel(b-c)} a = (-۴,۲,۲)$

$\Rightarrow \begin{cases} a\times b = \begin{array}{c}(-۴,۲,۲)\times \\ (۱,۲,۵)\end{array} \Rightarrow a\times b = (۶,۲۲,-۱۰) \\ a\times c = \begin{array}{c}(-۴,۲,۲)\times \\ (۳,۱,۴)\end{array} \Rightarrow a\times c = (۶,۲۲,-۱۰) \end{cases} \Rightarrow a\times b = a\times c$

۳۰

فرض: $\begin{cases} \vec a = (a_۱,a_۲,a_۳) \\ \vec b = (b_۱,b_۲,b_۳) \\ \vec c = (c_۱,c_۲,c_۳) \end{cases} \Rightarrow b+c = (b_۱+c_۱, b_۲+c_۲, b_۳+c_۳)$

$a\cdot(b+c) = (a_۱,a_۲,a_۳)\cdot(b_۱+c_۱, b_۲+c_۲, b_۳+c_۳)$

$= a_۱(b_۱+c_۱) + a_۲(b_۲+c_۲) + a_۳(b_۳+c_۳)$

$= a_۱b_۱ + a_۱c_۱ + a_۲b_۲ + a_۲c_۲ + a_۳b_۳ + a_۳c_۳$

$= (a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳) + (a_۱c_۱ + a_۲c_۲ + a_۳c_۳) = a\cdot b + a\cdot c$

یعنی خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع برای ضرب داخلی سه بردار برقرار است.

۳۱

$a = (m-۲,-۳,n+۱)$

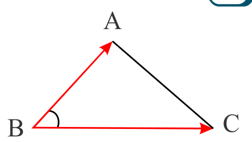
شرط آنکه بردار a بر دو بردار غیرموازی b و c عمود باشد، آن است که $a \parallel (b\times c)$

$$\begin{cases} b = (۲,۳,۴) \\ c = (-۱,۲,۱) \end{cases} \times$$
$$b \times c = (-۵,-۶,۷)$$

$$a \parallel (b \times c) \Rightarrow \frac{m-۲}{-۵} = \frac{-۳}{-۶} = \frac{n+۱}{۷}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{\text{اولی و دومی}} \dfrac{m-۲}{-۵} = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow ۲m - ۴ = -۵ \Rightarrow m = -\dfrac{۱}{۲} \\ \xrightarrow{\text{دومی و سومی}} \dfrac{n+۱}{۷} = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow ۲n + ۲ = ۷ \Rightarrow n = \dfrac{۵}{۲} \end{cases}$$

۳۲



$$A(۱,۲,۱) \ , \ B(۱,۱,۰) \ , \ C(۰,y,۰) \ , \ S_\Delta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = A - B = (۰,۱,۱) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (-۱, y-۱, ۰) \end{cases} \times \quad \Rightarrow \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (۱-y, -۱, ۱)$$

$$\begin{cases} \cos\hat{B} = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|BA||BC|} = \dfrac{۰ + y - ۱ + ۰}{\sqrt{۲} \times \sqrt{(y-۱)^۲ + ۱}} = \dfrac{y-۱}{\sqrt{۲} \times \sqrt{(y-۱)^۲ + ۱}} \quad (۱) \\ S_\Delta = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \dfrac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sqrt{(۱-y)^۲ + ۲} = \sqrt{۳} \Rightarrow (۱-y)^۲ + ۲ = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۱-y)^۲ = ۱ \Rightarrow ۱ - y = \begin{cases} ۱ \\ -۱ \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} ۰ \\ ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{جاگذاری در } (۱)} \cos\hat{B} = \begin{cases} -\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \begin{cases} ۱۲۰^\circ \ \text{غ ق ق} \rightarrow \text{زیرا طبق فرض مسئله } \hat{B} \text{ حاده است.} \\ ۶۰^\circ \end{cases}$$

۳۳

$۳a + b = (-۳,۱,۲)$ و $a - ۴b = (۰,۲,۱)$

$$\begin{cases} |(۳a+b) \times (a-۴b)| = \left|۳\underbrace{a \times a}_{۰} - ۱۲a \times b + \underbrace{b \times a}_{-a\times b} - ۴\underbrace{b \times b}_{۰}\right| = |-۱۳a \times b| = ۱۳\,|a \times b| \\ \begin{matrix} (-۳,۱,۲) \\ (۰,۲,۱) \\ \hline (-۳,۳,-۶) \end{matrix} \times \xrightarrow{\text{اندازه}} \sqrt{۹ + ۹ + ۳۶} = \sqrt{۵۴} = ۳\sqrt{۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۳\,|a \times b| = ۳\sqrt{۶} \Rightarrow S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = |a \times b| = \frac{۳\sqrt{۶}}{۱۳}$$

۳۴

$|a| = ۳ \ , \ |b| = ۴ \ , \ |a'| = ۲$

مساحت مثلث ساخته‌شده روی دو بردار $(۲a + ۳b)$ و $(b - ۲a)$ برابر است با نصف اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی آن دو یعنی:

$$S = \frac{۱}{۲}|(۲a+۳b) \times (b-۲a)| = \frac{۱}{۲}\left|۲a \times b - ۴\underbrace{a \times a}_{۰} + ۳\underbrace{b \times b}_{۰} \underbrace{-۶b \times a}_{+۶a\times b}\right| = \frac{۱}{۲}|۸a \times b|$$

$$\Rightarrow S = ۴\,|a \times b| = ?$$

$$\begin{cases} \text{طبق فرض: } |a'| = ۲ \Rightarrow \dfrac{|a \cdot b|}{|b|} = ۲ \xrightarrow{|b|=۴} |a \cdot b| = ۸ \\ \text{می‌دانیم: } |a \times b|^۲ + |a \cdot b|^۲ = |a|^۲|b|^۲ \Rightarrow |a \times b|^۲ + ۶۴ = ۹ \times ۱۶ \Rightarrow |a \times b|^۲ = ۸۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow |a \times b| = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵} \Rightarrow S = ۴\,|a \times b| = ۴ \times ۴\sqrt{۵} = ۱۶\sqrt{۵}$$

اثبات رابطهٔ $|a \times b|^۲ + |a \cdot b|^۲ = |a|^۲|b|^۲$:

$$|a \times b|^۲ + |a \cdot b|^۲ = |a|^۲|b|^۲\sin^۲\theta + |a|^۲|b|^۲\cos^۲\theta = |a|^۲|b|^۲\underbrace{(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta)}_{۱} = |a|^۲|b|^۲$$

۳۵

حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده روی سه بردار $(a-۲b)$، $(۲a+c)$ و $(a-b-c)$ برابر است با:

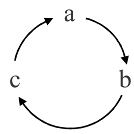
فرض: $|a\cdot(b\times c)|=۸$

$$\left|(a-b-c)\cdot\underbrace{[(۲a+c)\times(a-۲b)]}_{\underbrace{۲a\times a}_{\circ}-۴a\times b+c\times a-۲c\times b}\right|=?$$

$$=\Big|\underbrace{-۴a\cdot(a\times b)}_{\circ}+\underbrace{a\cdot(c\times a)}_{\circ}-\underbrace{۲a\cdot(c\times b)}_{+۲a\cdot(b\times c)}+\underbrace{۴b\cdot(a\times b)}_{\circ}-\underbrace{b\cdot(c\times a)}_{-a\cdot(b\times c)}$$

$$+\underbrace{۲b\cdot(c\times b)}_{\circ}+\underbrace{۴c\cdot(a\times b)}_{۴a\cdot(b\times c)}-\underbrace{c\cdot(c\times a)}_{\circ}+\underbrace{۲c\cdot(c\times b)}_{\circ}\Big|$$

$$=|۵a\cdot(b\times c)|=۵\,|a\cdot(b\times c)|=۵\times۸=۴۰$$



۳۶) اگر بردارهای a، b و c قطرهای وجوه مجاور یک متوازی‌السطوح باشند که همگی از یک نقطه می‌گذرند، آنگاه حجم متوازی‌السطوح از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} V=\dfrac{۱}{۲}\left|a\cdot(b\times c)\right|=\dfrac{۲۱}{۲} \\[2ex] \left|a\cdot(b\times c)\right|=\left|\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۴ & ۱ \end{vmatrix}\begin{matrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{matrix}\right|=\left|(۱-۶+۰)-(۰+۱۲+۴)\right|=۲۱ \end{cases}$$

۳۷)

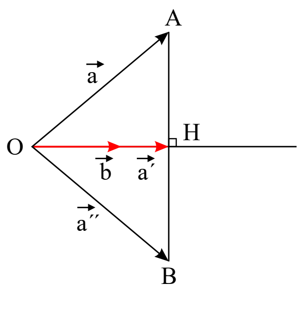
$b=(۱,-۱,۱)\quad,\quad a\cdot b=۶\quad,\quad |b|=\sqrt{۳}$

$a'=\dfrac{a\cdot b}{|b|^۲}b=\dfrac{۶}{۳}b\Rightarrow$ (تصویر قائم a در امتداد بردار b)$a'=۲b$

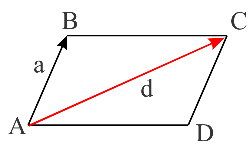
$\Rightarrow S_{OHA}=\dfrac{۱}{۲}|a'\times a|=\dfrac{۱}{۲}|۲b\times a|=|a\times b|$

$\Rightarrow S_{OAB}=۲S_{OHA}=۲\,|a\times b|$

پس مساحت مثلثی که روی دو بردار a, a'' ساخته می‌شود، ۲ برابر $|a\times b|$ است.

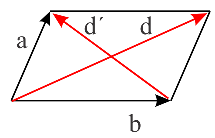


۳۸) الف) درست. زیرا:



$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=۲S_{ABC}=۲\times\dfrac{۱}{۲}|a\times d|=|a\times d|$$

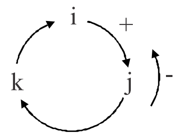
ب) نادرست. زیرا:



$$\begin{cases} |d\times d'| = |(a+b)\times(a-b)| = \left|\underbrace{a\times a}_{=۰} - a\times b + \underbrace{b\times a}_{-a\times b} - \underbrace{b\times b}_{=۰}\right| = |-۲a\times b| = ۲\,|a\times b| = ۲S \\ d=a+b \\ d'=a-b \end{cases}$$

$$\Rightarrow |d\times d'| = ۲S \rightarrow S = \frac{۱}{۲}|d\times d'|$$

۳۹



$$(۳j-k)\cdot[\underbrace{(۲k-i)\times(۲i-j)}_{۴k\times i-۲k\times j-\underbrace{۲i\times i}_{=۰}+i\times j}]$$

$$=(۳j-k)\cdot[۴j+۲i+k] = ۱۲\underbrace{j\cdot j}_{|j|^۲=۱} + ۶\underbrace{j\cdot i}_{۰} + ۳\underbrace{j\cdot k}_{۰} - ۴\underbrace{k\cdot j}_{۰} - ۲\underbrace{k\cdot i}_{۰} - \underbrace{k\cdot k}_{|k|^۲=۱} = ۲$$

۴۰

فرض: $\vec{a} = (a_۱\,, a_۲\,, a_۳)\,,\ a\cdot j = ۴\,,\ a\cdot k = ۵$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\cdot j = (a_۱, a_۲, a_۳)\cdot(۰,۱,۰) = a_۲ \Rightarrow a_۲ = ۴ \\ a\cdot k = (a_۱, a_۲, a_۳)\cdot(۰,۰,۱) = a_۳ \Rightarrow a_۳ = ۵ \end{cases} \Rightarrow a = (a_۱, ۴, ۵)$$

$$\Rightarrow a\times i = \begin{matrix}(a_۱,۴,۵)\\(۱,۰,۰)\end{matrix}\times \Rightarrow a\times i = (۰,۵,-۴) \xrightarrow{\text{اندازه}} |a\times i| = \sqrt{۲۵+۱۶} = \sqrt{۴۱}$$

۴۱

الف) $a\times b + c\times a = \vec{۰} \Rightarrow a\times b - a\times c = \vec{۰} \Rightarrow a\times(b-c) = \vec{۰}$

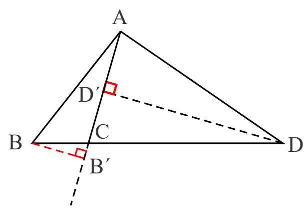
$$\Rightarrow \begin{cases} a = \vec{۰} \rightarrow \text{خلاف فرض} \\ \left.\begin{matrix} b-c=\vec{۰} \Rightarrow b=c \\ a \parallel (b-c) \end{matrix}\right\} \text{یا} \Rightarrow \text{نادرست} \end{cases}$$

ب) $a\times b = \vec{۰}$

$$\Rightarrow |a\times b| = ۰ \Rightarrow |a||b|\sin\theta = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} |a| = ۰ \Rightarrow a = \vec{۰} \\ |b| = ۰ \Rightarrow b = \vec{۰} \end{matrix}\right\} \text{خلاف فرض} \\ \sin\theta = ۰ \Rightarrow \theta = ۰ \text{ یا } \pi \Rightarrow a \parallel b \Rightarrow \text{درست} \end{cases}$$

۴۲ چون در تمامی جملات بردار $\overrightarrow{AC}$ وجود دارد، تصویر بردارهای دیگر را بر $\overrightarrow{AC}$ در نظر می‌گیریم.

الف) نادرست زیرا:



$$\begin{cases} \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = |AD'|\,|AC| \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = |AC|\,|AC| \end{cases}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} < \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$$

ب) درست زیرا:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |AB'|\,|AC| \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = |AC|\,|AC| \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} > \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$$

۴۳

$$\begin{cases} \underbrace{\sqrt{۲}x + ۳y - z}_{u\cdot v} = -۲ \\ \min(\underbrace{x^۲+y^۲+z^۲}_{u=(x,y,z)\text{: جزر تک تک}})? \end{cases} \Rightarrow v = (\sqrt{۲}, ۳, -۱)$$

نامساوی کوشی – شوارتز : $|u\cdot v| \leq |u|\,|v| \Rightarrow ۲ \leq \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \times \sqrt{۲+۹+۱}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} \leq \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۱}{۳} \leq x^۲+y^۲+z^۲ \Rightarrow \min(x^۲+y^۲+z^۲) = \frac{۱}{۳}$$

۴۴

$A = (۱,۰,-۱), B = (۱,۱,۱), C = (-۱,۱,۰)$

$$\begin{cases} ۲OA+OB=(۳,۱,-۱)\overset{\text{فرض}}{=\!=}\vec{a} \\ ۲OC-OB=(-۳,۱,-۱)\overset{\text{فرض}}{=\!=}\vec{b} \end{cases} \qquad a'=\frac{a\cdot b}{|b|^{۲}}b=\frac{-۹+۱+۱}{۱۱}(-۳,۱,-۱)$$

$$\Rightarrow a'=-\frac{۷}{۱۱}(-۳,۱,-۱)$$

۴۵) اگر α و α' به‌ترتیب زاویهٔ بردار u و v با محور xها باشند، داریم:

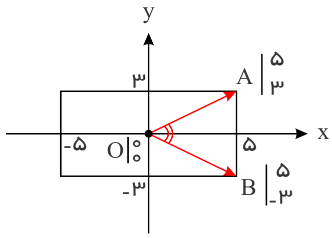
$$\begin{cases} \alpha=\frac{۳\pi}{۴}, |u|=\sqrt{۲}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{a}{|u|}\Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{a}{\sqrt{۲}}\Rightarrow a=-۱ \\ \alpha'=\frac{\pi}{۳}, |v|=۲\Rightarrow \cos\alpha'=\frac{a'}{|v|}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{a'}{۲}\Rightarrow a'=۱ \\ u=(a,b,c),\ \ v=(a',b',c'),\ \ u+v=(\underbrace{a+a'}_{۰},b+b',c+c') \end{cases}$$

بردار $u+v$ برمحور xها عمود است و هیچ تصویر قائمی ندارد.

۴۶) فرض می‌کنیم $O\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$ محل تلاقی قطرهای مستطیل و θ زاویهٔ بین $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ باشد، بنابراین داریم:

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|OA|\,|OB|}=\frac{(۵,۳)\cdot(۵,-۳)}{\sqrt{۲۵+۹}\times\sqrt{۲۵+۹}}=\frac{۲۵-۹}{۲۵+۹}$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{۱۶}{۳۴}=\frac{۸}{۱۷}$$



۴۷)

$$\begin{cases} \max|\underbrace{۳a-b+۲c}_{u\cdot v}|=? \\ \underbrace{۹a^{۲}+۳b^{۲}+c^{۲}}=۳\xrightarrow{\text{تک تک}}u=(۳a,\sqrt{۳}b,c) \end{cases}\quad\Rightarrow v=(۱,-\frac{۱}{\sqrt{۳}},۲)$$

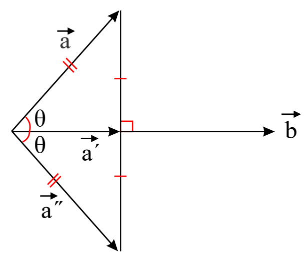
نامساوی کوشی – شوارتز : $|u\cdot v|\leq|u|\,|v|\rightarrow|۳a-b+۲c|\leq\sqrt{\underbrace{۹a^{۲}+۳b^{۲}+c^{۲}}_{۳}}\times\sqrt{۱+\frac{۱}{۳}+۴}$

$$\Rightarrow|۳a-b+۲c|\leq\sqrt{۳}\times\frac{۴}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\max|۳a-b+۲c|=۴$$

۴۸)

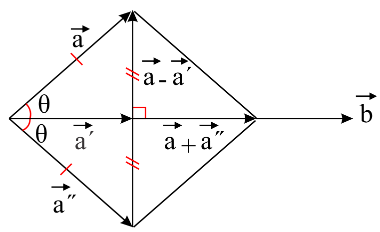
$$\begin{cases} |a'|=|a|\cos\theta\ ,\ \ |a''|=|a| \\ a'\cdot a''=|a'|\cdot|a''|\cdot\cos\theta=|a|\cos\theta\cdot|a|\cdot\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow a'\cdot a''=|a|^{۲}\cdot\cos^{۲}\theta$$



۴۹) فرض می‌کنیم تصویر قائم و قرینهٔ بردار a نسبت به بردار b به‌ترتیب a' و a'' باشند. بدیهی است چهارضلعی حاصل یک لوزی بوده، پس قطرها، نیمساز زوایا بوده و برهم عمودند و طول دو ضلع مجاور برابرند.

$$|a''|=|a|$$



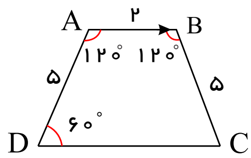
الف) درست زیرا:

$$(a-\frac{a\cdot b}{|b|^{۲}}b)=a-a'\Rightarrow(a-a')\perp b$$

ب) درست زیرا:

$$\frac{a'\cdot a''}{a\cdot a'}=\frac{|a'|\,|a''|\cos\theta}{|a|\,|a'|\cos\theta}\overset{|a''|=|a|}{=\!=\!=}۱$$

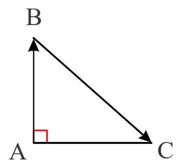
پ) درست زیرا:



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=|AB|^۲+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=۴+|AB|\,|BC|\cos\underset{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\ \text{هم‌مبدأ نیستند.}}{\underline{\underline{۶۰^\circ}}}=۴+۲\times۵\times\frac{۱}{۲}=۹$$

۵۲



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}}=-|AB|^۲$$

۵۳

$A(۱,۲,-۱)\ ,\ B(۳,۰,۱)\ ,\ M=(x,y,z)\ ,\ N(۲,۱,۰)\quad ,\quad |MN|=?$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=۱۳\Rightarrow(M-A)\cdot(M-B)=۱۳$

$\Rightarrow(x-۱,y-۲,z+۱)\cdot(x-۳,y,z-۱)=۱۳$

$\Rightarrow x^۲-۴x+۳+y^۲-۲y+z^۲-۱=۱۳\Rightarrow x^۲-۴x+y^۲-۲y+z^۲=۱۱\ (۱)$

$|MN|=\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۱)^۲+z^۲}=\sqrt{\underbrace{x^۲-۴x+y^۲-۲y+z^۲}_{۱۱}+۵}\overset{\text{طبق }(۱)}{=\!=\!=}۴$

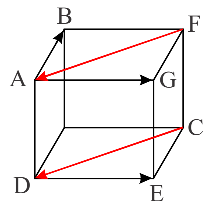
۵۴

$\begin{cases}a=(۲m-۱,m+۲,۲)\ ,\ b=(-۱,۳,m-۱)\\ |a-b|>|a+b|\end{cases}\Rightarrow a\cdot b<۰$

$\Rightarrow a\cdot b=-۲m+۱+۳m+۶+۲m-۲<۰\Rightarrow۳m<-۵\Rightarrow m<-\frac{۵}{۳}$

۵۵

یال مکعب $a=۳\sqrt{۲}\Rightarrow$ (وجه‌ها) قطر مربع $=a\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۶$



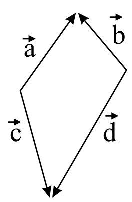
الف) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FA}=\underbrace{|AB|}_{a}\underbrace{|FA|}_{a\sqrt{۲}}\cos۱۳۵^\circ$

$$=۳\sqrt{۲}\times۶(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱۸$$

ب) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=\underbrace{|AB|}_{a}\ \underbrace{|AG|}_{a}\cos۹۰^\circ=۳\sqrt{۲}\times۳\sqrt{۲}\times۰=۰$

۵۶

$|a|=۲\ ,\ \ |b|=۱\ ,\ \ |c|=۳\ ,\ |d|=۴\quad ,\quad b\cdot d+c\cdot d-b\cdot c=?$



مطابق شکل $\Rightarrow a-b+d-c=\vec{۰}$

$\Rightarrow a=b+c-d\xrightarrow{\text{اندازه}}|a|=|b+c-d|$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}}|a|^۲=|b|^۲+|c|^۲+|d|^۲+۲b\cdot c-۲b\cdot d-۲c\cdot d$

$\Rightarrow۴=۱+۹+۱۶+۲(b\cdot c-b\cdot d-c\cdot d)\Rightarrow b\cdot c-b\cdot d-c\cdot d=-۱۱$

$\xrightarrow{\times(-۱)}b\cdot d+c\cdot d-b\cdot c=۱۱$

۵۷

$|b|=۳\quad ,\quad |c|=۲$

$$۲a+b+c=\vec{۰}\Rightarrow a+b+c=-a\xrightarrow{\text{اندازه}}|a+b+c|=|a|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}|a|^۲+\underbrace{|b|^۲}_{۹}+\underbrace{|c|^۲}_{۴}+\underbrace{۲a\cdot b+۲a\cdot c+۲b\cdot c}_{۲(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)}=|a|^۲$$

$$\Rightarrow a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c=-\frac{۱۳}{۲}$$

۵۸

$$|a|=۱,|b|=۲,|c|=\sqrt{۳}\ ,\ |۲a-۳b+c|=?$$

$$|۲a-۳b+c|^۲=۴|a|^۲+۹|b|^۲+|c|^۲-۱۲|a||b|\cos\frac{\pi}{۳}+۴|a||c|\cos\frac{\pi}{۶}-۶|b||c|\cos\frac{۵\pi}{۶}$$

$$=۴+۹\times۴+۳-۱۲\times۱\times۲\times\frac{۱}{۲}+۴\times۱\times\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۶\times۲\times\sqrt{۳}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۵۵$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}|۲a-۳b+c|=\sqrt{۵۵}$$

۵۹

$|a|=|b|=|c|=۱$ و $|۳a+۴b|=?$

$$۲a+۳b+۴c=\vec{۰}\Rightarrow ۲a+۳b=-۴c\xrightarrow{\text{اندازه}}|۲a+۳b|=|-۴c|$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}۴|a|^۲+۹|b|^۲+۱۲a\cdot b=۱۶|c|^۲\Rightarrow ۱۳+۱۲a\cdot b=۱۶\Rightarrow a\cdot b=\frac{۱}{۴}$$

$$|۳a+۴b|^۲=۹|a|^۲+۱۶|b|^۲+۲۴a\cdot b=۹+۱۶+۲۴\times\frac{۱}{۴}=۳۱$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}|۳a+۴b|=\sqrt{۳۱}$$

۶۰ **الف) یادآوری:**

$$|a|=|b|\Rightarrow(a+b)\perp(a-b)$$

فرض: $|۲a-b|=|a+b|\Rightarrow((۲a-b)+(a+b))\perp((۲a-b)-(a+b))$

$\Rightarrow ۳a\perp(a-۲b)$ یا $a\perp(۲b-a)\Rightarrow$ **درست**

ب) نادرست. زیرا طبق (الف) داریم:

$$(۲b-a)\perp a\Rightarrow(۲b-a)\cdot a=۰$$

$$\Rightarrow ۲a\cdot b-|a|^۲=۰\Rightarrow ۲|a||b|\cos\theta=|a|^۲\Rightarrow ۲|b|\cos\theta=|a|$$

۶۱ **الف) درست**

$$V\perp oz\Rightarrow z=۰\Rightarrow a-|a|=۰\Rightarrow|a|=a\Rightarrow a>۰\Rightarrow V=(+,\underset{\text{زاویهٔ } V \text{ با محور } oy \text{ حاده است.}}{\underset{\downarrow}{+}},۰)$$

ب) نادرست

$$a-|a|<۰\Rightarrow a<|a|\Rightarrow a<۰\Rightarrow V=(+,\underset{\text{زاویهٔ } V \text{ با محور } oy \text{ منفرجه است.}}{\underset{\downarrow}{-}},-)$$

پ) درست

$$a>۰\Rightarrow V=(\underset{\text{زاویه با } ox \text{ حاده}}{\underset{\downarrow}{+}},+,\underset{\text{بر محور } z\text{ها عمود}}{\underset{\downarrow}{۰}})$$

۶۲ **الف) درست**

$$\begin{cases}a\cdot b=|a||b|\underbrace{\cos\theta}_{\text{منفی}}\Rightarrow a\cdot b<۰\\ \theta\ \text{منفرجه}\end{cases}$$

ب) نادرست

$$(a+b)\perp(a-b)\Rightarrow(a+b)\cdot(a-b)=۰\Rightarrow|a|^۲-|b|^۲=۰\Rightarrow|a|=|b|$$

زاویهٔ بین دو بردار مشخص نیست.

پ) نادرست

$$a\cdot b=a\cdot c\Rightarrow a\cdot b-a\cdot c=۰\Rightarrow a\cdot(b-c)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=\vec{۰}\\ b=c\qquad\text{یا}\\ a\perp(b-c)\end{cases}$$

هریک از سه حالت می‌تواند اتفاق بیفتد.

ت) درست

$$a\cdot b=۲+a\cdot c\Rightarrow a\cdot b-a\cdot c=۲\Rightarrow a\cdot(b-c)=۲>۰$$

چون ضرب داخلی دو بردار a و $b-c$ مثبت شده، پس زاویهٔ بین آنها حاده است.

۶۳

$$\begin{cases} a\in xoz\Rightarrow a=(x,۰,z)\,,b=(۱,-۱,۱)\\ |a|=۲\Rightarrow\sqrt{x^۲+z^۲}=۲\Rightarrow x^۲+z^۲=۴\ (۱)\\ a\cdot b=۰\Rightarrow x+z=۰\Rightarrow z=-x\xrightarrow{\text{جاگذاری در (۱)}}۲x^۲=۴\Rightarrow x^۲=۲\end{cases}$$

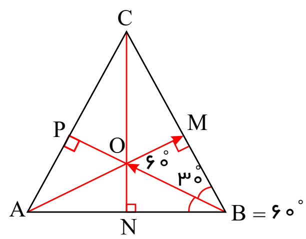
$$\Rightarrow x=\begin{cases}\sqrt{۲}\Rightarrow z=-\sqrt{۲}\Rightarrow a=(\sqrt{۲},۰,-\sqrt{۲})\\ -\sqrt{۲}\Rightarrow z=\sqrt{۲}\Rightarrow a=(-\sqrt{۲},۰,\sqrt{۲})\end{cases}$$

الف) $a\cdot i=(a_۱,a_۲,a_۳)\cdot(۱,۰,۰)=a_۱\Rightarrow a\cdot i=$ مؤلفهٔ اول a $=\pm\sqrt{۲}$

ب) $a\cdot j=$ مؤلفهٔ دوم a $=۰$

پ) $a\cdot k=$ مؤلفهٔ سوم a $=\pm\sqrt{۲}$

۶۴ N,M وسط الاضلاع‌اند پس CN و AM میانه‌های مثلث‌اند (و نیز BP) بنابراین O محل تلاقی میانه‌هاست (مرکز ثقل).



$$\Rightarrow\begin{cases}|OM|=\frac{۱}{۳}|AM|\\ |BO|=\frac{۲}{۳}|BP|\end{cases}$$

$$\text{میانه}=|AM|=|BP|=\text{ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\overset{a=\sqrt{۳}}{=\!=}\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BO}=|OM|\,|BO|\cos\underset{\text{چون دو بردار هم‌مبدأ نیستند.}}{\underline{۱۲۰^\circ}}=\frac{۱}{۳}|AM|\times\frac{۲}{۳}|BP|\times(-\frac{۱}{۲})$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۲}\times(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۴}$$

۶۵

$$\begin{cases}a=(m,-۱,۱)\\ b=(۱,n,۲)\\ a\cdot b=۳\end{cases}\Rightarrow a\cdot b=m-n+۲=۳\Rightarrow m=n+۱\ (۱)$$

$$|a+b|=۳\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}|a|^۲+|b|^۲+۲a\cdot b=۱۸$$

$$\Rightarrow m^۲+۱+۱+۱+n^۲+۴+۶=۱۸\Rightarrow m^۲+n^۲=۵\ (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow(n+۱)^۲+n^۲=۵\Rightarrow ۲n^۲+۲n-۴=۰$$

$$\Rightarrow n^۲+n-۲=۰\Rightarrow n=\begin{cases}۱\\-۲\end{cases}\Rightarrow m=\begin{cases}۲\\-۱\end{cases}$$

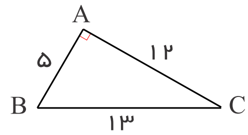
۶۶

$$|a|=۲\ ,\ |b|=\sqrt{۲}\ ,\ |a'|=?$$

$$|۲a+b|^۲=۱۲a\cdot b\Rightarrow ۴|a|^۲+|b|^۲+۴a\cdot b=۱۲a\cdot b\Rightarrow ۱۶+۲=۸a\cdot b$$

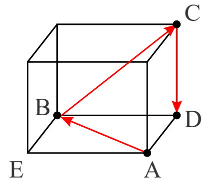
$$\Rightarrow a\cdot b=\frac{۹}{۴}\Rightarrow|a|\underset{\sqrt{۲}}{\underline{|b|}}\cos\theta=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\underbrace{|a|\cos\theta}_{|a'|}=\frac{۹}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۸}$$

۶۷ باتوجه به اعداد فیثاغورسی ۵, ۱۲, ۱۳ $\Leftarrow |AB|=۵$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{BA}}_{-\overrightarrow{AB}}+\overrightarrow{AC})=-|AB|^2+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}_{\substack{0\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}}}=-25$$

۶۸ روش اول:



$$\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}_{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0+|AB|\,|BC|\cos \underset{\downarrow}{\underline{\underline{120^\circ}}}$$

CD بر صفحه ADBE عمود است.

زیرا مثلث ABC متساوی‌الاضلاع بوده و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هم‌مبدأ نیستند.

$$=a\sqrt{2}\times a\sqrt{2}(-\frac{1}{2})\overset{a=2}{=\!=\!=}-2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=-4$$

روش دوم:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}}_{\overrightarrow{BD}})$$

$$=a\sqrt{2}\times a\times\cos \underset{\downarrow}{\underline{\underline{135^\circ}}}=2\sqrt{2}\times 2(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-4$$

دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BD}$ هم‌مبدأ نیستند.

۶۹

$A(2,-1,1),B(3,2,-1),M(x,y,z)$

$\overrightarrow{AM}=M-A=(x-2,y+1,z-1),\overrightarrow{BM}=M-B=(x-3,y-2,z+1)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{7}{2}\Rightarrow(x-2,y+1,z-1)\cdot(x-3,y-2,z+1)=\frac{7}{2}$

$\Rightarrow x^2-5x+6+y^2-y-2+z^2-1=\frac{7}{2}\Rightarrow x^2-5x+y^2-y+z^2=\frac{1}{2}\ (1)$

N وسط B,A $N=(\frac{5}{2},\frac{1}{2},0)\Rightarrow|MN|=\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2}$

$\Rightarrow|MN|=\sqrt{\underbrace{x^2-5x+y^2-y+z^2}_{\text{طبق (۱) }\frac{1}{2}}+\frac{26}{4}}=\sqrt{7}$

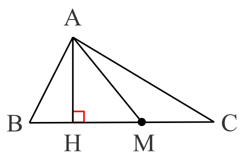
۷۰

$$\begin{cases}c\perp(a-b)\Rightarrow c\cdot(a-b)=0\Rightarrow c\cdot a-c\cdot b=0\Rightarrow c\cdot a=c\cdot b\\ b\perp(a-c)\Rightarrow b\cdot(a-c)=0\Rightarrow b\cdot a-b\cdot c=0\Rightarrow b\cdot a=b\cdot c\end{cases}\Rightarrow c\cdot a=b\cdot a$$

$$\Rightarrow c\cdot a-b\cdot a=0\Rightarrow(c-b)\cdot a=0\Rightarrow\begin{cases}\left.\begin{array}{ll}a=\vec{0} & (\text{غ ق ق})\\ b=c & (\text{غ ق ق})\end{array}\right\}\ \text{طبق فرض}\\ a\perp(c-b)\Rightarrow a\perp(b-c)\end{cases}$$

۷۱

$A(1,2,3)$ و $B(-2,4,1)$ و $C(2,0,1)$ و $|MH|=?$



$$|BM|=3|MC|\Rightarrow\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{MC}$$

$$M-B=3C-3M\Rightarrow 4M=B+3C=(4,4,4)$$

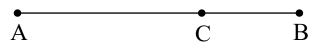
$$\Rightarrow M=(1,1,1)$$

$$\begin{cases}|MH|=\text{اندازهٔ تصویر } \overrightarrow{AM} \text{ بر } \overrightarrow{BC}=\dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \overrightarrow{AM}=M-A=(0,-1,-2)\\ \overrightarrow{BC}=C-B=(4,-4,0)\end{cases}$$

۷۲

$A(-۳,۶,۲)$, $B(۲,۱,۲)$, $|AC| = ۴\,|BC|$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = ۴\overrightarrow{CB} \Rightarrow C - A = ۴B - ۴C$$



$$\Rightarrow ۵C = A + ۴B \Rightarrow C = \frac{۱}{۵}(A + ۴B) = \frac{۱}{۵}(۵,۱۰,۱۰) = (۱,۲,۲)$$

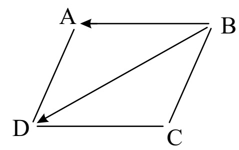
۷۳

$$\overrightarrow{BA} = (۳,-۱,۲) \ , \ \overrightarrow{BD} = (۲,۲,-۱)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = (-۱,۳,-۳)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = (-۱,۳,-۳) + (-۳,۱,-۲) = (-۴,۴,-۵)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{۱۶ + ۱۶ + ۲۵} = \sqrt{۵۷}$$



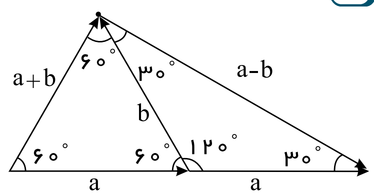
۷۴

$$\begin{cases} A(۱,m-۱,-۲) \xrightarrow{\text{تصویرقائم بر } y} B(۰,m-۱,۰) \\ C(m+۲,-۱,۱) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } x]{} D(m+۲,۱,-۱) \end{cases} \Rightarrow |BD| = \sqrt{(m+۲)^۲ + (m-۲)^۲ + ۱}$$

$$\Rightarrow |BD| = \sqrt{۲m^۲ + ۹} \xrightarrow{m=۰} \min\,|BD| = ۳$$

۷۵

$|a| = |b| = |a+b| \Rightarrow \begin{cases} \text{مثلث سمت چپ متساوی‌الاضلاع} \\ \text{مثلث سمت راست متساوی‌الساقین} \end{cases}$



برای تعیین زاویهٔ بین دو بردار، باید دو بردار هم‌مبدأ باشند و یا نقطهٔ پایانی یکسانی داشته باشند. در غیر این صورت، مکمل آن را در نظر می‌گیریم.

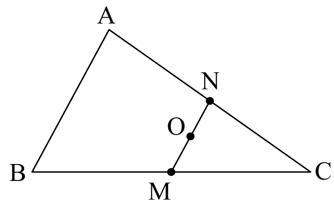
الف) زاویهٔ بین a و b $= ۱۲۰^\circ$ ب) زاویهٔ بین a و $a-b$ $= ۳۰^\circ$

پ) زاویهٔ بین b و $a-b$ $= ۱۵۰^\circ$ ت) زاویهٔ بین b و $-a-b$ $= ۱۲۰^\circ$

ث) زاویهٔ بین $a+b$ و $a-b$ $= ۹۰^\circ$

۷۶

$$\begin{cases} N \text{ وسط } AC \Rightarrow N = \dfrac{A+C}{۲} \\ M \text{ وسط } BC \Rightarrow M = \dfrac{B+C}{۲} \\ O \text{ وسط } MN \Rightarrow O = \dfrac{N+M}{۲} \end{cases} \Rightarrow O = \frac{\dfrac{A+C}{۲} + \dfrac{B+C}{۲}}{۲}$$



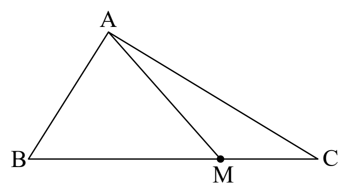
$$\Rightarrow O = \frac{A + B + ۲C}{۴} \xrightarrow[\text{(اضافه کردن } O \text{ به ابتدای نقاط)}]{\text{نمایش برداری}} \overrightarrow{OO} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + ۲\overrightarrow{OC}}{۴}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + ۲\overrightarrow{OC} = ۴\overrightarrow{OO} \xrightarrow{\overrightarrow{OO} = \vec{۰}} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + ۲\overrightarrow{OC} = \vec{۰}$$

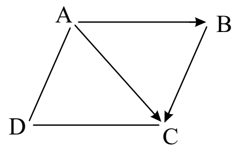
۷۷

$$\overrightarrow{BM} = ۴\overrightarrow{MC} \xrightarrow{\text{نقطه‌ای در فضا } A} \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = ۴(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})$$

$$\Rightarrow ۵\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + ۴\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{۱}{۵}\overrightarrow{AB} + \frac{۴}{۵}\overrightarrow{AC}$$



۷۸



$$\overrightarrow{AB}=(۳,۲,۱)\ ,\ \overrightarrow{AC}=(۱,۱,-۱)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-۲,-۱,-۲)\\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(-۳,-۲,-۱)+(-۲,-۱,-۲)=(-۵,-۳,-۳)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{DB}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{۲۵+۹+۹}=\sqrt{۴۳}$$

۷۹

$$\begin{cases}a=(۰,۰,-۴)\ ,\ b=(-۲,۱,۲)\ ,\ |a|=۴\ ,\ \ |b|=۳\\ \text{بردار در راستای نیمساز داخلی}=|b|\,\vec{a}+|a|\,\vec{b}=۳\vec{a}+۴\vec{b}=(-۸,۴,-۴)=۴(-۲,۱,-۱)\end{cases}$$

به‌ازای هر عدد حقیقی r، هر مضربی از $۳a+۴b$ به فرم $r(۳a+۴b)$ نیز در راستای نیمساز داخلی و بردار a و b است.

$$\Rightarrow |r(۳a+۴b)|=۴\sqrt{۶}\Rightarrow |۴r(-۲,۱,-۱)|=۴\sqrt{۶}\ ,\ \ |(-۲,۱,-۱)|=\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow |r|=۱\quad\Rightarrow\quad r=\begin{cases}۱ & \text{غ‌ق‌ق}\\ -۱\rightarrow & \text{ق ق \ (زیرا طبق فرض بردار خلاف راستا موردنظر است.)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow r(۳a+۴b)\overset{r=-۱}{=\!=\!=}(۸,-۴,۴)$$

۸۰

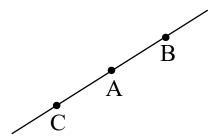
$$\begin{cases}\vec{a}=(۳,-۱,-۲)\xrightarrow[\text{محور }y\text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}}a'=(-۳,-۱,۲)\\ \vec{b}=(m,n,-۱)\xrightarrow[\text{محور }x\text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}}b'=(m,-n,۱)\\ a'\|b'\end{cases}\Rightarrow\ \frac{m}{-۳}=\frac{-n}{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}\quad,\quad n=\frac{۱}{۲}\quad\Rightarrow\quad b'=(-\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲},۱)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a'}+۲\overrightarrow{b'}=(-۶,-۲,۴)\ \Rightarrow\quad |a'+۲b'|=\sqrt{۳۶+۴+۱۶}=\sqrt{۵۶}=۲\sqrt{۱۴}$$

۸۱ چون سه نقطهٔ $A(۱,۲a-۱,-۲)$، $B(b-۱,a-b,۴)$ و $C(۱,۲,۱)$ تشکیل مثلث نمی‌دهند یعنی در یک راستا قرار دارند. بنابراین:

$$\overrightarrow{CA}\|\overrightarrow{CB}\Rightarrow(۰,۲a-۳,-۳)\|(b-۲,a-b-۲,۳)$$



از آنجا که مؤلفهٔ اول $\overrightarrow{CA}$ صفر است باید مؤلفهٔ اول $\overrightarrow{CB}$ نیز صفر باشد. (هر دو در صفحهٔ yoz قرار دارند.)

$$\Rightarrow\begin{cases}b-۲=۰\Rightarrow b=۲\\ \dfrac{۲a-۳}{a-b-۲}=\dfrac{-۳}{۳}=-۱\end{cases}\Rightarrow a=\frac{۷}{۳}$$

۸۲

$$\begin{cases}M=(۱,\alpha-۱,\alpha+۳)\\ \text{فاصلهٔ }M\text{ تا محور }x\text{ها}=\sqrt{y^۲+z^۲}=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\alpha+۳)^۲}=\sqrt{\underbrace{۲\alpha^۲+۴\alpha+۱۰}_{\text{باید مینیمم شود}}}\end{cases}$$

طول نقطهٔ مینیمم در تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ برابر است با: $x=-\dfrac{b}{۲a}$

$$\Rightarrow\ \alpha=-\frac{۴}{۲\times ۲}=-۱\Rightarrow\quad M=(۱,-۲,۲)$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ }M\text{ تا محور }y\text{ها}=\sqrt{x^۲+z^۲}=\sqrt{۵}$$

۸۳ فرض کنید: $\overrightarrow{V}=(x,y,z)$؛ داریم:

$$\begin{cases}\text{تصویرقائم}\ \ \vec{V}\ \ \text{بر صفحهٔ}\ \ xoy=(x,y,۰)\\ \text{تصویرقائم}\ \ \vec{V}\ \ \text{بر صفحهٔ}\ \ xoz=(x,۰,z)\\ \text{تصویرقائم}\ \ \vec{V}\ \ \text{بر صفحهٔ}\ \ yoz=(۰,y,z)\end{cases}\xrightarrow{\text{اندازه}}\begin{cases}\sqrt{x^۲+y^۲}=۴\sqrt{۲}\\ \sqrt{x^۲+z^۲}=۳\sqrt{۲}\\ \sqrt{y^۲+z^۲}=۴\sqrt{۳}\end{cases}$$

$$\xrightarrow[+]{\text{توان ۲}}۲(x^۲+y^۲+z^۲)=۹۸\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۴۹\Rightarrow\left|\overrightarrow{V}\right|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=۷$$

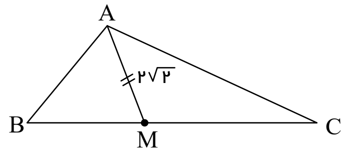
۸۴

$$A(m,۱,۲) \xrightarrow{\text{تصویرقائم بر } yoz} B(۰,۱,۲) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } xoy} C(۰,۱,-۲)$$

$$M = \frac{B+C}{۲} = (۰,۱,۰) \quad \text{نقطهٔ وسط } B \text{ و } C$$

$$|AM| = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{m^۲+۴} = ۲\sqrt{۲}$$

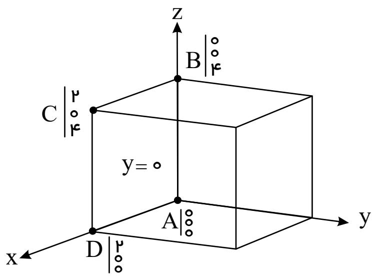
$$\Rightarrow m^۲+۴ = ۸ \Rightarrow m = \pm ۲$$



۸۵) نقطهٔ $(۲n-p-۱, p-۱, m+p)$ در وجه $ABCD$ قرار دارد؛ در نتیجه داریم:

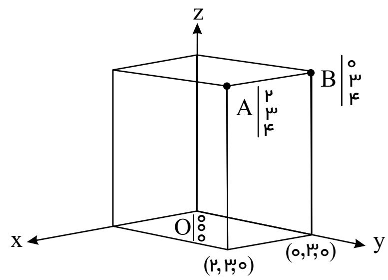
$$\text{معادلهٔ چهارضلعی } ABCD \begin{cases} y=۰ \Rightarrow p-۱=۰ \Rightarrow p=۱ \\ ۰ \le x \le ۲ \\ ۰ \le z \le ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۰ \le ۲n-p-۱ \le ۲ \\ ۰ \le m+p \le ۴ \end{cases} \xrightarrow{p=۱} \begin{cases} ۲ \le ۲n \le ۴ \Rightarrow ۱ \le n \le ۲ \\ -۱ \le m \le ۳ \end{cases}$$



۸۶) برای اینکه نقطهٔ $(m+n+p, n+۲, p-۱)$ روی یال AB قرار گیرد؛ داریم:

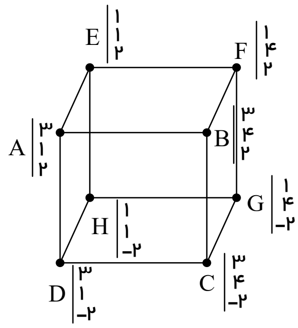
$$\text{معادلهٔ یال } AB: \begin{cases} y=۳ \to n+۲=۳ \to n=۱ \\ z=۴ \to p-۱=۴ \to p=۵ \\ ۰ \le x \le ۲ \end{cases}$$



$$\Rightarrow ۰ \le m+n+p \le ۲ \Rightarrow ۰ \le m+۶ \le ۲ \Rightarrow -۶ \le m \le -۴$$

۸۷) الف)

$$\begin{cases} ABCD \quad \text{وجه}: x=۳ \quad , \quad EFGH \quad \text{وجه}: x=۱ \\ ADHE \quad \text{وجه}: y=۱ \quad , \quad BCGF \quad \text{وجه}: y=۴ \\ CDHG \quad \text{وجه}: z=-۲ \quad , \quad ABFE \quad \text{وجه}: z=۲ \end{cases}$$



نقطهٔ A بر سه وجه $ABCD$ و $ADHE$ و $ABEF$ قرار دارد پس مختصات A برابر است با: $A \begin{vmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$

به همین ترتیب مختصات بقیه رأس‌ها به دست آمده است.

ب)

$$\begin{cases} x=\underline{\underline{۱}} \to (\underline{\underline{۱}},۲,۱) \quad , \quad x=\underline{\underline{۳}} \to (\underline{\underline{۳}},۲,۰) \quad , \quad y=\underline{\underline{۱}} \to (۲,\underline{\underline{۱}},-۱) \\ y=\underline{\underline{۴}} \to (۲,\underline{\underline{۴}},۱) \quad , \quad z=\underline{\underline{۲}} \to (۲,۳,\underline{\underline{۲}}) \quad , \quad z=\underline{\underline{-۲}} \to (۲,۲,\underline{\underline{-۲}}) \end{cases}$$

پ) نقطهٔ $(\underline{\underline{۱}},\underline{\underline{۴}},۱)$ فقط بر دو وجه $x=\underline{\underline{۱}}$ و $y=\underline{\underline{۴}}$ قرار دارد یعنی روی فصل مشترک آنها یعنی روی یال FG قرار دارد.

و نقطهٔ $(\underline{\underline{۳}},۲,\underline{\underline{۲}})$ فقط بر دو وجه $x=۳$ و $z=۲$ قرار دارد و نقطهٔ $(۲,\underline{\underline{۴}},\underline{\underline{-۲}})$ بر دو وجه $y=\underline{\underline{۴}}$ و $z=\underline{\underline{-۲}}$ قرار دارد.

ت)

$$\text{یال } BF: \begin{cases} y=۴ \\ z=۲ \\ ۱ \le x \le ۳ \end{cases} \Rightarrow \text{خط } BF: \begin{cases} y=۴ \\ z=۲ \end{cases} \qquad \text{یال } AB: \begin{cases} x=۳ \\ z=۲ \\ ۱ \le y \le ۴ \end{cases} (\text{پاره‌خط } AB) \Rightarrow \text{معادلهٔ خط } AB: \begin{cases} x=۳ \\ z=۲ \end{cases}$$

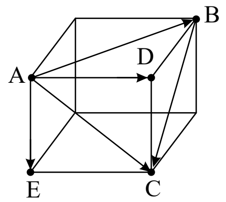
ث)

$$\text{وجه } ADHE: \begin{cases} ۱ \le x \le ۳ \\ -۲ \le z \le ۲ \\ y=۱ \end{cases} \qquad \text{وجه } EFGH: \begin{cases} ۱ \le y \le ۴ \\ -۲ \le z \le ۲ \\ x=۱ \end{cases}$$

ج) $(۲, ۳, ۱)$ درون مکعب قرار دارد.

چ) $(۲, ۲, ۲)$ روی وجه $z = ۲$ قرار دارد که روی هیچ یالی قرار نگرفته است.

۸۸



الف) درست، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است چون اضلاع این مثلث، قطرهای مربع می‌باشند.

ب) غلط، زاویهٔ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$، ۱۲۰° است.

پ) درست، زیرا نقاط پایانی دو بردار $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ یکسان است.

ت) درست، چون زاویهٔ بین یک ضلع و یک قطر مربع است.

ث) غلط است زیرا $\overrightarrow{AE}$ بر صفحهٔ سقف عمود است پس بر هر بردار واقع در آن نیز عمود است.

۸۹ الف) نادرست است زیرا $A = (-۱, ۵, ۷)$ در ناحیهٔ دوم است.

ب) درست است. زیرا: $\begin{cases} x > ۰ \\ y > ۰ \\ z < ۰ \end{cases}$

پ) نادرست. زیرا معادلهٔ $z = ۳$ معادلهٔ یک صفحه است موازی صفحهٔ $z = ۰$ (یا همان صفحهٔ xoy).

ت) درست. در $\begin{cases} y = ۵ \\ z = ۲ \end{cases}$ یعنی y و z مقادیر ثابتی هستند و x هر مقداری می‌تواند اختیار کند. (x نامشخص است.)

ث) درست . زیرا این بردار در راستای محور zها قرار دارد و محور zها بر صفحهٔ شامل دو محور دیگر یعنی بر صفحهٔ xoy عمود است.

ج) نادرست است. زیرا مؤلفهٔ y بردار $\vec{V} = (-۲, ۰, ۳)$ برابر صفر است، یعنی این بردار در صفحهٔ xoz قرار دارد پس موازی صفحهٔ xoz و در نتیجه عمود بر محور yها است.

۹۰

الف)

$$A(۲, ۱, ۳), B(-۱, ۱, ۳), C(۲, -۱, ۳), D(-۱, -۱, ۳)$$

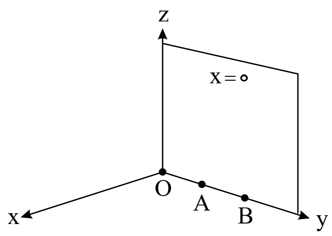
حدود تغییرات طول نقاط، بین -۱ و ۲ و حدود تغییرات عرض نقاط، بین -۱ و ۱ بوده و چهارضلعی $ABCD$ به ارتفاع ۳ قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} -۱ \leq x \leq ۲ \\ -۱ \leq y \leq ۱ \\ z = ۳ \end{cases}$$

ب) $\begin{cases} -۱ \leq x \leq ۲ \\ -۱ \leq y \leq ۱ \\ z = ۱ \end{cases}$ این صفحه، ۲ واحد پایین‌تر از چهارضلعی $ABCD$ قرار دارد.

۹۱

الف) مختصات چند نقطه که در رابطهٔ $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ صدق کنند عبارتند از: $O(۰, ۰, ۰), A(۰, ۱, ۰), B(۰, ۲, ۰)$ و مکان آن نقاط طبق شکل مقابل روی محور yهاست.



ب) نمودار معادلهٔ $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ یک خط (همان محور yها) است.

$x = ۰$ معادلهٔ صفحه‌ای شامل محور yها است. (صفحهٔ $x = ۰$ همان صفحهٔ yoz است.)

۹۲

الف درست - به‌طور کلی نقطهٔ $(x', y', ۰)$ روی صفحهٔ xoy قرار دارد.

۹۳

الف

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{-۲ - ۳ - ۱۰}{۴ + ۱ + ۲۵}(-۲, ۱, -۵) = \frac{-۱}{۲}(-۲, ۱, -۵) = (۱, -\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲})$$

ب

$$\vec{a} \times \vec{b} = (۱, -۳, ۲) \times (-۲, ۱, -۵) = (۱۳, ۱, -۵)$$

۹۴ تکرار سوال ۶۶۸۷۳۱

روش اول:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{۷۲}{۳ \times ۲۶} = \frac{۱۲}{۱۳} \rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\theta < ۹۰} \cos\theta = \frac{۵}{۱۳} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = ۳۰$$

روش دوم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^۲ + (\vec{a} \cdot \vec{b})^۲ = |\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲ \rightarrow ۷۲^۲ + (\vec{a} \cdot \vec{b})^۲ = ۳^۲ \times ۲۶^۲$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^{۲}=۹۰۰ \to (\vec{a}\cdot\vec{b})=\pm ۳۰ \xrightarrow{\theta<۹۰} (\vec{a}\cdot\vec{b})=۳۰$$

۹۵

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=۰ \to (۰, m, -۱)\cdot((۳, -۳, -۳)=۰$$
$$\to -۳m+۳=۰ \to m=۱$$

۹۶

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۲\times ۱+(-۱)(-۱)+۲\times ۰=۳\ ,\ |\vec{b}|=\sqrt{۱^{۲}+(-۱)^{۲}+۰^{۲}}=\sqrt{۲}$$
$$a'=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}=\frac{۳}{۲}(۱\ ,\ -۱\ ,\ ۰)=(\frac{۳}{۲}\ ,\ -\frac{۳}{۲}\ ,\ ۰)$$

۹۷

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \to ۷۲=۳(۲۶)\sin\theta \to \sin\theta=\frac{۱۲}{۱۳}$$
$$\cos\theta=\frac{۵}{۱۳} \to \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=۳(۲۶)\frac{۵}{۱۳}=۳۰$$

۹۸

$$\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}+۵^{۲}}=۵\sqrt{۲}$$

۹۹ $A=(۲, ۰, ۰)$ و $b=(۰, -۳, ۴)$

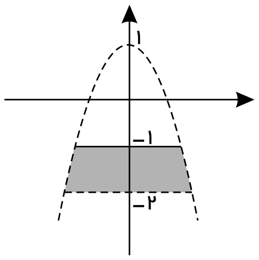
مختصات وسط پاره‌خط AB برابر است با $M=(\frac{۲+۰}{۲}, \frac{۰+(-۳)}{۲}, \frac{۰+۴}{۲})=(۱, \frac{-۳}{۲}, ۲)$

$$OM=\sqrt{۱+\frac{۹}{۴}+۴}=\sqrt{\frac{۲۹}{۴}}$$

۱۰۰

$$\vec{a}=r\vec{b}$$
$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}=\frac{(r\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}=\frac{r|\vec{b}|^{۲}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}=r\vec{b}=\vec{a}$$

۱۰۱ رسم نمودار (به‌طوری که خط و خط چین مشخص باشد.)



۱۰۲

$$Z=۳$$

۱۰۳ حجم متوازی‌السطوح پدید آمده، توسط سه بردار $\vec{a}=(a_{۱}\ ,a_{۲}\ ,a_{۳})$، $\vec{b}=(b_{۱}\ ,b_{۲}\ ,b_{۳})$ و $\vec{c}=(c_{۱}\ ,c_{۲}\ ,c_{۳})$ را می‌توان از دو رابطه زیر به دست آورد.

$$۱)\ k=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$

$$۲)\ k=\left|\begin{vmatrix} a_{۱} & a_{۲} & a_{۳}\\ b_{۱} & b_{۲} & b_{۳}\\ c_{۱} & c_{۲} & c_{۳}\end{vmatrix}\right|$$

در این تمرین از هر دو روش حجم متوازی‌السطوح را به دست می‌آوریم.

روش اول:

$$(\vec{b}\times\vec{c})=(۶\ ,۴\ ,-۴)$$
$$v=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|(۱\ ,۰\ ,۱)\cdot(۶\ ,۴\ ,-۴)|=۱۰$$

روش دوم:

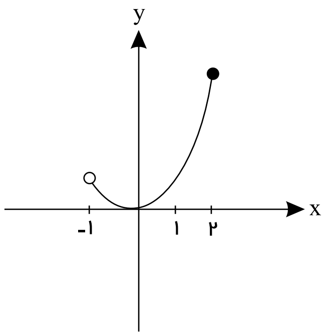
$$v=\left|\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۲\\ ۲ & -۳ & ۰\end{vmatrix}\right|=۱۰$$

۱۰۴ دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۰ \to ۲(m+۱)+۳m-۲=۰ \to m=۰$$

۱۰۵ الف) عرض‌ها یا yها　　　ب) درست

پ)



ت) طول هر بردار مانند $\vec{a}(a_۱\ ,a_۲\ ,a_۳)$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}$$

بنابراین داریم:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(۰)^۲ + (-۳)^۲ + (۴)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۱۰۶ فرض کنیم $\vec{a}\cdot\vec{b} = ۰$ باشد، داریم:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ۰ \to |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta = ۰ \xrightarrow{|\vec{a}|\neq ۰, |\vec{b}|\neq ۰} cos\theta = ۰ \to \theta = \frac{\pi}{۲}$$

برعکس: اگر دو بردار برهم عمود باشند، یعنی زاویه بین دو بردار ۹۰° باشد، داریم:

$$\theta = \frac{\pi}{۲} \to \cos\theta = ۰ \to |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta = ۰ \to \vec{a}\cdot\vec{b} = ۰$$

۱۰۷

$$\overrightarrow{AB} = (۱,۲,۱), \overrightarrow{AC} = (-۳,۲,-۳) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-۸,۰,۸)\ \Rightarrow |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{۶۴+۰+۶۴} = ۸\sqrt{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = ۴\sqrt{۲}$$

۱۰۸ الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$(-۲\vec{b})\times\vec{c} = (۲,-۲,۰)\times(۲,۱,-۲) = (۴,۴,۶)$$

ب) حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})| = |(۲,۳,۱)\cdot(-۲,-۲,-۳)| = ۱۳$$

۱۰۹

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{o} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{۰}| \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\times\sin\theta = ۰ \xrightarrow{|\vec{a}|\neq ۰\ ,\ |\vec{b}|\neq ۰} \sin\theta = ۰ \Leftrightarrow \theta = ۰ \vee \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a}||\vec{b}$$

۱۱۰

$$\vec{b}+\vec{c} = (۲,-۳,۶)\ ,\ \overrightarrow{a'} = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|(\vec{b}+\vec{c})|^۲}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$$

۱۱۱

$$\vec{a}\times\vec{b} = (۳,۲,۱)\times(۲,۰,۱) = (۲,-۱,-۴)$$

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{۴+۱+۱۶} = \sqrt{۲۱}$$

۱۱۲ تصویر قائم بردار a بر b برابر است با:

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{۲+۱+۰}{۱+۱+۰}(۱,-۱,۰) = \frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)$$

۱۱۳ نقاط B و A، زیرا در این دو نقطه $y=۲$ و $z=۱$ می‌باشد.

۱۱۴ الف) $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ محور yها است. معادلهٔ $x=۰$ معادلهٔ صفحهٔ yoz که شامل محور yها است.

ب)

$$\vec{a}+۲\vec{b} = (۲,-۱,۳)+۲(۱,۲,۰) = (۴,۳,۳)$$

$$|\vec{a}+۲\vec{b}| = \sqrt{۱۶+۹+۹} = \sqrt{۳۴}$$

۱۱۵

$$BC \text{ وسط } M: \begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{۲} \\ z_M = \dfrac{z_B + z_C}{۲} \end{cases} \Rightarrow M \left| \begin{array}{l} \dfrac{۳+۱}{۲} = ۲ \\ \dfrac{۵+۱}{۲} = ۳ \\ \dfrac{۳+۴}{۲} = \dfrac{۷}{۲} \end{array} \right.$$

$$AM = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۳-۲)^۲ + (\frac{۷}{۲} - ۱)^۲} = \sqrt{۱+۱+\frac{۲۵}{۴}} = \frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$$

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۲-۱)^۲ + (۳-۱)^۲} = \sqrt{۴+۱+۴} = ۳ \\ AC = \sqrt{(۱-۱)^۲ + (۵-۲)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{۰+۹+۹} = ۳\sqrt{۲} \\ BC = \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۵-۱)^۲ + (۴-۳)^۲} = \sqrt{۴+۱۶+۱} = \sqrt{۲۱} \end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{ABC} \text{ محیط } = ۳ + ۳\sqrt{۲} + \sqrt{۲۱}$$

۱۱۶

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = ۰ \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = ۰ \xrightarrow{\vec{a} \neq ۰\ ,\ \vec{b} \neq \vec{c}} \vec{a} || (\vec{b} - \vec{c})$$

پس گزینهٔ «۱» اشتباه و بقیهٔ گزینه‌ها درست هستند.

۱۱۷

$$|\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})| = |\underbrace{(\vec{a} \times \vec{a})}_{۰} + (\vec{a} \times \vec{b})| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ۱۸ \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \times \sin\theta = ۱۸ \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱۸}{۶ \times ۵} = \frac{۱۸}{۳۰} = \frac{۳}{۵} \quad (۱)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^۲ + |\vec{a}||\vec{b}| \times \cos\theta \quad (۲)$$

$$(۱) \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow (۲): \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = ۳۶ + ۶ \times ۵ \times \frac{۴}{۵} = ۶۰$$

۱۱۸

$$F = (۴, ۵, ۲) \text{ و } OC \text{ وسط } = (۲, ۰, ۰)$$

$$OC \text{ از وسط } F \text{ فاصلهٔ } = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۵-۰)^۲ + (۲-۰)^۲} = \sqrt{۴+۲۵+۴} = \sqrt{۳۳}$$

۱۱۹ زمانی، میانهٔ وارد بر BC، ارتفاع هم می‌باشد، که مثلث متساوی‌الساقین باشد، یعنی: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ داریم:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(۳-۲)^۲ + (۱-(-۱))^۲ + (۰-۱)^۲} = \sqrt{۱+۴+۱} = \sqrt{۶}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(m-۲)^۲ + (۰-(-۱))^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{(m-۲)^۲ + ۲}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \Rightarrow (m-۲)^۲ + ۲ = ۶ \Rightarrow (m-۲)^۲ = ۴ \Rightarrow m - ۲ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \\ m = ۴ \end{cases}$$

۱۲۰

$$A' = (-۲, ۳, ۰)\ ,\ B = (۳, -۱, ۴)$$

$$A'B = \sqrt{(۳-(-۲))^۲ + (-۱-۳)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۲۵+۱۶+۱۶} = \sqrt{۵۷}$$

۱۲۱

$$\overrightarrow{AB} = (۲, -۲, -۱)\ ,\ \overrightarrow{AC} = (۱, -۳, ۱)$$

$$ABC \text{ مساحت}:\ S = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{۱}{۲}|(-۵, -۳, -۴)| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۵۰} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

۱۲۲

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ برابر است با:

الف

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}\vec{b} = \frac{(۱, ۲, ۳) \cdot (-۲, ۰, ۲)}{(-۲, ۰, ۲) \cdot (-۲, ۰, ۲)}(-۲, ۰, ۲) = \frac{-۲+۶}{۴+۴}(-۲, ۰, ۲) = (-۱, ۰, ۱)$$

ب

$$۲\vec{a} - \vec{b} = ۲(۱, ۲, ۳) - (-۲, ۰, ۲) = (۴, ۴, ۴)\ ,\ |۲\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{۱۶+۱۶+۱۶} = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

۱۲۳

الف

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-۲, ۰, ۲) \cdot (۰, ۲, ۲) = ۴$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = ۲\sqrt{۲}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \theta = ۶۰^{\circ}$$

تصویر قائم بردار $a+b$ بر امتداد بردار b برابر است با:

ب

$$\vec{a}+\vec{b} = (-۲,۰,۲)+(۰,۲,۲) = (-۲,۲,۴)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})' = \frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b} = \frac{۱۲}{۸}(۰,۲,۲) = (۰,۳,۳)$$

۱۲۴

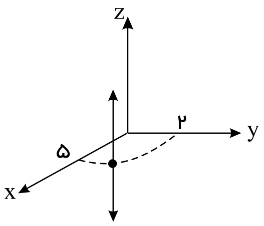
درست – بنابر قانون وجود مثلث:

الف

$$|\vec{a}|+|\vec{b}| \geq |\vec{a}+\vec{b}|$$

ب

درست



۱۲۵

الف درست

۱۲۶

الف درست

ب نادرست – مکان هندسی فوق، خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است.

پ نادرست

۱۲۷

الف

$$b = -۳$$

ب محور zها

پ نقطهٔ $A=(۰,۲,۳)$ و مختصات وسط AB برابر است با: $(-۲,۴,۰)$

۱۲۸ .

صفر

الف

$$K = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$

۱۲۹ .

نادرست، زیرا:

الف

$$\vec{i}\times\vec{j} = (۱,۰,۰)\times(۰,۱,۰) = (۰,۰,۱) = \vec{k}$$

۱۳۰ .

الف

$$\vec{a} = (۲,۳,-۱), \vec{b} = (۱,۰,۱) \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = (۲\times۱)+(۳\times۰)+((-۱)\times۱) = ۱$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(۲)^{۲}+(۳)^{۲}+(-۱)^{۲}} = \sqrt{۴+۹+۱} = \sqrt{۱۴}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(۱)^{۲}+۰^{۲}+(۱)^{۲}} = \sqrt{۲}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta \rightarrow ۱ = \sqrt{۱۴}\sqrt{۲}cos\theta \rightarrow cos\theta = \frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$$

ب

$\vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (۱\,,\,۰\,,\,۱) - (۰\,,\,۲\,,\,۱) = (۱\,,\,-۲\,,\,۰)$

$\vec{a} \cdot \vec{d} = (۲\,,\,۳\,,\,-۱) \cdot (۱\,,\,-۲\,,\,۰) = ۲ - ۶ + ۰ = -۴$

$|\vec{d}\,| = \sqrt{۱^۲ + (-۲)^۲ + ۰^۲} = \sqrt{۵}$

$\vec{a'} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}\,|^۲}\vec{d} = \dfrac{-۴}{۵}(۱, -۲, ۰)$

۱۳۱

الف

$۲\vec{b} = (۲, ۰, ۲) \;\;,\;\; |۲\vec{b} - \vec{c}| = |(۲, -۲, ۱)| = ۳$

$\vec{b} + \vec{c} = (۱, ۲, ۲)$

ب

$S = |\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})| = |(۸, -۵, ۱)| = ۳\sqrt{۱۰}$

۱۳۲

الف نادرست

۱۳۳

الف صفر

۱۳۴

الف

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ۲ + ۱ + ۰ = ۳ \cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} \to \theta = ۴۵$

ب

بردار عمود بر دو بردار $\vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = (۲, -۱, ۲) \times (۱, -۱, ۰) = (۲, ۲, -۱)$

۱۳۵

الف yoz

۱۳۶

الف درست

۱۳۷

الف

$A = (۲\,,\,۰\,,\,۰) \;\;,\;\; B = (۱\,,\,۰\,,\,۳)$

ب

$AB = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۰-۰)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۱۰}$

پ

$M = (\dfrac{۲+۱}{۲}\,,\,\dfrac{۰+۰}{۲}\,,\,\dfrac{۰+۳}{۲}) = (\dfrac{۳}{۲}\,,\,۰\,,\,\dfrac{۳}{۲})$