

۱) نقاط $A(2, 0)$ ، $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ را در نظر بگیرید:

الف - محیط مثلث ABC را بدست آورید.

ب - ABC چه نوع مثلثی است؟

پ - مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

۲) نقطه‌ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(3, 0)$ و $B(-1, 0)$ به یک فاصله باشد.

۳) دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ هستند.

الف - اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب - آیا نقطه $C(7, 3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۴) نقاط $(0, 0)$ و $(3, 0)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. این مسئله چند جواب دارد؟

۵) ثابت کنید نقاط $A(6, -13)$ ، $B(-2, 2)$ ، $C(13, 10)$ و $D(21, -5)$ رؤس یک مربع‌اند.

۶) نقاط $(0, 0)$ و $(6, 0)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

۷) نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(1, 1)$ و $B(3, -1)$ به یک فاصله باشد.

۸) نقطه‌ی $A(a, 2a)$ مرکز دایره‌ی گذرنده بر دو نقطه $B(2, 1)$ و $C(-1, 4)$ است. شعاع دایره چقدر است؟

۹) خطی با شیب $-\frac{3}{4}$ از نقطه‌ی $A(2, \frac{5}{2})$ گذشته و محورهای مختصات را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند.

طول پاره‌خط AB چقدر است؟

۱۰) نقاط $A(3, 3)$ ، $B(-1, 1)$ و $O(0, 0)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟

۱۱) الف - نقطه $N(5, -4)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه A و $B(7, -2)$ است. مختصات نقطه A را بیابید.

ب - قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به نقطه $M(-1, 4)$ را بدست آورید.

۱۲) مثلث با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ را در نظر بگیرید.

الف - مختصات M ، نقطه وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب - طول میانه AM را محاسبه کنید.

پ - معادله میانه AM را بدست آورید.

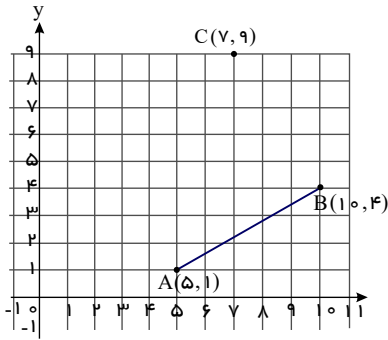
۱۳) دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید.

الف - فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط AB بدست آورید.

ب - معادله عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

۱۴) مساحت مثلث ABC به مختصات $A(0, 1)$ ، $B(3, 4)$ و $C(-1, 1)$ را بدست آورید.

۱۵) مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند. الف - شیب ضلع AB را بنویسید.



ب - شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.

پ - اگر بدانیم نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

ت - مربع را به طور کامل رسم کنید.

۱۶) اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(3, -2)$ از خط $4x + my + 2 = 0$ برابر ۴ باشد، در اینصورت مقدار m را بدست آورید.

۱۷) نشان دهید دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $10x + 24y + 10 = 0$ با یکدیگر موازی اند.

ب - فاصله این دو خط را محاسبه کنید.

۱۸) معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف) $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

ب) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

۱۹) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۲۰) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$4x^6 + 1 = 5x^3 \quad x^3 = u$

۲۱) اگر $\frac{1}{8}$ واسطه‌ی حسابی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ باشد، مقدار m را بدست آورید.

۲۲) اگر $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ باشد، مقدار m را بدست آورید.

۲۳) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، مقدار عددی عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را بدست آورید.

۲۴) معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های $x^2 + x - 1 = 0$ باشد.

۲۵) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد.

۲۶) معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن برابر مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 4x - 6 = 0$ باشد.

۲۷) معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{4-a}$ ، $2 - \sqrt{4-a}$ باشند.

۲۸) مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگر باشند؟

۲۹) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ را بیابید.

۳۰) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را بدست آورید.

۳۱) استادبومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادبومی ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری

بیابید که:

الف - مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب - مساحت استادبومی حداکثر مقدار ممکن شود.

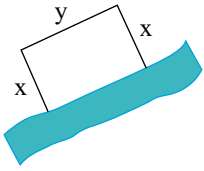
۳۲) مقدار a را طوری بدست آورید که نقطه‌ی مینیم نمودار تابع $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + a$ بر روی خط $y = 1$ واقع باشد.

۳۳ نقطه‌ی مینیمم تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 + ax + 2$ روی نیمساز ربع اول قرار دارد. a را بدست آورید.

۳۴ مقدار ماکسیمم یا مینیمم تابع داده شده را مشخص کنید.

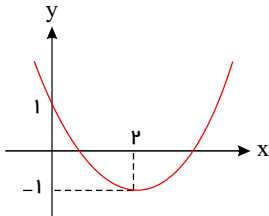
$$x^2 - 4x + 8y - 4 = 0$$

۳۵ قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه‌ی نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

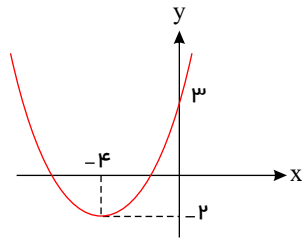


۳۶ مقدار max یا min تابع $f(x) = 4 + 8x - x^2$ را بیابید.

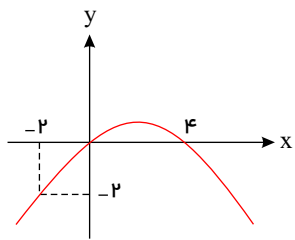
۳۷ در شکل زیر نمودار سهمی به معادله‌ی $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۳۸ در شکل زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.

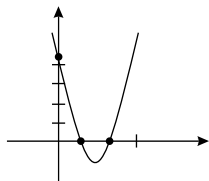


۳۹ در شکل زیر نمودار سهمی به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.

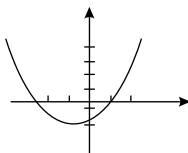


۴۰ با توجه به نمودارهای سهمی زیر به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ ، برای هر مورد ضابطه‌ی تابع را مشخص کنید.

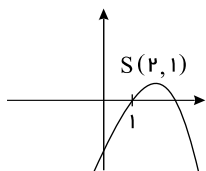
الف



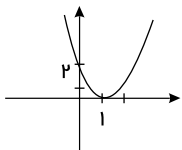
ب



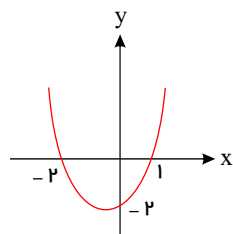
پ



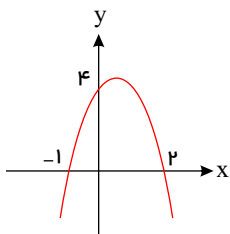
ت



۴۱) با توجه به نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۴۲) معادله سهمی شکل زیر را بدست آورید.

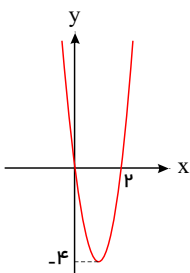


۴۳) معادله سهمی را بنویسید که محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور عرضها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند و از نقطه‌ی $(3, 1)$ نیز بگذرد. معادله سهمی را بصورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم.

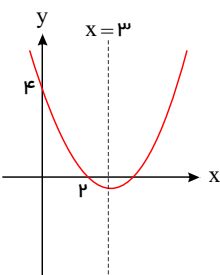
۴۴) اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، هر یک از پارامترهای a و b و c را طوری تعیین کنید تا نمودار تابع محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -3 و محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند و از نقطه‌ی $(-1, 4)$ هم بگذرد.

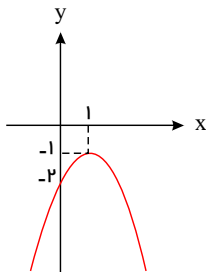
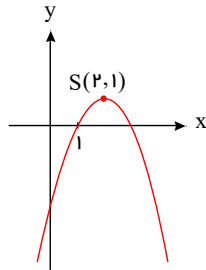
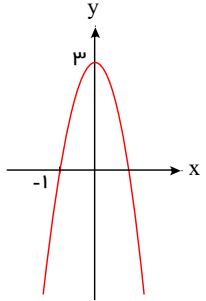
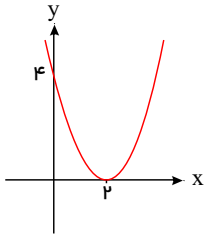
۴۵) ضابطه جبری سهمی‌های زیر را بنویسید.

الف



ب





پ

ت

ث

ج

۴۶ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی جمله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود یک ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از جمله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۴۷ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{2 - x}{x^2 - x}$$

۴۸ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

ب

$$\frac{2}{k} - \frac{3k}{k + 2} = \frac{k}{k^2 + 2k}$$

ج

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x - 3} = \frac{12}{9 - x^2}$$

۴۹) فاصله بین دو شهر A و B ، ۱۸۰ کیلومتر است. اتومبیلی از شهر A با سرعت ثابت به سمت شهر B در حال حرکت است. نیم ساعت بعد، اتومبیل دیگری که سرعت آن ۴ کیلومتر در ساعت بیشتر از اتومبیل اول است از شهر A به سمت شهر B حرکت می‌کند. اگر زمان رسیدن هر دو اتومبیل یکسان باشد، سرعت هر یک از اتومبیل‌ها را به دست آورید.

۵۰) دو نفر با هم می‌توانند در ۴ ساعت، ساختمانی را رنگ‌آمیزی کنند. اگر سرعت کار یکی از آنها ۴ برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام بدهند.

۵۱) معادله‌ی رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$$

۵۲) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x+9}$$

۵۳) معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x - \sqrt{x} = 20$$

۵۴) معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$2\sqrt{2t-1} - t = 1$$

ب

$$2x = 1 - \sqrt{2-x}$$

پ

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$$

ت

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$$

ث

$$2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

۵۵) اگر فاصله بین دو نقطه $(a, 5)$ و $(4, a-3)$ برابر $2\sqrt{10}$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۵۶) دو خط متقاطع d و d' را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از نقطه O (محل تقاطع) به فاصله 5cm بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.

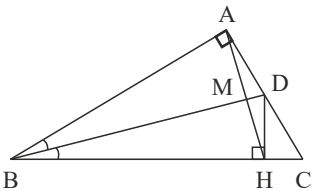
۵۷) مربعی رسم کنید که پاره‌خط AB یکی از قطرهای آن باشد.

۵۸) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نیمساز زاویه‌ی B ، ضلع AC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند، از نقطه‌ی D بر وتر BC عمود می‌کنیم

و پای عمود را نقطه‌ی H می‌نامیم.

الف - ثابت کنید $\triangle ABD = \triangle HBD$

ب - ثابت کنید $\hat{DAM} = \hat{DHM}$



۵۹) فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلث متساوی‌الساقینی که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

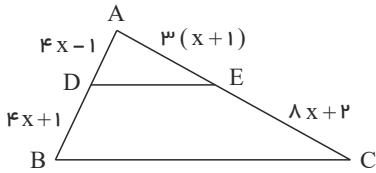
ب) مثلثی که شرایط الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت الف) را داشته باشد و مساحت آن 8cm^2 باشد.

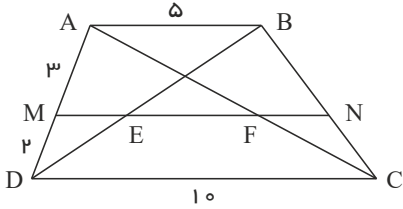
۶۰) در مثلث ABC ، نیمساز دو زاویه B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند دایره‌ای رسم کنید که بر سه ضلع مثلث مماس

باشد طریقه رسم دایره را توضیح دهید.

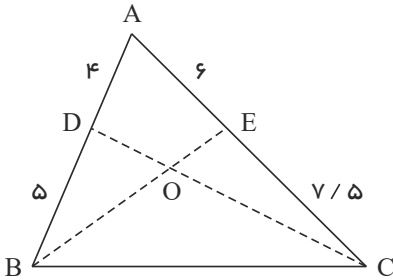
۶۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. مقدار x را بدست آورید.



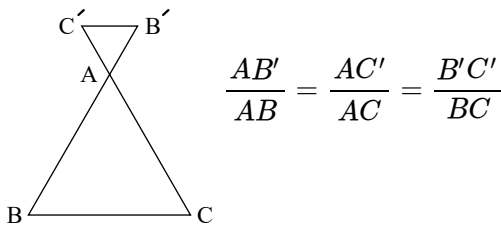
۶۲ در دوزنقه شکل روبرو $MN \parallel AB$ است. طول پاره خط EF را بدست آورید.



۶۳ در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE را بدست آورید.

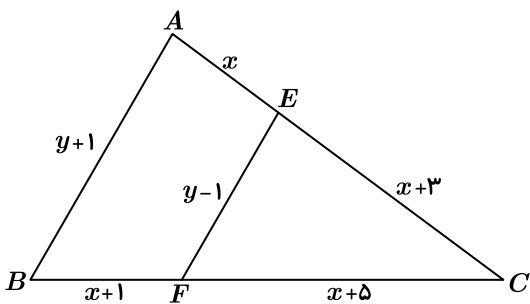


۶۴ ثابت کنید در هر مثلث پاره خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

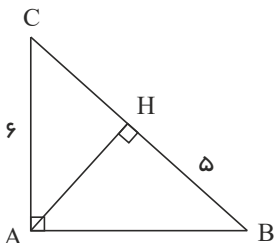


۶۵ با توجه به شکل، اگر $B'C' \parallel BC$ باشد، آن گاه ثابت کنید:

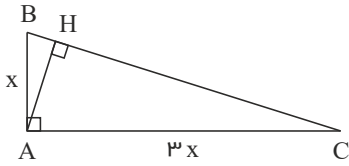
۶۶ اگر $EF \parallel AB$ مقادیر x, y را بیابید.



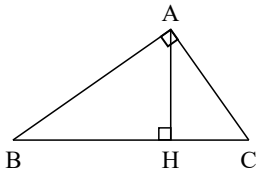
۶۷ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) اگر $AC = 6$ و $BH = 5$ باشد، اندازه‌ی AH و AB را بدست آورید.



۶۸ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ به ۳ و مساحت مثلث ۶۰ واحد مربع است. طول ارتفاع وارد بر وتر را بدست آورید.



۶۹ در ذوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها ۴ و ۹ واحد و اندازه‌ی ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی را بدست آورید که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می‌شود.



۷۰ در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو در هر حالت، اندازه‌ی پاره‌خط خواسته شده را بدست آورید.

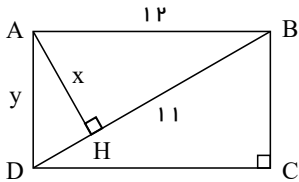
الف $AC = ?$, $AB = ?$, $AH = ?$, $BH = 9$, $BC = 10$

ب $AB = ?$, $AH = ?$, $BC = ?$, $CH = 2$, $AC = 5$

پ $CH = ?$, $BH = ?$, $AH = ?$, $BC = ?$, $AC = 6$, $AB = 8$

ت $AC = ?$, $BC = ?$, $BH = ?$, $AH = 6$, $AB = 12$

۷۱ در مستطیل مقابل مقادیر x و y را بدست آورید.



۷۲ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید، به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$ باشد. اکنون

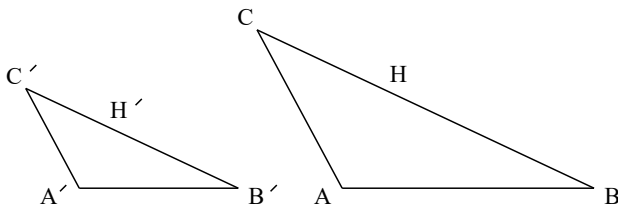
ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.

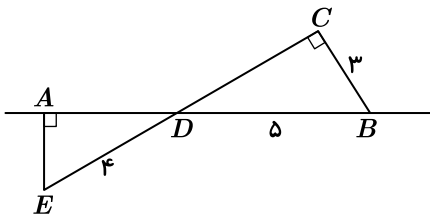
ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را بدست آورید.

پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

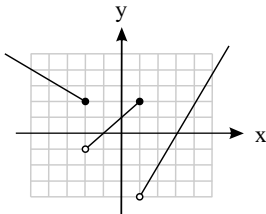
ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را بدست آورید.



۷۳ در شکل روبه‌رو، ابتدا نشان دهید دو مثلث ADE و CDB متشابه‌اند، سپس به کمک آن طول پاره‌خط AD را بیابید.



۷۴ ضابطه و دامنه و برد تابع مربوط به نمودار روبرو را بنویسید.



۷۵ اگر $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 3}$ باشد، مقدار $f(2 - \sqrt{3})$ را بدست آورید.

۷۶ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ و با دامنه $D_f = [-5, 5] - \{0\}$ را رسم کنید.

۷۷ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = -3 + \sqrt{x - 4}$ را رسم کنید.

۷۸ دامنه تابع $f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 + ax + b}$ ، مجموعه $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$ می باشد. a و b را به دست آورید.

۷۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a + \sqrt{x + b}$ ، محور x ها را در نقطه ای به طول ۵ قطع می کند. اگر نمودار این تابع از نقطه $(-2, 1)$ بگذرد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۸۰ نمودار هر یک از توابع زیر را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

الف

$$y = [x] + 1$$

ب

$$y = 2[x] - 3$$

پ

$$y = x + [x]$$

ت

$$y = x - [x]$$

۸۱ اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(1) = 5$ و $f^{-1}(9) = 3$ ، آنگاه ضابطه f و f^{-1} را بدست آورید.

۸۲ ضابطه f وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^{\geq -2} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq -1} \\ f(x) = x^2 + 4x + 3 \end{cases}$$

۸۳ در تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ اگر $f^{-1}(4) = a$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

۸۴ با رسم نمودار هر یک از توابع زیر، مشخص کنید کدام یک از توابع زیر، تابعی یک به یک است؟ در توابع غیر یک به یک، دامنه ای مشخص کنید که تابع در آن محدوده یک به یک شود.

الف

$$y = 2x + 1$$

ب

$$f(x) = x^2 - 2x$$

پ

$$y = 2 + \sqrt{x + 1}$$

ت

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

ث

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x + \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

ج

$$f(x) = |x - 1| + 1$$

ج

$$f(x) = [x]$$

ح

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

۸۵) نمودار تابع وارون، تابع خطی $f(x) = -x + m$ از نقطه $(1, -3)$ می‌گذرد. ابتدا مقدار m را به دست آورید و سپس ضابطه تابع وارون f را بنویسید.

۸۶) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 4$ باشد، ابتدا تابع $\frac{f}{g}$ و دامنه‌ی آن را بدست آورده و سپس مقدار $(g - 3f)(5)$ را محاسبه کنید.

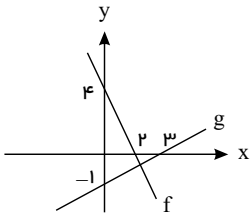
۸۷) اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = -3x + 3$ باشد، دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بدست آورده و سپس مقدار $(2f - g)(0)$ را محاسبه کنید.

۸۸) اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ دو تابع باشند، آن‌گاه مطلوبت محاسبه:

الف - دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ ب - دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{g}{f}$

پ - $(4f - 3g)(6)$

۸۹) اگر نمودار تابع f و g بصورت روبرو باشند، مطلوبت: الف - ضابطه و دامنه‌ی تابع $f + g$ ب - مقدار $(3g - f)(6)$



۹۰) در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق در تابع داده شده را بیابید.

الف

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

ب

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$g(x) = x + 2$$

پ

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = -\sqrt{x}$$

ت

$$f(x) = \frac{x-2}{x+5}$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 10$$

ث

$$g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\}$$

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\}$$

الف

$$D_{\frac{f}{g}}$$

ب

$$D_{\frac{g}{f}}$$

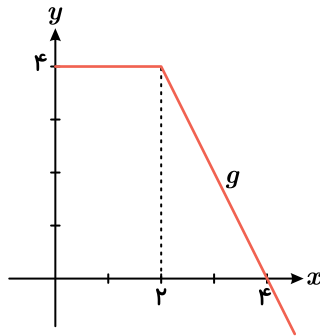
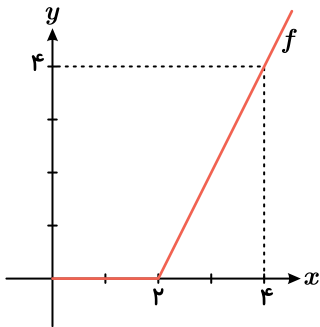
۹۱) اگر $f(x) = \sqrt{x+4}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-4}$ مطلوب است:

ب

$$D \frac{f}{g} + \frac{g}{f}$$

ت

$$(2f - g)(\delta)$$



۹۲ مطابق شکل زیر، دو تابع f و g داده شده‌اند. حاصل جمع، ضرب و تقسیم دو تابع را به دست آورید.

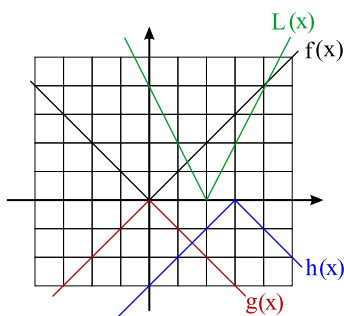
۹۳ نمودار سهمی $y = x^2 + 4x$ را ۳ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، معادله‌ی آن را پس از انتقال بنویسید.

۹۴ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$ ب) $h(x) = -|x - 3|$ پ) $l(x) = 2|x - 2|$

۹۵ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$ ب) $s(x) = -\sqrt{x - 2}$ پ) $t(x) = -3\sqrt{x}$
 ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$ ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x - 3}$

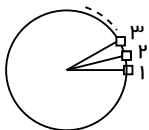


۹۶ چرخ و فلکی دارای ۳۰ کابین است و ما، در کابین شماره‌ی ۸ قرار داریم. اگر به اندازه‌ی $\frac{32\pi}{5}$ رادیان و در جهت مثلثاتی بچرخیم، در موقعیت چه کابینی قرار می‌گیریم؟

۹۷ مجموع اندازه‌ی سه زاویه $\frac{5\pi}{4}$ رادیان و زاویه‌ها با عددهای ۲ و ۳ و ۴ متناسب هستند. زاویه‌ها را بر حسب درجه و رادیان بدست آورید.

۹۸ در فاصله‌ی ساعت ۱۰ تا ۱۰:۳۰ عقربه‌های ساعت‌شمار، دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار چه زاوایی بر حسب رادیان طی می‌کنند؟

۹۹ فرض کنید سوار چرخ و فلکی با ۸۰ کابین شده‌اید. اگر در ابتدا در کابین شماره ۵ قرار داشته باشید، پس از $\frac{84\pi}{20}$ رادیان دوران، در موقعیت کدام کابین قرار خواهید داشت؟



۱۰۰ اگر $\sin \theta = \frac{3}{5}$ و انتهای زاویه‌ی θ در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ را بدست آورید.

۱۰۱ اگر $x = \frac{2}{\sin \alpha}$ و $y = 3 \cot \alpha$ باشد، رابطه‌ی بین x و y بدست آورید.

۱۰۲) حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

ب) $\sin(-45^\circ) \times \tan(-60^\circ) - \cos(-60^\circ) \times \cot(-30^\circ)$

پ) $\frac{\tan(-45^\circ) + 2 \sin(-270^\circ)}{\cos(-360^\circ) - \cot(-45^\circ)}$

ت) $\frac{\sin \frac{5\pi}{6} + 2 \cos 120^\circ}{\tan \frac{3\pi}{4} + \sqrt{2} \cos 135^\circ}$

ث) $\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{11\pi}{14}$

ج) $\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \times \cot 225^\circ - 3 \cos 240^\circ \times \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\tan^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

۱۰۳) اگر $\tan 20^\circ = 0,36$ باشد حاصل $\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ}$ را بدست آورید.

۱۰۴) اگر $\tan \theta = 0,2$ باشد، مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ را بدست آورید.

۱۰۵) اگر $\tan 15^\circ = 0,28$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ را بدست آورید.

۱۰۶) اگر $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(7\pi + \alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)} = \frac{1}{6}$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ را بدست آورید.

۱۰۷) حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{3 \sin 150^\circ - \sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} + \cos 300^\circ}{\cot(-135^\circ) - \sqrt{3} \tan \frac{5\pi}{6}}$

ب) $\frac{2 \sin \frac{7\pi}{6} \times \tan \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{3}}{\cos^2\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \cot^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

پ) $2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + 7 \sin(\pi - \alpha) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

ت) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cot(\pi - \alpha) + 3 \cos(\pi + \alpha) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

ث) $\sqrt{3} \cot \frac{7\pi}{3} + 2 \sin \frac{20\pi}{3} + 2 \cos \frac{5\pi}{3} \times \tan \frac{50\pi}{3}$

ج) $\frac{\tan 120^\circ \cos 210^\circ - \sin 225^\circ \cos 315^\circ}{\cot 135^\circ \sin 230^\circ - \cos 240^\circ \tan 225^\circ}$

چ) $3 \tan \frac{29\pi}{6} - \sin \frac{39\pi}{4} + \cos \frac{27\pi}{4} - \cot \frac{34\pi}{3}$

ح) $5 \sin^2\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 2 \tan^2\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 3 \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) - \cot^2\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

۱۰۸ اگر $\frac{\sin(\frac{11\pi}{2} + \alpha) + 2 \cos(5\pi - \alpha)}{2 \cos(\frac{7\pi}{2} + \alpha) - 3 \sin(17\pi + \alpha)} = \frac{1}{10}$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ را بدست آورید.

۱۰۹ حاصل هریک از عبارتهای زیر را بدست آورید.

الف

$$\tan 135^\circ + \cot 12^\circ$$

ب

$$\cos(-21^\circ) + \cot(24^\circ)$$

پ

$$\sin 63^\circ + \tan(-54^\circ)$$

ت

$$\cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan(72^\circ) - \tan(-60^\circ)$$

ث

$$\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)$$

ج

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{-4\pi}{3}\right)}$$

۱۱۰ در تساویهای زیر به جای x یک زاویه مناسب قرار دهید:

$$\sin x = \cos(2^\circ + x)$$

۱۱۱ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه x	12°	135°	15°	21°	225°	24°	30°	33°
نسبت								
$\sin x$								
$\cos x$								
$\tan x$								
$\cot x$								

۱۱۲ اگر $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{3}{5}$ و $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ باشد، مقدار $\tan\left(\frac{7\pi}{2} - a\right)$ را به دست آورید.

۱۱۳ آیا نمودار هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق هستند یا خیر؟

الف) $y_1 = \sin(4\pi - x)$, $y_2 = \cos(x + \frac{3\pi}{2})$

ب) $y_1 = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$, $y_2 = \cos(\pi - x)$

پ) $y_1 = \sin(\pi - x)$, $y_2 = \cos(\frac{3\pi}{2} - x)$

۱۱۴ بُرد هر یک از توابع زیر را در دامنه‌ی داده شده بدست آورید.

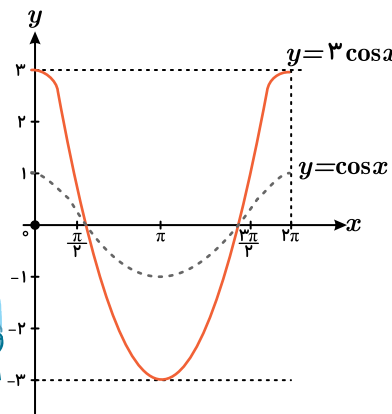
الف) $y = 3 \sin x - 1 \quad [0, 2\pi]$

ب) $f(x) = 2 - 4 \cos x \quad [0, 2\pi]$

پ) $h(x) = 3 \sin^2 x - 2 \quad [0, 2\pi]$

ت) $y = 1 - 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) \quad [0, 2\pi]$

۱۱۵ بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = -2 \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + 3$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ بدست آورید.



۱۱۶ هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.

الف

$$y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$$

ب

$$y = \cos x - 1$$

پ

$$y = 1 - \frac{1}{2} \cos x$$

ت

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$$

۱۱۷ نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۱۱۸ اگر نمودار تابع $f(x) = ab^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد، مقدار $f(-1)$ را بیابید.

۱۱۹ اگر $2^x = 6$ ، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) 8^{x-1}

ب) $4^x + 8^x$

پ) 16^{x-2}

ت) $(0, 25)^{2x} \times 64^{x-1}$

۱۲۰ نمودارهای دو تابع $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ و $f(x) = 3^{ax+b}$ در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد، $f^{-1}(27)$ را بدست آورید.

۱۲۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $9^x = 3^{x^2-4x}$

ب) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{25}{9}$

پ) $3^{5x+2} = 27\sqrt{3}$

ت) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+3} = \left(\frac{16}{81}\right)^x$

ث) $27^x - 3^{2x-5} = 0$

ج) $2^x + 2^{x+2} = 40$

ح) $3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$

خ) $5^{2x+3y} = 7^{x+y+1}$

۱۲۲ دامنه توابع زیر را بدست آورید.

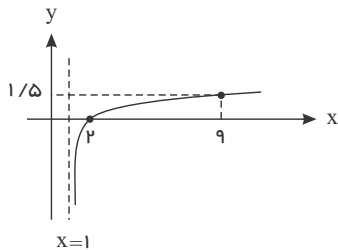
الف) $y = \log_x(2x+6)$

ب) $f(x) = \log_{(x-1)}(12-2x)$

پ) $f(x) = \log_{(x-2)}(25-x^2)$

ت) $f(x) = \log_{(x-5)}(x^2-16)$

۱۲۳ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a(x-1)$ بصورت زیر باشد، ضابطه وارون آن را بدست آورید.



۱۲۴ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ باشد، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log 5$

ب) $\log 18$

پ) $\log 1,5$

ت) $\log 75$

ث) $\log 42$

ج) $\log \frac{98}{45}$

چ) $\log \sqrt{210}$

ح) $\log \frac{\sqrt[3]{35}}{12}$

خ) $\log(135\sqrt[4]{56})$

۱۲۵) حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log_5 150 - \log_5 6$

ب) $\log_7 \sqrt[4]{343}$

پ) $\log_5 625 + \log_2 \frac{1}{64} + \log_{10} 0.7001$

ت) $5^{(\log_5 3 - 2)}$

ث) $6 \log_9 \sqrt[3]{81} - 3 \log_2 \frac{1}{8} + 4 \log_5 \frac{1}{125}$

ج) $\log_{27} 243$

چ) $\log_{\frac{1}{3}} 27 - 3 \log_7 \frac{1}{49} + 2 \log 0.70001$

ح) $\log_5 (\sqrt{125})^3$

۱۲۶) اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5})$ چقدر است؟

۱۲۷) حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log 35 + 2 \log 2 \sqrt{7} - \log 200 - 2 \log 7$

ب) $\log_5 200 - \log_5 40$

پ) $\log_6 12 \sqrt{3} + \log_6 3 \sqrt{12}$

ت) $7^{(2 \log_7 3 + 3 \log_7 2)}$

ث) $\sqrt{10}^{(\log 32 + \log 8)}$

ج) $8^{(\log_2 \sqrt[3]{20} - \log_2 3)}$

چ) $\log 20 + 6 \log \sqrt[3]{5} - \log_2 \sqrt[3]{32}$

۱۲۸) اگر $\log 3 + \log \sqrt[3]{3} = \log(81)^k$ باشد، حاصل عبارت $\log_2 \frac{5}{k}$ را بدست آورید.

۱۲۹) اگر $\log \sqrt[3]{a} = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\log_8 (a^3 + 7)$ چقدر است؟

۱۳۰) اگر $\log_8 2 \sqrt[3]{0.25} = A$ باشد، آنگاه مقدار $\log_2 (\frac{1}{A} - 1)$ چقدر است؟

۱۳۱) اگر $\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{e}} 32$ را بدست آورید.

۱۳۲) حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{n}{n+1}$

ب) $5^{(2 \log_5 2 + 3 \log_5 3)}$

۱۳۳) اگر $\log_y \sqrt{2} = \frac{1}{4}$ و $\log_x \sqrt[3]{16} = \frac{4}{3}$ باشند، حاصل $\log_{xy} y^2$ را بدست آورید.

۱۳۴) تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف)

$$\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$$

ب)

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

پ

$$a^{\log_a b} = b$$

ت

$$\log_b a \times \log_a b = 1$$

الف) $\log_7 \sqrt[5]{49}$

ب) $\log_3 27^{\frac{1}{2}}$

پ) $-\log_5 125$

ت) $3 \log_{10} \sqrt{1000}$

۱۳۵ حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log_5(x+6) = \log_5(2x-8)$

ب) $\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$

پ) $\log_7(x+2) = \log_7 8$

ت) $\log(x+1) - \log(x-3) = 3$

ث) $\log_2(2x+1) = 3$

ج) $\log(2x) - \log(x-3) = 1$

چ) $\log \sqrt{x} = \log_2 64$

ح) $\log_2(x-2) = \frac{1}{2}$

۱۳۶ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_9(x^2 - 24) = \log_9 5x$

ب) $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x+9)$

پ) $\log_x(x^3 - 2x) = 2$

ت)
$$\begin{cases} \log x = \log 2 + \log y \\ 2^x \times 8^y = 4 \end{cases}$$

ث)
$$\begin{cases} \log y = 2 \log 3 + \log x \\ 2^{x-y} \times 3^{x+y} = 1 \end{cases}$$

۱۳۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_x(x^2 + x) = \log_x 6$

ب) $\log_9 x^2 + 7x + 7 = 0$

پ) $\log_x(x^3 + 3x - 6) = 3$

ت) $\log_8(x+1)^3 + 2 \log_8 x = 1$

ث) $\log_{12}(x-2) + \log_{12}(x+2) = 1$

ج) $\log_3 3x - \log_4 = \log(7-x)$

چ) $\log_3 \sqrt{3} + \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log_2 x$

۱۳۸ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱۳۹) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$

ب) $2 \log \sqrt{2x + 3} + \log(2x - 3) - \frac{1}{2} \log 49 = 0$

پ) $\begin{cases} 1 + \log \sqrt{x + 1} = \log y \\ 4\sqrt{2} = 4^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log 10 + \log \sqrt{x + 1} = \log y \\ 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x} \end{cases}$

۱۴۰) اگر $2 = \log_3(5x + 1) + \log_3 x$ باشد، مقدار $\frac{4}{x}$ را بدست آورید.

۱۴۱) از معادله لگاریتمی $1 = \log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2)$ مقدار $\log_8(2x - 1)$ را بیابید.

۱۴۲) اگر $1 = \log(x^2 - x + 1) + \log(x + 1)$ باشد، مقدار $\log_3 x$ را بدست آورید.

۱۴۳) از دو معادله $2 = \log_3 x + \log_3 y$ و $x^2 + y^2 = 46$ مقدار $\log_6(x + y)$ را بدست آورید.

۱۴۴) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف

$\log_3(p^2 - 2) = \log_3 p$

ب

$\log_5(x + 1) + \log_5(x - 1) = 1$

پ

$3 \log_4 a - \log_4 5 = \log_4 25$

ت

$\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2$

۱۴۵) اگر $\log 2 \simeq 0.3$ و $\log 3 \simeq 0.5$ باشند، مقدار تقریبی $\log \sqrt[3]{12^2}$ را بدست آورید.

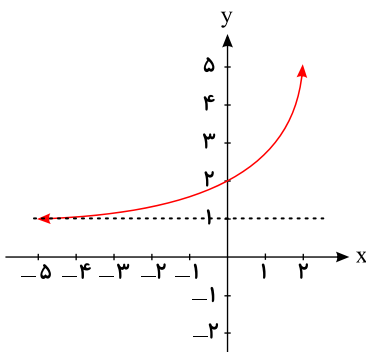
۱۴۶) نمودار تابع‌های $y = 2^x + 1$, $y = 2^{(x+3)}$, $y = 2^{(x-2)} - 2$, $y = 3 - 2^x$, $y = 2^{-x} - 4$ را رسم کنید و دامنه و برد هریک را مشخص کنید.

۱۴۷) تابع با ضابطه $f(x) = 2^{-(x+b)} + c$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول -1 و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -4 قطع می‌کند. ضابطه تابع را بدست آورده و سپس $f(-2)$ را بدست آورید.

۱۴۸) نمودار تابع‌های $y = \log_2(x - 3)$, $y = \log_2 x$, $y = \log_2(x + 5) + 2$, $y = \log_2(-x) + 2$, $y = 3 - \log_2 x$ و $y = \log_2(x + 3) - 2$ را رسم کنید و دامنه و برد هریک را مشخص کنید.

۱۴۹) تابع با ضابطه $f(x) = -\log_2(x + b) + c$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول -2 و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند. ضابطه تابع را بدست آورده و سپس $f(4)$ را محاسبه کنید.

۱۵۰) در دستگاه مختصات روبرو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را بدست آورید.



۱۵۱) نمودار تابع نمایی با ضابطه $f(x) = a \times b^x - 5$ از دو نقطه $(1, 7)$ و $(-1, -\frac{17}{4})$ می‌گذرد. مقایر a و b را به دست آورید.

۱۵۲) نمودار تابع $y = -\log_3(x - 2)$ را رسم کنید. (مراحل انتقال را رسم کنید)

۱۵۳) اگر تعداد باکتری موجود در یک نمونه از فرمول $P(t) = 600 \times 2^{\frac{t}{2}}$ بدست آید که t نشان دهنده زمان بر حسب ساعت باشد مطلوبست:
الف) تعداد اولیه باکتری‌ها

ب) تعداد باکتری‌ها پس از ۸ ساعت

پ) پس از چند ساعت ۷۶۸۰۰ باکتری داریم؟

۱۵۴) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x & x \geq 1 \\ 4 - x^2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x = 1$ بررسی کنید.

۱۵۵) اگر در تابع $f(x) = \begin{cases} x - a & x \geq 1 \\ x^2 + 2a & x < 1 \end{cases}$ مقدار حد راست در $x = 1$ ، نصف حد چپ در این نقطه باشد، a را بدست آورید.

۱۵۶) تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 2 \\ ax^2 + 3bx + 1, & x < 2 \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7$ باشد حاصل $a + b$ را بدست آورید.

۱۵۷) تابع $f(x) = \begin{cases} (a - 1)x + 5, & x > -2 \\ x^2 + 2b, & x < -2 \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 8$ باشد، a و b را بدست آورید.

۱۵۸) اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{ax + 2}{x + 1} & x > 1 \\ 2x + a & x < 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

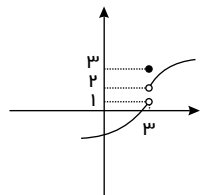
۱۵۹) هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] + |x|}{x + 1}$$

ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3}{|[x] + [-x]|}$$



$$A = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 5} + \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{xf(x)}{x + f(x)}$$

۱۶۰) با توجه به شکل، حاصل عبارت روبه‌رو را تعیین کنید.

۱۶۱) حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$

۱۶۲) حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1}$

۱۶۳) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 8x + 7}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8}$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x}$

۱۶۴) حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x - 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

۱۶۵) a را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{x - 2a}{x^2 - 4a^2} = \frac{1}{8}$ باشد.

۱۶۶) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+|x-2|}{x-1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد، a را بدست آورید.

۱۶۷) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

۱۶۸) مقدار a را طوری بدست آورید که تابع زیر در نقطه $x = 3$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

۱۶۹ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, & x > 0 \\ a \sin(x + \frac{\pi}{6}), & x \leq 0 \end{cases}$ به ازای چه مقداری از a در $x = 0$ پیوسته است؟

۱۷۰ پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} & x > 3 \\ 2 & x = 3 \\ 5x - 13 & x < 3 \end{cases}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 3$ بررسی کنید. در مورد پیوستگی تابع f در سایر نقاط چه می‌توان گفت؟

۱۷۱ در یک خانواده سه‌فرزندی می‌دانیم که حداقل یک فرزند دختر است. احتمال این که خانواده دارای ۲ فرزند دختر باشد را محاسبه کنید.

۱۷۲ اگر $P(A|B') = P(B) = 0.3$ باشد، مقدار $P(A - B)$ را بدست آورید.

۱۷۳ اگر در یک فضای نمونه‌ای S داشته باشیم $P(A|B') = 0.7$ و $P(B) = 0.4$ آنگاه $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

۱۷۴ یک کارخانه دو محصول A و B را در دو کیفیت عالی (E) و متوسط (M) تولید می‌کند. جدول زیر درصد تولید هر یک از محصولات را نشان می‌دهد. مطلوبست:

الف- اگر محصول از نوع A باشد، با کدام احتمال دارای کیفیت متوسط (M) است؟

ب- اگر محصول از نوع B باشد، کدام احتمال دارای کیفیت عالی (E) است؟

پ- اگر محصولی عالی (E) باشد، با کدام احتمال از نوع A است؟

ت- اگر محصولی متوسط (M) باشد، با کدام احتمال از نوع B است؟

ث- احتمال این که محصولی دارای کیفیت عالی (E) و یا از نوع B باشد؟

کیفیت	E	M
محصول		
A	۵۵%	۱۰%
B	۳۰%	۵%

۱۷۵ ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A ، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{4}$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی، حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

۱۷۶ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشد و داشته باشیم $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ ، آنگاه $P(B')$ را بدست آورید.

۱۷۷ برای دو پیشامد مستقل A و B ، اگر $n(A) = 12$ و $n(B) = 6$ و پیشامد این که حداقل یکی از این دو پیشامد A و B روی دهد ۱۶ عضو دارد. فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

۱۷۸ احتمال این که فرزند در خانواده A با چشمانی به رنگ آبی متولد شود ۴۰ درصد و احتمال این که فرزند در خانواده B با چشمان آبی متولد شود ۷۰ درصد است. مطلوبست احتمال آنکه:

الف- هر دو نوزاد با چشمان به رنگ آبی متولد شوند.

ب- هر دو نوزاد با چشمانی به رنگ غیر از آبی متولد شوند.

پ- فقط یکی از نوزادان با چشمانی به رنگ آبی متولد شوند.

۱۷۹ در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C عددی بزرگتر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۱۸۰ احمد به احتمال ۰.۷ در تیم بسکتبال مدرسه‌شان و به احتمال ۰.۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم موردنظر انتخاب شود.

ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۱۸۱ احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر 0.625 باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۱۸۲ اگر میانگین داده‌های $x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3$ برابر \bar{X} باشد، میانگین باشد، میانگین داده‌های $3, 3x_3 + 2, 3x_2 + 1, 3x_1 + 1$ را بیابید.

۱۸۳ اگر میانگین داده‌های x_1, x_2, \dots, x_N برابر \bar{X} باشد، میانگین داده‌های $x_N + N\bar{X}, \dots, x_2 + 2\bar{X}, x_1 + \bar{X}$ چقدر می‌شود؟

۱۸۴ در داده‌های مرتب شده $4, 6, 7, 8, 10, x, 20, 22, 27, 29$

الف- اگر میانه برابر با 13 باشد، x را بدست آورید.

ب- اگر میانگین برابر 15 باشد، x و میانه را بدست آورید.

۱۸۵ در یک جامعه آماری، انحراف 7 تا از داده‌ها از میانگین برابر با $4-$ ، انحراف 5 تا از داده‌ها از میانگین برابر 2 و انحراف x تا از داده‌ها از میانگین برابر 3 است. واریانس این جامعه آماری را بدست آورید.

۱۸۶ هشت داده آماری با میانگین 15 و واریانس 4 داریم. اگر دو داده 12 و 18 به آن‌ها افزوده شود، واریانس 10 داده حاصل را بدست آورید.

۱۸۷ میانگین و واریانس 29 داده آماری به ترتیب 17 و 5 می‌باشد. اگر داده‌های ناچور $12, 13, 21, 22$ حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده را بدست آورید.

۱۸۸ یک جامعه آماری با اندازه 12 و واریانس 12.6 ، با جامعه دیگری با اندازه 24 و واریانس 7.2 ، تشکیل جامعه جدیدی داده‌اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جدید چقدر است؟

۱۸۹ در 25 داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب 30 و 8 می‌باشد، اگر داده‌های ناچور $10, 15, 45, 50$ از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده را بدست آورید.

۱۹۰ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی 15 واحد با ضریب تغییرات 0.2 محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها را بدست آورید.

۱۹۱ اگر همه داده‌های آماری را در عدد 5 ضرب کنیم و سپس به هر کدام 4 واحد اضافه کنیم، دامنه تغییرات چه تغییری می‌کند؟

۱۹۲ در 150 داده آماری با میانگین 12 ، به دو برابر هر یک از داده‌ها 3 واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود؟

پاسخنامه تشریحی

۱

الف)

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} \rightarrow AB = 5$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9} \rightarrow AC = 5$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

$$\rightarrow BC = 5\sqrt{2}$$

$$\Delta ABC \text{ محیط } P = AB + AC + BC = 5 + 5 + 5\sqrt{2} \rightarrow P = 10 + 5\sqrt{2}$$

ب)

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 4}{2 - 5} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \\ m_{AC} &= \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0 - 3}{2 - (-2)} = -\frac{3}{4} \end{aligned} \right\} m_{AB} \cdot m_{AC} = \frac{4}{3} \times \frac{-3}{4} = -1$$

$\rightarrow AB \perp AC \rightarrow \hat{A} = 90^\circ \rightarrow \Delta ABC$ قائم الزاویه متساوی الساقین

$$\text{پ) } S_{\Delta ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{5 \times 5}{2} \rightarrow S_{\Delta ABC} = 12,5$$

۲

$$y = 2x + 1 \rightarrow C(\alpha, 2\alpha + 1), A(3, 0), B(-1, 0)$$

$$AC = BC \rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1 - 0)^2} = \sqrt{(\alpha + 1)^2 + (2\alpha + 1 - 0)^2}$$

$$\rightarrow (\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1)^2 = (\alpha + 1)^2 + (2\alpha + 1)^2 \rightarrow (\alpha - 3)^2 = (\alpha + 1)^2$$

$$\rightarrow \cancel{\alpha^2} - 6\alpha + 9 = \cancel{\alpha^2} + 2\alpha + 1 \rightarrow 9 - 1 = 2\alpha + 6\alpha \rightarrow 8 = 8\alpha \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow C(1, 3)$$

۳

$$\text{الف) } AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}, \quad AB = 2R \rightarrow 2\sqrt{13} = 2R \rightarrow R = \sqrt{13}$$

$$\left. \begin{aligned} x_O &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4 \\ y_O &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow O(4, 1) \text{ مرکز دایره}$$

$$\text{ب) } OC = \sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$OC = \sqrt{13} \rightarrow OC = R \rightarrow$ نقطه C روی محیط دایره قرار دارد

۴) رأس سوم را $P(x, y)$ در نظر می گیریم. فاصله رأس سوم از دو رأس دیگر برابر است و این فاصله برابر طول ضلع مثلث است.

$$(0, 0), (x, y): \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(3, 0), (x, y): \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} \rightarrow -6x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

از طرفی فاصله $(0, 0)$ و $(3, 0)$ برابر طول ضلع مثلث است.

$$(3, 0), (0, 0): \sqrt{3^2 + 0^2} = 3 \rightarrow \text{طول ضلع} = 3 \xrightarrow{\text{مثلث متساوی الاضلاع}} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = 3$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \xrightarrow{x = \frac{3}{2}} \sqrt{\frac{9}{4} + y^2} = 3 \rightarrow y^2 = 9 - \frac{9}{4} \rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), P\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

پس مسئله دو جواب دارد.

چون مشخص نیست چه رئوسی روبه روی هم اند، پس حتماً باید نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کنیم.

باید نشان دهیم:

$$AB = BC = CD = DA$$

$$AB = \sqrt{(-2-6)^2 + (2+13)^2} = \sqrt{289} = 17$$

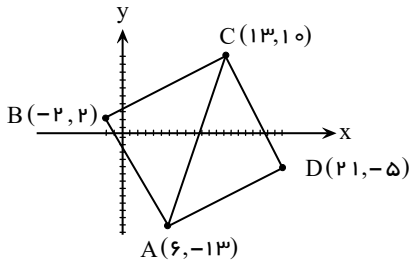
$$BC = \sqrt{(13+2)^2 + (10-2)^2} = 17$$

$$CD = \sqrt{(21-13)^2 + (-5-10)^2} = 17$$

$$DA = \sqrt{(6-21)^2 + (-13+5)^2} = 17$$

اما یک لوزی هم چهار ضلع برابر دارد. حال کافی است رابطه فیثاغورس را برای مثلث ABC تحقیق کنیم و نشان دهیم مثلث ABC در زاویه B قائمه است و این یعنی $ABCD$ مربع است.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(13-6)^2 + (10+13)^2} = \sqrt{578}$$



$$\text{فیثاغورس: } AC^2 \stackrel{?}{=} AB^2 + BC^2 \rightarrow 578 \stackrel{?}{=} 289 + 289 \rightarrow 578 \stackrel{?}{=} 578$$

در مثلث متساوی الاضلاع طول سه ضلع با هم برابر است پس داریم:

$$A(0, 0), B(6, 0), C(x_C, y_C)$$

$$AB = \sqrt{(0-6)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$AC = \sqrt{(0-x_C)^2 + (0-y_C)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$$

$$BC = \sqrt{(6-x_C)^2 + (0-y_C)^2} = \sqrt{(6-x_C)^2 + y_C^2}$$

$$AC = BC \rightarrow x_C^2 + y_C^2 = (6-x_C)^2 + y_C^2 \rightarrow y_C^2 = 36 - 12x_C + y_C^2$$

$$\rightarrow 12x_C = 36 \rightarrow \boxed{x_C = 3}$$

$$AB = AC \rightarrow 6 = \sqrt{3^2 + y_C^2} \rightarrow 36 = 9 + y_C^2 \rightarrow 27 = y_C^2$$

$$\rightarrow y_C = \pm\sqrt{27} \rightarrow \boxed{y_C = \pm 3\sqrt{3}}$$

مسئله دو جواب دارد: $C(3, -3\sqrt{3}), C(3, 3\sqrt{3})$

$$y = 2x \rightarrow C(\alpha, 2\alpha), A(1, 1), B(3, -1)$$

$$AC = BC \rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2 + (2\alpha-1)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (2\alpha+1)^2}$$

$$\rightarrow (\alpha-1)^2 + (2\alpha-1)^2 = (\alpha-3)^2 + (2\alpha+1)^2$$

$$\rightarrow \cancel{\alpha^2} - 2\alpha + 1 + \cancel{4\alpha^2} - 4\alpha + 1 = \cancel{\alpha^2} - 6\alpha + 9 + \cancel{4\alpha^2} + 4\alpha + 1$$

$$\rightarrow 2 - 6\alpha = 10 - 2\alpha \rightarrow 2 - 10 = 6\alpha - 2\alpha \rightarrow -8 = 4\alpha \rightarrow \boxed{\alpha = -2} \rightarrow \boxed{C(-2, -4)}$$

$$AB = R, AC = R \rightarrow AB = AC \rightarrow \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2} \rightarrow (a-2)^2 + (2a-1)^2 = (a+1)^2 + (2a-4)^2$$

$$\rightarrow \cancel{a^2} - 4a + 4 + \cancel{4a^2} - 4a + 4 = \cancel{a^2} + 2a + 1 + \cancel{4a^2} - 16a + 16 \rightarrow -8a + 8 = -14a + 17$$

$$\rightarrow 14a - 8a = 17 - 8 \rightarrow 6a = 9 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow R = AB = \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(\frac{3}{2}-2)^2 + (3-1)^2} \rightarrow R = \frac{5}{2}$$

۹

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2) \rightarrow y - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \quad x = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}(0) + \frac{5}{2} \rightarrow y = \frac{5}{2} \rightarrow A(0, \frac{5}{2})$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \rightarrow \frac{3}{4}x = \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{10}{3} \rightarrow B(\frac{10}{3}, 0)$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(0 - \frac{10}{3})^2 + (\frac{5}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{25}{4}}$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{\frac{100 + 56.25}{9}} = \sqrt{\frac{156.25}{9}} \rightarrow AB = \frac{12.5}{3}$$

۱۰

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (3 - 0)^2} \Rightarrow OA = \sqrt{18}$$

$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} \Rightarrow OB = \sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - 3)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{20}$$

مشاهده می شود که: $OA^2 + OB^2 = AB^2$ یعنی $(\sqrt{18})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{20})^2$

پس AB قطر مستطیل و OA و OB ضلع مستطیل ←

$$S = OA \times OB = \sqrt{18} \times \sqrt{2} \rightarrow S = \sqrt{36} \rightarrow S = 6$$

۱۱

الف)

$$\left. \begin{aligned} x_N &= \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 5 = \frac{x_A + 7}{2} \rightarrow 10 = x_A + 7 \rightarrow x_A = 3 \\ y_N &= \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow -4 = \frac{y_A - 2}{2} \rightarrow -8 = y_A - 2 \rightarrow y_A = -6 \end{aligned} \right\} \rightarrow A(3, -6)$$

ب) قرینه نقطه C نسبت به نقطه M نقطه D است، بطوری که M وسط پاره خط DC است.

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_C + x_D}{2} \rightarrow -1 = \frac{1 + x_D}{2} \rightarrow -2 = 1 + x_D \rightarrow x_D = -3 \\ y_M &= \frac{y_C + y_D}{2} \rightarrow 4 = \frac{2 + y_D}{2} \rightarrow 8 = 2 + y_D \rightarrow y_D = 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow D(-3, 6)$$

۱۲

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 7}{2} \rightarrow x_M = 5 \\ y_M &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1 + 11}{2} \rightarrow y_M = 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow M(5, 6)$$

$$\text{ب) } AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (9 - 6)^2} = \sqrt{16 + 9} \rightarrow AM = 5$$

$$\text{پ) } m_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{9 - 6}{1 - 5} = \frac{3}{-4}$$

$$\rightarrow y - y_A = m_{AM}(x - x_A) \rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}(x - 1) \rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 9 \rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14 + 10}{2} \rightarrow x_M = 12 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-13)}{2} \rightarrow y_M = -5 \end{aligned} \right\} \rightarrow M(12, -5)$$

۱۳

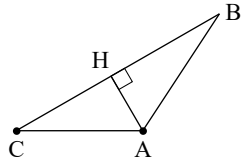
$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} \rightarrow \boxed{OM = 13}$$

$$\text{ب) } m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - (-13)}{14 - 10} = \frac{16}{4} \rightarrow m_{AB} = 4$$

$$\text{معادله عمود منصف } AB \text{ شیب خط عمود بر } m' \rightarrow m' = \frac{-1}{m_{AB}} \rightarrow m' = -\frac{1}{4}$$

$$y - y_M = m'(x - x_M) \rightarrow y - (-5) = -\frac{1}{4}(x - 12)$$

$$\rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}x + 3 \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x - 2}$$



۱۴) برای محاسبه مساحت کافی است طول قاعده (BC) و ارتفاع (AH) را به دست آوریم.

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$BC = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

برای محاسبه AH باید فاصله نقطه A از خط گذرنده از B و C را تعیین کنیم.

$$B(3, 4), C(-1, 1) : m_{BC} = \frac{4 - 1}{3 - (-1)} = \frac{3}{4}$$

$$y - y_0 = m_{BC}(x - x_0) \xrightarrow{(-1, 1)} y - 1 = \frac{3}{4}(x + 1)$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} \rightarrow \frac{3}{4}x - y + \frac{7}{4} = 0 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -1 \\ c = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$(0, 1) : AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{3}{4} \times 0 + (-1) \times 1 + \frac{7}{4}|}{\sqrt{\frac{9}{16} + 1}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$S = \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times 5 = \frac{3}{2}$$

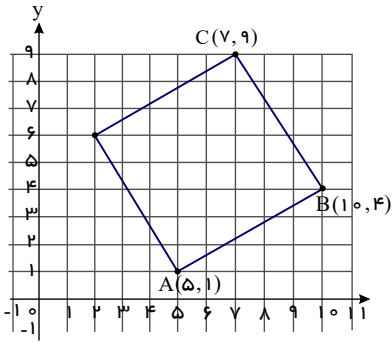
$$\text{الف) } m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{5 - 10} = \frac{-3}{-5} \rightarrow m_{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\text{ب) } AB \perp AD \rightarrow m_{AD} \cdot m_{AB} = -1 \rightarrow m_{AD} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} \rightarrow m_{AD} = -\frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 + 7 = 10 + x_D \\ 1 + 9 = 4 + y_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$

پ) مربع نوعی از متوازی الاضلاع است و داریم:

ن)



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow 4 = \frac{|4(3) + m(-2) + 2|}{\sqrt{4^2 + m^2}} \rightarrow 4 = \frac{|14 - 2m|}{\sqrt{16 + m^2}}$$

$$4\sqrt{16 + m^2} = 2|7 - m| \rightarrow 2\sqrt{16 + m^2} = |7 - m|$$

به توان ۲

$$\rightarrow 4(16 + m^2) = (7 - m)^2 \rightarrow 64 + 4m^2 = 49 - 14m + m^2 \rightarrow 3m^2 + 14m + 15 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 14^2 - 4(3)(15) = 196 - 180 = 16 \rightarrow m = \frac{-14 \pm \sqrt{16}}{2(3)} \rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

الف) $\begin{cases} 5x - 12y + 8 = 0 \rightarrow 5x + 8 = 12y \rightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{2}{3} \rightarrow m_1 = \frac{5}{12} \\ -10x + 24y + 10 = 0 \rightarrow 24y = 10x - 10 \rightarrow y = \frac{5}{12}x - \frac{5}{12} \rightarrow m_2 = \frac{5}{12} \end{cases}$

$m_1 = m_2 \rightarrow$ دو خط با هم موازیند

ب) $L_1: 5x - 12y + 8 = 0$ $L_2: 5x - 12y - 5 = 0$

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - (-5)|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{13}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} \rightarrow d = 1$$

الف) $2x^2 - 7x^2 - 4 = 0$

$$x^2 = u \rightarrow x^2 = u^2$$

$$\rightarrow 2u^2 - 7u - 4 = 0 \rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4(2)(-4) = 49 + 32 = 81$$

$$\rightarrow u = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \rightarrow \begin{cases} u = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2, x = -2 \\ u = -\frac{1}{2} \rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

ب) $x^2 + 3x^2 + 2 = 0$

$$x^2 = u \rightarrow x^2 = u^2$$

$$\rightarrow u^2 + 3u + 2 = 0 \rightarrow (u + 2)(u + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} u + 2 = 0 \rightarrow u = -2 \rightarrow x^2 = -2 \text{ ریشه حقیقی ندارد} \\ u + 1 = 0 \rightarrow u = -1 \rightarrow x^2 = -1 \text{ ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

الف) $x^2 - 8x^2 + 8 = 0$

$$x^2 = u \rightarrow x^2 = u^2$$

$$u^2 - 8u + 8 = 0 \rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(1)(8) = 64 - 32 = 32$$

$$\rightarrow u = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} \rightarrow u = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

۱۶

۱۷

۱۸

۱۹

$$\rightarrow \begin{cases} u = 4 + 2\sqrt{2} \rightarrow x^r = 4 + 2\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \\ x = -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \end{cases} \\ u = 4 - 2\sqrt{2} \rightarrow x^r = 4 - 2\sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \\ x = -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \end{cases} \end{cases}$$

ب) $4x^6 + 1 = 5x^r \rightarrow 4x^6 - 5x^r + 1 = 0$, $x^r = u \rightarrow x^6 = u^r$

$4u^r - 5u + 1 = 0 \rightarrow (4u - 1)(u - 1) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} 4u - 1 = 0 \rightarrow u = \frac{1}{4} \rightarrow x^r = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ u - 1 = 0 \rightarrow u = 1 \rightarrow x^r = 1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow 4u^r + 1 = 5u \rightarrow 4u^r - 5u + 1 = 0 \rightarrow \Delta = (-5)^r - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9$

$u = 1 \rightarrow x^r = 1 \rightarrow x = 1$

$\rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2(4)} \rightarrow u = \frac{5 \pm 3}{8} \rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{4} \rightarrow x^r = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ u = 1 \rightarrow x^r = 1 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

β و α واسطه‌ی حسابی بین $\frac{1}{\alpha} \rightarrow \alpha + \beta = 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$\rightarrow -\frac{3}{m^r - 4} = \frac{1}{4} \rightarrow 12 = m^r - 4 \rightarrow m^r = 16 \rightarrow m = \pm 4$

$m = 4 \rightarrow 12x^r - 3x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^r - 4(12)(4) = 9 - 192 < 0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$m = -4 \rightarrow 12x^r - 3x - 4 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^r - 4(12)(-4) = 9 + 192 > 0$ ریشه‌ی حقیقی دارد.

β و α واسطه‌ی هندسی بین $\sqrt{2} \rightarrow \alpha\beta = (\sqrt{2})^r$

$\rightarrow \frac{m^r - 3}{m} = 2 \rightarrow m^r - 3 = 2m \rightarrow m^r - 2m - 3 = 0$

$\rightarrow (m - 3)(m + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m - 3 = 0 \rightarrow m = 3 \rightarrow 3x^r - 5x + 6 = 0 \\ \Delta = (-5)^r - 4(3)(6) = 25 - 72 < 0 \text{ ریشه حقیقی ندارد} \\ m + 1 = 0 \rightarrow m = -1 \rightarrow -x^r - 5x - 2 = 0 \\ \Delta = (-5)^r - 4(-1)(-2) = 25 - 8 > 0 \text{ ریشه حقیقی دارد} \end{cases}$

$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 5 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \rightarrow P = \alpha\beta = 2 \end{cases}$

$\frac{\alpha^r}{\beta} + \frac{\beta^r}{\alpha} = \frac{\alpha^r + \beta^r}{\alpha\beta} = \frac{S^r - 3PS}{P} = \frac{5^r - 3(2)(5)}{2} = \frac{125 - 30}{2} = \frac{95}{2} \rightarrow \frac{\alpha^r}{\beta} + \frac{\beta^r}{\alpha} = 47,5$

$x^r + x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha & S = \alpha + \beta = -\frac{1}{1} \rightarrow S = -1 \\ \beta & P = \alpha\beta = \frac{-1}{1} \rightarrow P = -1 \end{cases}$

$X = x^r \rightarrow S' = \alpha^r + \beta^r = S^r - 3PS = (-1)^r - 3(-1)(-1) = -1 - 3 \rightarrow S' = -4$

$P' = \alpha^r \cdot \beta^r = (\alpha\beta)^r = P^r = (-1)^r \rightarrow P' = -1$

$\rightarrow X^r - S'X + P' = 0 \rightarrow X^r - (-4)X - 1 = 0 \rightarrow x^r + 4x - 1 = 0$

۲۰

۲۱

۲۲

۲۳

۲۴

۲۵

$$x^r - 2x - 1 = 0 \rightarrow \alpha, \beta \rightarrow$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{-2}{1} \rightarrow \boxed{S = 2}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{-1}{1} \rightarrow \boxed{P = -1}$$

$$S' = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \rightarrow S' = \frac{S+2}{P+S+1} = \frac{2+2}{-1+2+1} \rightarrow \boxed{S' = 2}$$

$$P' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{\beta+1} = \frac{1}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} \rightarrow P' = \frac{1}{P+S+1} = \frac{1}{-1+2+1} \rightarrow \boxed{P' = \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow X^r - S'X + P' = 0 \rightarrow X^r - 2X + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \boxed{2X^r - 4X + 1 = 0}$$

۲۶

$$2x^r - 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases} \rightarrow$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{-4}{2} \rightarrow S = 2$$

$$P = \alpha\beta = \frac{-6}{2} \rightarrow P = -3$$

$$\text{جدید معادله ی } X = \left(\frac{1}{x}\right)^r = \frac{1}{x^r} \rightarrow S' = \frac{1}{\alpha^r} + \frac{1}{\beta^r} = \frac{\alpha^r + \beta^r}{(\alpha\beta)^r} = \frac{S^r - 2P}{P^r} = \frac{2^r - 2(-3)}{(-3)^r} \rightarrow \boxed{S' = \frac{10}{9}}$$

$$P' = \frac{1}{\alpha^r} \cdot \frac{1}{\beta^r} = \frac{1}{(\alpha\beta)^r} = \frac{1}{P^r} = \frac{1}{(-3)^r} \rightarrow \boxed{P' = \frac{1}{9}}$$

$$\rightarrow x^r - S'x + P = 0 \rightarrow x^r - \frac{10}{9}x + \frac{1}{9} = 0 \rightarrow \boxed{9x^r - 10x + 1 = 0}$$

۲۷

$$\alpha = 2 - \sqrt{4-a}, \beta = 2 + \sqrt{4-a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 2 - \sqrt{4-a} + 2 + \sqrt{4-a} \rightarrow \boxed{S = 4}$$

$$P = \alpha\beta = (2 - \sqrt{4-a})(2 + \sqrt{4-a}) = 4 - (4-a) \rightarrow \boxed{P = a}$$

$$\rightarrow x^r - Sx + P = 0 \rightarrow \boxed{x^r - 4x + a = 0}$$

۲۸

$$mx^r + 3x + m^r - 2 = 0 \rightarrow \text{ریشه ها معکوس} \rightarrow \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{m^r - 2}{m} = 1 \rightarrow m^r - 2 = m$$

$$\rightarrow m^r - m - 2 = 0 \rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m-2=0 \rightarrow m=2 \\ m+1=0 \rightarrow m=-1 \end{cases}$$

$$m=2 \rightarrow 2x^r + 3x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 3^r - 4(2)(2) = 9 - 16 = -7 < 0 \rightarrow \text{ریشه ی حقیقی ندارد}$$

$$m=-1 \rightarrow -x^r + 3x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 3^r - 4(-1)(-1) = 9 - 4 = 5 > 0 \rightarrow \boxed{m = -1} \text{ ریشه ی حقیقی دارد}$$

۲۹

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} \rightarrow S = \alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} \rightarrow P = \alpha\beta = -5$$

$$\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{\beta+1+\alpha+1}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1} = \frac{S+2}{P+S+1} = \frac{3+2}{-5+3+1} = \frac{5}{-1} = -5$$

۳۰

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-12}{4} \rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 3}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{\alpha\beta = \frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = k \xrightarrow{k>0} k^r = \frac{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}$$

$$\rightarrow k^r = \frac{3 + 2\sqrt{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} = \frac{3 + 2(\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{1}{4}} \rightarrow k^r = 16 \rightarrow \boxed{k = 4}$$

$k = -4$ غ

۳۱

$P =$ محیط استادیوم

$$P = 2y + \pi x \rightarrow 2y + \pi x = 1500 \rightarrow 2y = -\pi x + 1500$$

$$\rightarrow y = \frac{-\pi x}{2} + 750$$

$$S_1 = xy = x\left(\frac{-\pi x}{2} + 750\right) = -\frac{\pi}{2}x^2 + 750x, \quad a < 0$$

$$x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{750}{2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow x_{\max} = \frac{750}{\pi} \approx 238,85$$

$$y_{\max} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{750}{\pi}\right) + 750 = -375 + 750 \rightarrow y_{\max} = 375$$

$$\text{ب) مساحت استادیوم } S_2 = xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x\left(\frac{-\pi x}{2} + 750\right) + \pi\frac{x^2}{4}$$

$$\rightarrow S_2 = -\frac{\pi x^2}{2} + 750x + \frac{\pi x^2}{4} \rightarrow S_2 = -\frac{\pi x^2}{4} + 750x, \quad a < 0$$

$$\rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{750}{2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \rightarrow x_{\max} = \frac{1500}{\pi} \approx 477,70$$

$$y_{\max} = -\frac{\pi}{4}\left(\frac{1500}{\pi}\right) + 750 \rightarrow y_{\max} = -375 + 750 \rightarrow y_{\max} = 375$$

$\min \rightarrow a > 0$

$$y_{\min} = 1, \quad y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow -\frac{(-2\sqrt{2})^2 - 4a(a)}{4a} = 1$$

$$\rightarrow \frac{\lambda - 4a^2}{-4a} = 1 \rightarrow \lambda - 4a^2 = -4a \rightarrow 4a^2 - 4a - \lambda = 0$$

$$\rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \begin{cases} a-2=0 \rightarrow a=2 \\ a+1=0 \rightarrow a=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \xrightarrow[\substack{\text{نیمسز ربع اول} \\ x, y > 0}]{\text{جایگذاری}} x = y \rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-\Delta}{4a} \rightarrow \Delta = 2b$$

$$\rightarrow b^2 - 4ac = 2b \rightarrow a^2 - 4(1)(2) = 2a \rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$a - 4 = 0 \rightarrow a = 4 \rightarrow y = x^2 + 4x + 2 \rightarrow x_{\min} = -\frac{4}{2(1)} < 0 \quad \text{غ}$$

$$\rightarrow (a-4)(a+2) = 0 \begin{cases} a-4=0 \rightarrow a=4 \\ a+2=0 \rightarrow a=-2 \end{cases} \rightarrow y = x^2 - 2x + 2 \rightarrow x_{\min} = -\frac{-2}{2(1)} = 1 > 0 \quad \checkmark$$

$$8y = -x^2 + 4x + 4 \rightarrow y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{8} < 0 \rightarrow \text{تابع نقطه‌ی max دارد}$$

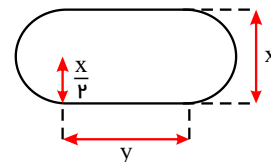
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{1}{2}}{2\left(-\frac{1}{8}\right)} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2$$

$$y = -\frac{1}{8}(2)^2 + \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \rightarrow y_{\max} = 1$$

$$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$$

$$\text{مساحت مستطیل } f(x) = x \cdot y = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

$$\rightarrow f(x) = -2x^2 + 100x \rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-2)} \rightarrow x_{\max} = 25, \quad y_{\max} = 50$$



۳۲

۳۳

۳۴

۳۵

→ بیشترین مساحت $S_{\max} = 1250$

$a = -1 < 0$ → تابع نقطه‌ای max دارد

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\lambda}{2(-1)} = \lambda \rightarrow y_{\max} = \lambda + \lambda(\lambda) - \lambda^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 \rightarrow y_{\max} = 20$$

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \\ P(2) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ -b = 4a \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4a - b = 0 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} +$$

$$\boxed{b = -2}, \quad \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{cases} P(0) = 3 \\ \frac{-b}{2a} = -4 \\ P(-4) = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = \lambda a \\ 16a - 4b + c = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b - \lambda a = 0 \\ 16a - 4b = -5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4a - 3\lambda a = 0 \\ 16a - 4b = -5 \end{cases} +$$

$$-16a = -5 \rightarrow \boxed{a = \frac{5}{16}}, \quad \boxed{b = \frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-2) = -2 \\ f(4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{cases} +$$

$$12a = -2 \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{6}}, \quad \boxed{b = \frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x$$

الف

$$f(0) = 4 \rightarrow 0 + 0 + c = 4 \rightarrow c = 4 \quad (1)$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \xrightarrow{(1)} a + b = -4 \quad (2)$$

$$f(2) = 0 \rightarrow 4a + 2b + c = 0 \xrightarrow{(1)} 4a + 2b = -4 \rightarrow 2a + b = -2 \quad (3)$$

$$(3) - (2) : a = 2 \xrightarrow{(2)} b = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 6x + 4$$

ب

$$f(-1) = -2 \rightarrow a - b + c = -2 \quad (1)$$

$$f(-3) = 0 \rightarrow 9a - 3b + c = 0 \quad (2)$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \quad (3)$$

۳۶

۳۷

۳۸

۳۹

۴۰

با توجه به $f(x) = ax^2 + bx + c$ و نقاط منحنی داریم:

با توجه به $f(x) = ax^2 + bx + c$ و نقاط منحنی داریم:

$$\left. \begin{aligned} (1) - (3) : -2b = -2 \rightarrow b = 1 (*) \\ (2) - (3) : 8a - 4b = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2} * \\ (1) : \frac{1}{2} - 1 + c = -2 \rightarrow c = \frac{-3}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$$

ب

$$2 = \frac{1+?}{2} \rightarrow ? = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$f(2) = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1 \quad (1)$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \quad (2)$$

$$f(3) = 0 \rightarrow 9a + 3b + c = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} (1) - (2) : 3a + b = 1 (*) \\ (3) - (1) : 5a + b = -1 (**) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(**) - (*)} 2a = -2 \rightarrow a = -1 \xrightarrow{*} b = 4 \xrightarrow{(2)} c = -3$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

ت

$$f(0) = 2 \rightarrow 0 + 0 + c = 2 \rightarrow c = 2 \quad (1)$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 1 \rightarrow 2a + b = 0 \quad (2)$$

$$f(1) = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \xrightarrow{(1)} a + b = -2 \quad (3)$$

$$(2) - (3) : a = 2 \xrightarrow{(2)} b = -4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 2$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(0) &= -2 \\ f(1) &= 0 \\ f(-2) &= 0 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} c &= -2 \\ a + b + c &= 0 \\ 4a - 2b + c &= 0 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} a + b &= 2 \\ 4a - 2b &= 2 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} a + b &= 2 \\ 2a - b &= 1 \end{aligned} \right. +$$

$$3a = 3 \rightarrow a = 1, b = 1$$

$$\rightarrow f(x) = x^2 + x - 2$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(2) &= 0 \\ f(-1) &= 0 \\ f(0) &= 4 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 4a + 2b + c &= 0 \\ a - b + c &= 0 \\ c &= 4 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 3a + 2b &= -4 \\ a - b &= -4 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 2a + b &= -2 \\ a - b &= -4 \end{aligned} \right. +$$

$$3a = -6 \rightarrow a = -2, b = 2$$

$$\rightarrow y = f(x) = -2x^2 + 2x + 4$$

$$\left\{ \begin{aligned} (2, 0) \\ (0, 2) \\ (3, 1) \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} f(2) &= 0 \\ f(0) &= 2 \\ f(3) &= 1 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 4a + 2b + c &= 0 \\ c &= 2 \\ 9a + 3b + c &= 1 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 4a + 2b &= -2 \\ 9a + 3b &= -1 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} -12a - 6b &= 6 \\ 18a + 6b &= -2 \end{aligned} \right. +$$

$$y = f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2 \leftarrow b = \frac{-5}{3} \leftarrow a = \frac{2}{3} \leftarrow 6a = 4$$

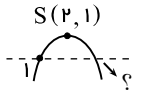
$$\left\{ \begin{aligned} (0, -3) \\ (3, 0) \\ (-1, 4) \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} c &= -3 \\ 9a + 3b + c &= 0 \\ a - b + c &= 4 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 9a + 3b &= 3 \\ a - b &= 7 \end{aligned} \right. \rightarrow \left\{ \begin{aligned} 3a + b &= 1 \\ a - b &= 7 \end{aligned} \right. +$$

$$4a = 8 \rightarrow a = 2, b = -5$$

الف

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

رأس سهمی دقیقاً بین دو ریشه تابع است



۴۱

۴۲

۴۳

۴۴

۴۵

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 0 \\ y_{\min} = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \\ -\frac{b^2 + 4a(0)}{4a} = -4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -b^2 = -16a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 = 16a \rightarrow (-2a)^2 = 16a \rightarrow 4a^2 = 16a \end{cases}$$

$$\rightarrow 4a^2 - 16a = 0 \rightarrow 4a(a - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = 4x^2 - 8x$$

ب

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(2) = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 4 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \\ -b = 4a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + 4 = 0 \\ b = -4a \end{cases}$$

$$\rightarrow 4a + 2(-4a) + 4 = 0 \rightarrow 4a - 8a + 4 = 0 \rightarrow -4a + 4 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$, \quad b = -3 \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

ب

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ f(0) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) = a(x - 2)^2 \\ 4 = a(0 - 2)^2 \rightarrow 4 = 4a \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = 1(x - 2)^2 \rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 4$$

ت

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(-1) = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = 3 \\ a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + 3 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -3$$

$$\rightarrow f(x) = -3x^2 + 3$$

ث

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(1)^2 + b(1) + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 1 \\ -b = 4a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ b = -4a \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a - 4a + c = 0 \\ 4a + 2(-4a) + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + c = 0 \\ -4a + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a + c = 0 \\ 4a - c = -1 \end{cases} +$$

$$a = -1 \rightarrow c = -3 \rightarrow b = 4$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

ج

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = -1 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(0)^2 + b(0) + c = -2 \\ a(1)^2 + b(1) + c = -1 \\ -b = 2a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a + b - 2 = -1 \\ b = -2a \end{cases}$$

$$\rightarrow a + (-2a) = 1 \rightarrow -a = 1 \rightarrow a = -1, \quad b = 2$$

$$\rightarrow f(x) = -x^2 + 2x - 2$$

سرعت ویرایش دو نفر = $1 \frac{20}{60} = 1 \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ زمان ویرایش دو نفر، x زمان ویرایش رضا
 سرعت ویرایش دو نفر = سرعت ویرایش رضا + سرعت ویرایش علی

$$\frac{16}{2} + \frac{16}{x} = \frac{16}{\frac{4}{3}} \rightarrow 8 + \frac{16}{x} = 12 \rightarrow \frac{16}{x} = 4 \rightarrow \boxed{x = 4} \text{ ساعت}$$

۴۷

$$\rightarrow \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \rightarrow \text{ک م م مخرجها} = x(x-1)(x+1) \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x-1)(x+1) \times \left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \right]$$

$$\rightarrow 2x(x) + 2x(x-1) = (2-x)(x+1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x + 2 - x^2 - x \rightarrow 4x^2 - 2x = -x^2 + x + 2$$

$$\rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(5)(-2) = 9 + 40 = 49$$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2(5)} \rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{10} \rightarrow \begin{cases} \text{غیر قابل قبول } x = 1 \\ \boxed{x = -\frac{2}{5}} \end{cases}$$

۴۸

الف

$$\frac{3}{x^2} - 12 = 0 \rightarrow \frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} = 0$$

$$\text{ک م م مخرجها} = x^2 \rightarrow x \neq 0 \rightarrow x^2 \times \left[\frac{3}{x^2} - \frac{12}{1} = 0 \right] \rightarrow 3 - 12x^2 = 0$$

$$1 - 2x = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow 3(1 - 4x^2) = 0 \rightarrow 3(1 - 2x)(1 + 2x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ 1 + 2x = 0 \end{cases}$$

$$1 + 2x = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

ب

$$\rightarrow \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)} \rightarrow \text{ک م م مخرجها} = k(k+2) \rightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow k(k+2) \times \left[\frac{2}{k} - \frac{3k}{(k+2)} = \frac{k}{k(k+2)} \right]$$

$$\rightarrow 2(k+2) - 3k^2 = k \rightarrow 2k + 4 - 3k^2 = k \rightarrow 3k^2 - k - 4 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(3)(-4) = 1 + 48 = 49$$

$$\rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{1 \pm 7}{6} \rightarrow \begin{cases} \boxed{k = \frac{4}{3}} \\ \boxed{k = -1} \end{cases}$$

پ

$$\rightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{(x-3)} = \frac{-12}{(x-3)(x+3)} \rightarrow \text{ک م م مخرجها} = x(x-3)(x+3) \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x-3)(x+3) \times \left[\frac{3}{x} - \frac{2}{(x-3)} = \frac{-12}{(x-3)(x+3)} \right]$$

$$\rightarrow 3(x-3)(x+3) - 2x(x+3) = -12x$$

$$\rightarrow 3x^2 - 27 - 2x^2 - 6x = -12x \rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\rightarrow (x-3)(x+9) = 0 \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 & \text{غیر قابل قبول} \\ x+9=0 \rightarrow x=-9 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۴۹) فرض کنیم سرعت اتومبیل اول v و مدت زمان حرکت آن t_1 باشد، در این صورت:

$$t_1 = \frac{180}{v}$$

سرعت اتومبیل دوم $v+4$ می‌باشد، اگر t_2 مدت زمان حرکت آن باشد، آنگاه:

$$t_2 = \frac{180}{v+4}, t_2 = t_1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{180}{v+4} = \frac{180}{v} - \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2v(v+4)} 360v = 360(v+4) - v(v+4)$$

$$\Rightarrow 360v = 360v + 360 \times 4 - v^2 - 4v$$

$$\Rightarrow v^2 + 4v - 360 \times 4 = 0 \Rightarrow v = 36 \Rightarrow v+4 = 40$$

۵۰) فرض کنیم یکی از آنها در x ساعت و دیگری در $4x$ ساعت به تنهایی ساختمان را رنگ‌آمیزی کنند، پس هر یک به تنهایی در یک ساعت به ترتیب، $\frac{1}{4x}$ و $\frac{1}{x}$ از ساختمان را رنگ می‌کنند. از طرفی دو نفر با هم در 4 ساعت کل ساختمان را رنگ می‌کنند، پس دو نفر با هم در یک ساعت، $\frac{1}{4}$ از ساختمان را رنگ می‌کنند. بنابراین:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4x} 4 + 1 = x \Rightarrow x = 5$$

پس یکی از آنها در 5 ساعت و دیگری در $4 \times 5 = 20$ ساعت به تنهایی ساختمان را رنگ‌آمیزی می‌کنند.

۵۱)

$$\xrightarrow{x \geq 0} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) \rightarrow (1 - \sqrt{x}) = (1 + \sqrt{x})^2 (1 - \sqrt{x})$$

$$\rightarrow (1 + \sqrt{x})^2 (1 - \sqrt{x}) - (1 - \sqrt{x}) = 0$$

$$1 - \sqrt{x} = 0 \rightarrow 1 = \sqrt{x} \rightarrow \boxed{x=1} \quad \text{زیرا: } \frac{1 - \sqrt{1}}{1 + \sqrt{1}} = 1 - 1 \checkmark$$

$$\rightarrow (1 - \sqrt{x}) \left((1 + \sqrt{x})^2 - 1 \right) = 0$$

$$(1 + \sqrt{x})^2 = 1 \rightarrow \sqrt{x} = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \quad \text{زیرا: } \frac{1 - \sqrt{0}}{1 + \sqrt{0}} = 1 - 0 \checkmark$$

۵۲)

$$\rightarrow (2 + \sqrt{1+x})^2 = (\sqrt{x+9})^2 \rightarrow 4 + 4\sqrt{1+x} + 1 + x = x + 9$$

$$\rightarrow 4\sqrt{1+x} = 4 \rightarrow \sqrt{1+x} = 1 \rightarrow 1+x = 1 \rightarrow \boxed{x=0}$$

۵۳)

$$x - \sqrt{x} = 20 \rightarrow x - 20 = \sqrt{x}$$

$$\rightarrow (x-20)^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x^2 - 40x + 400 = x \rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$\rightarrow (x-25)(x-16) = 0 \begin{cases} x-25=0 \rightarrow x=25 \\ x-16=0 \rightarrow x=16 \end{cases} \quad \text{غیر قابل قبول}$$

۵۴)

الف)

$$2\sqrt{2t-1} - t = 1 \rightarrow 2\sqrt{2t-1} = t+1$$

$$\rightarrow (2\sqrt{2t-1})^2 = (t+1)^2 \rightarrow 4(2t-1) = (t+1)^2$$

$$\rightarrow 8t - 4 = t^2 + 2t + 1 \rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \rightarrow (t-1)(t-5) = 0$$

$$\rightarrow t-1=0 \rightarrow \boxed{t=1}, t-5=0 \rightarrow \boxed{t=5}$$

ب)

$$2x = 1 - \sqrt{2-x} \rightarrow \sqrt{2-x} = 1 - 2x$$

$$\rightarrow 2 - x = (1 - 2x)^2 \rightarrow 2 - x = 1 - 4x + 4x^2 \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(4)(-1) = 9 + 16 = 25 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{8} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ غ ق}$$

ب

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1 \rightarrow (\sqrt{x+7})^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 \rightarrow x+7 = x + 2\sqrt{x} + 1$$

$$\rightarrow 6 = 2\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} = 3 \rightarrow x = 9$$

ت

$$\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{u-3}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{u}}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{u-3} = \frac{4}{u} \rightarrow u = 4(u-3) \rightarrow u = 4u - 12$$

$$\rightarrow 12 = 3u \rightarrow u = 4$$

ث

$$\rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x - 2)^2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

۵۵) فاصله دو نقطه $A(a, 5)$ و $B(4, a-3)$ را به دست می آوریم و آن را مساوی $2\sqrt{10}$ قرار می دهیم:

$$AB = \sqrt{(4-a)^2 + (a-3-5)^2} = \sqrt{(4-a)^2 + (a-8)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\rightarrow (4-a)^2 + (a-8)^2 = 40$$

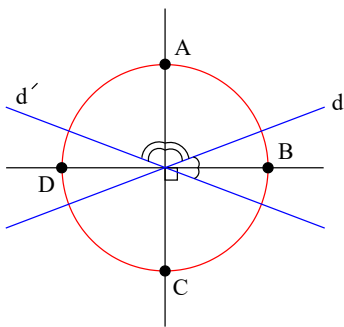
$$\Rightarrow 16 - 8a + a^2 + a^2 - 16a + 64 = 40 \Rightarrow 2a^2 - 24a + 40 = 0$$

$$\div 2 \rightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ a-10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=10 \end{cases}$$

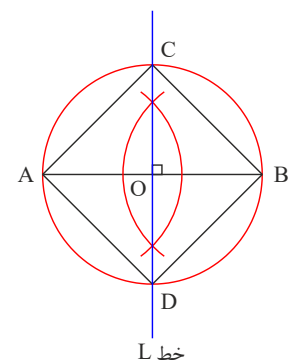
۵۶

ابتدا نیمساز هر دو زاویه ای که دو خط باهم می سازند را رسم می کنیم، سپس به مرکز O و به شعاع $5cm$ یک دایره رسم می کنیم محل برخورد دایره با دو نیمساز جواب مسأله است. ۴ نقطه A, B, C و D از دو خط به یک فاصله اند و از O به فاصله $5cm$ هستند.



۵۷

در مربع قطرها عمودمنصف یکدیگرند. ابتدا عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم. محل برخورد پاره خط AB و عمودمنصف AB (خط L) را نقطه O می نامیم. نقطه O وسط پاره خط AB است. اکنون به مرکز O و شعاع OA ، دایره ای رسم می کنیم تا خط L (عمودمنصف AB) را در دو نقطه C و D قطع کند. چهارضلعی $ABCD$ مربع و جواب مسئله است.



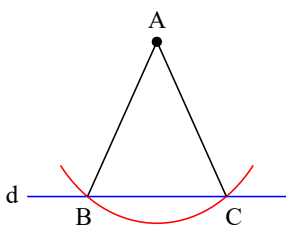
$$\left. \begin{array}{l} BD = BD = \text{مشترک} \\ \widehat{A} = \widehat{H} = 90^\circ \\ BD = BD = \text{نیمساز} \rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{HBD} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{HBD}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{HBD} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{ADM} = \widehat{HDM} \\ AD = DH \\ AB = BH \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADM} = \widehat{HDM} \\ AD = DH \\ MD = MD \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{HMD} \Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{DHM}$$

۵۹ الف) دهانهٔ پرگار را بیش از ۴ سانتی‌متر باز می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز نقطهٔ A و شعاع انتخاب شده رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. مثلث متساوی‌الساقینی

$$\widehat{ABC} \text{ جواب مسئله است زیرا } AB = AC = R$$



(ب) مطابق با شرایط قسمت (الف) عمل می‌کنیم و دهانهٔ پرگار را دقیقاً ۶ سانتی‌متر باز می‌کنیم تا طول ساق‌ها ۶ سانتی‌متر بدست آید.

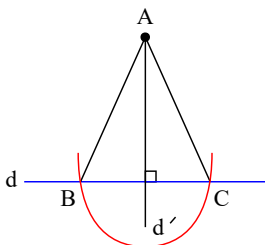
(پ) چون فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d (قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین) ۴ سانتی‌متر است پس ارتفاع مثلث ۴ سانتی‌متر است و قاعدهٔ آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S = \frac{AH \times BC}{2} \rightarrow 8 = \frac{4 \times BC}{2} \rightarrow \boxed{BC = 4}$$

اکنون باید مثلث ABC را طوری رسم کنیم که قاعدهٔ آن (BC) برابر ۴ سانتی‌متر باشد.

ابتدا از نقطهٔ A خط d' را بر خط d عمود می‌کنیم و محل برخورد دو خط را H می‌نامیم. پس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۲ سانتی‌متر (نصف قاعده) باز می‌کنیم و به مرکز H دایره‌ای رسم می‌کنیم تا

$$\text{خط } d \text{ را در نقاط } B \text{ و } C \text{ قطع کند. } \widehat{ABC} \text{ جواب مسئله است زیرا } AB = AC, BC = 4 \text{ و } AH = 4 \text{ و } S = 8 \text{ cm}^2$$



۶۰ در مثلث ABC ، نیمساز دو زاویهٔ B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است از نقطهٔ O به سه ضلع مثلث

عمود می‌کنیم $OH = OH'$ ، $OH = OH''$ این مقدار مساوی را شعاع دایره می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم می‌کنیم.

$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{4x-1}{4x+1} = \frac{3x+3}{8x+2}$$

$$\rightarrow (4x-1)(8x+2) = (3x+3)(4x+1)$$

$$\rightarrow 32x^2 + 8x - 2 = 12x^2 + 3x + 12x + 3 \rightarrow 20x^2 - 15x - 5 = 0$$

$$\rightarrow 5(4x^2 - 3x - 1) = 0 \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow (x-1)(4x+1) = 0$$

$$\begin{array}{l} x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1} \\ 4x+1=0 \rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{array}$$

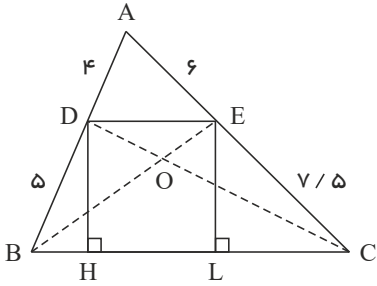
غیر قابل قبول زیرا $AD < 0$ و $DB = 0$ می‌شود.

$$\widehat{ABD} : ME \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AB} = \frac{MD}{AD} \rightarrow \frac{ME}{5} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{ME = 2}$$

$$\triangle ADC : MF \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} \rightarrow \frac{MF}{10} = \frac{3}{5} \rightarrow \boxed{MF = 6}$$

$$ME + EF = MF \rightarrow 2 + EF = 6 \rightarrow \boxed{EF = 4}$$

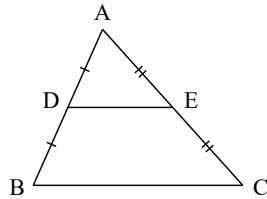
۶۳



$$\left. \begin{array}{l} \frac{AD}{DB} = \frac{4}{5} \\ \frac{AE}{EC} = \frac{6}{7.5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} DE \parallel BC$$

$$DE \parallel BC \Rightarrow DH = DL \Rightarrow S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BCE}$$

$$\rightarrow S_{\triangle BDO} + S_{\triangle OBC} = S_{\triangle ECO} + S_{\triangle OBC} \rightarrow S_{\triangle OBD} = S_{\triangle OCE} \rightarrow \boxed{\frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle OCE}} = 1}$$



۶۴

فرض: $AE = EC, AD = DB$
حکم: $DE = \frac{BC}{2}, DE \parallel BC$

اثبات:

$$\begin{array}{l} AD = DB \\ AB = AD + DB \end{array} \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$

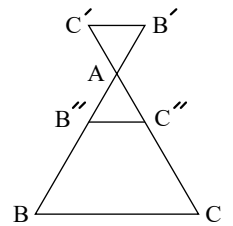
$$\begin{array}{l} AE = EC \\ AC = AE + EC \end{array} \rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE \parallel BC$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2} \rightarrow DE = \frac{BC}{2}$$

$$\begin{cases} AB'' = AB' \\ AC'' = AC' \end{cases}$$

۶۵ پاره خط $B''C''$ را طوری رسم می کنیم که داشته باشیم:



از این رو دو مثلث $AB'C'$ و $AB''C''$ به حالت دو ضلع و زاویه بین هم نهشت اند، بنابراین:

$$\begin{cases} \text{طبق خطوط موازی و مورب} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'' \\ \text{طبق تساوی مثلث} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'' \end{cases}$$

حال در $\triangle ABC$ تعمیم قضیه تالس را می نویسیم:

$$B''C'' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{B''C''}{BC}$$

و چون دو مثلث $AB'C'$ و $AB''C''$ هم‌نهشت‌اند، کافی است ضلع متناظر هر ضلع را در تساوی فوق جایگذاری کنیم و حکم ثابت می‌شود:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

۶۶

$$EF \parallel AB \xrightarrow{\text{تساوی}} \frac{CE}{AC} = \frac{CF}{BC} = \frac{EF}{AB} \rightarrow \frac{x+3}{2x+3} = \frac{x+5}{2x+6} = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 2x^2 + 13x + 15 \rightarrow x = 3 \rightarrow \frac{1}{12} = \frac{y-1}{y+1} \rightarrow y = 5$$

۶۷

$$AC^2 = CH \cdot BC \rightarrow AC^2 = CH(CH + BH)$$

$$\rightarrow 6^2 = CH(CH + 5) \rightarrow 36 = CH^2 + 5CH$$

$$\rightarrow CH^2 + 5CH - 36 = 0 \rightarrow (CH - 4)(CH + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} CH = 4 \\ CH = -9 \text{ غ ق ق } \end{cases}$$

$$\rightarrow AH^2 = CH \cdot BH \rightarrow AH^2 = 4 \times 5 \rightarrow AH^2 = 20 \rightarrow AH = 2\sqrt{5}$$

$$\rightarrow AB^2 = BH \cdot BC \rightarrow AB^2 = 5 \times 9 \rightarrow AB^2 = 45 \rightarrow AB = 3\sqrt{5}$$

۶۸

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \rightarrow 60 = \frac{x \times 3x}{2} \rightarrow 3x^2 = 120 \rightarrow x^2 = 40$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \rightarrow BC^2 = x^2 + (3x)^2 = x^2 + 9x^2$$

$$\rightarrow BC^2 = 10x^2 \rightarrow BC^2 = 10 \times 40 = 400 \rightarrow BC = 20$$

$$S = \frac{1}{2} AH \cdot BC \rightarrow 60 = \frac{AH \times 20}{2} \rightarrow AH = 6$$

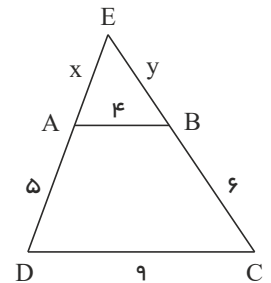
۶۹

$$AB \parallel DC \rightarrow \frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{DC} \rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{y}{y+6} = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow 9x = 4(x+5) \rightarrow 9x = 4x + 20 \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$$

$$9y = 4(y+6) \rightarrow 9y = 4y + 24 \rightarrow 5y = 24 \rightarrow y = 4,8$$

$$P_{\triangle ABE} = AB + AE + BE = 4 + 4 + 4,8 \rightarrow P_{\triangle ABE} = 12,8$$



۷۰

الف

$$BC = BH + HC \rightarrow 10 = 9 + HC \rightarrow HC = 1$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \rightarrow AH^2 = 9 \times 1 \rightarrow AH = 3$$

$$AB^2 = BC \cdot BH \rightarrow AB^2 = 10 \times 9 \rightarrow AB = \sqrt{90} \rightarrow AB = 3\sqrt{10}$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \rightarrow AC^2 = 10 \times 1 \rightarrow AC = \sqrt{10}$$

ب

$$AC^2 = BC \cdot CH \rightarrow 5^2 = BC \times 2 \rightarrow BC = 12,5$$

$$BC = BH + CH \rightarrow 12,5 = BH + 2 \rightarrow BH = 10,5$$

$$AH^2 = BH \cdot CH \rightarrow AH^2 = 10,5 \times 2 \rightarrow AH^2 = 21 \rightarrow AH = \sqrt{21}$$

$$AB^r = BC \cdot BH \rightarrow AB^r = ۱۲٫۵ \times ۱۰٫۵ \rightarrow AB^r = ۱۳۱٫۲۵$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{۲۱ \times ۶٫۲۵} \rightarrow \boxed{AB = ۲٫۵\sqrt{۲۱}}$$

یا

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \rightarrow AB \times ۵ = ۱۲٫۵ \times \sqrt{۲۱} \rightarrow \boxed{AB = ۲٫۵\sqrt{۲۱}}$$

ب

$$AB^r + AC^r = BC^r \rightarrow ۸^r + ۶^r = BC^r \rightarrow BC^r = ۱۰۰ \rightarrow \boxed{BC = ۱۰}$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \rightarrow ۸ \times ۶ = ۱۰ \times AH \rightarrow \boxed{AH = ۴٫۸}$$

$$AC^r = BC \cdot CH \rightarrow ۶^r = ۱۰ \times CH \rightarrow \boxed{CH = ۳٫۶}$$

$$AB^r = BC \cdot BH \rightarrow ۸^r = ۱۰ \times BH \rightarrow \boxed{BH = ۶٫۴}$$

ت

$$AB^r = AH^r + BH^r \rightarrow ۱۲^r = ۶^r + BH^r \rightarrow BH^r = ۱۴۴ - ۳۶ \rightarrow BH^r = ۱۰۸$$

$$\rightarrow \boxed{BH = ۶\sqrt{۳}}$$

$$AB^r = BC \cdot BH \rightarrow ۱۲^r = BC \times ۶\sqrt{۳} \rightarrow BC = \frac{۱۴۴}{۶\sqrt{۳}} \rightarrow \boxed{BC = ۸\sqrt{۳}}$$

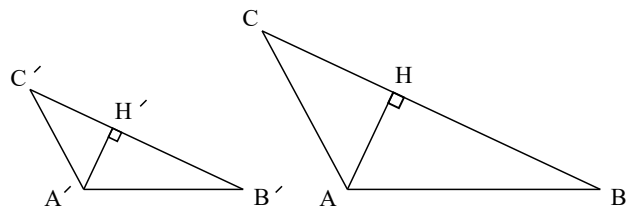
$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \rightarrow ۱۲ \times AC = ۶ \times ۸\sqrt{۳} \rightarrow \boxed{AC = ۴\sqrt{۳}}$$

$$AB^r = AH^r + BH^r \rightarrow ۱۲^r = x^r + ۱۱^r \rightarrow x^r = ۱۴۴ - ۱۲۱$$

$$\rightarrow x^r = ۲۳ \rightarrow \boxed{x = \sqrt{۲۳}}$$

$$\triangle ADH \sim \triangle ABH \rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AD}{AB} \rightarrow \frac{\sqrt{۲۳}}{۱۱} = \frac{y}{۱۲} \rightarrow \boxed{y = \frac{۱۲}{۱۱}\sqrt{۲۳}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{H} = \widehat{H'} = ۹۰^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle A'B'H'$$



$$\text{ب) } \triangle ABH \sim \triangle A'B'H' \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AH}{A'H'} = K \rightarrow \boxed{\frac{AH}{A'H'} = K}$$

$$\text{پ) } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AH}{\frac{1}{2}B'C' \cdot A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AH}{A'H'} = K^r \rightarrow \boxed{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = K^r}$$

$$\text{ت) } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \rightarrow AB = A'B' \cdot K, \quad AC = A'C' \cdot K, \quad BC = B'C' \cdot K$$

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \frac{K(A'B' + A'C' + B'C')}{A'B' + A'C' + B'C'} \rightarrow \boxed{\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A'B'C'}} = K}$$

۷۱

۷۲

$$DC^x = DB^x - BC^x = 16 \rightarrow DC = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} D_1 = D_2 \\ A = C \end{array} \right\} ADE \sim CDB \rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DB} \rightarrow \frac{AD}{4} = \frac{4}{5}$$

$$AD = \frac{16}{5}$$

نمودار تابع روبرو بصورت سه ضابطه‌ای می‌باشد و پیش از بدست آوردن ضابطه‌ها هم می‌توان دامنه و برد تابع را از روی شکل بدست آورد.

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow D_f = \mathbb{R}, y > -4 \rightarrow R_f = (-4, +\infty)$$

$$\left[\begin{array}{c} -2 \\ 2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -5 \\ 4 \end{array} \right], f_1(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ -5a + b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ \Delta a - b = -4 \end{cases} +$$

$$3a = -2 \rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$-2\left(-\frac{2}{3}\right) + b = 2 \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow f_1(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$\left[\begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right], f_2(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} -2a + b = -1 \\ a + b = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a - b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} +$$

$$3a = 3 \rightarrow a = 1, b = 1$$

$$\rightarrow f_2(x) = x + 1$$

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ -4 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right], f_3(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} a + b = -4 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - b = 4 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2, b = -6$$

$$\rightarrow f_3(x) = 2x - 6$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, & x \leq -2 \\ x + 1, & -2 < x \leq 1 \\ 2x - 6, & 1 < x \end{cases}$$

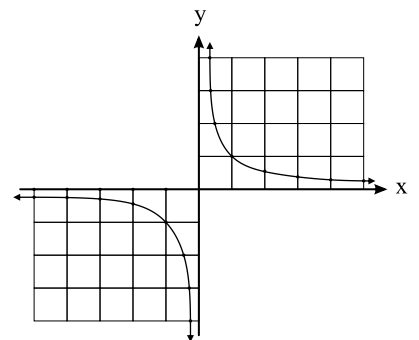
$$f(2 - \sqrt{3}) = \frac{2(2 - \sqrt{3})^2 + 2}{(2 - \sqrt{3})^2 - 3} = \frac{2(4 - 4\sqrt{3} + 3) + 2}{4 - 4\sqrt{3} + 3 - 3} = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{4 - 4\sqrt{3}} = \frac{4(4 - 2\sqrt{3})}{4(1 - \sqrt{3})}$$

$$\rightarrow f(2 - \sqrt{3}) = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6}{1 - 3}$$

$$= \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{-2(1 - \sqrt{3})}{-2} \rightarrow f(2 - \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3}$$

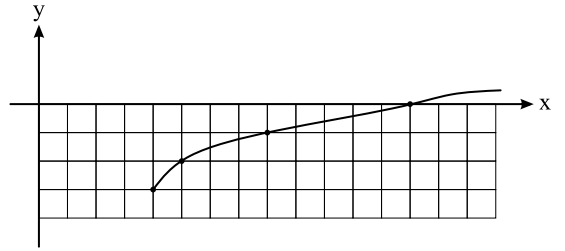
x	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$...
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	...

x	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$...
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...



$$g(x) = -3 + \sqrt{x-4} \rightarrow x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4 \rightarrow D_g = [4, +\infty)$$

x	y
۴	-۳
۵	-۲
۸	-۱
۱۳	۰



۷۸) طبق فرض، $x = 5$ و $x = -2$ ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ می‌باشند. داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -a = -2 + 5 = 3 \Rightarrow a = -3$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = b = -1 \circ$$

۷۹) نمودار f محور x ها در نقطه‌ای به طول Δ قطع کرده است، پس مختصات نقطه $(\Delta, 0)$ در معادله تابع صدق می‌کند:

$$f(\Delta) = 0 \Rightarrow f(\Delta) = a + \sqrt{\Delta + b} = 0 \quad (1)$$

همچنین $f(1) = -2$ می‌باشد، پس داریم:

$$f(1) = a + \sqrt{1 + b} = -2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a + \sqrt{\Delta + b} = 0 \\ a + \sqrt{1 + b} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - \sqrt{\Delta + b} = 0 \\ a + \sqrt{1 + b} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + b} - \sqrt{\Delta + b} = -2 \Rightarrow \sqrt{1 + b} + 2 = \sqrt{\Delta + b}$$

به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\rightarrow (1 + b) + 4\sqrt{1 + b} + 4 = \Delta + b$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{1 + b} = 0 \Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

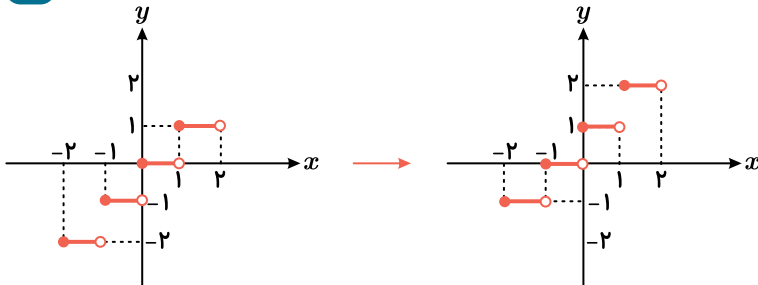
$$a + \sqrt{\Delta + b} = 0$$

$$\rightarrow a + \sqrt{\Delta - 1} = 0 \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

۸۰

با انتقال به اندازه یک واحد نمودار $y = [x]$ به سمت بالا، نمودار $y = [x] + 1$ رسم می‌شود:

الف



ب

با توجه به تعریف جزء صحیح، تابع را به صورت یک تابع پله‌ای می‌نویسیم. اگر n یک عدد صحیح و $n \leq x < n + 1$ آنگاه $[x] = n$ ، بنابراین داریم:

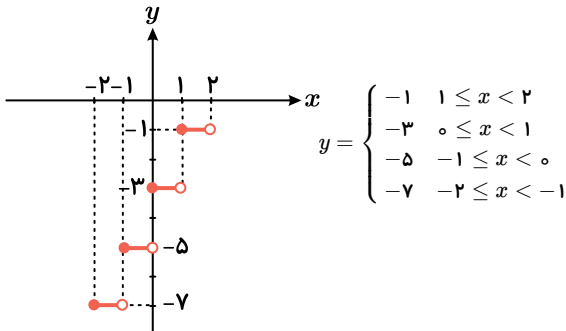
$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = 2[x] - 3 = 2(-2) - 3 = -7$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = 2[x] - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 2[x] - 3 = 2(0) - 3 = -3$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = 2[x] - 3 = 2(1) - 3 = -1$$

ضابطه تابع و نمودار تابع به صورت زیر است:



پ

با در نظر گرفتن بازه‌های مختلف و با حذف $[x]$ ، ضابطه تابع را به دست می‌آوریم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x + [x] = x$$

باید خط $y = x$ را در محدوده $0 \leq x < 1$ رسم کنیم:

$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right. \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x + [x] = x + 1$$

باید خط $y = x + 1$ را در محدوده $1 \leq x < 2$ رسم کنیم:

$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right. \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x + [x] = x - 1$$

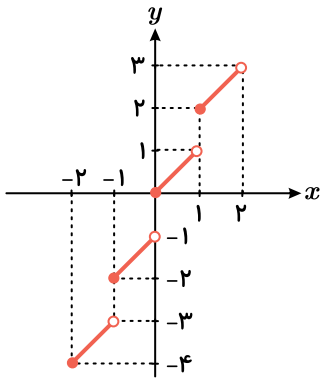
باید خط $y = x - 1$ را در محدوده $-1 \leq x < 0$ رسم کنیم:

$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array}$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x + [x] = x - 2$$

همچنین خط $y = x - 2$ در محدوده

$-2 \leq x < -1$ باید رسم شود:



$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right. \begin{array}{c} -4 \\ -3 \end{array}$$

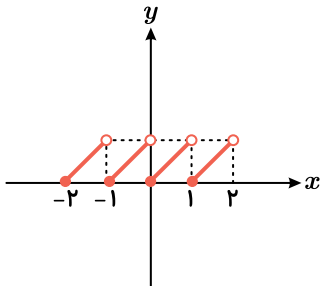
ابتدا با استفاده از تعریف جزء صحیح و در نظر گرفتن محدوده مناسب، مقدار $[x]$ را به دست می آوریم و ضابطه تابع را بدون $[x]$ می نویسیم و سپس نمودار تابع به دست آمده را در همان محدوده رسم می کنیم:

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - [x] = x - 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x - [x] = x - 0 = x \Rightarrow \frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right. \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = x - [x] = x + 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = x - [x] = x + 2 \Rightarrow \frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right. \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$$



$$f(1) = 5 \rightarrow (1, 5) \in f, \quad (5, 1) \in f^{-1}$$

$$f^{-1}(9) = 3 \rightarrow (9, 3) \in f^{-1}, \quad (3, 9) \in f$$

$$f \rightarrow (1, 5), (3, 9) \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 5}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow y = ax + b$$

$$\rightarrow y = 2x + b \xrightarrow{(1, 5)} 5 = 2(1) + b \rightarrow b = 3 \rightarrow y = 2x + 3$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = 2x + 3}$$

$$\rightarrow y = 2x + 3 \rightarrow 2x = y - 3 \rightarrow x = \frac{y - 3}{2} \rightarrow x = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}}$$

تابع درجه دوم یک به یک و وارون پذیر نیست، اما در تابع روبرو چون دامنه‌ی تابع محدود شده و شکل تابع نیمی از سهمی تابع درجه ۲ است پس تابع یک به یک بوده و وارون پذیر است. ۸۲

$$y = x^2 + 4x + 3 \rightarrow y = x^2 + 4x + 4 - 1 \rightarrow y = (x + 2)^2 - 1$$

$$\rightarrow y + 1 = (x + 2)^2 \rightarrow \sqrt{y + 1} = x + 2 \rightarrow x = \sqrt{y + 1} - 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y + 1} - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2 \rightarrow \begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R}^{\geq -1} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq -2} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 2 \end{cases}$$

۸۳

$$f^{-1}(4) = a \rightarrow (4, a) \in f^{-1} \rightarrow (a, 4) \in f \rightarrow -a + \sqrt{-2a} = 4$$

$$\rightarrow \sqrt{-2a} = 4 + a \xrightarrow{\text{توان } 2} -2a = a^2 + 8a + 16 \rightarrow a^2 + 10a + 16 = 0$$

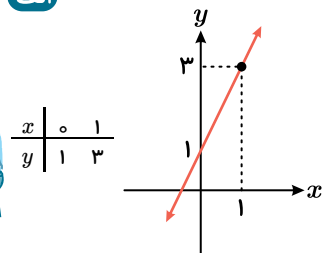
$$a + 2 = 0 \rightarrow \boxed{a = -2} \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-2(-2)} = 4 - 2 \quad \checkmark$$

$$\rightarrow (a + 8)(a + 2) = 0 \begin{cases} a + 2 = 0 \rightarrow a = -2 \quad \checkmark \\ a + 8 = 0 \rightarrow a = -8 \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-2(-8)} = 4 - 8 \quad \times \end{cases}$$

۸۴

نمودار تابع خطی با مشخص کردن دو نقطه روی آن قابل رسم است:

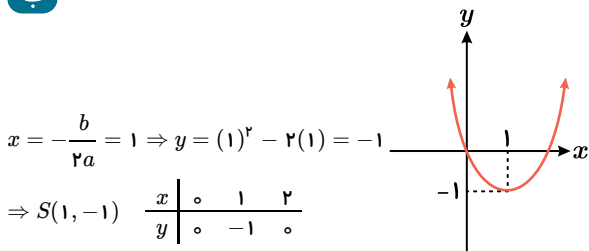
الف



هر خط به موازات محور x ها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، پس $y = 2x + 1$ ضابطه یک تابع یک به یک است.

با مشخص کردن رأس سهمی و دو نقطه کمکی، نمودار را رسم می‌کنیم:

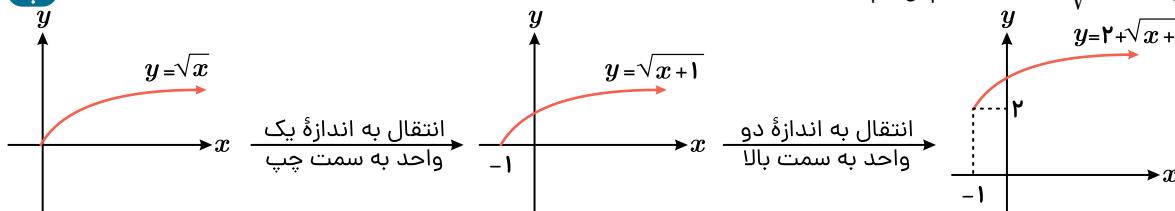
ب



نمودار تابع، محور x ها را در دو نقطه قطع کرده است، پس f تابعی یک به یک نمی‌باشد.

اگر ضابطه f را در محدوده $[-\infty, 1]$ یا $[1, +\infty)$ و یا در هر زیربازه از آنها در نظر بگیریم، آنگاه f در این محدوده تابعی یک به یک است.

پ

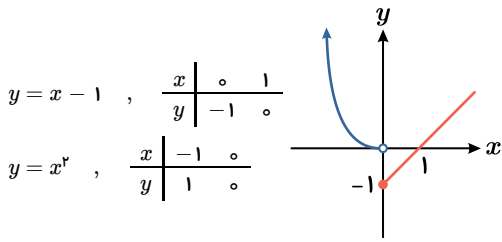


با انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ نمودار $y = 2 + \sqrt{x + 1}$ را رسم می‌کنیم:

هر خط به موازات محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس نمودار یک تابع یک به یک است.

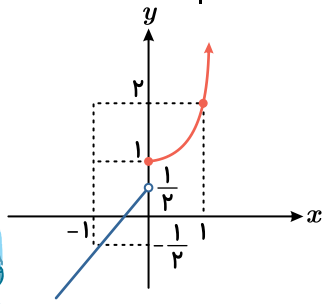
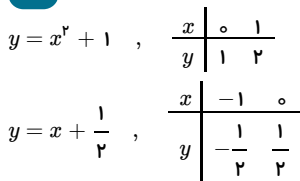
ت

f یک تابع دوضابطه‌ای است. نمودار f از خط $y = x - 1$ در بازه $[0, +\infty)$ و سهمی $y = x^2$ در بازه $(-\infty, 0)$ تشکیل شده است.



با توجه به نمودار، خط $y = 1$ ، نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس f تابع یک‌به‌یک نیست. اگر ضابطه f را در محدوده $[-\infty, 0]$ یا $[0, +\infty)$ در نظر بگیریم، آنگاه در این محدوده f تابعی یک‌به‌یک است.

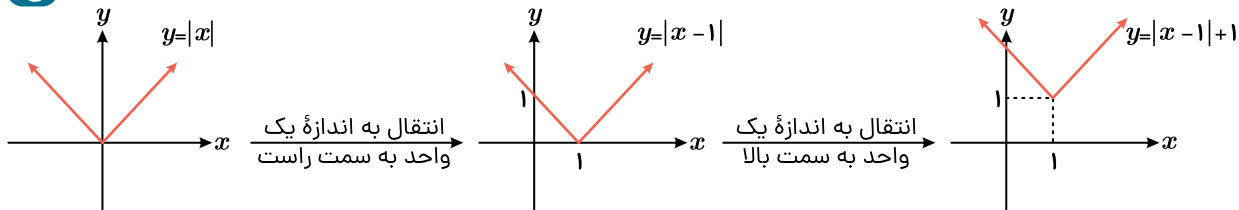
ث



با توجه به نمودار، هر خط به موازات محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس f تابع یک‌به‌یک است.

ج

نمودار تابع f را با استفاده از نمودار $y = |x|$ و به کمک انتقال رسم می‌کنیم:

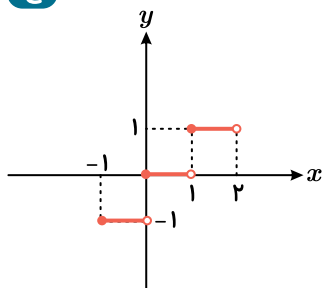


خط $y = 2$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، پس f تابعی غیر یک‌به‌یک است.

اگر ضابطه f را در محدوده $[-\infty, 1]$ یا $[1, +\infty)$ در نظر بگیریم، آنگاه f در این محدوده تابعی یک‌به‌یک است.

چ

نمودار تابع $y = [x]$ به صورت روبه‌رو است:

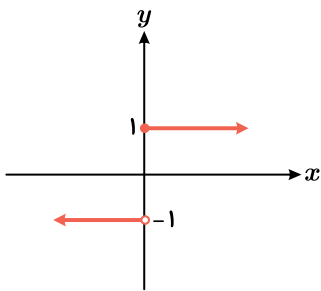


با توجه به نمودار، خط $y = 1$ ، نمودار تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند، پس $y = [x]$ تابعی یک‌به‌یک نمی‌باشد.

هیچ بازه‌ای نمی‌توان مشخص کرد که تابع در آن بازه یک‌به‌یک باشد.

ح

نمودار تابع پله‌ای f به صورت روبه‌رو است:



خطهای $y = 1$ و $y = -1$ نمودار تابع f را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کنند، پس تابع پله‌ای f یک تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد. تابع f روی هیچ بازه‌ای تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

۸۵

$$f^{-1}(-3) = 1 \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow -3 = -1 + m \Rightarrow m = -2$$

$$y = -x - 2 \Rightarrow x = -y - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x - 2$$

۸۶

$$f(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$g(x) = x^2 - 4 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = ([1, +\infty) \cap \mathbb{R}) - \{x | x^2 - 4 = 0\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{f}{g}} = [1, +\infty) - \{-2, 2\} \rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = [1, 2) \cup (2, +\infty)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4} \rightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}}$$

$$g(5) = 5^2 - 4 \rightarrow g(5) = 21$$

$$f(5) = \sqrt{5-1} \rightarrow f(5) = 2$$

$$(g - 3f)(5) = g(5) - 3f(5) = 21 - 3(2) \rightarrow \boxed{(g - 3f)(5) = 15}$$

۸۷

$$f(x) = \sqrt{2-x} \rightarrow 2-x \geq 0 \rightarrow 2 \geq x \rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$g(x) = -3x + 3 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0 \rightarrow -3x + 3 = 0 \rightarrow 3 = 3x \rightarrow x = 1$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = ((-\infty, 2] \cap \mathbb{R}) - \{1\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (-\infty, 2] - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2]}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{2-x}}{-3x+3} \rightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{-3x+3}}$$

$$f(0) = \sqrt{2-0} = \sqrt{2}, \quad g(0) = -3(0) + 3 = 3$$

$$\rightarrow (2f - g)(0) = 2f(0) - g(0) = 2\sqrt{2} - 3 \rightarrow \boxed{(2f - g)(0) = 2\sqrt{2} - 3}$$

۸۸

$$f(x) = \frac{x+1}{x-4} \rightarrow x-4 \neq 0 \rightarrow x \neq 4 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_g = [2, +\infty)$$

$$\rightarrow D_f \cap D_g = [2, +\infty) - \{4\} \quad \Psi_f \cap D_g = [2, 4) \cap (4, +\infty)$$

$$\text{الف) } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+1}{x-4}}{\sqrt{x-2}} \rightarrow \boxed{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(x+1)}{(x-4)\sqrt{x-2}}}$$

$$\left. \begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \\ g(x) = 0 &\rightarrow \sqrt{x-2} = 0 \rightarrow x = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = ([2, 4) \cup (4, +\infty)) - \{2\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (2, 4) \cup (4, +\infty)}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{\frac{x+1}{x-4}} \rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{(\sqrt{x-2})(x-4)}{(x+1)}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x+1}{x-4} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{g}{f}} = ([2, 4) \cup (4, +\infty)) - \{-1\} \rightarrow \boxed{D_{\frac{g}{f}} = [2, 4) \cup (4, +\infty)}$$

$$\text{پ) } f(6) = \frac{6+1}{6-4} = \frac{7}{2}, \quad g(6) = \sqrt{6-2} = 2$$

$$\rightarrow (4f - 3g)(6) = 4f(6) - 3g(6) = 4\left(\frac{7}{2}\right) - 3(2) = 14 - 6$$

$$\rightarrow \boxed{(4f - 3g)(6) = 8}$$

$$(0, 4), (2, 0) \in f \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{0 - 2} = -2$$

$$\rightarrow y = -2x + b \xrightarrow{(0,4)} 4 = -2(0) + b \rightarrow b = 4 \rightarrow \boxed{f(x) = -2x + 4}$$

$$(0, -1), (3, 0) \in g \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-1)}{3 - 0} = \frac{1}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}x + b \xrightarrow{(0,-1)} -1 = \frac{1}{3}(0) + b$$

$$\rightarrow b = -1 \rightarrow \boxed{g(x) = \frac{x}{3} - 1}$$

$$\text{الف) } f(x) = -2x + 4 \rightarrow D_f = \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x}{3} - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -2x + 4 + \frac{x}{3} - 1 \rightarrow \boxed{(f+g)(x) = \frac{-5x}{3} + 3}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \rightarrow \boxed{D_{f+g} = \mathbb{R}}$$

$$\text{ب) } f(6) = -2(6) + 4 \rightarrow f(6) = -8, \quad g(6) = \frac{6}{3} - 1 \rightarrow g(6) = 1$$

$$\rightarrow (3g - f)(6) = 3g(6) - f(6) = 3(1) - (-8) \rightarrow \boxed{(3g - f)(6) = 11}$$

الف

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{matrix} \rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |x| + \frac{1}{x}, \quad D_{f+g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = |x| - \frac{1}{x}, \quad D_{f-g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = |x| \times \frac{1}{x} = \frac{|x|}{x}, \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x|}{\frac{1}{x}} = x|x|, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{0\} - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

ب

$$f(x) = x^2 - 4 \rightarrow D_f = \mathbb{R} \rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = x + 2 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 4 + x + 2 \rightarrow (f+g)(x) = x^2 + x - 2, \quad D_{f+g} = \mathbb{R}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4 - (x + 2) \rightarrow (f-g)(x) = x^2 - x - 6, \quad D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 4)(x + 2) \rightarrow (f \cdot g)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8, \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2\}$$

ب

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow D_f = [0, +\infty) \rightarrow D_f \cap D_g = [0, +\infty)$$

$$g(x) = -\sqrt{x} \rightarrow D_g = [0, +\infty)$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = 0 \rightarrow (f + g)(x) = 0, \quad D_{f+g} = [0, +\infty)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} \rightarrow (f - g)(x) = 2\sqrt{x}, \quad D_{f-g} = [0, +\infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \times (-\sqrt{x}) = -x \rightarrow (f \cdot g)(x) = -x, \quad D_{f \cdot g} = [0, +\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -1 \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -1, \quad D_{\frac{f}{g}} = (0, +\infty)$$

ت

$$f(x) = \frac{x-2}{x+5} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5\} \rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 10 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-2}{x+5} + x^2 + 3x - 10, \quad D_{f+g} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-2}{x+5} - (x^2 + 3x - 10), \quad D_{f-g} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x-2}{x+5} (x^2 + 3x - 10), \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-2}{x+5}}{x^2 + 3x - 10}, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-5\} - \{x | g(x) = 0\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-5\} - \{2, -5\} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{2, -5\}$$

ث

$$g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\} \rightarrow D_g = \{-1, 0, 2, 3\} \rightarrow D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$$

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\} \rightarrow D_f = \{2, 3, 0\}$$

$$f + g = \{(0, -2 + 3), (2, 5 + 4), (3, 4 + 0)\} \rightarrow f + g = \{(0, 1), (2, 9), (3, 4)\}$$

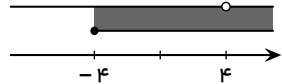
$$f - g = \{(0, -2 - 3), (2, 5 - 4), (3, 4 - 0)\} \rightarrow f - g = \{(0, -5), (2, 1), (3, 4)\}$$

$$f \cdot g = \{(0, -2 \times 3), (2, 5 \times 4), (3, 4 \times 0)\} \rightarrow f \cdot g = \{(0, -6), (2, 20), (3, 0)\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(0, \frac{-2}{3}\right), \left(2, \frac{5}{4}\right), \left(3, \frac{4}{0}\right) \right\} \rightarrow \frac{f}{g} = \left\{ \left(0, -\frac{2}{3}\right), \left(2, \frac{5}{4}\right) \right\}$$

الف

$$\begin{cases} D_f = [-4, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} - \{4\} \end{cases} \rightarrow D_f \cap D_g = [-4, +\infty) - \{4\} \quad (1)$$



$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \quad (2)$$

$$g(x) = 0 \rightarrow \frac{x+2}{x-4} = 0 \rightarrow x = -2 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) : D_{\frac{f}{g}} = [-4, +\infty) - \{-2, 4\}$$

ب

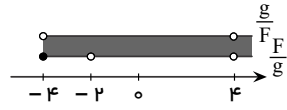
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | f(x) = 0\} \quad (2)'$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x+4} = 0 \rightarrow x = -4 \quad (3)'$$

$$(1), (2)', (3)' : D_{\frac{g}{f}} = (-4, +\infty) - \{4\}$$

ب

در این حالت هر یک از توابع $\frac{g}{f}$ و $\frac{f}{g}$ خود حکم دو تابع هستند و دامنه جمع آن‌ها، همان دامنه اشتراک آن‌ها است.



$$D_{\frac{f+g}{g+f}} = D_{\frac{f}{g}} \cap D_{\frac{g}{f}} = (-4, +\infty) - \{-2, 4\}$$

ت

$$(2f - g)(5) = 2f(5) - g(5) = 2\sqrt{5+4} - \frac{5+2}{5-4} = 2 \times 3 - 7 = -1$$

92

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x + 8 & x > 2 \end{cases}$$

عمل‌های مربوط را باید در دامنه مشترک توابع انجام دهیم.

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x \leq 2 \\ 6 & x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 2 \\ -4x^2 + 20x - 16 & x > 2 \end{cases}$$

در عمل تقسیم $\frac{f}{g}$ ، ریشه‌های مخرج $g(x) = 0$ را باید از دامنه مشترک حذف کنیم.

$$g(x) = 0 \rightarrow -2x + 8 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x-1}{4-x} & x > 2 - \{4\} \end{cases}$$

توجه داریم که عمل $\frac{g(x)}{f(x)}$ را به ازای $x = 4$ نمی‌توانیم انجام دهیم.

93

$$y = x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4 \rightarrow y = (x + 2)^2 - 4$$

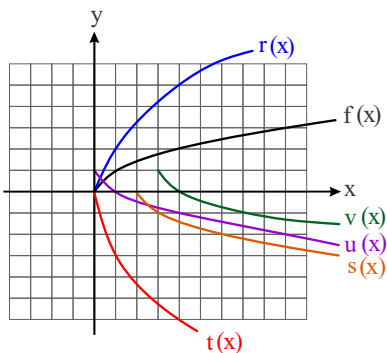
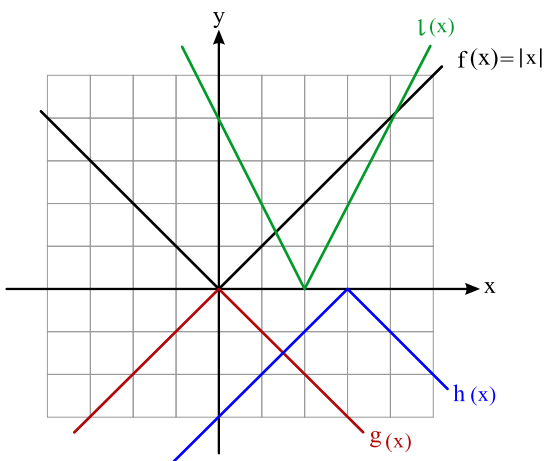
ابتدا نمودار سهمی $y = (x + 2)^2 - 4$ را 3 واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و داریم:

$$y = (x + 2 - 3)^2 - 4 \rightarrow y = (x - 1)^2 - 4$$

آنگاه نمودار جدید را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم و داریم:

$$y = (x - 1)^2 - 4 - 1 \rightarrow \boxed{y = (x - 1)^2 - 5} \quad \boxed{y = x^2 - 2x - 4}$$

94



۹۵

۹۶

زاویه‌ی مرکزی بین دو کابین متوالی $\alpha = \frac{2\pi}{30} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{15}$

$$\theta = \frac{32\pi}{5} = \frac{30\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} \rightarrow \theta = 6\pi + \frac{2\pi}{5} \rightarrow \theta = \frac{2\pi}{5}$$

موقعیت ما ۶ کابین جلوتر آمده و اکنون در موقعیت کابین ۱۴ هستیم. $\theta = n\alpha \rightarrow \frac{2\pi}{5} = n \times \frac{\pi}{15} \rightarrow n = 6$

$8 + 6 = 14 \rightarrow$

۹۷

$$\begin{cases} \alpha = 2x, \beta = 3x, \gamma = 4x \\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{5\pi}{4} \rightarrow 2x + 3x + 4x = \frac{5\pi}{4} \rightarrow 9x = \frac{5\pi}{4} \rightarrow x = \frac{5\pi}{36} \end{cases}$$

$\rightarrow \alpha = 2x = 2 \times \frac{5\pi}{36} \rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{18}$ رادیان, $\alpha = 50^\circ$

$\rightarrow \beta = 3x = 3 \times \frac{5\pi}{36} \rightarrow \beta = \frac{5\pi}{12}$ رادیان, $\beta = 75^\circ$

$\rightarrow \gamma = 4x = 4 \times \frac{5\pi}{36} \rightarrow \gamma = \frac{5\pi}{9}$ رادیان, $\gamma = 100^\circ$

۹۸ عقربه ساعت‌شمار با گذشت یک ساعت ۳۰ درجه $(\frac{\pi}{6})$ رادیان می‌پیماید. پس با گذشت نیم ساعت $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{12}$ رادیان طی می‌کند. عقربه دقیقه‌شمار هر ۵ دقیقه ۳۰ درجه می‌پیماید.

پس با گذشت نیم ساعت (۳۰ دقیقه), $\frac{\pi}{6} \times 6$ رادیان طی می‌کند. عقربه ثانیه‌شمار نیز هر دقیقه ۳۶۰ درجه (2π) رادیان طی می‌کند. پس با گذشت ۳۰ دقیقه, $30 \times 2\pi = 60\pi$ رادیان طی می‌کند.

طی می‌کند.

۹۹ فاصله هر دو کابین متوالی برحسب رادیان برابر است با:

$$\frac{\text{زاویه کل دایره برحسب رادیان}}{\text{تعداد کابین}} = \frac{2\pi}{80} = \frac{\pi}{40}$$

فرض کنید کابین ۱, $\frac{84\pi}{20}$ دوران کند, داریم:

$$\frac{84\pi}{20} = \frac{80\pi + 4\pi}{20} = 4\pi + \frac{4\pi}{20} = 4\pi + \frac{4\pi \times 2}{20 \times 2} = 4\pi + 8 \times \frac{\pi}{40}$$

یعنی کابین ۱ در موقعیت کابین ۸ قرار می‌گیرد.

بنابراین کابین ۵ در موقعیت کابین $13 = 8 + 5$ قرار می‌گیرد.

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \rightarrow \tan \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1 + \frac{9}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{16}{16} + \frac{9}{16}}{\frac{16}{16} - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{25}{16}}{\frac{7}{16}} \rightarrow \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{25}{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2}{\sin \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{x} \\ y = 3 \cot \alpha \rightarrow \cot \alpha = \frac{y}{3} \end{array} \right\} \rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \rightarrow 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{2}{x}\right)^2}$$

$$\rightarrow 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 1 + \frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{الف)} = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cos \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{-4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ب)} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{پ)} = \frac{-\tan 45^\circ - 2 \sin 27^\circ}{\cos 36^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{-1 - 2(-1)}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ت)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos(180^\circ - 60^\circ)}{\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2} \cos(180^\circ - 45^\circ)}$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos 60^\circ}{-\tan \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)}{-1 - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-1 - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ث)} = \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{14}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{14}\right) =$$

$$= \cancel{\cos \frac{3\pi}{14}} + \cancel{\cos \frac{5\pi}{14}} + \cos \frac{7\pi}{14} - \cancel{\cos \frac{5\pi}{14}} - \cancel{\cos \frac{3\pi}{14}} = \cos \frac{7\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{ج)} = \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \times \cot(180^\circ + 45^\circ) - 3 \cos(180^\circ + 60^\circ) \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)}{\left(\tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{-\sin \frac{\pi}{6} \times \cot 45^\circ - 3(-\cos 60^\circ) \times \tan \frac{\pi}{6}}{\tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\cos \frac{\pi}{6}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2} \times 1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)(1)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{\sin 16^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 7^\circ} = \frac{\sin(18^\circ - 2^\circ) - \cos(18^\circ + 2^\circ)}{\cos(9^\circ + 2^\circ) + \sin(9^\circ - 2^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 2^\circ - (-\cos 2^\circ)}{-\sin 2^\circ + \cos 2^\circ} = \frac{\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{-\sin 2^\circ + \cos 2^\circ} = \frac{\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} + \frac{\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ}}{-\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} + \frac{\cos 2^\circ}{\cos 2^\circ}}$$

$$= \frac{\tan 2^\circ + 1}{-\tan 2^\circ + 1} = \frac{0,36 + 1}{-0,36 + 1} = \frac{1,36}{0,64} = \frac{136}{64} = \frac{17}{8}$$

$$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)} = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta}$$

$$= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta + 1}{2 \tan \theta} = \frac{0,2 + 1}{2(0,2)} = \frac{1,2}{0,4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\cos 285^\circ = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin 525^\circ = \sin(360^\circ + 180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\rightarrow \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1}$$

$$= \frac{0,28 + 1}{0,28 - 1} = \frac{1,28}{-0,72} = \frac{128}{-72} = -\frac{16}{9}$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(7\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha - \frac{7\pi}{2}) = \cos(\alpha - \frac{7\pi}{2} + \frac{8\pi}{2}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$$

$$\rightarrow \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{-\cos \alpha}{-2 \sin \alpha} = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = 6 \rightarrow 2 \tan \alpha = 6 \rightarrow \tan \alpha = 3$$

$$\text{الف)} = \frac{3 \sin(180^\circ - 30^\circ) - \sqrt{2} \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(360^\circ - 60^\circ)}{-\cot(135^\circ) - \sqrt{3} \tan(\pi - \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{3 \sin 30^\circ - \sqrt{2}(-\cos \frac{\pi}{4}) + \cos(-60^\circ)}{-\cot(180^\circ - 45^\circ) - \sqrt{3}(-\tan \frac{\pi}{6})} = \frac{3 \sin 30^\circ + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos 60^\circ}{\cot 45^\circ + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{3(\frac{1}{2}) + \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب)} = \frac{2 \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \times \tan(\pi + \frac{\pi}{6}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) \times \tan(2\pi - \frac{\pi}{3})}{\cos^2(2\pi - \frac{\pi}{6}) + \cot^2(\pi + \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{2(-\sin \frac{\pi}{6}) \times \tan(\frac{\pi}{6}) - (-\cos \frac{\pi}{6})(-\tan \frac{\pi}{3})}{\cos^2 \frac{\pi}{6} + \cot^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{2(-\frac{1}{2})(1) - (\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{3})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \frac{-\frac{2}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{6}{4}} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{پ)} 2(-\sin \alpha) + 2 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = -2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = -3 \sin \alpha$$

$$\text{ت)} = -\cos \alpha - \cot \alpha + 3(-\cos \alpha) + \cot \alpha = -4 \cos \alpha$$

$$\text{ث)} = \sqrt{3} \cot(\frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3} + 2 \sin(\frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3} + 2 \cos(\frac{\pi}{3}) \times \tan(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2 \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times \tan(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2(\sin \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times (-\tan \frac{\pi}{3})$$

۱۰۵

۱۰۶

۱۰۷

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)(-\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } & \frac{\tan(18^\circ - 6^\circ) \cos(18^\circ + 3^\circ) - \sin(18^\circ + 45^\circ) \cos(36^\circ - 45^\circ)}{\cot(18^\circ - 45^\circ) \sin(36^\circ - 3^\circ) - \cos(18^\circ + 6^\circ) \tan(18^\circ + 45^\circ)} \\ &= \frac{-\tan 6^\circ (-\cos 3^\circ) - (-\sin 45^\circ) \cos 45^\circ}{-\cot 45^\circ (-\sin 3^\circ) - (-\cos 6^\circ) \tan 45^\circ} = \frac{(-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(-1)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)(1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{ح) } = 3 \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) - \cot\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 3 \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3\left(-\tan \frac{\pi}{6}\right) + \sin \frac{\pi}{4} + \left(-\cos \frac{\pi}{4}\right) - \cot \frac{\pi}{4}$$

$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ح) } = 5 \sin^2\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \tan^2\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) - \cot^2\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 5\left(-\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 + 2\left(\tan \frac{\pi}{3}\right)^2 + 3 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\cot \frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$= 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2(3) - \frac{3}{2} - 3 = \frac{5}{2} + 6 - \frac{3}{2} - 3 = 4$$

$$\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} + \alpha\right) + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \pi - \alpha\right)}{2 \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} + \alpha\right) - 3 \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \pi + \alpha\right)} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos \alpha + 2(-\cos \alpha)}{2 \sin \alpha - 3(-\sin \alpha)} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{-3 \cos \alpha}{5 \sin \alpha} = \frac{1}{10} \Rightarrow 5 \sin \alpha = -3 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-3}{5} \Rightarrow \boxed{\tan \alpha = -\frac{3}{5}}$$

الف

$$\tan 135^\circ + \cot 12^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) + \cot(180^\circ - 6^\circ) = -\tan 45^\circ - \cot 6^\circ = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ب

$$\cos(-21^\circ) + \cot(24^\circ) = \cos(21^\circ) + \cot(24^\circ) = \cos(180^\circ + 3^\circ) + \cot(180^\circ + 6^\circ)$$

$$= -\cos 3^\circ + \cot 6^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$$

پ

$$\sin 63^\circ + \tan(-54^\circ) = \sin(72^\circ - 9^\circ) + \tan(-36^\circ - 18^\circ)$$

$$= \sin(-9^\circ) + \tan(-18^\circ) = -\sin 9^\circ - \tan 18^\circ = -1 - 0 = -1$$

ت

۱۰۸

۱۰۹

$$\begin{aligned} & \cos(-72^\circ) + \cot(-60^\circ) + \tan(72^\circ) - \tan(-60^\circ) \\ &= \cos(-72^\circ + 72^\circ) + \cot(72^\circ - 60^\circ) + \tan(72^\circ + 0^\circ) - \tan(72^\circ - 60^\circ) = \\ & \cos(0^\circ) + \cot(12^\circ) + \tan(0^\circ) - \tan(12^\circ) = \\ & \cos(0^\circ) + \cot(18^\circ - 6^\circ) + \tan(0^\circ) - \tan(18^\circ - 6^\circ) = \\ & \cos(0^\circ) - \cot(6^\circ) + \tan(0^\circ) + \tan(6^\circ) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

ث

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{23\pi}{4}\right) = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ج

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{6}}{\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{-4\pi}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(2\pi - \frac{4\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} - (-\cos \frac{\pi}{6})}{-\sin \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow x + 20^\circ + x = 90^\circ + (k \times 360^\circ) \\ & k = 0 \rightarrow 2x = 70^\circ \rightarrow \boxed{x = 35^\circ} \\ & k = 1 \rightarrow 2x + 20^\circ = 450^\circ \rightarrow 2x = 430^\circ \rightarrow \boxed{x = 215^\circ} \\ & k = 2 \rightarrow 2x + 20^\circ = 810^\circ \rightarrow 2x = 790^\circ \rightarrow x = 395^\circ \rightarrow x = 35^\circ \text{ تکراری} \end{aligned}$$

زاویه x	12°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	330°
نسبت								
sin x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
cot x	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - a\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

الف)
$$\begin{cases} y_1 = \sin(4\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x \\ y_2 = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 \neq y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق نیستند}$$

ب)
$$\begin{cases} y_1 = \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x \\ y_2 = \cos(\pi - x) = -\cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند}$$

پ)
$$\begin{cases} y_1 = \sin(\pi - x) = \sin x \\ y_2 = \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x \end{cases} \rightarrow y_1 \neq y_2 \rightarrow \text{دو تابع بر یکدیگر منطبق نیستند}$$

الف)
$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \xrightarrow{-1} -4 \leq 3 \sin x - 1 \leq 2$$

$$\rightarrow -4 \leq y \leq 2 \rightarrow R_y = [-4, 2]$$

ب)
$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times (-4)} 4 \geq -4 \cos x \geq -4 \xrightarrow{+2} 6 \geq 2 - 4 \cos x \geq -2$$

$$\rightarrow 6 \geq y \geq -2 \rightarrow R_f = [-2, 6]$$

پ)
$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq 3 \sin^2 x \leq 3$$

$$\xrightarrow{-2} -2 \leq 3 \sin^2 x - 2 \leq 1 \rightarrow -2 \leq y \leq 1 \rightarrow R_h = [-2, 1]$$

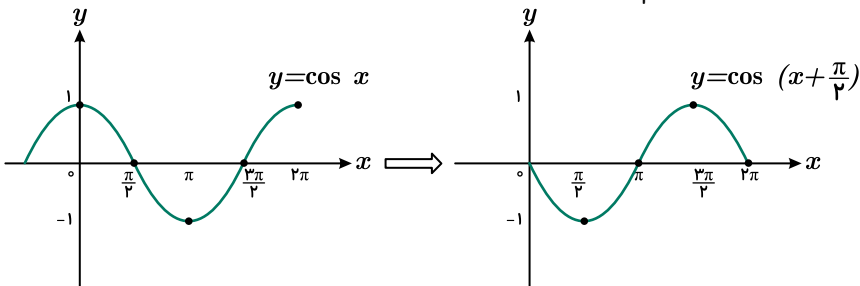
ت)
$$-1 \leq \cos(x - \frac{\pi}{3}) \leq 1 \xrightarrow{\times (-2)} 2 \geq -2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) \geq -2 \xrightarrow{+1} 3 \geq 1 - 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) \geq -1 \rightarrow 3 \geq y \geq -1 \rightarrow R_y = [-1, 3]$$

$$3 \geq 1 - 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) \geq -1 \rightarrow 3 \geq y \geq -1 \rightarrow R_y = [-1, 3]$$

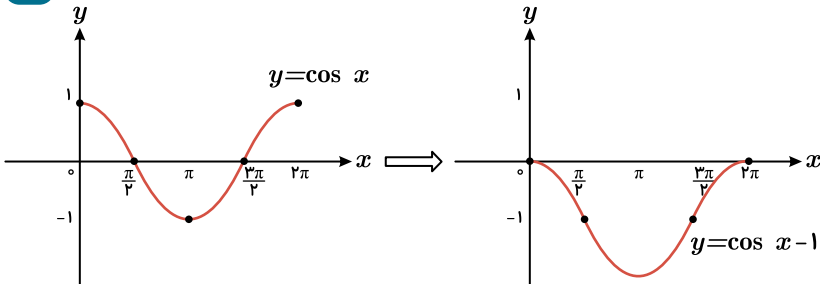
$$-1 \leq \sin(x + \frac{2\pi}{3}) \leq 1 \xrightarrow{\times (-2)} 2 \geq -2 \sin(x + \frac{2\pi}{3}) \geq -2 \xrightarrow{+3} 5 \geq -2 \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + 3 \geq 1 \rightarrow 5 \geq y \geq 1$$

$$\begin{cases} y_{\max} = 5 \\ y_{\min} = 1 \end{cases}$$

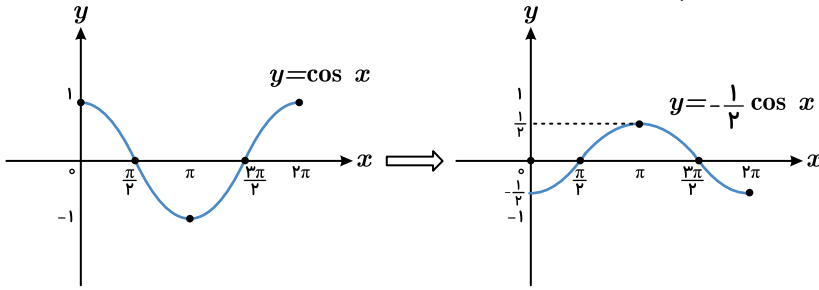
الف) برای رسم $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ، ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم سپس آن را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ منتقل می‌کنیم:



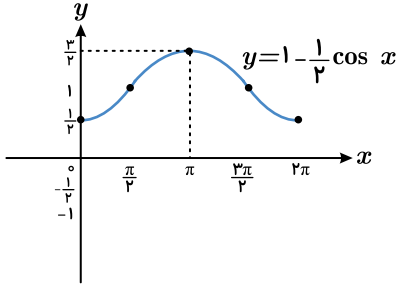
ب) برای رسم $y = \cos x - 1$ ، ابتدا $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازه یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



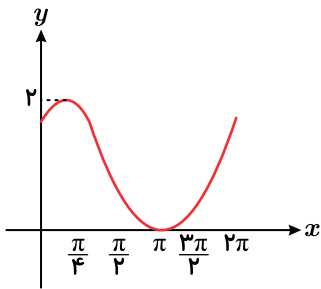
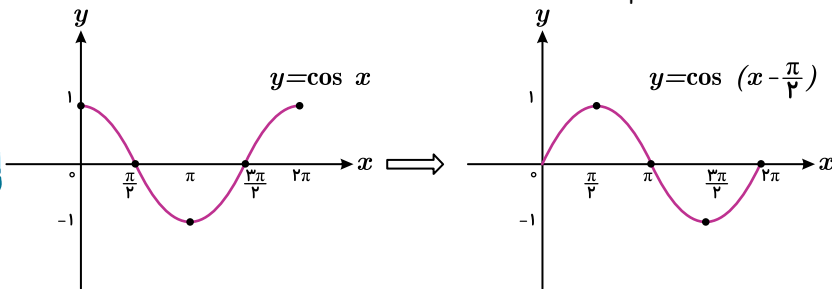
ب) برای رسم $y = 1 - \frac{1}{2} \cos x$ ، ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار $y = \frac{-1}{2} \cos x$ را رسم می‌کنیم.



در ادامه نمودار به دست آمده را به اندازه یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.



ت) برای رسم $y = \cos(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ ، ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به راست منتقل می‌کنیم.



$$\begin{cases} A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = ab^{-\frac{1}{2}} - 1 \rightarrow ab^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \\ B(1, 11) \rightarrow f(1) = 11 \rightarrow 11 = ab^1 - 1 \rightarrow ab = 12 \end{cases} \quad \div \rightarrow b^{\frac{3}{2}} = \frac{12}{\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 8 \rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 2^3 \rightarrow b^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \boxed{b = 4}, \quad \boxed{a = 3}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = 3 \times 4^x - 1} \rightarrow f(-1) = 3 \times 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4} \rightarrow \boxed{f(-1) = -\frac{1}{4}}$$

الف) $8^{x-1} = \frac{8^x}{8} = \frac{(2^3)^x}{8} = \frac{(2^x)^3}{8} = \frac{6^x}{8} = \frac{6^x}{2^3} = (\frac{6}{2})^x = 3^x = 27$

ب) $4^x + 8^x = (2^2)^x + (2^3)^x = (2^x)^2 + (2^x)^3 = 6^2 + 6^3 = 36 + 216 = 252$

پ) $16^{x-2} = \frac{16^x}{16^2} = \frac{(2^4)^x}{(2^2)^2} = \frac{(2^x)^4}{2^4} = \frac{6^4}{4^2} = (\frac{6}{2})^4 = (\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$

117

118

119

$$f(0, 25)^{2x} \times 64^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} \times \frac{64^{2x}}{64} = (2^{-2})^{2x} \times \frac{(2^6)^{2x}}{2^6} = \frac{2^{-4x} \times 2^{12x}}{2^6} = \frac{2^{8x}}{2^6}$$

$$= \frac{(2^x)^8}{2^6} = \frac{6^8}{2^6} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

$$g(-1) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} = 9$$

$$f(-1) = g(-1) \rightarrow 3^{-a+b} = 9 \rightarrow 3^{-a+b} = 3^2 \rightarrow -a+b = 2 \quad *$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \rightarrow 3^{2a+b} = 3^{-1} \rightarrow 2a+b = -1 \quad **$$

$$*, ** \rightarrow \begin{cases} -a+b=2 \\ 2a+b=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a-\cancel{b}=-2 \\ 2a+\cancel{b}=-1 \end{cases} +$$

$$3a = -3 \rightarrow a = -1, b = 1 \rightarrow f(x) = 3^{-x+1}$$

$$f^{-1}(27) = A \rightarrow f(A) = 27 \rightarrow 3^{-A+1} = 3^3 \rightarrow -A+1 = 3 \rightarrow A = -2 \rightarrow f^{-1}(27) = -2$$

۱۲۰

$$\text{الف)} 9^x = 3^{2x-4x} \rightarrow 3^{2x} = 3^{2x-4x} \rightarrow 2x = 2x-4x \rightarrow 2x = x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 6x = 0$$

$$\rightarrow x(x-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-6=0 \rightarrow x=6 \end{cases}$$

$$\text{ب)} \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{25}{9} \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \rightarrow x = -2$$

$$\text{پ)} 3^{5x+2} = 27\sqrt{3} \rightarrow 3^{5x+2} = 3^3 \times 3^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3^{5x+2} = 3^{\frac{7}{2}} \rightarrow 5x+2 = \frac{7}{2}$$

$$\rightarrow 5x = \frac{7}{2} - 2 \rightarrow 5x = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{10}$$

$$\text{ت)} \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+3} = \left(\frac{16}{81}\right)^x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+3} = \left(\frac{3}{2}\right)^x \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4x}$$

$$\rightarrow 2x+3 = -4x \rightarrow 2x+4x = -3 \rightarrow 6x = -3 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ث)} 27^x - 3^{2x-5} = 0 \rightarrow 27^x = 3^{2x-5} \rightarrow (3^3)^x = 3^{2x-5}$$

$$\rightarrow 3^{3x} = 3^{2x-5} \rightarrow 3x = 2x-5 \rightarrow 3x-2x = -5 \rightarrow x = -5$$

$$\text{ج)} 2^{2x} + 2^{x+2} = 40 \rightarrow 2^{2x} + 2^2 \times 2^x = 40 \rightarrow 2^{2x} + 4 \times 2^x = 40 \rightarrow 5 \times 2^x = 40$$

$$\rightarrow 2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$$

$$\text{ح)} 3^{x+1} - 3^{x-1} = 72 \rightarrow 3 \times 3^x - \frac{3^x}{3} = 72 \rightarrow \frac{9 \times 3^x - 3^x}{3} = 72$$

$$8 \times 3^x = 72 \times 3 \rightarrow 3^x = 27 \rightarrow 3^x = 3^3 \rightarrow x = 3$$

$$\text{خ)} 5^{2x+3y} = 5^{x+y+1} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+\cancel{3y}=0 \\ -\cancel{2x}-2y=2 \end{cases} +$$

$$y = 2 \rightarrow x = -3$$

$$\text{الف)} y = \log_x(2x+6)$$

$$\begin{cases} 2x+6 > 0 \rightarrow 2x > -6 \rightarrow x > -3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (0, +\infty) - \{1\}$$

$$\text{ب)} f(x) = \log_{(x-1)}(12-2x)$$

$$\begin{cases} 12-2x > 0 \rightarrow 12 > 2x \rightarrow 6 > x \\ x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \\ x-1 \neq 1 \rightarrow x \neq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (1, 6) - \{2\}$$

۱۲۱

۱۲۲

$$\text{پ) } f(x) = \log_{(x-2)}(25 - x^2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 25 - x^2 > 0 \rightarrow -5 < x < 5 \\ x - 2 > 0 \rightarrow x > 2 \\ x - 2 \neq 1 \rightarrow x \neq 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (2, 5) - \{3\}$$

$$\text{ت) } f(x) = \log_{(x-5)}(x^2 - 16)$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 16 > 0 \rightarrow x < -4 \text{ یا } 4 < x \\ x - 5 > 0 \rightarrow 5 < x \\ x - 5 \neq 1 \rightarrow x \neq 6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (5, +\infty) - \{6\}$$

$$f(9) = 1, 5 \rightarrow \log_a(9 - 1) = 1, 5 \rightarrow 8 = a^{\frac{1}{5}} \rightarrow 2^3 = (a^{\frac{1}{5}})^5 \rightarrow 2 = a^{\frac{1}{5}} \rightarrow \boxed{a = 32}$$

$$\rightarrow y = \log_2(x - 1) \rightarrow 2^y = x - 1 \rightarrow x = 2^y + 1 \rightarrow f^{-1}(y) = 2^y + 1 \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = 2^x + 1}$$

$$\text{الف) } \log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - a$$

$$\text{ب) } \log 18 = \log(3^2 \times 2) = \log 3^2 + \log 2 = 2 \log 3 + \log 2 = 2b + a$$

$$\text{پ) } \log 1,5 = \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = b - a$$

$$\text{ت) } \log 75 = \log(3 \times 5^2) = \log 3 + \log 5^2 = \log 3 + 2 \log 5 = 3 + 2(1 - a) = 5 - 2a$$

$$\text{ث) } \log 42 = \log(2 \times 3 \times 7) = \log 2 + \log 3 + \log 7 = a + b + c$$

$$\text{ج) } \log \frac{98}{45} = \log\left(\frac{2^7 \times 7}{3^2 \times 5}\right) = \log 2^7 + \log 7 - \log 3^2 - \log 5$$

$$= 7 \log 2 + \log 7 - 2 \log 3 - \log 5 = 7c + a - 2b - (1 - a) = 8a - 2b + 7c - 1$$

$$\text{ح) } \log \sqrt{210} = \log \sqrt{3 \times 7 \times 10} = \log(3 \times 7 \times 10)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log(3 \times 7 \times 10)$$

$$= \frac{1}{2}(\log 3 + \log 7 + \log 10) = \frac{1}{2}(b + c + 1)$$

$$\text{ز) } \log \frac{\sqrt[3]{35}}{12} = \log\left(\frac{\sqrt[3]{5 \times 7}}{2^2 \times 3}\right) = \log(5 \times 7)^{\frac{1}{3}} - \log(2^2 \times 3)$$

$$= \log(5^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{3}}) - \log(2^2 \times 3) = \log 5^{\frac{1}{3}} + \log 7^{\frac{1}{3}} - \log 2^2 - \log 3$$

$$= \frac{1}{3} \log 5 + \frac{1}{3} \log 7 - 2 \log 2 - \log 3 = \frac{1}{3}(1 - a) + \frac{1}{3}c - 2a - b = -\frac{2}{3}a - b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}$$

$$\text{ح) } \log(135\sqrt[4]{56}) = \log(3^3 \times 5 \times \sqrt[4]{2^3 \times 7}) = \log(3^3 \times 5 \times 2^{\frac{3}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}})$$

$$= \log 3^3 + \log 5 + \log 2^{\frac{3}{4}} + \log 7^{\frac{1}{4}} = 3 \log 3 + \log 5 + \frac{3}{4} \log 2 + \frac{1}{4} \log 7$$

$$= 3b + (1 - a) + \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}c = -\frac{1}{4}a + 3b + \frac{1}{4}c + 1$$

$$\text{الف) } \log_5 150 - \log_5 6 = \log_5 \frac{150}{6} = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$$

$$\text{ب) } \log_7 \sqrt[4]{343} = \log_7 \sqrt[4]{7^3} = \log_7 7^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \log_7 7 = \frac{3}{4}$$

$$\text{پ) } \log_5 625 + \log_7 \frac{1}{64} + \log_{10} 0,001 = \log_5 5^4 + \log_7 2^{-6} + \log_{10} 10^{-3}$$

$$= 4 \log_5 5 - 6 \log_7 7 - 3 \log_{10} 10 = 4 - 6 - 3 = -5$$

$$\text{ت) } 5^{(\log_5 3^{-2})} = 5^{\log_5 3^{-2}} = 3^{-2} = \frac{9}{5^2} = \frac{9}{25}$$

۱۲۳

۱۲۴

۱۲۵

$$\begin{aligned} \text{ث)} \quad & 6 \log_9 \sqrt[3]{81} - 3 \log_7 \frac{1}{\lambda} + 4 \log_5 \frac{1}{125} = 6 \log_9 3^{\frac{4}{3}} - 3 \log_7 7^{-2} + 4 \log_5 5^{-3} \\ & = 6 \left(\frac{4}{3}\right) \log_9 3 - 3(-3 \log_7 7) + 4(-3 \log_5 5) = 6 \left(\frac{4}{3}\right) - 3(-3) + 4(-3) = 4 + 9 - 12 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ج)} \quad \log_{r^2} 243 = \log_{r^2} 3^5 = \frac{5}{2} \log_r 3 = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{چ)} \quad & \log_{\frac{1}{r}} 27 - 3 \log_{\frac{1}{r}} \frac{1}{49} + 2 \log_{\frac{1}{r}} 1 = \log_{r^{-1}} 3^3 - 3 \log_{r^{-1}} 7^{-2} + 2 \log_{r^{-1}} 1 = 3 \log_r 3 - 6 \log_r 7 + 2 \log_r 1 \\ & = \left(\frac{3}{-1}\right) \log_r 3 - 3(-2 \log_r 7) + 2(-\log_r 1) = -3 + 6 - 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ح)} \quad \log_5 (\sqrt[3]{125})^2 = \log_5 (\sqrt[3]{5^3})^2 = \log_5 (5^2) = 2 \log_5 5 = 2$$

$$\begin{aligned} & \log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 \\ & = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + 2\sqrt{5} + 5) = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) \\ & = \log((6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})) = \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 = 4k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \log 35 + 2 \log 2\sqrt{7} - \log 200 - 2 \log 7 = \log 35 + \log(2\sqrt{7})^2 - \log 200 - \log 7^2 \\ & = \log 35 + \log 28 - \log 200 - \log 49 = \log \frac{35 \times 28}{200 \times 49} = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1 \log 10 = -1 \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad \log_5 200 - \log_5 40 = \log_5 \left(\frac{200}{40}\right) = \log_5 5 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{پ)} \quad & \log_7 12\sqrt{3} + \log_7 3\sqrt{12} = \log_7 (12\sqrt{3} \times 3\sqrt{12}) = \log_7 (36 \times \sqrt{36}) \\ & = \log_7 (36 \times 6) = \log_7 6^3 = 3 \log_7 6 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{ت)} \quad \sqrt[3]{(\log_9 3 + \log_9 2)} = \sqrt[3]{(\log_9 3^2 + \log_9 2^3)} = \sqrt[3]{(\log_9 9 + \log_9 8)} = \sqrt[3]{(\log_9 72)} = \sqrt[3]{72}$$

$$\text{ث)} \quad \sqrt[3]{10^{(\log 32 + \log 8)}} = (10^{\frac{1}{3}})^{(\log 256)} = 10^{\left(\frac{1}{3} \log 256\right)} = 10^{\log 256^{\frac{1}{3}}} = 10^{\log \sqrt[3]{256}} = 10^{\log 16} = 16$$

$$\text{ج)} \quad \lambda^{(\log_7 \sqrt[3]{20} - \log_7 2)} = (7^{\lambda})^{(\log_7 \frac{\sqrt[3]{20}}{2})} = 7^{\lambda \log_7 \frac{\sqrt[3]{20}}{2}} = 7^{\log_7 \left(\frac{\sqrt[3]{20}}{2}\right)^{\lambda}} = 7^{\log_7 \frac{20}{2^{\lambda}}} = \frac{20}{2^{\lambda}}$$

$$\begin{aligned} \text{چ)} \quad & \log 20 + 6 \log \sqrt[6]{5} - \log_7 \sqrt[3]{32} = \log 20 + \log \left(\sqrt[6]{5}\right)^6 - \log_7 2^5 \\ & = \log 20 + \log 5 - \left(\frac{5}{3}\right) \log_7 2 = \log 100 - \frac{5}{3} \log_7 2 = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\log 3 + \log \sqrt[4]{3} = \log (\lambda 1)^k \rightarrow \log 3 + \log 3^{\frac{1}{4}} = \log (3^{\frac{5}{4}})^k$$

$$\rightarrow \log 3^{\frac{5}{4}} = \log 3^{\frac{5k}{4}} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{5k}{4} \rightarrow \frac{5}{k} = 16$$

$$\log_7 \frac{5}{k} = \log_7 16 = \log_7 2^4 = 4 \log_7 2 = 4 \rightarrow \log_7 \frac{5}{k} = 4$$

$$\log_{\sqrt{a}} a = \frac{1}{\sqrt{a}} \rightarrow a = (\sqrt{a})^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \rightarrow a^{\sqrt{a}} = ((\sqrt{a})^{\frac{1}{\sqrt{a}}})^{\sqrt{a}} \rightarrow a^{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

$$\rightarrow \boxed{a^{\sqrt{a}} = 9} \rightarrow \log_{\lambda} (a^{\sqrt{a}} + \sqrt{a}) = \log_{\lambda} (9 + 3) = \log_{\lambda} 16$$

$$= \log_{\sqrt{a}} 2^4 = \frac{4}{\sqrt{a}} \log_{\sqrt{a}} 2 = \frac{4}{\sqrt{a}} \rightarrow \log_{\lambda} (a^{\sqrt{a}} + \sqrt{a}) = \frac{4}{\sqrt{a}}$$

۱۲۶

۱۲۷

۱۲۸

۱۲۹

۱۳۰

$$\log_8 2 \sqrt[3]{0.25} = \log_{2^3} 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_{2^3} 2 (2^{-2})^{\frac{1}{2}} = \log_{2^3} 2 (2^{-1}) = \log_{2^3} 2^{-1} = \log_{2^3} 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{3} \log_2 2 = \frac{-1}{9} \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{9}}$$

$$\rightarrow \log_r \left(\frac{1}{A} - 1\right) = \log_r \left(\frac{1}{\frac{1}{9}} - 1\right) = \log_r (9 - 1) = \log_r 8 = \log_{2^3} 2^3$$

$$= \frac{3}{3} \log_2 2 = \frac{3}{3} \rightarrow \boxed{\log_r \left(\frac{1}{A} - 1\right) = \frac{3}{3}}$$

۱۳۱

$$\log_r \sqrt[\delta]{e^r} = A \rightarrow \sqrt[\delta]{e^r} = r^A \rightarrow e^{\frac{r}{\delta}} = r^A \rightarrow (e^{\frac{r}{\delta}})^{\frac{\delta}{r}} = (r^A)^{\frac{\delta}{r}}$$

$$\rightarrow \boxed{e = r^{\frac{\delta A}{r}}} \rightarrow \sqrt{e} = \left(r^{\frac{\delta A}{r}}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{e} = r^{\frac{\delta A}{2r}}$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt{e}} 32 = \log_{r^{\frac{\delta A}{2r}}} 2^5 = \frac{5}{\frac{\delta A}{2r}} \log_r 2 = \frac{r}{A} \log_r 2 = \frac{r}{A} \rightarrow \boxed{\log_{\sqrt{e}} 32 = \frac{r}{A}}$$

۱۳۲

$$\text{الف) } \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{n}{n+1} = \log \left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \dots \times \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \times \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \log \left(\frac{1}{n+1} \right) = \log (n+1)^{-1} = -\log (n+1)$$

$$\text{ب) } \delta^{(r \log_\delta 2 + 3 \log_\delta 3)} = \delta^{(\log_\delta 2^r + \log_\delta 3^3)} = \delta^{(\log_\delta 4 + \log_\delta 27)} = \delta^{\log_\delta 108} = 108$$

۱۳۳

$$\log_y \sqrt{2} = \frac{1}{4} \rightarrow \log_{\sqrt{y}} y = 4 \rightarrow y = (\sqrt{y})^4 \rightarrow \boxed{y = 4}$$

$$\log_x \sqrt[3]{16} = \frac{4}{3} \rightarrow \log_{\sqrt[3]{x}} x = \frac{4}{3} \rightarrow x = (16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}} \rightarrow x = 16^{\frac{1}{4}} \rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$\rightarrow \log_{x^3} y^4 = \log_{y^3} 4^4 = \log_{y^3} 2^4 = \frac{4}{3} \log_y 2 = \frac{4}{3} \rightarrow \boxed{\log_{x^3} y^4 = \frac{4}{3}}$$

۱۳۴

الف)

$$\log_c a = x \rightarrow a = c^x, \log_c b = y \rightarrow b = c^y, \log_c d = z \rightarrow d = c^z$$

$$\rightarrow abd = c^x c^y c^z \rightarrow abd = c^{x+y+z} \rightarrow \log_c abd = x + y + z$$

$$\rightarrow \log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$$

ب)

$$\log_c a = x \rightarrow a = c^x, \log_c b = y \rightarrow b = c^y$$

$$\log_b a = \log_{c^y} c^x = \frac{x}{y} \log_c c = \frac{x}{y} \rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

پ)

$$\log_a b = x \rightarrow b = a^x \rightarrow b = a^{\log_a b}$$

ت)

$$\log_b a = x \rightarrow a = b^x \rightarrow \log_a b = \log_{b^x} b = \frac{1}{x} \log_b b = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \log_b a \times \log_a b = x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

۱۳۵

$$\text{الف) } \log_9 \sqrt[5]{49} = \log_9 7^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_9 7 = \frac{2}{5}$$

$$\text{ب) } \log_9 27^{\frac{1}{3}} = \log_9 3^3 = \frac{3}{3} \log_9 3 = \frac{3}{3}$$

$$\text{پ) } -\log_5 125 = -\log_5 5^3 = -3 \log_5 5 = -3$$

ت) $3 \log_{10} \sqrt{10000} = 3 \log_{10} 100 = 3 \times \frac{2}{2} \log_{10} 10 = \frac{9}{2}$

الف) $\log_{\Delta}(x+6) = \log_{\Delta}(2x-8) \rightarrow x+6 = 2x-8 \rightarrow 6+8 = 2x-x \rightarrow x=14$

ب) $\log_{\Delta}(x+6) + \log_{\Delta}(x+2) = 1 \rightarrow \log_{\Delta}((x+6)(x+2)) = \log_{\Delta} \Delta$
 $\rightarrow x^2 + 8x + 12 = \Delta \rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x+7=0 \rightarrow x=-7 \end{cases}$ غ

پ) $\log_r(x+2) = \log_r 8 \rightarrow x+2 = 8 \rightarrow x=6$

ت) $\log(x+1) - \log(x-3) = 2 \rightarrow \log\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = \log 10^2 \rightarrow \frac{x+1}{x-3} = 100$

$\rightarrow x+1 = 100x - 300 \rightarrow 1+300 = 100x - x \rightarrow 301 = 99x \rightarrow x = \frac{301}{99}$

ث) $\log_r(2x+1) = 3 \rightarrow 2x+1 = r^3 \rightarrow 2x+1 = 8 \rightarrow 2x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{2}$

ج) $\log(2x) - \log(x-3) = 1 \rightarrow \log \frac{2x}{x-3} = \log 10$

$\rightarrow \frac{2x}{x-3} = 10 \rightarrow 2x = 10x - 30 \rightarrow 30 = 10x - 2x \rightarrow 30 = 8x \rightarrow x = \frac{30}{8} \rightarrow x = 3,75$

چ) $\log_{\sqrt{r}} x = \log_r 64 \rightarrow \log_{\sqrt{r}} x = \log_r 2^6 \rightarrow \log_{\sqrt{r}} x = 6 \log_r 2$

$\rightarrow \log_{\sqrt{r}} x = 6 \rightarrow x = (\sqrt{r})^6 \rightarrow x = (r^{\frac{1}{2}})^6 \rightarrow x = r^3 \rightarrow x=8$

ح) $\log_v(x-2) = \frac{1}{2} \rightarrow x-2 = v^{\frac{1}{2}} \rightarrow x-2 = \sqrt{v} \rightarrow x = \sqrt{v} + 2$

الف) $\log_4(x^2 - 24) = \log_4 \Delta x \rightarrow x^2 - 24 = \Delta x \rightarrow x^2 - \Delta x - 24 = 0$

$\rightarrow (x-8)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-8=0 \rightarrow x=8 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{cases}$ غ

ب) $\log_r(x^2 - 1) = 1 + \log_r(x+9) \rightarrow \log_r(x^2 - 1) = \log_r 3 + \log_r(x+9)$

$\rightarrow \log_r(x^2 - 1) = \log_r(3x+27) \rightarrow x^2 - 1 = 3x+27 \rightarrow x^2 - 3x - 28 = 0$

$\rightarrow (x-7)(x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-7=0 \rightarrow x=7 \\ x+4=0 \rightarrow x=-4 \end{cases}$

پ) $\log_x(x^2 - 2x) = 2 \rightarrow x^2 - 2x = x^2 \rightarrow x^2 - x^2 - 2x = 0$

$\rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ غ} \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$ غ

ت) $\begin{cases} \log x = \log 2 + \log y \\ r^x \times \Delta^y = \Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x = \log 2y \\ r^x \times (r^y)^y = r^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

جایگذاری $\rightarrow 2y + 3y = 2 \rightarrow 5y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{5}, x = \frac{4}{5}$

ث) $\begin{cases} \log y = 2 \log 3 + \log x \\ r^{x-y} \times r^{x+y} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log y = \log 3^2 + \log x \\ r^{x-y} \times (r^y)^{x+y} = r^0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log y = \log(9x) \\ r^{x-y} \times r^{2x+2y} = r^0 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} y = 9x \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 3x + 2(9x) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}, y = 3$

الف) $\log_x(x^2 + x) = \log_x 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+3=0 \rightarrow x=-3 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$ غ

ب) $\log_3 x^2 + 7x + 7 = 0 \rightarrow x^2 + 7x + 7 = 9 \rightarrow x^2 + 7x + 7 = 1$

$$\rightarrow x^r + 7x + 6 = 0 \rightarrow (x + 6)(x + 1) = 0 \begin{cases} x + 6 = 0 \rightarrow x = -6 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پ) $\log_x(x^r + 3x - 6) = 3 \rightarrow x^r + 3x - 6 = x^3 \rightarrow 3x - 6 = 0 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$

ت) $\log_8(x + 1)^r + 2\log_r x = 1 \rightarrow \log_{r^2}(x + 1)^r + \log_{r^2} x^2 = 1$

$$\rightarrow \frac{r}{r^2} \log_r(x + 1) + \frac{2}{r^2} \log_r x = \log_{r^2} 2 \rightarrow \log_r(x + 1)x = \log_{r^2} 2 \rightarrow x(x + 1) = 2$$

$$\rightarrow x^r + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \text{ غ} \end{cases}$$

ث) $\log_{1r}(x - 2) + \log_{1r}(x + 2) = 1 \rightarrow \log_{1r}((x - 2)(x + 2)) = \log_{1r} 12$

$$\rightarrow \log_{1r}(x^2 - 4) = \log_{1r} 12 \rightarrow x^2 - 4 = 12 \rightarrow x^2 = 16 \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \text{ غ} \end{cases}$$

ج) $\log 3x - \log 4 = \log(7 - x) \rightarrow \log f\left(\frac{3x}{4}\right) = \log(7 - x)$

$$\rightarrow \frac{3x}{4} = 7 - x \rightarrow 3x = 4(7 - x) \rightarrow 3x = 28 - 4x \rightarrow 7x = 28 \rightarrow x = 4$$

چ) $\log_r \sqrt{3} + \log_\delta \sqrt{\delta} = \frac{1}{r} \log_r 3 + \log_\delta \delta^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \log_r 3 + \frac{1}{r} \log_r 3 + \frac{1}{r} \log_\delta \delta = \frac{1}{r} \log_r 3$

$$\rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \log_r 3 \rightarrow 1 = \frac{1}{r} \log_r 3 \rightarrow \log_r 3 = r \rightarrow x = r^r \rightarrow x = 4$$

الف) $\log_r x + \log_r(x - 2) = 3 \rightarrow \log_r(x(x - 2)) = 3\log_r 2$

$$\rightarrow \log_r(x^2 - 2x) = \log_r 2^3 \rightarrow x^2 - 2x = 8 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \begin{cases} x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \text{ غ} \end{cases}$$

ب) $2 \log \sqrt{2x + 3} + \log(2x - 3) - \frac{1}{r} \log 49 = 0 \rightarrow \log(\sqrt{2x + 3})^2 + \log(2x - 3) - \log 49^{\frac{1}{r}} = 0$

$$\rightarrow \log(2x + 3) + \log(2x - 3) = \log 7 \rightarrow \log((2x + 3)(2x - 3)) = \log 7$$

$$\rightarrow \log(4x^2 - 9) = \log 7 \rightarrow 4x^2 - 9 = 7 \rightarrow 4x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \text{ غ} \end{cases}$$

پ) $\begin{cases} 1 + \log \sqrt{x + 1} = \log y \\ 4\sqrt{2} = 2^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log 1 + \log \sqrt{x + 1} = \log y \\ 2^r \times 2^{\frac{1}{r}} = 2^{rx} \end{cases}$

$$\begin{cases} \log(1 \cdot \sqrt{x + 1}) = \log y \rightarrow 1 \cdot \sqrt{\frac{\delta}{4} + 1} = y \rightarrow 1 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} = y \rightarrow y = 1 \cdot \frac{3}{2} \rightarrow y = 1.5 \\ \frac{\delta}{2^r} = 2^{rx} \rightarrow \frac{\delta}{2} = 2x \rightarrow x = \frac{\delta}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log(1 \cdot \sqrt{x + 1}) = \log y \rightarrow 1 \cdot \sqrt{\frac{\delta}{4} + 1} = y \rightarrow 1 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} = y \rightarrow y = 1 \cdot \frac{3}{2} \rightarrow y = 1.5 \\ \frac{\delta}{2^r} = 2^{rx} \rightarrow \frac{\delta}{2} = 2x \rightarrow x = \frac{\delta}{4} \end{cases}$$

۱۴۰

$\log_r(\delta x + 1) + \log_r x = 2 \rightarrow \log_r(x(\delta x + 1)) = \log_r 4 \rightarrow \delta x^2 + x = 4$

$$\rightarrow \delta x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow (\delta x - 4)(x + 1) = 0 \begin{cases} \delta x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{\delta} \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \text{ غ} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{4}{x} = \frac{4}{\frac{4}{\delta}} = \frac{4\delta}{4} = \delta \rightarrow \frac{4}{x} = \delta$$

$\log_r(2x^r + 1) - \log_r(x + 2) = 1 \rightarrow \log_r \frac{2x^r + 1}{x + 2} = \log_r 3 \rightarrow \frac{2x^r + 1}{x + 2} = 3$

$$\rightarrow 2x^r + 1 = 3x + 6 \rightarrow 2x^r - 3x - 5 = 0 \rightarrow (x + 1)(2x - 5) = 0 \begin{cases} x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ 2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

۱۳۹

۱۴۱

$$x = -1 \rightarrow \log_{\lambda}(2x - 1) = \log_{\lambda}(2(-1) - 1) = \log_{\lambda}(-3) \quad \text{غ}$$

$$x = \frac{5}{2} \rightarrow \log_{\lambda}(2x - 1) = \log_{\lambda}\left(2\left(\frac{5}{2}\right) - 1\right) = \log_{\lambda}4 = \log_{\sqrt{2}}2^2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}}2 \rightarrow \log_{\lambda}(2x - 1) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\log(x^r - x + 1) + \log(x + 1) = 1 \rightarrow \log((x^r - x + 1)(x + 1)) = \log 10$$

$$\rightarrow \log(x^r + 1) = \log 10 \rightarrow x^r + 1 = 10 \rightarrow x^r = 9 \rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{9}}$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt{2}}x = \log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{9} = \log_{\sqrt{2}}(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} = \log_{\sqrt{2}}3^{\frac{2}{9}} = \frac{2}{9} \log_{\sqrt{2}}3 = \frac{2}{9} \rightarrow \log_{\sqrt{2}}x = \frac{2}{9}$$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}x + \log_{\sqrt{2}}y = 2 \\ x^r + y^r = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}xy = 2 \\ x^r + y^r = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 2^2 \\ x^r + y^r = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ x^r + y^r = 46 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x + y)^r = x^r + y^r + rxy \rightarrow (x + y)^r = 46 + 2(4) \rightarrow (x + y)^r = 64$$

$$\begin{cases} \boxed{x + y = 8} \\ x + y = -8 \end{cases} \rightarrow \log_{\sqrt{2}}(x + y) = \log_{\sqrt{2}}8 = \log_{\sqrt{2}}2^3 = \frac{3}{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}}2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow \log_{\sqrt{2}}(x + y) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

۱۴۲

۱۴۳

۱۴۴

الف

$$\log_{\sqrt{2}}(p^r - 2) = \log_{\sqrt{2}}p \rightarrow p^r - 2 = p \rightarrow p^r - p - 2 = 0$$

$$\rightarrow (p - 2)(p + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} p - 2 = 0 \rightarrow \boxed{p = 2} \\ p + 1 = 0 \rightarrow p = -1 \quad \text{غ} \end{cases}$$

ب

$$\log_{\Delta}(x + 1) + \log_{\Delta}(x - 1) = 1$$

$$\rightarrow \log_{\Delta}((x + 1)(x - 1)) = \log_{\Delta}\Delta \rightarrow \log_{\Delta}(x^2 - 1) = \log_{\Delta}\Delta$$

$$\rightarrow x^2 - 1 = \Delta \rightarrow x^2 = \Delta + 1 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = \sqrt{\Delta + 1}} \\ x = -\sqrt{\Delta + 1} \quad \text{غ} \end{cases}$$

پ

$$3 \log_{\sqrt{2}}a - \log_{\sqrt{2}}\Delta = \log_{\sqrt{2}}2\Delta$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt{2}}a^3 = \log_{\sqrt{2}}2\Delta + \log_{\sqrt{2}}\Delta \rightarrow \log_{\sqrt{2}}a^3 = \log_{\sqrt{2}}(2\Delta \times \Delta)$$

$$\rightarrow a^3 = 12\Delta \rightarrow a^3 = \Delta^2 \rightarrow \boxed{a = \Delta}$$

ت

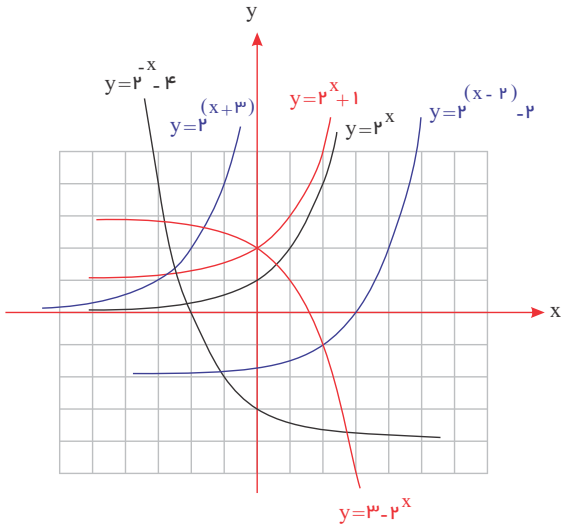
$$\log_{\frac{1}{10}}(x^r - 21) = -2 \rightarrow x^r - 21 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \rightarrow x^r - 21 = 10^2$$

$$\rightarrow x^r - 21 = 100 \rightarrow x^r = 121 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 11} \\ \boxed{x = -11} \end{cases}$$

$$\frac{2}{3} \log 12 = \frac{2}{3}(\log 3 + \log 4) = \frac{2}{3}(0.5 + 2 \log 2) = \frac{11}{15}$$

۱۴۵

۱۴۶



الف) $y = 2^x \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (0, +\infty)$

ب) $y = 2^x + 1 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (1, +\infty)$

پ) $y = 2^{(x+3)} \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (0, +\infty)$

ت) $y = 2^{(x-2)} - 2 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-2, +\infty)$

ث) $y = 3 - 2^x \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-\infty, 3)$

ج) $y = 2^{-x} - 4 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-4, +\infty)$

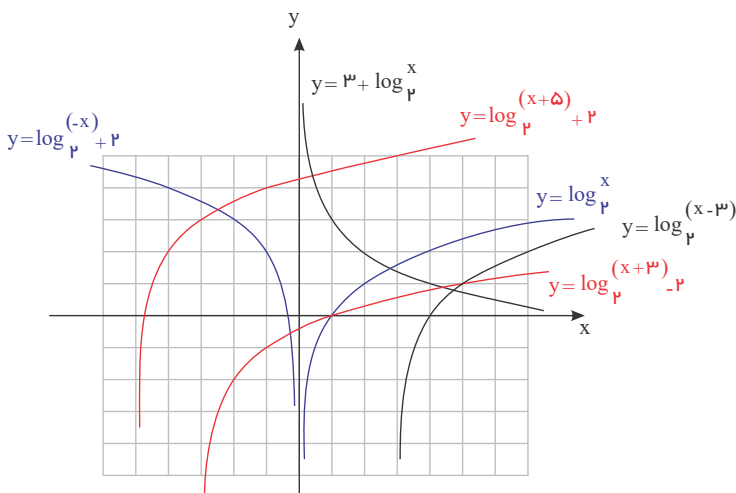
$$\begin{cases} (-1, 0) \\ (0, -4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(0) = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{-(1+b)} + c = 0 \\ 2^{-(0+b)} + c = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{1-b} + c = 0 \\ 2^{-b} + c = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{1-b} = -c \\ 2^{-b} + 4 = -c \end{cases}$$

$$\rightarrow 2^{1-b} = 2^{-b} + 4 \rightarrow 2(2^{-b}) = (2^{-b}) + 4$$

$$\rightarrow 2(2^{-b}) - (2^{-b}) = 4 \rightarrow 2^{-b} = 4 \rightarrow 2^{-b} = 2^2 \rightarrow -b = 2 \rightarrow \boxed{b = -2}$$

$$\rightarrow 2^{1-(-2)} = -c \rightarrow 2^3 = -c \rightarrow c = -8 \rightarrow \boxed{c = -8} \rightarrow \boxed{f(x) = 2^{-(x-2)} - 8}$$

$$f(-2) = 2^{-(-2-2)} - 8 \rightarrow f(-2) = 2^4 - 8 \rightarrow \boxed{f(-2) = 8}$$



الف) $y = \log_p x \rightarrow D = (0, +\infty), R = \mathbb{R}$

ب) $y = \log_p(x - 3) \rightarrow D = (3, +\infty), R = \mathbb{R}$

پ) $y = \log_p(x + 5) + 2 \rightarrow D = (-5, +\infty), R = \mathbb{R}$

ت) $y = \log_p(-x) + 2 \rightarrow D = (-\infty, 0), R = \mathbb{R}$

ث) $y = 3 - \log_p x + 2 \rightarrow D = (0, +\infty), R = \mathbb{R}$

۱۴۷

۱۴۸

ج) $y = \log_r(x + 2) - 2 \rightarrow D = (-2, +\infty), R = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (-2, 0) \rightarrow \begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\log_r(-2 + b) + c = 0 \\ -\log_r(0 + b) + c = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = \log_r(b - 2) \\ c = \log_r b - 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\rightarrow \log_r b - 1 = \log_r(b - 2) \rightarrow \log_r b - \log_r 2 = \log_r(b - 2)$$

$$\rightarrow \log_r\left(\frac{b}{2}\right) = \log_r(b - 2) \rightarrow \frac{b}{2} = b - 2 \rightarrow b = 2b - 4 \rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$\rightarrow c = \log_r 4 - 1 = \log_r 2^2 - 1 = 2 \log_r 2 - 1 \rightarrow \boxed{c = 1} \rightarrow \boxed{f(x) = -\log_r(x + 4) + 1}$$

$$\rightarrow f(4) = -\log_r(4 + 4) + 1 = -\log_r 8 + 1 = -3 + 1 \rightarrow \boxed{f(4) = -2}$$

۱۴۹

$$\begin{cases} (0, 2) \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow 2 = a + 2^{-b} \rightarrow 2 = a + \frac{1}{2^b} \\ (1, 3) \rightarrow f(1) = 3 \rightarrow 3 = a + 2^{1-b} \rightarrow 3 = a + \frac{2}{2^b} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2 = -a - \frac{1}{2^b} + \\ 3 = a + \frac{2}{2^b} \end{cases}$$

۱۵۰

$$1 = \frac{1}{2^b} \rightarrow 2^b = 1 \rightarrow \boxed{b = 0} \rightarrow 2 = a + \frac{1}{2^0} \rightarrow 2 = a + 1 \rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$f(1) = a \times b^1 - 5 = 7 \Rightarrow a \times b = 12 \quad (1)$$

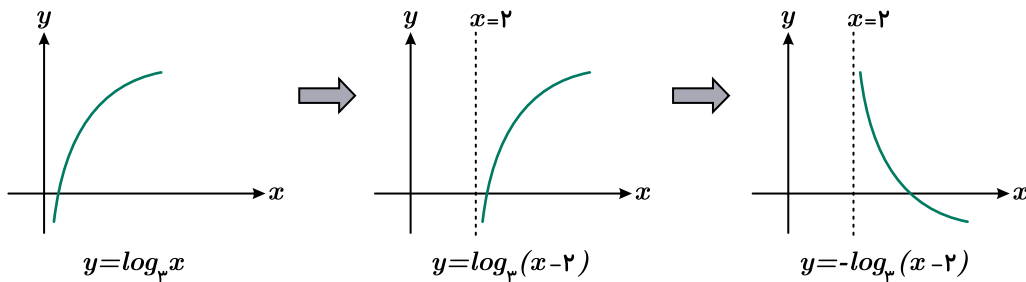
$$f(-1) = a \times b^{-1} - 5 = -\frac{17}{4} \Rightarrow a \times b^{-1} = 5 - \frac{17}{4} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{a \times b}{a \times b^{-1}} = \frac{12}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{b}{\frac{1}{b}} = 16 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

در تابع نمایی، پایه عددی مثبت و مخالف یک است، پس $b = 4$ قابل قبول است و داریم:

$$b = 4 \xrightarrow{a \times b = 12} 4a = 12 \Rightarrow a = 3$$

۱۵۱



۱۵۲

$$\text{الف) تعداد اولیهٔ باکتری‌ها در زمان } t = 0 \rightarrow p(0) = 600 \times 2^0 \rightarrow \boxed{p(0) = 600}$$

$$\text{ب) } t = 8 \rightarrow p(8) = 600 \times 2^{\frac{8}{2}} = 600 \times 2^4 = 600 \times 16 \rightarrow \boxed{p(8) = 9600}$$

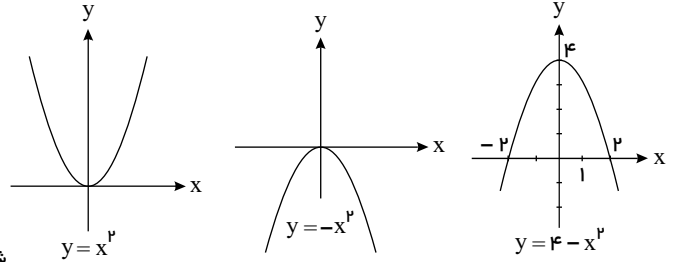
$$\text{پ) } p(t) = 76800 \rightarrow 600 \times 2^{\frac{t}{2}} = 76800 \rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = \frac{76800}{600} \rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = 128$$

$$\rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = 2^7 \rightarrow \frac{t}{2} = 7 \rightarrow \boxed{t = 14 \text{ ساعت}}$$

۱۵۳

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{r}x & x \geq 1 \\ r - x^2 & x < 1 \end{cases}$$

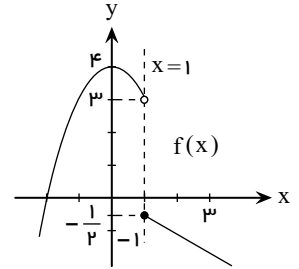
۱۵۴



شرط وجود حد در نقطه $x = 1$ آن است که: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$$



چون حد چپ و راست برابر نیستند، تابع در نقطه $x = 1$ حد ندارد.

۱۵۵

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - a) = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2a) = (1)^2 + 2a = 1 + 2a$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow 1 - a = \frac{1}{2}(1 + 2a) \rightarrow 2 - 2a = 1 + 2a \rightarrow 1 = 4a \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

۱۵۶

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = a(2) + b = 2a + b = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3bx + 1) = a(2)^2 + 3b(2) + 1 = 4a + 6b + 1 = 7$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 4a + 6b = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a - b = -5 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases} \rightarrow 2b = -2 \rightarrow b = -1$$

$$\rightarrow 2a - 1 = 5 \rightarrow 2a = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow a + b = 2$$

۱۵۷

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)} (a - 1)x + 5 = (a - 1)(-1) + 5 = -a + 6 \rightarrow -a + 6 = 2 \rightarrow a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-4)} x^2 + 2b = (-4)^2 + 2b = 16 + 2b \rightarrow 16 + 2b = 8 \rightarrow 2b = -8 \rightarrow b = -4$$

۱۵۸) یک تابع دوضابطه‌ای است. مقدار حد چپ تابع f در $x = 1$ را از ضابطه $f(x) = 2x + a$ و مقدار حد راست تابع f در $x = 1$ را از ضابطه $f(x) = \frac{ax + 2}{x + 1}$ به دست می‌آوریم.

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow f(x) = 2x + a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a) = 2 + a \quad (1)$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{ax + 2}{x + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + 2}{x + 1} = \frac{a + 2}{2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \xrightarrow{(1), (2)} (a + 2) - \left(\frac{a + 2}{2}\right) = 3$$

$$\times 2 \rightarrow 2(a + 2) - (a + 2) = 6 \Rightarrow a + 2 = 6 \Rightarrow a = 4$$

۱۵۹

الف

$$x \rightarrow 0^+ : x > 0 \rightarrow [x] = 0, x \rightarrow 0^- : x < 0 \rightarrow [x] = -1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|+|x|}{x+1} &= \frac{0+0}{0+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|+|x|}{x+1} &= \frac{-1+0}{0+1} = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{حد ندارد.}$$

ب

$$x \rightarrow 0^- : x < 0 \rightarrow [x] = -1$$

$$x \rightarrow 0^- : x < 0 \xrightarrow{\times -1} -x > 0 \rightarrow [-x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3}{|[x] + [-x]|} = \frac{-3}{|-1 + 0|} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 5} + \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{xf(x)}{x + f(x)}$$

$$A = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 5)} + \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} xf(x)}{\lim_{x \rightarrow 3^-} (x + f(x))}$$

$$A = \sqrt{3^2 - 5} + \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} x \times \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3^-} x + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)}$$

$$A = 2 + \frac{3 \times 1}{3 + 1} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{0}{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{-\sqrt{2}(\cos x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \frac{1 - 1}{(0)^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos) \cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{(1)^2}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{(0)^2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x} = \frac{2(\frac{1}{2})^2 - 1}{1 - 2(\frac{1}{2})} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{-(2 \sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x + 1}{-1} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6} = \frac{2(-2)^2 - 8}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \frac{0}{0}$$

۱۶۰

۱۶۱

۱۶۲

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x^2 - 4)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x-2)}{(x-2)} = \frac{2(-2-2)}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = \frac{8}{4}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 - 4(1) + 3} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-3} = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(-2)^2 + (-2) - 2}{(-2)^2 + 3(-2) + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2-1}{-2+1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 + 3x^2}{x^2 - 9} = \frac{(-3)^2 + 3(-3)^2}{(-3)^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2}{x-3} = \frac{(-3)^2}{-3-3} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1} = \frac{4(\frac{1}{2})^2 - 1}{8(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(4x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{2(\frac{1}{2})+1}{4(\frac{1}{2})+1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - 9}{x+3} = \frac{(-3)^2 - 9}{-3+3} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} = \lim_{x \rightarrow (-3)} (x-3) = -3-3 = -6$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5} = \frac{(1)^2 - 4(1) + 3}{(1)^2 + 4(1) - 5} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x+5} = \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 8x + 7} = \frac{(-1)^2 - 5(-1) - 6}{(-1)^2 + 8(-1) + 7} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x+7)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x-6}{x+7} = \frac{-1-6}{-1+7} = \frac{-7}{6}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 8} = \frac{(2)^2 - 2 - 2}{(2)^2 - 8} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+2x+4} = \frac{2+1}{2^2+2(2)+4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x} = \frac{(-2)^2 + 5(-2) + 6}{(-2)^2 + 2(-2)} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x+3}{x} = \frac{-2+3}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2} = \frac{(1)^2 - 3(1) + 2}{2(1) - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^2} = \frac{4(0)^2}{2(0)^2 - (0)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{2-x} = \frac{4}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x - 1} &= \frac{3(-1)^2 + 5(-1) + 2}{2(-1)^2 + (-1) - 1} = \frac{0}{0} \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(3x+2)}{(x+1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x+2}{2x-1} = \frac{3(-1)+2}{2(-1)-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 27}{x^2 - 2x - 3} &= \frac{3^2 - 27}{3^2 - 2(3) - 3} = \frac{0}{0} \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+9)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+9)}{(x+1)} = \frac{3^2 + 3(3) + 9}{3+1} = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2} &= \frac{3(1)^2 + 4(1) - 3(1)^2 - 4}{(1)^2 + 1 - 2} = \frac{0}{0} \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2(x-1) + 4(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x^2 + 4)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4}{x+2} = \frac{3(1)^2 + 4}{1+2} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2a} \frac{x - 2a}{x^2 - 4a^2} = \lim_{x \rightarrow 2a} \frac{\cancel{(x-2a)}}{\cancel{(x-2a)}(x+2a)} = \lim_{x \rightarrow 2a} \frac{1}{x+2a} = \frac{1}{2a+2a} = \frac{1}{4a}$$

$$\text{فرض: } \frac{1}{4a} = \frac{1}{8} \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x-2|}{x-1} = \frac{0}{0} \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x-2|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + (-x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)} = -2 \\ , f(1) = a &\rightarrow \boxed{a = -2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2 \\ , f(1) = a &\rightarrow \boxed{a = -2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & x < 3 \\ |x - 3|, & x = 3 \\ x^2 - ax, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - ax = (3)^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$f(3) = 3^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{-(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{-1} = -6$$

$$\rightarrow 9 - 3a = -6 \rightarrow 15 = 3a \rightarrow \boxed{a = 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a \sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{2}, f(0) = \frac{a}{2}$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} = 2 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2\sqrt{(x-3)^2}}{x - 3}$$

۱۶۵

۱۶۶

۱۶۷

۱۶۸

۱۶۹

۱۷۰ شرط پیوستگی در نقطه $x = 3$ آن است که:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$$

$x \rightarrow 3^+$ ، پس عبارت درون قدر مطلق و خود عبارت بدون قدر مطلق بیرون می آید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (\Delta x - 13) = 2, f(3) = 2$$

بنابراین تابع در نقطه $x = 3$ پیوسته است. تابع f در سایر نقاط نیز پیوسته است. تابع در سایر نقاط نیز پیوسته است. چرا که نمودار تابع در هر یک از ضابطه‌ها پیوسته و بدون بریدگی یا قطع شدگی است.

۱۷۱

$A = \{(پ پ د), (پ پ پ), (پ د د), (د پ د), (د د پ), (د د د)\}$ پیشامد آن که حداقل یک فرزند دختر باشد

$B = \{(پ د د), (د پ د), (د د پ)\}$ پیشامد آن که خانواده دارای ۲ فرزند دختر باشد

$$A \cap B = \{(پ د د), (د پ د)\}$$

$$\rightarrow P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{2}{7} \rightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{2}{7}}$$

۱۷۲

$$P(B) = 0.3 \rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.3 \rightarrow \boxed{P(B') = 0.7}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} \rightarrow P(A \cap B') = P(A|B') \cdot P(B') = 0.3 \times 0.7$$

$$\rightarrow \boxed{P(A \cap B') = 0.21}, \quad P(A - B) = P(A \cap B') \rightarrow \boxed{P(A - B) = 0.21}$$

۱۷۳

$$P(B) = 0.4 \rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.4 \rightarrow \boxed{P(B') = 0.6}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} \rightarrow P(A \cap B') = P(A|B') \cdot P(B') = 0.7 \times 0.6$$

$$\rightarrow \boxed{P(A \cap B') = 0.42}$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) = P(B) + P(A \cap B') = 0.4 + 0.42$$

$$\rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0.82}$$

۱۷۴ الف-

$$P(A) = 0.55 + 0.10 \rightarrow P(A) = 0.65$$

$$\rightarrow P(M|A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0.10}{0.65} = \frac{10}{65} \rightarrow \boxed{P(M|A) = \frac{2}{13}}$$

$$P(B) = 0.30 + 0.05 \rightarrow P(B) = 0.35$$

$$\rightarrow P(E|B) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{0.30}{0.35} = \frac{30}{35} \rightarrow \boxed{P(E|B) = \frac{6}{7}}$$

$$P(E) = 0.55 + 0.30 \rightarrow P(E) = 0.85$$

$$\rightarrow P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0.55}{0.85} = \frac{55}{85} \rightarrow \boxed{P(A|E) = \frac{11}{17}}$$

$$P(M) = 0.10 + 0.05 \rightarrow P(M) = 0.15$$

$$\rightarrow P(B|M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{0.05}{0.15} = \frac{5}{15} \rightarrow \boxed{P(B|M) = \frac{1}{3}}$$

$$P(E \cup B) = P(E) + P(B) - P(E \cap B) = 0.85 + 0.35 - 0.30 = 0.90$$

$$\rightarrow \boxed{P(E \cup B) = 0.90}$$

۱۷۵

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = ?$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{20} = \frac{28}{140} + \frac{20}{140} - \frac{7}{140} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{41}{140}$$

۱۷۶

پیشامدهای A و B مستقل از هم هستند $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B) \rightarrow \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = (1 - \frac{1}{3})P(B)$$

$$\rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{3}P(B) \rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{4} \rightarrow P(B') = \frac{1}{4}$$

۱۷۷

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \rightarrow 16 = 12 + 6 - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cap B) = 2$$

دو پیشامد A و B مستقل هستند $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow \frac{n(A \cap B)}{n(s)} = \frac{n(A)}{n(s)} \cdot \frac{n(B)}{n(s)}$

$$\rightarrow \frac{2}{n(s)} = \frac{12}{n(s)} \cdot \frac{6}{n(s)} \rightarrow 2(n(s))^2 = 72n(s) \rightarrow (n(s))^2 = 36n(s)$$

$$\rightarrow n(s)(n(s) - 36) = 0 \quad \begin{cases} n(s) = 0 & \text{غ} \\ n(s) = 36 \end{cases}$$

۱۷۸ الف-

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{40}{100} \times \frac{70}{100} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{28}{100}$$

ب-

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{40}{100} \rightarrow P(A') = \frac{60}{100}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{70}{100} \rightarrow P(B') = \frac{30}{100}$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{60}{100} \times \frac{30}{100} \rightarrow P(A' \cap B') = \frac{18}{100}$$

پ-

$$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) = \frac{40}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{70}{100}$$

$$\rightarrow P(A \cap B') + P(A' \cap B) = \frac{54}{100}$$

۱۷۹

$$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{6}, B = \{3, 6\} \rightarrow P(B) = \frac{2}{6}, C = \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow P(C) = \frac{4}{6}$$

$$A \cap B = \{6\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \rightarrow P(A \cap B) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(B) \rightarrow \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6}$$

دو پیشامد A و B مستقل هستند.

$$A \cap C = \{4, 6\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{2}{6} \rightarrow P(A \cap C) \stackrel{?}{=} P(A) \cdot P(C) \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6}$$

دو پیشامد A و C مستقل هستند.

$$B \cap C = \{3, 6\} \rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{6} \rightarrow P(B \cap C) \stackrel{?}{=} P(B) \cdot P(C) \rightarrow \frac{2}{6} \neq \frac{2}{6} \times \frac{4}{6}$$

دو پیشامد B و C مستقل نیستند.

۱۸۰

الف

A = پیشامد انتخاب در تیم بسکتبال $\rightarrow P(A) = 0,7$

B = پیشامد انتخاب در تیم ملی فوتبال نوجوانان $\rightarrow P(B) = 0,8$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{8}{10} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{56}{100}$$

ب

$$\text{روش ۱: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{8}{10} - \frac{56}{100} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{94}{100}$$

$$\rightarrow P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{94}{100} \rightarrow P(A \cup B)' = \frac{6}{100}$$

$$\text{روش ۲: } P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{8}{10} = \frac{2}{10}$$

$$\rightarrow P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \rightarrow P(A' \cap B') = \frac{6}{100}$$

پ

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B) \cdot P(A') = \frac{8}{10} \times \frac{3}{10} \rightarrow P(B - A) = \frac{24}{100}$$

ت

$$\text{روش ۱: } P(B - A) + P(A - B) = P(B \cap A') + P(A \cap B') = P(B) \cdot P(A') + P(A) \cdot P(B')$$

$$= \frac{8}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{24}{100} + \frac{14}{100} \rightarrow P(B - A) + P(A - B) = \frac{38}{100}$$

$$\text{روش ۲: } P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{94}{100} - \frac{56}{100} \rightarrow P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{38}{100}$$

ث

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{8}{10} - \frac{56}{100} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{94}{100}$$

۱۸۱

A = پیشامد قبول شدن رویا در درس ریاضی B = پیشامد قبول شدن دوست رویا در درس ریاضی

دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند در نتیجه: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(B) = x, P(A) = 2x$$

$$P(A \cup B) = 0,625 \rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{625}{1000}$$

$$\rightarrow 2x + x - (2x \cdot x) = \frac{5}{8} \rightarrow 3x - 2x^2 = \frac{5}{8} \rightarrow 24x - 16x^2 = 5$$

$$\rightarrow 16x^2 - 24x + 5 = 0 \rightarrow (4x)^2 - 6(4x) + 5 = 0 \rightarrow (4x - 1)(4x - 5) = 0$$

$$\begin{cases} 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{4} > 1 \text{ غیر قابل قبول} \\ 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}, 2x = \frac{1}{2} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x_1 + 1 + x_2 + 2 + x_3 + 3}{3} = \bar{X} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + 6 = 3\bar{X} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{X} - 6$$

$$\bar{Y} = \frac{3x_1 + 1 + 3x_2 + 2 + 3x_3 + 3}{3} = \frac{3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6}{3} = \frac{3(x_1 + x_2 + x_3) + 6}{3} + \frac{6}{3}$$

$$\rightarrow \bar{Y} = x_1 + x_2 + x_3 + 2 \rightarrow \bar{Y} = 3\bar{X} - 6 + 2 \rightarrow \bar{Y} = 3\bar{X} - 4$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \bar{X} \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_N = N\bar{X}$$

$$\bar{Y} = \frac{x_1 + \bar{X} + x_2 + 2\bar{X} + \dots + x_N + N\bar{X}}{N} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_N) + (\bar{X} + 2\bar{X} + \dots + N\bar{X})}{N}$$

$$\rightarrow \bar{Y} = \frac{N\bar{X} + \frac{N(N+1)}{2}\bar{X}}{N} = \frac{N\bar{X}}{N} + \frac{N(N+1)}{2N}\bar{X} = \bar{X} + \frac{N+1}{2}\bar{X}$$

۱۸۲

۱۸۳

$$\rightarrow \bar{Y} = \frac{2 + N + 1}{2} \bar{X} \rightarrow \boxed{\bar{Y} = \frac{N + 3}{2} \bar{X}}$$

۱۸۴

الف -

$$Q_2 = \frac{10 + x}{2} \rightarrow 13 = \frac{10 + x}{2} \rightarrow 10 + x = 26 \rightarrow \boxed{x = 16}$$

ب -

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \rightarrow 15 = \frac{4 + 6 + \dots + x + \dots + 29}{10} \rightarrow \boxed{15 = \frac{133 + x}{10}}$$

$$\rightarrow 133 + x = 150 \rightarrow \boxed{x = 17} \rightarrow Q_2 = \frac{10 + 17}{2} \rightarrow \boxed{Q_2 = 13,5}$$

۱۸۵ مجموع انحراف داده‌ها از میانگین برابر صفر است پس داریم:

$$7 \times (-4) + 5 \times 2 + x \times 3 = 0 \rightarrow 3x = 18 \rightarrow \boxed{x = 6}$$

$$\sigma^2 = \frac{7(-4)^2 + 5(2)^2 + 6(3)^2}{7 + 5 + 6} = \frac{112 + 20 + 54}{18} = \frac{186}{18} \rightarrow \boxed{\sigma^2 = \frac{31}{3} \approx 10,33}$$

۱۸۶

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8} = 15 \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 120$$

$$f = \frac{(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2}{8}$$

$$\rightarrow (x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 = 32$$

اگر دو داده جدید ۱۲ و ۱۸ را اضافه کنیم داریم:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8 + 12 + 18}{8 + 2} = \frac{120 + 30}{10} \rightarrow \boxed{\bar{X} = 15}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 + (12 - 15)^2 + (18 - 15)^2}{10} = \frac{32 + 9 + 9}{10}$$

$$\rightarrow \sigma^2 = \frac{50}{10} \rightarrow \boxed{\sigma^2 = 5}$$

۱۸۷

$$\bar{X}_{29} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{29}}{29} \rightarrow 17 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{25} + 12 + 13 + 21 + 22}{29}$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{25} + 68 = 493 \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{25} = 425$$

همان میانگین قبلی است.

$$\rightarrow \bar{X}_{25} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{25}}{25} = \frac{425}{25} \rightarrow \boxed{\bar{X}_{25} = 17}$$

$$\rightarrow \sigma_{29}^2 = \frac{(x_1 - \bar{X}_{29})^2 + \dots + (x_{29} - \bar{X}_{29})^2}{29} \rightarrow 5 = \frac{(x_1 - 17)^2 + \dots + (x_{29} - 17)^2}{29}$$

$$\rightarrow 5 \times 29 = (x_1 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 + (12 - 17)^2 + (13 - 17)^2$$

$$+ (21 - 17)^2 + (22 - 17)^2$$

$$\rightarrow 145 = (x_1 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 + 25 + 16 + 16 + 25$$

$$\rightarrow (x_1 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 = 63$$

$$\rightarrow \sigma_{25}^2 = \frac{(x_1 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2}{25} = \frac{63}{25} \rightarrow \sigma_{25}^2 = 2,52$$

$$\text{ماری داده آماری } 12, 6 : 12, 6 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{X})^2}{12} \rightarrow (x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{X})^2 = 151,2$$

$$\text{ماری داده آماری } 24 : 7, 2 = \frac{(y_1 - \bar{X})^2 + \dots + (y_{24} - \bar{X})^2}{24} \rightarrow (y_1 - \bar{X})^2 + \dots + (y_{24} - \bar{X})^2 = 172,8$$

$$\rightarrow \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{12} - \bar{X})^2 + (y_1 - \bar{X})^2 + \dots + (y_{24} - \bar{X})^2}{12 + 24} = \frac{151,2 + 172,8}{12 + 24}$$

$$\rightarrow \sigma^2 = \frac{324}{36} \rightarrow \sigma^2 = 9 \rightarrow \boxed{\sigma = 3}$$

۱۸۸

$$\bar{X}_{25} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{25}}{25} \rightarrow 30 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{21} + 10 + 15 + 45 + 50}{25}$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{21} + 120 = 750 \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{21} = 630$$

همان میانگین قبلی است

$$\rightarrow \bar{X}_{21} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{21}}{21} = \frac{630}{21} \rightarrow \boxed{\bar{X}_{21} = 30}$$

$$\sigma_{25}^2 = 8 \rightarrow \sigma_{25}^2 = 64$$

$$\sigma_{25}^2 = \frac{(x_1 - \bar{X}_{25})^2 + \dots + (x_{25} - \bar{X}_{25})^2}{25} \rightarrow 64 = \frac{(x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{25} - 30)^2}{25}$$

$$\rightarrow 64 \times 25 = (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2 + (10 - 30)^2 + (15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2$$

$$\rightarrow 1600 = (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2 + 400 + 225 + 225 + 400$$

$$\rightarrow (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2 = 350$$

$$\rightarrow \sigma_{21}^2 = \frac{(x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2}{21} = \frac{350}{21} \rightarrow \boxed{\sigma_{21}^2 = \frac{50}{3} \approx 16,67}$$

۱۹۰ اگر طول ضلع مربع‌ها را x_1, x_2, \dots, x_N در نظر بگیریم:

$$\bar{X} = 15, \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} \rightarrow 0,2 = \frac{\sigma}{15} \rightarrow \boxed{\sigma = 3}$$

مساحت مربع‌ها را می‌توانیم بصورت $x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2$ بنویسیم و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - \bar{X}^2 \rightarrow 3^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - 15^2$$

$$\rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 9 + 225 \rightarrow \boxed{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 234}$$

۱۹۱ اگر بیشترین و کمترین مقدار داده‌های اولیه را به ترتیب x_1 و x_p در نظر بگیریم، دامنه تغییرات اولیه:

$$R_1 = x_1 - x_p$$

حال همه داده‌ها را در ۵ ضرب کرده و داده‌های جدید به ترتیب برابر با $5x_1$ و $5x_p$ و دامنه تغییرات جدید:

$$R_p = 5x_1 - 5x_p = 5(x_1 - x_p) = 5R_1$$

بنابراین اگر همه داده‌های آماری در ۵ ضرب کنیم، دامنه تغییرات ۵ برابر می‌شود.

حال همه داده‌ها را با ۴ جمع کرده و مقدار داده‌های جدید برابر با $5x_1 + 4$ و $5x_p + 4$ می‌شود و دامنه تغییرات جدید:

$$R_p = (5x_1 + 4) - (5x_p + 4) = 5(x_1 - x_p) = 5R_1$$

بنابراین اگر به همه داده‌های آماری ۴ واحد اضافه کنیم، دامنه تغییرات تغییری نمی‌کند.

۱۹۲ اگر داده‌های اولیه بصورت x_1, x_2, \dots, x_{15} باشند، داریم:

$$\bar{X}_x = 12, \quad CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{X}_x} = \frac{\sigma_x}{12}$$

داده‌های جدید بصورت $2x_1 + 3, 2x_2 + 3, \dots, 2x_{15} + 3$ می‌باشند و داریم:

$$\bar{X}_{2x+3} = 2 \times \bar{X}_x + 3 = 27, \quad \sigma_{2x+3} = 2\sigma_x, \quad CV_{2x+3} = \frac{\sigma_{2x+3}}{\bar{X}_{2x+3}} = \frac{2\sigma_x}{27}$$

$$\rightarrow \frac{CV_{2x+3}}{CV_x} = \frac{\frac{2\sigma_x}{27}}{\frac{\sigma_x}{12}} = \frac{2 \times 12}{27} \rightarrow \frac{CV_{2x+3}}{CV_x} = \frac{8}{9}$$