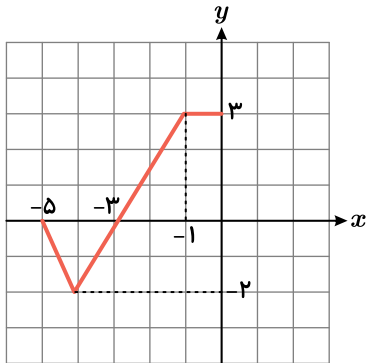


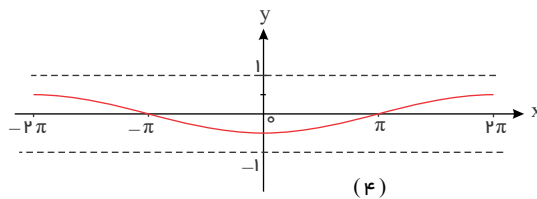
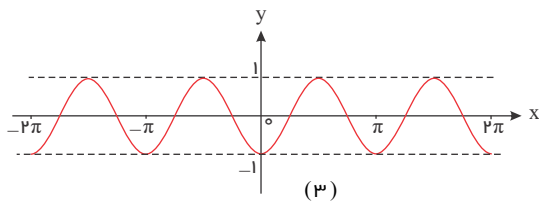
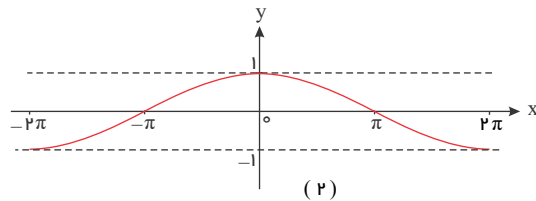
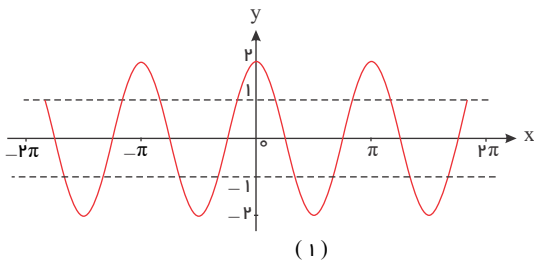
۱) تابع $y = x^3$ را ابتدا نسبت به محور y ها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع f حاصل شود. ضابطه تابع وارون f را بیابید.



۲) نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(-x)$ را بنویسید.

۳) نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2 \sin\left(\frac{-1}{3}x\right)$ را به کمک نمودار $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

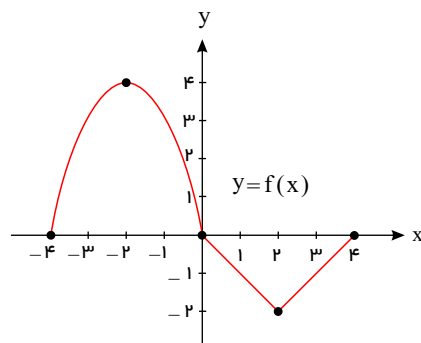
۴) با استفاده از نمودار $y = \cos x$ نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.



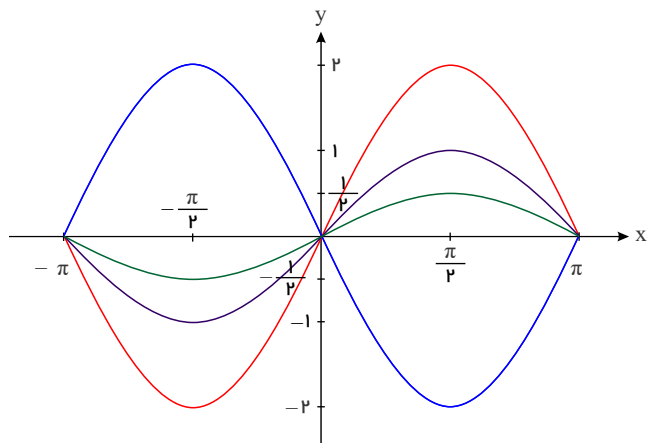
الف) $y = -\frac{1}{2} \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$ ب) $y = 2 \cos 2x$ پ) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ ت) $y = -\cos 2x$

۵ نمودار تابع f با دامنه $[-4, 4]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنیم.

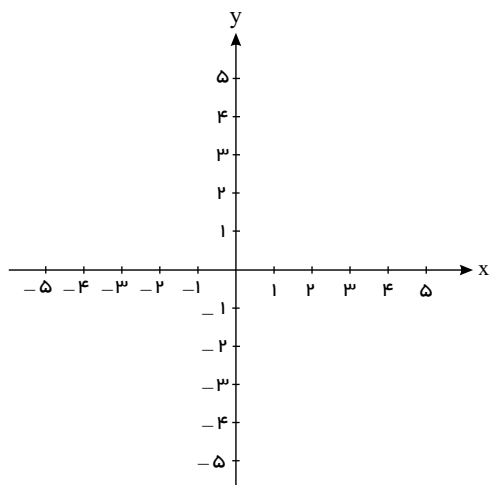
x	$f(x)$
-4	0
-2	4
0	0
2	-2
4	0



۶ در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y = \sin x$ ، $y = 2 \sin x$ ، $y = -2 \sin x$ و $y = \frac{1}{2} \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y = \sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

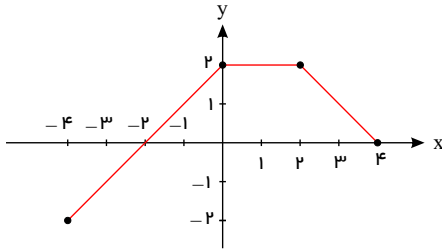


۷ نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x) = -|x - 2|$ و $h(x) = \frac{1}{2}|x - 2|$ را رسم کنید.



۸ نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را ۴ واحد به راست منتقل می‌کنیم و سپس آن را ۳ واحد به پایین می‌بریم تا تابع f حاصل شود. ضابطه تابع وارون f را بیابید.

۹ با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف

$$y = \frac{1}{3}f(2x) - 1$$

ب

$$y = 2f(x-1) - 3$$

۱۰ با فرض $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g = \{(3, -1), (0, 2), (4, 1), (1, -2)\}$ دامنه، برد و اعضای تابع ترکیب $f \circ g$ را مشخص کنید.

۱۱ اگر بدانیم: $f(x) = x + b$, $g(x) = ax^2 - bx + c$ و $g \circ f(x) = -x^2 - 3x + 7$ مقدار پارامتر c را به دست آورید.

۱۲ اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

۱۳ تابع $h(x) = x - 2$ را از ترکیب کدام دو تابع می توان به دست آورد؟

الف $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ ب $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = (x-2)^2$

۱۴ f تابعی اکیداً صعودی و g تابعی اکیداً نزولی است. نشان دهید تابع های ترکیب $f \circ g$ و $g \circ f$ هر دو اکیداً نزولی هستند.

۱۵ تابع خطی f در رابطه $f(x) = 2 + 3x$ و $f \circ f(x) = 2 + 3x$ صدق می کند. ضابطه تابع f را به دست آورید.

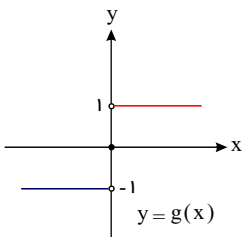
۱۶ ضابطه تابع مرکب $g \circ f$ را با فرض $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x > 0 \\ x - 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ; x > 0 \\ 1 - 4x & ; x \leq 0 \end{cases}$ به دست آورید.

۱۷ دانش آموزی دامنه تابع مرکب $y = \frac{3x-2}{-2x+3}$ را که از ترکیب دو تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ به دست آمده است از روی

ضابطه آن به صورت $x \neq +\frac{3}{2}$ تعیین نموده است، آیا پاسخ او درست است؟ در صورت اشتباه بودن، پاسخ درست و دلیل این اشتباه را تعیین نمایید.

۱۸ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ را با زوج های مرتب نمایش دهید.

۱۹ با توجه به نمودار تابع g ، ضابطه تابع $g \circ f$ را برای $f(x) = 4 - x^2$ به دست آورید.



۲۰ تابع $h(x) = 9^x - 3^{x+1}$ را به صورت ترکیب دو تابع دیگر بنویسید.

۲۱ با فرض $f(x) = x + \frac{1}{x}$ و $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ مقدار $g(3)$ را به دست آورید.

۲۲ برای تابع $f(x) = \frac{-x}{x-1}$ ضابطه تابع مرکب $f \circ f$ را به دست آورید. دامنه تابع $f \circ f$ چگونه است؟

۲۳ تابع $f = \{(-1, 3), (2, -1), (0, 2), (6, 0)\}$ مفروض است. تابع ترکیب $h = (f^2 + f) \circ f$ را با اعضای مشخص کنید.

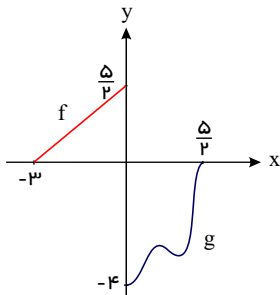
۲۴ برای تابع های $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = 2x + 1$ ، ریشه های معادله $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ را به دست آورید.

۲۵ ضابطه تابع ترکیب $y = f \circ g(x)$ را برای تابع های f و g با ضابطه های $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & ; x > 0 \\ x^2 - 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$ و

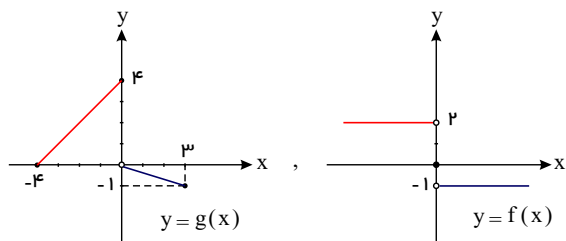
$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x \geq 2 \\ -2\sqrt{x} & ; 0 \leq x < 2 \end{cases}$ به دست آورید.

۲۶ اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$ و $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$ توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

۲۷ نمودارهای توابع f و g در شکل رسم شده‌اند. دامنه ترکیب $g \circ f$ را به دست آورید.



۲۸ نمودار تابع‌های f و g مطابق شکل‌های زیر رسم شده‌اند. مقدار عبارت $f \circ g(3) + g \circ f(1)$ را به دست آورید.



۲۹ برای تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ ، ضابطه تابع‌های ترکیب $f \circ f(x)$ و $f \circ f \circ f(x)$ را به دست آورید.

۳۰ ترکیب تابع همانی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با خودش برابر تابع همانی شده است. رابطه بین ضرایب a و d را به دست آورید.

۳۱ برای توابع اکیداً نزولی f و g نشان دهید تابع‌های ترکیبی $f \circ g$ و $g \circ f$ هر دو صعودی اکید هستند.

۳۲ برای تابع‌های اکیداً صعودی f و g نشان دهید که تابع‌های ترکیبی $f \circ g$ و $g \circ f$ نیز اکیداً صعودی هستند.

۳۳ با توجه به ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{1-2x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ دامنه تابع مرکب $f \circ g$ و ضابطه آن را به دست آورید.

۳۴ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آن‌ها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$ ، $g(x) = x^2 - 3x + 8$: $(f \circ g)(x) = 7$

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ، $g(x) = 1 - 2x$: $(g \circ f)(x) = -5$

۳۵ موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف

$f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \sqrt{x+6}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

ب

$f(x) = \sqrt{2x-3}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$: $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$

پ

$f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

ت

$f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$: $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

۳۶ شرکت خودروسازی سایپا به مناسبت سالگرد پیروزی انقلاب اسلامی ایران خودروهایش را با تخفیف ۱۵ درصدی به معرض فروش گذاشته

است. از طرفی هر سال در عید مبارک فطر، این شرکت به مشتریانش دو میلیون تومان تخفیف نقدی می‌دهد. کوروش می‌خواهد از این شرکت یک

دستگاه خودرو بپراید به قیمت ۵۰ میلیون تومان خریداری نماید. به کمک تابع مرکب، پیش‌بینی کنید که کدام یک بیشتر به سود کوروش خواهد بود ←

ابتدا تخفیف دو میلیون تومانی را دریافت نموده سپس از تخفیف ۱۵ درصدی بهره ببرد یا برعکس ابتدا از تخفیف ۱۵ درصدی استفاده کند سپس دو

میلیون تومان تخفیف بگیرد. (فرض کنید که در سال جاری، سالگرد پیروزی انقلاب با عید فطر مصادف شده است.)

۳۷) نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۳۸) اگر f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|2x - 1|) - f(|x + 1|)}$$

۳۹) توابع f و g هر دو اکیداً نزولی هستند و تابع $f \circ g$ تعریف شده است. اگر $f \circ g(m^2) = 2a - 1$ و $f \circ g(m^2 + 1) = -a + 4$ باشند، حدود a را بیابید.

۴۰) اگر تابع f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی و $f(-2) = 0$ باشد، دامنه تابع زیر را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 81)f(x)}$$

۴۱) اگر f روی \mathbb{R} اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ باشد، دامنه تابع زیر را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 3x)f(x)}$$

۴۲) اگر f روی \mathbb{R} تابعی اکیداً صعودی باشد، دامنه تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|x - 2|) - f(|x + 1|)}$$

۴۳) اگر f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|x - 3|) - f(|x + 2|)}$$

۴۴) صعودی و نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = [-2x] + 1$$

۴۵) با محدود کردن دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

۴۶) اگر $f = \{(3, 2), (2, 0), (0, -3)\}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x > 0 \\ x^2 - 1 & ; x \leq 0 \end{cases}$ بوده و تساوی $f^{-1} \circ g(m) = 2$ نیز برقرار باشد، مقدار m را به‌دست آورید.

۴۷) برای تابع‌های اکیداً صعودی f و g نشان دهید توابع ترکیب $f^{-1} \circ g^{-1}$ و $g^{-1} \circ f^{-1}$ نیز اکیداً صعودی هستند.

۴۸) برای توابع $f = \{(4, -1), (3, 1), (5, 2)\}$ و $g = \{(-1, 2), (4, 0), (5, 3)\}$ ، تابع‌های ترکیب $f \circ g^{-1}$ و $g \circ f^{-1}$ را به‌دست آورید.

۴۹) با فرض معکوس‌پذیری توابع f و g ، معکوس تابع $f(x) = 1 - \frac{g(x-1)}{3}$ را تعیین کنید.

۵۰) تحقیق کنید تابع مقابل یک به یک است و سپس ضابطه تابع معکوس آن را بنویسید.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

۵۱) با فرض $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = x^2 + mx - 2$ ، اگر $(g^{-1} \circ f^{-1} \circ g^{-1})(-1) = 0$ باشد، مقدار m را به‌دست آورید.

۵۲) هرگاه بدانیم: $f(x) = x^2 - 3x$ ، $g(x) = x^2 + mx$ و $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(0) = 2$ ، مقدارهای ممکن برای m را به‌دست آورید.

۵۳) برای تابع $f = \{(2, -1), (1, 3), (0, 4)\}$ ، تابع‌های ترکیب $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ را به‌دست آورید. آیا توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ باهم برابرند؟

۵۴) ضابطه تابع وارون توابع یک به یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{-8x + 3}{2}$

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1}$

۵۵) جواب‌های معادله $f \circ f^{-1}(2x) - f^{-1} \circ f(x) = 3x - 8$ را با فرض $f(x) = x^3 - 3x + 9$ به‌دست آورید.

۵۶) برای تابع وارون‌پذیر f ، تابع‌های ترکیب $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ چه زمانی باهم برابر می‌شوند؟

۵۷ با فرض $f(x) = x + 1$ و $g(x) = 2x^2 - 3x$ ، صفرهای تابع $(g \circ f^{-1})(x)$ را به دست آورید.

۵۸ با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$ ، اگر $f(x) = \frac{5x+6}{2x-1}$ و تابع g معکوس پذیر باشد و داشته باشیم $g(a) = 3$ ، مقدار a را به دست آورید.

۵۹ برای تابع $f = \{(-1, 1), (1, -1), (2, 0), (4, -2)\}$ ، تابع‌های ترکیب $h = f \circ (f^2 + f)$ و $k = (f^2 + f) \circ f^{-1}$ را با اعضایشان مشخص کنید.

۶۰ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $(f \circ g)^{-1}(5)$ ب) $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$ پ) $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$

۶۱ در مورد هریک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ ، $g(x) = -\frac{2x+6}{7}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x-8}$ ، $g(x) = 8 + x^2$; $x \leq 0$

۶۲ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنه آن‌ها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف

$$f(x) = |x|$$

ب

$$g(x) = -x^2$$

پ

$$h(x) = x^2 + 4x + 3$$

۶۳ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 3 & , x < 2 \\ x - 2 & , x \geq 2 \end{cases}$ مفروض است. ضابطه تابع معکوس را به دست آورید.

۶۴ ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

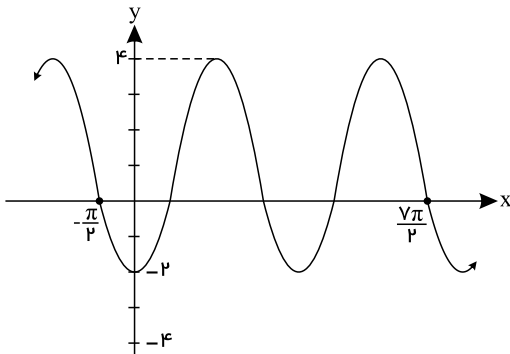
الف) $f(x) = 2 \sin^2 x - 5$ ب) $g(x) = -3 \sin^5 2x + 10$

۶۵ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\tan^2 x - 1}$ را بیابید.

۶۶ نمودار هریک از توابع داده شده را رسم کرده و بیشترین و کمترین مقدار و دوره تناوب تابع را مشخص کنید.

الف) $y = |\sin x|$

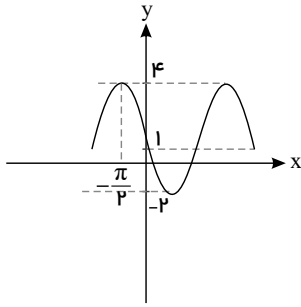
ب) $y = |\cos 2x|$



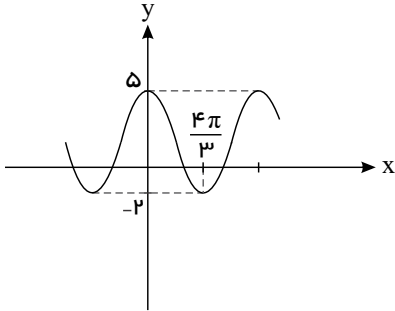
۶۷ نمودار تابع با ضابطه $y = a \cos bx + c$ به صورت مقابل رسم شده است. مقادیر a ، b و c را به دست آورید.

۶۸ برد تابع $f(x) = [\pi \cos 2x - \frac{\pi}{2}]$ را بیابید. ([] جزء صحیح است)

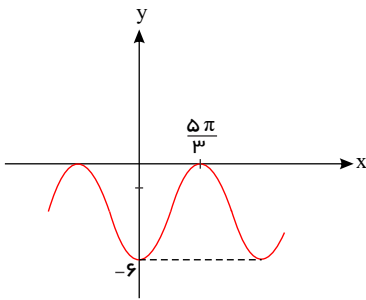
۶۹ در تابع $f(x) = \sqrt{2} \cos(\frac{1}{3}x) - 1$ ، دوره تناوب و نسبت ماکزیمم تابع به مینیمم آن را بیابید.



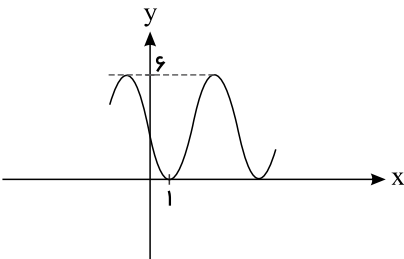
۷۰ نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه آن را بیابید.



۷۱ نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه آن را بیابید.

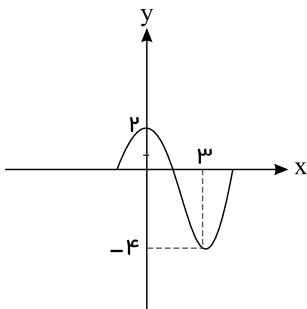


۷۲ نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه آن را بیابید.



۷۳ اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \sin(mx) + m$ برابر 4π باشد، ماکزیمم تابع را بیابید. ($m > 0$)

۷۴ اگر نمودار تابع $f(x) = a \sin bx + c$ به صورت زیر باشد، ضابطه آن را بیابید.



۷۵ نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت زیر است، ضابطه این تابع را بیابید.

۷۶ ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = 3 \cos^2 2x - 6$ ب) $g(x) = -\pi \cos^3 4x - \frac{\pi}{2}$

۷۷ اگر $\tan \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، آنگاه حدود α را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید.

۷۸ اگر $\sin \alpha = 2m - 1$ و $\tan \alpha = m + 1$ و $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۷۹ اگر $\tan \alpha \leq -1$ ، آنگاه حدود α را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید.

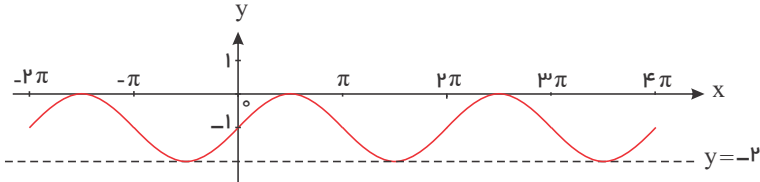
۸۰ با توجه به اطلاعات داده شده محدوده m را به دست آورید.

الف) $\tan \theta = 4 + 2m, \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$

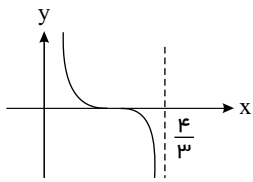
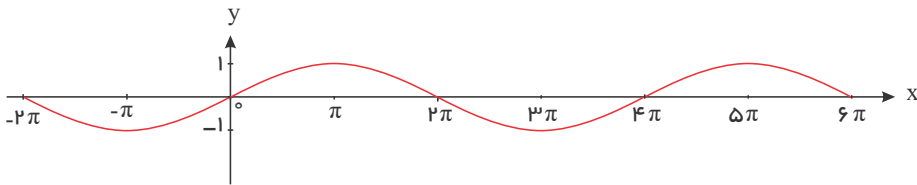
ب) $\tan \theta = -1 + 2m, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{6}$

۸۱ ضابطه هر یک از توابع داده شده به صورت $y = \sin bx + c$ است. مقدار c, b و دوره تناوب تابع را مشخص کنید.

الف



ب



۸۲ اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \tan(ax + \frac{1}{3})\pi$ به شکل زیر باشد، کدام a است؟

۱) $-\frac{3}{4}$

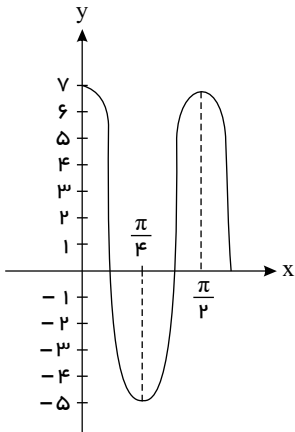
۲) $-\frac{3}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{3}{2}$

۸۳ نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \sin bx + c$ و یا $f(x) = a \cos bx + c$ است. با توجه به نمودار و تشخیص دوره تناوب

و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را بنویسید.



۸۴ معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 2 \cos(\frac{5\pi}{8} - x) = 3$$

۸۵ اگر $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$ و $\tan \alpha = \frac{2m-1}{3}$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۸۶ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\sin 3x + 2 \cos 2x = 2$$

۸۷) جوابهای کلی معادله زیر را بیابید.

$$\sin^3 \pi x + \cos^3 \pi x = 0$$

۸۸) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 3x + \sin 5x = 0$ را بیابید.

۸۹) جوابهای کلی معادله زیر را بیابید.

$$\tan 4x = \cot\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$$

۹۰) معادله $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۹۱) معادله زیر چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$$

۹۲) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin 2x + 3 \cos x = 0$

ب) $4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

۹۳) معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$

ب) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$

۹۴) جوابهای کلی معادله مثلثاتی زیر را بیابید.

$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 3x = 0$$

۹۵) معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$4 \sin^2 x - 2(\sqrt{2} + 1) \sin x + \sqrt{2} = 0$$

۹۶) معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $2 \cos^2 3x + \cos 3x = 0$

ب) $\sin 5x + \cos 3x = 0$

۹۷) معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\tan^3 x - \tan^2 x + 1 = \tan x$$

۹۸) معادله مثلثاتی زیر را حل کرده و جوابهای واقع در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

$$\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

۹۹) معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$2 \sin^2 x + 9 \cos x + 3 = 0$$

۱۰۰) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف) معادله $\sqrt{8} \cos x - \sqrt{2} = 0$ در بازه $[-3\pi, \pi]$ دو جواب دارد.

۱۰۱) حاصل حد مقابل را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x-1}{\sqrt{2} \sin x + 1}$$

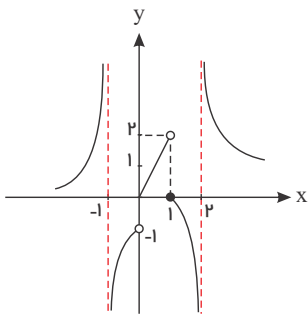
 ۱۰۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ را بیابید.

 ۱۰۳) حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^r - x^r + 1}{2x^n - x^r + 5}$ را به ازای مقادیر مختلف $n \in \mathbb{N}$ به دست آورید.

 ۱۰۴) تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}, x > 3$ مفروض است، برای اینکه $f(x)$ بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ باشد، در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

 ۱۰۵) تابع $f(x) = \frac{1}{4-x}, x > 4$ مفروض است، برای آنکه $f(x)$ کمتر از ۱۰۰۰- باشد، در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

 ۱۰۶) تابع $f(x) = \frac{1}{x+5}, x < -5$ مفروض است، برای آنکه $f(x)$ کمتر از ۱۰۰۰۰- باشد، در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

 ۱۰۷) نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.


الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f \circ f(x)$

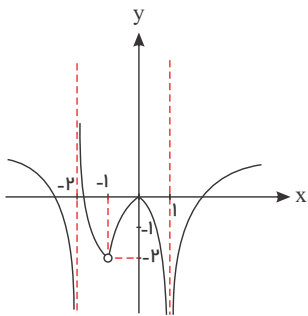
د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f \circ f(x)$

 ۱۰۸) نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f \circ f(x)$


 ۱۰۹) اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x^2 + mx + n} = -\infty$ آنگاه m و n را بیابید.

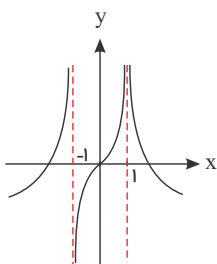
 ۱۱۰) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-x}{\sqrt{2} \cos x + 1}$ را بیابید.

 ۱۱۱) نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\frac{-1}{f(x)} \right]$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-1}{f(x)} \right]$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{x}{f(x)} \right]$



۱۱۲ تابع $f(x) = \log_p^{(x-1)}$ را در نظر بگیرید و حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+2}{f(x)} \right)$

۱۱۳ با فرض $f(x) = \log_{\frac{3}{2}}^x$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x+2}{f(x)} \right]$ را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است).

۱۱۴ با فرض $f(x) = \log_{\frac{2}{3}}^{(x+1)}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{x-2}{f(x)} \right]$ را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است).

۱۱۵ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\cos 4x]}{\tan x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[\cos 2x]}{\cos x}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

ت

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-6)(2x-7)(4x+1)}{17x^3 + 5}$$

ث

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+2)^2 + (x-2)^2}$$

۱۱۶ حاصل حدهای زیر را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است).

الف

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \left[\frac{x+1}{\tan x} \right]$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \left[\frac{2-x}{\tan x} \right]$$

۱۱۷ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos 2x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{1 - \cos x}$$

۱۱۸ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{(x-3)^2}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

۱۱۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin x}{2 \cos x - 1}$$

۱۲۰ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x}{1 - \cos x} \quad \text{ب}$$

۱۲۱ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x + [-x]}{x - 4}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[2x] - 7}{9 - x^2}$$

۱۲۲ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x^2 - 9}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 1}{(x + 2)^2}$$

۱۲۳ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^3 - (x - 1)^3 + x^2 + 2) = +\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۱۲۴ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x + 1)^3 + mx^3 - 4x^2 + 2) = +\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۱۲۵ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^2 + (x + 2)^2 - 7x) = +\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۱۲۶ اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^n + mx^3 + x^2 - 1}{4x^3 + x^2 - 3} = -2$ ، آنگاه m و n را بیابید. ($n \in \mathbb{N}$)

۱۲۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2x + 1}{x - 2} \right]$ را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

۱۲۸ حاصل حدهای زیر را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x + 1}{x + 2} \right]$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

ب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x+2}{x-1} \right]$

۱۲۹ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ آن گاه حد راست این عبارت در نقطه $x = -2$ چقدر است؟

۱۳۰ تابع $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ مفروض است، برای این که فاصله $f(x)$ تا خط $y = 1$ کمتر از $\frac{1}{1000}$ باشد، x را باید در چه محدوده‌ای در نظر بگیریم؟

۱۳۱ اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^n - 2x^3 + 1}{3x^4 + x^3 + 7} = 5$ ، آنگاه m و n را بیابید.

۱۳۲ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x-3| + mx}{m|x+2| + 4x} = -3$ ، آنگاه m را بیابید.

۱۳۳ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، حاصل حدهای زیر را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x))$ ب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$

۱۳۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(4x+3)^2 + (3x-1)^2}{(5x+17)^2}$

ب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1} + \sqrt{4x^2-x}}{\sqrt{25x^2+9} + x}$

ب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - \sqrt{4x^2+1}}{7x + \sqrt{9x^2+8}}$

ت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+17}}$

ث $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - 17}{\sqrt{x^3+2}}$

۱۳۵ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{|3x-1| + x}$

ب $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3} + x}$

۱۳۶ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|3x - 1| - x}{|2 - x| + 3x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|3x + 2| + x}{|5 - x| + 2x}$$

۱۳۷ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - |x + 2|}{|x - 3| + 4x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x - 1| - 3x}{4x - |x - 2|}$$

۱۳۸ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r(x+1)^{\delta} + x^{\epsilon}}{(2x-1)^{\nu}(x^2+1)^{\tau}}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} + 1)^r(x^2 + 2)^t}{(2 - x)^{\delta}}$$

۱۳۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x^3 + x^2 + 4}{x^{\delta} + x^2 - 9x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^{\nu} - x^{\nu} + x^{\tau}}{-3x^2 + x - 1}$$

۱۴۰ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

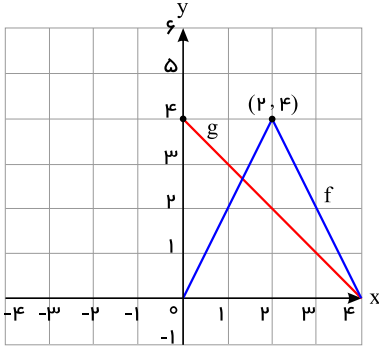
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{\delta} - 2x^{\tau} - 4}{x^2 + 3x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x^{\epsilon} + 7x^3 + 9}{2x^{\epsilon} - x + 1}$$

۱۴۱ مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

۱۴۲) نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$

۱۴۳) اگر $f'(a) = 2$ و $f(a) = 4$ مشتق $f^2(x) + \frac{1}{f(x)}$ در $x = a$ کدام است؟

۱) -۴

۲) -۶

۳) ۴

۴) ۶

۱۴۴) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف

$$g(x) = \frac{(2x-1)^4}{x^3+8}$$

ب

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+1}$$

الف

$$f(x) = (2\sqrt{x}+1)(x^4-2x)$$

ب

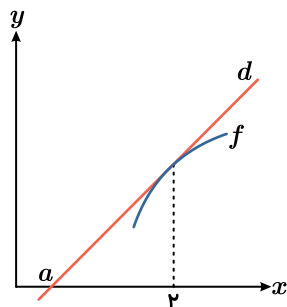
$$g(x) = \frac{3x+1}{x^5-x+1}$$

۱۴۵) مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۱۴۶) نقاطی از منحنی $y = \frac{2x+3}{1-x}$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط بر خط $5x + y = 8$ عمود باشد.

۱۴۷) مشتق تابع $g(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ را در نقطه -1 حساب کنید و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $A(-1, -1)$ بنویسید.

۱۴۸) خط d در نقطه با طول $x = 2$ بر نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور x) را بیابید.



۱۴۹) اگر f تابعی مشتق‌پذیر بوده و $g(x) = x^3 + 1$ و $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$ ، آنگاه $f'(0)$ را بیابید.

۱۵۰ در تابع $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ حاصل $f''(1)$ را بیابید.

۱۵۱ مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{|x+2|}$ در نقطه $x = -2$ را بررسی کنید.

۱۵۲ مشتق پذیری توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

الف

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - 4x + 4}, \quad x_0 = 2$$

ب

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}, \quad x_0 = 0$$

پ

$$f(x) = \sqrt{|x+3|}, \quad x_0 = -3$$

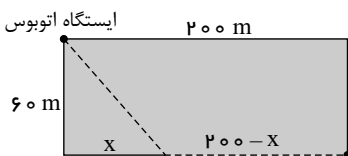
۱۵۳ نقاط بحرانی تابع $f(x) = 2x^2 - |x|$ را بیابید.

۱۵۴ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^2 + |x+1|$ را در بازه $[-2, 2]$ بیابید.

۱۵۵ یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۵۶ هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت 32 cm^2 خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایینی هر صفحه 2 cm و حاشیه های کناری هر کدام یک سانتی متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کم ترین مقدار ممکن باشد.

۱۵۷ آروین می خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در 200 متری غرب و 60 متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می تواند با سرعت 3 متر بر ثانیه از پیاده رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می تواند از درون پارک و تنها با سرعت 2 m/s عبور کند. باتوجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کم ترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



موقعیت فعلی آروین

۱۵۸ ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می خواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

۱۵۹ نقطه M با کدام طول روی محور x ها انتخاب شود به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه $A(1, 5), B(7, -2)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

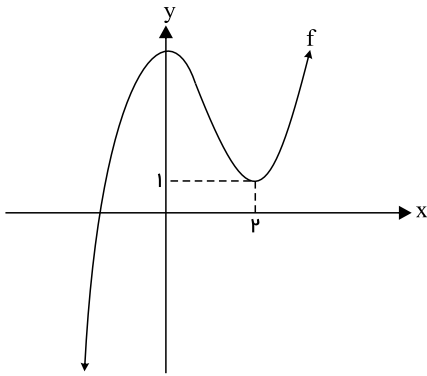
۱۶۰ می خواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً 900 سانتی متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq 3$)

۱۶۱ بازه هایی که تابع $y = x\sqrt{4 - x^2}$ بر آنها صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.

۱۶۲ با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 27x + 1$ مشخص کنید تابع در کدام بازه ها اکیداً صعودی است؟

۱۶۳ نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

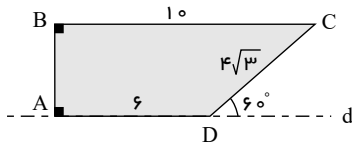
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 6x & x > 0 \end{cases}$$



۱۶۴ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.

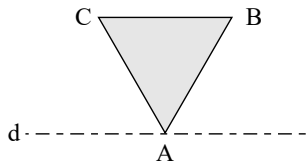
۱۶۵ ضابطه و دامنه مشتق تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را به دست آورید و سپس نمودار f' را رسم کنید.

۱۶۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را در نقاط $x_0 = 2$ و $x_0 = 0$ بررسی کنید و سپس نمودار f و f' را رسم کنید.



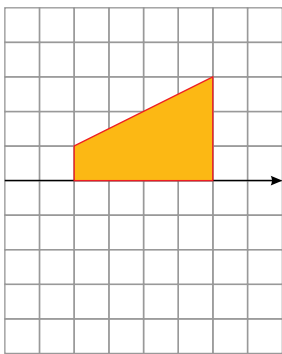
۱۶۷ از دوران دوزنقه $ABCD$ حول d شکلی با چه حجم به دست می آید؟

۱۶۸ مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $2\sqrt{3}$ را حول خط d دوران می دهیم. حجم حاصل چقدر است؟



۱۶۹ در شکل روبه رو می خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم. الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

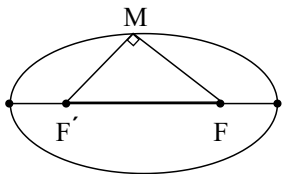
ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



۱۷۰ مربعی به ضلع ۶ واحد را حول قطرش دوران می دهیم. اندازه حجم جسم حاصل چقدر است؟

۱۷۱ مربعی به ضلع ۴ واحد را حول محوری موازی با یکی از اضلاع آن به فاصله ۳ واحد نزدیک تر، دوران می دهیم. حجم شکل حاصل چقدر است؟

۱۷۲ نقطه M روی یک بیضی با کانون های F و F' به گونه ای قرار دارد که MF و MF' برهم عمودند نشان دهید که $MF \times MF' = 2b^2$ است.

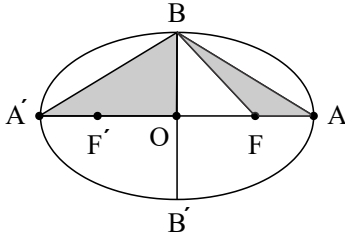


۱۷۳ یک بیضی بر چهار خط $x = -1$ و $y = -4$ و $y = 6$ و $x = -1$ مماس است. مختصات کانون ها و مرکز تقارن بیضی را پیدا کنید.

۱۷۴ یک بیضی افقی با دایره $x^2 + y^2 + 2x = 8$ هم مرکز است. اگر قطر بیضی دو واحد بزرگ تر از قطر دایره و قطر کوچک بیضی دو واحد کوچک تر از قطر دایره باشد، مختصات رئوس و کانون ها و مرکز بیضی و فاصله کانونی و اندازه خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۷۵ طول قطر کوچک، فاصله کانونی و خروج از مرکز یک بیضی را به دست آورید که نقاط $A \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$ و $A' \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} \right)$ دو سر قطر بزرگ بیضی و طول قطر کوچک آن $\frac{3}{4}$ فاصله کانونی باشد.

۱۷۶ در بیضی زیر اگر مساحت مثلث BAF یک سوم مساحت مثلث $A'OB$ باشد و طول قطر کوچک بیضی ۴ باشد، خروج از مرکز و طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.



۱۷۷ حدود m را چنان بیابید که خط $3x - 4y + m = 0$ دایره $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ را قطع نکند.

۱۷۸ فاصله نزدیک ترین نقاط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از خط $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 15$ چقدر است؟

۱۷۹ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس درون باشد.

۱۸۰ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطه $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ بوده و بر دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ مماس باشد.

۱۸۱ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

۱۸۲ دو ظرف همانند داریم. اولی شامل ۴ توپ قرمز و ۲ توپ آبی و دومی شامل ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. به طور تصادفی از یکی از ظرف‌ها دو توپ باهم خارج می‌کنیم. احتمال آن که توپ‌ها هم‌رنگ نباشند چقدر است؟

۱۸۳ در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبه اول ۴ عدد و در جعبه دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به تصادف برداشته و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

۱۸۴ ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از ۳ ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید است؟

۱۸۵ داخل جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه وجود دارد. یک مهره برداشته و بدون نگاه کردن کنار می‌گذاریم و سپس مهره دیگری از این جعبه خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

۱۸۶ جعبه شماره یک دارای ۲ مهره سیاه و ۵ مهره سفید و جعبه شماره دو دارای ۴ مهره سیاه و ۳ مهره سفید است. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

۱۸۷ دو ظرف همانند داریم، ظرف اول شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و ظرف دوم شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. از اولین ظرف یک مهره برداشته و بدون رؤیت آن داخل ظرف دوم قرار می‌دهیم. اگر از ظرف دوم یک مهره به تصادف برداریم چقدر احتمال دارد این مهره سیاه باشد؟

۱۸۸ ۶۰ درصد کارکنان یک شرکت مرد و بقیه زن هستند. ۶۵ درصد مردان و ۵۰ درصد زنان این شرکت عینکی هستند. اگر یک نفر از بین کارکنان این شرکت به تصادف انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد عینکی باشد؟

۱۸۹ سه ظرف همانند داریم، ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۱۱ مهره آبی است. ظرف دوم شامل ۳ مهره قرمز و ۹ مهره آبی و ظرف سوم شامل مهره‌های آبی می‌باشد. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال این که مهره خارج شده آبی باشد چقدر است؟

۱۹۰ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای افرادی که ورزش می‌کنند ۷۰٪ و برای افرادی که ورزش نمی‌کنند برابر ۴۵٪ می‌باشد. اگر ۴۰ درصد افراد جامعه‌ای ورزش کنند و یک نفر به تصادف از این جامعه انتخاب کنیم با چه احتمالی به این بیماری خاص مبتلا نمی‌شود؟

۱۹۱ درون جعبه A، ۵ لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب، درون جعبه B، ۵ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب و درون جعبه C، ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب وجود دارد. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و لامپی را به تصادف از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این لامپ سالم باشد؟

۱۹۲ دو ظرف همانند داریم که اولی شامل ۳ توپ آبی و ۴ توپ قرمز و دومی شامل ۵ توپ آبی و یک توپ قرمز می‌باشد. تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر زوج بزرگتر از ۳ بیاید ظرف اول و در غیر این صورت ظرف دوم را انتخاب کرده و یک توپ به تصادف از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این توپ قرمز باشد؟

۱۹۳ در کارخانه‌ای سه دستگاه A، B و C به ترتیب ۳۰٪، ۴۰٪، ۳۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند و می‌دانیم محصولات این سه دستگاه به ترتیب ۱۰٪، ۲۰٪، ۲۰ درصد معیوب هستند. احتمال این که محصولی که از این کارخانه انتخاب می‌شود سالم باشد چقدر است؟

- ۱۹۴) جمعیت یک روستا، ۶۰ درصد زن و ۴۰ درصد مرد است. می‌دانیم ۸۰ درصد زنان و ۷۰ درصد مردان در این روستا دفترچه سلامت دارند. اگر فردی به تصادف یکی از ساکنان این روستا انتخاب شود با چه احتمال دفترچه سلامت دارد؟
- ۱۹۵) سه ظرف همانند داریم. در اولی و دومی هر کدام ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف سوم ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. اگر به تصادف یک ظرف انتخاب و یک مهره بیرون آوریم، با کدام احتمال این مهره سیاه است؟
- ۱۹۶) سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید تاس را می‌ریزیم، اگر «پشت» بیاید، سه سکه دیگر را باهم می‌ریزیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه «رو» ظاهر شود کدام است؟
- ۱۹۷) در پرتاب یک تاس اگر ۶ ظاهر شود، مجاز به پرتاب دوم هستیم، در غیر این صورت دو سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک سکه «رو» ظاهر می‌شود؟
- ۱۹۸) در یک شهر ۸۰ درصد از راننده‌ها زن و ۲۰ درصد مرد هستند. احتمال این‌که یک راننده مرد چراغ قرمز را رد کند $\frac{۳}{۵}$ و این احتمال برای راننده زن $\frac{۲}{۵}$ است. اگر در این شهر یک راننده را به تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد که چراغ قرمز را رد کند؟
- ۱۹۹) احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰٫۱ و احتمال انتقال به افراد دیگر $\frac{۳}{۵}$ است. کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند با کدام احتمال این بیماری منتقل می‌شود؟
- ۲۰۰) در جعبه اول ۴ مهره آبی و ۲ مهره قرمز، در جعبه دوم ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره را باهم بیرون می‌آوریم با کدام احتمال هر دو مهره آبی هستند؟
- ۲۰۱) دو ظرف داریم. اولی شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و دومی شامل ۴ مهره سفید و ۱ مهره سیاه است. از ظرف اول به تصادف یک مهره برداشته و در ظرف دوم قرار می‌دهیم، سپس از ظرف دوم مهره‌ای بر می‌داریم. احتمال آن‌که این مهره سفید باشد چقدر است؟

پاسخنامه تشریحی

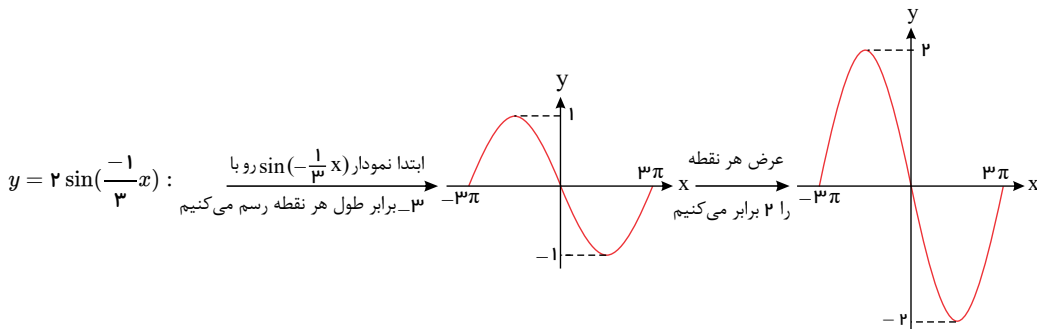
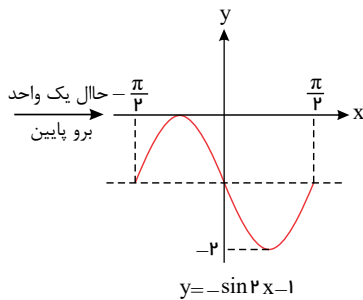
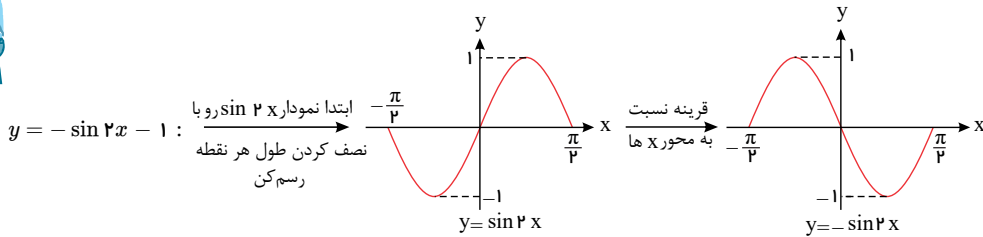
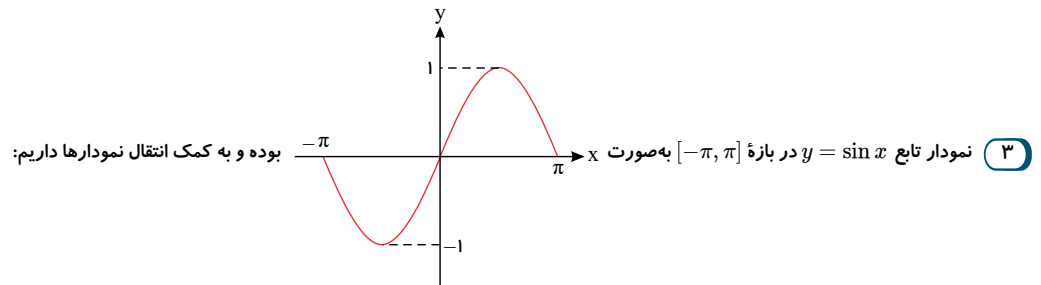
$$y = x^3 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{x \rightarrow -x} y = (-x)^3 = -x^3 \xrightarrow[\text{واحد چپ}]{x \rightarrow x+2} y = -(x+2)^3$$

$$\xrightarrow[\text{واحد بالا } 5]{y = f(x) = -(x+2)^3 + 5} y = f(x) = -(x+2)^3 + 5 \Rightarrow (x+2)^3 = 5 - y$$

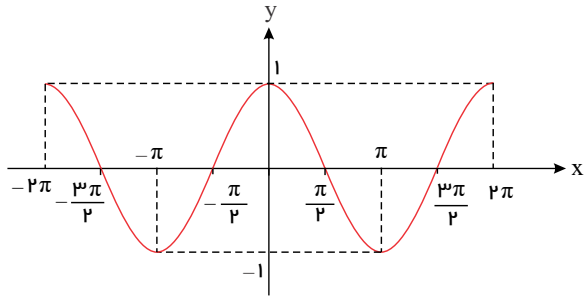
$$\Rightarrow x+2 = \sqrt[3]{5-y} \Rightarrow x+2 = -\sqrt[3]{y-5} \Rightarrow x = -2 - \sqrt[3]{y-5}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = -2 - \sqrt[3]{x-5}$$

$$D_f = [0, 5], R_f = [-2, 6]$$



ابتدا به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ توجه کنید:



با توجه به این نمودار و دوره تناوب هر تابع و نیز برد آن‌ها به راحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که نمودار (۴) مربوط به تابع (الف)، نمودار (۱) مربوط به تابع (ب)، نمودار (۲) متعلق به تابع (پ) و بالاخره نمودار (۳) متعلق به تابع (ت) می‌باشد.

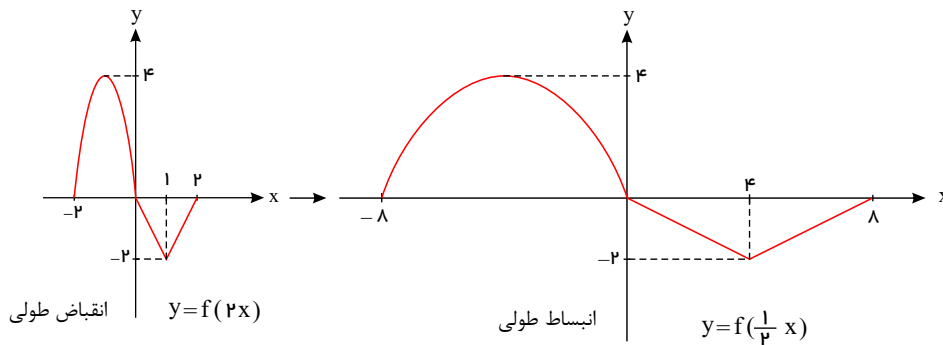
طول هر نقطه از نمودار $y = \cos x$ برابر و عرض آن‌ها را $\frac{-1}{2}$ برابر می‌کنیم. $y = -\frac{1}{2} \cos(-\frac{1}{2}x)$ (الف)

طول هر نقطه از نمودار $y = \cos x$ برابر $\frac{1}{2}$ برابر و عرض آن‌ها را ۲ برابر می‌کنیم. $y = 2 \cos 2x$ (ب)

با ثابت ماندن عرض هر نقطه از نمودار $y = \cos x$ باید طول هریک را ۲ برابر کرد. $y = \cos(\frac{1}{2}x)$ (پ)

طول هر نقطه را نصف و عرض را قرینه می‌کنیم. $y = -\cos 2x$ (ت)

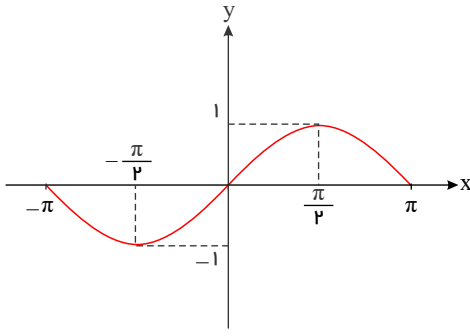
۵ باید بدانیم که برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است طول هر نقطه از $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کرده و عرض آن‌ها را ثابت نگه داریم. به همین مناسبت می‌توانیم بگوییم که نمودار تابع $y = f(x)$ برای k های بزرگتر از یک ($k > 1$) با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (بسته‌تر) و برای k های بین ۰ و ۱ ($0 < k < 1$) با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (یا بازتر) می‌شود.



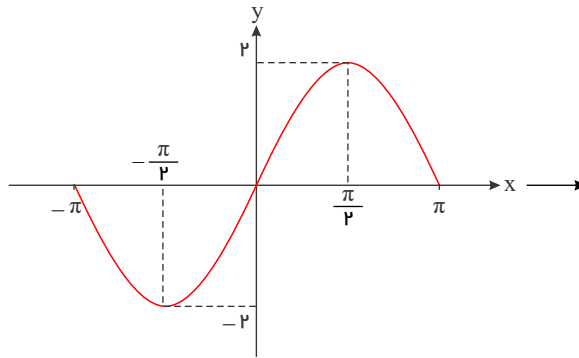
$D = [-2, 2], R = [-2, 4]$

$D = [-8, 8], R = [-2, 4]$

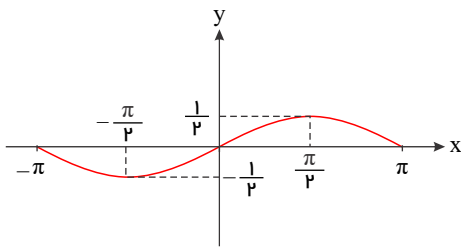
۶ هر چهار نمودار $y = \sin x, y = 2 \sin x, y = -2 \sin x$ و $y = \frac{1}{2} \sin x$ دامنه‌ای به صورت $[-\pi, \pi]$ داشته اما بردشان تفاوت دارد. در حقیقت با توجه به برد تابع پایه $y = \sin x$ که فاصله بسته $[-1, 1]$ است، برد تابع $y = r \sin x$ برای $r > 0$ به صورت $[-r, r]$ و برای $r < 0$ به صورت $[r, -r]$ بوده و شکل نمودار برای $|r| > 1$ کشیده‌تر و برای $0 < |r| < 1$ بسته‌تر خواهد شد. حواستان باشد که برای 2 های منفی نمودار دقیقاً قرینه نمودار $y = |r| \sin x$ نسبت به محور x خواهد بود. حالا بهتر است که نمودار این چهار تابع را در کنار هم رسم کنیم تا موضوع بهتر درک شود:



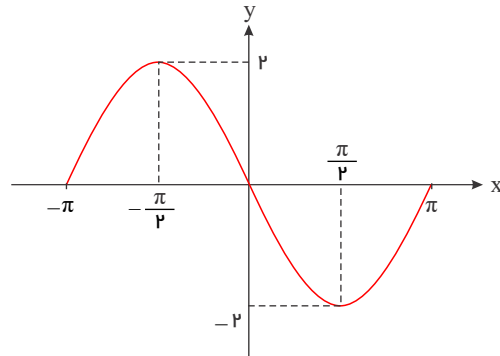
$$y = \sin x$$



$$y = 2 \sin x$$

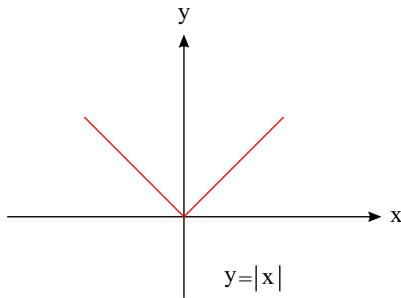


$$y = \frac{1}{2} \sin x$$



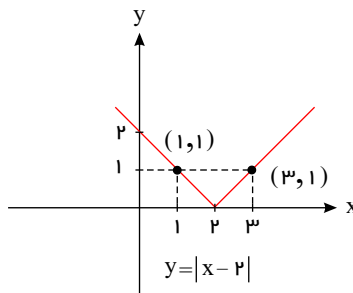
$$y = -2 \sin x$$

۷ ابتدا نمودار تابع $y = |x - 2|$ را به کمک انتقال نمودار نام‌آشنای $y = |x|$ رسم می‌کنیم:



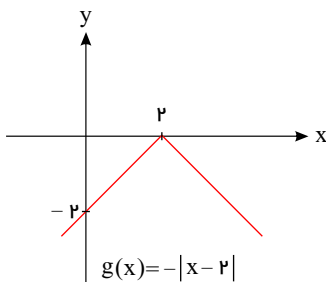
$$y = |x|$$

۲ واحد به
سمت راست



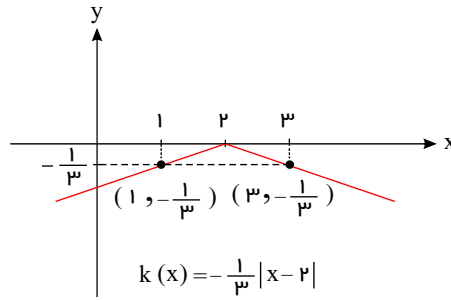
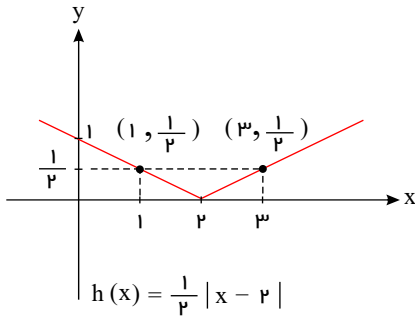
$$y = |x - 2|$$

حالا برای رسم $y = -|x - 2|$ نمودار $y = |x - 2|$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



$$g(x) = -|x - 2|$$

و برای رسم نمودار $y = \frac{1}{3}|x - 2|$ می‌بایستی عرض هر نقطه از نمودار $y = |x - 2|$ را $y = |x - 2|$ (با ثابت ماندن طول) نصف کنیم. به همین منوال اگر عرض نقاط را با ثابت ماندن طول آن‌ها در $\frac{-1}{3}$ ضرب کنیم به نمودار $y = \frac{-1}{3}|x - 2|$ می‌رسیم:



$$y = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x \text{ ها}} y = -\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{واحد راست}} y = -\sqrt[3]{x-4}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد پایین}} y = -\sqrt[3]{x-4} - 3 \Rightarrow f(x) = -\sqrt[3]{x-4} - 3$$

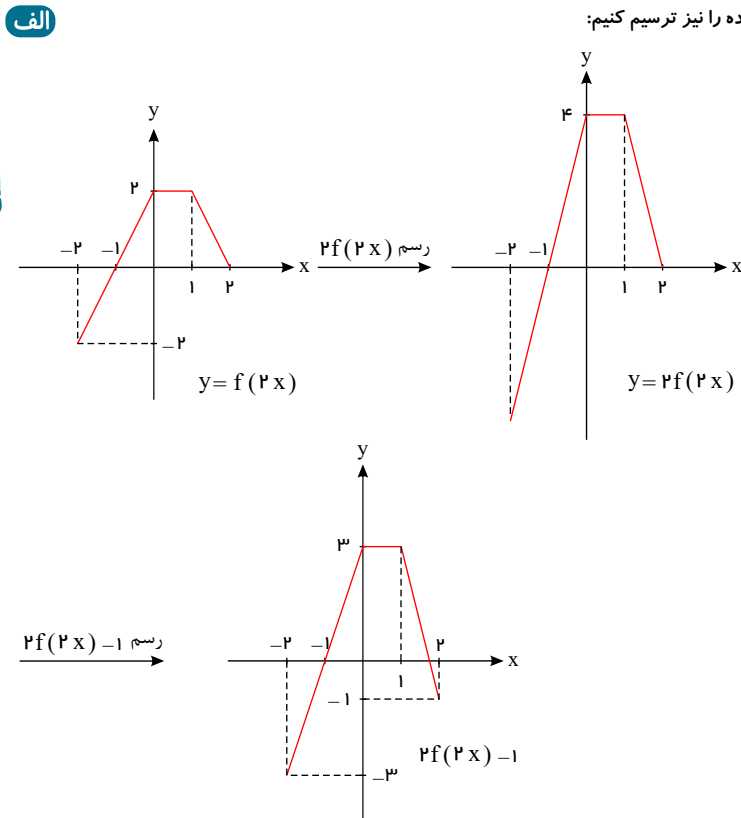
$$y = -\sqrt[3]{x-4} - 3 \Rightarrow \sqrt[3]{x-4} = -y - 3 \Rightarrow x - 4 = (-y - 3)^3$$

$$\Rightarrow x = (-y - 3)^3 + 4 \Rightarrow x = 4 - (3 + y)^3 \Rightarrow y = 4 - (3 + x)^3 = f^{-1}(x)$$

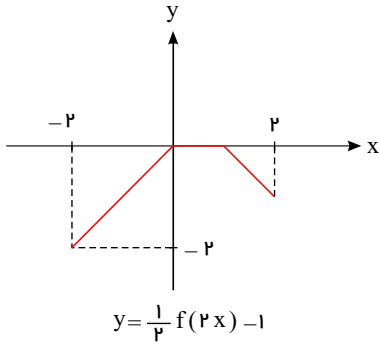
۸

نمودار تابع $f(x)$ را داریم و می‌خواهیم به کمک انتقال نمودارها، نمودارهای تابع داده شده را نیز ترسیم کنیم:

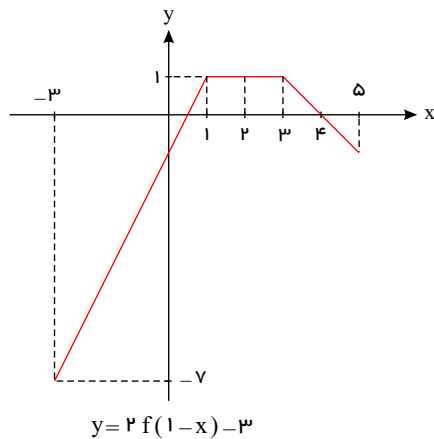
۹



برای رسم نمودار $y = \frac{1}{2}f(2x) - 1$ نیز کافی است ابتدا در نمودار $f(2x)$ با ثابت ماندن عرض نقاط، طول آن‌ها را نصف کنیم و سپس در نمودار حاصل، با ثابت ماندن طول هر نقطه، عرض آن‌ها را نصف کنیم تا نمودار $\frac{1}{2}f(2x)$ به دست آید. حال اگر این نمودار را یک واحد به پایین ببریم (انگار که محور x ‌ها را یک واحد به بالا کشیده باشیم!) به نمودار مطلوب می‌رسیم. اگر این روند را به درستی انجام دهیم به این نمودار خواهیم رسید:



ب برای رسم نمودار $y = 2f(x-1) - 3$ ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست می‌بریم تا به نمودار $f(x-1)$ برسیم. حال اگر با ثابت ماندن طول نقاط این نمودار، عرض هر کدام را ۲ برابر کنیم نمودار $2f(x-1)$ پدید می‌آید که با انتقال آن به اندازه ۳ واحد به پایین به نمودار مورد نظر خواهیم رسید. با رعایت این مکانیسم به نمودار زیر می‌رسیم:



۱۰ ابتدا توجه داریم که: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ و $D_g = \{3, 0, 4, 1\}$ و $R_g = \{-1, 2, 1, -2\}$

اکنون با توجه به تعریف‌های $fog(x) = f(g(x))$ و $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$ درمی‌یابیم که تابع fog روی آن دسته از دامنه‌های g اثر می‌کند که برد متناظر با آن دامنه متعلق به دامنه تابع f بوده باشد. براین اساس داریم:

$$fog(3) = f(g(3)) = f(-1) \xrightarrow{\text{ضابطه } f} \frac{2(-1) - 1}{-1 + 2} = -3 \quad (3 \xrightarrow{g} -1 \rightarrow -3 : 3 \xrightarrow{fog} -3)$$

$$fog(0) = f(g(0)) = f(2) \xrightarrow{\text{ضابطه } f} \frac{2(2) - 1}{2 + 2} = \frac{3}{4} \quad (0 \xrightarrow{g} 2 \rightarrow \frac{3}{4} : 0 \xrightarrow{fog} \frac{3}{4})$$

$$fog(4) = f(g(4)) = f(1) \xrightarrow{\text{ضابطه } f} \frac{2(1) - 1}{1 + 2} = \frac{1}{3} \quad (4 \xrightarrow{g} 1 \rightarrow \frac{1}{3} : 4 \xrightarrow{fog} \frac{1}{3})$$

$$fog(1) = f(g(1)) = f(-2) = \frac{2(-2) - 1}{-2 + 2} = \frac{-5}{0} \times (-2 \notin D_f)$$

بنابراین می‌بینیم که $D_{fog} = \{3, 0, 4\}$ و $R_{fog} = \{-3, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}\}$ لذا $fog = \{(3, -3), (0, \frac{3}{4}), (4, \frac{1}{3})\}$ می‌باشد.

۱۱ ابتدا با توجه به ضابطه‌های f و g ، ضابطه تابع ترکیب gof را می‌یابیم و سپس مرتب‌شده آن را با عبارت معادلش، یعنی $-x^2 - 3x + 7$ ، برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x+b) = a(x+b)^2 - b(x+b) + c$$

$$= ax^2 + 2abx + ab^2 - bx - b^2 + c = ax^2 + (2ab - b)x + (ab^2 - b^2 + c)$$

حل بپذیرد

$$\rightarrow ax^2 + (2ab - b)x + (ab^2 - b^2 + c) = -x^2 - 3x + 7 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2ab - b = -3 \\ ab^2 - b^2 + c = 7 \end{cases}$$

$$a = -1 \xrightarrow{2ab - b = -3} -2b - b = -3 \rightarrow -3b = -3 \rightarrow b = 1$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \xrightarrow{ab^2 - b^2 + c = 7} -1 - 1 + c = 7 \rightarrow c = 9$$

روند محاسبه پارامترهای b و c اینگونه است:

$$\rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 9 \end{cases}$$

۱۲) با توجه به ضابطه‌های $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، برای تعیین ضابطه توابع مرکب $f \circ f$ و $f \circ g$ داریم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3}{x}\right) \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\substack{\text{به جای } x \text{ های } f \\ \frac{3}{x}}} \frac{2}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{2}{\frac{3-x}{x}} = \frac{2x}{3-x}$$

البته دقت کنید که برای تعیین دامنه این تابع در مرحله $\frac{2}{\frac{3-x}{x}}$ تأمل کرده و ریشه‌های مخرج‌ها (یعنی $x=3$ و $x=0$) را از \mathbb{R} کم می‌کنیم. $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{2}{x-1}\right) \xrightarrow[\text{قرار بده}]{\substack{\text{به جای } x \text{ های } f \\ \frac{2}{x-1}}} \frac{2}{\frac{2}{x-1} - 1} = \frac{2}{\frac{2-x}{x-1}} = \frac{2x-2}{3-x}$$

برای تعیین دامنه این تابع نیز با توجه به مرحله ساده نشده $\frac{2}{\frac{2-x}{x-1}}$ ، می‌بایستی ریشه‌های مخرج (یعنی $x=3$ و $x=1$) را از \mathbb{R} برداریم. لذا: $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

۱۳) در هر حالت تابع‌های ترکیب $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورده و با توجه به دامنه مربوطه ساده می‌کنیم تا معلوم شود در کدام مورد تابع h به دست می‌آید:

الف)
$$\begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 \stackrel{(x \geq 2)}{=} x-2 = h(x) \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2-2} \neq h(x) \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = f((x-2)^2) = \sqrt{(x-2)^2} \stackrel{\sqrt{u^2}=|u|}{=} |x-2| \neq h(x) \\ g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x}-2)^2 \stackrel{(x \geq 0)}{=} x-4\sqrt{x}+4 \neq h(x) \end{cases}$$

بنابراین تابع $h(x) = x-2$ را می‌توان از ترکیب توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ به صورت $h(x) = f \circ g(x)$ به دست آورد.

۱۴) f تابعی اکیداً صعودی است. لذا برای هر a و b از D_f داریم:

g تابعی اکیداً نزولی است.

$$a > b \rightarrow f(a) > f(b) \xrightarrow{g} g(f(a)) < g(f(b))$$

بفرض $g(f(x)) = fog(x)$ به تعریف $fog(a) < fog(b) \rightarrow$ تابع fog اکیداً نزولی است.

حال این بار فرض می‌کنیم g تابعی اکیداً نزولی است. بنابراین برای هر a و b از D_f داریم:

f اکیداً صعودی است.

$$a > b \rightarrow g(a) < g(b) \xrightarrow{f} f(g(a)) < f(g(b))$$

بفرض $f(g(x)) = fog(x)$ به تعریف $fog(a) < fog(b) \rightarrow$ تابع fog اکیداً نزولی است.

از این مسأله نتیجه می‌گیریم که اگر بین دو تابع f و g ، یکی صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشد تابع‌های ترکیب $f \circ g$ و $g \circ f$ هر دو نزولی اکید خواهند بود.

۱۵) از آنجایی که از تابع f به جز خطی بودن اطلاع دیگری در دست نیست می‌بایستی ضابطه آن را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر گرفته و تابع ترکیب $f \circ f(x)$ را به دست آوریم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

حال باید این تابع را با تابع خطی $y = 2 + 3x$ مساوی قرار داده و ضرایب a و b را به دست آوریم:

$$a^2x + ab + b = 3x + 2 \xrightarrow[\text{اعداد ثابت باهم مساوی‌اند.}]{\substack{\text{ضریب } x \text{ ها باهم و} \\ \text{ضریب } x \text{ ها باهم و}}} \begin{cases} a^2 = 3 \rightarrow a = \sqrt{3} \text{ یا } -\sqrt{3} \\ ab + b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}b + b = 2 \rightarrow b(\sqrt{3} + 1) = 2 \rightarrow b = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \\ \text{یا} \\ a = -\sqrt{3} \rightarrow -\sqrt{3}b + b = 2 \rightarrow b(-\sqrt{3} + 1) = 2 \rightarrow b = \frac{2}{1 - \sqrt{3}} \end{cases}$$

در نتیجه ضابطه تابع خطی f می‌تواند به صورت $f(x) = \sqrt{3}x + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$ یا $f(x) = -\sqrt{3}x + \frac{2}{1 - \sqrt{3}}$ باشد.

۱۶) ضابطه $g \circ f$ را به شکل $y = g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 3f(x) - 2 & ; f(x) > 0 \\ 1 - 4f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$ نوشته و با توجه به ضابطه f ، به دنبال x ‌هایی می‌گردیم که حالت‌های $f(x) > 0$ و $f(x) \leq 0$ برقرار باشد. با اندکی تأمل درمی‌یابیم که حالت $f(x) > 0$ تنها برای $x > 1$ و حالت $f(x) \leq 0$ یک‌بار برای $0 < x \leq 1$ و بار دیگر برای $x \leq 0$ رخ می‌دهد. از این رو

می‌بایستی در ضابطه $g \circ f$ ، برای $x > 1$ از $f(x) = x^2 - 1$ ، برای $0 < x \leq 1$ نیز از $f(x) = x^2 - 1$ و بالاخره برای $x \leq 0$ از $f(x) = x - 1$ استفاده کنیم. در این صورت داریم:

$$y = g \circ f(x) = \begin{cases} 3(x^2 - 1) - 2 & ; x > 1 \\ 1 - 4(x^2 - 1) & ; 0 < x \leq 1 \\ 1 - 4(x - 1) & ; x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2 - 5 & ; x > 1 \\ -4x^2 + 5 & ; 0 < x \leq 1 \\ -4x + 5 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

۱۷) پاسخ او اشتباه است زیرا وقتی دو تابع f و g را ترکیب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x-1} + 2\right) = \frac{\frac{x}{x-1} + 2}{\frac{x}{x-1} - 3} \rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{\cancel{x} + 2x - 2}{\cancel{x} - 3x + 3} \Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{3x - 2}{-2x + 3}$$

همانطور که می بینید هنگام ساده کردن عبارت $x - 1$ دچار این اشتباه می شویم که یکی از محدودیت های دامنه را بی دلیل حذف می نمایم در واقع علت اصلی ارتکاب این اشتباه آن است که دامنه $f \circ g$ یا $g \circ f$ را نباید از روی ضابطه شان تعیین کرد بلکه همواره باید از رابطه مربوط به آن ها استفاده کنیم در این سؤال داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_{f \circ g} | g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \neq 1 | g(x) \neq 3\} \rightarrow x \neq 1 \quad (1) \text{ و } \frac{x}{x-1} \neq 3 \quad (2) \rightarrow x \neq 3x - 3 \rightarrow 2x \neq 3 \rightarrow x \neq \frac{3}{2} \quad (*) \xrightarrow{(1) \cap (*)} D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$$

18

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \{(x, 2x - 1) | x \in A\}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1) \in f$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow (2, 3) \in f$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 5 \Rightarrow (3, 5) \in f$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = 7 \Rightarrow (4, 7) \in f$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = 9 \Rightarrow (5, 9) \in f$$

$$\Rightarrow f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f(f(1)) = f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1) \in f \circ f$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow f(f(2)) = f(3) = 5 \Rightarrow (2, 5) \in f \circ f$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 5 \Rightarrow f(f(3)) = f(5) = 9 \Rightarrow (3, 9) \in f \circ f$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = 7 \Rightarrow f(f(4)) = f(7) = \text{تعریف نشده}$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = 9 \Rightarrow f(f(5)) = f(9) = \text{تعریف نشده}$$

پس تابع $f(f(x))$ به صورت زیر خواهد بود:

$$f(f(x)) = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\}$$

19 ابتدا ضابطه تابع g را از روی نمودار آن به دست می آوریم:

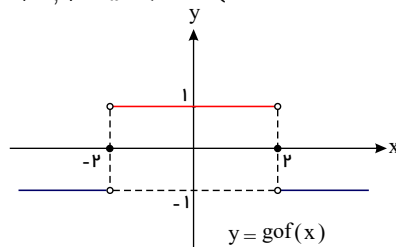
$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

از نمودار پیداست که مقدار تابع برای تمام x های مثبت برابر $g(x) = 1$

برای تمام x های منفی برابر $g(x) = -1$ و برای $x = 0$ برابر $g(x) = 0$ می باشد.

حال با توجه به تعریف تابع ترکیب $g \circ f$ داریم:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(4 - x^2) = \begin{cases} 1 & ; 4 - x^2 > 0 \\ 0 & ; 4 - x^2 = 0 \\ -1 & ; 4 - x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & ; -2 < x < 2 \\ 0 & ; x = 2 \text{ یا } -2 \\ -1 & ; x > 2 \text{ یا } x < -2 \end{cases}$$



نمودار تابع ترکیب $g \circ f$ هم به این شکل است:

اگر در حل نامعادله های $x^2 > 4$ و $x^2 < 4$ مشکلی دارید دقت کنید که:

$$\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 4 \rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{4} \rightarrow |x| < 2 \rightarrow -2 < x < 2 \\ 4 - x^2 < 0 \rightarrow x^2 > 4 \rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{4} \rightarrow |x| > 2 \rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2 \end{cases}$$

20 اگر تابع h را به شکل $h(x) = 9^x - 3^{x+1} = (3^x)^2 - 3 \times 3^x$ بازنویسی کنیم به روشنی می توانیم ببینیم که با فرض $f(x) = x^2 - 3x$ و $g(x) = 3^x$ تابع ترکیب $f \circ g(x)$

همان تابع $h(x)$ خواهد بود::

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x \\ g(x) = 3^x \end{cases} \rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3^x) = (3^x)^2 - 3(3^x)$$

$$= (3^2)^x - 3^{1+x} = 9^x - 3^{x+1} = h(x)$$

۲۱) برای رسیدن به مقدار $g(3)$ ، باید ضابطه $g(x)$ را به دست آوریم. برای این منظور باتوجه به تعریف $gof(x) = g(f(x))$ و شرایط موجود داریم:

$$g(f(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{f(x)=x+\frac{1}{x}} g\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (*)$$

حال اگر اتحاد $2 + x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$ را به کار بگیریم، داریم:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \xrightarrow{(*)} g\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

حال دیگر معلوم است که با فرض $x + \frac{1}{x} = t$ ، ضابطه g به صورت $g(t) = t^2 - 2$ یا $g(x) = x^2 - 2$ بوده و برای $g(3)$ داریم:

$$g(3) = (3)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

۲۲) برای از بین بردن علامت منفی در صورت کسر ضابطه f ، ابتدا ضابطه آن را به فرم $f(x) = \frac{x}{1-x}$ نوشته و سپس باتوجه به تعریف $fof(x) = f(f(x))$ ضابطه تابع مرکب fof را به دست می آوریم:

$$fof(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x-x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-2x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

باتوجه به شرط $1-x \neq 0$ یا $x \neq 1$

صورت و مخرج را در $(1-x)$ ضرب می کنیم.

و اما در مورد دامنه تابع fof ، باتوجه به ضابطه به دست آمده می بایستی $1-2x \neq 0$ و در نتیجه $x \neq \frac{1}{2}$ باشد و البته با در نظر گرفتن آن شرط $x \neq 1$ به این نتیجه می رسیم که دامنه fof به صورت $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \neq x \neq 1, \mathbb{R} - \{1, \frac{1}{2}\} = D_{fof}$ می باشد.

۲۳) ابتدا باید تابع $g = f^2 + f$ را به دست آوریم. دامنه این تابع همان دامنه f می باشد. (زیرا: $D_g = D_{f^2} \cap D_f = D_f$ و $D_{f^2} = D_f$)

$$g = f^2 + f = \{(-1, f^2(-1) + f(-1)), (2, f^2(2) + f(2)), (0, f^2(0) + f(0)), (6, f^2(6) + f(6))\}$$

$$= \{(-1, 12), (2, 0), (0, 6), (6, 0)\}$$

در ادامه تابع ترکیب $h = gof$ را باتوجه به تعریف و دامنه تابع gof محاسبه می کنیم. داریم:

$$D_h = D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{2, 0, 6\}$$

$$h = gof = ? \begin{cases} gof(2) = g(f(2)) = g(-1) = 12 \quad (2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 12 : 2 \xrightarrow{gof} 12) \\ gof(0) = g(f(0)) = g(2) = 0 \quad (0 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0 : 0 \xrightarrow{gof} 0) \\ gof(6) = g(f(6)) = g(0) = 6 \quad (6 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 6 : 6 \xrightarrow{gof} 6) \end{cases}$$

بنابراین تابع h به صورت $h = \{(2, 12), (0, 0), (6, 6)\}$ است. حتماً درک کرده اید که:

$$gof(-1) = g(f(-1)) = g(3) = x \xrightarrow{\text{زیرا}} 3 \notin D_g$$

۲۴) براساس تعریف توابع مرکب داریم:

$$\begin{cases} fog(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 - (2x+1) = 4x^2 + 4x + 1 - 2x - 1 = 4x^2 + 2x \\ gof(x) = g(f(x)) = g(x^2 - x) = 2(x^2 - x) + 1 = 2x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$fog(x) = gof(x) \rightarrow 4x^2 + 2x = 2x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{\text{مرتب می کنیم}} 2x^2 + 4x - 1 = 0$$

حل معادله درجه ۲ از روش دلتا

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(-1) = 16 + 8 = 24$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2(2)} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \\ \text{یا} \\ x_2 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} \end{cases} \quad (\text{ریشه های معادله})$$

۲۵) باتوجه به تعریف تابع ترکیب fog ، ضابطه fog را به شکل

$$y = fog(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x) - 3 & ; g(x) > 0 \\ (g(x))^2 - 1 & ; g(x) \leq 0 \end{cases}$$

حال در ضابطه g بررسی می‌کنیم ببینیم در چه بازه‌های از x ، $g(x) > 0$ و در چه بازه‌های $g(x) \leq 0$ است. این تابع برای $x \geq 2$ در شرط $g(x) = x^2 + 1 > 0$ و برای $0 \leq x < 2$ در شرط $g(x) = -2\sqrt{x} \leq 0$ صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$y = fog(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x) - 3 & ; g(x) > 0 \\ (g(x))^2 - 1 & ; g(x) \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2(x^2 + 1) - 3 & ; x \geq 2 \\ (-2\sqrt{x})^2 - 1 & ; 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x^2 - 1 & ; x \geq 2 \\ 4x - 1 & ; 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

با توجه به این نکته که در $fog(a)$ ابتدا a وارد ماشین g شده و $g(a)$ بیرون می‌آید و سپس $g(a)$ وارد ماشین f شده و $fog(a)$ بیرون می‌آید، داریم:

$$\begin{cases} f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\} \\ g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\} \end{cases}$$

$$fog = \begin{cases} 5 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 8 : fog(5) = 8 \\ 3 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 3 : fog(3) = 3 \\ 7 \xrightarrow{g} 9 \xrightarrow{f} 8 : fog(7) = 8 \\ 9 \xrightarrow{g} 11 \xrightarrow{f} 4 : fog(9) = 4 \end{cases} = \{(5, 8), (3, 3), (7, 8), (9, 4)\}$$

$$gof = \begin{cases} 7 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{g} \times \\ 5 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 5 : gof(5) = 5 \\ 9 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{g} \times \\ 11 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} \times \end{cases} = \{(5, 5)\}$$

دامنه تابع gof باتوجه به تعریف $gof(x) = g(f(x))$ از دستور $D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$ به دست می‌آید. به عبارت دیگر دامنه gof آن قسمت از دامنه f را شامل می‌شود که به ازای آن‌ها، $f(x)$ متعلق به دامنه g باشد. در این جا باتوجه به نمودار داریم:

$$D_f = [-3, 0], R_f = [0, \frac{5}{3}], D_g = [0, \frac{5}{3}]$$

$$D_{gof} = \{x \in [-3, 0] | f(x) \in [0, \frac{5}{3}]\} = [-3, 0]$$

دامنه gof همان دامنه f و برابر $[-3, 0]$ است. زیرا به ازای تمام اعضای این بازه، مقادیر تابع f متعلق به $D_g = [0, \frac{5}{3}]$ می‌باشد. مقادیر f همان $R_f = [0, \frac{5}{3}]$ است.

از روی نمودارها به راحتی می‌توانیم ضابطه‌های f و g را به دست آوریم. پس ابتدا همین کار را انجام می‌دهیم:

$$f: \begin{cases} x < 0 & ; y = 2 \\ x = 0 & ; y = 0 \\ x > 0 & ; y = -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x > 0 \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} -4 \leq x \leq 0 : (-4, 0), (0, 4) \rightarrow y - 0 = \frac{4-0}{0+4}(x+4) \rightarrow y = x+4 \\ 0 < x \leq 3 : (0, 0), (3, -1) \rightarrow y - 0 = \frac{0+1}{0-3}(x-0) \rightarrow y = \frac{-1}{3}x \end{cases}$$

$$\rightarrow g(x) = \begin{cases} x+4 & ; -4 \leq x \leq 0 \\ \frac{-x}{3} & ; 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

حالا دیگر می‌توانیم حاصل عبارت را باتوجه به تعریف تابع ترکیب به دست آوریم. داریم:

$$\begin{cases} fog(3) = f(g(3)) = \frac{g(3)=-1}{3} = -1 \rightarrow fog(3) + gof(1) = 2 + 3 = 5 \\ gof(1) = g(f(1)) = \frac{f(1)=-1}{0-3} = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

ابتدا تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{\left(\frac{x+2}{x-1}\right) + 2}{\left(\frac{x+2}{x-1}\right) - 1} = \frac{x+2+2x-2}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } (x-1) \text{ ضرب می‌کنیم. } (x \neq 1)} \rightarrow fof(x) = \frac{3x}{3} = x$$

می‌بینیم که تابع $fog(x)$ یک تابع همانی است. به همین دلیل هم محاسبه ضابطه تابع $fofof$ به راحتی قابل انجام خواهد بود؛ داریم:

$$f \circ f \circ f(x) = f(\underbrace{f \circ f(x)}_{\text{برابر } x}) = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

در نتیجه برای هر تابع مانند $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ که شرط $f \circ f(x) = x$ را داراست، حاصل تابع ترکیبی $\underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{k \text{ مرتبه}}$ برای k های زوج برابر تابع همانی x و برای k های فرد برابر خود $f(x)$ خواهد بود.

۳۰ کار را با محاسبه و ساده کردن تابع ترکیب $f \circ f$ آغاز می‌کنیم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \frac{a\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + d} = \frac{a^2x + ab + bcx + bd}{acx + bc + cdx + d^2}$$

$$= \frac{(a^2 + bc)x + (a + d)b}{(a + d)cx + bc + d^2} \xrightarrow{cx+d \neq 0} f \circ f(x) = \frac{(a^2 + bc)x + (a + d)b}{(a + d)cx + bc + d^2} \stackrel{\text{قرار است که}}{=} x$$

با درنگی کوتاه روی تساوی اخیر، اگر $a + d = 0$ (یا $a = -d$) باشد، آن‌گاه ضابطه ساده شده $f \circ f(x)$ برابر تابع همانی x می‌شود:

$$a + d = 0 \text{ یا } a = -d \rightarrow f \circ f(x) = \frac{(a^2 + bc)x}{bc + a^2} = x$$

بنابراین اگر در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ رابطه $a + d = 0$ (یا $a = -d$) برقرار باشد ترکیب تابع با خودش برابر تابع همانی می‌شود. مثلاً برای $f(x) = \frac{x}{x-1}$ داریم:

$$f \circ f(x) = x$$

۳۱ f اکیداً نزولی است. بنابراین برای هر a و b از دامنه f ، اگر $a > b$ ، آن‌گاه داریم:

حالا اکیداً نزولی بودن g را اعمال می‌کنیم.

$$a > b \rightarrow f(a) < f(b) \rightarrow g(f(a)) > g(f(b))$$

باتوجه به تعریف تابع ترکیب $g \circ f$

$$\rightarrow g \circ f(a) > g \circ f(b)$$

از $a > b$ به $g \circ f(a) > g \circ f(b)$ رسیدیم و این یعنی $g \circ f$ اکیداً صعودی است.

این بار کار را با اکیداً نزولی بودن g شروع می‌کنیم. برای هر a و b از دامنه g ، اگر $a > b$ ، آن‌گاه:

حال اکیداً نزولی بودن f را اعمال می‌کنیم.

$$a > b \rightarrow g(a) < g(b) \rightarrow f(g(a)) > f(g(b))$$

براساس تعریف تابع ترکیب $f \circ g$

$$\rightarrow f \circ g(a) > f \circ g(b)$$

از $a > b$ به $f \circ g(a) > f \circ g(b)$ رسیدیم و این یعنی $f \circ g$ صعودی است.

۳۲ تابع f اکیداً صعودی است. بنابراین برای هر a و b از دامنه f ، اگر $a > b$ باشد می‌توان نوشت:

حال اکیداً صعودی بودن g را اعمال می‌کنیم.

$$a > b \rightarrow f(a) > f(b) \rightarrow g(f(a)) > g(f(b))$$

براساس تعریف تابع ترکیب $g \circ f$

$$\rightarrow g \circ f(a) > g \circ f(b) \rightarrow g \circ f \text{ اکیداً صعودی است.}$$

این بار اکیداً صعودی بودن g را با g آغاز می‌کنیم. برای هر a و b از دامنه g ، اگر $a > b$ باشد می‌توان نوشت:

حال اکیداً صعودی بودن f را اعمال می‌کنیم.

$$a > b \rightarrow g(a) > g(b) \rightarrow f(g(a)) > f(g(b))$$

براساس تعریف تابع ترکیب $f \circ g$

$$\rightarrow f \circ g(a) > f \circ g(b) \rightarrow f \circ g \text{ اکیداً صعودی است.}$$

۳۳ یک روش برای یافتن دامنه تابع ترکیب $f \circ g$ استفاده از رابطه $D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$ است. برای استفاده از این روش ابتدا باید دامنه توابع f و g را به دست آوریم. داریم:

$$f: 1 - 2x \geq 0 \rightarrow 2x \leq 1 \rightarrow x \leq \frac{1}{2} \rightarrow D_f = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

$$g: x + 2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2 \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{-2\} | \frac{1-3x}{x+2} \leq \frac{1}{2}\} = ?$$

حالا در این مرحله مجموعه جواب نامعادله $\frac{1-3x}{x+2} \leq \frac{1}{2}$ را یافته و اشتراک آن با $\mathbb{R} - \{-2\}$ را به عنوان دامنه $f \circ g$ معرفی می‌کنیم. داریم:

$$\frac{1-3x}{x+2} - \frac{1}{2} \leq 0 \rightarrow \frac{2-6x-x-2}{2x+4} \leq 0 \rightarrow \frac{-7x}{2x+4} \leq 0$$

x	-2	0
$\frac{-7x}{2x+4}$	$-$	$+$
$\frac{-7x}{2x+4}$	$-$	$+$

\Rightarrow مجموعه جواب $= x \geq 0, x < -2$

اشتراک با
 $\xrightarrow{\mathbb{R} - \{-2\}} D_{fog} = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$

۳۴
الف

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 5 \\ g(x) = x^2 - 3x + 8 \end{cases} \rightarrow fog(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 3x + 8) = 2(x^2 - 3x + 8) - 5 = 2x^2 - 6x + 11 = 7$$

مجموع ضرایب، صفر است. مرتب کن

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x + 11 = 7 \rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ یا } x = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

ب

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x - 1 \\ g(x) = 1 - 2x \end{cases} \rightarrow gof(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + x - 1) = 1 - 2(3x^2 + x - 1) = -5$$

حل از Δ

$$\Rightarrow -6x^2 - 2x + 3 = -5 \rightarrow -6x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow 6x^2 + 2x + 8 = 0 \rightarrow \Delta = (2)^2 - 4(6)(8) < 0 \rightarrow \text{فاقد جواب}$$

۳۵

الف

$$f(x) = x^2 - 5, g(x) = \sqrt{x+6}$$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g : x+6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6 \rightarrow D_g = [-6, +\infty)$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \geq -6 \text{ و } \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = [-6, +\infty)$$

این بدیهی است!

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+6}) = (\sqrt{x+6})^2 - 5 \xrightarrow{x \geq -6} fog(x) = x + 6 - 5 = x + 1$$

ب

$$f(x) = \sqrt{2x-3}, g(x) = \frac{6}{3x-5} \rightarrow \begin{cases} D_f : 2x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ D_g : 3x-5 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \neq \frac{5}{3}, \frac{6}{3x-5} \in D_f\}$$

می‌باشد که بعد از تعیین علامت به جواب $[\frac{5}{3}, 3]$ می‌رسیم.

$$\frac{6}{3x-5} \geq \frac{3}{2} \text{ که معادل } \frac{6}{3x-5} - \frac{3}{2} \geq 0 \text{ یا } \frac{27-9x}{6x-10} \geq 0$$

$$\rightarrow D_{fog} = \{x \neq \frac{5}{3}, x \in (\frac{5}{3}, 3]\} = (\frac{5}{3}, 3]$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\frac{6}{3x-5}) = \sqrt{2(\frac{6}{3x-5}) - 3} = \sqrt{\frac{27-9x}{3x-5}}$$

البته می‌توانستیم دامنه fog را بعد از تشکیل ضابطه آن نیز به دست آوریم.

ب

$$f(x) = \sqrt{x+2}, g(x) = \sqrt{x^2-16}$$

$$D_f : x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2, D_g : x^2-16 \geq 0 \rightarrow |x| \geq 4 \rightarrow x \geq 4 \text{ یا } x \leq -4$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 - 16} \xrightarrow{x \geq -2} \sqrt{x-14}$$

برای تعیین دامنه gof

$$\xrightarrow{x \geq -2} x - 14 \geq 0 \rightarrow x \geq 14 \rightarrow D_{gof} = [14, +\infty)$$

ت

$$f(x) = \sin x, g(x) = \sqrt{x}$$

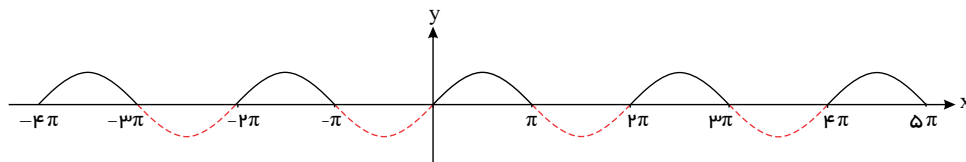
$$D_f = \mathbb{R}, D_g = x \geq 0 \rightarrow D_{gof} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}, \sin x \geq 0\} = \{x \text{ هایی که در نواحی } 1 \text{ و } 2 \text{ قرار می‌گیرند}\}$$

مانند

$$= \dots \cup [-4\pi, -3\pi] \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [4\pi, 5\pi] \cup \dots$$

برای درک بهتر موضوع با توجه به نمودار $y = \sin x$ بازه‌هایی که $\sin x$ نامنفی است را می‌توانیم ببینیم:



۳۶ اگر قیمت هر دستگاه خودرو را x تومان در نظر بگیریم، با دو تابع زیر روبه‌رو خواهیم بود.

$$g(x) = x - \frac{15}{100}x \rightarrow g(x) = \frac{85}{100}x$$

$$f(x) = x - 2,000,000$$

حال با تشکیل fog و gof ببینیم کدام یک به نفع کوروش است:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{85}{100}x\right) = \frac{85}{100}x - 2,000,000 \xrightarrow{x=50,000,000} (fog)(x) = \frac{85}{100} \times 50,000,000 - 2,000,000 = 42,500,000 - 2,000,000$$

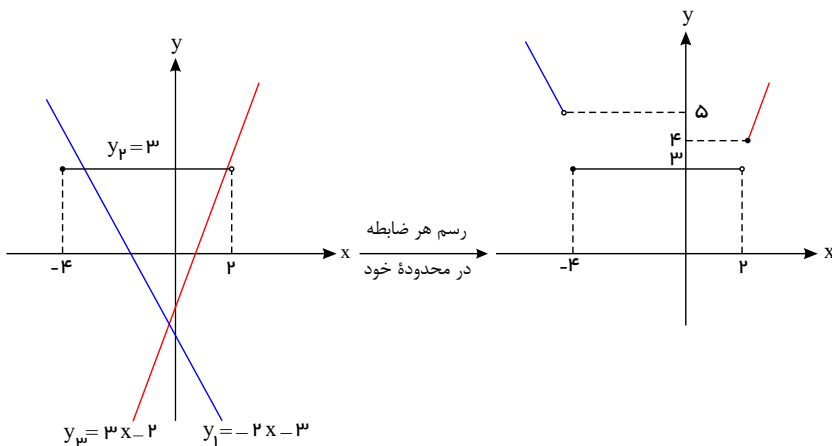
$$\rightarrow (fog)(x) = 40,500,000$$

یعنی اگر ابتدا از تخفیف ۱۵ درصدی استفاده کند، سپس تخفیف دو میلیونی بگیرد خودرو برایش چهار میلیون و پانصد هزار تومان تمام می‌شود.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x - 2,000,000) = \frac{85}{100}(x - 2,000,000) \xrightarrow{x=50,000,000} (gof)(x) = 40,800,000$$

یعنی اگر ابتدا تخفیف دو میلیونی را اخذ نماید سپس از تخفیف ۱۵ درصدی استفاده کند خودرویش چهار میلیون و هشتصد هزار تومان برایش تمام خواهد شد پس بهتر است ابتدا تخفیف ۱۵ درصدی، سپس تخفیف ۲ میلیونی را اخذ کند.

۳۷ رسم نمودار تابع f به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم:



می‌بینیم که این نمودار در بازه $(-\infty, -4)$ اکیداً نزولی، در بازه $[-4, 2]$ ثابت (که می‌توان آن را صعودی یا نزولی هم در نظر گرفت) و بالاخره در فاصله $[2, +\infty)$ اکیداً صعودی است. برای اساس می‌توانیم ادعا کنیم که این تابع در فاصله $(-\infty, 2)$ نزولی و در فاصله $[-4, +\infty)$ صعودی است.

۳۸ نکته: اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \geq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|2x-1|) - f(|x+1|)} \Rightarrow f(|2x-1|) - f(|x+1|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|2x-1|) \geq f(|x+1|) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} |2x-1| \leq |x+1|$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 \leq (x+1)^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 6x \leq 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-2) \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{3x(x-2)} \begin{array}{c} \circ \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ - \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ + \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 2]$$

۳۹ برای هر x_1 و x_2 از دامنه fog داریم:

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } g} g(x_1) > g(x_2) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} f(g(x_1)) < f(g(x_2))$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow fog(x_1) < fog(x_2) \Rightarrow \text{اکیداً صعودی } fog$$

$$\text{می‌دانیم: } m^2 + 1 > m^2 \Rightarrow fog(m^2 + 1) > fog(m^2) \Rightarrow -a + 4 > 2a - 1$$

$$\Rightarrow 4 + 1 > 2a + a \Rightarrow 3a < 5 \Rightarrow a < \frac{5}{3}$$

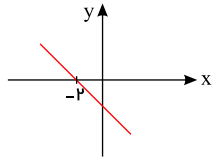
$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 1)f(x)} \Rightarrow (x^2 - 1)f(x) \geq 0$$

برای $x < -2 \Rightarrow f(x) > f(-2) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$ تابع f مثبت است.

برای $x > -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow$ تابع f منفی است.

چون f روی \mathbb{R} اکیداً نزولی و $f(-2) = 0$ است، داریم:

نمودار f تقریباً به صورت مقابل است.



$$x^2 - 11 = 0 \Rightarrow x = \pm 9$$

x	-9	-2	9
$x^2 - 11$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	$+$	0
$(x^2 - 11)f(x)$	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow x \leq -9 \text{ یا } -2 \leq x \leq 9 \Rightarrow D_g = (-\infty, -9] \cup [-2, 9]$$

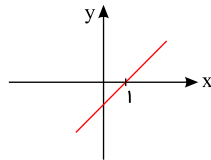
(41)

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 3x)f(x)} \Rightarrow (x^2 - 3x)f(x) \geq 0$$

چون f روی \mathbb{R} اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ است، داریم:

$$x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow \text{برای } x < 1 \text{ تابع } f \text{ منفی است.}$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \text{برای } x > 1 \text{ تابع } f \text{ مثبت است.}$$



به طور تقریبی نمودار f به صورت مقابل است.

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

x	0	1	3
$x^2 - 3x$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$
$(x^2 - 3x)f(x)$	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3 \Rightarrow D_g = [0, 1] \cup [3, +\infty)$$

(42) نکته: اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \leq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x - 2|) - f(|x + 1|)} \Rightarrow f(|x - 2|) - f(|x + 1|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|x - 2|) \geq f(|x + 1|) \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی}} |x - 2| \geq |x + 1|$$

برای حل این گونه نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x - 2)^2 \geq (x + 1)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \geq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 4 - 1 \geq 2x + 4x$$

$$\Rightarrow 6x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

(43) نکته: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \geq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x - 3|) - f(|x + 2|)} \Rightarrow f(|x - 3|) - f(|x + 2|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|x - 3|) \geq f(|x + 2|) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی}} |x - 3| \leq |x + 2|$$

$$(x - 3)^2 \leq (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \leq x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 9 - 4 \leq 4x + 6x$$

$$\Rightarrow 10x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

(44)

$$f(x) = [-2x] + 1$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow [-2x_1] \geq [-2x_2] \Rightarrow [-2x_1] + 1 \geq [-2x_2] + 1$$

$$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \text{ نزولی}$$

(45) تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ معرف سهمی $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ با محور تقارن $x_s = 2$ می‌باشد که غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است. حال اگر دامنه تابع را به یکی از فاصله‌های $[2, +\infty) = [x_s, +\infty)$ یا $(-\infty, 2] = (-\infty, x_s]$ محدود کنیم تابع f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر خواهد شد:

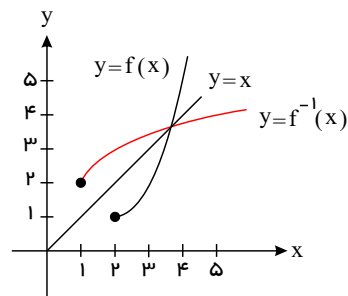
حالت اول:

$$\begin{cases} f(x) = (x-2)^2 + 1 \rightarrow y = (x-2)^2 + 1 \\ D_f = [2, +\infty) \end{cases}$$

$$\rightarrow (x-2)^2 = y-1 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-2| = \sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به } D_f} \begin{matrix} x-2 \geq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{matrix} \rightarrow x-2 = \sqrt{y-1} \rightarrow x = \sqrt{y-1} + 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 2$$



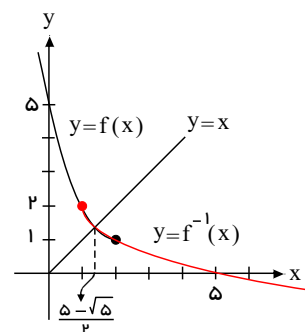
حالت دوم:

$$\begin{cases} f(x) = (x-2)^2 + 1 \rightarrow y = (x-2)^2 + 1 \\ D_f = (-\infty, 2] \end{cases}$$

$$\rightarrow (x-2)^2 = y-1 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-2| = \sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به } D_f} \begin{matrix} x-2 \geq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{matrix} \rightarrow -(x-2) = \sqrt{y-1} \rightarrow x-2 = -\sqrt{y-1} \rightarrow x = -\sqrt{y-1} + 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1} + 2$$



۴۶) باتوجه به رابطه $f^{-1} \circ g(m) = f^{-1}(g(m)) = 2$ ابتدا مقدار $g(m)$ را (به صورت پارامتری) از روی ضابطه g به دست می آوریم:

$$g(m) = \begin{cases} m^2 + 1 & ; m > 0 \\ m^2 - 1 & ; m \leq 0 \end{cases}$$

یعنی برای $m > 0$ $g(m)$ برابر $m^2 + 1$ و برای $m \leq 0$ برابر $m^2 - 1$ است.

در نتیجه آن رابطه اولیه به صورت $f^{-1}(m^2 + 1) = 2$ (برای $m > 0$) یا $f^{-1}(m^2 - 1) = 2$ (برای $m \leq 0$) تبدیل خواهد شد. حال باتوجه به این نکته که اگر $a = f^{-1}(a)$ آن گاه $a = f(b)$ برقرار است، داریم:

$$\begin{cases} m > 0 : f(2) = m^2 + 1 \\ m \leq 0 : f(2) = m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{از روی مجموعه } f} \begin{cases} m > 0 : m^2 + 1 = 0 \rightarrow m^2 = -1 \rightarrow \text{فاقد جواب} \\ m \leq 0 : m^2 - 1 = 0 \rightarrow m^2 = 1 \rightarrow m = \pm 1 \xrightarrow{(m \leq 0)} m = -1 \checkmark \end{cases}$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول برای m همان -1 بوده و داریم: $f^{-1} \circ g(-1) = 2$

۴۷) ابتدا اکیداً صعودی بودن $f \circ g$ را باتوجه به شرایط مسأله اثبات می کنیم. برای هر a و b از D_g ، اگر $a > b$ ، آن گاه داریم:

$$a > b \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } g} g(a) > g(b) \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } f} f(g(a)) > f(g(b))$$

$\rightarrow f \circ g(a) > f \circ g(b) \rightarrow f \circ g$ اکیداً صعودی است.

سپس با فرض $h = f \circ g$ و توجه به رابطه $h^{-1} = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ و با در نظر گرفتن این نکته که معکوس هر تابع اکیداً صعودی خود نیز اکیداً صعودی است، اکیداً صعودی بودن $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ باتوجه به اکیداً صعودی بودن $h = f \circ g$ به راحتی قابل توجیه خواهد بود.

همین روند را می توان در مورد تابع ترکیب و اکیداً صعودی $h = g \circ f$ نیز انجام داد. تابع $h = g \circ f$ به دلیل اکیداً صعودی بودن توابع f و g اکیداً صعودی بوده و معکوس آن یعنی $h^{-1} = (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود.

۴۸) برای تابع مرکب $g \circ f^{-1}$ نیاز به توابع f^{-1} و g داریم. تابع f^{-1} را می توانیم از روی تابع f و با جابه جا کردن جای مؤلفه های آن به دست آوریم:

$$f^{-1} = \{(-1, 4), (1, 3), (2, 5)\}, \quad g = \{(-1, 2), (4, 0), (5, 3)\}$$

$$\begin{cases} g \circ f^{-1}(-1) = g(f^{-1}(-1)) = g(4) = 0 \quad (-1 \xrightarrow{f^{-1}} 4 \rightarrow 0 : -1 \xrightarrow{g \circ f^{-1}} 0) \\ g \circ f^{-1}(1) = g(f^{-1}(1)) = g(3) \quad (\text{زیرا } 3 \notin D_g) \\ g \circ f^{-1}(2) = g(f^{-1}(2)) = g(5) = 3 \quad (2 \xrightarrow{f^{-1}} 5 \rightarrow 3 : 2 \xrightarrow{g \circ f^{-1}} 3) \end{cases}$$

$$\rightarrow g \circ f^{-1} = \{(-1, 0), (2, 3)\}$$

$$g^{-1} = \{(2, -1), (0, 4), (3, 5)\}, \quad f = \{(4, -1), (3, 1), (5, 2)\}$$

و حالا برای تابع مرکب $f \circ g^{-1}$ داریم:

$$\begin{cases} fog^{-1}(2) = f(g^{-1}(2)) = f(-1) \times (-1 \notin D_f) \\ fog^{-1}(0) = f(g^{-1}(0)) = f(3) = -1 \quad (0 \xrightarrow{g^{-1}} 3 \xrightarrow{f} -1 : 0 \xrightarrow{fog^{-1}} -1) \\ fog^{-1}(3) = f(g^{-1}(3)) = f(5) = 2 \quad (3 \xrightarrow{g^{-1}} 5 \xrightarrow{f} 2 : 3 \xrightarrow{fog^{-1}} 2) \end{cases}$$

$$\rightarrow fog^{-1} = \{(0, -1), (3, 2)\}$$

۴۹) برای یافتن تابع معکوس تابع $f(x) = 1 - \frac{g(x-1)}{3}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \quad (1)$$

$$y = 1 - \frac{g(x-1)}{3} \Rightarrow 1 - y = \frac{g(x-1)}{3} \Rightarrow 3 - 3y = g(x-1) \Rightarrow g^{-1}(3 - 3y) = g^{-1}(g(x-1)) \Rightarrow x - 1 = g^{-1}(3 - 3y)$$

$$x = 1 + g^{-1}(3 - 3y) \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{از ۲، ۱}} f^{-1}(y) = 1 + g^{-1}(3 - 3y) \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + g^{-1}(3 - 3x)$$

۵۰

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + 1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + 1}} \Rightarrow x_1 \sqrt{x_2^2 + 1} = x_2 \sqrt{x_1^2 + 1}$$

تابع یک به یک است. $|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$.
 کنید چون دو کسر با هم مساوی‌اند و مخرج دو کسر علامت مثبت دارد پس صورت‌ها با هم، هم علامت هستند.
 برای یافتن ضابطه تابع معکوس قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \text{دو طرف به توان ۲}$$

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow y^2 x^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 x^2 - x^2 = -y^2 \Rightarrow x^2 (y^2 - 1) = -y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1 - y^2} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

۵۱) ابتدا توجه کنید که اگر $g^{-1}(a) = 0$ ، آن‌گاه $g(0) = a$ است. حال اگر شرط $g^{-1}(og^{-1}(-1)) = 0$ را به شکل $g^{-1}(f^{-1}og^{-1}(-1)) = 0$ نوشته و فرض کنیم $f^{-1}og^{-1}(-1) = a$ داریم:

$$g^{-1}(a) = 0 \Rightarrow g(0) = a \xrightarrow{\text{از ضابطه } g} a = -2 \Rightarrow f^{-1}og^{-1}(-1) = -2$$

حال اگر دوباره رابطه $f^{-1}og^{-1}(-1) = -2$ به شکل $f^{-1}(g^{-1}(-1)) = -2$ نوشته و فرض کنیم $g^{-1}(-1) = b$ است، داریم:

$$f^{-1}(b) = -2 \Rightarrow f(-2) = b \xrightarrow{\text{از ضابطه } f} b = -1 \Rightarrow g^{-1}(-1) = -1$$

$$\rightarrow g(-1) = -1 \xrightarrow{\text{از ضابطه } g} 1 - m - 2 = -1 \rightarrow m = 0$$

۵۲) باتوجه به رابطه $f^{-1}(g^{-1}of^{-1}(0)) = 2$ و با فرض $a = g^{-1}of^{-1}(0)$ داریم:

$$f^{-1}(a) = 2 \Rightarrow a = f(2) \xrightarrow{\text{از ضابطه } f} a = 4 - 6 = -2 \Rightarrow g^{-1}of^{-1}(0) = -2$$

اکنون باتوجه به رابطه $g^{-1}(f^{-1}(0)) = -2$ و با فرض $b = f^{-1}(0)$ داریم:

$$g^{-1}(b) = -2 \Rightarrow b = g(-2) \xrightarrow{\text{از ضابطه } g} b = 4 - 2m \Rightarrow f^{-1}(0) = 4 - 2m \Rightarrow f(4 - 2m) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{از ضابطه } f} (4 - 2m)^2 - 3(4 - 2m) = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } (4 - 2m)} (4 - 2m)(4 - 2m - 3) = 0$$

$$\rightarrow (4 - 2m)(1 - 2m) = 0 \xrightarrow{\text{ویژگی حاصل ضرب صفر}} \begin{cases} 4 - 2m = 0 \\ \text{یا} \\ 1 - 2m = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ \text{یا} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۵۳) برای $a, fof^{-1}(a)$ از دامنه f^{-1} انتخاب می‌شود در حالی که برای $a, f^{-1}of(a)$ از دامنه f انتخاب می‌شود:

$$f = \{(2, -1), (1, 3), (0, 4)\} \quad , \quad f^{-1} = \{(-1, 2), (3, 1), (4, 0)\}$$

$$\begin{cases} fof^{-1}(-1) : -1 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{f} -1 : -1 \xrightarrow{fof^{-1}} -1 \\ fof^{-1}(3) : 3 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{f} 3 : 3 \xrightarrow{fof^{-1}} 3 \\ fof^{-1}(4) : 4 \xrightarrow{f^{-1}} 0 \xrightarrow{f} 4 : 4 \xrightarrow{fof^{-1}} 4 \end{cases} \Rightarrow fof^{-1} = \{(-1, -1), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$\begin{cases} f^{-1}of(2) : 2 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{f^{-1}} 2 : 2 \xrightarrow{f^{-1}of} 2 \\ f^{-1}of(1) : 1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f^{-1}} 1 : 1 \xrightarrow{f^{-1}of} 1 \\ f^{-1}of(0) : 0 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f^{-1}} 0 : 0 \xrightarrow{f^{-1}of} 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}of = \{(2, 2), (1, 1), (0, 0)\}$$

همان طور که می بینید توابع ترکیب $f^{-1}of$ و fof^{-1} هر دو همانی بوده ولی باهم برابر نیستند.

۵۴

الف) $f(x) = \frac{-8x + 3}{2} : y = \frac{-8x + 3}{2} \xrightarrow{\times 2} 2y = -8x + 3 \xrightarrow{-3} -8x = 2y - 3$
 $\xrightarrow{\div (-8)} x = \frac{2y - 3}{-8} = \frac{-1}{4}y + \frac{3}{8} \xrightarrow{\text{حالا}} f^{-1}(x) = \frac{-1}{4}x + \frac{3}{8}$

ب) $g(x) = -5 - \sqrt{3x + 1} : y = -5 - \sqrt{3x + 1} \rightarrow y + 5 = -\sqrt{3x + 1}$
 به توان ۲ برسان $\rightarrow (y + 5)^2 = (3x + 1) \xrightarrow{-1} (y + 5)^2 - 1 = 3x \xrightarrow{\div 3} x = \frac{1}{3}(y + 5)^2 - \frac{1}{3}$
 $\left(\begin{matrix} y+5 \leq 0 \\ y \leq -5 \end{matrix} \right)$
 $x \geq \frac{-1}{3}$
 حالا $\rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 5)^2 - \frac{1}{3}$

که با توجه به شرایط $-5 \leq y$ و $x \geq \frac{-1}{3}$ ، برای دامنه و برد تابع وارون، داریم:

$$D_{g^{-1}} = R_g = (-\infty, -5], R_{g^{-1}} = D_g = [-\frac{1}{3}, +\infty)$$

۵۵ باید بدانیم که ترکیب هر تابع با معکوس خود برابر تابع همانی است. براین اساس داریم:

$$\begin{cases} fof^{-1}(a) = a \rightarrow \begin{cases} fof^{-1}(2x) = 2x \\ f^{-1}of(x) = x \end{cases} \rightarrow fof^{-1}(2x) - f^{-1}of(x) = 2x - x = x - 8 \\ \rightarrow x = 2x - 8 \rightarrow x - 2x = -8 \rightarrow -x = -8 \xrightarrow{\div (-1)} x = 8 \end{cases}$$

همان طور که می بینید ضابطه تابع f اصلاً مورد استفاده قرار نگرفت. بلکه تنها کافی است که تابع f معکوس پذیر باشد که هست.

۵۶ در نگاه اول ممکن است باتوجه به وجود روابط $f^{-1}of(x) = x$ و $fof^{-1}(x) = x$ تصور کنیم که توابع $f^{-1}of$ و fof^{-1} به دلیل همانی بودن، همواره باهم برابرند که البته تصور غلطی است. حقیقت در دامنه این توابع نهان است.

$$D_{fof^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_f\}, D_{f^{-1}of} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f^{-1}}\}$$

با دقت روی این دامنه‌ها درمی یابیم در رابطه $f^{-1}of(x) = x$ از دامنه f^{-1} (به شرطی که $f^{-1}(x)$ متعلق به دامنه f باشد) انتخاب می شود و درحالی که در رابطه $fof^{-1}(x) = x$ از دامنه f (با این شرط که $f(x) \in D_{f^{-1}}$ است) انتخاب می شود. پس اگر دامنه و برد تابع وارون پذیر f باهم برابر باشند ($D_f = R_f$) توابع ترکیب $f^{-1}of$ و fof^{-1} نیز باهم برابر می شوند. به عبارت دیگر اگر تابع f همانی باشد، تابع های $f^{-1}of$ و fof^{-1} باهم برابر خواهند بود. مثلاً برای $f = \{(1, 1), (2, 2), (0, 0)\}$ داریم:

$$f^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (0, 0)\} \rightarrow fof^{-1} = f^{-1}of = \{(1, 1), (2, 2), (0, 0)\}$$

۵۷ ابتدا باید ضابطه f^{-1} را به دست آوریم:

$$f(x) = x + 1 : y = x + 1 \rightarrow x = y - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$$

حال تابع ترکیب gof^{-1} را تشکیل داده و برابر صفر قرار می دهیم:

$$\begin{cases} g(x) = 2x^2 - 3x \rightarrow (gof^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g(x - 1) = 2(x - 1)^2 - 3(x - 1) = 0 \\ f^{-1}(x) = x - 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{از (x-1) فکتور می گیریم}} (x-1)(2(x-1) - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ 2(x-1) - 3 = 0 \rightarrow x-1 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

بنابراین $x = 1$ و $x = \frac{5}{2}$ ، صفرها یا ریشه های تابع gof^{-1} هستند.

۵۸ ابتدا دقت کنید که ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$ به این معناست که x به این معناست که $gof(x) = x$ است. (زیرا طبق این ماشین تابع f ، f را به $f(x)$ و تابع g ، g را به $f(x)$ تبدیل می کند.)

بنابراین باتوجه به معکوس پذیر بودن g ، تابع های f و g وارون یکدیگر بوده و داریم:

$$\begin{cases} gof(3) = 3 \\ g(a) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(f(3)) = 3 \\ g(a) = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع } b, \text{ یکبه یک است.}} f(3) = a \xrightarrow{\text{باتوجه به ضابطه } f} a = f(3) = \frac{5(3) + 6}{2(3) - 1} = \frac{21}{5}$$

۵۹) بیاید ابتدا توابع $g = f^2 + f$ و f^{-1} را با توجه به اعضای تابع f به دست آوریم:

$$g = f^2 + f = \{(-1, 1^2 + 1), (1, (-1)^2 + (-1)), (2, 0^2 + 0), (3, (-2)^2 + (-2))\}$$

$$= \{(-1, 2), (1, 0), (2, 0), (3, 2)\}, f^{-1} = \{(1, -1), (-1, 1), (0, 2), (-2, 3)\}$$

اکنون با توجه به تعریف تابع ترکیب و نیز دامنه های $h = fog^{-1}$ و $k = gof^{-1}$ ، اعضای این توابع را به دست می آوریم:

$$D_h = D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{-1, 3\}, D_k = D_{gof^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} | f^{-1}(x) \in D_g\}$$

$$= \{1, -1, 0, -2\}$$

$$h = fog = \{(-1, f(g(-1))), (3, f(g(3)))\} = \{(-1, f(2)), (3, f(2))\} = \{(-1, 0), (3, 0)\}$$

$$k = gof^{-1} = \{(1, gof^{-1}(1)), (-1, gof^{-1}(-1)), (0, gof^{-1}(0)), (-2, gof^{-1}(-2))\}$$

$$= \{(1, g(-1)), (-1, g(1)), (0, g(2)), (-2, g(3))\} = \{(1, 2), (-1, 0), (0, 0), (-2, 2)\}$$

۶۰) الف

برای محاسبه $(fog)^{-1}(5)$ دو راه پیش رو داریم. یکی اینکه تابع مرکب fog را محاسبه کرده و وارون آن را بیابیم و در نهایت به جای x های آن ۵ قرار دهیم. دیگر اینکه از رابطه $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$ استفاده کرده و با توجه به تابع وارون های f^{-1} و g^{-1} ، تابع مرکب $g^{-1}of^{-1}$ را محاسبه کرده و به جای x هایش ۵ قرار دهیم. ما هر دو راهکار را انجام می دهیم:

روش اول:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\lambda}x - 3 \\ g(x) = x^3 \end{cases} \rightarrow fog(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{1}{\lambda}x^3 - 3 \rightarrow fog(x) = \frac{1}{\lambda}x^3 - 3$$

$$\xrightarrow{\text{حالا محاسبه } (fog)^{-1}} y = \frac{1}{\lambda}x^3 - 3 \xrightarrow{+3} \frac{1}{\lambda}x^3 = y + 3 \xrightarrow{\times \lambda} x^3 = \lambda y + 3\lambda$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم بگیرد.}} x = \sqrt[3]{\lambda y + 3\lambda} \rightarrow (fog)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\lambda x + 3\lambda} \xrightarrow{\text{قرار بده } x=5} (fog)^{-1}(5) = \sqrt[3]{40 + 3\lambda} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

حال، روش دوم را نیز امتحان می کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\lambda}x - 3 \rightarrow y = \frac{1}{\lambda}x - 3 \rightarrow \frac{1}{\lambda}x = y + 3 \rightarrow x = \lambda y + 3\lambda \rightarrow f^{-1}(x) = \lambda x + 3\lambda \\ g(x) = x^3 \rightarrow y = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y} \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا می نویسیم}} (fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(\lambda x + 3\lambda) = \sqrt[3]{\lambda x + 3\lambda}$$

$$\xrightarrow{\text{قرار بده } x=5} (fog)^{-1}(5) = \sqrt[3]{40 + 3\lambda} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

حال، با توجه به ضابطه های f^{-1} و g^{-1} موارد (ب) و (پ) را به راحتی می توانیم محاسبه کنیم:

$$\text{ب) } (f^{-1}of^{-1})(6) = f^{-1}(f^{-1}(6)) \xrightarrow{f^{-1}(x)=\lambda x+3\lambda} f^{-1}(72) = \lambda(72) + 3\lambda = 600 \\ f^{-1}(6)=4\lambda+3\lambda=72$$

$$\text{پ) } (g^{-1}of^{-1})(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) \xrightarrow{f^{-1}(x)=\lambda x+3\lambda} g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4 \\ f^{-1}(5)=4\lambda+3\lambda=64$$

همانطور که می بینید جواب های موارد (الف) و (پ) یکی هستند!

۶۱) در هر مورد وارون یکی از توابع را یافته (معمولاً آن تابعی که محاسبه x بر حسب y در آن ساده تر است) و نشان می دهیم که تابع وارون به دست آمده همان تابع دوم است.

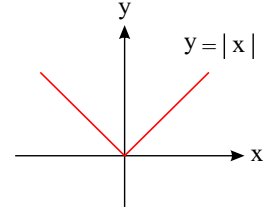
$$\text{الف) } \begin{cases} f(x) = \frac{-7}{2}x - 3 \\ g(x) = -\frac{2x+6}{7} \rightarrow y = -\frac{2x+6}{7} \xrightarrow{\times(-7)} -7y = 2x+6 \xrightarrow{-6} 2x = -7y-6 \\ \div 2 \rightarrow x = \frac{-7y-6}{2} = \frac{-7}{2}y - 3 \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x) = \frac{-7}{2}x - 3 \rightarrow g^{-1}(x) = f(x) \checkmark \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} f(x) = -\sqrt{x-1} \\ g(x) = 1+x^2; x \leq 0 \rightarrow y = 1+x^2 \xrightarrow{\text{جزر}} x^2 = y-1 \rightarrow |x| = \sqrt{y-1} \\ \begin{matrix} \text{با توجه به } x \leq 0 \\ |x| = -x \end{matrix} \rightarrow -x = \sqrt{y-1} \rightarrow x = -\sqrt{y-1} \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x) = -\sqrt{x-1} = f(x) \checkmark \end{cases}$$

۶۲

الف

اگر دامنه تابع را به یکی از دو فاصله $[0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0]$ محدود کنیم، آن گاه تابع مورد نظر یک به یک خواهد بود.



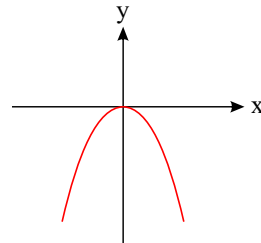
با توجه به نمودار

$$\text{حالت اول: } \begin{cases} f(x) = |x| \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = x \rightarrow y = x \rightarrow f^{-1}(x) = x$$

$$\text{حالت دوم: } \begin{cases} f(x) = |x| \\ x \leq 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = -x \rightarrow y = -x \rightarrow x = -y \rightarrow f^{-1}(x) = -x$$

ب

است که یک به یک نیست و با محدود کردن دامنه آن به یکی از دو فاصله $[0, +\infty)$ یا $(-\infty, 0]$



تابع $g(x) = -x^2$ که معرف سهمی

یک به یک و وارون پذیر می شود.

حالت اول:

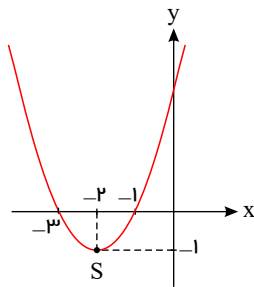
$$\begin{cases} g(x) = -x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \rightarrow y = -x^2 \rightarrow x^2 = -y \xrightarrow{\text{جزر}} |x| = \sqrt{-y} \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y} \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{-x}$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} g(x) = -x^2 \\ x \leq 0 \end{cases} \rightarrow y = -x^2 \rightarrow x^2 = -y \xrightarrow{\text{جزر}} |x| = \sqrt{-y} \xrightarrow{x \leq 0} x = -\sqrt{-y} \rightarrow g^{-1}(x) = -\sqrt{-x}$$

پ

داشته و در کل دامنه خود



سهمی $h(x) = x^2 + 4x + 3$ نیز که می شود آن را به صورت $h(x) = (x+2)^2 - 1$ نوشت نموداری به شکل

غیر یک به یک است.

حال اگر دامنه آن را از \mathbb{R} به $(-\infty, -2]$ یا $[-2, +\infty)$ محدود کنیم، آن گاه با یکی از دو شاخه سهمی مواجه بوده و تابعی یک به یک و وارون پذیر داریم:

حالت اول:

$$\begin{cases} h(x) = (x+2)^2 - 1 \\ D_h = [-2, +\infty) \end{cases} \rightarrow y = (x+2)^2 - 1 \rightarrow (x+2)^2 = y+1 \xrightarrow{\text{جزر}}$$

$$|x+2| = \sqrt{y+1} \xrightarrow{x+2 \geq 0} x+2 = \sqrt{y+1} \rightarrow x = \sqrt{y+1} - 2 \rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} h(x) = (x+2)^2 - 1 \\ D_h = (-\infty, -2] \end{cases} \rightarrow y = (x+2)^2 - 1 \rightarrow (x+2)^2 = y+1 \xrightarrow{\text{جزر}}$$

$$|x+2| = \sqrt{y+1} \xrightarrow{x+2 \leq 0} -(x+2) = \sqrt{y+1} \rightarrow x+2 = -\sqrt{y+1} \rightarrow x = -\sqrt{y+1} - 2 \rightarrow h^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} - 2$$

۶۳ باید معکوس هر کدام از ضابطه را در محدوده دامنه خودشان پیدا کنیم:

$$y = 4x - x^2 - 3 \Rightarrow -y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow -y = (x^2 - 4x + 4) - 1 \Rightarrow -y + 1 = (x-2)^2 \xrightarrow{x < 2} \sqrt{1-y} = |x-2| \rightarrow \sqrt{1-y} = -x+2$$

$$x = 2 - \sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = y = 2 - \sqrt{1-x}$$

$$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = y = x + 2$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{1-x} & , x < 1 \\ x + 2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع f^{-1} به صورت زیر خواهد بود:

اما همین طور که می دانیم دامنه f^{-1} برد تابع اصلی است پس باید برد را بیابیم:

دامنه ضابطه اول $\sqrt{1-y} = -x + 2 \Rightarrow 1-y > 0 \Rightarrow y < 1 \Rightarrow x < 1$ داشتیم

توجه کنید: از آنجا که در دامنه تابع اصلی $x < 2$ است عبارت $\sqrt{1-y}$ نمی تواند برابر با صفر شود.

برای محاسبه برد ضابطه دوم f ، کافی است روی شرط دامنه اش، ضابطه را بسازیم.

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

۶۴

نکته $0 \leq \sin^n u \leq 1$ و $0 \leq \cos^n u \leq 1$ زوج $n \rightarrow$

نکته $-1 \leq \sin^n u \leq 1$ و $-1 \leq \cos^n u \leq 1$ فرد $n \rightarrow$

الف) $f(x) = 2 \sin^2 x - 5$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 2} 0 \leq 2 \sin^2 x \leq 2 \Rightarrow 0 - 5 \leq 2 \sin^2 x - 5 \leq 2 - 5$$

$$\Rightarrow -5 \leq f(x) \leq -3 \Rightarrow \min f = -5 \text{ و } \max f = -3$$

ب) $g(x) = -3 \sin^2 2x + 10$

$$-1 \leq \sin^2 2x \leq 1 \xrightarrow{\times (-3)} 3 \geq -3 \sin^2 2x \geq -3 \Rightarrow -3 + 10 \leq -3 \sin^2 2x + 10 \leq 3 + 10$$

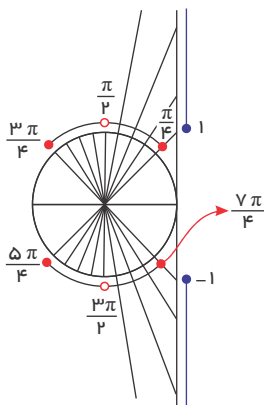
$$\Rightarrow 7 \leq g(x) \leq 13 \Rightarrow \min g = 7 \text{ و } \max g = 13$$

۶۵

$$f(x) = \sqrt{\tan^2 x - 1} \Rightarrow \tan^2 x - 1 \geq 0 \Rightarrow \tan^2 x \geq 1 \Rightarrow |\tan x| \geq 1$$

$$\Rightarrow \tan x \leq -1 \text{ یا } \tan x \geq 1$$

با توجه به دایره مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.



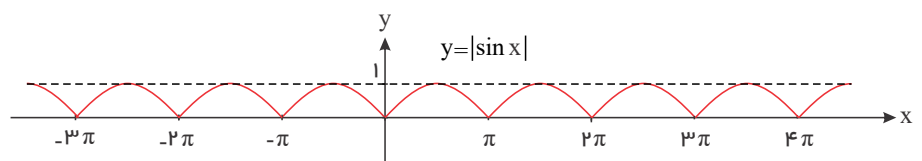
$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ یا } \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \text{ و } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{3\pi}{2}$$

در حالت کلی داریم:

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ یا } 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{4} \text{ و } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۶۶ الف) با رسم $y = \sin x$ و قرینه کردن قسمت های زیر محور طول ها نسبت به این محور خواهیم داشت:

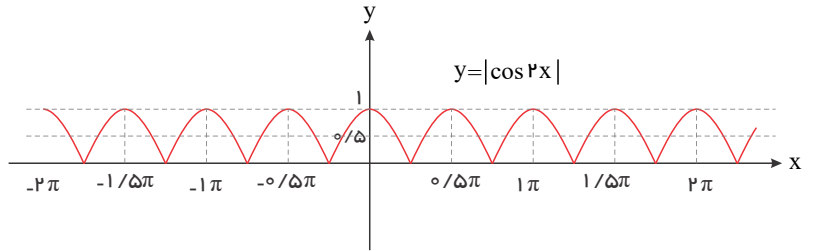
$$\begin{cases} T = \pi \\ \max = 1 \\ \min = 0 \end{cases}$$



ب) کافی است نمودار $y = \cos x$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{1}{2}$ ضرب کرده $(\cos 2x)$ و سپس نقاط با عرض منفی را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم $|\cos 2x|$ تا به نمودار زیر

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots \rightarrow y = 1 \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} T = \frac{\pi}{2} \\ \max = 1 \\ \min = 0 \end{cases}$$



۶۷

$$2T = \frac{2\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Rightarrow T = 2\pi \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \rightarrow b = \pm 1$$

$$c = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$|a| = \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \rightarrow a = -3$$

۶۸

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -\pi \leq \pi \cos 2x \leq \pi \Rightarrow -\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi \cos 2x - \frac{\pi}{2} \leq \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq \pi \cos 2x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = [\pi \cos 2x - \frac{\pi}{2}] = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

$$R_f = \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$$

۶۹

در تابع $y = a \cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \max = |a| + c, \min = -|a| + c$$

$$f(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{1}{3}x\right) - 1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

$$\max f = \sqrt{2} - 1, \min f = -\sqrt{2} - 1$$

$$\frac{\max f}{\min f} = \frac{\sqrt{2} - 1}{-\sqrt{2} - 1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 2 - 1 + \sqrt{2}}{2 - 1} = -3 + 2\sqrt{2}$$

۷۰

$$\frac{T}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \xrightarrow{b > 0} b = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + c = 4 \\ \min &= -|a| + c = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a < 0} a = -3$$

$$f(x) = -3 \sin x + 1$$

۷۱

$$\frac{T}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3} - 0 \Rightarrow T = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{4} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{3}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} \max f &= |a| + c = 5 \\ \min f &= -|a| + c = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \rightarrow |a| = \frac{7}{2} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{7}{2}$$

$$f(x) = \frac{7}{2} \cos\left(\frac{3}{4}x\right) + \frac{3}{2}$$

۷۲

تفاضل طول دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است، پس داریم:

$$\frac{T}{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{10\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{5} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{3}{5}$$

$$\left. \begin{aligned} \max f &= 0 \Rightarrow |a| + c = 0 \\ \min f &= -6 \Rightarrow -|a| + c = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = -6 \Rightarrow c = -3 \rightarrow |a| = 3$$

$$a < 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow f(x) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right) - 3$$

۷۳

در تابع $y = a \sin bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

$$f(x) = \sin(mx) + m \Rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = 4\pi \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2} \Rightarrow \max f = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۷۴

$$\frac{T}{4} = 1 \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = |a| + c = 6 \\ \min = -|a| + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a < 0} a = -3$$

$$f(x) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3$$

۷۵ تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است.

$$\frac{T}{2} = 3 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max f = |a| + c = 2 \\ \min f = -|a| + c = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 1$$

۷۶

نکته: $0 \leq \sin^n u \leq 1$ و $0 \leq \cos^n u \leq 1$ زوج $n \rightarrow$

نکته: $-1 \leq \sin^n u \leq 1$ و $-1 \leq \cos^n u \leq 1$ فرد $n \rightarrow$

الف) $f(x) = 3 \cos^2 2x - 6$

$$0 \leq \cos^2 2x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 3 \cos^2 2x \leq 3 \Rightarrow -6 \leq 3 \cos^2 2x - 6 \leq 3 - 6$$

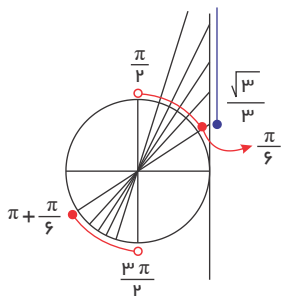
$$\Rightarrow -6 \leq f(x) \leq -3 \Rightarrow \min f = -6 \quad \text{و} \quad \max f = -3$$

ب) $g(x) = -\pi \cos^2 4x - \frac{\pi}{2}$

$$-1 \leq \cos^2 4x \leq 1 \xrightarrow{\times(-\pi)} \pi \geq -\pi \cos^2 4x \geq -\pi \Rightarrow -\pi - \frac{\pi}{2} \leq -\pi \cos^2 4x - \frac{\pi}{2} \leq \pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq g(x) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \min g = -\frac{3\pi}{2} \quad \text{و} \quad \max g = \frac{\pi}{2}$$

۷۷ در دایره مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها بزرگتر یا مساوی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، که داریم:



$$\tan \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{7\pi}{6} \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

۷۸

نکته: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < \tan \alpha$

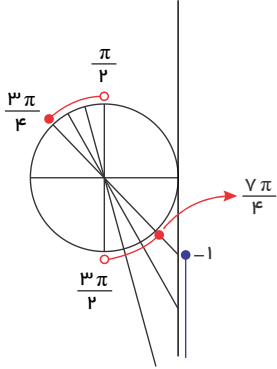
توجه کنید که در ناحیه اول سینوس و تانژانت هر دو مثبت هستند، پس داریم:

$$0 < \sin \alpha < 1 \Rightarrow 0 < 2m - 1 < 1 \Rightarrow 1 < 2m < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 1 \quad (1)$$

$$\tan \alpha > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \quad (2)$$

$$\sin \alpha < \tan \alpha \Rightarrow 2m - 1 < m + 1 \Rightarrow m < 2 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 1$$



۷۹ در دایره مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها کوچکتر یا مساوی -۱ است.

$$\tan \alpha \leq -1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{3\pi}{4} \quad \text{یا} \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha \leq \frac{7\pi}{4}$$

۸۰ الف

$$\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \tan \theta < +\infty \Rightarrow 4 + 2m \geq 0 \Rightarrow m \geq -2$$

ب

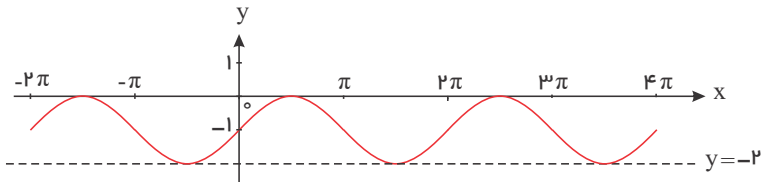
$$\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow -1 < \tan \theta < -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -1 < 2m - 1 < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < 2m < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

۸۱

الف

از نمودار تابع نتیجه می‌گیریم که دوره تناوب تابع برابر 2π است؛ یعنی داریم:

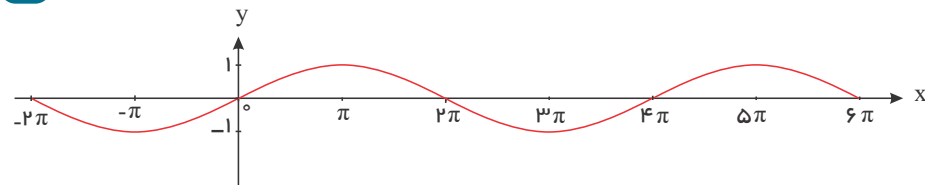


از روی نمودار معلوم می‌شود که $b = 1$ است (زیرا $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 0$) داریم:

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

$$x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow c = -1$$

ب



از روی نمودار واضح است که:

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

از شکل نمودار معلوم می‌شود که $b = +\frac{1}{2}$ است و داریم:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow c = 0$$

گزینه ۱، دوره تناوب $\tan x$ ، π هست پس دوره تناوب $f(x) = \tan\left(a\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ برابر است با $T = \frac{\pi}{|a\pi|} = \frac{1}{|a|}$ از روی نمودار هم دوره تناوب برابر است با $\frac{4}{3}$

بنابراین:

$$\frac{1}{|a|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |a| = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{3}{4}$$

رسم شده یعنی نزولی است پس $a = -\frac{3}{4}$ مورد قبول است.

به صورت

که چون تابع \tan

۸۳

$$T = \frac{\pi}{b} \quad f(x) = a \cos bx + c$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4$$

$$\max = 7 = |a| + c$$

$$\min = -5 = -|a| + c$$

$$c = \frac{7 + (-5)}{2} = 1 \Rightarrow 7 = |a| + 1 \Rightarrow |a| = 6$$

$$f(x) = 6 \cos 4x + 1$$

۸۴ می‌دانیم: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 \cos\left(\frac{5\pi}{8} - x\right) = 3 \Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{8} - x\right)\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8} + x\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 3 = 0, \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = t$$

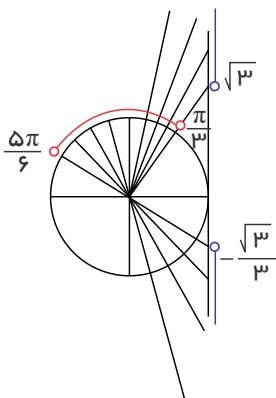
$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1, \quad t = -3$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = -3 \text{ غیق } \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8}$$

با توجه به دایره مثلثاتی مقابل داریم:

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{6}$$



$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan \alpha > \sqrt{3} \text{ یا } \tan \alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{3} > \sqrt{3} \text{ یا } \frac{2m-1}{3} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 2m-1 > 3\sqrt{3} \text{ یا } 2m-1 < -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow m > \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \text{ یا } m < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

۸۶

نکته: $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
طبق نکته فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

$$3 \sin x - 4 \sin^2 x + 2 \cos 2x = 2 \Rightarrow 3 \sin x - 4 \sin^2 x = 2 - 2 \cos 2x = 2(1 - \cos 2x) \quad (*)$$

$$\Rightarrow 3 \sin x - 4 \sin^2 x = 2 \times 2 \sin^2 x \Rightarrow 4 \sin^2 x + 4 \sin^2 x - 3 \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 1) \sin x = 0 = \sin(0) \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) 4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0 \Rightarrow (2 \sin x + 3)(2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-3}{2} \rightarrow \text{ناممکن است.} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

$$\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x = 0 \Rightarrow \sin^2 \pi x = -\cos^2 \pi x \Rightarrow \sin \pi x = -\cos \pi x$$

$$\Rightarrow \cos \pi x = -\sin \pi x \Rightarrow \cos \pi x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right) \Rightarrow \pi x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} + \pi x\right) \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \text{ جواب ندارد} \\ \pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \pi x \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k - \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v, u = 2k\pi + \pi - v$

$$\sin 3x + \sin 5x = 0 \Rightarrow \sin 5x = -\sin 3x = \sin(-3x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x = 2k\pi - 3x \Rightarrow 8x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \\ 5x = 2k\pi + \pi - (-3x) = 2k\pi + \pi + 3x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \cup x = \frac{k\pi}{4}$$

نکته: $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

$$\tan 4x = \cot\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right) \Rightarrow \tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)\right)$$

$$\Rightarrow \tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 4x$$

$$\Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{16}$$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{x}{2} = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \text{ نادرست} \\ \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ جواب} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \text{ جوابهای واقع در بازه } [0, 2\pi]$$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4} + \pi\right) \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \left(\frac{x}{4} + \pi\right)$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{x}{4} + \pi \Rightarrow x - \frac{x}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3x}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{4k\pi}{3} + \pi \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \boxed{x = \pi}$$

۸۷

۸۸

۸۹

۹۰

۹۱

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{x}{4} - \pi \Rightarrow \frac{5x}{4} = 2k\pi - \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{5\pi}{4}$$

$$x = \frac{8k\pi}{5} - \pi \xrightarrow{0 \leq x < \pi} x = \frac{8\pi}{5} - \pi = \frac{3\pi}{5} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{5}}$$

معادله در بازه $[0, \pi]$ دارای ۲ جواب است.

۹۲

نکته: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v$, $u = 2k\pi + \pi - v$

الف) $\sin 2x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2 \sin x + 3) = 0$

غ قی $\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$, $2 \sin x + 3 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{2}$

ب) $4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2 \times 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2 \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

$$\Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}}$$
 , $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = \boxed{2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v$, $u = 2k\pi + \pi - v$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$

الف) $2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2 \sin x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$
 , $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}} \\ \boxed{x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}} \end{cases}$

ب) $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

۹۴ نکته: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$

$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 3x = 0 \Rightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$4x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

۹۳

$$4x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$4x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 7x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} - \frac{3\pi}{28}$$

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + u, u = 2k\pi + \pi - v$

$$4 \sin^2 x - 2(\sqrt{2} + 1) \sin x + \sqrt{2} = 0, \sin x = t$$

$$4t^2 - 2(\sqrt{2} + 1)t + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\sqrt{2} + 1)^2 - 16\sqrt{2} = 4(2 + 1 + 2\sqrt{2}) - 16\sqrt{2}$$

$$\Delta = 12 + 8\sqrt{2} - 16\sqrt{2} = 12 - 8\sqrt{2} = 4(3 - 2\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$t = \frac{2(\sqrt{2} + 1) \pm 2(\sqrt{2} - 1)}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 2}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \frac{2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

نکته: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$

الف) $2 \cos^3 3x + \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x(2 \cos^2 3x + 1) = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0, \cos 3x = \frac{-1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ \cos 3x = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos 3x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

ب) $\sin \Delta x + \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\sin \Delta x \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)$

$$3x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \Delta x \Rightarrow -2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \Delta x \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

۹۷) نکته: $\tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

$$\tan^2 x - \tan^2 x + 1 - \tan x = 0 \Rightarrow \tan^2 x(\tan x - 1) - (\tan x - 1) = 0$$

$$(\tan x - 1)(\tan^2 x - 1) = 0 \Rightarrow (\tan x - 1)(\tan x - 1)(\tan x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\tan x - 1)^2(\tan x + 1) = 0 \Rightarrow \tan x = 1, \tan x = -1$$

$$\tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

۹۸

$$\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x + 1 - \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Delta = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sin x = \frac{1 \pm 2}{2} = \frac{3}{2}, \frac{-1}{2}$$

$$\sin x = \frac{3}{2} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} & (1) \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$(2) \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$$

۹۹ می‌دانیم: $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

با جای گذاری در معادله اصلی سؤال داریم:

$$2(1 - \cos^2 x) + 9 \cos x + 3 = 0 \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + 9 \cos x + 3 = 0 \Rightarrow -2\cos^2 x + 9 \cos x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4(-2)(5)}}{2(-2)} \Rightarrow \cos x = \frac{-9 \pm 11}{-4} \rightarrow \begin{cases} \cos x = 5 & \text{غرفق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} & \text{قق} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm 2\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

۱۰۰

نادرست - معادله را ساده‌تر می‌کنیم پس

الف

$$\sqrt{8} \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{4} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

k	۰	۱	-۱
x	$\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$	$2\pi + \frac{\pi}{3}$	$-2\pi + \frac{\pi}{3}$
	✓✓	X	✓
		$2\pi - \frac{\pi}{3}$	$-2\pi - \frac{\pi}{3}$
		X	✓

۱۰۱ با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

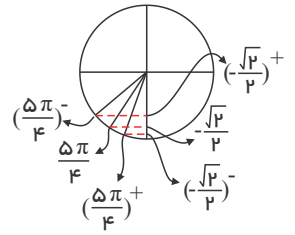
$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow (\frac{5\pi}{4})^-} \frac{x-1}{\sqrt{2} \sin x + 1} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon) + 1} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{-1 + \sqrt{2\varepsilon + 1}}$$

$$= \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{+\sqrt{2\varepsilon}} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow (\frac{5\pi}{4})^+} \frac{x-1}{\sqrt{2} \sin x + 1} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon) + 1} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{-1 - \sqrt{2\varepsilon + 1}}$$

$$= \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{-\sqrt{2\varepsilon}} = \frac{\frac{5\pi}{4} - 1}{0^-} = -\infty$$

پس تابع در این نقطه حد ندارد



توجه کنید که $1 - \frac{\Delta\pi}{4}$ عددی مثبت است.

با استفاده از تغییر متغیر داریم: **۱۰۲**

$$x \rightarrow \pi$$

$$x - \pi = t \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + t \\ t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{1 + \cos(\pi + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{1 - \cos t} \times \frac{1 + \cos t}{1 + \cos t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t(1 + \cos t)}{1 - \cos^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t(1 + \cos t)}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-(1 + \cos t)}{\sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 - \cos t}{\frac{\sin t}{t} \times t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1 - \cos t}{t} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 - \cos t}{t} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 - \cos t}{t} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

* با توجه به این نکته که وقتی $t \rightarrow 0$ میل کند، $\sin t \sim t$ داریم:

۱۰۳

با توجه به قاعده پرتوان داریم:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm \infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n + 3x^f - x^f + 1}{2x^n - x^f + 5} = \begin{cases} n < f \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^f}{-x^f} = -3 \\ n = f \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^f + 3x^f}{2x^f - x^f} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^f}{x^f} = 4 \\ n > f \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{2x^n} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۱۰۴ باید نامعادله $f(x) > 1000$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x) > 1000 \Rightarrow \frac{1}{x-3} > 1000 \xrightarrow{x>3} x-3 < \frac{1}{1000} \Rightarrow x < 3 + 0,001$$

$$\Rightarrow x < 3,001, x > 3 \Rightarrow 3 < x < 3,001$$

۱۰۵ باید نامعادله $f(x) < -1000$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x) < -1000 \Rightarrow \frac{1}{f-x} < -1000 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{1}{x-f} > 1000$$

$$\xrightarrow{x>f} x-f < \frac{1}{1000} \Rightarrow x < f + 0,001 \Rightarrow x < 4,001, x > f \Rightarrow f < x < 4,001$$

۱۰۶ باید نامعادله $f(x) < -10000$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x) < -10000 \Rightarrow \frac{1}{x+5} < -10000 \xrightarrow{x<-5} x+5 > -\frac{1}{10000}$$

$$\Rightarrow x > -5 - 0,0001 \Rightarrow x > -5,0001, x < -5 \Rightarrow -5,0001 < x < -5$$

۱۰۷

هر چه x به 2 از راست نزدیک تر می شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می کند.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

هر چه x به 1 از راست نزدیک تر می شود، مقادیر $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می کند.

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$

با نزدیک تر شدن x به ۱ از چپ مقادیر $f(x)$ به 2^- میل می کنند پس داریم:

ج) $\lim_{x \rightarrow 1^-} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

با نزدیک تر شدن x به ۰ از چپ مقادیر $f(x)$ به 1^- میل می کنند پس داریم:

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(x)) = f((-1)^-) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$

۱۰۸

با نزدیک تر شدن x به ۱ از چپ و چپ از راست، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می کند. پس داریم:

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

با نزدیک تر شدن مقادیر x به 2^- از چپ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می کند.

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty$

هرچه x به 1^- نزدیک تر می شود، مقادیر $f(x)$ به سمت 2^+ میل می کنند. پس داریم:

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} fof(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(f(x)) = f((-2)^+) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty$

حد صورت عددی منفی است و چون در هر دو حالت $x \rightarrow (-3)^+$ و $x \rightarrow (-3)^-$ حاصل حد برابر $-\infty$ است، پس $x = -3$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد.

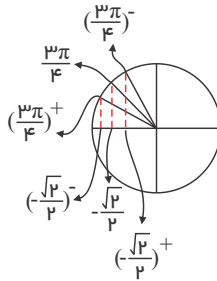
$x^2 + mx + n = 0 \Rightarrow$ ریشه مضاعف $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} = -3 \Rightarrow m = 6$

$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4n = 0 \Rightarrow 36 - 4n = 0 \Rightarrow n = 9$

روش دوم: چون ضریب x^2 در عبارت $x^2 + mx + n$ برابر یک است. یعنی این عبارت همان $(x + 3)^2$ است، پس داریم:

$x^2 + mx + n = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow m = 6, n = 9$

۱۱۰ با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:



$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} \frac{1-x}{\sqrt{r \cos x + 1}} = \frac{1 - \frac{3\pi}{4}}{\sqrt{r \cos \frac{3\pi}{4} + 1}} = \frac{1 - \frac{3\pi}{4}}{\sqrt{r(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 1}} = \frac{1 - \frac{3\pi}{4}}{-1 + \sqrt{r\varepsilon + 1}} = \frac{1 - \frac{3\pi}{4}}{0^+} = -\infty \\ \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} \frac{1-x}{\sqrt{r \cos x + 1}} = \frac{1 - \frac{3\pi}{4}}{\sqrt{r \cos \frac{3\pi}{4} + 1}} = \frac{1 - \frac{3\pi}{4}}{\sqrt{r(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - \varepsilon + 1}} = \frac{1 - \frac{3\pi}{4}}{-1 - \sqrt{r\varepsilon + 1}} = \frac{1 - \frac{3\pi}{4}}{0^-} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

توجه کنید که $1 - \frac{3\pi}{4}$ عددی منفی است.

۱۱۱ هرچه x به 1^- از چپ نزدیک تر می شود، $f(x)$ به $+\infty$ میل می کند پس:

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\frac{-1}{f(x)} \right] = \left[\frac{-1}{+\infty} \right] = [0^-] = -1$

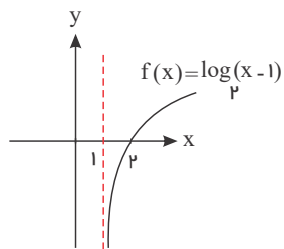
هرچه x به ۱ از نزدیک تر می شود، $f(x)$ به $+\infty$ میل می کند پس:

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{-1}{f(x)} \right] = \left[\frac{-1}{+\infty} \right] = [0^-] = -1$

هرچه x به 1^- از راست نزدیک تر می شود، $f(x)$ به $-\infty$ میل می کند پس:

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{x}{f(x)} \right] = \left[\frac{-1}{-\infty} \right] = [0^+] = 0$

۱۱۲ با رسم نمودار تابع $f(x) = \log_p(x-1)$ داریم:

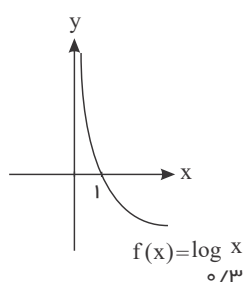


با توجه به اینکه هرچه x به سمت ۱ از راست نزدیک‌تر می‌شود، $f(x)$ به $-\infty$ میل می‌کند، داریم:

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \log_p(x-1) = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+2}{f(x)} \right) = \frac{1+2}{-\infty} = \frac{3}{-\infty} = 0$

۱۱۳ با رسم نمودار تابع $f(x) = \log_{o,p} x$ داریم:

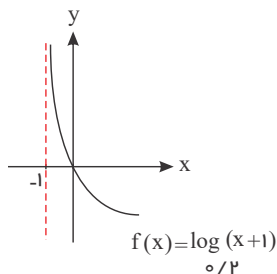


$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{o,p} x = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x+2}{f(x)} \right] = \left[\frac{2}{+\infty} \right] = [0^+] = 0$

۱۱۴ با رسم نمودار تابع $f(x) = \log_{o,p}^{(x+1)}$ داریم:

با توجه به نمودار هرچه x از راست به -1 نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کنند.



$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_{o,p}^{(x+1)} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{x-2}{f(x)} \right] = \left[\frac{-1-2}{+\infty} \right] = \left[\frac{-3}{+\infty} \right] = [0^-] = -1$

۱۱۵

الف)

$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos 3x}{\tan x} = \frac{[1^-]}{0^+} = \frac{0}{0^+} = 0$

دقت کنید $\cos 3\pi = 1$ است و در مسائل حدی هرکجا سینوس و کسینوس یک شوند منظور 1^- است و $\tan \pi = 0$ است و π^+ در ناحیه سوم است و در این ناحیه، تانژانت مثبت است یعنی $\tan \pi^+ = 0^+$ است.

ب)

$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{[\cos \pi^+]}{\cos(\frac{\pi}{2})^+} = \frac{[(-1)^+]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

توجه کنید که $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ است و $(\frac{\pi}{2})^+$ در ناحیه دوم است و در این ناحیه کسینوس منفی است یعنی $\cos(\frac{\pi}{2})^+ = 0^-$ است و دقت کنید در مسائل حدی هرگاه سینوس و کسینوس (-1) شدند منظور $(-1)^+$ است.

پ)

$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{0}{0}$ مبهم

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\text{پس: } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 + 1}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

ناحیه اول

$$\text{ت} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-6)(2x-7)(4x+1)}{17x^3+5} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x)(2x)(4x)}{17x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x^3}{17x^3} = \frac{8}{17}$$

$$\text{ث} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+2)^2 + (x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 4 + 4x + x^2 + 4 - 4x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2 + 2}{2x^2 + 8} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2}{2x^2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{الف} \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \left[\frac{x+1}{\tan x} \right] = \left[\frac{-\frac{\pi}{2} + 1}{+\infty} \right] = [0^-] = -1$$

$$\text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \left[\frac{2-x}{\tan x} \right] = \left[\frac{2 - (-\frac{\pi}{2})}{-\infty} \right] = \left[\frac{2 + \frac{\pi}{2}}{-\infty} \right] = [0^-] = -1$$

$$\text{الف} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(\frac{\sin x}{x} \times x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

$$\text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2\sin^2(\frac{x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 2x}{2x} \times 2x}{2(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \times \frac{x}{2})}$$

با توجه به اینکه $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ داریم:

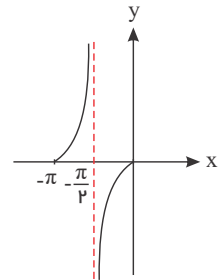
نکته وقتی $x \rightarrow 0$ میل کند، $\sin x \sim x$ پس داریم:

با توجه به $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$ داریم:

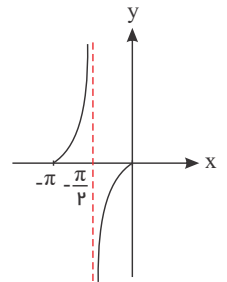
نکته وقتی $x \rightarrow 0$ میل کند، $\sin x \sim x$ پس داریم:

۱۱۶

با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ داریم:



با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ داریم:



۱۱۷

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2 \times \frac{x^2}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

118

با تجزیه صورت تابع داریم:

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{(x-3)^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x-3}$$

حد چپ = $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+4}{x-3} = \frac{3+4}{3-\varepsilon-3} = \frac{7}{0^-} = -\infty$

حد راست = $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+4}{x-3} = \frac{3+4}{3+\varepsilon-3} = \frac{7}{0^+} = +\infty \rightarrow$ پس تابع در این نقطه حد ندارد

با تجزیه صورت و مخرج تابع داریم:

ب

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+2}$$

حد چپ = $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-2-2}{-2-\varepsilon+2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

حد راست = $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-2-2}{-2+\varepsilon+2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

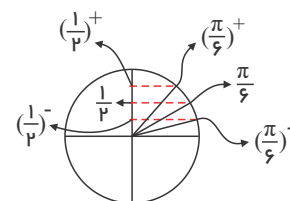
\Rightarrow پس تابع در این نقطه حد ندارد

119

با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

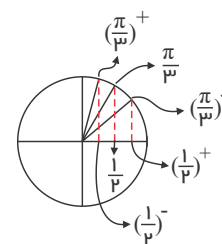
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{2(\frac{1}{2} - \varepsilon) - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - 2\varepsilon - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2\varepsilon} = \frac{\sqrt{3}}{0^-} = -\infty \\ \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^+} \frac{\cos x}{2 \sin x - 1} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{2(\frac{1}{2} + \varepsilon) - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\varepsilon - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



ب با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{1 - \sin x}{2 \cos x - 1} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{3}}{2(\frac{1}{2} + \varepsilon) - 1} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{+2\varepsilon} = +\infty \\ \text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{1 - \sin x}{2 \cos x - 1} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{3}}{2(\frac{1}{2} - \varepsilon) - 1} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-2\varepsilon} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

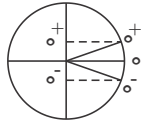


۱۲۰

با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

الف

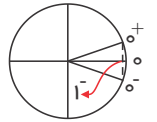
$$\left. \begin{aligned} \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+3}{\sin x} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+3}{\sin x} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



ب

با توجه به دایره مثلثاتی زیر اگر x از هر دو طرف به صفر میل کند، مقادیر $\cos x$ از پایین به یک میل می کنند و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{1-\cos x} = \frac{1-0}{1-(1-\varepsilon)} = \frac{1}{+\varepsilon} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



۱۲۱

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 4^+} [-x] = -5$ داریم:

الف

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x + [-x]}{x - 4} = \frac{8 + [-(4 + \varepsilon)]}{4 + \varepsilon - 4} = \frac{8 + [-4 - \varepsilon]}{+\varepsilon} = \frac{8 + (-5)}{0^+} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

ب

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 3^-} [2x] = 5$ و همچنین وقتی x به ۳ از چپ نزدیک تر می شود، مقادیر x^2 از پایین به ۹ میل می کنند، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[2x] - 7}{9 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[2x] - 7}{(3-x)(3+x)} = \frac{[2(3-\varepsilon)] - 7}{(3 - (3-\varepsilon)) \times 6} = \frac{[6 - 2\varepsilon] - 7}{+\varepsilon} \\ &= \frac{5 - 7}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

۱۲۲

حد چپ و راست تابع را در $x \rightarrow 3$ با تجزیه کسر بررسی می کنیم.

الف

$$\left. \begin{aligned} \text{حد چپ} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} &= \frac{3+2}{(3-\varepsilon-3) \times 6} = \frac{5}{-\varepsilon} = \frac{5}{0^-} = -\infty \\ \text{حد راست} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{(x-3)(x+3)} &= \frac{3+2}{(3+\varepsilon-3) \times 6} = \frac{5}{+\varepsilon} = \frac{5}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{تابع در این نقطه حد ندارد}$$

ب

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2)^2 = 0$ و $(x+2)^2 \geq 0$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x+2)^2} = \frac{-2-1}{(-2 \pm \varepsilon + 2)^2} = \frac{-3}{(\pm\varepsilon)^2} = \frac{-3}{+\varepsilon^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

۱۲۳ با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \rightarrow \pm\infty$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^m - (x-1)^m + x^m + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^m - x^m + 3x^m - 3x + 1 + x^m + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m-1)x^m + 4x^m - 3x + 3) = +\infty$$

۱ حالت $m = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^1 - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^1 = 4(-\infty)^1 = 4(+\infty) = +\infty$ قابل قبول

۲ حالت $m \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m-1)x^m + 4x^m - 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (m-1)x^m = (m-1)(-\infty)^m$

$$\Rightarrow (m-1)(-\infty) = +\infty \Rightarrow m-1 < 0 \Rightarrow m < 1$$

در کل باید $m \leq 1$ باشد.

۱۲۴ با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \rightarrow \pm\infty$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^m + 3x^m + 3x + 1 + mx^m - 4x^m + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^m - x^m + 3x + 3) = +\infty$$

$$1 \text{ حالت } m = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^m + 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^m)$$

$$= -(-\infty)^m = -(+\infty) = -\infty \text{ غیر قابل قبول}$$

$$2 \text{ حالت } m \neq -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^m - x^m + 3x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (m+1)x^m$$

$$\Rightarrow (m+1)(-\infty)^m = (m+1)(-\infty) = +\infty \Rightarrow m+1 < 0 \Rightarrow m < -1$$

۱۲۵

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} mx^m + x^m + 4x + 4 - 7x = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^m - 3x + 4) = +\infty$$

$$1 \text{ حالت } m = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = -3(-\infty) = +\infty \text{ قابل قبول است.}$$

$$2 \text{ حالت } m \neq -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} ((m+1)x^m - 3x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (m+1)x^m = (m+1)(-\infty)^m$$

$$\Rightarrow (m+1)(+\infty) = +\infty \Rightarrow m+1 > 0 \Rightarrow m > -1$$

در کل باید $m \geq -1$ باشد.۱۲۶ با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^n + mx^m + x^m - 1}{4x^m + x^m - 3} = -2$$

$$1 \text{ حالت } n < m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^m}{4x^m} = \frac{m}{4} = -2 \Rightarrow m = -8 \Rightarrow n < m, m = -8 \text{ جواب}$$

$$2 \text{ حالت } n = m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^m + mx^m}{4x^m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2+m)x^m}{4x^m} = \frac{2+m}{4} = -2$$

$$\Rightarrow 2+m = -8 \Rightarrow m = -10 \Rightarrow n = m, m = -10 \text{ جواب}$$

$$3 \text{ حالت } n > m \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^n}{4x^m} = \pm\infty \rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

$$127 \text{ می دانیم } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x+1}{x-2} = -2 \text{ ، حال باید ببینیم } \frac{-2x+1}{x-2} \text{ چگونه به } -2 \text{ میل می کند. برای این کار } -2 \text{ برابر مخرج را در صورت ایجاد می کنیم.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2x+1}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2x+4-3}{x-2} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2(x-2)}{x-2} + \frac{-3}{x-2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-2 + \frac{-3}{x-2} \right]$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2 + \frac{-3}{x-2} \right] = \left[-2 + \frac{-3}{+\infty} \right] = [-2 + 0^-] = [-2 - \varepsilon] = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-2 + \frac{-3}{x-2} \right] = \left[-2 + \frac{-3}{-\infty} \right] = [-2 + 0^+] = [-2 + \varepsilon] = -2 \end{cases}$$

۱۲۸

$$128 \text{ می دانیم } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x+2} = 3 \text{ ، حال باید ببینیم کسر } \frac{3x+1}{x+2} \text{ چگونه به } 3 \text{ میل می کند. برای این کار } 3 \text{ برابر مخرج را در صورت ایجاد می کنیم.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x+1}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x+6-5}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3(x+2)}{x+2} - \frac{5}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3 - \frac{5}{x+2} \right]$$

$$= \left[3 - \frac{5}{+\infty} \right] = [3 - 0^+] = [3 - \varepsilon] = 2$$

$$129 \text{ می دانیم } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 \text{ ، حال باید ببینیم کسر } \frac{x+2}{x-1} \text{ چگونه به } 1 \text{ میل می کند. برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می کنیم.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x+2}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1+3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 + \frac{3}{x-1} \right]$$

$$= \left[1 + \frac{3}{-\infty} \right] = [1 + 0^-] = [1 - \varepsilon] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$$

ناچاریم هر دو حالت $x \rightarrow -\infty$ و $x \rightarrow +\infty$ را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)} = \frac{4}{3}$$

حالت دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 4}{ax^2 - x + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{ax^2} = \frac{-1}{a} = -1 \Rightarrow a = 1$$

پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(x-2)(x+2)}{x^2 - x + 2} = \frac{0}{\infty} = 0$$

۱۳۰ فاصله $f(x)$ تا خط $y = 1$ برابر با $|f(x) - 1|$ است، پس باید نامعادله $|f(x) - 1| < \frac{1}{1000}$ را حل کنیم، که داریم:

$$\left| \frac{x-3}{x+1} - 1 \right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \left| \frac{x-3-x-1}{x+1} \right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{4}{|x+1|} < \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \frac{|x+1|}{4} > 1000 \Rightarrow |x+1| > 4000 \Rightarrow x+1 < -4000 \text{ یا } x+1 > 4000$$

$$\Rightarrow x < -4001 \text{ یا } x > 3999 \Rightarrow x \in (-\infty, -4001) \cup (3999, +\infty)$$

۱۳۱ با توجه به این که حاصل حد عدد ۵ شده و بزرگترین درجهٔ منفرجه برابر ۴ است، پس باید بزرگترین درجهٔ صورت هم برابر ۴ باشد، داریم:

$$n = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^4 - 2x^3 + 1}{3x^4 + x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^4}{3x^4} = \frac{m}{3} = 5 \Rightarrow m = 15$$

۱۳۲ با توجه به اینکه $x \rightarrow +\infty$ میل می کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعدهٔ پرتوان خواهیم داشت:

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm\infty \quad ax^n \text{ قاعدهٔ پرتوان}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{|2x-3|}^{\text{منفی}} + mx}{\underbrace{m|x+2|}_{\text{منفی}} + 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(2x-3) + mx}{-m(x+2) + 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 3 + mx}{-mx - 2m + 4x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(m-2)x}{(-m+4)x} = \frac{m-2}{4-m} = -3 \Rightarrow m-2 = -12 + 3m \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$$

۱۳۳ با توجه به داده های مسئله داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} \right]$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = -2 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\frac{-2}{+\infty} \right] = [0^-] = -1$$

همچنین:

الف)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(4x+3)^2 + (3x-1)^2}{(5x+1)^2} \xrightarrow{\text{توان بیشتر}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{16x^2 + 9x^2}{25x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{25x^2}{25x^2} = 1$$

۱۳۴

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 - x}}{\sqrt{25x^2 + 9} + x} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2} + \sqrt{4x^2}}{\sqrt{25x^2} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9|x|} + \sqrt{4|x|}}{\sqrt{25|x|} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x - 2x}{-5x + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{-4x} = \frac{5}{4}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - \sqrt{4x^2 + 1}}{7x + \sqrt{9x^2 + 8}} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - \sqrt{4x^2}}{7x + \sqrt{9x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 2|x|}{7x + 3|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 2x}{7x - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{4x} = \frac{8}{4} = 2$$

ت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{2x + 17}} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ث

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - 17}{\sqrt{x^3 + 2}} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = 1$$

الف

با توجه به اینکه وقتی $x \rightarrow +\infty$ می‌رود، $3x - 1$ عددی مثبت است و همچنین با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x}}{\underbrace{|3x - 1|}_{\text{مثبت}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

ب

با توجه به قاعده پرتوان: $an^n + bx^{n-1} + \dots \sim \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{4x^2 + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x - \sqrt{x^2}}{\sqrt{4x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x - |x|}{2|x| + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - |x|}{2|x| + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - x}{2x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{3x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - |x|}{2|x| + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - (-x)}{2(-x) + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{-x} = -5$$

الف

با توجه به اینکه $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلقها را بررسی کرده و با استفاده از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm \infty ax^n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\underbrace{|3x - 1|}_{\text{مثبت}} - x}{\underbrace{|2 - x|}_{\text{منفی}} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1 - x}{-(2 - x) + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

ب

با توجه به اینکه $x \rightarrow -\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلقها را بررسی کرده و با استفاده از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \sim \pm \infty ax^n$

۱۳۵

۱۳۶

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{|3x+2|}^{\text{منفی}} + x}{\underbrace{|5-x|}^{\text{مثبت}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(3x+2) + x}{5 - x + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x - 2 + x}{5 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

۱۳۷

الف

با توجه به اینکه $x \rightarrow +\infty$ میل می کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

$$قاعده پرتوان: ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{2x - |x+2|}^{\text{مثبت}}}{\underbrace{|x-3|}^{\text{مثبت}} + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - (x+2)}{x - 3 + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x - 2}{5x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$$

ب

با توجه به اینکه $x \rightarrow -\infty$ میل می کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعده پرتوان خواهیم داشت:

$$قاعده پرتوان: ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{|2x-1|}^{\text{منفی}} - 3x}{\underbrace{4x - |x-2|}^{\text{منفی}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(2x-1) - 3x}{4x + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 1}{5x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{5x} = -1$$

۱۳۸

الف

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r(x+1)^s + x^f}{(2x-1)^r(x^r+1)^r} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r \times x^s}{(2x)^r \times (x^r)^r} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^y}{\lambda x^y \times x^f} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^y}{\lambda x^y} = \frac{1}{\lambda}$$

ب

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x}+1)^r(x^r+2)^r}{(2-x)^s} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})^r(x^r)^r}{(-x)^s} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \times x^r}{-x^s} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\delta}}{-x^{\delta}} = -1$$

۱۳۹

الف

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x^r + x^r + 4}{x^s + x^r - 9x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x^r}{x^s} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6}{x^r} = \frac{-6}{(\pm\infty)^r} = \frac{-6}{+\infty} = 0$$

ب

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^r - x^r + x^r}{-3x^r + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r + 3x^r + 3x + 1 - x^r + x^r}{-3x^r + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^r + 3x + 1}{-3x^r + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^r}{-3x^r} = -\frac{4}{3}$$

۱۴۰

الف

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^s - 2x^r - 4}{x^r + 3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^s}{x^r} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^y = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^y = (+\infty)^y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^y = (-\infty)^y = -\infty \end{cases}$$

ب

با توجه به قاعده پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{\sim} \pm \infty ax^n$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x^f + 7x^r + 9}{2x^f - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-6x^f}{2x^f} = -3$$

۱۴۱

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^r}}, f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^r}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^r}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^r}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

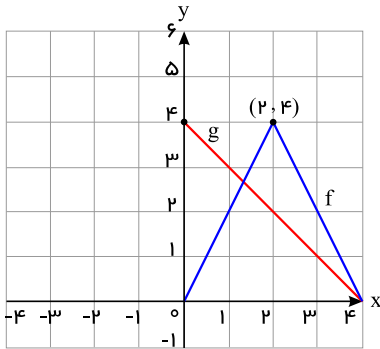
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

۱۴۲

الف) توابع f و g توابع خطی هستند و باید ضابطه آنها را بیابیم. برای تابع f باید خط گذرنده از نقاط $(0, 0)$ و $(2, 4)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(2, 4)$ و $(4, 0)$ را بیابیم.



$$(0, 0), (2, 4) \Rightarrow m = \frac{4-0}{2-0} = 2 \Rightarrow y-0 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x$$

$$(2, 4), (4, 0) \Rightarrow m = \frac{0-4}{4-2} = -2 \Rightarrow y-0 = -2(x-4) \Rightarrow y = -2x + 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x + 8 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

برای یافتن تابع g باید خط گذرنده از نقاط $(0, 4)$ و $(4, 0)$ را بیابیم.

$$(0, 4), (4, 0) \Rightarrow m = \frac{0-4}{4-0} = -1 \Rightarrow y-0 = -1(x-4) \Rightarrow y = -x + 4 \Rightarrow g(x) = -x + 4$$

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$f(1) = 2, 0 < x < 2 \Rightarrow f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

$$g(1) = 3, g(x) = -x + 4 \Rightarrow g'(x) = -1 \Rightarrow g'(1) = -1$$

$$h'(1) = f'(1) \cdot g(1) + g'(1) \cdot f(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 6 - 2 = 4$$

تابع f در $x = 2$ مشتق ناپذیر است زیرا:

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x + 8 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

چون $f'(2)$ موجود نیست بنابراین $h'(2)$ نیز وجود ندارد.

$$f(3) = 2, f'(3) = -2, g(3) = 1, g'(3) = -1$$

$$h'(3) = f'(3) \cdot g(3) + g'(3) \cdot f(3) = -2 \times 1 + (-1) \times 2 = -4$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

$$k'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

$$k'(1) = \frac{2 \times 3 - (-1) \times 2}{3^2} = \frac{6 + 2}{9} = \frac{8}{9}$$

$$k'(3) = \frac{f'(3)g(3) - g'(3)f(3)}{g^2(3)} = \frac{(-2) \times 1 - (-1) \times 2}{1^2} = \frac{-2 + 2}{1} = 0$$

چون $f'(2)$ موجود نیست پس $k'(2)$ هم وجود ندارد.

گزینه ۲، ۱۴۳

$$4f(a) = 2 \Rightarrow f(a) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, f'(a) = 2$$

$$(f^2(x) + \frac{1}{f(x)})' = 2f(x)f'(x) - \frac{f'(x)}{f^2(x)} \stackrel{x=a}{=} 2f(a)f'(a) - \frac{f'(a)}{f^2(a)} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2 - \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 2 - 8 = -6$$

۱۴۴

الف

$$g'(x) = \frac{4 \times 2 \times (2x-1)^2(x^2+8) - 2x^2(2x-1)^4}{(x^2+8)^2}$$

ب

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

۱۴۵

الف

$$f'(x) = (\frac{1}{\sqrt{x}})(x^2 - 2x) + (4x^2 - 2)(2\sqrt{x} + 1)$$

ب

$$g'(x) = \frac{2(x^5 - x + 1) - (5x^4 - 1)(2x + 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$$

۱۴۶

$$y + 5x = 8 \Rightarrow y = -5x + 8 \Rightarrow \text{شیب} = -5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \text{شیب خط مماس بر منحنی داده شده} \Rightarrow \frac{1}{5} = \text{شیب خط عمود}$$

$$y = \frac{2x+3}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{2(1-x) - (-1)(2x+3)}{(1-x)^2} = \frac{2-2x+2x+3}{(1-x)^2}$$

$$y' = \frac{5}{(1-x)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow (1-x)^2 = 25 \Rightarrow 1-x = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$x = -4 \Rightarrow y = \frac{2(-4)+3}{1-(-4)} = \frac{-5}{5} = -1 \Rightarrow A(-4, -1)$$

$$x = 6 \Rightarrow y = \frac{2 \times 6 + 3}{1-6} = \frac{15}{-5} = -3 \Rightarrow B(6, -3)$$

۱۴۷

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2} \text{ و } x_0 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2x+1}{x+2} + 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1+x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{1} = 3$$

شیب خط مماس: $\frac{3}{x+2}$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = 3(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 2 = 3$$

معادله خط مماس: $y = 3x + 2 = 3$

۱۴۸

$$f'(x) = -2x + 6 \Rightarrow f'(2) = 2$$

$$d: (2, 3), (a, 0) : 2 = \frac{0 - 3}{a - 2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۱۴۹

$$g(x) = x^r + 1 \Rightarrow g'(x) = r x^{r-1}$$

$$(f \circ g)(x) = x^r + r \xrightarrow{\text{مشتق}} (f \circ g)'(x) = r x \Rightarrow g'(x) \cdot f'(g(x)) = r x$$

$$r x^r \times f'(x^r + 1) = r x \xrightarrow{x=1} r f'(2) = -r \Rightarrow f'(2) = -\frac{r}{2}$$

$$f(x) = \frac{x^r}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{r x(x+1) - x^r}{(x+1)^2} = \frac{x^r + r x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(r x + r)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^r + r x)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)((r x + r)(x+1) - 2(x^r + r x))}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(r x + r)(x+1) - 2(x^r + r x)}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{r \times 2 - 2 \times r}{2^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۱۵۰

$$f(x) = \sqrt{|x+2|}, f(-2) = 0$$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{|x+2|} - 0}{x+2} \times \frac{\sqrt{|x+2|}}{\sqrt{|x+2|}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{(x+2)\sqrt{|x+2|}}$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-(x+2)}{(x+2)\sqrt{|x+2|}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-1}{\sqrt{|x+2|}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{(x+2)\sqrt{|x+2|}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{\sqrt{|x+2|}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

تابع در $x = -2$ مشتق ناپذیر است.

۱۵۱

الف

$$f(x) = x\sqrt{x^r - rx + r} = x\sqrt{(x-r)^r} = x|x-r|$$

تابع $f(x)$ در $x_0 = 2$ پیوسته است. (حد راست = حد چپ = مقدار تابع = ۰)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x|x-2| - \overset{0}{f(2)}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overset{0}{x|x-2|}}{x-2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\overset{+}{x|x-2|}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2 \\ f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\overset{-}{x|x-2|}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x) = -2 \end{cases}$$

پس تابع در $x_0 = 2$ مشتق ناپذیر است.

ب

تابع $f(x)$ در $x_0 = 0$ پیوسته است. (حد راست = حد چپ = مقدار تابع = ۰)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^r}} - \overset{0}{f(0)}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^r}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^r}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^r}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 1 + x^r}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^r}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{x}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^r}}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(\circ^+) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\overbrace{x}^+}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f'(\circ^-) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\overbrace{x}^-}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

پس تابع در $x_0 = 0$ مشتق ناپذیر است.

تابع $f(x)$ در $x_0 = -3$ پیوسته است. (حد راست = حد چپ = مقدار تابع = 0)

ب

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|x+3|} - \overbrace{f(-3)}^0}{x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|x+3|}}{x+3} \times \frac{\sqrt{|x+3|}}{\sqrt{|x+3|}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+3|}{(x+3)\sqrt{|x+3|}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(-3^+) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{\overbrace{|x+3|}^+}{(x+3)\sqrt{|x+3|}} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{(x+3)}{(x+3)\sqrt{|x+3|}} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{1}{\sqrt{|x+3|}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = +\infty \\ f'(-3^-) = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{\overbrace{|x+3|}^-}{(x+3)\sqrt{|x+3|}} = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{-(x+3)}{(x+3)\sqrt{|x+3|}} = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{-1}{\sqrt{|x+3|}} = \frac{-1}{\sqrt{0^+}} = -\infty \end{cases}$$

پس تابع در $x_0 = -3$ مشتق ناپذیر است.

تابع f در کل \mathbb{R} پیوسته است. (۱۵۳)

$$f(x) = 2x^2 - |x|$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & x \geq 0 \\ 2x^2 + x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x > 0 \\ 4x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = 4 \times 0 + 1 = 1, \quad f'_+(0) = 4 \times 0 - 1 = -1 \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0)$$

$x = 0$ بحرانی است زیرا مشتق ناپذیر است.

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{بحرانی است} \Rightarrow \text{قابل قبول}$$

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) = 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{بحرانی است} \Rightarrow \text{قابل قبول}$$

تابع سه نقطه بحرانی $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$ دارد.

(۱۵۴)

$$f(x) = x^2 + |x+1| = \begin{cases} x^2 + x + 1 & x \geq -1 \\ x^2 - x - 1 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > -1 \\ 2x - 1 & x < -1 \end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقطه $x = -1$ به دست آوریم.

$$f'_+(-1) = -1$$

$$f'_-(-1) = -3$$

بنابراین در نقطه $x = -1$ مشتق پذیر نیست از طرفی ریشه f' نقطه $x = -\frac{1}{2}$ و نقاط بحرانی تابع اند با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه به سادگی مینیمم مطلق

مشخص می شود.

$$f(-1) = 1 \rightarrow \text{مینیمم مطلق}$$

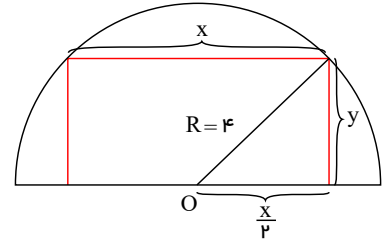
$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$f(-2) = 4 + 1 = 5$$

$$f(2) = 4 + 3 = 7 \rightarrow \text{ماکزیمم مطلق}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 16$$

$$y^2 = 16 - \frac{x^2}{4} = \frac{64 - x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2}$$



$$S = xy = x \times \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - x^4}$$

$$y^2 \geq 0 \Rightarrow 16 - \frac{x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} \leq 16 \Rightarrow x^2 \leq 64 \Rightarrow -8 \leq x \leq 8 \quad (1)$$

$$x \geq 0 \xrightarrow{(1)} 0 \leq x \leq 8 \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{64x^2 - x^4} \quad \text{دامنه} = [0, 8]$$

$$S'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{128x - 4x^3}{2\sqrt{64x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 128x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(32 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \pm 4\sqrt{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow S(0) = 0, x = 4\sqrt{2} \Rightarrow S(4\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{64 \times 32 - 256 \times 4} = 16$$

$$x = 8 \Rightarrow S(8) = 0, \text{ مقدار ماکزیم مساحت} = 16$$

به ازای $x = 4\sqrt{2}$ ، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را دارد. پس داریم:

$$x = 4\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64 - 32} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

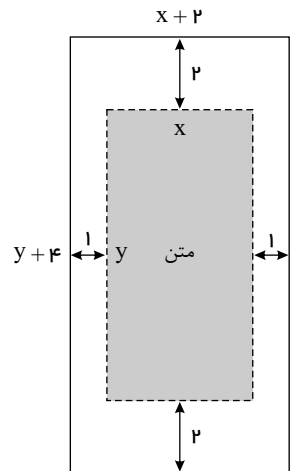
$$S = (x+2)(y+4) = xy + 4x + 2y + 8: \text{دومتغیره}$$

$$\text{مساحت متن} = 32 \rightarrow xy = 32 \rightarrow y = \frac{32}{x}$$

$$\text{پس: } S = x\left(\frac{32}{x}\right) + 4x + 2\left(\frac{32}{x}\right) + 8 = 32 + 4x + \frac{64}{x} + 8$$

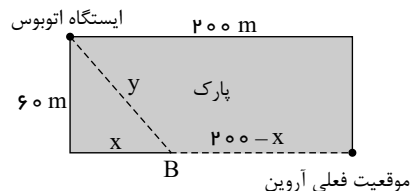
$$= 40 + 4x + \frac{64}{x} \xrightarrow{S'=0} 4 - \frac{64}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{64}{x^2} = 4 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4 \xrightarrow{y=\frac{32}{x}} y = 8$$



بنابراین ابعاد صفحه باید ۶ و ۱۲ باشد

شکل مسئله بدین صورت است.



موقعیت فعلی آروین

$$t_1 = \frac{200 - x}{3}$$

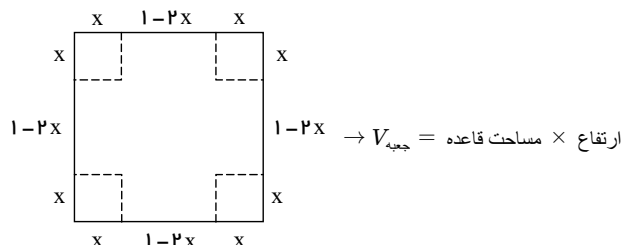
$$t_2 = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3600 + x^2}}{2}$$

$$\text{یک متغیره: } t = t_1 + t_2 = \frac{200}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{3600 + x^2}$$

$$t' = 0 \rightarrow \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{3600+x^2}} = 0 \rightarrow \frac{x}{2\sqrt{3600+x^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow 3x = 2\sqrt{3600+x^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9x = 4(3600+x^2)$$

$$\rightarrow 5x^2 = 14400 \rightarrow x^2 = 2880 \rightarrow x = \sqrt{2^6 \times 3^2 \times 5} = 24\sqrt{5}$$



$$V = (1-2x)^2 \cdot x = (1+4x^2-4x)x = 4x^3 - 4x^2 + x$$

$$\xrightarrow{\text{مشق}} 12x^2 - 8x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16} \begin{cases} x = \frac{8+4}{24} = \frac{1}{2} \text{ غ قی} \\ x = \frac{8-4}{24} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$D = MA - MB$$

$$D = \sqrt{(x-1)^2 + 25} - \sqrt{(x-7)^2 + 4}$$

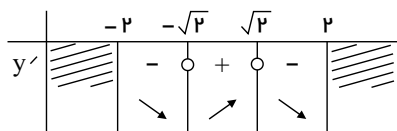
$$D' = \frac{y'(x-1)}{y'\sqrt{(x-1)^2 + 25}} - \frac{y'(x-7)}{y'\sqrt{(x-7)^2 + 4}}$$

$$D' = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 25}} = \frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2 + 4}} \Rightarrow (x-1)\sqrt{(x-7)^2 + 4} = (x-7)\sqrt{(x-1)^2 + 25}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-1)^2(x-7)^2 + 4(x-1)^2 = (x-7)^2(x-1)^2 + 25(x+7)^2 \Rightarrow 2|x-1| = 5|x-7| \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = 5x-35 \Rightarrow x = 11 \\ 2x-2 = -5x+35 \Rightarrow x = \frac{37}{7} \end{cases}$$

$$h = \frac{300}{r^2} \quad S = \frac{1800}{r} + 3r^2 \quad S' = \frac{-1800}{r^2} + 6r = 0$$

$$r = \sqrt[3]{300} \Rightarrow h = \sqrt[3]{300}$$



۱۶۱ برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$ ، مشتق اول آن را تعیین علامت می‌کنیم.

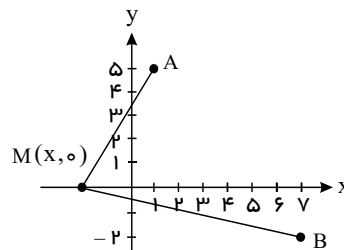
$$y = x\sqrt{4-x^2}$$

$$4-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 4 \rightarrow |x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \rightarrow D = [-2, 2]$$

$$y' = \sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \times x$$

$$\rightarrow y' = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \rightarrow 2x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

تابع در بازه $[\sqrt{2}, 2]$ صعودی است و در بازه‌های $[-2, -\sqrt{2}]$ و $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ نزولی است.



$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

اکیداً صعودی $(-\infty, -3], [3, +\infty)$

x	-3	3
$f'(x)$	$+$	$-$

$$f(0) = 0, \text{ حد چپ } = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 3x^2) = 0, \text{ حد راست } = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) = 0$$

تابع در $x = 0$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x & x < 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2 \\ 2x - 6 & x > 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = 0, f'_+(0) = 0 - 6 = -6 \Rightarrow f'_-(0) \neq f'_+(0) \Rightarrow x = 0 \text{ مشتق ناپذیر}$$

نقاط بحرانی عبارتند از: $x = 3, x = -2, x = 0$

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
		\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 12 = 4, x = 3 \Rightarrow f(3) = 9 - 18 = -9$$

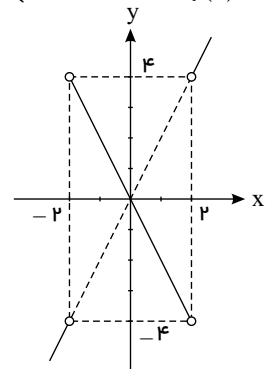
نقطه $(-2, 4)$ ماکزیمم نسبی و نقطه $(3, -9)$ مینیمم نسبی است.

$$f'(2) = 0 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \rightarrow d = 5$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x^2 - 4$		$+$	0	$+$

$$\begin{cases} x < -2 \rightarrow f(x) = x^2 - 4 \\ -2 \leq x \leq 2 \rightarrow f(x) = -x^2 + 4 \\ x > 2 \rightarrow f(x) = x^2 - 4 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -2 \\ -2x & -2 < x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$$



تابع در $x = 2$ و $x = -2$ (ریشه‌های غیرمکرر داخل قدرمطلق) مشتق ناپذیر است.

تابع در $x = 2$ و $x = 0$ (ریشه‌های غیرمکرر داخل قدرمطلق) مشتق ناپذیر است بدین علت:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x(x-2)| - \overbrace{f(0)}^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x(x-2)|}{x}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x(x-2)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x(x-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -(x-2) = 2 \\ f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x(x-2)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2) = -2 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x_0 = 0$ مشتق ناپذیر است.

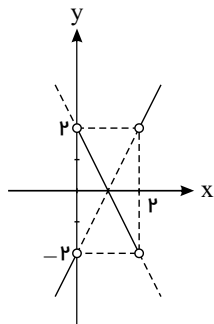
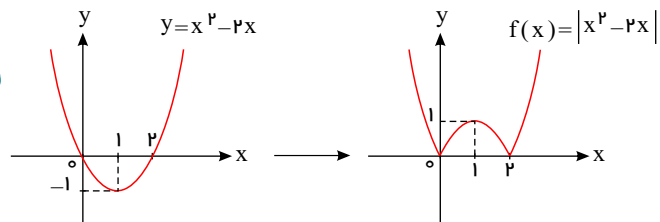
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x(x-2)| - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x(x-2)|}{x-2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x(x-2)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2 \\ f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x(x-2)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x = -2 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x_0 = 2$ مشتق ناپذیر است.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$		$+$	0	$+$

$$\begin{cases} x < 0 & \rightarrow f(x) = x^2 - 2x \\ 0 \leq x \leq 2 & \rightarrow f(x) = -x^2 + 2x \\ x > 2 & \rightarrow f(x) = x^2 - 2x \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x < 0 \\ -2x + 2 & 0 < x < 2 \\ 2x - 2 & x > 2 \end{cases}$$



و نمودار f' به صورت مقابل است:

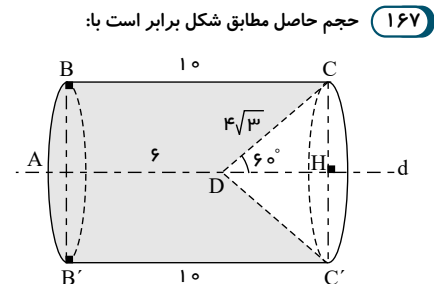
$$\triangle DHC : CH = \sin 60^\circ \times DC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6$$

$$DH = \cos 60^\circ \times DC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}}$$

$$V = \pi \times 6^2 \times 10 - \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 2\sqrt{3} = 360\pi - 24\sqrt{3}\pi$$

نکته: حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع h برابر $\pi r^2 h$ و حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h برابر $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ است.

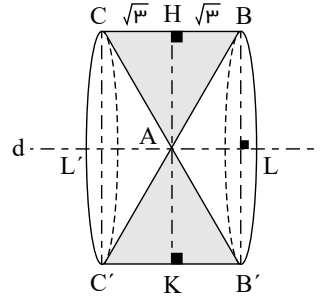


حجم حاصل استوانه‌ای خالی از دو مخروط می‌باشد. ۱۶۸

$$AH = \sin 60^\circ \times AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$$

$$\Rightarrow BL = B'L = CL = C'L = 3$$

$$V = V_{\text{مخروط}} - 2 \times V_{\text{استوانه}}$$



$$V = \pi \times 3^2 \times 6 - 2 \times \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 3 = 18\sqrt{3}\pi - 6\sqrt{3}\pi$$

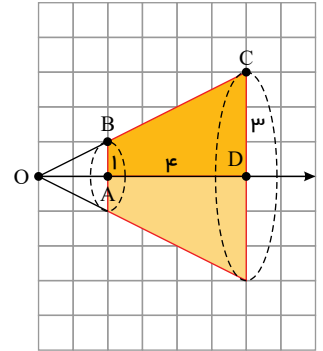
$$\Rightarrow V = 12\sqrt{3}\pi$$

نکته: حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع h برابر با $\pi r^2 h$ است و حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h برابر است با: $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

(الف) ۱۶۹

باید حجم یک مخروط ناقص (قسمت رنگی) را حساب کنیم. برای این کار ابتدا با قضیه تالس مقدار x را پیدا می‌کنیم:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2$$

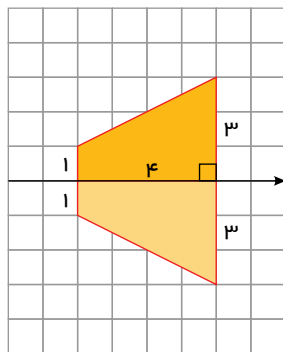


بنابراین:

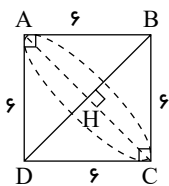
$$\left. \begin{aligned} \text{حجم مخروط بزرگ} &= \frac{1}{3} \pi (4)^2 (3) = 18\pi \\ \text{حجم مخروط کوچک} &= \frac{1}{3} \pi (1)^2 (3) = \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حجم مخروط ناقص} = 18\pi - \pi = \frac{54\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{53\pi}{3}$$

(ب)

یک دوزنقه به شکل روبه‌روست:



$$\Rightarrow \text{مساحت سطح مقطع} = \frac{(2+6) \times 4}{2} = 16$$



$$AC = BD = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow R = AH = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2} \quad \text{و} \quad h = BH = 3\sqrt{2}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

شکل حاصل، دو مخروط یکسان است که از قاعده به هم چسبیده‌اند پس داریم: ۱۷۰

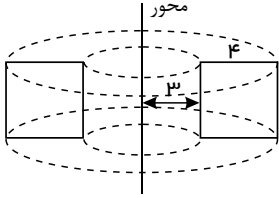
$$V = \frac{1}{3}\pi \times (3\sqrt{2})^2 \times (3\sqrt{2})$$

$$V = \frac{\pi \times 18 \times \cancel{3} \sqrt{2}}{\cancel{3}} \Rightarrow V = 18\pi\sqrt{2} \text{ واحد حجم}$$

پس حجم کل برابر است با:

$$\text{کل } V = 2 \times 18\pi\sqrt{2} = 36\pi\sqrt{2}$$

از دوران مربع مفروض حول محور، شکلی دیسک مانند حاصل می شود که برای یافتن حجم آن باید حجم استوانه بیرونی را یافته، سپس حجم استوانه درونی را از آن کم کنیم: (171)



$$\text{واحد حجم } V = \pi R^2 h \xrightarrow[h=4]{R=4+3=7} C = \pi \times 7^2 \times 4 \Rightarrow V = 196\pi$$

$$\text{واحد حجم } V = \pi R^2 h \xrightarrow[h=4]{R=3} D = \pi \times 3^2 \times 4 \Rightarrow V = 36\pi$$

$$\text{واحد حجم دیسک} = 196\pi - 36\pi = 160\pi$$

(172)

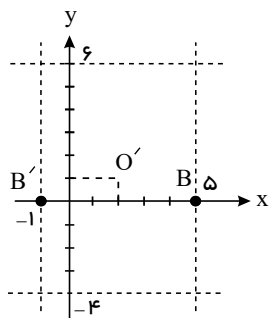
$$\text{تعریف بیضی: } MF + MF' = 2a \xrightarrow{\text{توان}} (MF)^2 + (MF')^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2$$

$$\triangle MFF': (FF')^2 = (MF)^2 + (MF')^2 \xrightarrow{\text{توان}} (FF')^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2$$

$$\xrightarrow{FF'=2c} 4c^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2 \Rightarrow 2MF \cdot MF' = 4a^2 - 4c^2$$

$$\rightarrow MF \cdot MF' = 2a^2 - 2c^2 = 2(a^2 - c^2) \rightarrow MF \cdot MF' = 2b^2$$

بیضی قائم است، چون اندازه قطر عمودی اش 10 واحد (10 = -4 - 6) اما اندازه قطر افقی اش 6 واحد می باشد (6 = -1 - 5). (173)



از طرفی می دانیم، O' مرکز بیضی وسط B و B' و نیز A و A' است پس داریم:

$$x_{O'} = \frac{x_B + x_{B'}}{2} = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{مرکز دایره و بیضی } O(-1, 0) \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x = 8 \quad (174)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 0^2 - 4(-8)} = \frac{1}{2}\sqrt{36} \Rightarrow R = 3 \Rightarrow 2R = 6$$

$$\text{طول قطر دایره: } 2R = 6 \Rightarrow AA' = 6 + 2 = 8 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$BB' = 6 - 2 = 4 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

فاصله کانونی بیضی: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3} \Rightarrow FF' = 2c = 4\sqrt{3}$ از طرفی

از آنجا که بیضی افقی است داریم:

$$A \begin{vmatrix} \alpha + a \\ \beta \end{vmatrix} \Rightarrow A \begin{vmatrix} -1 + 4 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$A' \begin{vmatrix} \alpha - a \\ \beta \end{vmatrix} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} -1 - 4 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} -5 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F \begin{vmatrix} \alpha + c \\ \beta \end{vmatrix} \Rightarrow F \begin{vmatrix} -1 + 2\sqrt{3} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$F' \begin{vmatrix} \alpha - c \\ \beta \end{vmatrix} \Rightarrow F' \begin{vmatrix} -1 - 2\sqrt{3} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$B \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + b \end{vmatrix} \Rightarrow B \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$B' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - b \end{vmatrix} \Rightarrow B' \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

خروج از مرکز بیضی:

$$AA' = 2a \rightarrow 2a = 4 - (-4) \rightarrow 2a = 8 \rightarrow a = 4$$

طبق فرض: $2b = \frac{3}{4}2c \rightarrow b = \frac{3}{4}c \rightarrow 3c = 4b \rightarrow c = \frac{4}{3}b$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow \frac{16}{9}b^2 = 16 - b^2 \rightarrow \frac{25}{9}b^2 = 16$$

$$\rightarrow 25b^2 = 9 \times 16 \rightarrow b^2 = \frac{9 \times 16}{25} \rightarrow b = \frac{3 \times 4}{5} \rightarrow b = \frac{12}{5}$$

$$\rightarrow 2b = \frac{24}{5}$$

قطر کوچک

$$c = \frac{4}{3}b$$

$$\rightarrow c = \frac{4}{3} \left(\frac{12}{5} \right) \rightarrow c = \frac{16}{5} \rightarrow 2c = \frac{32}{5}$$

فاصله کانونی

$$\text{از طرفی: } e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

۱۷۵

۱۷۶

توجه کنید که $OA' = a$ و $OB = b$ و $AF = a - c$ است.

$$S_{\triangle A'OB} = 3S_{\triangle BAF} \rightarrow \frac{1}{2}OB \cdot OA' = 3 \times \frac{1}{2}OB \cdot AF$$

$$\rightarrow OA' = 3AF \rightarrow a = 3(a - c) \rightarrow a = 3a - 3c \rightarrow 2a = 3c \rightarrow a = \frac{3}{2}c$$

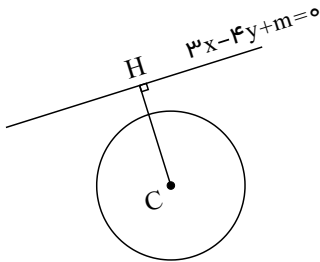
$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{c}{\frac{3}{2}c} \rightarrow e = \frac{2}{3}$$

$$\text{طول قطر کوچک} = 4 \rightarrow 2b = 4 \rightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c^2 = \frac{9}{4}c^2 - 4 \rightarrow 4 = \frac{5}{4}c^2 \rightarrow 5c^2 = 16$$

$$\rightarrow c^2 = \frac{16}{5} \rightarrow c = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{a = \frac{3}{2}c} a = \frac{3}{2} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\rightarrow \text{قطر بزرگ} = 2a = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$



$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 1 = 0$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow C \left(1, 2 \right), R = 2$$

$$CH = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 2 + m|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3 - 8 + m|}{5} = \frac{|m - 5|}{5} > R$$

$$\Rightarrow \frac{|m - 5|}{5} > 2 \Rightarrow |m - 5| > 10 \Rightarrow m - 5 < -10 \text{ یا } m - 5 > 10$$

$$\Rightarrow m < -5 \text{ یا } m > 15$$

$$C: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$$

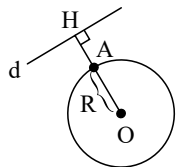
$$d: 3x + 4y = 15$$

ابتدا باید شعاع دایره و فاصله مرکز دایره را از خط بیابیم تا وضعیت خط و دایره مشخص شود:

$$O(1, -2) \Rightarrow D = \frac{|3(1) + 4(-2) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-20|}{5} \Rightarrow D = \frac{20}{5} = 4$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(-4)} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{36} \Rightarrow R = 3$$

چون فاصله مرکز دایره از خط d بیشتر از طول شعاع دایره است پس خط و دایره یکدیگر را قطع نمی کنند.



$$AH = OH - OA = 4 - 3 = 1$$

از طرفی با توجه به شکل، فاصله نزدیک ترین نقطه دایره تا خط d ، برابر است با:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \\ f'_y = 2y - 6 = 0 \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow C \begin{cases} 2: \alpha \\ 3: \beta \end{cases}$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 4 + 9 + 3 = 16 \rightarrow R = 4$$

۱۷۷

باتوجه به شکل مقابل باید فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیش تر باشد.

۱۷۸

۱۷۹

$$C \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, C' \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} \rightarrow CC' = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

غقیق $4 - R' = 5 \rightarrow R' = -1$
 $4 - R' = 5 \rightarrow R' = 9$ شرط مماس داخل

پس: $\begin{cases} C' \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 81 \\ R' = 9 \end{cases}$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + 4 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \rightarrow C \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}, R = 3$$

از طرفی: $CC' = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

$$CC' = R + R' \Rightarrow 5 = 3 + R' \Rightarrow R' = 2 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-7)^2 = 4$$

غقیق $R' = 8$, $R' = -2$ $CC' = |R' - R| \Rightarrow |R' - 3| = 5 \Rightarrow R' - 3 = \pm 5 \Rightarrow R' = -2$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-7)^2 = 64$$

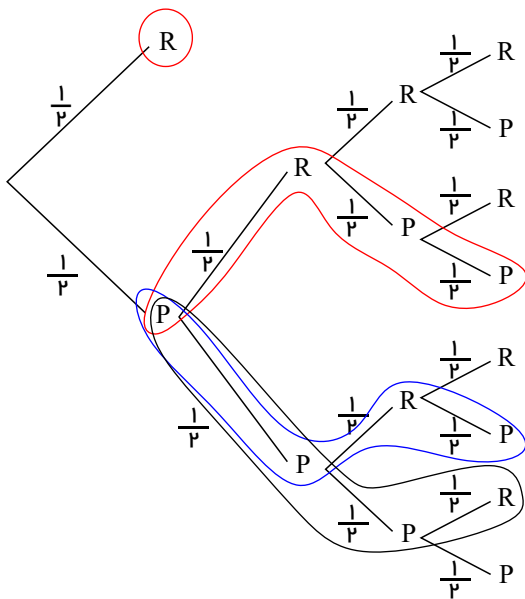
۱۸۰

اگر دو دایره مماس خارج باشند، داریم:

اگر دو دایره مماس داخل باشند، داریم:

۱۸۱

«رو» را با R و «پشت» را با P نشان می‌دهیم:



حالت مطلوب $R, PRPP, PPRP, PPPR$

$$\rightarrow \text{احتمال مطلوب} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

۱۸۲

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{ طرف ۱} \begin{cases} ۴ قرمز \\ ۲ آبی \end{cases} \rightarrow \text{دو توپ هم رنگ نباشد} = \frac{\binom{۴}{۱} \binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}} = \frac{۸}{۱۵} \\ & \frac{1}{2} \text{ طرف ۲} \begin{cases} ۵ قرمز \\ ۴ آبی \end{cases} \rightarrow \text{دو توپ هم رنگ نباشد} = \frac{\binom{۵}{۱} \binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹} \end{aligned}$$

$$P(\text{دو توپ هم رنگ نباشند}) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{۸}{۱۵} + \frac{۵}{۹} \right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{۲۴ + ۲۵}{۴۵} \right) = \frac{۴۹}{۹۰}$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \text{۴ معیوب} \\ \text{۲۰ سالم} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{۳ معیوب} \\ \text{۱۲ سالم} \end{matrix} \\ & \text{①} \quad \quad \quad \text{②} \\ & \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & \quad \quad \quad \begin{matrix} ۸ لامپ \\ ۶ لامپ \end{matrix} \\ & \quad \quad \quad \begin{cases} \frac{۸}{۱۴} \text{ باشد ① از طرف ①} \rightarrow \text{معیوب بودن در طرف ①} = \frac{۴}{۲۴} = \frac{1}{۶} \\ \frac{۶}{۱۴} \text{ باشد ② از طرف ②} \rightarrow \text{معیوب بودن در طرف ②} = \frac{۳}{۱۵} = \frac{1}{۵} \end{cases} \end{aligned}$$

$$P(\text{معیوب بودن}) = \frac{۴}{۷} \times \frac{1}{۶} + \frac{۳}{۷} \times \frac{1}{۵} = \frac{۲}{۲۱} + \frac{۳}{۳۵} = \frac{۱۰ + ۹}{۱۰۵} = \frac{۱۹}{۱۰۵}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \text{ طرف A} \begin{cases} \frac{\binom{۴}{۲} \binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}} \rightarrow \text{سفید} \\ \rightarrow \text{سیاه} \end{cases} \\ & \frac{1}{3} \text{ طرف B} \begin{cases} \rightarrow \text{سفید} \\ \rightarrow \text{سیاه} \end{cases} \\ & \frac{1}{3} \text{ طرف C} \begin{cases} \frac{\binom{۶}{۲} \binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}} \rightarrow \text{سفید} \\ \rightarrow \text{سیاه} \end{cases} \end{aligned}$$

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{1}{3} \times \frac{\binom{۴}{۲} \binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}} + ۲ \times \frac{1}{3} \times \frac{\binom{۶}{۲} \binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}$$

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{1}{3} \left(\frac{۶ \times ۱۰}{۹ \times ۲ \times ۷} + ۲ \times \frac{۱۵ \times ۳}{۹ \times ۲ \times ۷} \right)$$

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{1}{3} \left(\frac{۱۰}{۲۱} + \frac{۵}{۷} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{۱۰ + ۱۵}{۲۱} \right) = \frac{۲۵}{۶۳}$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} ۳ سفید \\ ۵ سیاه \end{matrix} \begin{cases} \frac{۳}{۸} \text{ مهره اول سفید} \rightarrow \begin{matrix} ۲ سفید \\ ۵ سیاه \end{matrix} \rightarrow \text{احتمال مهره سفید} = \frac{۲}{۷} \\ \frac{۵}{۸} \text{ مهره اول سیاه} \rightarrow \begin{matrix} ۳ سفید \\ ۴ سیاه \end{matrix} \rightarrow \text{احتمال مهره سفید} = \frac{۳}{۷} \end{cases} \end{aligned}$$

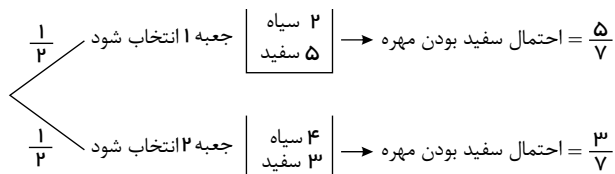
$$P(\text{سفید بودن مهره دوم}) = \frac{۳}{۸} \times \frac{۲}{۷} + \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۶ + ۱۵}{۵۶} = \frac{۲۱}{۵۶}$$

۱۸۳

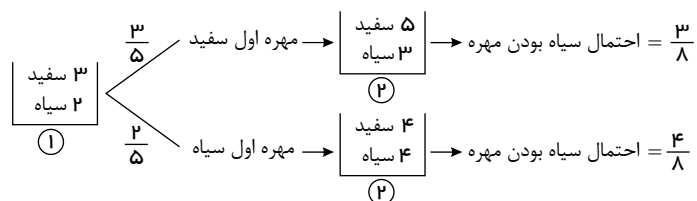
۱۸۴

۱۸۵

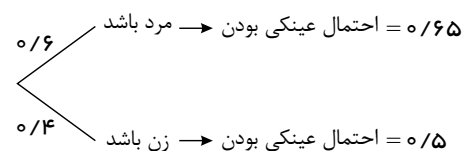
۱۸۶



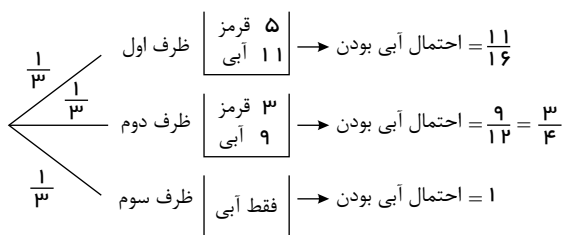
$$P(\text{سفید بودن مهره}) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$



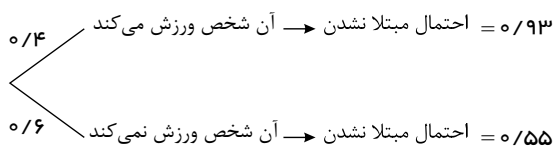
$$P(\text{سیاه بودن مهره}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{8} = \frac{9+8}{40} = \frac{17}{40}$$



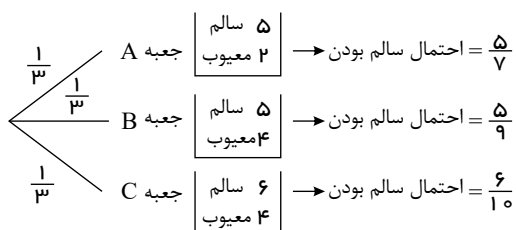
$$P(\text{عینکی بودن}) = 0/6 \times 0/65 + 0/4 \times 0/5 = 0/39 + 0/2 = 0/59$$



$$P(\text{آبی بودن}) = \frac{1}{3} \times \frac{11}{16} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{11}{48} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{11+12+16}{48} = \frac{39}{48}$$



$$P(\text{مبتلا شدن}) = 0/4 \times 0/93 + 0/6 \times 0/55 = 0/372 + 0/33 = 0/702$$



$$P(\text{سالم بودن لامپ}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} \right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{450 + 350 + 378}{630} \right) = \frac{1178}{1890}$$

۱۸۷

۱۸۸

۱۸۹

۱۹۰

۱۹۱

۱۹۲

$$\frac{2}{6} \begin{cases} \text{تاس زوج بزرگتر از ۳ بیاید} \rightarrow \text{ظرف ۱} \rightarrow \begin{cases} \text{آبی ۳} \\ \text{قرمز ۴} \end{cases} \rightarrow \text{احتمال قرمز} = \frac{4}{7} \\ \text{تاس زوج بزرگتر از ۳ نیاید} \rightarrow \text{ظرف ۲} \rightarrow \begin{cases} \text{آبی ۵} \\ \text{قرمز ۱} \end{cases} \rightarrow \text{احتمال قرمز} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$P(\text{قرمز بودن توپ}) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{21} + \frac{1}{9} = \frac{12+7}{63} = \frac{19}{63}$$

$$\begin{cases} \text{محصول دستگاه A باشد} \rightarrow \text{احتمال سالم بودن} = 0/9 \\ \text{محصول دستگاه B باشد} \rightarrow \text{احتمال سالم بودن} = 0/8 \\ \text{محصول دستگاه C باشد} \rightarrow \text{احتمال سالم بودن} = 0/8 \end{cases}$$

$$P(\text{سالم بودن}) = 0/3 \times 0/9 + 0/4 \times 0/8 + 0/3 \times 0/8 = 0/27 + 0/32 + 0/24 = 0/83$$

$$\begin{cases} \text{زن} \rightarrow \text{احتمال داشتن دفترچه سلامت} = 0/8 \\ \text{مرد} \rightarrow \text{احتمال داشتن دفترچه سلامت} = 0/7 \end{cases}$$

$$P(\text{داشتن دفترچه سلامت}) = 0/6 \times 0/8 + 0/4 \times 0/7 = 0/48 + 0/28 = 0/76$$

$$\frac{1}{3} \begin{cases} \text{ظرف ۱} \rightarrow \begin{cases} \text{سفید ۵} \\ \text{سیاه ۳} \end{cases} \rightarrow \text{احتمال سیاه} = \frac{3}{8} \\ \text{ظرف ۲} \rightarrow \begin{cases} \text{سفید ۵} \\ \text{سیاه ۳} \end{cases} \rightarrow \text{احتمال سیاه} = \frac{3}{8} \\ \text{ظرف ۳} \rightarrow \begin{cases} \text{سفید ۴} \\ \text{سیاه ۶} \end{cases} \rightarrow \text{احتمال سیاه} = \frac{6}{10} \end{cases}$$

$$P(\text{سیاه بودن}) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{15+21}{20} \right) = \frac{9}{20}$$

$$\frac{1}{2} \begin{cases} \text{تاس می ریزیم} \rightarrow \text{احتمال دقیقاً یک رو} = 1 \\ \text{تاس ۳ سکه می ریزیم} \rightarrow \text{احتمال دقیقاً یک رو} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$3 \text{ سکه می ریزیم} \Rightarrow (-, -, -) \Rightarrow n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

$$P(\text{دقیقاً یک رو}) = \left(\frac{1}{2} \times 1 \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \right) = \frac{8+3}{16} = \frac{11}{16}$$

$$\frac{1}{6} \begin{cases} \text{تاس ۶ بیاید} \rightarrow \text{تاس دوم را می ریزیم} \rightarrow \text{حد اقل یک سکه رو} = 0 \\ \text{تاس غیر از ۶ بیاید} \rightarrow \text{دو سکه می ریزیم} \rightarrow \text{حد اقل یک رو} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$2 \text{ سکه می ریزیم} \Rightarrow n(S) = 2^2 = 4$$

$$A = \{ (\text{رو، رو}), (\text{رو، پشت}), (\text{پشت، رو}) \} \Rightarrow \text{احتمال} = \frac{3}{4}$$

$$P(\text{حد اقل یک رو}) = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$

۱۹۳

۱۹۴

۱۹۵

۱۹۶

۱۹۷

$0/8$ → راننده زن باشد → احتمال رد کردن چراغ قرمز = $0/2$

$0/2$ → راننده مرد باشد → احتمال رد کردن چراغ قرمز = $0/3$

$$P(\text{رد کردن چراغ قرمز}) = 0.8 \times 0.2 + 0.2 \times 0.3 = 0.16 + 0.06 = 0.22$$

$3/5$ → واکسن زده باشد → احتمال انتقال بیماری = $0/01$

$2/5$ → واکسن نزده باشد → احتمال انتقال بیماری = $0/3$

$$P(\text{انتقال بیماری}) = \frac{3}{5} \times 0.01 + \frac{2}{5} \times 0.3 = 0.006 + 0.12 = 0.126$$

$1/2$ → جعبه ۱ → دو مهره آبی = $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$1/2$ → جعبه ۲ → دو مهره آبی = $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

$$P(\text{دو مهره آبی}) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{14 + 5}{35} \right) = \frac{19}{70}$$

ظرف ۱: $\frac{3}{5}$ سفید ۳، سیاه ۲ → طرف ۲: مهره اول سفید → سفید = $\frac{5}{6}$

ظرف ۱: $\frac{2}{5}$ سفید ۳، سیاه ۲ → طرف ۲: مهره اول سیاه → سفید = $\frac{4}{6}$

$$P(\text{سفید}) = \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{15 + 8}{30} = \frac{23}{30}$$