آموزشگاه پرسا

نام و نام خانوادگی: سهیل حاج کرم

نام آزمون: ۲۰۰ تست هندسه یازدهم فصل دو (رشته ریاضی)

فصل دوم : تبدیل های هندسی

درس دوم : کاربرد تبدیل ها — حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

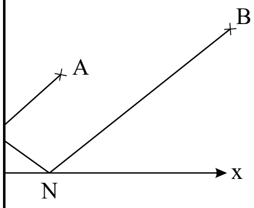
۱	در یک صفحه، دو دایره به شعاع‌های متفاوت در نقطهٔ A متقاطع‌اند. با استفاده از کدام تبدیل می‌توان از نقطهٔ A خطی گذراند که در این دو دایره وترهای مساوی ایجاد کند؟ متوسط- خارج از کشور- ۱) انتقال ۲) دوران ۹۰ درجه ۳) بازتاب نسبت به خط ۴) بازتاب نسبت به نقطه	بارم
۲	با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می‌توان مربعی محاط کرد که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو این مثلث قرار گیرند؟ سخت- سراسری- ۱) دوران ۲) بازتاب ۳) انتقال ۴) تجانس	بارم

آموزشگاه پرسا

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۳	نقاط $A\begin{vmatrix}3\\5\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}9\\11\end{vmatrix}$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض هستند و دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کمترین اندازهٔ خط شکستهٔ $AMNB$، کدام است؟	بارم

متوسط - سراسری -



۱) ۲۷

۲) ۲۴

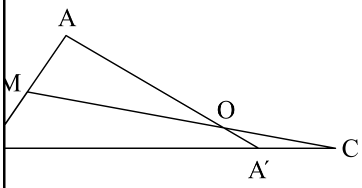
۳) ۲۰

۴) ۱۸

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

۴	در شکل زیر، M وسط AB و $OM=2OC$ است. اگر A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس K باشد، مقدار K کدام است؟	بارم

سخت- ۱۳۹۸ -smart



۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{6}$

آموزشگاه پرسا

درس دوم : کاربرد تبدیل ها حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

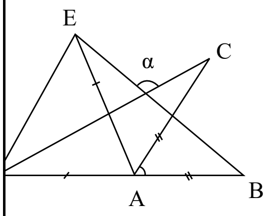
۵	نقطهٔ A در صفحه دو خط متقاطع d و d' است. در رسم مثلث متساوی‌الاضلاع به رأس A، که دو رأس دیگر آن بر روی هر یک از دو خط مفر باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟	بارم

سخت- سراسری-

۱) انتقال ۲) بازتاب ۳) تجانس ۴) دوران

۶ — در شکل مقابل، $AB = AC$، $AD = AE$، $\widehat{CAB} = ۵۰^\circ$ و $\widehat{AED} = ۶۵^\circ$ زاویهٔ α چند درجه است؟ (بارم)

متوسط- سراسری-

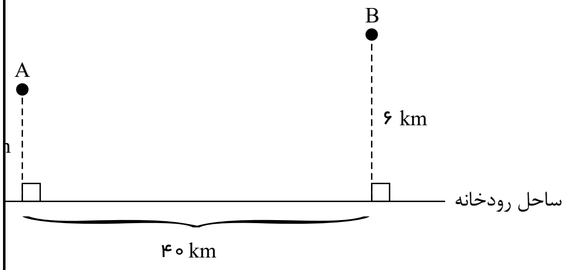


۱) ۱۱۵°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۲۵°
۴) ۱۳۰°

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۷ — مطابق شکل دو شهر A و B مفروض‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به‌طوری که ۱۶ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟ (بارم)

- ۱۳۹۸ - متوسط-



۱) ۴۰
۲) ۴۲
۳) ۴۴
۴) ۴۶

آموزشگاه پرسا

حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

۸	دو خط Δ و Δ' و نقطهٔ A خارج آنها مفروض هستند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی با رأس A که دو سر قاعدهٔ آن بر روی ه خط مفروض‌اند، کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟ سخت- سراسری- ۱) تجانس ۲) دوران ۳) بازتاب و تقارن ۴) انتقال	بارم

درس اول : تبدیل های هندسی ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

۹	کدام تبدیل زیر در حالت کلی، نقطهٔ ثابت ندارد؟ متوسط- سراسری- ۱) دوران ۲) انتقال ۳) بازتاب ۴) تجانس	بارم

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۱۰	چهار نقطهٔ $A(۱,۱۰)$،$B(۹,-۹)$،$M(a,۴)$ و $N(a,۰)$ را در صفحهٔ مختصات، در نظر بگیرید. کمترین طول خط شکستهٔ $AMNB$، کدام اس سخت- سراسری- ۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸	بارم

آموزشگاه پرسا

درس اول : تبدیل های هندسی – دوران و ویژگی های آن

بارم

متوسط- سراسری-

۱۱ در دوران به مرکز O و زاویهٔ ۶۸° در صفحه، خط d و تبدیل‌یافته‌اش در P متقاطع‌اند. زاویهٔ OP با خط d کدام است؟

۱) ۶۸° ۲) ۵۶° ۳) ۴۸° ۴) ۲۲°

انتقال و ویژگی های آن

بارم ۳

۱۲ دایرهٔ $C(O, a-۱)$ را با بردار انتقال $\overrightarrow{OO'}$ بر دایرهٔ $C'(O', ۳-a)$ تصویر می‌کنیم. اگر اندازهٔ مماس مشترک داخلی این دو دایره برا باشد، اندازهٔ مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

متوسط- ۱۳۹۹ -

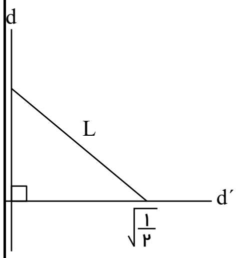
۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) ۱۳

بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۱۳		بارم
	در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $BC = ۶$ و $\hat{B} = ۱۵^\circ$ و AH ارتفاع وارد بر BC می‌باشد. اگر H' و H'' به‌ترتیب بازتاب یافتهٔ نقطهٔ H نسب AB و AC باشند، اندازهٔ $H'H''$ کدام است؟ ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) سخت- ۱۴۰۰ - ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴	

تجانس و ویژگی های آن

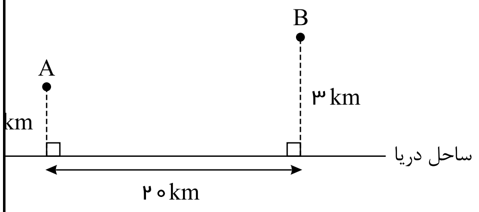
۱۴		بارم
	در شکل زیر، اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم، آن‌گاه مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟ سخت- ۱۳۹۸ - ۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱	



آموزشگاه پرسا

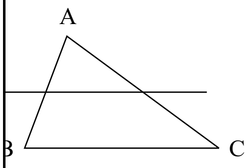
درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۱۵		بارم
۱۵	مطابق شکل، می‌خواهیم بین دو شهر A و B جاده‌ای بسازیم به طوری که ۸ کیلومتر از این جاده کنار ساحل دریا ساخته شود. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟ متوسط- ۱۴۰۰ - ۱) ۲۵ ۲) ۲۱ ۳) ۱۸ ۴) ۱۳	



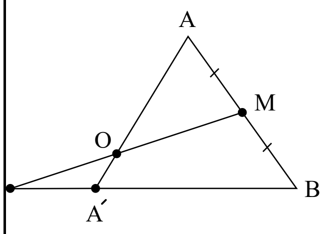
درس اول : تبدیل های هندسی بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۱۶		بارم
۱۶	مطابق شکل، مثلث ABC را نسبت به خط d که از وسط اضلاع AB و AC می‌گذرد، بازتاب می‌دهیم. اگر ناحیهٔ محصور بین ABC و تصویر باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ - ۱) ۱۶ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۱۲	۶



تجانس و ویژگی های آن

۱۷	در شکل زیر، M وسط AB و $OM = ۳OC$ است. اگر A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، مقدار k کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -smart ۱) $\frac{-۳}{۱۰}$ ۲) $-\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{-۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۹}$	بارم



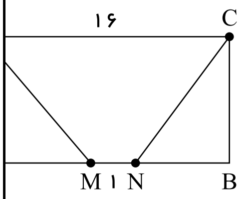
درس دوم : کاربرد تبدیل ها — حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

۱۸	نقطهٔ P روی ضلع AB از مربع $ABCD$ به‌گونه‌ای قرار دارد که $AP = ۵$ و $BP = ۷$ است. از بین مثلث‌هایی که دو رأس آن B و P و رأس دیگر آن روی قطر AC باشد، حداقل محیط ممکن کدام است؟ سخت- ۱۳۹۸ - ۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲	بارم

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

بارم		
	O و O' مرکز دو دایره به شعاع ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اگر $OO' = ۱۲$ سانتی‌متر باشد، فاصلهٔ مرکز تجانس معکوس این دو دایره از دایره به شعاع بزرگ‌تر چند سانتی‌متر است؟ متوسط- سراسری- ۱) ۷ ۲) ۷٫۵ ۳) ۸ ۴) ۸٫۵	۱۹

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

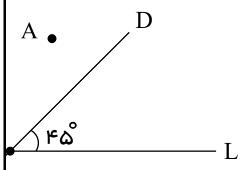
بارم		
	در شکل، $ABCD$ مستطیل است و نقاط M و N به فاصلهٔ ۱ واحد از هم روی AB حرکت می‌کنند. کمترین مقدار محیط ذوزنقه $DCNM$ است؟ سخت- منتآزمون-  ۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶	۲۰

درس اول : تبدیل های هندسی بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۲۱ بارم

در شکل زیر، اگر $OA = ۱$ و نقطهٔ A را نسبت به خط D و سپس تصویر حاصل را نسبت به خط L بازتاب دهیم، فاصلهٔ A از تصویر نهایی کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰ -



۱) ۲

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) ۴

۲۲ بارم

پاره‌خط AB به طول ۶ با خط d غیرموازی و غیرقاطع بوده و امتداد پاره‌خط AB (از سمت A) خط d را در نقطهٔ P با زاویهٔ ۳۰° قطع می‌کند. بازتاب نسبت به d، اگر $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ و $BB' = ۱۶$، نسبت $\frac{PA}{PB'}$ کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰ -

۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۵}{۸}$

۴) $\frac{۵}{۱۶}$

آموزشگاه پرسا

نگاشت و تبدیل و مفاهیم آن - طولپایی تبدیل ها

۲۳	در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، $BC=6$ و $\hat{B}=5\hat{C}$ است. اگر مثلث $A'B'C'$ تبدیل یافتهٔ مثلث ABC تحت تبدیل طولپای T باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟ متوسط - ۱۳۹۹ - ۱) $\frac{9}{2}$ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲	بارم

تجانس و ویژگی های آن

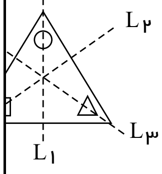
۲۴	در یک مثلث، دایرهٔ محاطی داخلی را با نسبت تجانس k و به مرکز T تجانس می‌دهیم تا بر دایرهٔ محیطی مثلث تصویر شود. اگر نقطهٔ ثابت تبدیل، محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث باشد، اندازهٔ k کدام است؟ سخت - ۱۳۹۷ - ۱) ۱٫۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴	بارم

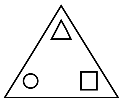
بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

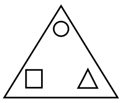
بارم

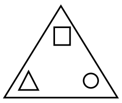
۲۵ اگر قرینهٔ شکل مقابل را به‌طور متوالی نسبت به محورهای L_1، L_2 و L_3 به‌دست آوریم، نتیجهٔ ترکیب این سه تقارن محوری کدام است؟

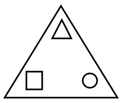
متوسط - سراسری - ۱۳۷۳



۱ 

۲ 

۳ 

۴ 

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

بارم

۲۶ مثلث $A'BC$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط گذرا از نقاط C و B و مثلث $A'B'C$ بازتاب مثلث $A'BC$ نسبت به خط گذرا از نقاط C و A' است. مثلث $A'B'C$ تصویر مثلث ABC تحت کدام تبدیل است؟

متوسط - منتآزمون -

۱ دوران حول نقطه A و با زاویه $2\hat{A}$

۲ دوران حول نقطهٔ C و با زاویهٔ $2\hat{C}$

۳ بازتاب نسبت به عمود منصف BC

۴ بازتاب نسبت به نیمساز $B\hat{C}A'$

۲۷	کدام گزینه در مورد تبدیل، نادرست است؟ متوسط- ۱۴۰۰ -	بارم

۱) بازتاب محوری، جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

۲) دوران، جهت شکل را حفظ می‌کند.

۳) انتقال لزوماً شیب خط را حفظ نمی‌کند.

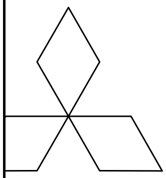
۴) تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل قرینه‌یابی و هم‌محیطی

۲۸

در شکل زیر، طول تمامی پاره‌خط‌های کوچک برابر یک واحد و اندازهٔ تمامی زاویه‌های حاده برابر ۶۰ درجه است. می‌خواهیم با کمک ت هندسی مناسب مساحت این شکل را بدون تغییر در محیط تا حد ممکن افزایش دهیم. نسبت مساحت شکل جدید به شکل اولیه چقدر است؟

سخت- ۱۳۹۸ -smart



۱) ۲

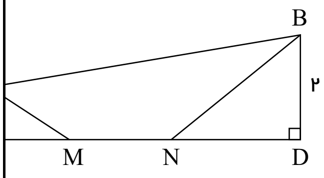
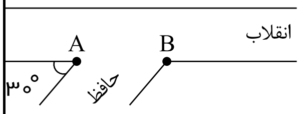
۲) ۳

۳) ۴

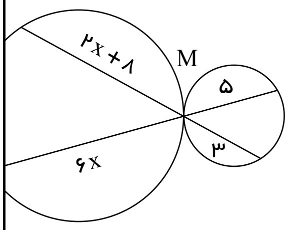
۴) ۶

بارم

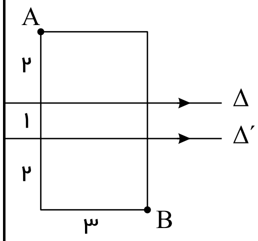
مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

		بارم
۲۹	با توجه به شکل مقابل، نقاط M و N روی CD (به طرف راست) چنان قرار دارند که همواره فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۴ باشد و $CD = 8$. کمترین مقدار $AM + MN + NB$ کدام است؟ ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ سخت- ۱۴۰۰ - 	
۳۰	شکل زیر، تقاطع دو خیابان انقلاب و حافظ به‌ترتیب با عرض‌های ثابت ۱۲ و ۵ را نشان می‌دهد. شخصی می‌خواهد از نقطهٔ A به سمت دیگر خ انقلاب رفته و سپس به نقطهٔ B برود. طول کوتاهترین مسیر ممکن کدام است؟ ۱) ۲۳ ۲) ۲۶ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰ سخت- ۱۴۰۰ - 	

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

بارم		
	متوسط- ۱۴۰۰ - در شکل زیر، دو دایره در نقطهٔ M برهم مماس‌اند. مقدار x کدام است؟ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ 	۳۱

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

بارم		
	در شکل مقابل، A و B دو رأس از مستطیل به ابعاد ۳ و ۵ هستند. در حرکت از A به B، اگر بخواهیم مسیر بین دو خط موازی Δ و Δ'، عمود بر آن دو باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۹ - (۱) $۲+۳\sqrt{۲}$ (۲) $۱+\sqrt{۳۴}$ (۳) ۷ (۴) ۶ 	۳۲

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

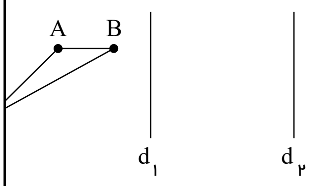
بارم		
	متوسط- سراسری- اگر اوساط اضلاع مثلثی را به‌هم وصل کنیم، مثلثی حاصل می‌شود که با مثلث اصلی متجانس است. مرکز تجانس کدام است؟ (۱) نقطه همرسی سه ارتفاع مثلث اصلی (۲) نقطه تلاقی سه میانه مثلث اصلی (۳) نقطه همرسی سه نیمساز مثلث اصلی (۴) نقطه تلاقی سه عمودمنصف مثلث اصلی	۳۳

انتقال و ویژگی های آن

۳۴		بارم
	مثلث قائم‌الزاویه ABC به طول وتر ۸ واحد مفروض است. این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AT}$ که در جهت بردار $\overrightarrow{AM}$ (M وسط وتر BC) قرار انتقال می‌دهیم. اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت اولیه باشد، اندازه بردار $\overrightarrow{AT}$، کدام است؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$	سخت- سراسری-

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

۳۵		بارم
	در شکل زیر، دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ به فاصلهٔ ۳cm ازهم قرار دارند. اگر مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC تحت بازتاب نسبت به $d_۱$ و $A''B''C''$ تصویر $A'B'C'$ تحت بازتاب نسبت به $d_۲$ باشد، کدام گزینه درست است؟ ۱) $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ انتقال‌یافتهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ است و $BB'' = ۶$ ۲) $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ انتقال‌یافتهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ است و $AA'' = ۹$ ۳) $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ انتقال‌یافتهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ است و $CC'' = ۱۲$ ۴) $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ بازتاب $\overset{\triangle}{ABC}$ نسبت به یک خط است.	سخت- ۱۴۰۰-



دوران و ویژگی های آن

بارم		
	مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC = ۲\ ,\ \hat{A} = ۹۰^\circ)$ مفروض است. اگر این مثلث را به مرکز A با زاویهٔ ۴۵° در مثلثاتی دوران دهیم، مساحت ناحیهٔ محصور بین تصویر و مثلث اولیه کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ - ۱) $\sqrt{۲} - ۱$ ۲) $۲\sqrt{۲} - ۲$ ۳) $۲\sqrt{۲} - ۱$ ۴) $\sqrt{۲}$	۳۶

درس دوم : کاربرد تبدیل ها — مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

بارم		
	چهار نقطهٔ $A(۱,۳)$، $B(۱۵,۹)$، $M(a,۰)$ و $N(a+۵,۰)$ در صفحهٔ مختصات مفروض هستند. کمترین اندازهٔ خط شکستهٔ $AMNB$، است؟ متوسط- خارج از کشور- ۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱	۳۷

درس اول : تبدیل های هندسی

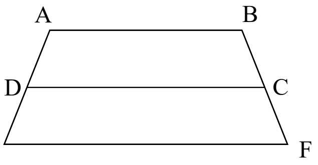
تجانس و ویژگی های آن

بارم

۳۸ در شکل مقابل ذوزنقهٔ $ABCD$ با تجانس بر ذوزنقهٔ $CDEF$ تصویر می‌شود. اگر $AB = ۴$ و $EF = ۹$ باشد، آنگاه مرکز و نسبت این تج

کدام است؟

متوسط - ۱۳۹۸ -



۱) محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{۹}{۴}$

۲) محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{۹}{۴}$

۳) محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{۳}{۲}$

۴) محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{۳}{۲}$

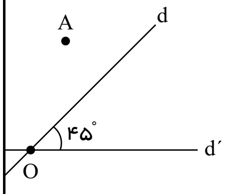
بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

بارم

۳۹ در شکل مقابل $OA = ۲$ است. نقطهٔ A را نسبت به خط d و سپس تصویر حاصل را نسبت به خط d' بازتاب می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ A از ت

نهایی آن کدام است؟

متوسط - ۱۳۹۸ -



۱) ۲

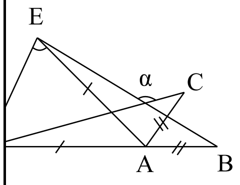
۲) $\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) ۴

درس دوم : کاربرد تبدیل ها حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

۴۰	در شکل زیر $AB=AC$، $AD=AE$، $C\hat{A}B=۴۰^\circ$ و $A\hat{E}D=۷۰^\circ$، زاویه‌ی α چند درجه است؟	متوسط- ۱۳۹۵ -	بارم



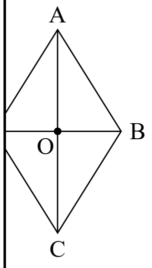
(۱) ۱۲۵
(۲) ۱۳۵
(۳) ۱۴۰
(۴) ۱۱۰

درس اول : تبدیل های هندسی بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۴۱	در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، $AB > BC$ نیمساز زاویهٔ C با ضلع AB در N متقاطع است. رأس B را نسبت به CN بازتاب می‌دهیم تا به M برسیم. اگر محیط $ABCD$ دو برابر محیط $BCMN$ باشد، نسبت مساحت $ABCD$ به مساحت $BCMN$ کدام است؟	متوسط- ۱۴۰۰ -	بارم

(۱) $\sqrt{۲}$
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

دوران و ویژگی های آن

۴۲		بارم
	وسط اضلاع لوزی مقابل را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم، مساحت شکل حاصل ۱۰ واحد مربع می‌شود. این لوزی را به مرکز O به اندازهٔ 15° در جهت ساعتگرد دوران می‌دهیم تا چهار ضلعی $A'B'C'D'$ حاصل شود، اندازهٔ $A'C' \times B'D'$ کدام است؟  ۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵	متوسط - ۱۴۰۰

۴۳		بارم
	مثلث ABC به طول اضلاع $BC = 12$ و $AC = 20$ را حول رأس C دوران می‌دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. اگر $AA' = 10$ باشد، آن‌گاه طول BB' کدام است؟ ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲	متوسط - ۱۳۹۸

آموزشگاه پرسا

درس دوم : کاربرد تبدیل ها حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

۴۴	دو خط متقاطع d و d' و پاره‌خط AB در صفحهٔ آنها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟ -سخت- خارج از کشور- ۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس	بارم

درس اول : تبدیل های هندسی بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۴۵	در مربع $ABCD$، نقطهٔ $(۴,۱)$ رأس A و عرض رأس‌های C و D به‌ترتیب ۱ و ۳ است. اگر بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق شود، فاصلهٔ بازتاب نقطهٔ D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات چقدر است؟ -سخت- خارج از کشور- ۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۷}$	بارم
۴۶	در مربع $ABCD$ نقطه $(۳,۵)$ رأس B و طول رأس‌های C و D به‌ترتیب ۵٫۵ و ۳ است. اگر بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور xها بر خودش منطبق شود، فاصلهٔ بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD از مبدأ مختصات چقدر است؟ -سخت- سراسری- ۱) ۲٫۵ ۲) $\sqrt{۶٫۵}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) ۲	بارم

۴۷	فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط d برابر ۸ واحد است و نقطهٔ A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d است. اگر نقطهٔ M روی خط d و $AM=17$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از $A'M$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟ متوسط- ۱۴۰۰ - (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵	بارم

انتقال و ویژگی های آن

۴۸	مثلث ABC با مساحت ۲۰ را با بردار $\overrightarrow{AH}$ (ارتفاع وارد بر ضلع BC) انتقال می دهیم. اگر A'، B' و C' به‌ترتیب انتقال یافتهٔ نقاط A، B و C باشند، مساحت پنج‌ضلعی $ABB'C'C$ کدام است؟ (زاویه‌های مثلث ABC حاده هستند.) سخت- ۱۳۹۹ - (۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۰۰	بارم

آموزشگاه پرسا

بارم		
	مثلث ABC را که در آن $\hat{B} = ۳۰^\circ$ است ابتدا با بردار $\frac{۱}{۴}\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم تا مثلث $A'B'C'$ حاصل شود و سپس مثلث جدید را با $\frac{۱}{۳}\overrightarrow{CB}$ انتقال می‌دهیم تا مثلث $A''B''C''$ به دست آید. اندازهٔ زاویهٔ $CC'C''$ کدام است؟ سخت- ۱۳۹۹ - ۱) ۳۰° ۲) ۶۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۵۰°	۴۹

تجانس و ویژگی های آن

بارم		
	دو پاره‌خط موازی AB و $A'B'$ به‌ترتیب به طول‌های ۱۰ و ۱۵ واحد و به فاصلهٔ ۲۰ واحد از یکدیگر، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. فاصلهٔ مراکز تجانس‌ها کدام است؟ $(AA' = BB')$ سخت- ۱۳۹۸ - ۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴	۵۰

دوران و ویژگی های آن

بارم

۵۱ تبدیل R یک دوران به مرکز O است و می‌دانیم $R(R(R(R(A)))) = A'$ و مثلث AOA' متساوی‌الاضلاع است. اگر نقطهٔ A با ۶ بار دوران R روی نقطهٔ B تصویر شود، نسبت $\frac{AB}{AA'}$ کدام است؟

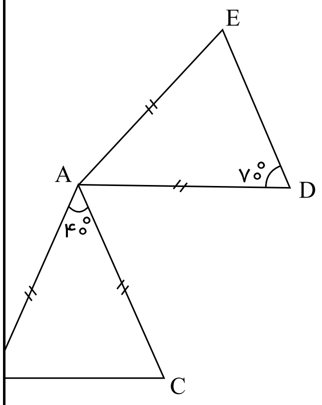
متوسط- ۱۴۰۰ -

۱) ۲
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۲}$

بارم

سخت- ۱۴۰۰ -

۵۲ در شکل مقابل، $AB = AC = AD = AE$. دو پاره‌خط CE و BD با چه زاویه‌ای همدیگر را قطع می‌کنند؟



۱) °۳۵
۲) °۴۰
۳) °۷۰
۴) °۱۱۰

۵۳	نقطهٔ A به فاصلهٔ $۴\sqrt{۳}$ از خط d قرار دارد. تصویر A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌نامیم. اگر نقطهٔ A را به اندازهٔ ۱۲۰° به دور A' در جهت ساعتگرد دوران دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود، طول پاره‌خط AA'' کدام است؟ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴) ۲۸	بارم سخت- ۱۴۰۰ -

تجانس و ویژگی های آن

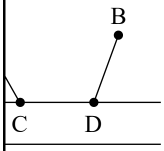
۵۴	در یک مثلث، دایرهٔ محیطی را با نسبت تجانس k و به مرکز M تجانس می‌دهیم تا بر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث تصویر شود. اگر نقطهٔ ثابت تبدیل، محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث باشد، مقدار k کدام است؟ (۱) $\frac{۳}{۴}$ (۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۱}{۴}$	بارم سخت- ۱۴۰۰ -

درس دوم : کاربرد تبدیل ها — مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۵۵		بارم

۵۵. دو شهر A و B مطابق شکل زیر به فاصلهٔ ۱۰ کیلومتر از یکدیگر در یک طرف رودخانه‌ای قرار دارند. می‌خواهیم از A به B جاده‌ای بس
به‌طوری که ۳ کیلومتر آن کنار رودخانه باشد. اگر دو شهر A و B به‌ترتیب ۳ و ۹ کیلومتر از رودخانه فاصله داشته باشند، طول کوتاه‌ترین ممکن است؟

- سخت- ۱۳۹۹ -



۱) ۱۳ — ۲) ۱۵ — ۳) ۱۶ — ۴) ۱۸

۵۶. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ واحد، نقاط M و N را به‌ترتیب روی اضلاع AB و AC و به‌فاصله‌های ۳ و ۴ واحد از رأس A انتخاب می‌کنیم. اگر P نقطهٔ دلخواهی روی ضلع BC باشد، کمترین مقدار $MP+NP$ کدام است؟

- سخت- ۱۳۹۹ -

بارم

۱) $\frac{۵\sqrt{۶}}{۲}$ — ۲) $۳+\sqrt{۷}$ — ۳) ۵ — ۴) $\sqrt{۳۱}$

درس اول : تبدیل های هندسی نگاشت و تبدیل و مفاهیم آن - طولپایی تبدیل ها

بارم

۵۷ تناظر T در صفحهٔ P، هر نقطه را به قرینهٔ آن نسبت به مبدأ مختصات نظیر می‌کند. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ متوسط - ۱۳۹۹ -

۱) T تبدیل نیست.

۲) T تبدیل است ولی طولپا نیست.

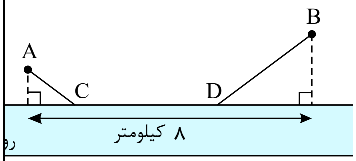
۳) T یک تبدیل طولپا است ولی شیب خط‌ها را ثابت نگه نمی‌دارد.

۴) T یک تبدیل طولپا است که شیب خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

بارم

۵۸ دو شهر A و B مطابق شکل به فاصله‌های ۱ و ۲ کیلومتری از یک رودخانه و در یک طرف آن واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. طول کوتاه‌ترین مسیر $ACDB$ کدام است؟ سخت - ۱۳۹۸ -



۱) ۵

۲) ۷

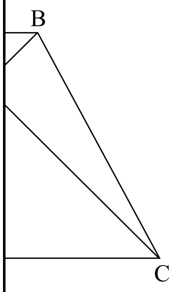
۳) ۹

۴) ۱۱

بارم

۵۹ در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ زیر، طول قاعده‌ها برابر ۲ و ۷ و طول ساق قائم برابر ۱۲ است. اگر E نقطه‌ای دلخواه روی ساق قائم AD باشد، کم
مقدار محیط $\overset{\Delta}{BEC}$ کدام است؟

سخت- منتآزمون-



۱) ۱۵
۲) ۲۱
۳) ۲۸
۴) ۳۲

آموزشگاه پرسا

حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

۶۰		بارم

نقطهٔ M در صفحهٔ دایرهٔ $C(O,۳)$ و به فاصلهٔ ۵ واحد از نقطهٔ O قرار دارد. C' مجانس دایرهٔ C به مرکز M و نسبت $k>۱$ است، به‌طوری‌که C و C' فقط یک نقطهٔ مشترک دارند. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

سخت- منتآزمون-

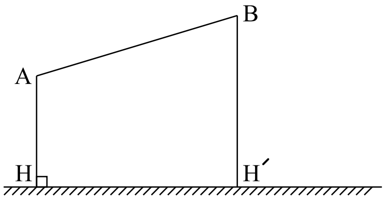
۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۶۱		بارم

مطابق شکل روبه‌رو، قرار است کارگری از نقطهٔ A به کنار رودخانه (d) رفته، بشکه‌های آب را پر کند و به نقطهٔ B بازگشت نماید. هرگاه فاصلهٔ A و B تا رودخانه به‌ترتیب ۲۰ و ۵۰ متر و فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از یکدیگر ۵۰ متر باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر برابر کدام است؟

سخت- منتآزمون- ۱۴۰۱



۱) ۸۵٫۸
۲) ۷۰٫۴
۳) ۷۵٫۲
۴) ۸۰٫۶

آموزشگاه پرسا

حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

۶۲		بارم
	یک مثلث متساوی‌الاضلاع در دو تجانس با نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ و به مرکز تجانس محل همرسی میانه‌ها، تصویرشده است. مساحت بین ای تصویر، چند برابر مساحت مثلث اولیه است؟ سخت- منتآزمون- ۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$	

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

۶۳		بارم
	یک مربع را در تجانس با نسبت $-\frac{۵}{۳}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین دو مربع ۱۶ باشد، قدرمطلق تفاضل محیط دو مربع کدام است؟ متوسط- منتآزمون- ۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸	

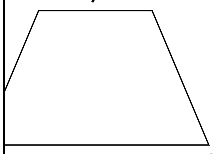
بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۶۴	در مستطیل $ABCD$ که $AD=۱$، تصویر رأس D تحت بازتاب نسبت به امتداد قطر AC را D' می‌نامیم. سپس A را نسبت به امتداد CD' بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید. اگر A' روی امتداد ضلع BC واقع باشد، آنگاه مساحت مستطیل $ABCD$ کدام است؟ ۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳	بارم متوسط- منتآزمون-

تجانس و ویژگی های آن

۶۵	تبدیل‌یافتهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۴\sqrt{۳}$ تحت تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ارتفاع ۲ است. مربع ضلع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ تحت این تجانس به مربعی با کدام مساحت تبدیل می‌شود؟ ۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$	بارم سخت- ۱۴۰۰ -

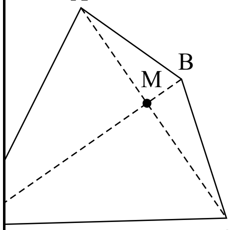
۶۶	ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زیر به ارتفاع ۱۲ واحد مفروض است. اگر دو قاعدهٔ آن تصویر یکدیگر در دو تجانس مستقیم و معکوس باشند، آنگاه ف مراکز تجانس کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ -	بارم



۱) ۲۲
۲) ۲۲٫۵
۳) ۲۳
۴) ۲۳٫۵

دوران و ویژگی های آن

۶۷	در شکل مقابل، مربعی به قطر AD و نیز مربعی دیگر به قطر BC ایجاد می‌کنیم. اگر این دو مربع در رأس O مشترک باشند، کدام گزینه ص است؟ سخت- ۱۴۰۰ -	بارم



۱) $AC = BD$
۲) $A\hat{M}D = ۹۰$
۳) مثلث ACD متساوی‌الساقین است.
۴) گزینه‌های «۱ و ۲» صحیح است.

۶۸	مربعی به ضلع $۲\sqrt{۲} + ۴$ را به اندازهٔ ۴۵° حول مرکز تقارن آن دوران می‌دهیم. مساحت سطح محصور بین مربع و تصویر آن کدام است؟ - ۱۴۰۰ -سخت ۱) $۸ + ۸\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$ ۳) $۸ + ۱۶\sqrt{۲}$ ۴) $۱۶ + ۸\sqrt{۲}$	بارم

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

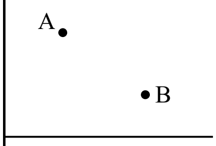
۶۹	دو نقطهٔ $A(-۳, ۱۳)$ و $C(۵, ۳)$ مفروض‌اند. اگر نقطهٔ B را به‌گونه‌ای روی محور xها قرار دهیم که محیط مثلث ABC مینیمم باشد، آنگاه نقطهٔ B کدام است؟ - ۱۴۰۰ -متوسط ۱) -۱ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) -۷ ۴) $\frac{۱}{۲}$	بارم

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

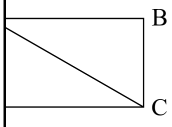
۷۰	مثلث ABC را در یک تجانس معکوس بر مثلث $A'B'C'$ تصویر می‌کنیم. اگر رئوس مثلث ABC روی اضلاع مثلث $A'B'C'$ قرار گیرد، ن تجانس کدام است؟ - ۱۴۰۰ -سخت ۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) $-\frac{۴}{۳}$	بارم

۷۱	مساحت مثلث ABC در دو تجانس به مرکز O و با نسبت‌های k_1 و k_2 به‌ترتیب ۴ و $\frac{۲۵}{۴}$ برابر شده است. اگر $OA = ۴$ و A_1 و A_2 تص نقطهٔ A در این دو تجانس باشند، آنگاه بیشترین مقدار ممکن برای طول پاره‌خط A_1A_2 کدام است؟ متوسط - ۱۳۹۹ - (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۵ (۴) ۴۱	بارم

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۷۲	در شکل زیر، نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸٫۵ واحد از خط d و ۸ واحد از نقطهٔ B مفروض است. نقطهٔ M را روی خط d چنان انتخاب می‌کنی $MA + MB$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. اگر این مقدار مینیمم برابر ۱۵ باشد، طول MA کدام است؟ متوسط - ۱۳۹۹ -  (۱) $\frac{۱۶۱}{۳۰}$ (۲) $\frac{۲۸۹}{۳۰}$ (۳) $\frac{۲۷}{۵}$ (۴) $\frac{۴۸}{۵}$	بارم

درس اول : تبدیل های هندسی دوران و ویژگی های آن

شماره	سؤال	بارم
۷۳	در شکل زیر در مستطیل $ABCD$، $BC=\sqrt{۳}$ و $B\hat{A}C=۳۰^\circ$ است. اگر این مستطیل را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حول A به اندازهٔ ۶۰° دوران دهیم، مساحت ناحیهٔ مشترک بین مستطیل $ABCD$ و تصویر آن تحت این دوران کدام است؟ (سخت- ۱۳۹۹ -)  ۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲	

تجانس و ویژگی های آن

شماره	سؤال	بارم
۷۴	اگر دایرهٔ $C'(O',۳)$ مجانس دایرهٔ $C(O,۴)$ در تجانس مستقیم به مرکز M و $MO=۲۰$ باشد، اندازهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ C و C' است؟ (سخت- ۱۳۹۹ -) ۱) ۲٫۴ ۲) ۳٫۶ ۳) ۴٫۸ ۴) ۶	

آموزشگاه پرسا

دوران و ویژگی های آن

بارم

۷۵ دو خط d و d' مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه شامل این دو خط وجود دارد که دوران یافتهٔ خط d حول آن نقطه بر d' منطبق گردد؟

سخت- ۱۳۹۹ -

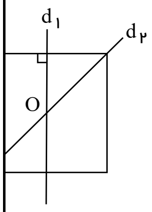
۱) ۱
۲) ۲
۳) بی‌شمار
۴) ۴

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

بارم

۷۶ بازتاب مربع را ابتدا نسبت به خط d_1 و سپس بازتاب شکل حاصل را نسبت به خط d_2 رسم می‌کنیم. تبدیلی که مربع اولیه را به آخرین شکل ت
می‌کند، چند نقطهٔ ثابت تبدیل دارد؟ (O مرکز مربع است.)

متوسط- ۱۳۹۹ -



۱) صفر
۲) بی‌شمار
۳) ۱
۴) ۲

انتقال و ویژگی های آن

شماره	سؤال	بارم
۷۷	در یک انتقال رأس مثلثی به مرکز ثقل آن منتقل شده است. مساحت ناحیهٔ مشترک بین مثلث و تصویرش، چه کسری از مساحت مثلث اولیه است متوسط - ۱۳۹۸ - (۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۱}{۴}$ (۳) $\frac{۱}{۹}$ (۴) $\frac{۴}{۹}$	
۷۸	خط d تحت انتقال با هریک از دو بردار عمود برهم به اندازه‌های ۱۵ و ۲۰ روی خط d' تصویر می‌شود. طول کوتاه‌ترین برداری که خط d را به d' تبدیل می‌کند، کدام است؟ سخت - ۱۳۹۸ - (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۲۵	
۷۹	مثلث ABC را با بردار $\overrightarrow{CC'}$ انتقال می‌دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. اگر C' روی ضلع AC و $CC' = ۳AC'$ باشد، اندازهٔ مساحت ناحیهٔ مشترک بین این دو مثلث چه کسری از مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟ متوسط - ۱۳۹۸ - (۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۱}{۴}$ (۳) $\frac{۱}{۹}$ (۴) $\frac{۱}{۱۶}$	

بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

بارم

۸۰ نقاط A و B در یک طرف خط d و به‌ترتیب به فاصلهٔ ۱ و ۴ واحد از این خط قرار دارند. بازتاب این نقاط نسبت به خط d را A' و B' می‌نامیم

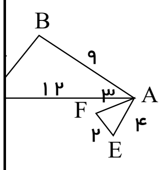
چهارضلعی $AA'B'B$ محیطی باشد، مساحت آن کدام است؟ - متوسط - ۱۳۹۷ -

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

تجانس و ویژگی های آن

بارم

۸۱ باتوجه به شکل زیر، با کدام تبدیل می‌توان مثلث AEF را متجانس مثلث ABC نمود؟ - سخت - ۱۳۹۵ -



۱) بازتاب محوری با محور AC

۲) دوران حول مرکز A و به زاویه‌ی $\widehat{FAC}$

۳) دوران حول مرکز A و به زاویه‌ی $\widehat{FAB}$

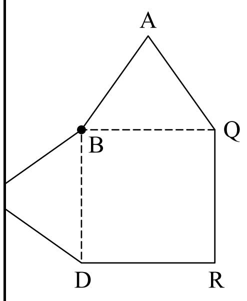
۴) بازتاب نسبت‌به نقطه‌ی همرسی میانه‌های مثلث ABC

درس دوم : کاربرد تبدیل ها — مسائل قرینه‌یابی و هم‌محیطی

بارم

۸۲ در شکل زیر، $BQRD$ مربع به‌طول ضلع ۲ و ABQ و CBD مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند. اگر بخواهیم مساحت چندضلعی $ABCDRQ$ را

بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط چندضلعی افزایش دهیم، مقدار این افزایش مساحت کدام است؟ - متوسط - منتآزمون -



۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۳}$

آموزشگاه پرسا

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

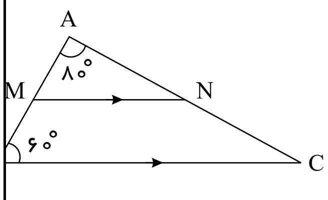
۸۳	نقطهٔ A مرکز تجانس مستقیم دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ است. اگر فاصلهٔ مراکز این دو دایره برابر ۶ باشد، آنگاه اندازهٔ شعاع دایره‌ای که با بزرگ‌تر مماس خارج و مجانس آن با نسبت تجانس بزرگ‌تر از یک به مرکز نقطهٔ A می‌باشد، کدام است؟ سخت- منتاآزمون- (۱) ۲/۸ (۲) ۳/۶ (۳) ۴٫۲ (۴) ۴/۸	بارم

دوران و ویژگی های آن

۸۴	نقطهٔ $Q(m, ۲n-۲)$ تصویر نقطهٔ $P(n, m+۲)$ تحت دوران ۹۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات است. $۲m-n$ کدام است؟ متوسط- منتاآزمون- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) -۲	بارم

تجانس و ویژگی های آن

۸۵	در مثلث مقابل، مقدار زاویهٔ بین مجانس‌های AN و MN نسبت به مرکز تجانس C و با نسبت $k = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰- (۱) ۴۰° (۲) ۲۰° (۳) ۷۰° (۴) ۸۰°	بارم



۸۶	دایرهٔ $C(O, ۲)$ و نقطهٔ A مفروض‌اند. اگر $OA = ۷$ و دایرهٔ $C'(O', R')$ مجانس دایرهٔ C به مرکز A و نسبت ۲ باشد، آنگاه طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰- (۱) دو دایره متقاطع‌اند و مماس مشترک داخلی ندارند. (۲) $۲\sqrt{۳}$	بارم

آموزشگاه پرسا

۸۷	اگر طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ $C(O,۲)$ و $C'(O',۵)$ برابر ۸ باشد، فاصلهٔ مرکز تجانس معکوس دو دایره تا مرکز دایرهٔ کوچک‌تر کدام اس متوسط - ۱۴۰۰ - ۱) $\frac{۴۰}{۷}$ ۲) $\frac{۱۶}{۷}$ ۳) $\frac{۳۵}{۸}$ ۴) ۳

بارم

دوران و ویژگی های آن

۸۸	نقطهٔ O به فاصلهٔ ۱۲ واحد از خط d مفروض است. اگر خط d را حول نقطهٔ O، با زاویهٔ ۶۰° دوران دهیم تا خط جدید، خط d را در نقطهٔ P قطع کند، فاصلهٔ P تا مرکز دوران کدام است؟ متوسط - ۱۴۰۰ - ۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

بارم

تجانس و ویژگی های آن

۸۹	یک مثلث متساوی‌الاضلاع را با تجانسی که مرکز آن نقطهٔ همرسی میانه‌ها و به نسبت $k=\frac{۱}{۳}$ است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت ناحیهٔ بین مث تصویرش برابر $\sqrt{۳}$ باشد، محیط مثلث اولیه کدام است؟ متوسط - ۱۴۰۰ - ۱) $۹\sqrt{۲}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

بارم

۹۰	دو دایرهٔ $C(O,۳)$ و $C'(O',۵)$ مماس خارج‌اند. تحت یک تجانس مستقیم به مرکز M یا تحت یک تجانس معکوس به مرکز M'، دایرهٔ C روی دایرهٔ C' تصویر می‌شود، اندازهٔ MM' کدام است؟	بارم

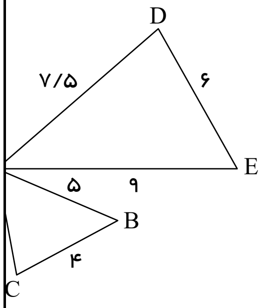
- سخت- ۱۴۰۰ -

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

---

۹۱ (بارم) - متوسط- ۱۴۰۰ -

با توجه به شکل مقابل، با کدام تبدیل می‌توان مثلث ABC را متجانس مثلث ADE نمود؟



۱) دوران به مرکز A و به زاویهٔ $B\hat{A}E$

۲) دوران به مرکز A و به زاویهٔ $B\hat{A}D$

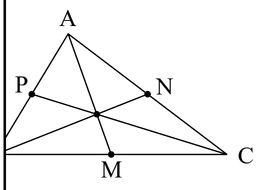
۳) بازتاب محوری با محور AE

۴) بازتاب نسبت به نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ADE

---

۹۲ (بارم) - سخت- ۱۴۰۰ -

در مثلث ABC میانه‌های AM، BN و CP را به‌اندازهٔ $\frac{۳}{۴}$ طول آنها از طرف نقاط M، N و P امتداد می‌دهیم تا به نقاط A'، B' و C' برسند. اگر مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC باشد، نسبت تجانس کدام است؟



۱) -۱

۲) $-\frac{۹}{۴}$

۳) $-\frac{۹}{۸}$

۴) $-\frac{۱۳}{۸}$

آموزشگاه پرسا

93 دو دایرهٔ مماس خارج و به شعاع‌های ۲ و ۳، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. فاصلهٔ مراکز این دو تجانس از یکدیگر کدام اس

سخت - ۱۴۰۰ -

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

بارم

94 تحت تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{۳}{۲}$، نقطهٔ A بر نقطهٔ B و تحت تجانس به مرکز A و نسبت $-\frac{۳}{۵}$، نقطهٔ B بر نقطهٔ C تصویر می‌شود. پاره‌خط BC چند برابر طول پاره‌خط OC است؟

متوسط - ۱۳۹۹ -

۱) $\frac{۸}{۷}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۸}$

بارم

انتقال و ویژگی های آن

95 در مثلث ABC، نقطهٔ A را با بردار $\overrightarrow{BC}$ به نقطهٔ A'، نقطهٔ B را با بردار $\overrightarrow{CA}$ به نقطهٔ B' و نقطهٔ C را با بردار $\overrightarrow{AB}$ به نقطهٔ C' انتقال می‌د مساحت مثلث $A'B'C'$ چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

متوسط - ۱۳۹۹ -

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۹

بارم

بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

96 پاره‌خط $A'B'$ بازتاب پاره‌خط AB نسبت به خط d است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d و نقطهٔ B، ۴ واحد باشد و راستای AB با محور بازتاب ۳۰ درجه بسازد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ کدام است؟ (A از B به محور بازتاب نزدیک‌تر است.)

سخت - ۱۳۹۹ -

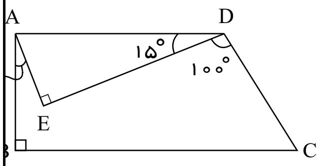
۱) $۱۰\sqrt{۳}$ ۲) $۲۰\sqrt{۳}$ ۳) $۳۰\sqrt{۳}$ ۴) $۴۰\sqrt{۳}$

بارم

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل قرینه‌یابی و هم‌محیطی

۹۷	اگر بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع چندضلعی $ABCDE$، مساحت آن را افزایش دهیم، مساحت شکل جدید چقدر بیشتر از مساحت اولیه است؟(AD=۸)	بارم

متوسط - ۱۳۹۹ -

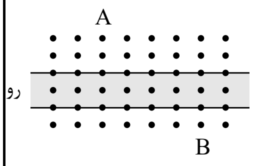


(۱) ۸ (۲) ۴
(۳) ۱۶ (۴) ۲

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۹۸	می‌خواهیم از شهر A به شهر B مطابق شکل یک جاده بسازیم. قسمتی از جاده پلی است که بر رودخانه عمود است. حداقل طول مسیر چند کیا است؟ (فاصلهٔ عمودی و افقی نقاط شبکهٔ مقابل یک کیلومتر است.)	بارم

متوسط - ۱۳۹۸ -



(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷
(۴) ۸

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

۹۹	روی محور x ها سه نقطهٔ A، B و C از نقطهٔ $x=0$ به ترتیب به فاصله‌های ۱، ۲ و ۳ قرار دارند. اگر در یک تجانس معکوس و انقباضی به A، نقطهٔ B بر C تصویر شود، نسبت $\frac{AB}{BC}$ کدام است؟	بارم

سخت - ۱۳۹۸ -

(۱) ۰٫۲ (۲) ۰٫۶ (۳) ۱ (۴) ۱٫۵

دوران و ویژگی های آن

۱۰۰	نقطهٔ A به فاصلهٔ $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌نامیم. اگر نقطهٔ A را حول نقطهٔ A' اندازهٔ 120° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود. آنگاه طول پاره‌خط AA'' کدام است؟	بارم

سخت - ۱۳۹۸ -

(۱) $15\sqrt{2}$ (۲) $12\sqrt{2}$ (۳) $10\sqrt{2}$ (۴) $9\sqrt{2}$

آموزشگاه پرسا

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

۱۰۱	دو خط موازی d_1 و d_2 به فاصلهٔ $4-m$ در صفحه قرار دارند. بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 را $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ و بازتاب $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ را نسب خط d_2، $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ می‌نامیم. اگر $AA''=m+1$، آن‌گاه اندازهٔ BB'' کدام است؟ (A'، B' و C' به ترتیب تبدیل یافتهٔ نقاط A، B و C نقاط A''، B'' و C'' به ترتیب تبدیل یافتهٔ نقاط A'، B' و C' هستند.) سخت- ۱۳۹۸ - ۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{7}{3}$	بارم

۱۰۲	اگر نقطهٔ O محل تلاقی قطرهای ذوزنقهٔ $ABCD(AB\|\|CD)$ باشد، آنگاه تبدیل‌یافتهٔ پاره‌خط AB تحت کدام‌یک از تبدیل‌های زیر، مواز پاره‌خط AB نیست؟ سخت- ۱۳۹۸ - ۱) بازتاب نسبت به خط CD ۲) تجانس معکوس به مرکز O و به نسبت ۲ ۳) انتقال با بردار $\overrightarrow{CD}$ ۴) دوران به مرکز O و زاویهٔ AOB	بارم

دوران و ویژگی های آن

۱۰۳	نقطهٔ M را به مرکز O و زاویهٔ ۱۸۰ درجه دوران می‌دهیم تا بر نقطهٔ M' تصویر شود، سپس M' را در دوران به مرکز O' و زاویهٔ ۱۸۰ درج نقطهٔ M'' تصویر می‌کنیم. کدام تبدیل نقطهٔ M را بر M'' تصویر می‌کند؟ سخت- ۱۳۹۸ - ۱) انتقال با بردار $2\overrightarrow{OO'}$ ۲) انتقال با بردار $2\overrightarrow{O'O}$ ۳) بازتاب نسبت به خط OO' ۴) دوران به مرکز وسط OO' و زاویهٔ 180°	بارم

آموزشگاه پرسا

بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۱۰۴	پاره‌خط AB به طول ۴، خط L را در نقطه‌ای بجز A و B با زاویه ۴۵ درجه قطع نموده است. اگر S، تبدیل بازتاب نسبت به خط L باشد به‌ط که $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$، آن‌گاه اندازهٔ مساحت چهارضلعی $AA'BB'$ کدام است؟ متوسط - ۱۳۹۸ - (۱) ۸ (۲) $۸\sqrt{۲}$ (۳) ۱۶ (۴) $۱۶\sqrt{۲}$	بارم
۱۰۵	پاره‌خط AB به طول $۴\sqrt{۲}$ با خط d، زاویه ۴۵° می‌سازد و نقطهٔ A روی خط d واقع است. اگر B' بازتاب نقطهٔ B نسبت به خط d باشد، کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABB' کدام است؟ متوسط - ۱۳۹۸ - (۱) $\sqrt{۲}$ (۲) ۲ (۳) $۲\sqrt{۲}$ (۴) ۴	بارم

تجانس و ویژگی های آن

بارم

دو دایرهٔ $C(O,۲)$ و $C'(O',۴)$ مماس خارج‌اند. تحت یک تجانس مستقیم به مرکز M یا تحت یک تجانس معکوس به مرکز M'، دایرهٔ C روی دایرهٔ C' تصویر می‌شود. اندازهٔ MM' کدام است؟ ۱۰۶

سخت- ۱۳۹۷ -

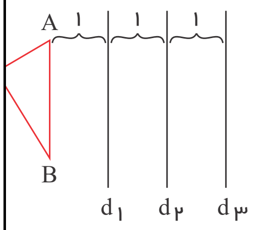
۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) ۱۰

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

بارم

مطابق شکل با فرض موازی بودن خطوط $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$، مثلث ABC را ابتدا نسبت به $d_۳$ بازتاب داده تا $A'B'C'$ به‌دست آید و سپس $A'B'C'$ را نسبت به $d_۲$ بازتاب می‌دهیم تا $A''B''C''$ حاصل شود و در نهایت $A''B''C''$ را نسبت به $d_۱$ بازتاب می‌دهیم، تا $A'''B'''C'''$ حاصل شود. اگر فاصلهٔ رأس A تا خط $d_۱$ برابر ۱ باشد آنگاه طول AA''' کدام است؟ ۱۰۷

سخت- ۱۳۹۷ -



۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

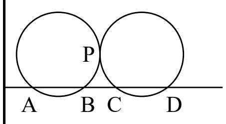
۴) ۱

انتقال و ویژگی های آن

بارم	

دو دایره با شعاع‌های یکسان، در نقطهٔ P مماس برون‌اند. اگر خط قاطعی به موازات خط‌المرکزین، دو دایره را در نقاط A، B، C و D قطع کند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ ۱۰۸

سخت- ۱۳۹۷ -



(۱) $A\hat{P}C = B\hat{P}D$

(۲) $A\hat{P}C = ۹۰^\circ$

(۳) $B\hat{P}D = ۹۰^\circ$

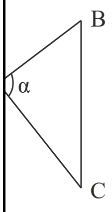
(۴) هر سه گزینه صحیح است.

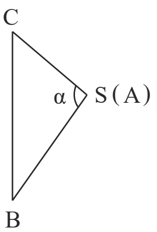
بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

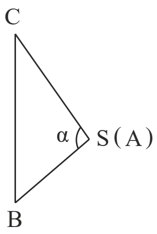
بارم	

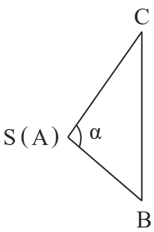
فرض کنید S نشانگر بازتاب نسبت به یک خط ثابت باشد. اگر مثلث روبه‌رو را تحت این بازتاب به گونه‌ای تصویر کنیم $S(C) = B, S(B) = C$، آن‌گاه کدام گزینه تصویر مثلث ABC تحت بازتاب S را به درستی نشان می‌دهد؟ $(AB < AC)$ ۱۰۹

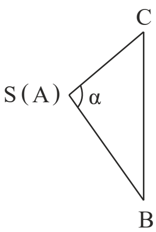
smart- ۱۳۹۷ - متوسط



(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


نگاشت و تبدیل و مفاهیم آن - طولپایی تبدیل ها

	بارم
۱۱۰ در مثلث ABC، $\hat{A}=\frac{۳}{۲}B=۳\hat{C}$ و $BC=۱۲$ است. اگر مثلث $A'B'C'$ تبدیل یافته $A\overset{\Delta}{B}C$ تحت تبدیل طولپای T باشد، مساحت $A'B'C'$ کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۷ - ۱) $۳۶\sqrt{۲}$ ۲) $۱۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۶\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸\sqrt{۳}$	

دوران و ویژگی های آن

	بارم
۱۱۱ دوران‌یافتهٔ دایرهٔ C، به مرکز $(-۲,۳)$ و شعاع $\frac{۵}{۲}$، تحت دوران $\frac{۳\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دایرهٔ C' است. اندازهٔ مماس مش داخلی این دو دایره، کدام است؟ سخت- خارج از کشور- ۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲	

آموزشگاه پرسا

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۱۱۲		بارم
۱۱۲	از بین مثلث‌هایی که در ضلع ثابت $AB = ۱۶$ مشترک و مساحت هر یک از آنان ۴۸ واحد مربع باشد، کمترین مقدار محیط کدام است؟ (۱) ۳۸ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۲ متوسط- سراسری-	

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

۱۱۳		بارم
۱۱۳	نقاط A' و B' به‌ترتیب مجانس نقاط A و B به مرکز O و با نسبت $k = ۴$ هستند. از نقطهٔ B، خطی موازی با OA رسم می‌کنیم تا $A'B'$ نقطه‌ای مانند C قطع کند. مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCA'$ چند برابر مساحت مثلث OAB است؟ (O، A و B در یک راستا قرار ندارند) (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲ متوسط- منتآزمون-	

درس دوم : کاربرد تبدیل ها | حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

۱۱۴	یک دایره را در تجانسی با نسبت تجانس ۰٫۶ و به مرکز تجانس مرکز دایره تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین دایره و تصویرش ۱۶ باشد، محیط دایرهٔ اولیه چقدر است؟ متوسط- منتآزمون- ۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) $۱۲\sqrt{\pi}$ ۴) $۱۰\sqrt{\pi}$	بارم

درس اول : تبدیل های هندسی | دوران و ویژگی های آن

۱۱۵	مربع $ABCD$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۲ واحد از رأس A در صفحه مفروض هستند. نقطهٔ M را ابتدا نسبت به ضلع AD و سپس نسبت به قطر AC بازتاب می‌دهیم. اگر M' نقطهٔ حاصل از دو تبدیل متوالی باشد، آن‌گاه اندازهٔ MM' کدام است؟ (M خارج مربع قرار دارد.) متوسط- منتآزمون- ۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$	بارم

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

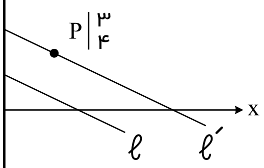
۱۱۶		بارم
	۵ تبدیل زیر را در صفحهٔ مختصات درنظر بگیرید. در کدام گزینه، ترکیب ۳ تبدیل داده‌شده، همانی است؟ سخت- منتآزمون- الف) بازتاب نسبت به محور xها ب) بازتاب نسبت به محور yها ج) بازتاب نسبت به خط $y=x$ د) بازتاب نسبت به خط $y=-x$ هـ) دوران 90° حول مبدأ مختصات در جهت پادساعتگرد ۱ (ب) و (د) و (هـ) ۲ (ب) و (ج) و (د) ۳ (الف) و (ب) و (د) ۴ (الف) و (د) و (هـ)	

تجانس و ویژگی های آن

بارم

117 در شکل زیر، خط ℓ را در تجانس به مرکز مبدأ مختصات (نقطهٔ O) و نسبت تجانس $\frac{5}{3}$ تصویر می‌کنیم و آن را ℓ' می‌نامیم. اگر ℓ، محور yها نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و ℓ' از نقطه $P(3,4)$ عبور کند، مساحت ناحیهٔ محصور بین خطوط ℓ و ℓ' و محورهای x و y کدام است؟

متوسط- منتآزمون- ۱۴۰۱



۱) ۲۰

۲) ۲۲

۳) ۲۴

۴) ۲۶

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

بارم

118 در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ نقطهٔ M، ضلع $AB=10$ را به نسبت ۲ و ۳ تقسیم کرده و به رأس B نزدیک‌تر است. $\hat{B}=30^\circ$ بوده و نقطهٔ N روی وتر متغیر باشد، کمترین محیط مثلث AMN کدام است؟

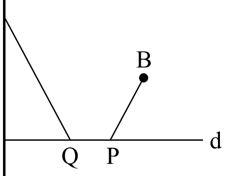
سخت- ۱۴۰۰ -

۱) $6+2\sqrt{19}$ ۲) $4+2\sqrt{19}$ ۳) $6+4\sqrt{5}$ ۴) $6+2\sqrt{7}$

بارم

119 دو نقطهٔ ثابت A و B به فاصلهٔ ۱۳ واحد ازهم و در یک طرف خط d قرار دارند. اگر مطابق شکل زیر، فاصلهٔ نقاط A و B از خط d به‌ترتیب ۱ ۶ باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر شکستهٔ $AQPB$ کدام است؟ (نقاط P و Q روی خط d به فاصلهٔ ۲ واحد هستند)

- ۱۴۰۰ -سخت -



(۱) ۱۹
(۲) $۲ + \sqrt{۳۰۰}$
(۳) $۲ + \sqrt{۳۸۹}$
(۴) ۱۵

درس اول : تبدیل های هندسی — بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

بارم

120 دو خط $x + y = ۶$ و $y = ۲x$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط d هستند. نقطهٔ ثابت این بازتاب را A بنامید. فاصلهٔ بازتاب A نسبت به نیمساز دوم و چهارم مختصات از نقطهٔ $M(۱, ۱۰)$ کدام است؟

- ۱۴۰۰ -متوسط -

(۱) $\sqrt{۳۷}$
(۲) ۱۳
(۳) ۱۰
(۴) $\sqrt{۸۵}$

آموزشگاه پرسا

۱۲۱	در مثلث قائم‌الزاویهٔ $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ با فرض اینکه $\hat{C}=۳۰^\circ$ و طول وتر $۴\sqrt{۳}$ باشد، بازتاب پای ارتفاع وارد بر وتر نسبت به دو ضلع قائم را M و N نامیده‌ایم. طول پاره‌خط MN کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ - ۱) $۶\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) ۶ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$	بارم

تجانس و ویژگی های آن

۱۲۲	خط $۲x+۳y=۶$ را در تجانسی به مرکز مبدأ مختصات و نسبت $k=۲$ تصویر می‌کنیم. مساحت محصور بین این خط و تبدیل‌یافته‌ا محورهای مختصات کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ - ۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۳ ۴) ۱۵	بارم
۱۲۳	دو دایرهٔ متخارج $C(O,۱)$ و $C'(O',۴)$ تحت یک تجانس، متجانس مستقیم یکدیگرند. اگر فاصلهٔ مرکز تجانس تا نزدیک‌ترین نقطهٔ دایر C برابر ۴ باشد، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط این دو دایره از یکدیگر کدام است؟ سخت- ۱۴۰۰ - ۱) ۱۵ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰	بارم

دوران و ویژگی های آن

بارم

۱۲۴ مربع $ABCD$ مفروض است. نخست بازتاب مربع را نسبت به عمودمنصف AB و سپس بازتاب شکل حاصل را نسبت به قطر BD رسم می‌
تبدیلی که مربع اولیه را به شکل نهایی تصویر می‌کند، کدام تبدیل است؟

متوسط- ۱۴۰۰-

۱) انتقال به اندازهٔ ضلع مربع ۲) انتقال به اندازهٔ قطر مربع ۳) دوران ۹۰° ۴) دوران ۱۸۰°

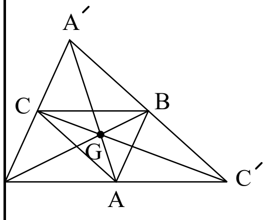
تجانس و ویژگی های آن

بارم

۱۲۵ فرض کنید مطابق شکل A، B و C به‌ترتیب وسط اضلاع $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$ باشند. اگر مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC به مرکز G
باشد، آنگاه نسبت تجانس کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰-

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳



بارم

۱۲۶ دایرهٔ C را در تجانسی با نسبت ۴ بر دایرهٔ C' تصویر می‌کنیم. اگر C و C' مماس داخل و فاصلهٔ مراکز آنها برابر ۱۲ باشد، مساحت ناحیهٔ مح
بین دو دایره چقدر است؟

متوسط- ۱۴۰۰-

۱) ۳۲۰π ۲) ۱۶۰π ۳) ۲۴۰π ۴) ۲۷۰π

بارم

۱۲۷ مساحت سطح محصور بین یک مربع و تبدیل‌یافتهٔ آن تحت تجانس به مرکز یکی از رأس‌های مربع و نسبت $\frac{۴}{۳}$، برابر ۱۴ است، مساحت مربع
کدام است؟

متوسط- ۱۴۰۰-

۱) ۲۰ ۲) ۱۸ ۳) $\frac{۵۶}{۳}$ ۴) ۱۰/۵

بارم

مربع $ABCD$ را با تجانسی که مرکز آن محل تلاقی قطرها و نسبت تجانس آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت بین مربع و تصو
برابر ۴ باشد، محیط مربع $ABCD$ کدام است؟ ۱۲۸

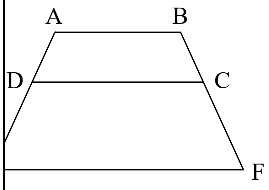
متوسط - ۱۴۰۰ -

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

بارم

در شکل مقابل، ذوزنقهٔ $ABCD$ با تجانس بر ذوزنقهٔ $CDEF$ تصویر می‌شود. اگر $AB=۸$ و $EF=۱۸$ باشد، مرکز و نسبت تجانس
است؟ ۱۲۹

متوسط - ۱۴۰۰ -



۱) محل تلاقی امتدادهای AE و BF، $k=\frac{۳}{۲}$

۲) محل تلاقی امتدادهای AE و BF، $k=\frac{۹}{۴}$

۳) محل تلاقی عمودمنصف‌های AE و BF، $k=\frac{۳}{۲}$

۴) محل تلاقی عمودمنصف‌های AE و BF، $k=\frac{۹}{۴}$

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

بارم

نقطهٔ A به فاصلهٔ $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌نامیم. نقطهٔ A را حول نقطهٔ A' به ا
۱۲۰° دوران می‌دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود. طول پاره‌خط AA'' کدام است؟ ۱۳۰

متوسط - ۱۳۹۹ -

۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) ۱۶

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

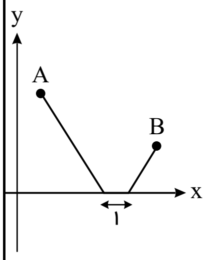
بارم

۱۳۱ مطابق شکل دو روستا در نقاط $A(۱,۶)$ و $B(۸,۲)$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری که یک وا

آن در ساحل رودخانه (محور xها) قرار داشته باشد. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده چقدر است؟

متوسط- ۱۳۹۹ -

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲



درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

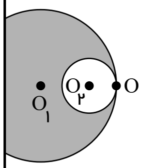
بارم

۱۳۲ دایرهٔ $C(O_۱, R_۱)$ را تحت تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{۱}{۳}$ به دایرهٔ $C'(O_۲, R_۲)$ تصویر کرده‌ایم. اگر $O_۱O_۲ = ۲$ باشد، مساحت ق

هاشورخورده کدام است؟

متوسط- ۱۳۹۹ -

۱) ۲π ۲) ۴π ۳) ۸π ۴) ۱۲π



بارم

۱۳۳ دو دایرهٔ متخارج با نسبت $\frac{۳}{۵}$ مجانس یکدیگرند. اگر فاصلهٔ مرکز تجانس از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر ۶ باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره

است؟

متوسط- ۱۳۹۹ -

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

بارم

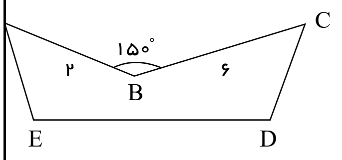
دایرهٔ $C(O,۳)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۶ از مرکز آن مفروض اند. این دایره را در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس $\frac{۱}{۳}$ بر دایرهٔ C' تا

می‌کنیم. وضعیت دو دایرهٔ C و C' نسبت به هم چگونه است؟

متوسط- ۱۳۹۸ -

آموزشگاه پرسا

درس دوم : کاربرد تبدیل ها حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

۱۳۵	زمینی به‌شکل زیر داریم، می‌خواهیم به‌کمک تبدیل هندسی مناسب بدون تغییر در طول اضلاع و محیط شکل، مساحت زمین را افزایش دهیم. م افزایش مساحت این زمین کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۹ -smart  (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) $۶\sqrt{۳}$ (۴) $۱۲\sqrt{۳}$	بارم

درس اول : تبدیل های هندسی ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

۱۳۶	طول ضلع مربع $ABCD$ برابر ۲ است. M نقطه‌ای دلخواه روی AD و N وسط CD است. بازتاب MN نسبت‌به خط AB را $M'N'$ و با $M'N'$ نسبت‌به خط CD را $M''N''$ می‌نامیم. مساحت چهارضلعی $MNN''M''$ کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۸ - (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴	بارم

انتقال و ویژگی های آن

۱۳۷	شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ را با بردار $\overrightarrow{CD}$ انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ مشترک بین شش‌ضلعی و تصویرش چه کسری از مساحت ضلعی منتظم است؟ متوسط- ۱۳۹۸ - (۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۱}{۳}$ (۳) $\frac{۱}{۴}$ (۴) $\frac{۱}{۶}$	بارم

دوران و ویژگی های آن

۱۳۸	نقطهٔ A درون زاویه‌ای به اندازهٔ ۴۵ درجه قرار دارد. اگر فاصلهٔ A تا رأس زاویه برابر یک واحد و A' و A'' تصاویر نقطهٔ A در بازتاب نسب اضلاع زاویه باشند، آن‌گاه طول پاره‌خط $A'A''$ کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۸ - (۱) ۱ (۲) $\sqrt{۲}$ (۳) ۲ (۴) $۲\sqrt{۲}$	بارم

آموزشگاه پرسا

بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

بارم		
	نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AA' = ۱۶$، نقطهٔ O روی خط L و $OA = ۱۰$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از OA' است؟ متوسط - ۱۳۹۸ - (۱) ۴٫۸ (۲) ۶ (۳) ۷٫۲ (۴) ۹٫۶	۱۳۹

تجانس و ویژگی های آن

بارم		
	دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۲}$ واحد و مربعی به ضلع ۱ واحد مفروض‌اند. فاصلهٔ مرکز دایره تا محل برخورد قطرهای مربع برابر ۶ واحد است. اگر مج این مربع در یک تجانس معکوس درون دایره محاط شود، آن‌گاه فاصلهٔ مرکز تجانس تا مرکز دایره کدام است؟ متوسط - ۱۳۹۷ - (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲	۱۴۰

انتقال و ویژگی های آن

بارم		
	مثلث ABC را با بردار $\overrightarrow{AA'}$ انتقال می‌دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. اگر A' روی ضلع AB و $\frac{A'A}{A'B} = ۲$ باشد، اندازهٔ مساحت مشترک بین این دو مثلث چه کسری از مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟ متوسط - ۱۳۹۷ - (۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۱}{۳}$ (۳) $\frac{۱}{۴}$ (۴) $\frac{۱}{۹}$	۱۴۱

بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

بارم

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را نسبت به یک خط ثابت بازتاب می‌دهیم. طوری که رأس‌های B و C نقاط ثابت این تبدیل باشند ۱۴۲

$AB=\sqrt{2}$ و $AC=4$، آن‌گاه فاصلهٔ A و A' کدام است؟ (A' بازتاب یافتهٔ A است.)

متوسط - ۱۳۹۷ -

(۱) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

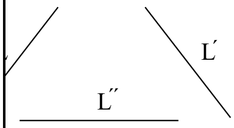
ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

بارم

سه خط L، L' و L'' مطابق شکل در صفحه مفروض‌اند. با کدام تبدیل می‌توان پاره‌خطی به‌طول ۵ سانتی‌متر رسم کرد به‌طوری که دو سر آن ۱۴۳

L و L' و موازی L'' باشد؟

متوسط - ۱۳۹۸ -



(۱) بازتاب (۲) انتقال (۳) دوران (۴) هیچ‌کدام

تجانس و ویژگی های آن

بارم

یک مثلث متساوی‌الاضلاع را با تجانسی که مرکز آن نقطهٔ همرسی میانه‌ها و به نسبت $K=\frac{1}{2}$ است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت ناحیهٔ بین ۱۴۴

و تصویرش برابر $3\sqrt{3}$ باشد آن‌گاه محیط مثلث اولیه کدام است؟

متوسط - ۱۳۹۸ -

(۱) ۶ (۲) $6\sqrt{6}$ (۳) ۱۲ (۴) $12\sqrt{2}$

آموزشگاه پرسا

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

۱۴۵ عکس کدام گزاره همواره برقرار است؟ متوسط - ۱۳۹۸ - | بارم

۱) اگر دو شکل متجانس باشند، آنگاه متشابه‌اند.

۲) اگر تبدیلی شیب خطوط را حفظ کند، آن‌گاه جهت شکل را حفظ می‌کند.

۳) اگر تبدیلی طولپا باشند، آنگاه اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند.

۴) اگر تبدیلی همانی باشد، آنگاه تمام نقاط صفحه، نقطهٔ ثابت آن تبدیل هستند.

تجانس و ویژگی های آن

۱۴۶ معادلهٔ تصویر خط $۲y + x = ۶$، تحت تجانس به مرکز $O'(۲, ۱)$ و نسبت تجانس $\frac{۳}{۲}$، کدام است؟ سخت- خارج از کشور- | بارم

۱) $y + ۲x = ۲$ ۲) $۲y + x = ۷$ ۳) $۲y + x = ۹$ ۴) $۳y + x = ۹$

انتقال و ویژگی های آن

۱۴۷ مربع $ABCD$ به طول ضلع ۴ مفروض است. مربع را با بردار $\vec{v}$ انتقال می دهیم تا مربع $A'B'C'D'$ به دست آید. اگر نقطهٔ A' روی ضلع BC قرار داشته باشد و $A'C = ۱$، اندازهٔ پاره‌خط DD' کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۹ - | بارم

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۵

آموزشگاه پرسا

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

بارم

۱۴۸ خط d را تحت انتقال با برداری به طول ۲ که راستای آن با خط d زاویهٔ ۳۰° می‌سازد، تصویر می‌کنیم تا خط d' به دست آید. اگر تصویر خط d' تحت بازتاب نسبت به محور d، خط d'' باشد، آنگاه فاصلهٔ d'' و d' کدام است؟

متوسط - ۱۳۹۷ -

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

تجانس و ویژگی های آن

بارم $\frac{۱}{۲}$

۱۴۹ نقاط $(۳,۵)$،$(۱,۷)$و$(۱-,۱)$ سه راس از مثلث قائم الزاویه‌اند.مساحت مجانس این مثلث به مرکز تجانس مبدا مختصات و نسبت تجانس کدام است؟

متوسط - سراسری -

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

نگاشت و تبدیل و مفاهیم آن - طولپایی تبدیل ها

بارم

۱۵۰ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ تحت تبدیل T که طولپا است به چهارضلعی $A'B'C'D'$ تبدیل شده است. اگر در ذوزنقهٔ $ABCD$ به مساحت ۲۱ واحد مربع، قاعدهٔ کوچک ۴ واحد کوتاه‌تر از قاعدهٔ بزرگ و ۲ واحد بلندتر از ارتفاع وارد بر قاعده‌ها باشد، محیط چهارضلعی $A'B'C'D'$ است؟

متوسط - منتآزمون -

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

آموزشگاه پرسا

انتقال و ویژگی های آن

۱۵۱		بارم
	یک مثلث به مساحت ۷۲ را تحت برداری که ابتدای آن یک رأس مثلث و انتهای آن محل همرسی میانه‌های مثلث است، انتقال می‌دهیم. مس ناحیهٔ مشترک بین مثلث و تصویرش تحت این انتقال کدام است؟ متوسط- منتآزمون- ۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۸	

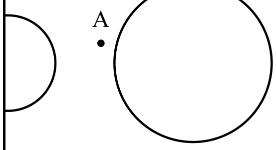
تجانس و ویژگی های آن

۱۵۲		بارم ۴
	تبدیل‌یافتهٔ مربعی به طول ضلع $۲\sqrt{۲}$ تحت تجانس به مرکز O و نسبت k، مربعی به طول قطر $\sqrt{۲}$ است. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ض تحت این تجانس به مثلثی با کدام مساحت تبدیل می‌شود؟ متوسط- منتآزمون- ۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$	

بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

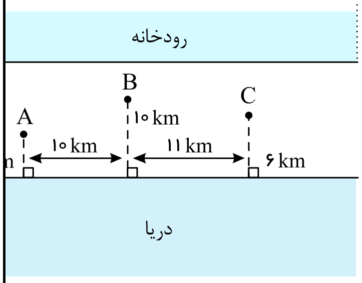
۱۵۳		بارم
	نقاط A و B به‌ترتیب به فاصله‌های ۴ و ۹ از خط d مفروض‌اند. اگر نقاط A' و B' به‌ترتیب بازتاب نقاط A و B نسبت به خط d بوده و چهارض $AA'B'B$ محیطی باشد، مساحت این چهارضلعی کدام است؟ متوسط- منتآزمون- ۱) ۱۲۰ ۲) ۱۳۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۵۶	

درس دوم : کاربرد تبدیل ها ❀ حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها

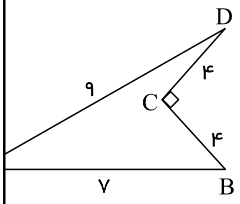
۱۵۴		بارم
	در شکل زیر می‌دانیم پاره‌خطی وجود دارد که دو سر آن روی دو دایره بوده و وسط آن منطبق بر نقطهٔ A است. با کدام تبدیل می‌توان این پاره‌خط را رسم کرد؟ متوسط- منتآزمون-  ۱) دوران ۲) انتقال ۳) بازتاب ۴) تجانس مستقیم	

آموزشگاه پرسا

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۱۵۵	مطابق شکل، رودخانه‌ای موازی با قسمتی از ساحل یک دریا و به فاصلهٔ ۱۴ کیلومتر از آن قرار دارد. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به‌ط که ۲ کیلومتر آن در ساحل دریا باشد و در ادامه جاده‌ای از B به C بسازیم به طوری‌که ۲ کیلومتر آن در ساحل رودخانه باشد. با توجه به انداز روی شکل، کمترین طول این جاده که از A به B و سپس به C می‌رود، چند کیلومتر است؟ سخت- منتآزمون-  ۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸	بارم

مسائل قرینه‌یابی و هم‌محیطی

بارم		
	دور زمینی مطابق شکل حصارکشی شده است. با جابه‌جایی حصارهای BC و CD بدون آنکه طول آنها تغییر کند، مساحت زمین را افز می‌دهیم. مقدار مساحت زمین چقدر می‌شود؟ سخت- منتآزمون-  (۱) $۸ + ۱۴\sqrt{۲}$ (۲) $۱۴ + ۸\sqrt{۲}$ (۳) $۱۶ + ۱۴\sqrt{۲}$ (۴) $۱۴ + ۱۶\sqrt{۲}$	۱۵۶

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

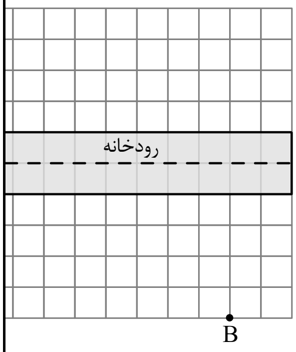
بارم		
	دو دایرهٔ $C(O, ۲)$ و $C'(O', ۴)$ با طول خط‌المرکزین $OO' = ۹$ به مرکز A متجانس مستقیم و به مرکز B متجانس معکوس یکدیگرند. ف A و B از هم چقدر است؟ متوسط- منتآزمون- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸	۱۵۷

درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

بارم

یک رودخانه و دو نقطهٔ A و B مطابق شکل مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطهٔ A به نقطهٔ B برویم به‌طوری که برای عبور از رودخانه باید از پل بر لبهٔ رودخانه استفاده کنیم. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن کدام است؟ (فاصلهٔ بین نقاط شبکه‌ای یک واحد است). ۱۵۸

-متوسط- منتآزمون-

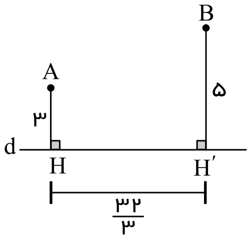


۱) $\sqrt{۱۳۶}+۲$ ۲) $۸\sqrt{۲}+۲$ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

بارم

۱۵۹ در شکل زیر، نقطهٔ M را روی خط d طوری به دست می‌آوریم که $AM+BM$ کمترین مقدار را داشته باشد. طول AM چقدر است؟

متوسط - منتآزمون-



۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

درس اول : تبدیل های هندسی تجانس و ویژگی های آن

بارم

۱۶۰ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۸، به مرکز محل همرسی میانه‌ها و با نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ مجانس رأس‌های C, B, A را به دست می‌آوریم تا به‌ترتیب مثلث‌های $A'B'C'$ و $A''B''C''$ پدید آیند. حاصل $A'A''+B'B''+C'C''$ چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

متوسط - منتآزمون-

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۶

بارم

۱۶۱ اگر A' مجانس A در تجانس به مرکز O و با نسبت ۳ و O' مجانس O در تجانس به مرکز A و با نسبت ۲− باشد، نسبت $\frac{A'O'}{AO}$ کدام است

-متوسط- منتآزمون-

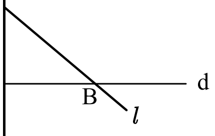
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۴
۴) ۵

بارم

۱۶۲ در شکل $۴ = OB = ۲OA$ است. خط l را در تجانس مستقیم به مرکز O و با نسبت تجانس k تصویر می‌کنیم و آن را l' می‌نامیم. اگر مس
بین خط‌های l و l' و خطوط d و d'، ۸ واحد مربع باشد، نسبت تجانس کدام است؟

-متوسط- منتآزمون-

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$



دوران و ویژگی های آن

۱۶۳ در مثلث ABC با طول اضلاع $AB=۲, AC=۲\sqrt{۳}, BC=۴$، نقطه M وسط ضلع AB است. M' بازتاب M نسبت به خط BC و همچنین M'' بازتاب M' نسبت به خط AC است. طول پاره‌خط MM'' کدام است؟

بارم

سخت- منتاَزمون-

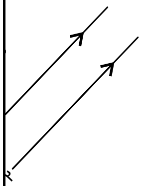
۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۵}$ ۴) $\sqrt{۱۷}$

انتقال و ویژگی های آن

۱۶۴ در شکل، فاصلهٔ دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ برابر k واحد است. نقطهٔ A به فاصلهٔ $\frac{k}{۲}$ واحد از خط $d_۱$ قرار دارد. اگر نقطهٔ A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط $d_۲$ و نقطهٔ A'' بازتاب نقطهٔ A' نسبت به خط $d_۱$ باشد، فاصلهٔ AA'' کدام است؟

بارم

متوسط- منتاَزمون-



۱) k ۲) $۲k$ ۳) $۳k$ ۴) $۴k$

آموزشگاه پرسا

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

بارم

۱۶۵ نقطهٔ $A(x,۲)$ را در تجانس به مرکز $M(۲,-۱)$ و نسبت تجانس ۳ تصویر می‌کنیم، سپس نقطهٔ حاصل را در تجانس به مرکز $N(-۳,۱)$ با نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ تصویر می‌کنیم. اگر نقطهٔ نهایی $B(۳,y)$ باشد، مقدار مثبت x کدام است؟

سخت- منتآزمون-

۱) $\frac{۱۹}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

دوران و ویژگی های آن

بارم

۱۶۶ نقطه $A(-۳,۴)$ در صفحه مختصات قرار دارد. نقطهٔ A را یک بار نسبت به خط $y=x$ بازتاب داده و بار دیگر نسبت به محور yها با... می‌دهیم و تصاویر را به‌ترتیب B و C می‌نامیم. اگر D دوران یافته نقطه B حول نقطه C به اندازه ۱۲۰ درجه در جهت مثلثاتی باشد، طول پار... BD کدام است؟

متوسط- منتآزمون-

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۶}$ ۳) ۱۰ ۴) $۸\sqrt{۳}$

آموزشگاه پرسا

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

۱۶۷	حاصل دو بازتاب محوری متوالی نسبت به دو خط متقاطع غیرمتعامد، یک .... است که شیب خط را .... متوسط- منتآزمون- ۱) انتقال – حفظ نمی‌کند ۲) دوران – حفظ می‌کند ۳) انتقال – حفظ می‌کند ۴) دوران – حفظ نمی‌کند	بارم

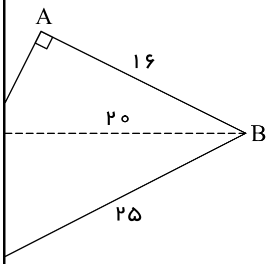
انتقال و ویژگی های آن

۱۶۸	مثلثی را با بردار انتقالی موازی با یکی از اضلاع و با اندازهٔ نصف آن ضلع انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ مشترک بین مثلث و تصویر آن، چه کسر مساحت مثلث است؟ متوسط- منتآزمون- ۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	بارم

دوران و ویژگی های آن

۱۶۹		بارم
۱۶۹	نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,R)$ قرار دارد. با دورانی به مرکز O و زاویهٔ 60°، نقطهٔ A' حاصل می‌شود. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر AA' برابر $3\sqrt{3}$ باشد، مساحت قطاع AOA' کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ - ۱) 2π ۲) 3π ۳) 4π ۴) 6π	

بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۱۷۰		بارم
۱۷۰	در چهارضلعی $ABCD$، یکی از اضلاع را حذف کرده و بقیهٔ شکل را نسبت به ضلع فوق، بازتاب می‌دهیم. حداقل مقدار محیط شش‌ضلعی به‌دست‌آمده کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ - ۱) ۷۸ ۲) ۸۶ ۳) ۹۲ ۴) ۹۶ 	

دوران و ویژگی های آن

۱۷۱		بارم
	یک دوازده‌ضلعی منتظم را حول مرکز آن، α درجه دوران می‌دهیم تا بر خودش منطبق شود. α کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟ - متوسط - ۱۴۰۰ - (۱) ۱۵ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۹۰	

۱۷۲		بارم
	دایرهٔ $C(O,۲+m)$ را به مرکز نقطهٔ دلخواه A (که واقع بر دایرهٔ C نیست) و زاویهٔ ۹۰° دوران می‌دهیم، تا بر دایرهٔ $C'(O',۳m-۲)$ م شود. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایرهٔ اولیهٔ $۴\sqrt{۳}$ باشد، نسبت طول مماس مشترک خارجی به طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟ - متوسط - ۱۴۰۰ - (۱) $\sqrt{۲}$ (۲) $\sqrt{۳}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{۶}$	

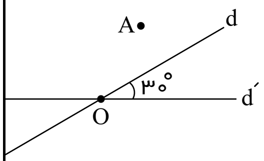
آموزشگاه پرسا

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

بارم

دو خط d و d' با زاویهٔ 30° در نقطهٔ O متقاطع هستند. بازتاب نقطهٔ A را نسبت به d نقطهٔ A' و همچنین بازتاب نقطهٔ A' را نسبت به خط d' را A'' می‌نامیم. طول پاره‌خط AA'' کدام است؟ $(OA = 4\sqrt{3})$ ۱۷۳

متوسط- ۱۴۰۰ -



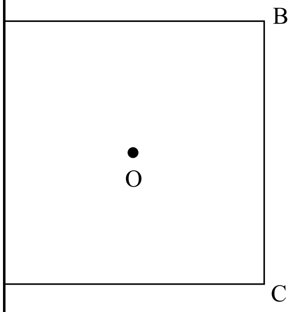
۱) $6\sqrt{3}$
۲) ۶
۳) ۴
۴) $4\sqrt{3}$

تجانس و ویژگی های آن

بارم

مربعی به مرکز O نمایش داده شده است. اگر طول قطر مربع $6\sqrt{2}$ باشد و این مربع با تجانسی به مرکز O و نسبت $\frac{1}{3}$، تصویر شود، مساحت مربع $ABCD$ و مجانس آن کدام است؟ ۱۷۴

متوسط- ۱۴۰۰ -



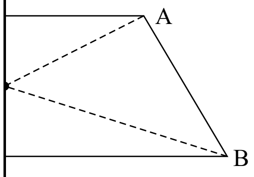
۱) ۲۴
۲) ۳۲
۳) ۴۸
۴) ۶۴

آموزشگاه پرسا

درس دوم : کاربرد تبدیل ها ـ مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۱۷۵	در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$، اندازه‌های $CB = CD = ۶$ و $AD = ۲$ هستند. نقطهٔ M روی ساق قائم CD متحرک است. کمترین $MA + MB$، کدام است؟	بارم

متوسط - خارج از کشور -



۱) ۱۰

۲) ۱۰٫۵

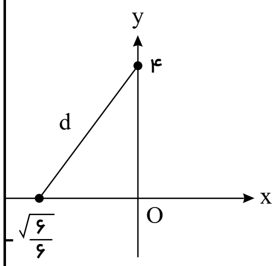
۳) ۱۱

۴) ۱۱٫۵

درس اول : تبدیل های هندسی ـ تجانس و ویژگی های آن

۱۷۶	در شکل زیر، خط d را در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس $\sqrt{\sqrt{۶}+۱}$ بر خط d' تصویر می‌کنیم. مساحت محصور بین دو خط d و d' و محورهای مختصات کدام است؟	بارم

متوسط - ۱۴۰۰ -



۱) $\sqrt{۲}$

۲) ۲

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۶}$

آموزشگاه پرسا

۱۷۷	مربعی به ضلع $\sqrt{2}$ واحد و دایره‌ای به قطر ۸ واحد مفروض‌اند. فاصلهٔ مرکز دایره تا محل تلاقی قطرهای مربع برابر ۲۰ واحد است. اگر متج این مربع در یک تجانس معکوس داخل دایرهٔ محاط شود، آنگاه فاصلهٔ مرکز تجانس تا مرکز دایره کدام است؟ متوسط- ۱۴۰۰ - ۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸	بارم
۱۷۸	دایرهٔ $C(O,9)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱۲ واحد از مرکز آن مفروض است. این دایره را در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ بر دایرهٔ C' تصویر می‌کنیم. وضعیت این دو دایره چگونه است؟ متوسط- ۱۴۰۰ - ۱) متداخل ۲) متخارج ۳) مماس داخل ۴) متقاطع	بارم
۱۷۹	تصویر مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $2\sqrt{3}$ واحد را در تجانسی به مرکز یکی از رأس‌های آن و نسبت $k=-2$ به‌دست می‌آوریم. فاصلهٔ همرسی میانه‌های دو مثلث کدام است؟ متوسط- ۱۳۹۹ - ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶	بارم

آموزشگاه پرسا

بارم

متوسط- ۱۳۹۹ -

۱۸۰ اگر $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ تحت تجانس به مرکز A و نسبت $k = ۲$ و $A''B''C''D''$ مجانس $A'B'C'D'$ تحت تجانس به
C و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ باشد، مساحت سطح محصور بین $A'B'C'D'$ و $A''B''C''D''$ ، چند برابر مساحت $ABCD$ است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

بارم

متوسط- ۱۳۹۹ -

۱۸۱ دو خط عمود برهم d و d' مفروض‌اند. نقاط صفحه را ابتدا نسبت به خط d و سپس تصاویر آن‌ها را نسبت به d' بازتاب می‌دهیم. اگر ترکیب ای
بازتاب را یک تبدیل فرض کنیم، کدام گزاره درمورد این تبدیل همواره درست است؟

۱) این تبدیل، شیب خطوط و جهت اشکال را حفظ می‌کند.
۲) این تبدیل، شیب خطوط و جهت اشکال را حفظ نمی‌کند.
۳) این تبدیل، شیب خطوط را حفظ کرده ولی جهت اشکال را حفظ نمی‌کند.
۴) این تبدیل، جهت اشکال را حفظ کرده ولی شیب خطوط را حفظ نمی‌کند.

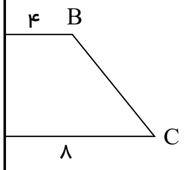
درس دوم : کاربرد تبدیل ها

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

بارم

متوسط- ۱۳۹۹ -

۱۸۲ در ذوزنقهٔ شکل زیر، اگر M نقطهٔ دلخواهی از ساق قائم باشد، کمترین مقدار $MB + MC$ کدام است؟



۱) ۱۲٫۵
۲) ۱۳
۳) ۱۳٫۵
۴) ۱۴

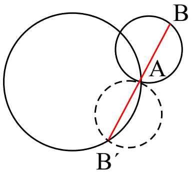
آموزشگاه پرسا

درس اول : تبدیل های هندسی دوران و ویژگی های آن

۱۸۳		بارم
۱۸۳	مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را که در آن طول اضلاع قائمه برابر $AB=۲$ و $AC=۴$ است، به مرکز C و به اندازه ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. اگر B' تصویر نقطهٔ B در این دوران باشد، طول BB' کدام است؟ - متوسط- ۱۳۹۹ ۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۱۰}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) ۵	

پاسخنامه تشریحی

۱ — گزینه ۴

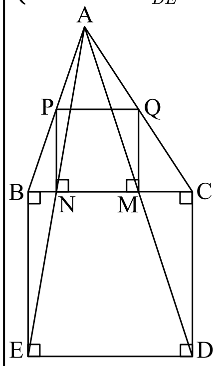


اگر دایرهٔ کوچک‌تر را نسبت به نقطهٔ A (نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ کوچک و بزرگ) بازتاب دهیم، دایرهٔ خط‌چین به‌دست می‌آید. واضح است که $AB = AB'$ زیرا نقطهٔ B' بازتاب نقطهٔ B نسبت به مرکز A است. از طرفی، AB' وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر است. بنابراین از نقطهٔ A خطی گذشته (خط BB') که در دو دایرهٔ بزرگ و کوچک، وترهای مساوی جدا کرده است (وتر AB در دایرهٔ کوچک = وتر AB' در دایرهٔ بزرگ). پس گزینهٔ (۴) (یعنی بازتاب نسبت به نقطهٔ A) ما را به مقصود رساننده است.

۲ — گزینه ۴

مطابق شکل، روی ضلع BC و خارج آن، مربع $BCDE$ را بنا می‌کنیم. پاره‌خط‌های AD و AE ضلع BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. اگر از نقاط M و N عمودهایی بر ضلع BC وارد کنیم، نقاط تقاطع P و Q با اضلاع دیگر مثلث به‌دست می‌آید. به‌راحتی می‌توان نشان داد که مربع $MNPQ$ همان مربع موردنظر است، زیرا داریم:

$$\begin{cases} BE||PN : \frac{PN}{BE} = \frac{AP}{AB}\frac{AN}{AE} \\ CD||QM : \frac{QM}{CD} = \frac{AQ}{AC} = \frac{AM}{AD} \\ MN||DE : \frac{MN}{DE} = \frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AD} \end{cases} \Rightarrow$$ اضلاع $MNPQ$ باهم برابرند.



پس کافیست مربعی روی ضلع BC بنا کرده، سپس به مرکز A و نسبت تجانس $k = \frac{h_a}{a = h_a}$، این مربع را تصویر کنیم.

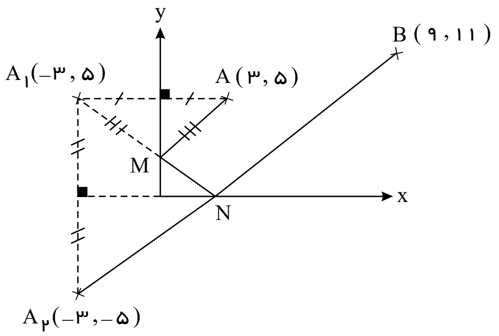
توجه: برای یافتن مقدار نسبت تجانس K، کافیست ارتفاع AH را رسم کرده و از قضیهٔ تالس (مشابه بالا) استفاده کنید.

۳ — گزینه ۳

باید مسیر کوتاه را به‌دست آوریم. A را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نقطهٔ حاصل را نسبت به محور xها بازتاب می‌کنیم:

A_1: قرینهٔ A نسبت به محور yها است.

A_2: قرینهٔ A_1 نسبت به محور xها است.



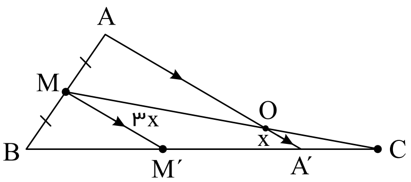
کمترین اندازهٔ خط شکسته $AMNB$ برابر می‌شود با:

$$|AMNB| = |A_۲B| = \sqrt{(x_B - x_{A_۲})^۲ + (y_B - y_{A_۲})^۲} = \sqrt{(۹ + ۳)^۲ + (۱۱ + ۵)^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵۶ = ۲۰}$$

۴

گزینه ۳

از M خطی موازی AA' رسم می‌کنیم تا BA' را در M' قطع کند.



فرض : $\frac{OC}{OM}=\frac{۱}{۲} \to \frac{OC}{CM}=\frac{۱}{۳}$

$\overset{\Delta}{MM'C} : OA' || MM' \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{OC}{OM}=\frac{OA'}{MM'}=\frac{۱}{۳} \to \begin{cases} OA'=x \\ MM'=۳x \end{cases}$

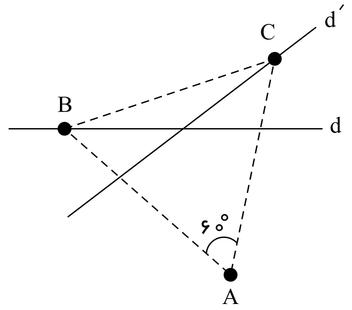
$\overset{\Delta}{ABA'} : MM' || AA' \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{BM}{BA}=\frac{MM'}{AA'} \to \frac{۱}{۲}=\frac{۳x}{OA+x} \to OA+x=۶x \to OA=۵x$

$|K|=\frac{OA'}{OA}=\frac{x}{۵x}=\frac{۱}{۵} \xrightarrow{\text{تجانس معکوس است}} K=-\frac{۱}{۵}$

۵

گزینه ۴

متساوی‌الاضلاع است. $ABC \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ \;,\; AB=AC \Rightarrow R_A^{۶۰^\circ}(B)=C$



دوران خط d به مرکز A و زاویهٔ ۶۰، خط d' را در نقطهٔ C قطع می‌کند. همچنین دوران خط d' به مرکز A و زاویهٔ (-۶۰°)، خط d را در نقطهٔ B قطع می‌کند.

۶

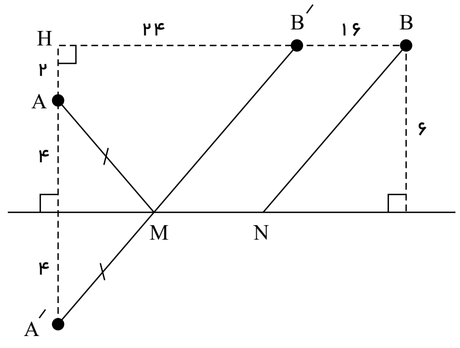
گزینه ۴ نقطهٔ C دوران‌یافتهٔ نقطهٔ B حول نقطهٔ A است. (زاویهٔ دوران ۵۰°)

نقطهٔ D دوران‌یافتهٔ نقطهٔ E حول نقطهٔ A است. (زاویهٔ دوران ۵۰°)

پس پاره‌خط CD دوران‌یافتهٔ BE حول نقطهٔ A است (زاویهٔ دوران ۵۰°). بنابراین، زاویهٔ بین BE و CD برابر ۵۰° است. بنابراین $\alpha=۱۳۰^\circ$ است.

۷

گزینه ۲



$\overset{\Delta}{A'HB'} : \; A'H^۲+HB'^۲=A'B'^۲$

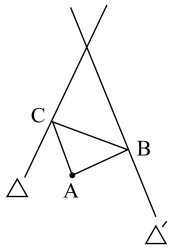
$\to ۱۰^۲+۲۴^۲=A'B'^۲ \to A'B'^۲=۶۷۶ \to A'B'=۲۶$

$AMNB$ اندازهٔ مسیر $=AM+BN+MN$

$\to (A'M+MB')+MN=A'B'+MN=۲۶+۱۶=۴۲$

۸

گزینه ۲ مسأله را حل‌شده فرض می‌کنیم. مطابق شکل، مثلث ABC $(\angle A=۹۰^\circ)$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است $AC=AB$. با دوران ۹۰° حول نقطهٔ A خطوط Δ و Δ' دوران می‌دهیم تا با برخورد با خطوط Δ و Δ' نقاط B و C حاصل شود.



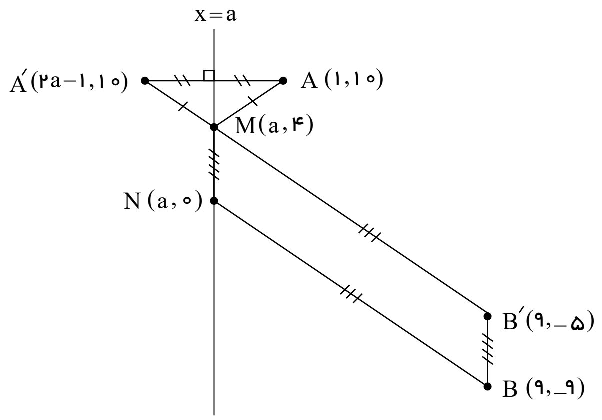
۹

گزینه ۲ در دوران تبدیل‌یافته، مرکز دوران حول خودش، خودش می‌شود. در بازتاب (تقارن محوری)، تبدیل‌یافته هر نقطه روی محور بازتاب، برخورد آن نقطه تصویر می‌شود. در تجانس، متجانس مرکز تجانس خودش می‌شود. ولی در انتقال، تبدیل هیچ نقطه‌ای از صفحه بر خودش منطبق نمی‌شود.

۱۰

گزینه ۱ الف) اگر فرض کنیم A و B در یک طرف خط $x=a$ قرار داشته باشند، آنگاه برای محاسبهٔ کمترین طول خط شکسته $AMNB$ داریم:

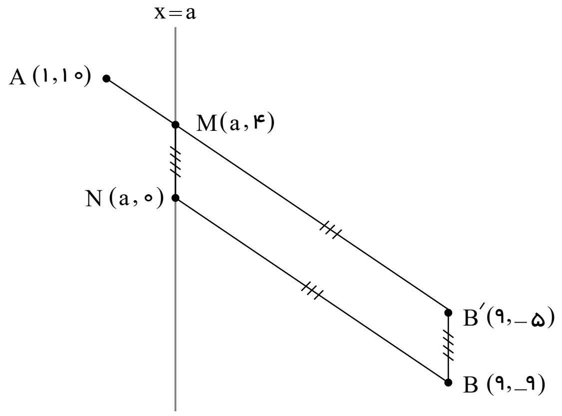
$$AM+MN+NB=(A'M+MB')+MN=A'B'+MN=A'B'+۴$$
$$=\sqrt{(۲a-۱۰)^۲+۱۵^۲}+۴$$



عبارت بالا به‌ازای $a=۵$ حداقل می‌گردد. اما به‌ازای این مقدار a نقاط A و B در دو طرف خط $x=۵$ واقع می‌شوند که با فرض اولیه در تناقض است.

ب) اگر فرض کنیم A و B در دو طرف خط $x=a$ قرار داشته باشند، آنگاه برای محاسبهٔ کمترین طول خط شکستهٔ $AMNB$ داریم:

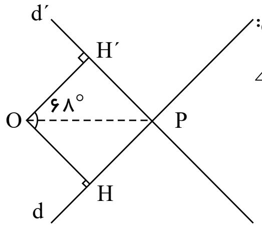
$$AM+MN+NB=(AM+MB')+MN=AB'+MN=AB'+۴$$
$$=\sqrt{(۹-۱)^۲+(-۵-۱۰)^۲}+۴=\sqrt{۸^۲+۱۵^۲}+۴=۱۷+۴=۲۱$$



۱۱

گزینه ۲

برای دوران خط d حول نقطهٔ O ابتدا از O به d عمود کرده (پای عمود H)، در نقطهٔ O زاویهٔ $H'OH$ را برابر ۶۸° ساخته طوری که $OH'=OH$ سپس در H' خط d' را بر OH' عمود می‌کنیم. (d' دوران‌یافتهٔ d به اندازهٔ ۶۸° حول O است) OP نیمساز زاویهٔ O است. پس:

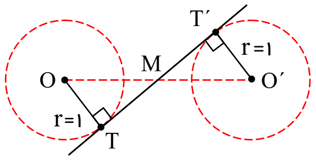


$$\angle OPH=\frac{۱۸۰^\circ-۶۸^\circ}{۲}=۵۶^\circ$$

۱۲

گزینه ۳ انتقال طولپاست پس شعاع‌های دو دایره برابرند:

$۳-a=a-۱\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲\Rightarrow$ شعاع دو دایره $r=۳-۲=۱$



$$TT'=۳\Rightarrow MT=MT'=\frac{۳}{۲}$$
$$M\overset{\Delta}{T}O: OT=r=۱\quad,\quad MT=\frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow OM^۲=۱^۲+(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱۳}{۴}\Rightarrow OM=\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$
$$\Rightarrow OO'=۲\times\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}=\sqrt{۱۳}$$

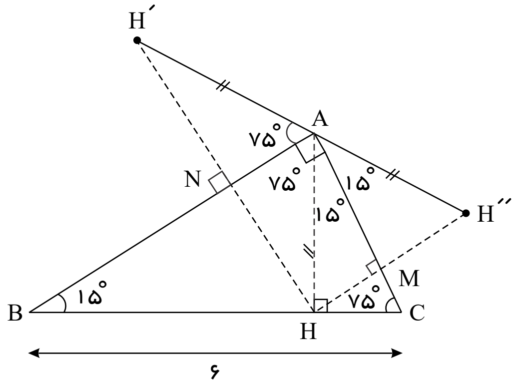
$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^{۲} - (r-r)^{۲}} = OO' = \sqrt{۱۳}$$

۱۳

گزینه ۳

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \;,\; \hat{B} = ۱۵^\circ \;\rightarrow\; \hat{C} = ۷۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{بازتاب } H \text{ نسبت به } AB \; H' \rightarrow AH = AH' \\ \text{بازتاب } H \text{ نسبت به } AC \; H'' \rightarrow AH = AH'' \end{array}\right\} \rightarrow AH' = AH''$$



از سال قبل می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه که یک زاویهٔ آن ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ است. پس:

$$\rightarrow H'H'' = ۲AH \xrightarrow{AH=\frac{۱}{۴}BC} H'H'' = \frac{۱}{۲}BC = ۳$$

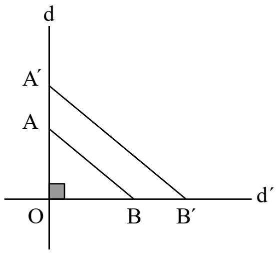
۱۴

گزینه ۲

مطابق شکل $A'B'$ مجانس AB به مرکز O و نسبت تجانس $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ می‌باشد.

توجه کنیم که $\sqrt{۱+\sqrt{۲}} > ۱$ می‌باشد و پس $A'B' > AB$.

داریم:



$$S_{\overset{\triangle}{AOB}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{A'OB'}}}{S_{AOB}} = \left(\sqrt{۱+\sqrt{۲}}\right)^{۲} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{A'OB'}} = (۱+\sqrt{۲}) \times \frac{۱}{۴} \times \sqrt{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{A'OB'}} = \frac{۱}{۴} \times \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}} + ۱\right)$$

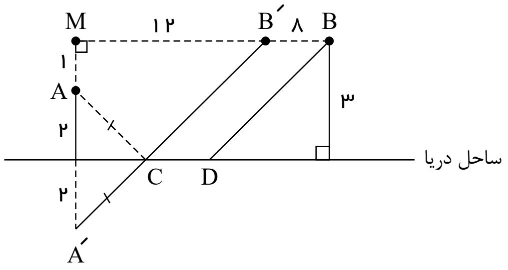
$$S_{\text{بین دو خط}} = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}} + ۱\right) - \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۴}$$

۱۵

گزینه ۲

مطابق شکل، A را نسبت به ساحل دریا، بازتاب می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم. داریم:

$$A'\overset{\triangle}{M}B' : A'B'^{۲} = A'M^{۲} + B'M^{۲} \rightarrow A'B'^{۲} = ۵^{۲} + ۱۲^{۲} \rightarrow A'B'^{۲} = ۱۶۹ \rightarrow A'B' = ۱۳$$

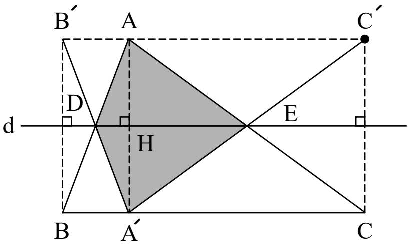


$$\Rightarrow ABCD \text{ کوتاهترین مسیر} = AC + \underbrace{CD}_{۸} + DB \xrightarrow{A'B'=AC+DB} \text{کوتاهترین مسیر} = ۸ + ۱۳ = ۲۱$$

۱۶

گزینه ۴

چون D و E وسط اضلاع هستند، بنابراین با توجه به شکل داریم:



$$DE \parallel BC \ , \ DE = \frac{BC}{۲} \Rightarrow AH = HA'$$

در بازتاب B و C نسبت به d نقاط B' و C' به‌دست می‌آید و بازتاب A (نقطهٔ A') روی ضلع BC قرار می‌گیرد.

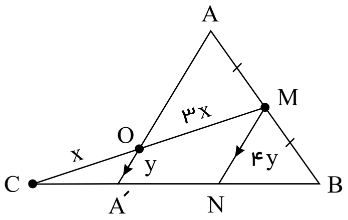
پس:

$$S_{ADA'E} = ۶ \ , \ A\overset{\triangle}{D}E \cong A'\overset{\triangle}{D}E \to S_{A\overset{\triangle}{D}E} = ۳$$

$$A\overset{\triangle}{D}E \sim A\overset{\triangle}{B}C \to \frac{S_{A\overset{\triangle}{D}E}}{S_{A\overset{\triangle}{B}C}} = (\frac{DE}{BC})^۲ = \frac{۱}{۴} \to S_{A\overset{\triangle}{B}C} = ۴S_{ADE} = ۴(۳) = ۱۲$$

۱۷

گزینه ۲ ابتدا از نقطهٔ M خطی به موازات OA' رسم می‌کنیم تا پاره‌خط BC را در نقطهٔ N قطع کند. طبق فرض مسئله داریم:



$$\frac{OC}{OM} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow OC = x \ , \ OM = ۳x \ , \ CM = ۴x$$

$$M\overset{\triangle}{N}C : MN \| OA' \Rightarrow \frac{OA'}{MN} = \frac{OC}{CM} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} OA' = y \\ MN = ۴y \end{cases}$$

$$A\overset{\triangle}{A'}B : AA' \| MN \Rightarrow \frac{MN}{AA'} = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{MN}{AA'} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۴y}{OA + y} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow OA + y = ۸y \Rightarrow OA = ۷y$$

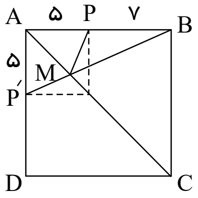
حال، طبق تعریف تجانس داریم:

$$|k| = \frac{OA'}{OA} = \frac{y}{۷y} = \frac{۱}{۷} \xrightarrow{\text{تجانس معکوس}} k = -\frac{۱}{۷}$$

۱۸

گزینه ۳ اگر رأس دیگر مثلث را M فرض کنیم، برای یافتن نقطهٔ M به‌طوری‌که محیط مثلث PBM حداقل باشد، باید کمترین مقدار $PM + BM$ را پیدا کنیم. (مقدار $PB = ۷$ مشخص است.) برای این کار از روش هرون کمک می‌گیریم.

نقطهٔ P را نسبت به AC بازتاب داده و P' می نامیم. نقطهٔ M محل برخورد $P'B$ با AC است.



با توجه به شکل داریم:

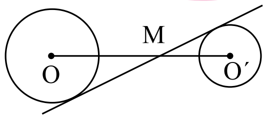
$$PM + BM = P'M + BM = P'B$$

$$B\overset{\triangle}{A}P' : P'B^۲ = \underbrace{AP'^۲}_{۵} + \underbrace{AB^۲}_{۱۲} \Rightarrow P'B = ۱۳$$

$$\text{محیط مثلث } PBM = \underbrace{PM + BM}_{۱۳} + \underbrace{PB}_{۷} = ۲۰$$

۱۹

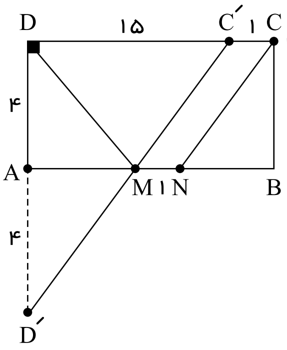
گزینه ۲ M مرکز تجانس معکوس دو دایره نقطه تلاقی مماس مشترک داخلی دو دایره با خط‌المرکزین می‌باشد، داریم:



$$\frac{MO}{MO'} = \frac{R}{R'} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{MO}{۱۲ - MO} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow MO = \frac{۶۰}{۸} = ۷/۵$$

۲۰

گزینه ۳



برای پیدا کردن کمترین مقدار محیط ذوزنقه، C را با بردار $\overrightarrow{NM}$ انتقال می‌دهیم تا C' به‌دست آید. سپس D را نسبت به AB بازتاب می‌دهیم تا D' حاصل شود. محل تلاقی $C'D'$ با AB را M می‌نامیم و با بردار $\overrightarrow{C'C}$ انتقال می‌دهیم تا N ایجاد شود.

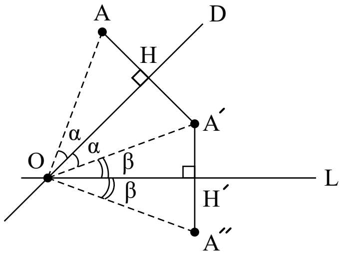
مسیر $DMNC$ کوتاهترین مسیر است و داریم:

$$\overset{\Delta}{DD'C'}: D'C'^2 = DD'^2 + DC'^2 = 8^2 + 15^2 = 17^2 \Rightarrow D'C' = 17$$

$$DCNM \text{ محیط ذوزنقه} = DC + CN + MN + DM = 16 + MC' + 1 + D'M = 17 + D'C' = 17 + 17 = 34$$

۲۱

گزینه ۲ با توجه به شکل A' بازتاب A نسبت به خط D و A'' بازتاب A' نسبت به خط L می‌باشد. با توجه به شکل داریم:



پس:

$$H\hat{O}H' = \alpha + \beta = 45^\circ \to A\hat{O}A'' = 2\underbrace{(\alpha + \beta)}_{45^\circ} = 90^\circ$$

پس مثلث AOA'' یک مثلث قائم‌الزاویه است. درنتیجه:

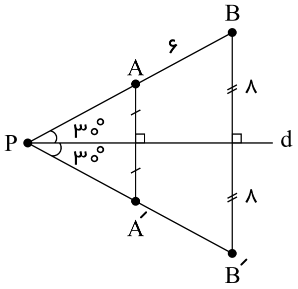
$$OA = OA'' = 1 \to AA'' = \sqrt{2}$$

۲۲

گزینه ۳ چون بازتاب طولپاست، بنابراین:

$$PB = PB' \xrightarrow{\hat{P}=60^\circ} PB = PB' = BB' = 16$$

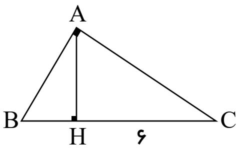
(مثلث PBB' متساوی‌الاضلاع است)



$$\to PA = PB - AB = 10 \to \frac{PA}{PB'} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

۲۳

گزینه ۱



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \to 90^\circ + 5\hat{C} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\to \hat{C} = 15^\circ, \hat{B} = 5\hat{C} = 5 \times 15^\circ = 75^\circ$$

می‌دانیم اگر در مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا ۱۵ درجه باشد، آنگاه طول ارتفاع وارد بر وتر، یک چهارم طول وتر است.

$$15^\circ \text{ ارتفاع روبه‌رو به } AH = \frac{BC}{4} = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2}$$

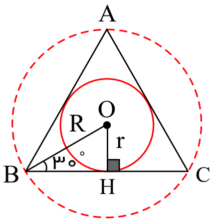
$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times ۶ = \frac{۹}{۲}$

چون تبدیل طولپا است بنابراین مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC هم‌نهشت است.

$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۹}{۲}$

۲۴ گزینه ۲ در هر تجانس تنها نقطه ثابت، مرکز تجانس می‌باشد. بنابراین مرکز دایره محاطی داخلی مثلث، مرکز تجانس می‌باشد. به این ترتیب مرکز دو دایره بر هم منطبق است و این تنها در مثلث متساوی‌الاضلاع ممکن می‌باشد. همچنین k برابر است با نسبت شعاع‌های دو دایره.

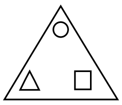
داریم:



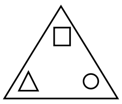
$$O : K = \frac{R}{r} = \frac{۱}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$ مرکز تجانس

۲۵ گزینه ۴

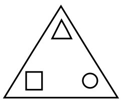
در قرینهٔ شکل نسبت به خط $L_۱$، جای مثلث و مربع تعویض می‌شود.



در قرینهٔ این شکل نسبت به خط $L_۲$، جای مربع و دایره عوض می‌شود.

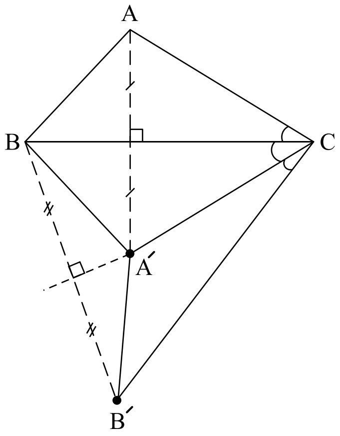


در قرینهٔ شکل نسبت به خط $L_۳$، جای مثلث و مربع تعویض می‌شود.



۲۶ گزینه ۲

ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، یک دوران نسبت به محل برخورد دو محور یعنی نقطه C و با زاویه‌ای مساوی با دوبرابر زاویه بین دو محور یعنی $۲\hat{C}$ می‌باشد.



۲۷ گزینه ۳

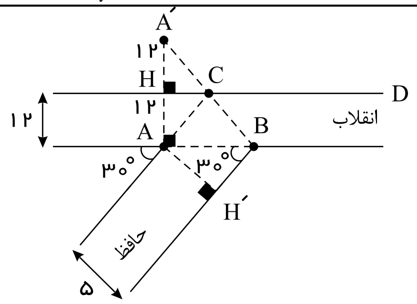
ویژگی / نوع تبدیل	شیب حفظ می‌شود.	جهت حفظ می‌شود.
بازتاب محوری	×	×
انتقال	✓	✓
دوران	×	✓
تجانس	✓	✓

تذکر: مطابق کتاب درسی، منظور از جهت، ساعتگرد یا پادساعتگرد می‌باشد.

گزینه ۳

AC میانه وارد بر وتر است. $AH = A'H \xrightarrow[\text{تالس}]{HC\|AB} A'C = CB \to$

بنابراین: $AC = A'C = BC$.



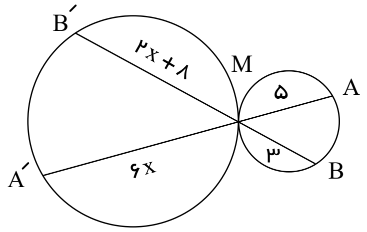
$\overset{\triangle}{AH'B}$: (ضلع مقابل به ۳۰°) $AH' = \frac{۱}{۲}AB \to ۵ = \frac{۱}{۲}AB \to AB = ۱۰$

$\overset{\triangle}{AA'B}$ (فیثاغورس) : $A'B^۲ = AB^۲ + AA'^۲ \to A'B^۲ = ۱۰^۲ + ۲۴^۲ \to A'B = ۲۶$

کوتاه‌ترین مسیر : $AC + CB = A'B = ۲۶$

۳۱

گزینه ۳ نقطهٔ M مرکز تجانس معکوس دو دایرهٔ مماس خارج است. (مرکز تجانس همواره روی خط‌المرکزین و یا امتداد آن قرار دارد) حال، بنابر تعریف تجانس داریم:

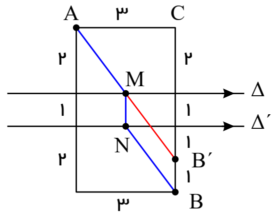


$$\begin{cases} |k| = \frac{A'M}{AM} = \frac{۶x}{۵} \\ |k| = \frac{B'M}{BM} = \frac{۲x+۸}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۶x}{۵} = \frac{۲x+۸}{۳}$$

$$\Rightarrow ۱۸x = ۱۰x + ۴۰ \Rightarrow x = ۵$$

۳۲

گزینه ۴ نقطهٔ B را به اندازهٔ فاصلهٔ بین Δ و Δ' روی BC به بالا منتقل می‌کنیم تا B' به دست می‌آید. از A به B' وصل می‌کنیم تا Δ را در M قطع کند. مسیر $AMNB$ کوتاهترین مسیر ممکن است و طول آن برابر است با:



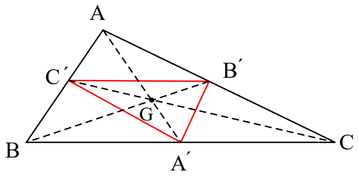
$$\text{طول مسیر } AMNB = AM + MN + \overset{MB'}{\cancel{NB}}$$

$$= AB' + MN = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} + ۱ = ۵ + ۱ = ۶$$

۳۳

گزینه ۲

چون نقاط A' و B' و C' اوساط اضلاع هستند، پس A' که متناظر A است را به‌هم وصل کرده و B' که متناظر B است را نیز به‌هم وصل کرده این دو (میانه ها) همدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که مرکز تجانس است. پس مرکز تجانس نقطهٔ همرسی سه میانه مثلث و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ است.

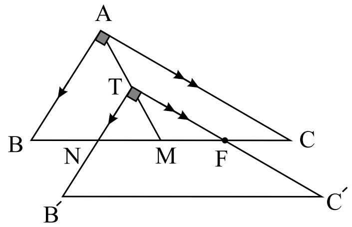


$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA}\ ,\ \overrightarrow{GB'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB}\ ,\ \overrightarrow{GC'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GC}$$

۳۴

گزینه ۱

$\overset{\triangle}{NTF} \sim \overset{\triangle}{ABC} \to$ نسبت مساحت $=$ (نسبت تشابه $)^۲ =$ (نسبت میانه‌های نظیر $)^۲$



$$\to \frac{S_{\overset{\triangle}{NFT}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{TM}{AM}\right)^۲ = \frac{۱}{۱۶} \to \frac{TM}{AM} = \frac{۱}{۴}$$

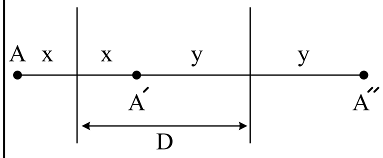
در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است. بنابراین:

$$\frac{TM}{\frac{BC}{۲}} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{BC=۸} \frac{TM}{۴} = \frac{۱}{۴} \to TM = ۱ \to AT = AM - TM = ۴ - ۱ = ۳$$

۳۵

گزینه ۱ دقت کنید پس از رسم $A''\overset{\Delta}{B''}C''$ متوجه می‌شویم که شیب اضلاع با شیب اضلاع ABC یکسان است، پس نمی‌تواند بازتاب باشد.

همچنین با توجه به شکل زیر، ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی و به فاصلهٔ D از یکدیگر یک انتقال برداری به اندازهٔ بردار $۲D$ می‌باشد.



$$AA'' = ۲(x + y)$$

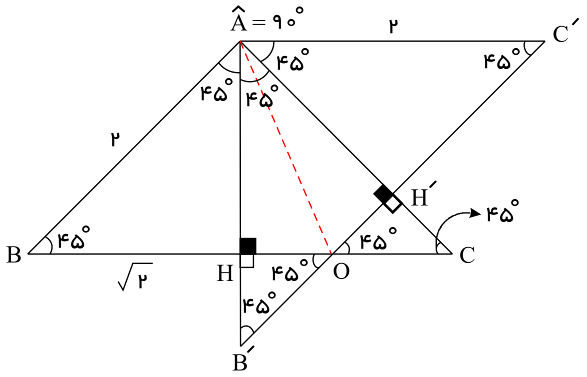
بنابراین، چون فاصلهٔ $d_۱$ و $d_۲$ برابر $۳cm$ است، پس: $AA'' = BB'' = CC'' = ۶$

۳۶

گزینه ۲ مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بوده و $AB = AC = ۲$. بنابراین داریم:

$$BC = \sqrt{۲}AB = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow BH = \frac{BC}{۲} = \sqrt{۲}$$

از آن‌جا که دوران تبدیلی طولپاست، داریم:



$$\begin{cases} AB' = AB = AC = AC' = ۲ \\ B'C' = BC \Rightarrow B'H' = BH = CH = C'H' = \sqrt{۲} \\ AH' = AH = \sqrt{AB^۲ - BH^۲} = \sqrt{۴ - ۲} = \sqrt{۲} \quad (۱) \end{cases}$$

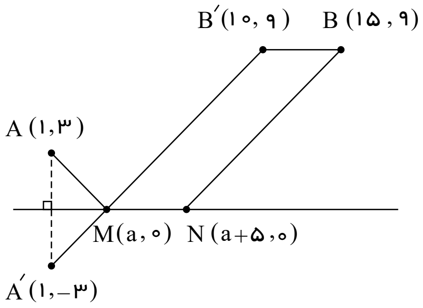
$$\Rightarrow OH = B'H = AB' - AH = ۲ - \sqrt{۲} \quad (۲)$$

اگر A را به O وصل کنیم دو مثلث $AH'O$ و AHO بنابر وتر و یک ضلع قائمه هم‌نهشت بوده و درنتیجه: $OH' = OH$.

$$\Rightarrow AB'C' \text{ و تصویرش } ABC \text{ سطح محصور بین مثلث} = S_{AHOH'} = ۲S_{\underset{AHO}{\Delta}} = ۲ \times \frac{۱}{۲}AH \cdot OH \overset{\text{طبق (۱),(۲)}}{=\!=\!=} \sqrt{۲}(۲ - \sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲} - ۲$$

۳۷

گزینه ۳ ابتدا نقطهٔ A را نسبت به محور xها بازتاب داده تا به نقطهٔ A' برسیم، سپس نقطهٔ B را با بردار $\overrightarrow{NM}$ انتقال می‌دهیم تا به نقطهٔ B' برسیم. داریم:



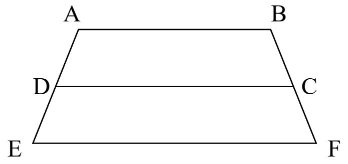
$$AMNB \text{ کمترین اندازهٔ خط شکسته} = AM + MN + NB = (AM + NB) + MN$$

$$= (A'M + MB') + MN = A'B' + MN = ۱۵ + ۵ = ۲۰$$

$$\text{توجه}: |A'B'| = \sqrt{(۱۰ - ۱)^۲ + (۹ - (-۳))^۲} = ۱۵$$

۳۸

گزینه ۴ دو پاره‌خط AD و DE همراستا و متجانس یکدیگرند. پس مرکز تجانس در امتداد آن‌هاست، در مورد دو پاره‌خط BC و CF نیز همین موضوع برقرار است، پس مرکز تجانس، نقطهٔ برخورد امتداد این دو ضلع است. از طرفی دو شکل متجانس همواره متشابه هستند. بنابراین:



$$\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{EF} \Rightarrow \frac{۴}{CD} = \frac{CD}{۹} \Rightarrow CD = ۶$$

حال با توجه به این که با این تجانس AB بر CD تصویر می‌شود، می‌توان نوشت:

$$K = \frac{CD}{AB} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

$H\hat{O}H' = \alpha + \beta = ۴۵^\circ \Rightarrow A\hat{O}A'' = ۲(\alpha + \beta) = ۲ \times ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$

$OA = OA' = OA'' = ۲ \Rightarrow AA'' = ۲\sqrt{۲}$

۴۰

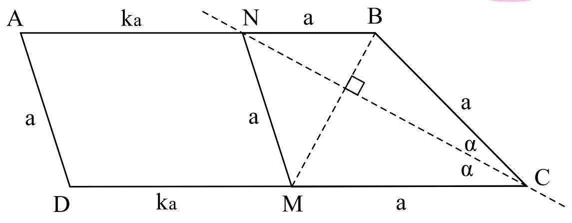
گزینه ۳ درواقع مثلث ACD، دوران یافته‌ی مثلث ABE به مرکز A و زاویه‌ی ۴۰° است. پس زاویه‌ی حاده‌ی بین BE و CD برابر ۴۰° است و داریم:

$\alpha = ۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ = ۱۴۰^\circ$

۴۱

گزینه ۳ مطابق شکل، بازتاب‌یافتهٔ نقطهٔ B نسبت به نیمساز CN نقطهٔ M است که روی ضلع CD قرار دارد. می‌دانیم $BCMN$ یک لوزی است. فرض کنیم:

$BC = BN = CM = MN = a$ و $AN = DM = ka$



طبق فرض داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ محیط } = ۲a + (۲k + ۲)a = (۲k + ۴)a \\ BCMN \text{ محیط } = ۴a \end{array}\right\} \rightarrow (۲k + ۴)a = ۲(۴a) \Rightarrow k = ۲$$

بنابراین $AB = ۳a$ و $AN = ۲a$ پس:

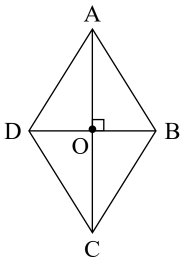
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BCMN}} = \frac{AB}{MC} = \frac{۳a}{a} = ۳$$

۴۲

گزینه ۳ می‌دانیم از به‌هم وصل کردن وسط اضلاع یک چهارضلعی محدب، یک چهارضلعی پدید می‌آید که مساحت آن نصف مساحت چهار ضلعی اولیه است.

در اینجا از به‌هم وصل کردن وسط اضلاع لوزی، یک مستطیل پدید می‌آید و داریم:

$$S_{\text{مستطیل}} = ۱۰ \Rightarrow S_{\text{لوزی } ABCD} = ۲ \times ۱۰ = ۲۰$$



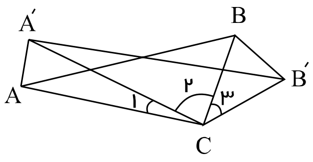
از طرفی، می‌دانیم تبدیل دوران، تبدیلی طولپاست (ایزومتری است) و در تبدیل دوران، مساحت شکل اولیه با مساحت دوران یافته، برابر است. به این‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$S_{\text{لوزی } A'B'C'D'} = S_{\text{لوزی } ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \cdot BD = ۲۰ \Rightarrow AC \cdot BD = ۴۰ \Rightarrow A'C' \times B'D' = ۴۰$$

۴۳

گزینه ۲

مطابق شکل در دوران به مرکز C و زاویهٔ دوران α، A به A' و B به B' دوران می‌یابد. داریم:



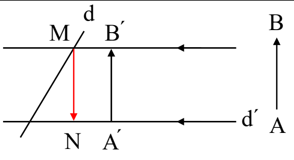
$A'C = AC \;,\; B'C = BC \;,\; B\hat{C}B' = A\hat{C}A' = \alpha \Rightarrow A\hat{C}B = A'\hat{C}B' = \theta$

در مثلث $A'B'C$ و ABC به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ θ متشابه‌اند. داریم:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{۱۰}{BB'} = \frac{۲۰}{۱۲} \Rightarrow BB' = ۶$$

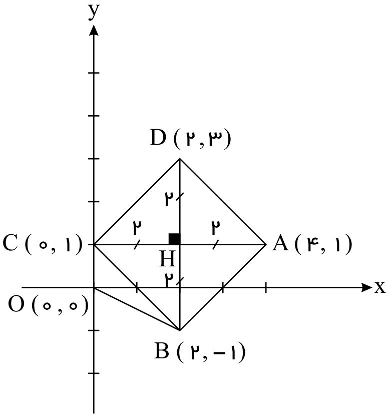
۴۴

گزینه ۲ مطابق شکل، یک نقطه از خط d' مثل A' را با بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم تا به نقطهٔ B' برسیم و از آنجا که خطی موازی d' رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ M قطع کند، حال نقطهٔ M را با بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ N واقع بر خط d' حاصل می‌شود. پاره‌خط MN همان پاره‌خطی است که دو سر آن روی دو خط متقاطع d و d' واقع است و موازی و مساوی AB نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی $MB'A'N$ متوازی‌الاضلاع است).



۴۵ **گزینه ۱** بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق است. بنابراین C روی محور yها قرار دارد و مختصات آن $(۰, ۱)$ می‌باشد.

چهارضلعی $ABCD$ مربع است. بنابراین اندازهٔ قطرهای آن برابرند و عمودمنصف یکدیگر می‌باشند و داریم:

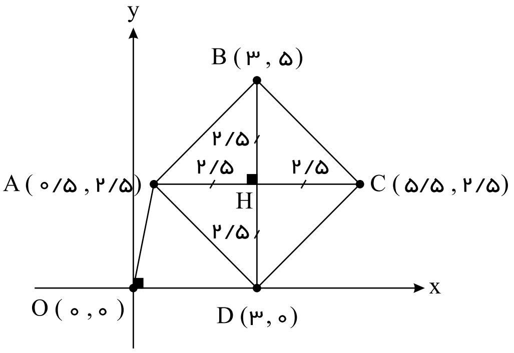


$$CH = AH = \frac{BD}{۲} = \frac{AC}{۲} = \frac{x_A - x_C}{۲} = \frac{۴ - ۰}{۲} = ۲$$

بازتاب نقطهٔ D نسبت به قطر AC نقطهٔ B می‌باشد که فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OB = \sqrt{(۲-۰)^۲ + (-۱-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

۴۶ **گزینه ۲** بازتاب قطر D نسبت به محور xها بر خودش منطبق است. بنابراین D روی محور x ها قرار دارد و مختصات آن $(۳, ۰)$ است.



چهارضلعی $ABCD$ مربع است بنابراین اندازه قطرهای آن برابرند و عمودمنصف یکدیگر هستند و داریم:

$$AH = HC = \frac{AC}{۲} = \frac{BD}{۲} = \frac{y_B - y_D}{۲} = \frac{۵ - ۰}{۲} = ۲٫۵$$

بازتاب نقطه C نسبت به قطر BD نقطه A است که فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{(۰٫۵-۰)^۲ + (۲٫۵-۰)^۲} = \sqrt{۰٫۲۵ + ۶٫۲۵} = \sqrt{۶٫۵}$$

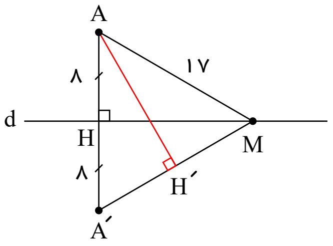
۴۷ **گزینه ۳** طبق فرض $AH = ۸$ و $AM = ۱۷$، پس در مثلث قائم‌الزاویه AHM با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$MH = \sqrt{۲۸۹ - ۶۴} = ۱۵$$

از آنجا که تبدیل بازتاب، ایزومتری است، پس $A'M = AM = ۱۷$. درنتیجه، خواهیم داشت:

$$S_{AMA'} = \frac{۱}{۲} AA' \cdot MH = \frac{۱}{۲} A'M \cdot AH'$$

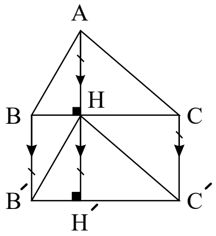
$$\Rightarrow ۱۶ \times ۱۵ = ۱۷ \times AH' \Rightarrow AH' = \frac{۲۴۰}{۱۷} \simeq ۱۴/۱$$



که این عدد به ۱۴ نزدیک‌تر است.

۴۸

گزینه ۲



$$\left.\begin{array}{l} BB' \overset{\parallel}{=} AH \rightarrow \text{است متوازی‌الاضلاع } ABB'H \rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABH}} = S_{\overset{\Delta}{BB'H}} \\ CC' \overset{\parallel}{=} AH \rightarrow \text{است متوازی‌الاضلاع } ACC'H \rightarrow S_{\overset{\Delta}{AHC}} = S_{\overset{\Delta}{HCC'}} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{جمع می‌کند}]{\text{طرفین دو تساوی را}} S_{\overset{\Delta}{ABH}} + S_{\overset{\Delta}{AHC}} = S_{\overset{\Delta}{BB'H}} + S_{\overset{\Delta}{HCC'}} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{BB'H}} + S_{\overset{\Delta}{HCC'}} \quad (۱)$$

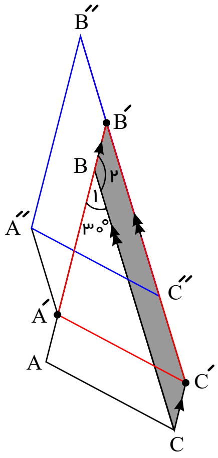
$$\text{انتقال طول‌پاست} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{B'HC'} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{B'HC'}} \quad (۲)$$

$$S_{ABB'C'C} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{BB'H}} + S_{\overset{\Delta}{HCC'}} + S_{\overset{\Delta}{B'HC'}} \xrightarrow{(۱),(۲)}$$

$$S_{ABB'C'C} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ABC}} + S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۳S_{ABC} = ۳ \times ۲۰ = ۶۰$$

۴۹

گزینه ۴



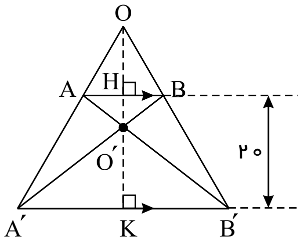
$$\left.\begin{array}{r} \text{انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.} \rightarrow BB' \| CC' \\ BC \| B'C' \end{array}\right\} \rightarrow \text{.است متوازی‌الاضلاع } BB'CC'$$

$$\hat{B}_۱ = ۳۰^\circ \rightarrow \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵۰^\circ \rightarrow C\hat{C'}C'' = ۱۵۰^\circ$$

۵۰

گزینه ۳

مطابق شکل در تجانس مستقیم، مرکز تجانس O و در تجانس معکوس مرکز تجانس O' است. می‌خواهیم طول OO' را بیابیم، داریم:



$\overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{OA'B'} : \frac{OH}{OK} = \frac{۱۰}{۱۵} \Rightarrow \frac{OH}{OH+۲۰} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳OH = ۲OH + ۴۰ \Rightarrow OH = ۴۰$

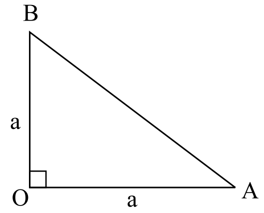
$\overset{\triangle}{O'AB} \sim \overset{\triangle}{OA'B'} \Rightarrow \frac{O'H}{O'K} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{O'H}{۲۰ - O'H} = \frac{۲}{۳}$

$\Rightarrow ۳O'H = ۴۰ - ۲O'H \Rightarrow O'H = ۸ \Rightarrow OO' = ۴۰ + ۸ = ۴۸$

۵۱

گزینه ۴ از فرض نتیجه می‌گیریم که ترکیب ۴ دوران به مرکز O و زاویهٔ θ یک دوران ۶۰° است، پس $\theta = ۱۵^\circ$.

حال اگر ۶ بار دوران ۱۵° را انجام دهیم به یک دوران ۹۰° می‌رسیم. داریم:



$OA = OB = a \Rightarrow AB = a\sqrt{۲}$

$\Rightarrow \frac{AB}{AA'} = \frac{\sqrt{۲}a}{a} = \sqrt{۲}$

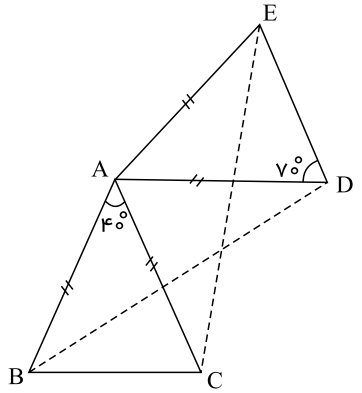
۵۲

گزینه ۲ دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و ADE هم‌نهشت هستند.

$B\hat{A}C = ۴۰^\circ \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = ۷۰^\circ$

$A\hat{D}E = A\hat{E}D = ۷۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}E = ۴۰^\circ$

پس اگر دورانی به مرکز A و زاویهٔ ۴۰° در نظر بگیریم، پاره‌خط BD به روی پاره‌خط CE تصویر می‌شود، یعنی داریم:



$R(D) = E$ و $R(B) = C \Rightarrow R(BD) = CE$

پس زاویهٔ بین BD و CE برابر ۴۰° است.

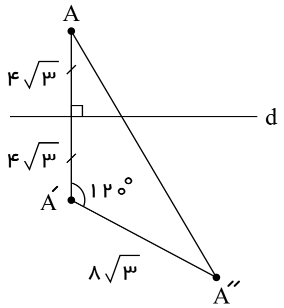
۵۳

گزینه ۳ روش اول: مطابق شکل، نقطهٔ A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d بوده و نقطهٔ A'' دوران‌یافتهٔ نقطهٔ A نسبت به مرکز دوران A' و به اندازهٔ ۱۲۰° در جهت ساعتگرد است. کافی است رابطهٔ کسینوس‌ها را در مثلث $AA'A''$ بنویسیم:

$AA''^۲ = AA'^۲ + A'A''^۲ - ۲AA' \cdot A'A'' \cdot \cos ۱۲۰^\circ$

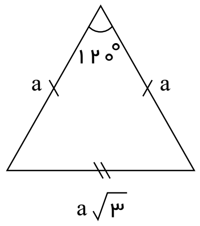
$\Rightarrow AA''^۲ = (۸\sqrt{۳})^۲ + (۸\sqrt{۳})^۲ - ۲ \times ۸\sqrt{۳} \times ۸\sqrt{۳} \times (-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow AA''^۲ = ۱۹۲ + ۱۹۲ + ۱۹۲ = ۵۷۶$

$\Rightarrow AA'' = ۲۴$



روش دوم: مطابق شکل مقابل، در مثلث متساوی‌الساقین به ساق a و زاویهٔ رأس ۱۲۰°، قاعده برابر است با $a\sqrt{۳}$.

در اینجا $a = ۸\sqrt{۳}$؛ پس جواب برابر است با: $a\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۲۴$

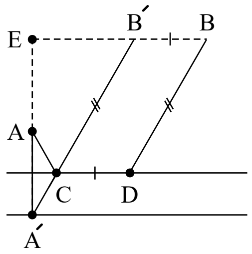


۵۴ **گزینه ۳** در تبدیل تجانس، مرکز تجانس نقطهٔ ثابت تجانس است. بنابراین، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مرکز تجانس است. لذا مرکز دو دایره برهم منطبق بوده و درنتیجه، مثلث باید متساوی‌الاضلاع باشد و نسبت تجانس k برابر است با:

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر $R = \frac{۲}{۳}h = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برابر $r = \frac{۱}{۳}h = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ است، پس $R = ۲r$ و نسبت تجانس این دو دایره برابر می‌شود با:

$$k = \frac{r}{R} \Rightarrow k = \frac{r}{۲r} = \frac{۱}{۲}$$

۵۵ **گزینه ۳**



$\overset{\Delta}{AEB}$ قضیهٔ فیثاغورس : $BE = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = ۸$

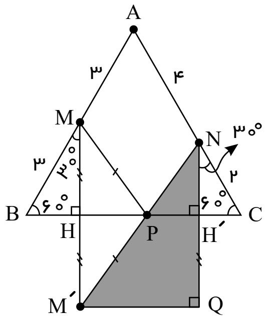
$EB' = EB - BB' = ۸ - ۳ = ۵$

$\overset{\Delta}{A'EB'}$ قضیهٔ فیثاغورس : $A'B' = \sqrt{۱۲^۲ + ۵^۲} = ۱۳$

$ACDB$ طول مسیر $= AC + DB + CD = (A'C + CB') + CD = A'B' + CD = ۱۳ + ۳ = ۱۶$

۵۶ **گزینه ۴** برای یافتن کمترین مقدار $MP + NP$ (طبق مسئله هرون)، ابتدا بازتاب M نسبت‌به BC را به‌دست می‌آوریم (M'). سپس این نقطه را به N وصل می‌کنیم. محل برخورد MN' و BCهمان نقطهٔ مورد نظر (P) است و داریم:

می‌دانیم: در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ ضلع روبه رو به زاویه ۶۰° برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول وتر است و اندازهٔ ضلع روبه رو به زاویه ۳۰° برابر $\frac{۱}{۲}$ طول وتر است.



$\overset{\Delta}{BMH} : ۶۰^\circ$ روبه رو به $MH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۳ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \rightarrow M'H = QH' = MH = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

$\overset{\Delta}{CNH'} : ۶۰^\circ$ روبه رو به $NH' = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲ = \sqrt{۳}$

$\overset{\Delta}{BMH} : ۳۰^\circ$ روبه رو به $BH = \frac{۱}{۲} \times ۳ = \frac{۳}{۲}$

$\overset{\Delta}{CNH'} : ۳۰^\circ$ روبه رو به $CH' = \frac{۱}{۲} \times ۲ = ۱$

$HH' = BC - (BH + CH') = ۶ - (\frac{۳}{۲} + ۱) = \frac{۷}{۲} \rightarrow M'Q = HH' = \frac{۷}{۲}$

$QN = NH' + QH' = \sqrt{۳} + \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$

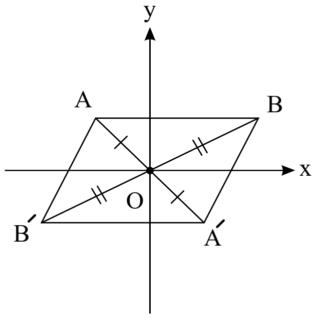
$\overset{\Delta}{NQM'}$ قضیه فیثاغورس در : $M'N = \sqrt{M'Q^۲ + QN^۲} = \sqrt{(\frac{۷}{۲})^۲ + (\frac{۵\sqrt{۳}}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۴۹}{۴} + \frac{۷۵}{۴}} = \sqrt{۳۱}$

$MP + NP = M'P + NP = M'N = \sqrt{۳۱}$

۵۷

گزینه ۴

$\left.\begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \end{array}\right\} \rightarrow$ چهار ضلعی $ABA'B'$ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهایش منصفند. $\rightarrow \begin{array}{l} AB || A'B' \\ AB = A'B' \end{array}$

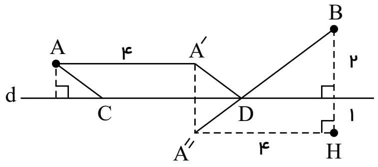


در نتیجه:

T یک تبدیل طولپا است که شیب خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

۵۸

گزینه ۳ نقطهٔ A را تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ موازی خط d (به سمت راست) و به طول ۴ بر نقطه A' تصویر می‌کنیم. قرینهٔ A' را نسبت به خط d نقطهٔ A'' و نقطهٔ تلاقی خط d و پاره‌خط $A''B$ را نقطهٔ D می‌نامیم.



سپس CD را به طول ۴ روی خط d جدا می‌کنیم. مسیر $ACDB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. داریم:

$A''B^۲ = BH^۲ + A''H^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow A''B = ۵ \Rightarrow A''D + BD = ۵$

$\xrightarrow[\text{طولپایی بازتاب}]{A'D = A''D} A'D + BD = ۵$

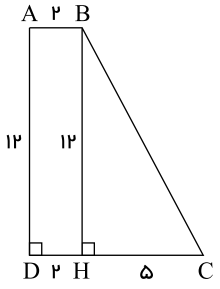
$\xrightarrow[\text{طولپایی انتقال}]{AC = A'D} AC + BD = ۵$

طول مسیر $ACDB = AC + CD + DB = (AC + BD) + CD = ۵ + ۴ = ۹$

۵۹

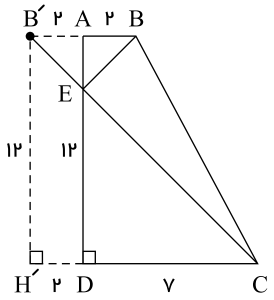
گزینه ۳

مطابق شکل روبه‌رو، طول ساق مایل BC را از طریق قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:



$BC^۲ = BH^۲ + HC^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۳$

برای به‌دست آوردن کمترین مقدار $BE + EC$، طبق مسأله هرون، کافی است قرینهٔ B را نسبت به ساق قائم AD پیدا کرده و فاصلهٔ آن را از رأس C بیابیم:



$B'\overset{\Delta}{H'}C: B'C^{۲} = B'H'^{۲} + H'C^{۲} = ۱۲^{۲} + ۹^{۲} = ۲۲۵ \Rightarrow B'C = ۱۵$ (قضیهٔ فیثاغورس)

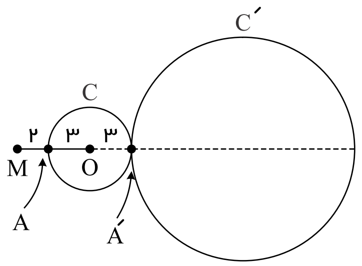
پس کمترین مقدار محیط مثلث BEC برابر می‌شود با:

$min(P_{\overset{\Delta}{BEC}}) = BC + B'C = ۱۳ + ۱۵ = ۲۸$

۶۰

گزینه ۲

چون C و C' فقط یک نقطهٔ مشترک دارند، پس مماس خارج‌اند و با توجه به نسبت تجانس $k > ۱$، شکل زیر را برای آن رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، نقطهٔ A (نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ C) به نقطهٔ A' (نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ C') که همان نقطهٔ تماس دو دایره است، تصویر می‌شود. پس نسبت تجانس برابر می‌شود با:

$k = \frac{MA'}{MA} = \frac{۸}{۲} = ۴$

و درنتیجه، شعاع دایرهٔ C' برابر است با:

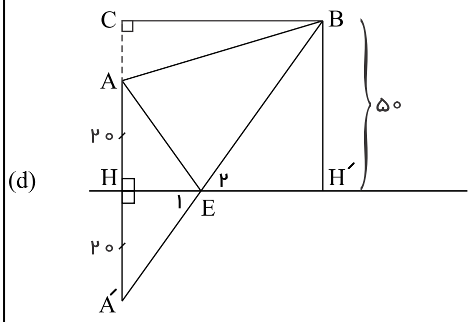
$R' = kR = ۴ \times ۳ = ۱۲$

پس طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج C و C' برابر می‌شود با:

$۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۳ \times ۱۲} = ۲ \times ۶ = ۱۲$

۶۱

گزینه ۴



بازتاب نقطهٔ A را نسبت به d به‌دست آورده و آن را A' می‌نامیم.

A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در E قطع کند، داریم:

$AH = HA'$ (AA' عمودمنصف d)

$AE + EB = A'E + EB = A'B$

از نقطهٔ B عمودی بر راستای AH رسم می‌کنیم. در این‌صورت، داریم:

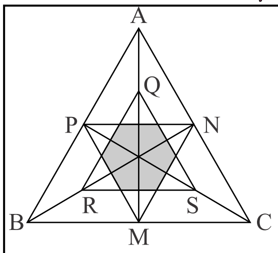
$AC = ۵۰ - ۲۰ = ۳۰$

$A\overset{\Delta}{B}C: BC^{۲} = AB^{۲} - AC^{۲} = ۵۰^{۲} - ۳۰^{۲} = ۱۶۰۰ \Rightarrow BC = ۴۰$

$A'\overset{\Delta}{B}C: A'B^{۲} = A'C^{۲} + BC^{۲} = ۷۰^{۲} + ۴۰^{۲} = ۴۹۰۰ + ۱۶۰۰ = ۶۵۰۰ \Rightarrow A'B \simeq ۸۰/۶$

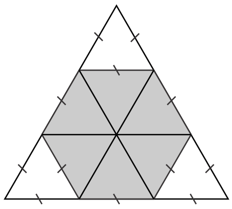
۶۲

گزینه ۴ اگر مثلث ABC را در یک تجانس به مرکز G و نسبت $-\frac{۱}{۲}$ تصویر کنیم، مثلث MNP حاصل می‌شود. همچنین اگر ABC را در یک تجانس به مرکز G و نسبت $\frac{۱}{۲}$ تصویر کنیم، مثلث QRS حاصل می‌شود. مطابق شکل، از اشتراک این دو مثلث، یک شش‌ضلعی منتظم حاصل می‌شود که مساحت این شش‌ضلعی منتظم $\frac{۲}{۳}$ مساحت هر یک از مثلث‌های MNP یا QRS است.



$$NP||BC \xrightarrow[\overset{\triangle}{MNP}\cong \overset{\triangle}{APN}]{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{MNP} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{APN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = (\frac{AP}{AB})^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$$

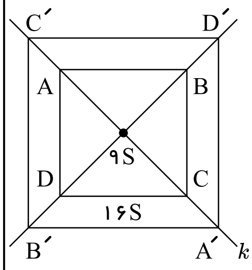
$$S_{\text{رنگی}} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۴} S_{ABC} = \frac{۱}{۶} S_{ABC}$$



تذکر: مطابق شکل، مساحت شش‌ضلعی منتظم شکل مقابل نسبت به مساحت کل مثلث $\frac{۲}{۳}$ است.

۶۳ **گزینه ۴**

مطابق شکل و فرض سؤال، $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ در این تجانس است، داریم:



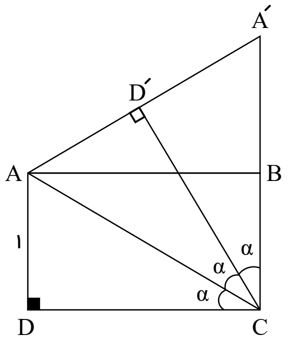
$$k = -\frac{۵}{۳} \Rightarrow k^۲ = \frac{۲۵}{۹} = \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} \Rightarrow \begin{cases} S_{A'B'C'D'} = ۲۵S \\ S_{ABCD} = ۹S \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} ۱۶S = ۱۶ \Rightarrow S = ۱$$

$$\begin{cases} S_{A'B'C'D'} = ۲۵S = ۲۵ \times ۱ = ۲۵ \Rightarrow A'B' = ۵ \\ S_{ABCD} = ۹S = ۹ \times ۱ = ۹ \Rightarrow AB = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط } A'B'C'D' - \text{محیط } ABCD = ۴ \times ۵ - ۴ \times ۳ = ۸$$

۶۴ **گزینه ۲** بازتاب نسبت به خط، تبدیلی طولپاست و تحت آن اندازهٔ زاویه‌ها ثابت باقی می‌ماند.

مطابق شکل، CD' بازتاب CD نسبت به AC است، بنابراین $D\hat{C}A = A\hat{C}D' = \alpha$.



همچنین CA' بازتاب CA نسبت به CD' است، بنابراین:

$$D'\hat{C}A' = A\hat{C}D' = \alpha$$

درنتیجه:

$$۳\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

حال در مثلث‌قائم‌الزاویه ADC، ضلع AD روبه‌روی زاویهٔ ۳۰° است، پس نصف وتر است. بنابراین:

$$AC = ۲ \Rightarrow DC = \sqrt{AC^۲ - AD^۲} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AD \times DC = ۱ \times \sqrt{۳} = \sqrt{۳}$$

۶۵ **گزینه ۳** از آنجا که ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است، داریم:

ضلع مثلث جدید در تجانس اول (ضلع مثلث مجانس): $h=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=۲\Rightarrow a=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

$$\Rightarrow k=\frac{\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}}{۴\sqrt{۳}}\Rightarrow k=\frac{۱}{۳}\Rightarrow k=\frac{\text{ضلع مربع جدید}}{\text{ضلع مربع اولیه}}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{\text{ضلع مربع جدید}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\text{ضلع مربع جدید}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}\Rightarrow S_{\text{مربع جدید}}=(\frac{\sqrt{۳}}{۶})^{۲}=\frac{۱}{۱۲}$$

۶۶

گزینه ۲

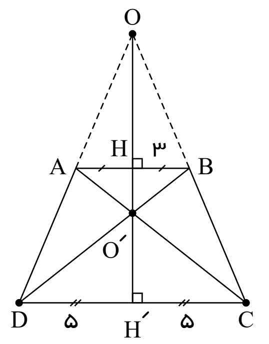
مطابق شکل زیر، نقاط O و O' مراکز تجانس مستقیم و معکوس دو قاعدهٔ ذوزنقه هستند، داریم:

$$O'\overset{\triangle}{A}B\sim O'\overset{\triangle}{C}D\Rightarrow\frac{O'H}{O'H'}=\frac{AB}{CD}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow\frac{O'H}{O'H'}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}O'H=۳k\\O'H'=۵k\end{cases}\xrightarrow{HH'=۱۲}۸k=۱۲\Rightarrow k=\frac{۳}{۲}\Rightarrow O'H=\frac{۹}{۲}\quad(۱)$$

$$O\overset{\triangle}{A}B\sim O\overset{\triangle}{C}D\Rightarrow\frac{OH}{OH'}=\frac{AB}{CD}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow\frac{OH}{OH'}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{OH}{OH+۱۲}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow OH=۱۸\quad(۲)$$

$$\Rightarrow OO'=OH+O'H\xrightarrow{(۲),(۱)}OO'=۱۸+\frac{۹}{۲}=\frac{۴۵}{۲}=۲۲/۵$$

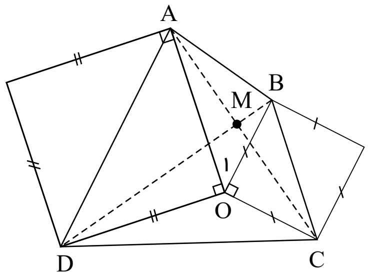


۶۷

گزینه ۴ دو مثلث AOC و BOD بنابر (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند. زیرا:

$$\begin{cases}A\hat{O}C=B\hat{O}D=۹۰^\circ+\hat{O}_۱\\OA=OD\\OB=OC\end{cases}\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}}AC=BD\quad(۱)$$

$$\text{دوران به مرکز } O\begin{cases}D\xrightarrow[\text{ساعتگرد}]{\text{دوران }۹۰^\circ}A\\B\xrightarrow[\text{ساعتگرد}]{\text{دوران }۹۰^\circ}C\end{cases}\Rightarrow BD\xrightarrow[\text{ساعتگرد}]{\text{دوران }۹۰^\circ}AC$$



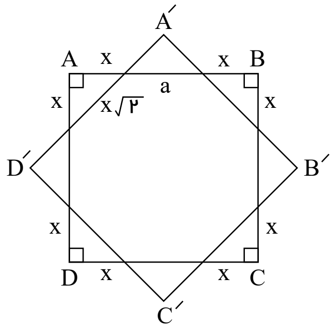
از آنجا که زاویهٔ دوران برابر زاویهٔ بین دو خط دوران‌یافته است، نتیجه می‌شود: $A\hat{M}D=۹۰^\circ\quad(۲)$.

بنابراین طبق روابط (۱) و (۲) در گزینهٔ (۴) صحیح است.

۶۸

گزینه ۲

اگر مطابق شکل مربع $ABCD$ را حول مرکز تقارن آن به اندازهٔ ۴۵° دوران دهیم، مربع $A'B'C'D'$ تشکیل می‌شود و سطح محصور بین این دو مربع، یک هشت ضلعی منتظم است. فرض می‌کنیم ضلع هشت ضلعی منتظم a باشد، بنابراین داریم:



$$\begin{cases}\text{طول ضلع مربع}=۲x+a\\a=x\sqrt{۲}\end{cases}\Rightarrow\text{طول ضلع مربع}=۲x+x\sqrt{۲}=۴+۲\sqrt{۲}\Rightarrow x=۲\Rightarrow S_{\text{۸ ضلعی}}=S_{ABCD}-۴S_{\triangle\text{قائم‌الزاویه}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{۸ ضلعی}}=(۴+۲\sqrt{۲})^{۲}-۴\times\frac{۱}{۲}x^{۲}\xrightarrow{x=۲}S_{\text{۸ ضلعی}}=۱۶+۱۶\sqrt{۲}$$

۶۹

گزینه ۲ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور xها، نقطهٔ $A'(-3,-13)$ است و B نقطهٔ تلاقی خط $A'C$ با محور xها می‌باشد، بنابراین داریم:

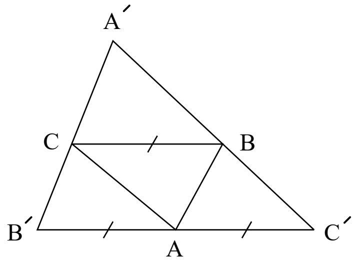
$$m_{CA'} = \frac{-13-3}{-3-5} = \frac{16}{8} = 2$$

$$y-3 = 2(x-5) \Rightarrow y = 2x-7 \xrightarrow{y=0} 2x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

۷۰

گزینه ۲ می‌دانیم تبدیل تجانس، تبدیلی است که شیب خطوط را حفظ می‌کند.

طبق فرض، نوع تجانس، معکوس بوده و مثلث $A'B'C'$ بر مثلث ABC محیط شده است. بنابراین، طبق شکل داریم:



$$\begin{cases} BC \| AB' \\ B'C \| AB \end{cases} \Rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع } ABCB' \Rightarrow AB' = BC \quad (1)$$

$$\begin{cases} BC \| AC' \\ BC' \| AC \end{cases} \Rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع } ACBC' \Rightarrow AC' = BC \quad (2)$$

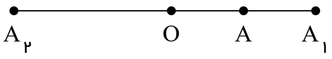
$$(1),(2) \Rightarrow B'C' = 2BC$$

به همین‌ترتیب، نتیجه می‌شود $A'C' = 2AC$ و $A'B' = 2AB$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = 2 \xrightarrow{\text{تجانس معکوس}} k=-2$$

۷۱

گزینه ۲ بیشترین فاصله نقاط A_1 و A_2 در صورتی ایجاد می‌شود که یکی از دو تجانس مستقیم و دیگری معکوس باشد. با فرض $K_1 > 0$ و $K_2 < 0$ داریم:



$$K_1^2 = 4 \xrightarrow{K_1>0} K_1 = 2 \quad , \quad K_2^2 = \frac{25}{4} \xrightarrow{K_2<0} K_2 = -\frac{5}{2}$$

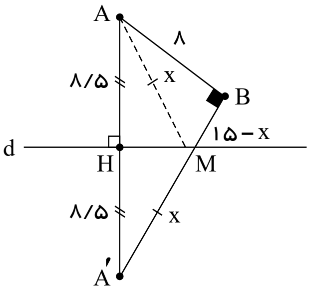
$$A_1A_2 = OA_1 + OA_2 = |K_1| \times OA + |K_2| \times OA = 2\times 4 + \frac{5}{2} \times 4 = 18$$

توجه: در صورتی که $K_1 < 0$ و $K_2 > 0$ باشد، نیز همین مقدار برای A_1A_2 حاصل می‌شود.

۷۲

گزینه ۲

باتوجه به شکل زیر داریم:



$$MA + MB = A'B = 15$$

$$15^2 + 8^2 = 17^2 \rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

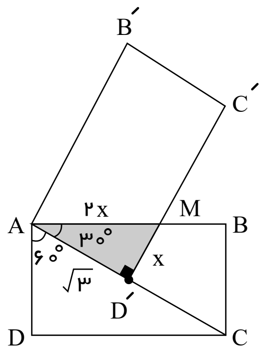
قضیهٔ فیثاغورس در: $MA = MA' = x \rightarrow MB = 15 - x$

$$\overset{\triangle}{AMB} = MB^2 + AB^2 = MA^2 \rightarrow (15-x)^2 + 8^2 = x^2 \rightarrow 225 - 30x + x^2 + 64 = x^2$$

$$\rightarrow 30x = 289 \rightarrow x = \frac{289}{30}$$

۷۳

گزینه ۱



دوران طولپاست $\rightarrow AD' = AD = BC = \sqrt{3}\,,\ \overset{\triangle}{AMD'}$: 30° روبه‌رو $MD' = \frac{1}{2}AM \rightarrow \begin{cases} D'M = x \\ AM = 2x \end{cases}$

$\overset{\triangle}{AMD'}$ قضیهٔ فیثاغورس در : $AM^2 = AD'^2 + MD'^2 \rightarrow (2x)^2 = (\sqrt{3})^2 + x^2 \rightarrow 4x^2 = 3 + x^2 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1$

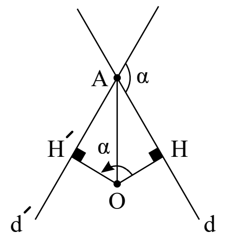
$$S_{\overset{\triangle}{AMD'}} = \frac{1}{2}AD' \cdot MD' = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۳

۷۵ گزینه ۳ این سؤال در دو حالت قابل بررسی است:

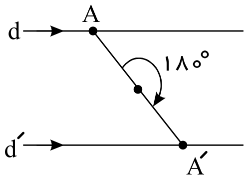
حالت اول: d و d' با زاویهٔ α متقاطع باشند.

در این حالت هر نقطه مانند O روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط، مرکز دورانی با زاویهٔ α است که در آن d' تصویر خط d می‌باشد.

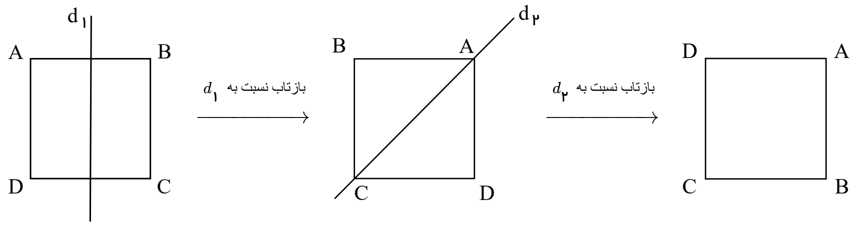


حالت دوم: d و d' موازی باشند.

در این حالت d' در بی‌شمار دوران با زاویهٔ 180° تصویر خط d است که مرکز این دوران‌ها روی خطی موازی و به فاصلهٔ مساوی از خطوط d و d' قرار دارند.



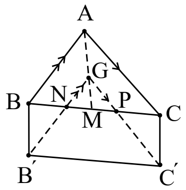
۷۶ گزینه ۳



با توجه به شکل‌های بالا مربع به اندازهٔ دو برابر زاویهٔ بین محور بازتاب متقاطع یعنی 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران یافته است، بنابراین نقطهٔ ثابت تبدیل مرکز دوران (محل برخورد خطوط d_1 و d_2) است.

۷۷ گزینه ۳

مطابق شکل، $GB'C'$ انتقال یافتهٔ ABC با بردار $\overrightarrow{AG}$ می‌باشد. داریم:

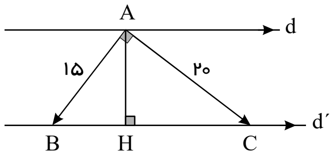


$$\begin{cases} PG \| AC \Rightarrow \frac{PG}{AC} = \frac{GM}{AM} = \frac{PM}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow PG = \frac{1}{3}AC \\ GN \| AB \Rightarrow \frac{NG}{AB} = \frac{GM}{AM} = \frac{MN}{BM} = \frac{1}{3} \Rightarrow NG = \frac{1}{3}AB \\ N\hat{G}P = B\hat{A}C \end{cases}$$

پس دو مثلث NGP و ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه به آن‌ها $\frac{1}{3}$ است. پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{GNP}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$$

۷۸ گزینه ۳



برای یافتن AH داریم:

$$BC^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow BC = 25 \quad , \quad AH = \frac{AB \times AC}{BC} \Rightarrow AH = \frac{15 \times 20}{25} = 12$$

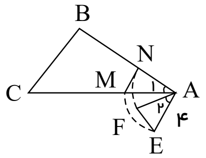
گزینه ۴

$HK = AA' = ۲\ ,\ BH = B'K = \dfrac{۸-۲}{۲} = ۳ \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}H : h^{۲} = ۵^{۲} - ۳^{۲} = ۴^{۲} \Rightarrow h = ۴$

$S_{ABB'A'} = \dfrac{(۸+۲)\times ۴}{۲} = ۲۰$

۸۱

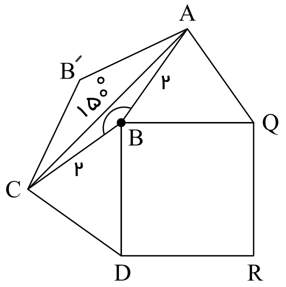
گزینه ۳ دو مثلث متشابه‌اند، زیرا $\dfrac{۱}{۳} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB} = \dfrac{EF}{BC}$. بنابراین $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $C\hat{A}E = B\hat{A}F = \alpha$. به این ترتیب، اگر دو نقطه‌ی E و F را حول مرکز A به زاویه‌ی ثابت α دوران دهیم، دو نقطه‌ی M و N به‌ترتیب منطبق بر دو ضلع AC و AB به‌دست می‌آید که مثلث AMN تصویر مثلث AEF در این دوران است. از طرفی دیگر همین مثلث، تصویر مثلث ABC در یک تجانس به مرکز A و به نسبت $\dfrac{۱}{۳} = \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AM}{AC}$ نیز هست.



۸۲

گزینه ۳

مطابق شکل، کافی است بازتاب نقطهٔ B را نسبت به پاره‌خط AC به‌دست آوریم. در این‌صورت داریم:



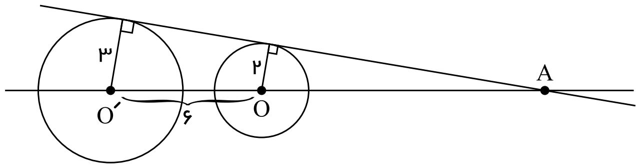
$A\hat{B}C = ۳۶۰^\circ - ۹۰^\circ - ۲\times ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ$

$S_{\text{اضافه شده}} = ۲ \times \dfrac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲\underbrace{\sin ۱۵۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}} = ۲$

۸۳

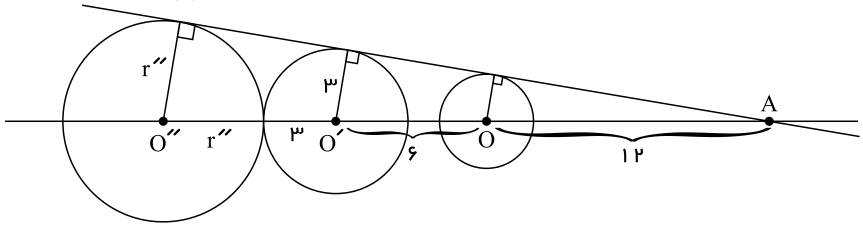
گزینه ۳

مرکز تجانس مستقیم دو دایره، نقطهٔ تقاطع خط‌المرکزین دو دایره و مماس مشترک خارجی آنهاست. با توجه به شکل و با استفاده از قضیهٔ تالس خواهیم داشت:



$\dfrac{OA}{O'A} = \dfrac{۲}{۳} \Rightarrow \dfrac{OA}{OA+۶} = \dfrac{۲}{۳} \Rightarrow ۳OA = ۲OA + ۱۲ \Rightarrow OA = ۱۲$

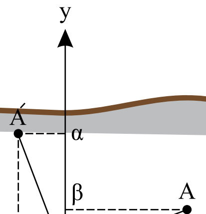
مرکز دایرهٔ مورد نظر را O'' می‌گیریم. مطابق شکل زیر داریم:



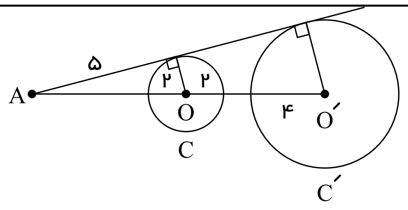
$\dfrac{O'A}{O''A} = \dfrac{۳}{r''} \Rightarrow \dfrac{۱۸}{۲۱+r''} = \dfrac{۳}{r''} \Rightarrow ۳r'' + ۶۳ = ۱۸r'' \Rightarrow ۱۵r'' = ۶۳ \Rightarrow r'' = \dfrac{۲۱}{۵} = ۴/۲$

گزینه ۳

مطابق شکل، نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ تحت دوران ۹۰° حول مبدأ مختصات به نقطهٔ $A'(-\beta,\alpha)$ تصویر می‌شود. لذا داریم:



$$\begin{cases} R' = kR = ۲ \times ۲ = ۴ \\ AO' = k \cdot AO = ۲ \times ۷ = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow OO' = AO' - AO = ۱۴ - ۷ = ۷$$



درنتیجه، دو دایره متخارج بوده و طول مماس مشترک داخلی آنها برابر است با:

$$\sqrt{OO'^۲ - (R + R')^۲} = \sqrt{۴۹ - ۳۶} = \sqrt{۱۳}$$

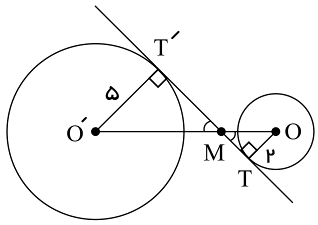
۸۷

گزینه ۲ نخست وضعیت دو دایره را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} OO' = ۸ \\ R = ۲ \\ R' = ۵ \end{cases} \Rightarrow OO' > R + R' \Rightarrow$$ دو دایره متخارج هستند.

مرکز تجانس معکوس دو دایرهٔ متخارج، نقطهٔ همرسی خط‌المرکزین با مماس مشترک داخلی دو دایره است (M). بنابراین، داریم:

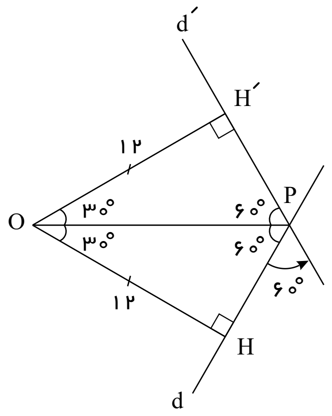
$$\frac{O'M}{OM} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{OO' - OM}{OM} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۸ - OM}{OM} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow ۱۶ - ۲OM = ۵OM \Rightarrow OM = \frac{۱۶}{۷}$$



۸۸

گزینه ۱

مطابق شکل با دوران خط d حول مرکز دوران O و به اندازهٔ ۶۰°، خط d' به‌دست می‌آید. در مثلث OHP، ضلع OH روبه‌روی زاویهٔ ۶۰° بوده، بنابراین داریم:



$$OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OP \Rightarrow ۱۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OP \Rightarrow OP = \frac{۲۴}{\sqrt{۳}} = ۸\sqrt{۳}$$

تذکر: از آنجا که تبدیل دوران، تبدیلی طولپاست $(OH' = OH)$، دو مثلث قائم‌الزاویه شکل فوق بنابر تساوی وتر و یک ضلع قائمه هم‌نهشت‌اند.

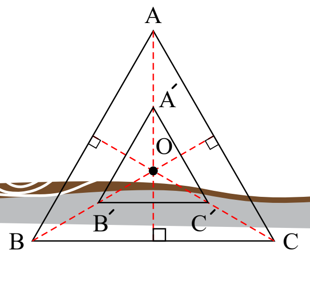
۸۹

گزینه ۳ طبق فرض و شکل زیر داریم:

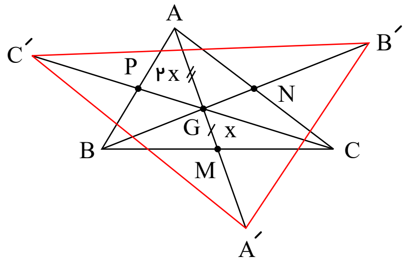
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{۱}{۳}$$

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند و نسبت تشابه $k = \frac{۱}{۳}$ بوده، بنابراین نسبت مساحت‌ها برابر است با:

$$\frac{S'}{S} = k^۲ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow S' = \frac{۱}{۹}S$$



$A'M \xlongequal{\text{فرض مسئله}} \frac{۳}{۴}AM \Rightarrow A'M = \frac{۳}{۴} \times ۳x = \frac{۹}{۴}x$



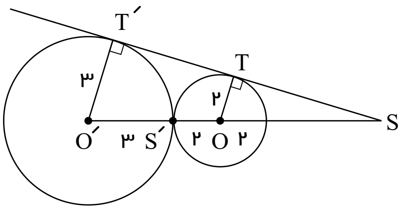
A' مجانس A نسبت به مرکز تجانس G است و A و A' در دو طرف مرکز تجانس G قرار دارند، پس تجانس معکوس بوده و ضریب تجانس k، منفی است.

حال طبق تعریف تجانس داریم:

$$\begin{cases} |k| = \dfrac{GA'}{GA} = \dfrac{\frac{۱۳}{۴}x}{۲x} = \dfrac{۱۳}{۸} \Rightarrow k = -\dfrac{۱۳}{۸} \\ GA' = GM + A'M = x + \dfrac{۹}{۴}x = \dfrac{۱۳}{۴}x \end{cases}$$

۹۳ **گزینه ۲** مراکز تجانس S و S' روی خط‌المرکزین و یا امتداد آن قرار دارند. برای محاسبهٔ SS' داریم:

$$OT \| O'T' \Rightarrow \frac{SO}{SO'} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases} SO = \frac{۲}{۳}SO' \Rightarrow OO' = \frac{۱}{۳}SO' \xrightarrow{OO'=۵} \begin{cases} SO' = ۱۵ \\ SO = ۱۰ \end{cases} \\ SS' = SO + OS' = ۱۰ + ۲ = ۱۲ \end{cases}$$



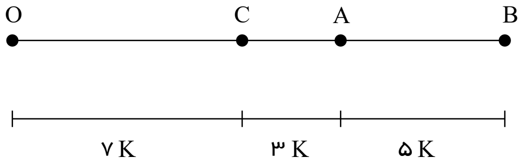
۹۴ **گزینه ۱**

$\frac{OB}{OA} = \frac{۳}{۲} \rightarrow OB = ۱۵K$ و $OA = ۱۰K \rightarrow AB = OB - OA$

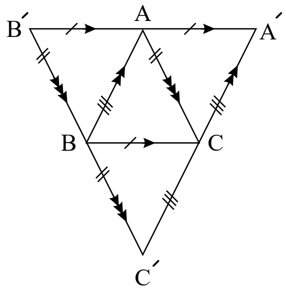
$= ۱۵K - ۱۰K = ۵K$

$\frac{AC}{AB} = \frac{۳}{۵} \rightarrow \frac{AC}{۵K} = \frac{۳}{۵} \rightarrow AC = ۳K$

$\frac{BC}{OC} = \frac{۸K}{۷K} = \frac{۸}{۷}$



۹۵ **گزینه ۳**



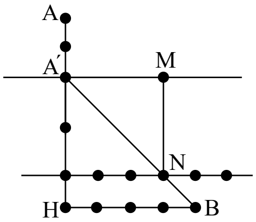
$$\begin{cases} AA'CB \text{ متوازی‌الاضلاع است} \rightarrow \begin{cases} AA' = BC \rightarrow \text{انتقال} \\ AA' \| BC \rightarrow \text{انتقال شیب خط را ثابت نگه می‌دارد.} \end{cases} \\ ACBB' \text{ متوازی‌الاضلاع است} \rightarrow \begin{cases} BB' = AC \rightarrow \text{انتقال} \\ BB' \| AC \rightarrow \text{انتقال شیب خط را ثابت نگه می‌دارد.} \end{cases} \end{cases}$$

گزینه ۲

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

۹۸ **گزینه ۳**

مطابق مطالب کتاب درسی نقطهٔ A را با بردار ۲ انتقال می‌دهیم تا A' بدست آید. محل تلاقی $A'B$ با رودخانهٔ N و پل مورد نظر MN می‌باشد. کوتاه‌ترین مسیر $AMNB$ است.

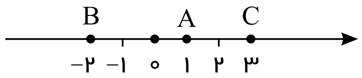


$$AMNB = AM + MN + NB = A'N + NB + MN = A'B + MN$$

$$MN = ۲\ ,\ A'B^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow A'B = ۵ \Rightarrow AMNB = ۷$$

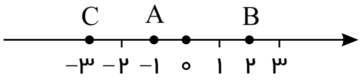
۹۹ **گزینه ۲** از آنجا که در تجانس به مرکز A، نوع تجانس انقباضی و معکوس است، پس اولاً B و C در دو طرف A قرار دارند و ثانیاً نسبت تجانس کمتر از ۱ می‌باشد. داریم:

حالت اول:



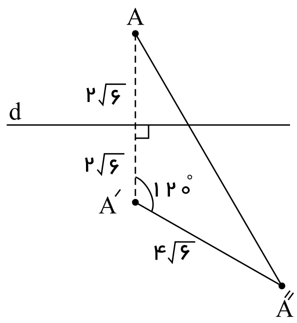
$$\frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

حالت دوم:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

۱۰۰ **گزینه ۲** مطابق شکل A' بازتاب A نسبت به d و A'' دوران‌یافتهٔ A به مرکز A' و زاویهٔ ۱۲۰° می‌باشد، داریم:



$$AA' = A'A'' = ۴\sqrt{۶}$$

قضیهٔ کسینوس‌ها : $\overset{\Delta}{AA'A''}$

$$AA''^۲ = AA'^۲ + A'A''^۲ - ۲AA' \cdot A'A'' \times \cos ۱۲۰^\circ$$

$$AA''^۲ = (۴\sqrt{۶})^۲ + (۴\sqrt{۶})^۲ + ۲ \times ۴\sqrt{۶} \times ۴\sqrt{۶} \times \frac{۱}{۲}$$

$$= ۹۶ + ۹۶ + ۹۶ = ۲۸۸ \Rightarrow AA'' = ۱۲\sqrt{۲}$$

۱۰۱ **گزینه ۳** می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، یک انتقال است و بردار انتقال دو برابر فاصلهٔ دو خط موازی است.

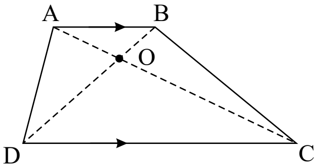
داریم:

$$AA'' = ۲\times\ (\text{فاصلهٔ دو خط بازتاب}) \Rightarrow m + ۱ = ۲(۴ - m) \Rightarrow m = \frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow BB'' = AA'' = ۱ + \frac{۷}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

۱۰۲ **گزینه ۴**

گزینهٔ ۱: بازتاب AB نسبت به CD حتماً با AB موازی است پس با CD هم موازی است.

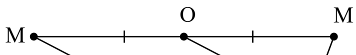


گزینهٔ ۲: مجانس AB نسبت به هر نقطه مثل O حتماً با AB موازی است پس با CD هم موازی است.

گزینهٔ ۳:در هر انتقال، AB با تصویرش موازی است پس با CD هم موازی است.

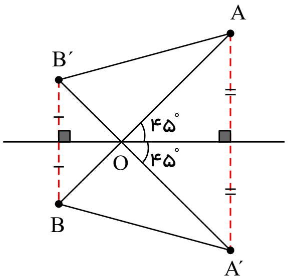
گزینهٔ ۴: از آنجا که دوران‌یافتهٔ AB به مرکز O و زاویهٔ $A\hat{O}B$، با AB زاویه‌ای برابر با $A\hat{O}B$ می‌سازد، پس دوران‌یافتهٔ AB با AB متقاطع است پس نمی‌تواند با CD موازی باشد.

گزینه ۱ مطابق شکل M' دوران‌یافتهٔ M به مرکز O و M'' دوران یافتهٔ M' به مرکز O' می‌باشد. داریم:



گزینه ۱ ۱۰۴

مطابق شکل، A' بازتاب A و B' بازتاب B می‌باشد. داریم:



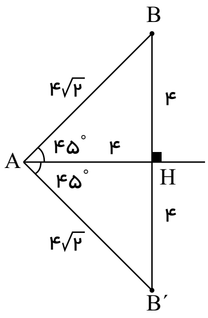
بازتاب طولپاست $AA' \| BB'$, $AB' = A'B$

ذوزنقهٔ $AB'BA'$ متساوی‌الساقین است.

$\Rightarrow AB = A'B' = ۴$, $A\hat{O}A' = ۹۰^\circ \Rightarrow S_{AA'BB'} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۴ = ۸$

گزینه ۴ ۱۰۵

مطابق شکل برای محاسبهٔ شعاع دایره محاطی خارجی داریم:



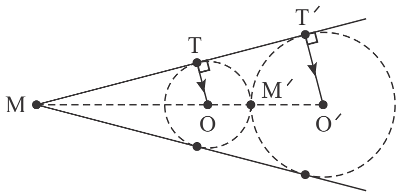
$S_{ABB'} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۸ = ۱۶$ و $P = \frac{۴\sqrt{۲}+۴\sqrt{۲}+۸}{۲} = ۴\sqrt{۲}+۴$

$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۱۶}{۴\sqrt{۲}+۴-۸} = \frac{۱۶}{۴\sqrt{۲}-۴} = \frac{۴}{\sqrt{۲}-۱} = ۴(\sqrt{۲}+۱)$

$r_b = r_{b'} = \frac{S}{P-b} = \frac{۱۶}{۴\sqrt{۲}+۴-۴\sqrt{۲}} = ۴$

گزینه ۳ ۱۰۶

مطابق شکل در مرکز تجانس مستقیم، M می‌باشد و مرکز تجانس معکوس M' می‌باشد.



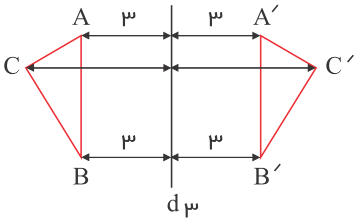
$OT \parallel O'T' \Rightarrow \frac{OM}{O'M} = \frac{OT}{O'T'} \Rightarrow \frac{OM}{OM+۶} = \frac{۲}{۴}$

$\Rightarrow ۴OM = ۲OM + ۱۲ \Rightarrow OM = ۶$

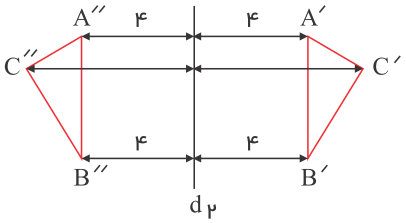
$\Rightarrow MM' = OM + OM' = ۶ + ۲ = ۸$

گزینه ۱ ۱۰۷

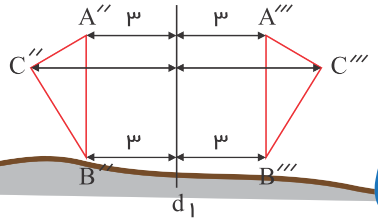
بازتاب نسبت به $d_۳$:



چون فاصلهٔ A' تا $d_۲$ برابرست با $۴ = ۱ + ۳$، پس داریم:



فاصلهٔ A'' تا $d_۱$ برابرست با $۳ = ۱ - ۴$، پس داریم:

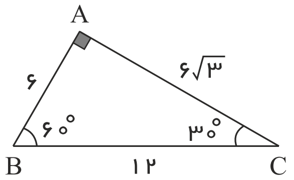


$\hat{A} = \frac{3}{2}\hat{B} = 3\hat{C}, A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}A = 180^\circ \Rightarrow A = 90^\circ$

$\Rightarrow B = 60^\circ \ , \ C = 30^\circ \Rightarrow AB = 12 \times \sin 30^\circ = 6 \ , \ AC = 12 \times \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

$$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} = 18\sqrt{3}$$



۱۱۱ **گزینه ۱** ضابطهٔ دوران حول مبدأ و به زاویهٔ $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی به‌صورت زیر است:

$(x, y) \xrightarrow{\alpha = \frac{3\pi}{2}} (y, -x)$

تصویر مرکز دایره $O(-2, 3) \to O'(3, 2)$ مرکز دایره

همچنین در دوران که یک تبدیل ایزومتریست، شعاع دایره ثابت می‌ماند، پس:

$R' = R = \frac{5}{2}$

طول مماس مشترک داخلی دو دایره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

خط المرکزین : $\Rightarrow OO' = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$

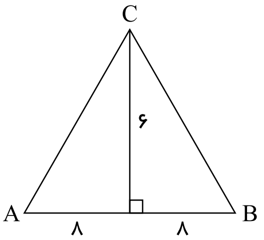
طول مماس مشترک داخلی : $TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} = \sqrt{26 - (\frac{5}{2} + \frac{5}{2})^2} = \sqrt{26 - 25} = 1$

۱۱۲ **گزینه ۳** طول ارتفاع وارد بر AB برابر می‌شود با:

$S = 48 = \frac{1}{2} \times 16 \times h \Rightarrow h = 6$

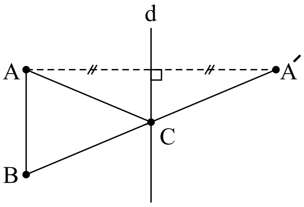
(نکته) در بین مثلث‌هایی که طول یک ضلع و ارتفاع وارد بر آن ثابت است، کمترین محیط مربوط به مثلث متساوی‌الساقین است.

براساس این نکته داریم:



$\overset{\triangle}{ACH} : AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow AC = AB = 10$

در نتیجه کمترین مقدار مثلث مورد نظر برابر $2 \times 10 + 16 = 36$ است.



(اثبات نکته) از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم. قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط d، A' می‌نامیم. براساس مسئلهٔ هرون، اگر B را به A' وصل کنیم و نقطهٔ برخورد آن با d را C بنامیم، آنگاه $BCA' = BC + AC$ کمترین مقدار برای $AC + BC$ خواهد بود.

از آنجا که $AB || d$ در نتیجه $AA' \perp AB$، یعنی مثلث ABA' در رأس A قائمه است و C وسط وتر BA' است و در نتیجه $AC = BC$.

گزینه ۱ مطابق شکل، پاره‌خط‌های AB و BC موازی اضلاع مثلث $OA'B'$ هستند و داریم:

$r = R \times ۰/۶ = \frac{۳}{۵}R$

با توجه به فرض داریم:

$\pi R^۲ - \pi r^۲ = ۱۶ \Rightarrow \pi(R^۲ - \frac{۹}{۲۵}R^۲) = ۱۶ \Rightarrow \pi \times \frac{۱۶}{۲۵}R^۲ = ۱۶ \Rightarrow R^۲ = \frac{۲۵}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۵}{\sqrt{\pi}}$

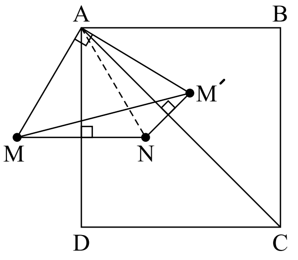
محیط دایرهٔ اولیه برابر می‌شود با:

$P = ۲\pi R = ۲\pi \times \frac{۵}{\sqrt{\pi}} = ۱۰\sqrt{\pi}$

۱۱۵

گزینه ۴

مطابق شکل، حاصل این دو تبدیل یک دوران است به مرکز A و با زاویه‌ای دو برابر زاویهٔ بین AD و AC است.



$D\hat{A}C = ۴۵^\circ \Rightarrow M\hat{A}M' = ۲ \times ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$

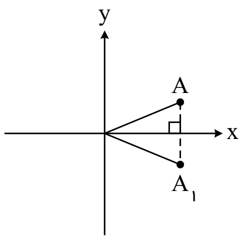
از طرفی:

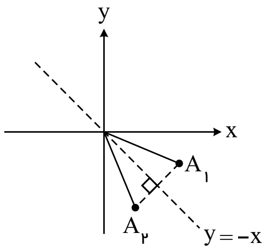
$AM' = AM = ۲ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} MM'^۲ = AM^۲ + AM'^۲ = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow MM' = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$

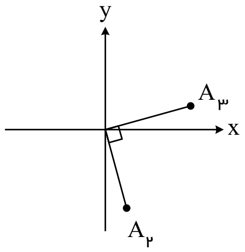
۱۱۶

گزینه ۴

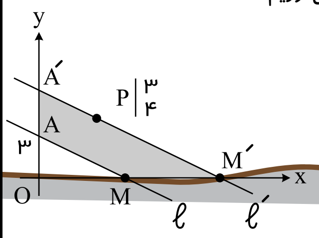
در بین گزینه‌ها، فقط ترکیب ۳ تبدیل (الف) و (د) و (هـ) همانی است. زاویهٔ بین محور xها و خط $y = -x$ برابر ۴۵° است. از طرفی، ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، یک دوران است که زاویهٔ دوران دو برابر زاویهٔ بین دو محور بازتاب و مرکز دوران، محل تقاطع دو محور بازتاب می‌باشد. بنابراین، ترکیب دو بازتاب نسبت به محور xها و خط $y = -x$، یک دوران ۹۰° حول مبدأ مختصات در جهت ساعتگرد است. اگر $A_۲$ تصویر نقطهٔ A بعد از این دو بازتاب باشد، آنگاه نقطهٔ $A_۳$ (تصویر $A_۲$) تحت دوران ۹۰° حول مبدأ مختصات در جهت پادساعتگرد) بر نقطهٔ A منطبق می‌شود.







گزینه ۳ مطابق شکل، نقاط برخورد خطوط ℓ و ℓ' را با محورهای x, y، A, A', M و M' می‌نامیم. ابتدا عرض نقطهٔ A' را به‌دست می‌آوریم:

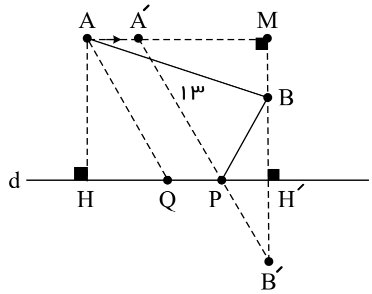


۱۱۹

گزینه ۳

طبق مسئلهٔ هرون، ابتدا تصویر نقطهٔ B را نسبت به خط d (نقطهٔ B') می‌یابیم. سپس نقطهٔ A' را به اندازهٔ ۲ واحد به سمت B و موازی خط d انتقال می‌دهیم تا به A' برسیم. کوتاه‌ترین مسیر شکستهٔ $AQPB$ طولی معادل $A'B' + AA'$ دارد.

مطابق شکل داریم:



$BH' = ۶, AH = MH' = BH' + BM \to ۱۱ = ۶ + BM \to BM = ۵$

$\overset{\triangle}{ABM} : AB^۲ = BM^۲ + AM^۲ \to ۱۳^۲ = ۵^۲ + AM^۲ \to AM = ۱۲ \to A'M = AM - AA' = ۱۲ - ۲ = ۱۰$

$\overset{\triangle}{A'MB'} : A'B'^۲ = A'M^۲ + MB'^۲ = ۱۰^۲ + (\underbrace{MB}_{۵} + \underset{\downarrow \, ۲BH' = ۲\times۶}{BB'})^۲ = ۱۰^۲ + ۱۷^۲ = ۱۰۰ + ۲۸۹ = ۳۸۹$

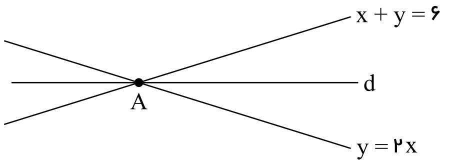
$\to A'B' = \sqrt{۳۸۹}$

$\to min(AQPB) = A'B' + AA' = \sqrt{۳۸۹} + ۲$

۱۲۰

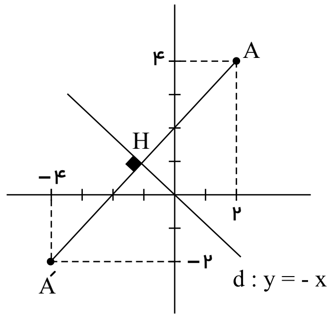
گزینه ۲

تنها نقطه‌ای از بازتاب دو خط داده‌شده نسبت به خط d که می‌تواند نقطهٔ ثابت تبدیل نام گیرد، همان نقطهٔ تقاطع دو خط (نقطهٔ A) است که مختصات آن از حل دستگاه زیر به دست می‌آید:



$\begin{cases} y = ۲x \\ x + y = ۶ \end{cases} \to ۳x = ۶ \to x = ۲ \to y = ۴ \to A \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۴ \end{matrix} \right.$

حال برای یافتن مختصات نقطهٔ A' (بازتاب A نسبت به خط $y = -x$) ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از A که بر خط $y = -x$ عمود است را می‌نویسیم:



$m_\Delta = -۱ \to m_{AA'} = \frac{-۱}{m_\Delta} = \frac{-۱}{-۱} = +۱ \to AA' : y - y_A = m_{AA'}(x - x_A) \to y - ۴ = ۱(x - ۲) \to y = x + ۲ \xrightarrow[\text{با } y=-x]{\text{قطع}} \begin{cases} y = x + ۲ \\ y = -x \end{cases}$

$\to -x = x + ۲ \to x = -۱, y = +۱ \to H(-۱, ۱) \to A' = ۲H - A = ۲(-۱, ۱) - (۲, ۴) = (-۴, -۲)$

$\to A'M = \sqrt{(\Delta x)^۲ + (\Delta y)^۲} = \sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲} = ۱۳$

نکتهٔ بسیار مهم: تصویر (بازتاب) نقطهٔ $A(\alpha, \beta)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم محورهای مختلف (خط $y = -x$) نقطهٔ $A'(-\beta, -\alpha)$ می‌شود. و همچنین نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (خط $y = x$) نقطهٔ $A'(\beta, \alpha)$ است.

گزینه ۳

$$\begin{cases} x = 0 \to y = 2 \to B\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \\ y = 0 \to x = 3 \to A\begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

حال طبق تعریف تجانس داریم:

A' مجانس A است $\to OA' = |k|OA = 2 \times 3 = 6$

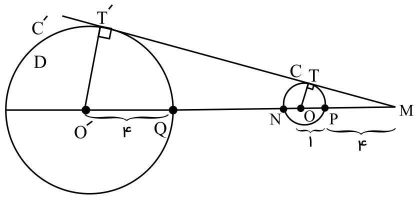
B' مجانس B است $\to OB' = |k|OB = 2 \times 2 = 4$

$$\to S_{\text{هاشورزده}} = S_{\overset{\Delta}{OA'B'}} - S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{OA' \times OB'}{2} - \frac{OB \times OA}{2} = \frac{6 \times 4}{2} - \frac{3 \times 2}{2} = 12 - 3 = 9$$

۱۲۳

گزینه ۴

می‌دانیم دو دایره همواره متجانس مستقیم و معکوس یکدیگرند. مرکز تجانس مستقیم دو دایرهٔ متجانس (و البته متخارج)، محل برخورد مماس‌های مشترک خارجی و خط‌المرکزین است.



بنابراین، مطابق شکل در مثلث $MO'T'$ می‌توانیم قضیهٔ تالس جزء به کل را بنویسیم:

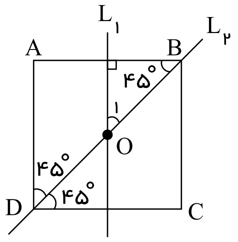
$$\overset{\Delta}{MO'T'}: \ OT || O'T' \to \frac{MO}{MO'} = \frac{OT}{O'T'} \to \frac{4+1}{MO'} = \frac{1}{4} \to MO' = 20$$

$$\to \underset{\text{فاصله نزدیک‌ترین نقاط دو دایره}}{\underset{\downarrow}{QN}} = MO' - (\underset{\underset{R'}{\downarrow}}{O'Q} + \underset{\underset{R}{\downarrow}}{ON} + OM) = 20 - (4 + 1 + 5) = 10$$

۱۲۴

گزینه ۳ از آنجا که قطرهای مربع، نیمسازند، داریم: $\hat{O}_1 = 45^\circ$

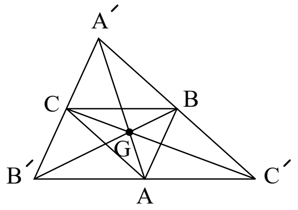
مطابق شکل، دو خط L_1 و L_2 به‌ترتیب عمودمنصف AB و امتداد قطر BD هستند و ترکیب دو بازتاب محوری L_1 و L_2 که باهم زاویهٔ α می‌سازند، یک دوران به اندازهٔ 2α است که محل تلاقی دو خط L_1 و L_2 مرکز دوران است. درنتیجه، تبدیل مورد نظر دورانی با زاویهٔ 90° است.



۱۲۵

گزینه ۲ بدیهی است G، محل تلاقی میانه‌های مثلث $A'B'C'$ بوده و از آنجا که G هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، داریم:

$$\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{GC'}{GC} = 2$$



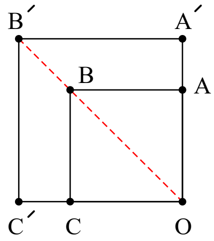
از طرفی، هر نقطه و تجانس‌یافتهٔ آن (مانند A و A') در دو طرف مرکز تجانس G قرار دارند. پس تجانس معکوس بوده و نسبت تجانس برابر است با $k = -2$.

گزینه ۳ چون دو دایره مماس داخل هستند، پس مطابق شکل، دایرهٔ C' مجانس دایرهٔ C به مرکز تجانس A (نقطهٔ تماس دو دایره) و با نسبت تجانس $k = 4$ است. بنابراین داریم:

$\frac{S'}{S}=k^{۲} \Rightarrow S'=k^{۲}S=\frac{۱۶}{۹}S$

فرض : $S'-S=۱۴$

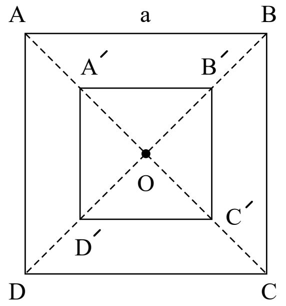
$\Rightarrow (\frac{۱۶}{۹}-۱)S=۱۴ \Rightarrow \frac{۷}{۹}S=۱۴ \Rightarrow S=۱۸$



۱۲۸

گزینه ۲ مربع $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ به مرکز O و نسبت تجانس $k=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



بنابراین، نسبت مساحت‌های دو مربع برابر است با:

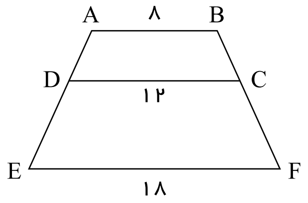
$\frac{S'}{S}=k^{۲}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow S'=\frac{۳}{۴}S \Rightarrow$ مساحت ناحیهٔ بین دو مربع $=S-S'=S-\frac{۳}{۴}S=\frac{۱}{۴}S \overset{\text{فرض}}{=} ۴ \Rightarrow S=۱۶ \Rightarrow a^{۲}=۱۶ \Rightarrow a=۴$

$\Rightarrow$ محیط مربع $ABCD$ $=۴a=۱۶$

۱۲۹

گزینه ۱ دو پاره‌خط AD و DE هم‌راستا و متجانس یکدیگرند (به همین‌ترتیب، دو پاره‌خط BC و CF هم‌راستا و متجانس یکدیگرند) پس مرکز تجانس در امتداد آنها و نقطهٔ برخورد امتدادهای دو ساق ذوزنقه است. حال نسبت تجانس را می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{CD}{EF} \Rightarrow \frac{۸}{CD}=\frac{CD}{۱۸} \Rightarrow CD^{۲}=۱۴۴ \Rightarrow CD=۱۲$$



از آنجا که در این تجانس، AB بر CD تصویر می‌شود، خواهیم داشت:

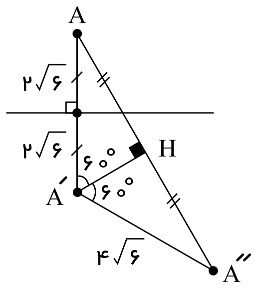
$$k=\frac{CD}{AB}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۰

گزینه ۱ با توجه به شکل زیر داریم:

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AA'H}$: AH روبه‌رو ۶۰° : $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AA'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴\sqrt{۶}=۶\sqrt{۲}$

$AA''=۲AH=۲\times ۶\sqrt{۲}=۱۲\sqrt{۲}$

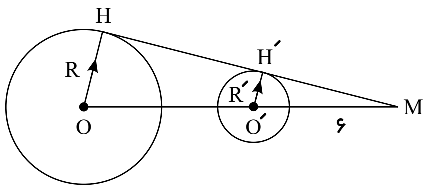


گزینه ۳ با توجه به شکل زیر داریم:

$S_{\text{هاشور}} = \pi(R_۱^۲ - R_۲^۲) = \pi(۹ - ۱) = ۸\pi$

۱۳۳

گزینه ۱



$\overset{\Delta}{OHM} : O'H' || OH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{R'}{R} = \frac{MO'}{MO}$ و نسبت تجانس : $\frac{R'}{R} = \frac{۳}{۵}$

$\rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۶}{۶ + OO'} \rightarrow ۱۸ + ۳OO' = ۳۰$

$\rightarrow ۳OO' = ۱۲ \rightarrow$ طول خط المرکزین $: OO' = ۴$

۱۳۴

گزینه ۴

میدانیم که $K = \frac{۱}{۳}$ نسبت تجانس. داریم:

$K = \frac{MO'}{MO} = \frac{۱}{۳} \text{ , } MO = ۶ \Rightarrow MO' = ۲ \Rightarrow OO' = ۴$

$K = \frac{۱}{۳} = \frac{R'}{R} = \frac{۱}{۳} \text{ , } R = ۳ \Rightarrow R' = ۱$

داریم:

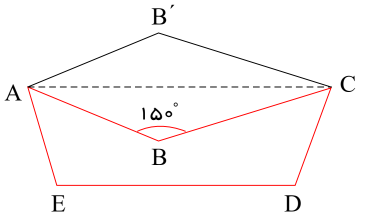
$OO' = ۴ \text{ , } R + R' = ۴ \Rightarrow OO' = R + R'$

پس دو دایره مماس خارج‌اند.

۱۳۵

گزینه ۱ مطابق شکل نقطهٔ B را نسبت به AC بازتاب می‌دهیم، میزان افزایش مساحت، اندازهٔ مساحت چهارضلعی $ABCB'$ یا دو برابر مساحت مثلث ABC است، پس:

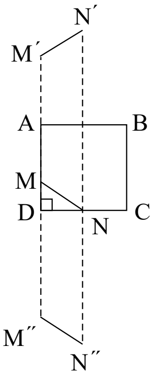
$S_{ABCB'} = ۲S_{ABC} = ۲ \times (\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ \times \sin ۱۵۰^\circ) = ۲ \times ۳ = ۶$



۱۳۶

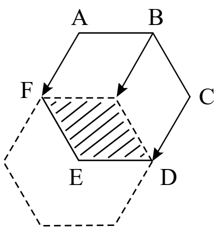
گزینه ۴ دو محور بازتاب AB و CD موازی هستند، پس ترکیب این دو بازتاب معادل تبدیل انتقال است، پس $M''N''$ انتقال‌یافتهٔ MN است. طول بردار انتقال، دو برابر فاصلهٔ AB تا CD است و راستای انتقال عمودی است، بنابراین $MNN''M''$ متوازی‌الاضلاع است و داریم:

$$\begin{cases} MM'' = ۲AD = ۴ \\ DN = \frac{CD}{۲} = ۱ \end{cases} \Rightarrow S_{MNN''M''} = MM'' \times DN = ۴$$



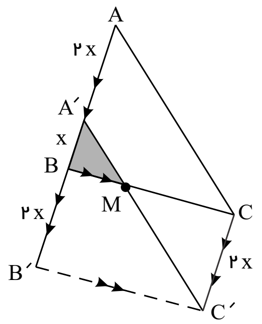
۱۳۷

گزینه ۲ چون تبدیل انتقال طولپاست، پس شش‌ضلعی منتظم و تصویرش هم‌نهشت هستند، یعنی تمام اضلاع برابر بوده و ناحیهٔ مشترک یک لوزی است. مساحت این لوزی شامل دو مثلث متساوی‌الاضلاع است و مساحت شش‌ضلعی منتظم شامل شش مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶}$ می‌باشد.



گزینه ۲

داریم:



$$BB' \parallel AA' \ , \ BB' = AA'$$

$$CC' \parallel AA' \ , \ CC' = AA'$$

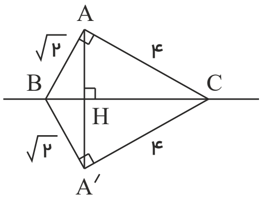
$$\frac{AA'}{A'B} = ۲ \ , \ A'B = x \Rightarrow AA' = ۲x \Rightarrow BB' = CC' = ۲x$$

می‌دانیم که انتقال طولپاست، پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ همنهشت و مساحت‌های برابر دارند. داریم:

$$BM \parallel B'C' \Rightarrow A'\overset{\Delta}{B}M \sim A'\overset{\Delta}{B'}C' \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{A'BM}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}} = (\frac{x}{۳x})^۲ = \frac{۱}{۹}$$

۱۴۲ گزینه ۲ نقاط B و C، نقاط ثابت بازتاب هستند، پس محور بازتاب از BC می‌گذرد.

داریم:



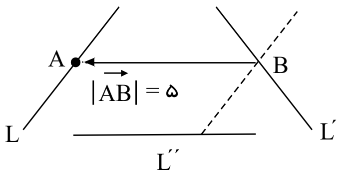
$$\text{بازتاب طولپاست} \Rightarrow AB = A'B = \sqrt{۲} \ , \ AC = A'C = ۴$$

$$\Rightarrow AH = A'H = \frac{۱}{۲}AA' \quad (۱)$$

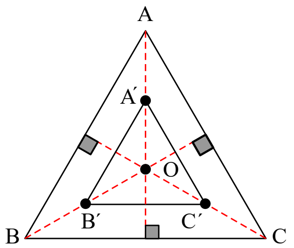
$$A\overset{\Delta}{B}C : BC^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + ۴^۲ = ۱۸ \Rightarrow BC = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{\sqrt{۲} \times ۴}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow (۱) : \frac{۱}{۲}AA' = \frac{۴}{۳} \Rightarrow AA' = \frac{۸}{۳}$$

۱۴۳ گزینه ۲ با استفاده از انتقال، خط L را با یک بردار به اندازهٔ ۵ و موازی خط L'' انتقال می‌دهیم تا خط L' را در نقطهٔ B قطع کند، سپس این نقطه را با همین بردار و در خلاف جهت انتقال می‌دهیم تا خط L را در نقطهٔ A قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسئله است.



۱۴۴ گزینه ۳



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow OA' = \frac{۱}{۲}OA$$

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow OB' = \frac{۱}{۲}OB$$

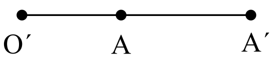
$$\frac{OC'}{OC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow OC' = \frac{۱}{۲}OC$$

در مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابهند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد، داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} = \frac{۱}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت ناحیهٔ بین دو مثلث} = \frac{۳}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow \frac{۳}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\text{ضلع مثلث } A\overset{\Delta}{B}C \ a \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow \text{محیط } A\overset{\Delta}{B}C = ۱۲$$



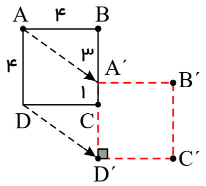
$$\overrightarrow{O'A'} = \frac{۳}{۲}\overrightarrow{O'A}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} - x_{O'}) = \frac{۳}{۲}(x_A - x_{O'}) \Rightarrow (x_{A'} - ۲) = \frac{۳}{۲}(۰ - ۲) \Rightarrow x_{A'} = -۱ \\ (y_{A'} - y_{O'}) = \frac{۳}{۲}(y_A - y_{O'}) \Rightarrow (y_{A'} - ۱) = \frac{۳}{۲}(۳ - ۱) \Rightarrow y_{A'} = ۴ \end{cases} \Rightarrow A' = \begin{vmatrix} -۱ \\ ۴ \end{vmatrix}$$

شیب خط مجانس (d') با شیب d یکسان است، پس داریم:

$$d' : (y - ۴) = -\frac{۱}{۲}(x + ۱) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲} \Rightarrow ۲y + x = ۷$$

۱۴۷ **گزینه ۴**

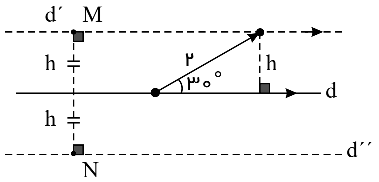


$$A'C = ۱, BC = ۴ \Rightarrow A'B = ۳$$

$$AA'^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۵^۲ \Rightarrow AA' = ۵$$

$$\left|\overrightarrow{V}\right| = \left|\overrightarrow{AA'}\right| = \left|\overrightarrow{DD'}\right| = ۵$$ بردار انتقال

۱۴۸ **گزینه ۲** مطابق شکل d' انتقال یافته d با بردار ۲ می‌باشد. داریم:



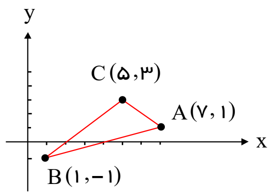
$$h = ۲ \times \sin ۳۰^\circ = ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

فاصلهٔ بین d' و d'' (بازتاب d' نسبت به d) برابرست با:

$$MN = ۲h = ۲$$

۱۴۹ **گزینه ۱** باید مساحت مثلث را بدست آورده در $\frac{۱}{۴}$ آن را ضرب کنیم

مثلث ABC در رأس C قائمه است زیرا شیب BC, AC عکس قرینه‌ی یکدیگرند.

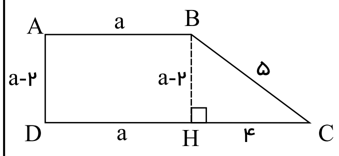


$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AC \times BC = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۸})(\sqrt{۳۲}) = ۸$$

$$S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} = \frac{۱}{۴} \times ۸ = ۲$$

۱۵۰ **گزینه ۴** می‌دانیم در تبدیل طولپا، طول هر پاره‌خط با طول پاره‌خط تبدیل‌یافته‌اش برابر است، پس محیط $A'B'C'D'$ همان محیط ذوزنقه $ABCD$ است.

مطابق شکل، طول قاعدهٔ کوچک را a در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

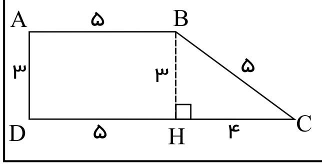


$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(AB + CD) \times BH = ۲۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(۲a + ۴)(a - ۲) = ۲۱ \Rightarrow a^۲ - ۴ = ۲۱ \Rightarrow a^۲ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

شکل ذوزنقه به‌صورت روبه‌رو خواهد بود که در آن طول ساق مایل نیز برابر ۵ می‌شود. محیط ذوزنقه برابر است با :

$$\text{محیط} = ۵ + ۵ + ۹ + ۳ = ۲۲$$



گزینه ۲ مطابق شکل تصویر مثلث ABC در انتقال با بردار $\overrightarrow{AA'}$ (A' محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است)، مثلث $A'B'C'$ است. ناحیهٔ مشترک بین این دو مثلث، مثلث $A'DE$ است. تصویر یک پاره‌خط در یک انتقال با آن پاره‌خط موازی است، پس داریم:

$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۴^{۲}=۴\sqrt{۳}$

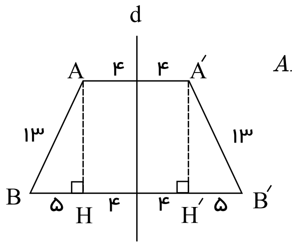
$\frac{S'}{S}=k^{۲}\Rightarrow \frac{S'}{۴\sqrt{۳}}=(\frac{۱}{۲\sqrt{۲}})^{۲}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow S'=\frac{۴\sqrt{۳}}{۸}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۵۳

گزینه ۴

مطابق شکل $AA'=۸$ و $BB'=۱۸$ است. چهارضلعی $AA'B'B$ محیطی است، بنابراین داریم:

$AB+A'B'=AA'+BB'=۸+۱۸=۲۶$



بازتاب تبدیلی طولپاست، پس $AB=A'B'=۱۳$ است و در نتیجه داریم:

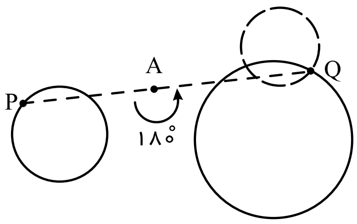
$\overset{\Delta}{AHB}: AH^{۲}=AB^{۲}-BH^{۲}=۱۶۹-۲۵=۱۴۴\Rightarrow AH=۱۲$

$S_{AA'B'B}=\frac{۱}{۲}AH(AA'+BB')=\frac{۱}{۲}\times ۱۲(۸+۱۸)=۱۵۶$

۱۵۴

گزینه ۱

فرض کنیم مطابق شکل، پاره‌خط PQ ویژگی موردنظر را دارد. در واقع نقطهٔ P با دوران ۱۸۰° نسبت به نقطهٔ A بر نقطه Q منطبق می‌شود. پس بهترین کار آن است که دایرهٔ کوچک را با دوران ۱۸۰° حول نقطهٔ A دوران دهیم و با دایرهٔ بزرگ‌تر تقاطع دهیم. نقطهٔ تقاطع همان نقطهٔ Q خواهد بود و بدین ترتیب پاره‌خط QA را از طرف A امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ کوچک را در نقطهٔ P قطع کند.



توجه: با تجانس معکوس و ضریب تجانس $k=-۱$ هم می‌توان این کار را انجام داد.

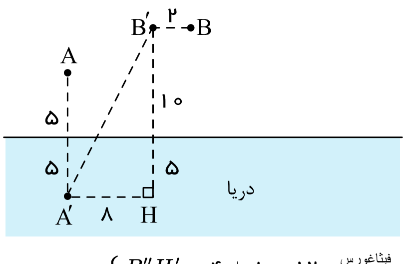
۱۵۵

گزینه ۳

ابتدا B را ۲ کیلومتر به‌سمت چپ (و موازی ساحل دریا) انتقال می‌دهیم و نقطهٔ حاصل را B' می‌نامیم. همچنین بازتاب A نسبت به ساحل دریا را نقطهٔ A' می‌نامیم. مطابق شکل مسیر $A'B'B$ کوتاه‌ترین جاده از A به B است که ۲ کیلومتر آن در ساحل دریا قرار دارد:

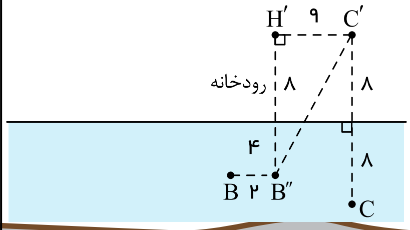
$\overset{\Delta}{A'HB'}:\begin{cases}B'H=۱۰+۵=۱۵\\ A'H=۱۰-۲=۸\end{cases}\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} A'B'^{۲}=۱۵^{۲}+۸^{۲}=۲۸۹\Rightarrow A'B'=۱۷$

طول مسیر $A'B'B$ برابر $۱۹=۲+۱۷$ کیلومتر است. مشابه همین کار را برای جادهٔ دوم بین B و C انجام می‌دهیم.



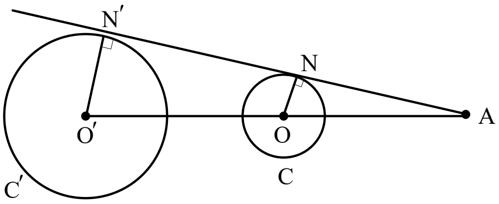
$B''H'C':\begin{cases}B''H'=۴+۸=۱۲\\ H'C'=۱۱-۲=۹\end{cases}\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} B''C'^{۲}=۹^{۲}+۱۲^{۲}=۲۲۵\Rightarrow B''C'=۱۵$

طول مسیر $BB''C'$ برابر $۱۷=۲+۱۵$ کیلومتر است. در نتیجه طول جادهٔ موردنظر برابر $۳۶=۱۷+۱۹$ کیلومتر می‌شود.



گزینه ۱ طول وتر BD در مثلث قائم‌الزاویه BCD برابر $۴\sqrt{۲}$ می‌شود، رابطهٔ فیثاغورس بین اضلاع مثلث ABD برقرار است، پس این مثلث در رأس B قائم‌الزاویه است:

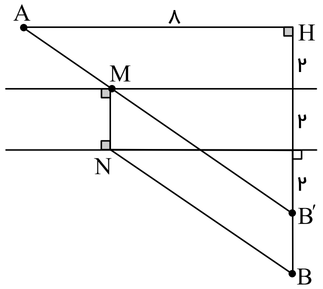
در نتیجه با توجه به شکل $AB = OB + OA = ۱۲$ است.



۱۵۸

گزینه ۳

نقطهٔ B را به اندازهٔ عرض رودخانه (۲ واحد) عمود بر راستای رودخانه به‌سمت بالا انتقال می‌دهیم، AB' لبهٔ بالای رودخانه را در M قطع می‌کند. پل MN را مطابق شکل قرار می‌دهیم. کوتاه‌ترین مسیر ممکن $AMNB$ برابر است با:

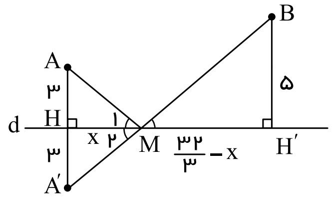


$$AM + MN + NB = (AM + MB') + MN = AB' + MN = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} + ۲ = ۱۰ + ۲ = ۱۲$$

۱۵۹

گزینه ۱

نقطهٔ A را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ A' به دست آید. محل تقاطع $A'B$ با d نقطهٔ M است.



$$A\overset{\Delta}{H}M \sim B\overset{\Delta}{M}H' \ (\text{زز}) \xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \frac{AH}{BH'} = \frac{MH}{MH'} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{x}{\frac{۳۲}{۳} - x} \Rightarrow ۵x = ۳۲ - ۳x \Rightarrow ۸x = ۳۲ \Rightarrow x = ۴$$

$$A\overset{\Delta}{H}M : AM^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow AM = ۵$$

۱۶۰

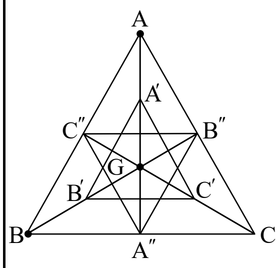
گزینه ۳

می‌دانیم میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. بنابراین:

$$\frac{GA''}{AA''} = \frac{۱}{۳}, \frac{GA}{AA''} = \frac{۲}{۳}$$

با توجه به نکتهٔ بالا مجانس رأس A به مرکز G (محل همرسی میانه‌ها) با نسبت $\frac{۱}{۲}$، نقطهٔ A' (وسط AG) و با نسبت $-\frac{۱}{۲}$ نقطهٔ A'' (وسط BC) می‌باشد و داریم:

$AA' = A'G = GA'' = \frac{۱}{۳}AA''$.

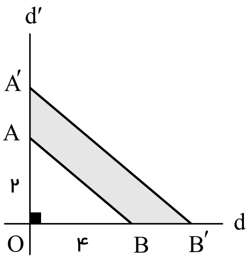


داریم:

$$A'A'' = A'G + GA'' = \frac{۱}{۳}AA'' + \frac{۱}{۳}AA'' = \frac{۲}{۳}AA'' = \frac{۲}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۸ = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۶۲

گزینه ۴



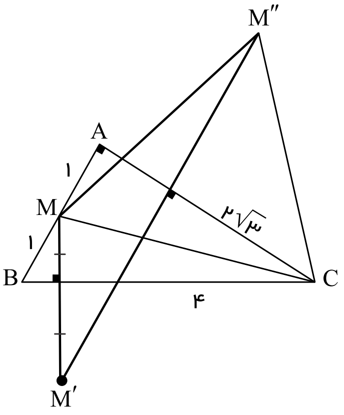
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{A'OB'}}}{S_{\overset{\triangle}{AOB}}} = k^۲ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{A'OB'}} = k^۲ S_{\overset{\triangle}{AOB}}$$

$$S_{A'ABB'} = S_{\overset{\triangle}{A'OB'}} - S_{\overset{\triangle}{AOB}} \Rightarrow S_{A'ABB'} = k^۲ S_{\overset{\triangle}{AOB}} - S_{\overset{\triangle}{AOB}} \Rightarrow S_{A'ABB'} = S_{\overset{\triangle}{AOB}}(k^۲ - ۱)$$

$$\Rightarrow ۸ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۴(k^۲ - ۱) \Rightarrow k^۲ - ۱ = ۲ \Rightarrow k = \sqrt{۳}$$

۱۶۳

گزینه ۲



با توجه به فرض داریم:

$$۲^۲ + (۲\sqrt{۳})^۲ = ۴^۲ \Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \xrightarrow{\text{عکس قضیه فیثاغورس}} \hat{A} = ۹۰^\circ$$

$$AB = \frac{۱}{۲}BC \Rightarrow \hat{C} = ۳۰^\circ$$

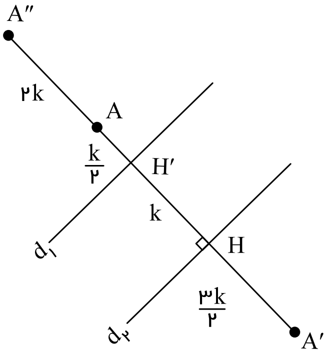
می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به محورهای بازتاب متقاطع معادل یک دوران است به مرکز محل تقاطع دو محور و با زاویه دورانی به اندازهٔ دو برابر زاویه تقاطع دو محور بازتاب. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} M\hat{C}M'' = ۶۰^\circ \\ MC = M''C \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MCM''} \text{ متساوی‌الاضلاع است} \Rightarrow MM'' = CM \Rightarrow MM'' = \sqrt{۱^۲ + (۲\sqrt{۳})^۲} = \sqrt{۱۳}$$

۱۶۴

گزینه ۲

می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به محورهای بازتاب موازی معادل یک انتقال است با طول برداری به اندازهٔ دو برابر فاصله بین دو محور بازتاب. بنابراین داریم:



$$AA'' = ۲HH' = ۲k$$

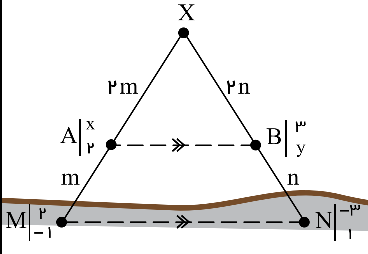
۱۶۵

گزینه ۱

شکل روبه‌رو، این دو تجانس متوالی هم را نشان می‌دهد.

در این شکل داریم:

$$\begin{cases} AB || MN \\ AB = \frac{۲}{۳}MN \end{cases}$$



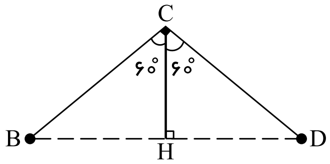
۱۶۶

گزینه ۲ مختصات نقاط B و C به‌صورت زیر می‌شوند:

$A\begin{vmatrix}-۳\\ ۴\end{vmatrix} \xrightarrow[\text{به خط } y=x]{\text{بازتاب نسبت}} B\begin{vmatrix}۴\\ -۳\end{vmatrix}$ $\qquad$ $A\begin{vmatrix}-۳\\ ۴\end{vmatrix} \xrightarrow[\text{به محور } y]{\text{بازتاب نسبت}} C\begin{vmatrix}۳\\ ۴\end{vmatrix}$

شکل روبه‌رو، دوران نقطه B حول نقطه C به اندازهٔ ۱۲۰ درجه را نشان می‌دهد:

در این شکل داریم:



$$BC=\sqrt{(۴-۳)^۲+(-۳-۴)^۲}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

$$\text{ضلع روبه‌رو به } ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\text{وتر})\Rightarrow BH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۵\sqrt{۲}=\frac{۵\sqrt{۶}}{۲}$$

در نتیجه:

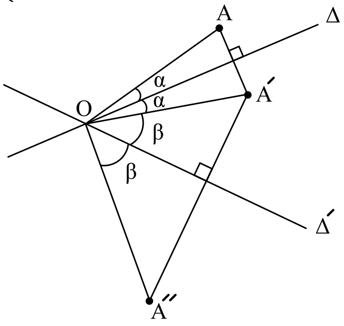
$$BD=۲BH=۵\sqrt{۶}$$

۱۶۷

گزینه ۴ مطابق شکل داریم:

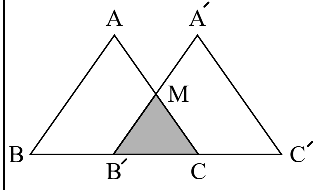
$$\begin{cases}OA=OA'\\ OA'=OA''\end{cases}\Rightarrow OA=OA''\Rightarrow A''\hat{O}A=۲(\alpha+\beta)=۲\times(\text{زاویهٔ بین } \Delta',\Delta)$$

پس A'' دوران‌یافتهٔ A حول نقطه O با زاویه‌ای دو برابر زاویهٔ بین دو خط است که چون زاویهٔ دوران مضربی از ۱۸۰° نیست، پس شیب خط‌ها در این دوران حفظ نمی‌شود.



۱۶۸

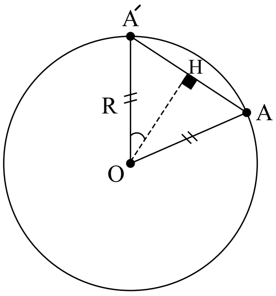
گزینه ۱ فرض کنید مثلث ABC را با بردار $\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BC}$ انتقال دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. چون انتقال، شیب خط‌ها را حفظ می‌کند. بنابراین:



$$AB||A'B'\Rightarrow AB||MB'\xrightarrow{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}}\overset{\Delta}{MB'C}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{S_{MB'C}}{S_{ABC}}=\left(\frac{B'C}{BC}\right)^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

۱۶۹

گزینه ۴ طبق شکل زیر، در مثلث متساوی‌الساقین AOA' زاویهٔ رأس ۶۰ درجه است، پس این مثلث، متساوی‌الاضلاع بوده و ارتفاع OH (فاصلهٔ مرکز از وتر AA') به‌صورت زیر است:



$$OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OA\Rightarrow ۳\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}r\Rightarrow r=۶\ (\text{شعاع دایره})$$

مساحت قطاع AOA' برابر است با:

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(\pi r^۲)=\frac{۱}{۶}\pi(۶^۲)=۶\pi$$

گزینه ۲

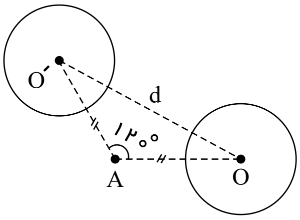
$n = ۱۲ \to \alpha = \frac{۳۶۰^\circ}{۱۲} = ۳۰^\circ$

گزینه‌ای که مضرب صحیح ۳۰° است، همان ۹۰° می‌باشد.

۱۷۲

گزینه ۲ طبق شکل زیر، چون C و C' دوران‌یافتهٔ یکدیگر هستند، پس شعاع آنها یکسان است:

$R = R' \to ۲ + m = ۳m - ۲ \to m = ۲ \to R = R' = ۴$



حال طول خط‌المرکزین (d) دو دایره را به دست می‌آوریم. دقت کنید چون $OA = O'A = ۴\sqrt{۳}$ (شعاع دوران ثابت می‌ماند)، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$d = OO' = \sqrt{OA^۲ + OA'^۲} = \sqrt{۴۸ + ۴۸} = \sqrt{۹۶} = ۴\sqrt{۶}$$

در آخر، طول مماس‌های مشترک خارجی و داخلی را می‌یابیم:

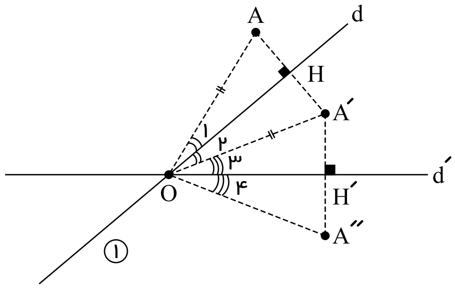
$$\frac{\text{طول مماس مشترک خارجی}}{\text{طول مماس مشترک داخلی}} = \frac{\sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}}{\sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}} = \frac{\sqrt{۹۶ - ۰}}{\sqrt{۹۶ - ۶۴}} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۴\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}$$

۱۷۳

گزینه ۴

مطابق شکل، می‌دانیم تحت بازتاب نسبت به خط d، به‌دلیل هم‌نهشتی مثلث‌های OAH و $OA'H$، زاویه‌های $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ مساوی‌اند. به‌طریق مشابه داریم: $\hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$، پس می‌توان A'' را دوران‌یافتهٔ A به مرکز O و زاویهٔ $۲\alpha = ۶۰^\circ$ در نظر گرفت.

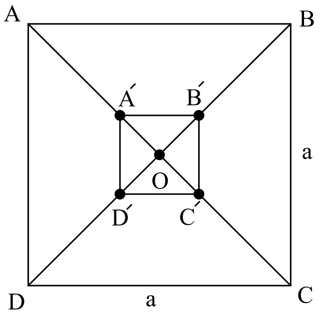
مثلث OAA'' یک مثلث متساوی‌الساقین $(OA = OA'')$ با زاویهٔ رأس $\hat{O} = ۶۰$ است. پس در حقیقت، یک مثلث متساوی‌الاضلاع خواهد بود. یعنی: $AA'' = OA = ۴\sqrt{۳}$.



۱۷۴

گزینه ۲

با داشتن طول قطر مربع، طول ضلع این مربع (که $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر قطر آن می‌باشد) عبارت است از: $۶ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۶\sqrt{۲}$، $a =$ پس مساحت مربع $ABCD$ برابر است با: $S = a^۲ = ۳۶$.



چون مربع $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ است، با نسبت $k = \frac{۱}{۳}$، پس مساحت مربع ثانویه برابر است با $S' = k^۲S = \frac{۱}{۹} \times ۳۶ = ۴$؛ در نهایت، مساحت ناحیهٔ بین این دو مربع عبارت است از: $\Delta S = S - S' = ۳۶ - ۴ = ۳۲$

گزینه ۱

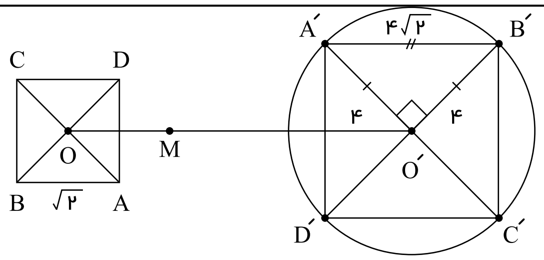
بازتاب A را نسبت به ساق قائم CD، نقطهٔ A' می‌نامیم. مطابق شکل، کمترین مقدار $MA + MB$، برابر طول پاره‌خط $A'B$ است.

$A'B' = ۴\sqrt{۲}$

$\Rightarrow$ نسبت تجانس: $|k| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۴$

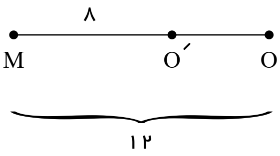
$\Rightarrow \frac{O'M}{OM} = |k| = ۴ \Rightarrow O'M = ۴OM \quad (۱)$

$\xrightarrow[OO'=۲۰]{\text{فرض مسئله}} OM + O'M = ۲۰ \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} OM = ۴ \Rightarrow O'M = ۱۶$



(از آنجا که تجانس معکوس داریم، پس O و O' در دو طرف مرکز تجانس M قرار می‌گیرند و $k = -۴$ است.)

گزینه ۴ طبق فرض مسئله داریم: ۱۷۸

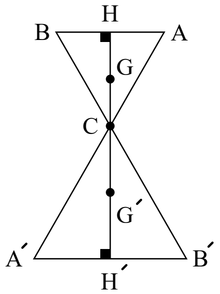


$\begin{cases} R = ۹ \\ OM = ۱۲ \end{cases} \xrightarrow{k=\frac{۲}{۳}} \begin{cases} k = \frac{MO'}{MO} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow MO' = ۸ \\ k = \frac{R'}{R} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow R' = ۶ \end{cases} \Rightarrow OO' = MO - MO' = ۴ \Rightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند.

دو دایرهٔ C و C'، «متقاطع» هستند، زیرا داریم:

$\underbrace{|R - R'|}_{۳} < \underbrace{OO'}_{۴} < \underbrace{R + R'}_{۱۵}$

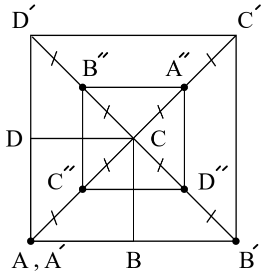
گزینه ۴ شکل زیر را در نظر بگیرید: ۱۷۹



$\frac{CG'}{CG} = |k| = ۲ \rightarrow CG' = ۲CG$

$GG' = CG' + CG = ۲CG + CG = ۳CG = \cancel{۳} \times \frac{۲}{\cancel{۳}}CH = ۲CH = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۶$

گزینه ۳ شکل زیر را در نظر بگیرید: ۱۸۰



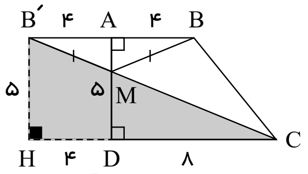
$S_{A'B'C'D'} = ۴S_{ABCD}$

$\frac{S_{A''B''C''D''} = S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'} - S_{A''B''C''D''}} = ۳S_{ABCD}$

گزینه ۴ ترکیب دو بازتاب با محورهای غیر موازی معادل یک دوران است به مرکز محل برخورد دو محور و زاویهٔ دوران دو برابر زاویهٔ بین محورها. در این سؤال زاویهٔ بین دو خط ۹۰° است، پس ترکیب این دو بازتاب معادل دوران ۱۸۰° می‌باشد. پس این تبدیل شیب خطوط و جهت اشکال‌ها را حفظ می‌کند. ۱۸۱

نکته: دوران شیب خطوط را در حالتی که زاویهٔ دوران مضرب صحیح ۱۸۰° باشد، حفظ می‌کند.

گزینه ۲ B' (بازتاب‌یافتهٔ B نسبت به AD) را به C وصل می‌کنیم. محل برخورد $B'C$ با AD نقطهٔ مورد نظر (M) است. ۱۸۲



$MB + MC = MB' + MC = B'C$

$B'\overset{\Delta}{H}C: B'C = \sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲} = ۱۳$

گزینه ۲ در دوران، زاویه بین هر پاره‌خط و تصویر آن برابر با زاویهٔ دوران است یعنی $B\hat{C}B' = ۹۰^\circ$ و داریم:

پاسـخنامه کـــلیدی

۱	۴	۳۲	۴	۶۳	۴	۹۴	۱	۱۲۵	۲	۱۵۶	۱
۲	۴	۳۳	۲	۶۴	۲	۹۵	۳	۱۲۶	۳	۱۵۷	۲
۳	۳	۳۴	۱	۶۵	۳	۹۶	۲	۱۲۷	۲	۱۵۸	۳
۴	۳	۳۵	۱	۶۶	۲	۹۷	۳	۱۲۸	۲	۱۵۹	۱
۵	۴	۳۶	۲	۶۷	۴	۹۸	۳	۱۲۹	۱	۱۶۰	۳
۶	۴	۳۷	۳	۶۸	۲	۹۹	۲	۱۳۰	۱	۱۶۱	۱
۷	۲	۳۸	۴	۶۹	۲	۱۰۰	۲	۱۳۱	۳	۱۶۲	۴
۸	۲	۳۹	۳	۷۰	۲	۱۰۱	۳	۱۳۲	۳	۱۶۳	۲
۹	۲	۴۰	۳	۷۱	۲	۱۰۲	۴	۱۳۳	۱	۱۶۴	۲
۱۰	۱	۴۱	۳	۷۲	۲	۱۰۳	۱	۱۳۴	۴	۱۶۵	۱
۱۱	۲	۴۲	۳	۷۳	۱	۱۰۴	۱	۱۳۵	۱	۱۶۶	۲
۱۲	۳	۴۳	۲	۷۴	۳	۱۰۵	۴	۱۳۶	۴	۱۶۷	۴
۱۳	۳	۴۴	۲	۷۵	۳	۱۰۶	۳	۱۳۷	۲	۱۶۸	۱
۱۴	۲	۴۵	۱	۷۶	۳	۱۰۷	۱	۱۳۸	۲	۱۶۹	۴
۱۵	۲	۴۶	۲	۷۷	۳	۱۰۸	۴	۱۳۹	۴	۱۷۰	۲
۱۶	۴	۴۷	۳	۷۸	۳	۱۰۹	۳	۱۴۰	۲	۱۷۱	۴
۱۷	۲	۴۸	۲	۷۹	۴	۱۱۰	۴	۱۴۱	۴	۱۷۲	۲
۱۸	۳	۴۹	۴	۸۰	۲	۱۱۱	۱	۱۴۲	۲	۱۷۳	۴
۱۹	۲	۵۰	۳	۸۱	۳	۱۱۲	۳	۱۴۳	۲	۱۷۴	۲
۲۰	۳	۵۱	۴	۸۲	۳	۱۱۳	۱	۱۴۴	۳	۱۷۵	۱
۲۱	۲	۵۲	۲	۸۳	۳	۱۱۴	۴	۱۴۵	۴	۱۷۶	۲
۲۲	۳	۵۳	۳	۸۴	۳	۱۱۵	۴	۱۴۶	۲	۱۷۷	۳
۲۳	۱	۵۴	۳	۸۵	۱	۱۱۶	۴	۱۴۷	۴	۱۷۸	۴
۲۴	۲	۵۵	۳	۸۶	۳	۱۱۷	۳	۱۴۸	۲	۱۷۹	۴
۲۵	۴	۵۶	۴	۸۷	۲	۱۱۸	۱	۱۴۹	۱	۱۸۰	۳
۲۶	۲	۵۷	۴	۸۸	۱	۱۱۹	۳	۱۵۰	۴	۱۸۱	۴
۲۷	۳	۵۸	۳	۸۹	۳	۱۲۰	۲	۱۵۱	۲	۱۸۲	۲
۲۸	۳	۵۹	۳	۹۰	۲	۱۲۱	۳	۱۵۲	۱	۱۸۳	۲
۲۹	۲	۶۰	۲	۹۱	۲	۱۲۲	۱	۱۵۳	۴		
۳۰	۲	۶۱	۴	۹۲	۴	۱۲۳	۴	۱۵۴	۱		
۳۱	۳	۶۲	۴	۹۳	۲	۱۲۴	۳	۱۵۵	۳		