نام آزمون: ۲۰۰ تست هندسه یازدهم فصل دو

(رشته ریاضی)

آموزشگاه پرسا

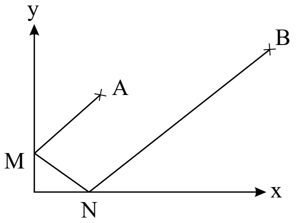
۱ در یک صفحه، دو دایره به شعاع‌های متفاوت در نقطهٔ A متقاطع‌اند. با استفاده از کدام تبدیل می‌توان از نقطهٔ A خطی گذراند که در این دو دایره، وترهای مساوی ایجاد کند؟

۱) انتقال
۲) دوران ۹۰ درجه
۳) بازتاب نسبت به خط
۴) بازتاب نسبت به نقطه

۲ با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می‌توان مربعی محاط کرد که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرند؟

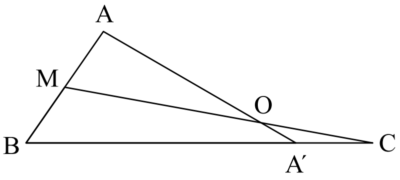
۱) دوران
۲) بازتاب
۳) انتقال
۴) تجانس

۳ نقاط $A\left|\begin{matrix}۳\\۵\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۹\\۱۱\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض هستند و دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کمترین اندازهٔ خط شکستهٔ $AMNB$، کدام است؟



۱) ۲۷
۲) ۲۴
۳) ۲۰
۴) ۱۸

۴ در شکل زیر، M وسط AB و $OM = ۲OC$ است. اگر A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس K باشد، مقدار K کدام است؟

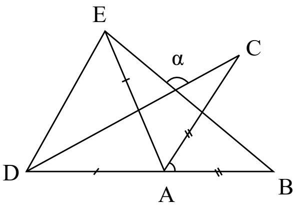


۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $-\frac{۱}{۵}$
۴) $-\frac{۱}{۶}$

۵ نقطهٔ A در صفحه دو خط متقاطع d و d' است. در رسم مثلث متساوی‌الاضلاع به رأس A، که دو رأس دیگر آن بر روی هر یک از دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

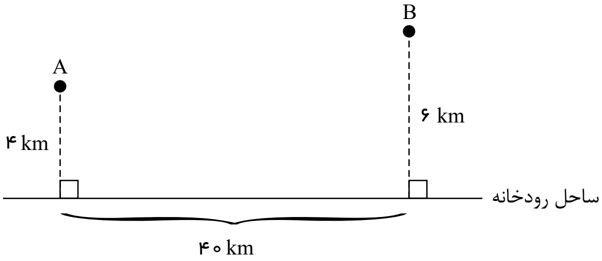
۱) انتقال
۲) بازتاب
۳) تجانس
۴) دوران

۶ در شکل مقابل، $AB = AC$، $AD = AE$، $\widehat{CAB} = ۵۰^\circ$ و $\widehat{AED} = ۶۵^\circ$ زاویهٔ α چند درجه است؟



۱) ۱۱۵°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۲۵°
۴) ۱۳۰°

۷ مطابق شکل دو شهر A و B مفروض‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به‌طوری که ۱۶ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟



۱) ۴۰
۲) ۴۲
۳) ۴۴
۴) ۴۶

۸ دو خط Δ و Δ' و نقطهٔ A خارج آنها مفروض هستند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی با رأس A که دو سر قاعدهٔ آن بر روی هر دو خط مفروض‌اند، کدام تبدیل به‌کار می‌رود؟

(۱) تجانس
(۲) دوران
(۳) بازتاب و تقارن
(۴) انتقال

۹ کدام تبدیل زیر در حالت کلی، نقطهٔ ثابت ندارد؟

(۱) دوران
(۲) انتقال
(۳) بازتاب
(۴) تجانس

۱۰ چهار نقطهٔ $A(۱,۱۰)$، $B(۹,-۹)$، $M(a,۴)$ و $N(a,۰)$ را در صفحهٔ مختصات، در نظر بگیرید. کمترین طول خط شکستهٔ $AMNB$، کدام است؟

(۱) ۲۱
(۲) ۲۰
(۳) ۱۹
(۴) ۱۸

۱۱ در دوران به مرکز O و زاویهٔ ۶۸° در صفحه، خط d و تبدیل‌یافته‌اش در P متقاطع‌اند. زاویهٔ OP با خط d کدام است؟

(۱) ۶۸°
(۲) ۵۶°
(۳) ۴۸°
(۴) ۲۲°

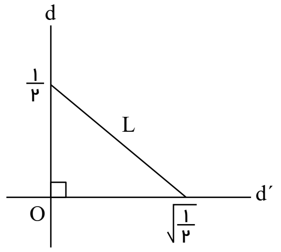
۱۲ دایرهٔ $C(O,a-۱)$ را با بردار انتقال $\overrightarrow{OO'}$ بر دایرهٔ $C'(O',۳-a)$ تصویر می‌کنیم. اگر اندازهٔ مماس مشترک داخلی این دو دایره برابر ۳ باشد، اندازهٔ مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

(۱) $\sqrt{۵}$
(۲) ۵
(۳) $\sqrt{۱۳}$
(۴) ۱۳

۱۳ در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $BC=۶$ و $\hat{B}=۱۵^\circ$ و AH ارتفاع وارد بر BC می‌باشد. اگر H' و H'' به‌ترتیب بازتاب یافتهٔ نقطهٔ H نسبت به AB و AC باشند، اندازهٔ $H'H''$ کدام است؟ $(\hat{A}=۹۰^\circ)$

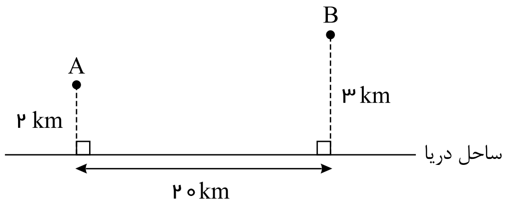
(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۴ در شکل زیر، اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\sqrt{\sqrt{۲}+۱}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم، آن‌گاه مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟



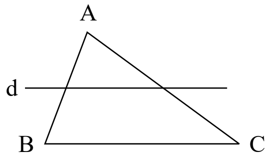
(۱) $\frac{۱}{۸}$
(۲) $\frac{۱}{۴}$
(۳) $\frac{۱}{۲}$
(۴) ۱

۱۵ مطابق شکل، می‌خواهیم بین دو شهر A و B جاده‌ای بسازیم به طوری که ۸ کیلومتر از این جاده کنار ساحل دریا ساخته شود. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده چند کیلومتر است؟



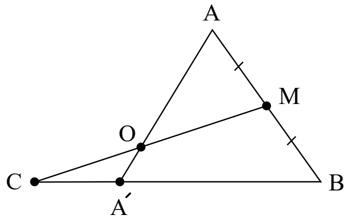
(۱) ۲۵
(۲) ۲۱
(۳) ۱۸
(۴) ۱۳

۱۶ مطابق شکل، مثلث ABC را نسبت به خط d که از وسط اضلاع AB و AC می‌گذرد، بازتاب می‌دهیم. اگر ناحیهٔ محصور بین ABC و تصویر آن ۶ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



(۱) ۱۶
(۲) ۱۰
(۳) ۸
(۴) ۱۲

۱۷ در شکل زیر، M وسط AB و $OM = ۳OC$ است. اگر A' تصویر A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، مقدار k کدام است؟



① $-\frac{۳}{۱۰}$
② $-\frac{۱}{۷}$
③ $-\frac{۲}{۵}$
④ $-\frac{۱}{۹}$

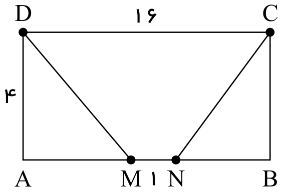
۱۸ نقطهٔ P روی ضلع AB از مربع $ABCD$ به‌گونه‌ای قرار دارد که $AP = ۵$ و $BP = ۷$ است. از بین مثلث‌هایی که دو رأس آن B و P و رأس دیگر آن روی قطر AC باشد، حداقل محیط ممکن کدام است؟

① ۱۶
② ۱۸
③ ۲۰
④ ۲۲

۱۹ O و O' مرکز دو دایره به شعاع ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اگر $OO' = ۱۲$ سانتی‌متر باشد، فاصلهٔ مرکز تجانس معکوس این دو دایره از مرکز دایره به شعاع بزرگ‌تر چند سانتی‌متر است؟

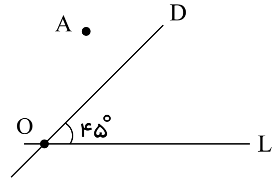
① ۷
② ۷٫۵
③ ۸
④ ۸٫۵

۲۰ در شکل، $ABCD$ مستطیل است و نقاط M و N به فاصلهٔ ۱ واحد از هم روی AB حرکت می‌کنند. کمترین مقدار محیط ذوزنقه $DCNM$ کدام است؟



① ۳۰
② ۳۲
③ ۳۴
④ ۳۶

۲۱ در شکل زیر، اگر $OA = ۱$ و نقطهٔ A را نسبت به خط D و سپس تصویر حاصل را نسبت به خط L بازتاب دهیم، فاصلهٔ A از تصویر نهایی آن کدام است؟



① ۲
② $\sqrt{۲}$
③ $۲\sqrt{۲}$
④ ۴

۲۲ پاره‌خط AB به طول ۶ با خط d غیرموازی و غیرقاطع بوده و امتداد پاره‌خط AB (از سمت A) خط d را در نقطهٔ P با زاویهٔ ۳۰° قطع می‌کند. در بازتاب نسبت به d، اگر $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ و $BB' = ۱۶$، نسبت $\frac{PA}{PB'}$ کدام است؟

① $\frac{۳}{۴}$
② $\frac{۳}{۸}$
③ $\frac{۵}{۸}$
④ $\frac{۵}{۱۶}$

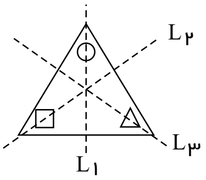
۲۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، $BC = ۶$ و $\hat{B} = ۵\hat{C}$ است. اگر مثلث $A'B'C'$ تبدیل یافتهٔ مثلث ABC تحت تبدیل طولپای T باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

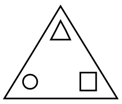
① $\frac{۹}{۲}$
② ۶
③ ۹
④ ۱۲

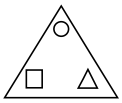
۲۴ در یک مثلث، دایرهٔ محاطی داخلی را با نسبت تجانس k و به مرکز T تجانس می‌دهیم تا بر دایرهٔ محیطی مثلث تصویر شود. اگر نقطهٔ ثابت این تبدیل، محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث باشد، اندازهٔ k کدام است؟

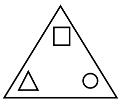
① ۱٫۵
② ۲
③ ۳
④ ۴

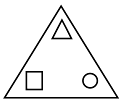
۲۵ اگر قرینهٔ شکل مقابل را به‌طور متوالی نسبت به محورهای $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ به‌دست آوریم، نتیجهٔ ترکیب این سه تقارن محوری کدام است؟



①


②


③


④


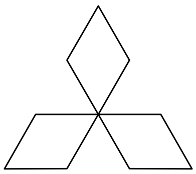
۲۶ مثلث $A'BC$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط گذرا از نقاط C و B و مثلث $A'B'C$ بازتاب مثلث $A'BC$ نسبت به خط گذرا از نقاط C و A' است. مثلث $A'B'C$ تصویر مثلث ABC تحت کدام تبدیل است؟

① دوران حول نقطه A و با زاویه $۲\hat{A}$
② دوران حول نقطهٔ C و با زاویهٔ $۲\hat{C}$
③ بازتاب نسبت به عمود منصف BC
④ بازتاب نسبت به نیمساز $B\hat{C}A'$

۲۷ کدام گزینه در مورد تبدیل، نادرست است؟

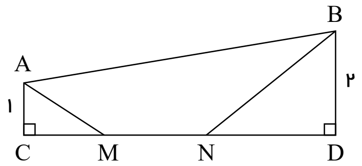
① بازتاب محوری، جهت شکل را حفظ نمی‌کند.
② دوران، جهت شکل را حفظ می‌کند.
③ انتقال لزوماً شیب خط را حفظ نمی‌کند.
④ تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

۲۸ در شکل زیر، طول تمامی پاره‌خط‌های کوچک برابر یک واحد و اندازهٔ تمامی زاویه‌های حاده برابر ۶۰ درجه است. می‌خواهیم با کمک تبدیل هندسی مناسب مساحت این شکل را بدون تغییر در محیط تا حد ممکن افزایش دهیم. نسبت مساحت شکل جدید به شکل اولیه چقدر است؟



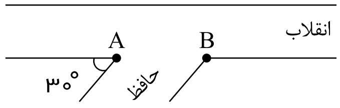
① ۲
② ۳
③ ۴
④ ۶

۲۹ با توجه به شکل مقابل، نقاط M و N روی CD (به طرف راست) چنان قرار دارند که همواره فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۴ باشد و $CD = ۸$. آنگاه کمترین مقدار $AM + MN + NB$ کدام است؟



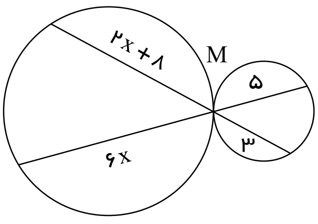
① ۸
② ۹
③ ۱۰
④ ۱۱

۳۰ شکل زیر، تقاطع دو خیابان انقلاب و حافظ به‌ترتیب با عرض‌های ثابت ۱۲ و ۵ را نشان می‌دهد. شخصی می‌خواهد از نقطهٔ A به سمت دیگر خیابان انقلاب رفته و سپس به نقطهٔ B برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن کدام است؟



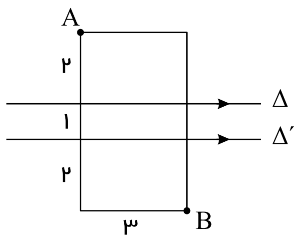
① ۲۳
② ۲۶
③ ۲۸
④ ۳۰

۳۱ در شکل زیر، دو دایره در نقطهٔ M برهم مماس‌اند. مقدار x کدام است؟



① ۳
② ۴
③ ۵
④ ۶

۳۲ در شکل مقابل، A و B دو رأس از مستطیل به ابعاد ۳ و ۵ هستند. در حرکت از A به B، اگر بخواهیم مسیر بین دو خط موازی Δ و Δ'، عمود بر آن دو باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن کدام است؟



① $۲+۳\sqrt{۲}$
② $۱+\sqrt{۳۴}$
③ ۷
④ ۶

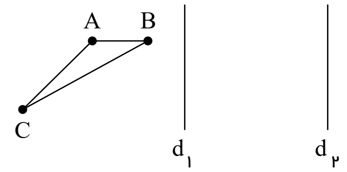
۳۳ اگر اوساط اضلاع مثلثی را به‌هم وصل کنیم، مثلثی حاصل می‌شود که با مثلث اصلی متجانس است. مرکز تجانس کدام است؟

① نقطه همرسی سه ارتفاع مثلث اصلی
② نقطه تلاقی سه میانه مثلث اصلی
③ نقطه همرسی سه نیمساز مثلث اصلی
④ نقطه تلاقی سه عمودمنصف مثلث اصلی

۳۴ مثلث قائم‌الزاویه ABC به طول وتر ۸ واحد مفروض است. این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AT}$ که در جهت بردار $\overrightarrow{AM}$ (M وسط وتر BC) قرار دارد، انتقال می‌دهیم. اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت اولیه باشد، اندازه بردار $\overrightarrow{AT}$، کدام است؟

① ۳
② ۴
③ $\frac{۱}{۳}$
④ $\frac{۱}{۴}$

۳۵ در شکل زیر، دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ به فاصلهٔ $۳cm$ ازهم قرار دارند. اگر مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC تحت بازتاب نسبت به $d_۱$ و $A''B''C''$ تصویر $A'B'C'$ تحت بازتاب نسبت به $d_۲$ باشد، کدام گزینه درست است؟



① $A''\overset{\triangle}{B''}C''$ انتقال‌یافتهٔ $A\overset{\triangle}{B}C$ است و $BB'' = ۶$
② $A''\overset{\triangle}{B''}C''$ انتقال‌یافتهٔ $A\overset{\triangle}{B}C$ است و $AA'' = ۹$
③ $A''\overset{\triangle}{B''}C''$ انتقال‌یافتهٔ $A\overset{\triangle}{B}C$ است و $CC'' = ۱۲$
④ $A''\overset{\triangle}{B''}C''$ بازتاب $A\overset{\triangle}{B}C$ نسبت به یک خط است.

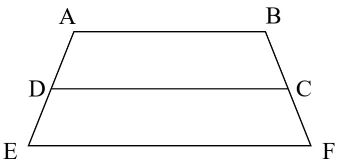
۳۶ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC = ۲\ ,\ \hat{A} = ۹۰^\circ)$ مفروض است. اگر این مثلث را به مرکز A با زاویهٔ ۴۵° در جهت مثلثاتی دوران دهیم، مساحت ناحیهٔ محصور بین تصویر و مثلث اولیه کدام است؟

① $\sqrt{۲} - ۱$
② $۲\sqrt{۲} - ۲$
③ $۲\sqrt{۲} - ۱$
④ $\sqrt{۲}$

۳۷ چهار نقطهٔ $A(۱,۳)$، $B(۱۵,۹)$، $M(a,۰)$ و $N(a+۵,۰)$ در صفحهٔ مختصات مفروض هستند. کمترین اندازهٔ خط شکستهٔ $AMNB$، کدام است؟

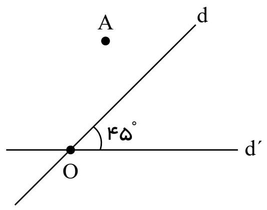
① ۱۸
② ۱۹
③ ۲۰
④ ۲۱

۳۸ در شکل مقابل ذوزنقهٔ $ABCD$ با تجانس بر ذوزنقهٔ $CDEF$ تصویر می‌شود. اگر $AB = ۴$ و $EF = ۹$ باشد، آنگاه مرکز و نسبت این تجانس کدام است؟



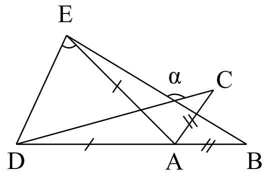
① محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{۹}{۴}$
② محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{۹}{۴}$
③ محل برخورد عمودمنصف‌های AE و BF، $K = \frac{۳}{۲}$
④ محل برخورد امتدادهای AE و BF، $K = \frac{۳}{۲}$

۳۹ در شکل مقابل $OA = ۲$ است. نقطهٔ A را نسبت به خط d و سپس تصویر حاصل را نسبت به خط d' بازتاب می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ A از تصویر نهایی آن کدام است؟



① ۲
② $\sqrt{۲}$
③ $۲\sqrt{۲}$
④ ۴

۴۰ در شکل زیر $AB = AC$، $AD = AE$، $C\hat{A}B = ۴۰^\circ$ و $A\hat{E}D = ۷۰^\circ$، زاویه‌ی α چند درجه است؟

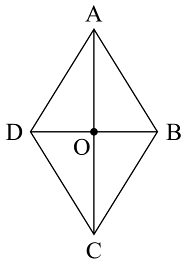


① ۱۲۵
② ۱۳۵
③ ۱۴۰
④ ۱۱۰

۴۱ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، $AB > BC$ نیمساز زاویهٔ C با ضلع AB در N متقاطع است. رأس B را نسبت به CN بازتاب می‌دهیم تا به M برسیم. اگر محیط $ABCD$ دو برابر محیط $BCMN$ باشد، نسبت مساحت $ABCD$ به مساحت $BCMN$ کدام است؟

① $\sqrt{۲}$
② ۲
③ ۳
④ ۴

۴۲ وسط اضلاع لوزی مقابل را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم، مساحت شکل حاصل ۱۰ واحد مربع می‌شود. این لوزی را به مرکز O به اندازهٔ ۱۵° در جهت ساعتگرد دوران می‌دهیم تا چهار ضلعی $A'B'C'D'$ حاصل شود، اندازهٔ $A'C' \times B'D'$ کدام است؟



① ۲۰
② ۲۵
③ ۴۰
④ ۴۵

۴۳ مثلث ABC به طول اضلاع $BC = ۱۲$ و $AC = ۲۰$ را حول رأس C دوران می‌دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. اگر $AA' = ۱۰$ باشد، آن‌گاه طول BB' کدام است؟

① ۵
② ۶
③ ۱۰
④ ۱۲

۴۴ دو خط متقاطع d و d' و پاره‌خط AB در صفحهٔ آنها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

① بازتاب
② انتقال
③ دوران
④ تجانس

۴۵ در مربع $ABCD$، نقطهٔ $(۴, ۱)$ رأس A و عرض رأس‌های C و D به‌ترتیب ۱ و ۳ است. اگر بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق شود، فاصلهٔ بازتاب نقطهٔ D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات چقدر است؟

① $\sqrt{۵}$
② $\sqrt{۱۳}$
③ $\sqrt{۱۷}$
④ $\sqrt{۷}$

۴۶ در مربع $ABCD$ نقطه $(۳, ۵)$ رأس B و طول رأس‌های C و D به‌ترتیب ۵٫۵ و ۳ است. اگر بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور xها بر خودش منطبق شود، فاصلهٔ بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD از مبدأ مختصات چقدر است؟

① ۲٫۵
② $\sqrt{۶٫۵}$
③ $\sqrt{۶}$
④ ۲

۴۷ فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط d برابر ۸ واحد است و نقطهٔ A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d است. اگر نقطهٔ M روی خط d و $AM = ۱۷$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از $A'M$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

① ۱۲
② ۱۳
③ ۱۴
④ ۱۵

۴۸ مثلث ABC با مساحت ۲۰ را با بردار $\overrightarrow{AH}$ (ارتفاع وارد بر ضلع BC) انتقال می دهیم. اگر A'، B' و C' به‌ترتیب انتقال یافتهٔ نقاط A، B و C باشند، مساحت پنج‌ضلعی $ABB'C'C$ کدام است؟ (زاویه‌های مثلث ABC حاده هستند.)

① ۴۰
② ۶۰
③ ۸۰
④ ۱۰۰

۴۹ مثلث ABC را که در آن $\hat{B}=۳۰^\circ$ است ابتدا با بردار $\frac{۱}{۴}\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم تا مثلث $A'B'C'$ حاصل شود و سپس مثلث جدید را با بردار $\frac{۱}{۳}\overrightarrow{CB}$ انتقال می‌دهیم تا مثلث $A''B''C''$ به دست آید. اندازهٔ زاویهٔ $CC'C''$ کدام است؟

① ۳۰°
② ۶۰°
③ ۱۲۰°
④ ۱۵۰°

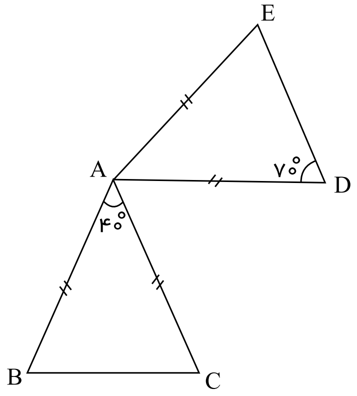
۵۰ دو پاره‌خط موازی AB و $A'B'$ به‌ترتیب به طول‌های ۱۰ و ۱۵ واحد و به فاصلهٔ ۲۰ واحد از یکدیگر، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. فاصلهٔ مراکز تجانس‌ها کدام است؟ ($AA'=BB'$)

① ۲۴
② ۳۶
③ ۴۸
④ ۵۴

۵۱ تبدیل R یک دوران به مرکز O است و می‌دانیم $R(R(R(R(A))))=A'$ و مثلث AOA' متساوی‌الاضلاع است. اگر نقطهٔ A با ۶ بار دوران R روی نقطهٔ B تصویر شود، نسبت $\frac{AB}{AA'}$ کدام است؟

① ۲
② $\frac{۳}{۲}$
③ $\sqrt{۳}$
④ $\sqrt{۲}$

۵۲ در شکل مقابل، $AB=AC=AD=AE$. دو پاره‌خط CE و BD با چه زاویه‌ای همدیگر را قطع می‌کنند؟



① ۳۵°
② ۴۰°
③ ۷۰°
④ ۱۱۰°

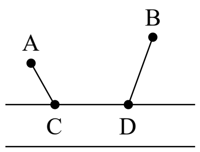
۵۳ نقطهٔ A به فاصلهٔ $۴\sqrt{۳}$ از خط d قرار دارد. تصویر A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌نامیم. اگر نقطهٔ A را به اندازهٔ ۱۲۰° به مرکز A' در جهت ساعتگرد دوران دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود، طول پاره‌خط AA'' کدام است؟

① ۱۲
② ۱۶
③ ۲۴
④ ۲۸

۵۴ در یک مثلث، دایرهٔ محیطی را با نسبت تجانس k و به مرکز M تجانس می‌دهیم تا بر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث تصویر شود. اگر نقطهٔ ثابت این تبدیل، محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث باشد، مقدار k کدام است؟

① $\frac{۳}{۴}$
② $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
③ $\frac{۱}{۲}$
④ $\frac{۱}{۴}$

۵۵ دو شهر A و B مطابق شکل زیر به فاصلهٔ ۱۰ کیلومتر از یکدیگر در یک طرف رودخانه‌ای قرار دارند. می‌خواهیم از A به B جاده‌ای بسازیم به‌طوری که ۳ کیلومتر آن کنار رودخانه باشد. اگر دو شهر A و B به‌ترتیب ۳ و ۹ کیلومتر از رودخانه فاصله داشته باشند، طول کوتاه‌ترین جادهٔ ممکن است؟



① ۱۳
② ۱۵
③ ۱۶
④ ۱۸

۵۶ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۶ واحد، نقاط M و N را به‌ترتیب روی اضلاع AB و AC و به‌فاصله‌های ۳ و ۴ واحد از رأس A انتخاب می‌کنیم. اگر P نقطهٔ دلخواهی روی ضلع BC باشد، کمترین مقدار $MP+NP$ کدام است؟

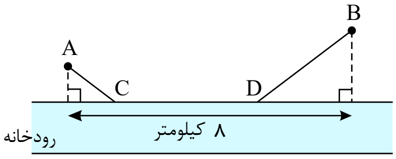
(۱) $\frac{۵\sqrt{۶}}{۲}$ (۲) $۳+\sqrt{۷}$ (۳) ۵ (۴) $\sqrt{۳۱}$

۵۷ تناظر T در صفحهٔ P، هر نقطه را به قرینهٔ آن نسبت به مبدأ مختصات نظیر می‌کند. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

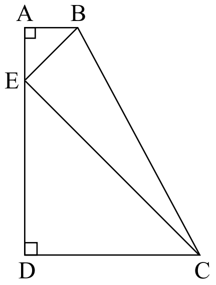
(۱) T تبدیل نیست.
(۲) T تبدیل است ولی طولپا نیست.
(۳) T یک تبدیل طولپا است ولی شیب خط‌ها را ثابت نگه نمی‌دارد.
(۴) T یک تبدیل طولپا است که شیب خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

۵۸ دو شهر A و B مطابق شکل به فاصله‌های ۱ و ۲ کیلومتری از یک رودخانه و در یک طرف آن واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. طول کوتاه‌ترین مسیر $ACDB$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱



۵۹ در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ زیر، طول قاعده‌ها برابر ۲ و ۷ و طول ساق قائم برابر ۱۲ است. اگر E نقطه‌ای دلخواه روی ساق قائم AD باشد، کمترین مقدار محیط $\overset{\triangle}{BEC}$ کدام است؟



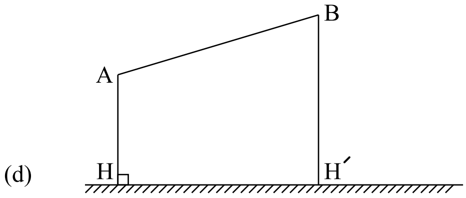
(۱) ۱۵ (۲) ۲۱ (۳) ۲۸ (۴) ۳۲

۶۰ نقطهٔ M در صفحهٔ دایرهٔ $C(O,۳)$ و به فاصلهٔ ۵ واحد از نقطهٔ O قرار دارد. C' مجانس دایرهٔ C به مرکز M و نسبت $k>۱$ است، به‌طوری که C و C' فقط یک نقطهٔ مشترک دارند. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۶۱ مطابق شکل روبه‌رو، قرار است کارگری از نقطهٔ A به کنار رودخانه (d) رفته، بشکه‌های آب را پر کند و به نقطهٔ B بازگشت نماید. هرگاه فاصلهٔ A و B تا رودخانه به‌ترتیب ۲۰ و ۵۰ متر و فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از یکدیگر ۵۰ متر باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر برابر کدام است؟

(۱) ۸۵٫۸
(۲) ۷۰٫۴
(۳) ۷۵٫۲
(۴) ۸۰٫۶



۶۲ یک مثلث متساوی‌الاضلاع در دو تجانس با نسبت‌های $-\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ و به مرکز تجانس محل همرسی میانه‌ها، تصویرشده است. مساحت بین این دو تصویر، چند برابر مساحت مثلث اولیه است؟

(۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۱}{۵}$ (۳) $\frac{۱}{۴}$ (۴) $\frac{۱}{۶}$

۶۳ یک مربع را در تجانس با نسبت $-\frac{۵}{۳}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین دو مربع ۱۶ باشد، قدرمطلق تفاضل محیط‌های دو مربع کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۶۴ در مستطیل $ABCD$ که $AD = ۱$، تصویر رأس D تحت بازتاب نسبت به امتداد قطر AC را D' می‌نامیم. سپس A را نسبت به امتداد CD' بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید. اگر A' روی امتداد ضلع BC واقع باشد، آنگاه مساحت مستطیل $ABCD$ کدام است؟

① $\sqrt{۲}$ ② $\sqrt{۳}$ ③ ۲ ④ ۳

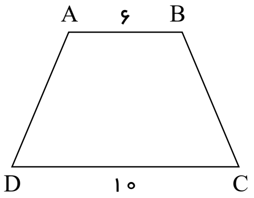
۶۵ تبدیل‌یافتهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۴\sqrt{۳}$ تحت تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ارتفاع ۲ است. مربعی به ضلع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ تحت این تجانس به مربعی با کدام مساحت تبدیل می‌شود؟

① $\frac{۱}{۶}$ ② $\frac{۱}{۸}$ ③ $\frac{۱}{۱۲}$ ④ $\frac{۱}{۱۶}$

۶۶ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زیر به ارتفاع ۱۲ واحد مفروض است. اگر دو قاعدهٔ آن تصویر یکدیگر در دو تجانس مستقیم و معکوس باشند، آنگاه فاصلهٔ مراکز تجانس کدام است؟

① ۲۲ ② ۲۲٫۵

③ ۲۳ ④ ۲۳٫۵



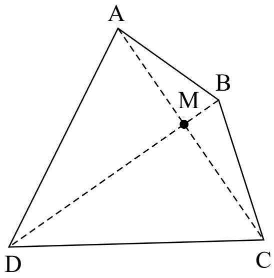
۶۷ در شکل مقابل، مربعی به قطر AD و نیز مربعی دیگر به قطر BC ایجاد می‌کنیم. اگر این دو مربع در رأس O مشترک باشند، کدام گزینه صحیح است؟

① $AC = BD$

② $A\hat{M}D = ۹۰$

③ مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

④ گزینه‌های «۱ و ۲» صحیح است.



۶۸ مربعی به ضلع $۲\sqrt{۲} + ۴$ را به اندازهٔ ۴۵° حول مرکز تقارن آن دوران می‌دهیم. مساحت سطح محصور بین مربع و تصویر آن کدام است؟

① $۸ + ۸\sqrt{۲}$ ② $۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$ ③ $۸ + ۱۶\sqrt{۲}$ ④ $۱۶ + ۸\sqrt{۲}$

۶۹ دو نقطهٔ $A(-۳, ۱۳)$ و $C(۵, ۳)$ مفروض‌اند. اگر نقطهٔ B را به‌گونه‌ای روی محور xها قرار دهیم که محیط مثلث ABC مینیمم باشد، آنگاه طول نقطهٔ B کدام است؟

① -۱ ② $\frac{۷}{۲}$ ③ -۷ ④ $\frac{۱}{۲}$

۷۰ مثلث ABC را در یک تجانس معکوس بر مثلث $A'B'C'$ تصویر می‌کنیم. اگر رئوس مثلث ABC روی اضلاع مثلث $A'B'C'$ قرار گیرد، نسبت تجانس کدام است؟

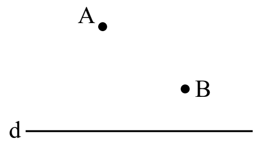
① $-\frac{۳}{۲}$ ② -۲ ③ -۳ ④ $-\frac{۴}{۳}$

۷۱ مساحت مثلث ABC در دو تجانس به مرکز O و با نسبت‌های $k_۱$ و $k_۲$ به‌ترتیب ۴ و $\frac{۲۵}{۴}$ برابر شده است. اگر $OA = ۴$ و $A_۱$ و $A_۲$ تصاویر نقطهٔ A در این دو تجانس باشند، آنگاه بیشترین مقدار ممکن برای طول پاره‌خط $A_۱A_۲$ کدام است؟

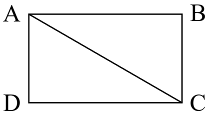
① ۱۲ ② ۱۸ ③ ۲۵ ④ ۴۱

۷۲ در شکل زیر، نقطهٔ A به فاصلهٔ ۸٫۵ واحد از خط d و ۸ واحد از نقطهٔ B مفروض است. نقطهٔ M را روی خط d چنان انتخاب می‌کنیم که $MA + MB$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. اگر این مقدار مینیمم برابر ۱۵ باشد، طول MA کدام است؟

① $\frac{۱۶۱}{۳۰}$ ② $\frac{۲۸۹}{۳۰}$ ③ $\frac{۲۷}{۵}$ ④ $\frac{۴۸}{۵}$



۷۳ در شکل زیر در مستطیل $ABCD$، $BC=\sqrt{۳}$ و $B\hat{A}C=۳۰^\circ$ است. اگر این مستطیل را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حول نقطهٔ A به اندازهٔ ۶۰° دوران دهیم، مساحت ناحیهٔ مشترک بین مستطیل $ABCD$ و تصویر آن تحت این دوران کدام است؟



① $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ② ۱ ③ $\sqrt{۳}$ ④ ۲

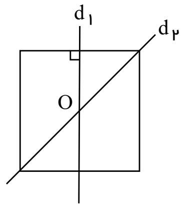
۷۴ اگر دایرهٔ $C'(O',۳)$ مجانس دایرهٔ $C(O,۴)$ در تجانس مستقیم به مرکز M و $MO=۲۰$ باشد، اندازهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ C و C' کدام است؟

① ۲٫۴ ② ۳٫۶ ③ ۴٫۸ ④ ۶

۷۵ دو خط d و d' مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه شامل این دو خط وجود دارد که دوران یافتهٔ خط d حول آن نقطه بر d' منطبق گردد؟

① ۱ ② ۲ ③ بی‌شمار ④ ۴

۷۶ بازتاب مربع را ابتدا نسبت به خط $d_۱$ و سپس بازتاب شکل حاصل را نسبت به خط $d_۲$ رسم می‌کنیم. تبدیلی که مربع اولیه را به آخرین شکل تصویر می‌کند، چند نقطهٔ ثابت تبدیل دارد؟ (O مرکز مربع است.)



① صفر ② بی‌شمار
③ ۱ ④ ۲

۷۷ در یک انتقال رأس مثلثی به مرکز ثقل آن منتقل شده است. مساحت ناحیهٔ مشترک بین مثلث و تصویرش، چه کسری از مساحت مثلث اولیه است؟

① $\frac{۱}{۳}$ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۹}$ ④ $\frac{۴}{۹}$

۷۸ خط d تحت انتقال با هریک از دو بردار عمود بر هم به اندازه‌های ۱۵ و ۲۰ روی خط d' تصویر می‌شود. طول کوتاه‌ترین برداری که خط d را به d' تبدیل می‌کند، کدام است؟

① ۹ ② ۱۰ ③ ۱۲ ④ ۲۵

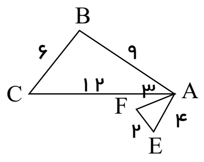
۷۹ مثلث ABC را با بردار $\overrightarrow{CC'}$ انتقال می‌دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. اگر C' روی ضلع AC و $CC'=۳AC'$ باشد، اندازهٔ مساحت ناحیهٔ مشترک بین این دو مثلث چه کسری از مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

① $\frac{۱}{۳}$ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ $\frac{۱}{۹}$ ④ $\frac{۱}{۱۶}$

۸۰ نقاط A و B در یک طرف خط d و به‌ترتیب به فاصلهٔ ۱ و ۴ واحد از این خط قرار دارند. بازتاب این نقاط نسبت به خط d را A' و B' می‌نامیم. اگر چهارضلعی $AA'B'B$ محیطی باشد، مساحت آن کدام است؟

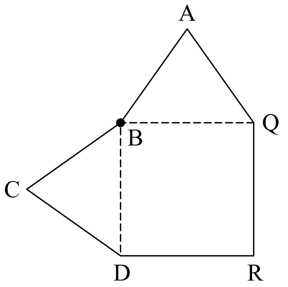
① ۱۰ ② ۲۰ ③ ۴۰ ④ ۸۰

۸۱ باتوجه به شکل زیر، با کدام تبدیل می‌توان مثلث AEF را متجانس مثلث ABC نمود؟



① بازتاب محوری با محور AC
② دوران حول مرکز A و به زاویه‌ی $\widehat{FAC}$
③ دوران حول مرکز A و به زاویه‌ی $\widehat{FAB}$
④ بازتاب نسبت‌به نقطه‌ی همرسی میانه‌های مثلث ABC

۸۲ در شکل زیر، $BQRD$ مربع به‌طول ضلع ۲ و ABQ و CBD مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند. اگر بخواهیم مساحت چندضلعی $ABCDRQ$ را بدون تغییر در تعداد اضلاع و محیط چندضلعی افزایش دهیم، مقدار این افزایش مساحت کدام است؟



① ۴
② $۴\sqrt{۳}$
③ ۲
④ $۲\sqrt{۳}$

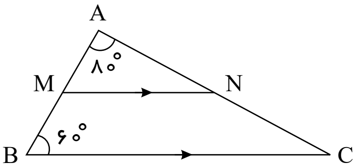
۸۳ نقطهٔ A مرکز تجانس مستقیم دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ است. اگر فاصلهٔ مراکز این دو دایره برابر ۶ باشد، آنگاه اندازهٔ شعاع دایره‌ای که با دایرهٔ بزرگ‌تر مماس خارج و مجانس آن با نسبت تجانس بزرگ‌تر از یک به مرکز نقطهٔ A می‌باشد، کدام است؟

① ۲/۸ ② ۳/۶ ③ ۴٫۲ ④ ۴/۸

۸۴ نقطهٔ $Q(m, ۲n-۲)$ تصویر نقطهٔ $P(n, m+۲)$ تحت دوران ۹۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات است. حاصل $۲m-n$ کدام است؟

① صفر ② ۲ ③ -۴ ④ -۲

۸۵ در مثلث مقابل، مقدار زاویهٔ بین مجانس‌های AN و MN نسبت به مرکز تجانس C و با نسبت $k = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کدام است؟



① ۴۰°
② ۲۰°
③ ۷۰°
④ ۸۰°

۸۶ دایرهٔ $C(O, ۲)$ و نقطهٔ A مفروض‌اند. اگر $OA = ۷$ و دایرهٔ $C'(O', R')$ مجانس دایرهٔ C به مرکز A و نسبت ۲ باشد، آنگاه طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟

① دو دایره متقاطع‌اند و مماس مشترک داخلی ندارند.
② $۲\sqrt{۳}$
③ $\sqrt{۱۳}$
④ ۴

۸۷ اگر طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ $C(O, ۲)$ و $C'(O', ۵)$ برابر ۸ باشد، فاصلهٔ مرکز تجانس معکوس دو دایره تا مرکز دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

① $\frac{۴۰}{۷}$ ② $\frac{۱۶}{۷}$ ③ $\frac{۳۵}{۸}$ ④ ۳

۸۸ نقطهٔ O به فاصلهٔ ۱۲ واحد از خط d مفروض است. اگر خط d را حول نقطهٔ O، با زاویهٔ ۶۰° دوران دهیم تا خط جدید، خط d را در نقطهٔ P قطع کند، فاصلهٔ P تا مرکز دوران کدام است؟

① $۸\sqrt{۳}$ ② $\sqrt{۳}$ ③ ۱۶ ④ ۲۴

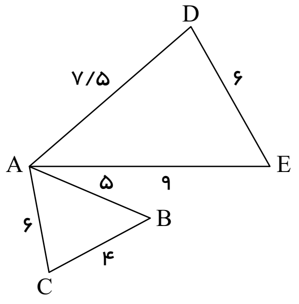
۸۹ یک مثلث متساوی‌الاضلاع را با تجانسی که مرکز آن نقطهٔ همرسی میانه‌ها و به نسبت $k = \frac{۱}{۳}$ است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت ناحیهٔ بین مثلث و تصویرش برابر $\sqrt{۳}$ باشد، محیط مثلث اولیه کدام است؟

① $۹\sqrt{۲}$ ② $۳\sqrt{۲}$ ③ $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$ ④ $۶\sqrt{۲}$

۹۰ دو دایرهٔ $C(O,۳)$ و $C'(O',۵)$ مماس خارج‌اند. تحت یک تجانس مستقیم به مرکز M یا تحت یک تجانس معکوس به مرکز M'، دایرهٔ C روی دایرهٔ C' تصویر می‌شود، اندازهٔ MM' کدام است؟

① ۱۲ ② ۱۵ ③ ۱۷ ④ ۱۸

۹۱ با توجه به شکل مقابل، با کدام تبدیل می‌توان مثلث ABC را متجانس مثلث ADE نمود؟



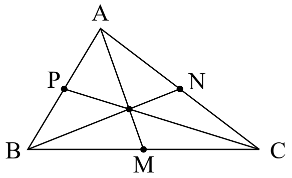
① دوران به مرکز A و به زاویهٔ $B\hat{A}E$

② دوران به مرکز A و به زاویهٔ $B\hat{A}D$

③ بازتاب محوری با محور AE

④ بازتاب نسبت به نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ADE

۹۲ در مثلث ABC میانه‌های AM، BN و CP را به‌اندازهٔ $\frac{۳}{۴}$ طول آنها از طرف نقاط M، N و P امتداد می‌دهیم تا به نقاط A'، B' و C' برسیم. اگر مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC باشد، نسبت تجانس کدام است؟



① -۱ ② $-\frac{۹}{۴}$

③ $-\frac{۹}{۸}$ ④ $-\frac{۱۳}{۸}$

۹۳ دو دایرهٔ مماس خارج و به شعاع‌های ۲ و ۳، تصویر هم در دو تجانس مستقیم و معکوس هستند. فاصلهٔ مراکز این دو تجانس از یکدیگر کدام است؟

① ۱۵ ② ۱۲ ③ ۱۰ ④ ۸

۹۴ تحت تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{۳}{۲}$، نقطهٔ A بر نقطهٔ B و تحت تجانس به مرکز A و نسبت $-\frac{۳}{۵}$، نقطهٔ B بر نقطهٔ C تصویر می‌شود. طول پاره‌خط BC چند برابر طول پاره‌خط OC است؟

① $\frac{۸}{۷}$ ② $\frac{۷}{۸}$ ③ $\frac{۸}{۹}$ ④ $\frac{۹}{۸}$

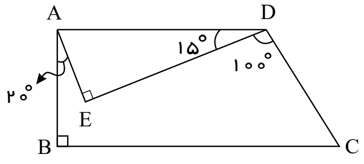
۹۵ در مثلث ABC، نقطهٔ A را با بردار $\overrightarrow{BC}$ به نقطهٔ A'، نقطهٔ B را با بردار $\overrightarrow{CA}$ به نقطهٔ B' و نقطهٔ C را با بردار $\overrightarrow{AB}$ به نقطهٔ C' انتقال می‌دهیم. مساحت مثلث $A'B'C'$ چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④ ۹

۹۶ پاره‌خط $A'B'$ بازتاب پاره‌خط AB نسبت به خط d است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d و نقطهٔ B، ۴ واحد باشد و راستای AB با محور بازتاب زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ کدام است؟ (A از B به محور بازتاب نزدیک‌تر است.)

① $۱۰\sqrt{۳}$ ② $۲۰\sqrt{۳}$ ③ $۳۰\sqrt{۳}$ ④ $۴۰\sqrt{۳}$

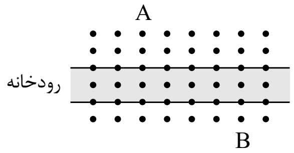
۹۷ اگر بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع چندضلعی $ABCDE$، مساحت آن را افزایش دهیم، مساحت شکل جدید چقدر بیشتر از مساحت شکل اولیه است؟(AD=۸)



① ۸ ② ۴

③ ۱۶ ④ ۲

۹۸ می‌خواهیم از شهر A به شهر B مطابق شکل یک جاده بسازیم. قسمتی از جاده پلی است که بر رودخانه عمود است. حداقل طول مسیر چند کیلومتر است؟ (فاصلهٔ عمودی و افقی نقاط شبکهٔ مقابل یک کیلومتر است.)



① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۹۹ روی محور x ها سه نقطهٔ A، B و C از نقطهٔ $x = ۰$ به ترتیب به فاصله‌های ۱، ۲ و ۳ قرار دارند. اگر در یک تجانس معکوس و انقباضی به مرکز A، نقطهٔ B بر C تصویر شود، نسبت $\frac{AB}{BC}$ کدام است؟

① ۰٫۲ ② ۰٫۶ ③ ۱ ④ ۱٫۵

۱۰۰ نقطهٔ A به فاصلهٔ $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌نامیم. اگر نقطهٔ A را حول نقطهٔ A' به‌اندازهٔ ۱۲۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود. آنگاه طول پاره‌خط AA'' کدام است؟

① $۱۵\sqrt{۲}$ ② $۱۲\sqrt{۲}$ ③ $۱۰\sqrt{۲}$ ④ $۹\sqrt{۲}$

۱۰۱ دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ به فاصلهٔ $۴ - m$ در صفحه قرار دارند. بازتاب مثلث ABC نسبت به خط $d_۱$ را $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ و بازتاب $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ را نسبت به خط $d_۲$، $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ می‌نامیم. اگر $AA'' = m + ۱$، آن‌گاه اندازهٔ BB'' کدام است؟ (A'، B' و C' به ترتیب تبدیل یافتهٔ نقاط A، B و C و نقاط A''، B'' و C'' به ترتیب تبدیل یافتهٔ نقاط A'، B' و C' هستند.)

① $\frac{۵}{۲}$ ② $\frac{۳}{۲}$ ③ $\frac{۱۰}{۳}$ ④ $\frac{۷}{۳}$

۱۰۲ اگر نقطهٔ O محل تلاقی قطرهای ذوزنقهٔ $ABCD$ $(AB||CD)$ باشد، آنگاه تبدیل‌یافتهٔ پاره‌خط AB تحت کدام‌یک از تبدیل‌های زیر، موازی با پاره‌خط AB نیست؟

① بازتاب نسبت به خط CD
② تجانس معکوس به مرکز O و به نسبت ۲
③ انتقال با بردار $\overrightarrow{CD}$
④ دوران به مرکز O و زاویهٔ AOB

۱۰۳ نقطهٔ M را به مرکز O و زاویهٔ ۱۸۰ درجه دوران می‌دهیم تا بر نقطهٔ M' تصویر شود، سپس M' را در دوران به مرکز O' و زاویهٔ ۱۸۰ درجه بر نقطهٔ M'' تصویر می‌کنیم. کدام تبدیل نقطهٔ M را بر M'' تصویر می‌کند؟

① انتقال با بردار $۲\overrightarrow{OO'}$
② انتقال با بردار $۲\overrightarrow{O'O}$
③ بازتاب نسبت به خط OO'
④ دوران به مرکز وسط OO' و زاویهٔ ۱۸۰°

۱۰۴ پاره‌خط AB به طول ۴، خط L را در نقطه‌ای بجز A و B با زاویه ۴۵ درجه قطع نموده است. اگر S، تبدیل بازتاب نسبت به خط L باشد به طوری که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$، آن‌گاه اندازهٔ مساحت چهارضلعی $AA'BB'$ کدام است؟

① ۸ ② $۸\sqrt{۲}$ ③ ۱۶ ④ $۱۶\sqrt{۲}$

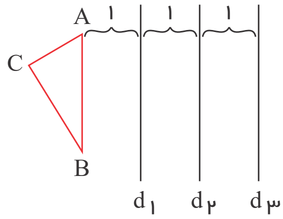
۱۰۵ پاره‌خط AB به طول $۴\sqrt{۲}$ با خط d، زاویه ۴۵° می‌سازد و نقطهٔ A روی خط d واقع است. اگر B' بازتاب نقطهٔ B نسبت به خط d باشد، شعاع کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABB' کدام است؟

① $\sqrt{۲}$ ② ۲ ③ $۲\sqrt{۲}$ ④ ۴

۱۰۶ دو دایرهٔ $C(O,۲)$ و $C'(O',۴)$ مماس خارج‌اند. تحت یک تجانس مستقیم به مرکز M یا تحت یک تجانس معکوس به مرکز M'، دایرهٔ C روی دایرهٔ C' تصویر می‌شود. اندازهٔ MM' کدام است؟

① ۵ ② ۶ ③ ۸ ④ ۱۰

۱۰۷ مطابق شکل با فرض موازی بودن خطوط $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$، مثلث ABC را ابتدا نسبت به $d_۳$ بازتاب داده تا $A'B'C'$ به‌دست آید و سپس $A'B'C'$ را نسبت به $d_۲$ بازتاب می‌دهیم تا $A''B''C''$ حاصل شود و در نهایت $A''B''C''$ را نسبت به $d_۱$ بازتاب می‌دهیم، تا $A'''B'''C'''$ حاصل شود. اگر فاصلهٔ رأس A تا خط $d_۱$ برابر ۱ باشد آنگاه طول AA''' کدام است؟



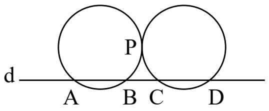
① ۴

② ۳

③ ۲

④ ۱

۱۰۸ دو دایره با شعاع‌های یکسان، در نقطهٔ P مماس برون‌اند. اگر خط قاطعی به موازات خط‌المرکزین، دو دایره را در نقاط A، B، C و D قطع کند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟



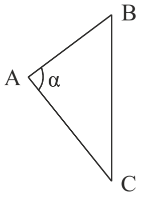
① $A\hat{P}C = B\hat{P}D$

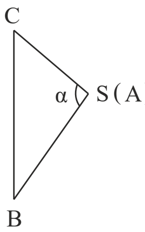
② $A\hat{P}C = ۹۰^\circ$

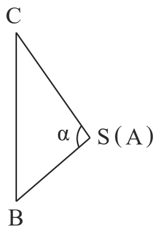
③ $B\hat{P}D = ۹۰^\circ$

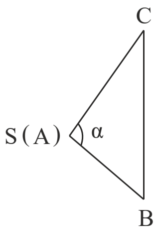
④ هر سه گزینه صحیح است.

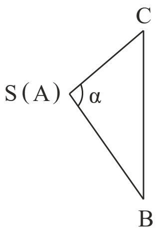
۱۰۹ فرض کنید S نشانگر بازتاب نسبت به یک خط ثابت باشد. اگر مثلث روبه‌رو را تحت این بازتاب به گونه‌ای تصویر کنیم که $S(C) = B, S(B) = C$، آن‌گاه کدام گزینه تصویر مثلث ABC تحت بازتاب S را به درستی نشان می‌دهد؟ $(AB < AC)$



①


②


③


④


۱۱۰ در مثلث ABC، $\hat{A} = \frac{۳}{۲}B = ۳\hat{C}$ و $BC = ۱۲$ است. اگر مثلث $A'B'C'$ تبدیل یافته $\overset{\Delta}{ABC}$ تحت تبدیل طولپای T باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ کدام است؟

① $۳۶\sqrt{۲}$

② $۱۸\sqrt{۲}$

③ $۳۶\sqrt{۳}$

④ $۱۸\sqrt{۳}$

۱۱۱ دوران‌یافتهٔ دایرهٔ C، به مرکز $(-۲,۳)$ و شعاع $\frac{۵}{۲}$، تحت دوران $\frac{۳\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دایرهٔ C' است. اندازهٔ مماس مشترک داخلی این دو دایره، کدام است؟

① ۱

② $\sqrt{۲}$

③ $\sqrt{۳}$

④ ۲

۱۱۲ از بین مثلث‌هایی که در ضلع ثابت $AB = ۱۶$ مشترک و مساحت هر یک از آنان ۴۸ واحد مربع باشد، کمترین مقدار محیط کدام است؟

① ۳۸

② ۳۴

③ ۳۶

④ ۳۲

۱۱۳ نقاط A' و B' به‌ترتیب مجانس نقاط A و B به مرکز O و با نسبت $k = ۴$ هستند. از نقطهٔ B، خطی موازی با OA رسم می‌کنیم تا $A'B'$ را در نقطه‌ای مانند C قطع کند. مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCA'$ چند برابر مساحت مثلث OAB است؟ (O، A و B در یک راستا قرار ندارند)

① ۶

② ۸

③ ۱۰

④ ۱۲

۱۱۴ یک دایره را در تجانسی با نسبت تجانس ۰٫۶ و به مرکز تجانس مرکز دایره تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین دایره و تصویرش ۱۶ باشد، محیط دایرهٔ اولیه چقدر است؟

① ۱۲ ② ۱۰ ③ $۱۲\sqrt{\pi}$ ④ $۱۰\sqrt{\pi}$

۱۱۵ مربع $ABCD$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۲ واحد از رأس A در صفحه مفروض هستند. نقطهٔ M را ابتدا نسبت به ضلع AD و سپس نسبت به قطر AC بازتاب می‌دهیم. اگر M' نقطهٔ حاصل از دو تبدیل متوالی باشد، آن‌گاه اندازهٔ MM' کدام است؟ (M خارج مربع قرار دارد.)

① ۲ ② ۴ ③ $\sqrt{۲}$ ④ $۲\sqrt{۲}$

۱۱۶ ۵ تبدیل زیر را در صفحهٔ مختصات درنظر بگیرید. در کدام گزینه، ترکیب ۳ تبدیل داده‌شده، همانی است؟

الف) بازتاب نسبت به محور xها

ب) بازتاب نسبت به محور yها

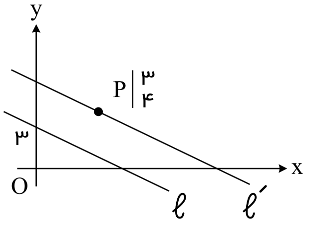
ج) بازتاب نسبت به خط $y=x$

د) بازتاب نسبت به خط $y=-x$

هـ) دوران ۹۰° حول مبدأ مختصات در جهت پادساعتگرد

① (ب) و (د) و (هـ) ② (ب) و (ج) و (د) ③ (الف) و (ب) و (د) ④ (الف) و (د) و (هـ)

۱۱۷ در شکل زیر، خط ℓ را در تجانس به مرکز مبدأ مختصات (نقطهٔ O) و نسبت تجانس $\frac{۵}{۳}$ تصویر می‌کنیم و آن را ℓ' می‌نامیم. اگر ℓ محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و ℓ' از نقطهٔ $P(۳,۴)$ عبور کند، مساحت ناحیهٔ محصور بین خطوط ℓ و ℓ' و محورهای x و y کدام است؟

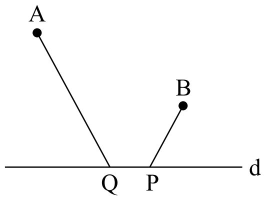


① ۲۰
② ۲۲
③ ۲۴
④ ۲۶

۱۱۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ نقطهٔ M، ضلع $AB=۱۰$ را به نسبت ۲ و ۳ تقسیم کرده و به رأس B نزدیک‌تر است. اگر $\hat{B}=۳۰^\circ$ بوده و نقطهٔ N روی وتر متغیر باشد، کمترین محیط مثلث AMN کدام است؟

① $۶+۲\sqrt{۱۹}$ ② $۴+۲\sqrt{۱۹}$ ③ $۶+۴\sqrt{۵}$ ④ $۶+۲\sqrt{۷}$

۱۱۹ دو نقطهٔ ثابت A و B به فاصلهٔ ۱۳ واحد از هم و در یک طرف خط d قرار دارند. اگر مطابق شکل زیر، فاصلهٔ نقاط A و B از خط d به‌ترتیب ۱۱ و ۶ باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر شکستهٔ $AQPB$ کدام است؟ (نقاط P و Q روی خط d به فاصلهٔ ۲ واحد هستند)



① ۱۹ ② $۲+\sqrt{۳۰۰}$
③ $۲+\sqrt{۳۸۹}$ ④ ۱۵

۱۲۰ دو خط $x+y=۶$ و $y=۲x$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط d هستند. نقطهٔ ثابت این بازتاب را A بنامید. فاصلهٔ بازتاب A نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم مختصات از نقطهٔ $M(۱,۱۰)$ کدام است؟

① $\sqrt{۳۷}$ ② ۱۳ ③ ۱۰ ④ $\sqrt{۸۵}$

۱۲۱ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ با فرض اینکه $\hat{C}=۳۰^\circ$ و طول وتر $۴\sqrt{۳}$ باشد، بازتاب پای ارتفاع وارد بر وتر نسبت به دو ضلع قائم را M و N نامیده‌ایم. طول پاره‌خط MN کدام است؟

① $۶\sqrt{۳}$ ② $۴\sqrt{۳}$ ③ ۶ ④ $۱۲\sqrt{۳}$

۱۲۲ خط $۲x+۳y=۶$ را در تجانسی به مرکز مبدأ مختصات و نسبت $k=۲$ تصویر می‌کنیم. مساحت محصور بین این خط و تبدیل‌یافته‌اش و محورهای مختصات کدام است؟

① ۹ ② ۱۲ ③ ۳ ④ ۱۵

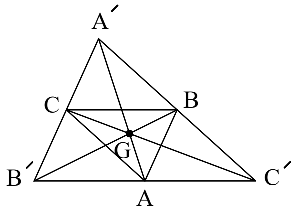
۱۲۳ دو دایرهٔ متخارج $C(O,۱)$ و $C'(O',۴)$ تحت یک تجانس، متجانس مستقیم یکدیگرند. اگر فاصلهٔ مرکز تجانس تا نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ C، برابر ۴ باشد، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط این دو دایره از یکدیگر کدام است؟

① ۱۵ ② ۸ ③ ۱۲ ④ ۱۰

۱۲۴ مربع $ABCD$ مفروض است. نخست بازتاب مربع را نسبت به عمودمنصف AB و سپس بازتاب شکل حاصل را نسبت به قطر BD رسم می‌کنیم. تبدیلی که مربع اولیه را به شکل نهایی تصویر می‌کند، کدام تبدیل است؟

① انتقال به اندازهٔ ضلع مربع ② انتقال به اندازهٔ قطر مربع ③ دوران ۹۰° ④ دوران ۱۸۰°

۱۲۵ فرض کنید مطابق شکل A، B و C به‌ترتیب وسط اضلاع $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$ باشند. اگر مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC به مرکز G باشد، آنگاه نسبت تجانس کدام است؟



① ۲ ② -۲ ③ ۳ ④ -۳

۱۲۶ دایرهٔ C را در تجانسی با نسبت ۴ بر دایرهٔ C' تصویر می‌کنیم. اگر C و C' مماس داخل و فاصلهٔ مراکز آنها برابر ۱۲ باشد، مساحت ناحیهٔ محدود بین دو دایره چقدر است؟

① ۳۲۰π ② ۱۶۰π ③ ۲۴۰π ④ ۲۷۰π

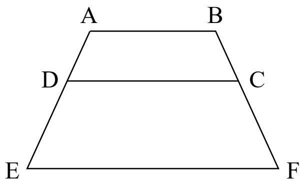
۱۲۷ مساحت سطح محصور بین یک مربع و تبدیل‌یافتهٔ آن تحت تجانس به مرکز یکی از رأس‌های مربع و نسبت $\frac{۴}{۳}$، برابر ۱۴ است، مساحت مربع اولیه کدام است؟

① ۲۰ ② ۱۸ ③ $\frac{۵۶}{۳}$ ④ ۱۰/۵

۱۲۸ مربع $ABCD$ را با تجانسی که مرکز آن محل تلاقی قطرها و نسبت تجانس آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش برابر ۴ باشد، محیط مربع $ABCD$ کدام است؟

① ۸ ② ۱۶ ③ ۱۲ ④ ۱۸

۱۲۹ در شکل مقابل، ذوزنقهٔ $ABCD$ با تجانس بر ذوزنقهٔ $CDEF$ تصویر می‌شود. اگر $AB = ۸$ و $EF = ۱۸$ باشد، مرکز و نسبت تجانس کدام است؟



① محل تلاقی امتدادهای AE و BF، $k = \frac{۳}{۲}$

② محل تلاقی امتدادهای AE و BF، $k = \frac{۹}{۴}$

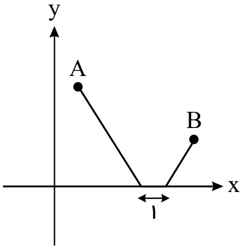
③ محل تلاقی عمودمنصف‌های AE و BF، $k = \frac{۳}{۲}$

④ محل تلاقی عمودمنصف‌های AE و BF، $k = \frac{۹}{۴}$

۱۳۰ نقطهٔ A به فاصلهٔ $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A' می‌نامیم. نقطهٔ A' را حول نقطهٔ A به اندازهٔ ۱۲۰° دوران می‌دهیم تا نقطهٔ A'' حاصل شود. طول پاره‌خط AA'' کدام است؟

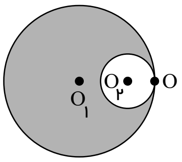
① $۱۲\sqrt{۲}$ ② $۱۶\sqrt{۲}$ ③ $۴\sqrt{۶}$ ④ ۱۶

۱۳۱ مطابق شکل دو روستا در نقاط $A(۱,۶)$ و $B(۸,۲)$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به‌طوری که یک واحد از آن در ساحل رودخانه (محور xها) قرار داشته باشد. اندازهٔ کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این جاده چقدر است؟



① ۹
② ۱۰
③ ۱۱
④ ۱۲

۱۳۲ دایرهٔ $C(O_۱,R_۱)$ را تحت تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{۱}{۳}$ به دایرهٔ $C'(O_۲,R_۲)$ تصویر کرده‌ایم. اگر $O_۱O_۲=۲$ باشد، مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟



① ۲π
② ۴π
③ ۸π
④ ۱۲π

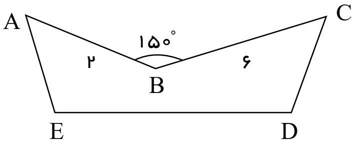
۱۳۳ دو دایرهٔ متخارج با نسبت $\frac{۳}{۵}$ مجانس یکدیگرند. اگر فاصلهٔ مرکز تجانس از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر ۶ باشد، طول خط‌المرکزین این دو دایره کدام است؟

① ۴
② ۶
③ ۸
④ ۱۰

۱۳۴ دایرهٔ $C(O,۳)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۶ از مرکز آن مفروض اند. این دایره را در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس $\frac{۱}{۳}$ بر دایرهٔ C' تصویر می‌کنیم. وضعیت دو دایرهٔ C و C' نسبت به هم چگونه است؟

① متخارج
② متقاطع
③ مماس درون
④ مماس برون

۱۳۵ زمینی به‌شکل زیر داریم، می‌خواهیم به‌کمک تبدیل هندسی مناسب بدون تغییر در طول اضلاع و محیط شکل، مساحت زمین را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت این زمین کدام است؟



① ۶
② ۱۲
③ $۶\sqrt{۳}$
④ $۱۲\sqrt{۳}$

۱۳۶ طول ضلع مربع $ABCD$ برابر ۲ است. M نقطه‌ای دلخواه روی AD و N وسط CD است. بازتاب MN نسبت‌به خط AB را $M'N'$ و بازتاب $M'N'$ نسبت‌به خط CD را $M''N''$ می‌نامیم. مساحت چهارضلعی $MNN''M''$ کدام است؟

① ۱
② ۲
③ ۳
④ ۴

۱۳۷ شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ را با بردار $\overrightarrow{CD}$ انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ مشترک بین شش‌ضلعی و تصویرش چه کسری از مساحت شش‌ضلعی منتظم است؟

① $\frac{۱}{۲}$
② $\frac{۱}{۳}$
③ $\frac{۱}{۴}$
④ $\frac{۱}{۶}$

۱۳۸ نقطهٔ A درون زاویه‌ای به اندازهٔ ۴۵ درجه قرار دارد. اگر فاصلهٔ A تا رأس زاویه برابر یک واحد و A' و A'' تصاویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به اضلاع زاویه باشند، آن‌گاه طول پاره‌خط $A'A''$ کدام است؟

① ۱
② $\sqrt{۲}$
③ ۲
④ $۲\sqrt{۲}$

۱۳۹ نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AA'=۱۶$، نقطهٔ O روی خط L و $OA=۱۰$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از OA' کدام است؟

① ۴٫۸
② ۶
③ ۷٫۲
④ ۹٫۶

۱۴۰ دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ واحد و مربعی به ضلع ۱ واحد مفروض‌اند. فاصلهٔ مرکز دایره تا محل برخورد قطرهای مربع برابر ۶ واحد است. اگر مجانس این مربع در یک تجانس معکوس درون دایره محاط شود، آن‌گاه فاصلهٔ مرکز تجانس تا مرکز دایره کدام است؟

① ۲
② ۴
③ ۶
④ ۱۲

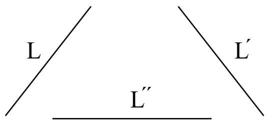
۱۴۱ مثلث ABC را با بردار $\overrightarrow{AA'}$ انتقال می‌دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. اگر A' روی ضلع AB و $\frac{A'A}{A'B} = ۲$ باشد، اندازهٔ مساحت ناحیهٔ مشترک بین این دو مثلث چه کسری از مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

① $\frac{۱}{۲}$
② $\frac{۱}{۳}$
③ $\frac{۱}{۴}$
④ $\frac{۱}{۹}$

۱۴۲ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را نسبت به یک خط ثابت بازتاب می‌دهیم. طوری که رأس‌های B و C نقاط ثابت این تبدیل باشند. اگر $AB = \sqrt{۲}$ و $AC = ۴$، آن‌گاه فاصلهٔ A و A' کدام است؟ (A' بازتاب یافتهٔ A است.)

① $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$
② $\frac{۸}{۳}$
③ $\frac{۴}{۳}$
④ $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۱۴۳ سه خط L، L' و L'' مطابق شکل در صفحه مفروض‌اند. با کدام تبدیل می‌توان پاره‌خطی به‌طول ۵ سانتی‌متر رسم کرد به‌طوری که دو سر آن روی L و L' و موازی L'' باشد؟



① بازتاب
② انتقال
③ دوران
④ هیچ کدام

۱۴۴ یک مثلث متساوی‌الاضلاع را با تجانسی که مرکز آن نقطهٔ همرسی میانه‌ها و به نسبت $K = \frac{۱}{۲}$ است، تصویر می‌کنیم. اگر مساحت ناحیهٔ بین مثلث و تصویرش برابر $۳\sqrt{۳}$ باشد آن‌گاه محیط مثلث اولیه کدام است؟

① ۶
② $۶\sqrt{۶}$
③ ۱۲
④ $۱۲\sqrt{۲}$

۱۴۵ عکس کدام گزاره همواره برقرار است؟

① اگر دو شکل متجانس باشند، آنگاه متشابه‌اند.
② اگر تبدیلی شیب خطوط را حفظ کند، آن‌گاه جهت شکل را حفظ می‌کند.
③ اگر تبدیلی طولپا باشند، آنگاه اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند.
④ اگر تبدیلی همانی باشد، آنگاه تمام نقاط صفحه، نقطهٔ ثابت آن تبدیل هستند.

۱۴۶ معادلهٔ تصویر خط $۲y + x = ۶$، تحت تجانس به مرکز $O'(۲,۱)$ و نسبت تجانس $\frac{۳}{۲}$، کدام است؟

① $y + ۲x = ۲$
② $۲y + x = ۷$
③ $۲y + x = ۹$
④ $۳y + x = ۹$

۱۴۷ مربع $ABCD$ به طول ضلع ۴ مفروض است. مربع را با بردار $\overrightarrow{v}$ انتقال می دهیم تا مربع $A'B'C'D'$ به دست آید. اگر نقطهٔ A' روی ضلع BC قرار داشته باشد و $A'C = ۱$ ، اندازهٔ پاره‌خط DD' کدام است؟

① $۲\sqrt{۳}$
② $۴\sqrt{۲}$
③ $۲\sqrt{۶}$
④ ۵

۱۴۸ خط d را تحت انتقال با برداری به طول ۲ که راستای آن با خط d زاویهٔ ۳۰° می‌سازد، تصویر می‌کنیم تا خط d' به دست آید. اگر تصویر خط d'، تحت بازتاب نسبت به محور d، خط d'' باشد، آنگاه فاصلهٔ d' و d'' کدام است؟

① ۱
② ۲
③ $\sqrt{۳}$
④ $\frac{۳}{۲}$

۱۴۹ نقاط $(۵,۳)$،$(۷,۱)$و$(۱,-۱)$ سه راس از مثلث قائم الزاویه‌اند.مساحت مجانس این مثلث به مرکز تجانس مبدا مختصات و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

① ۲
② ۳
③ ۴
④ ۶

۱۵۰ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$ تحت تبدیل T که طولپا است به چهارضلعی $A'B'C'D'$ تبدیل شده است. اگر در ذوزنقهٔ $ABCD$ به مساحت ۲۱ واحد مربع، قاعدهٔ کوچک ۴ واحد کوتاه‌تر از قاعدهٔ بزرگ و ۲ واحد بلندتر از ارتفاع وارد بر قاعده‌ها باشد، محیط چهارضلعی $A'B'C'D'$ کدام است؟

① ۱۶ ② ۱۸ ③ ۲۰ ④ ۲۲

۱۵۱ یک مثلث به مساحت ۷۲ را تحت برداری که ابتدای آن یک رأس مثلث و انتهای آن محل همرسی میانه‌های مثلث است، انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ مشترک بین مثلث و تصویرش تحت این انتقال کدام است؟

① ۶ ② ۸ ③ ۹ ④ ۱۸

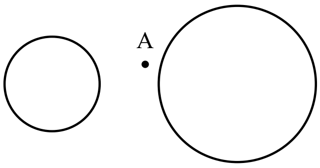
۱۵۲ تبدیل‌یافتهٔ مربعی به طول ضلع $۲\sqrt{۲}$ تحت تجانس به مرکز O و نسبت k، مربعی به طول قطر $۲\sqrt{۲}$ است. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۴ تحت این تجانس به مثلثی با کدام مساحت تبدیل می‌شود؟

① $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ② $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ③ $\sqrt{۳}$ ④ $۲\sqrt{۳}$

۱۵۳ نقاط A و B به‌ترتیب به فاصله‌های ۴ و ۹ از خط d مفروض‌اند. اگر نقاط A' و B' به‌ترتیب بازتاب نقاط A و B نسبت به خط d بوده و چهارضلعی $AA'B'B$ محیطی باشد، مساحت این چهارضلعی کدام است؟

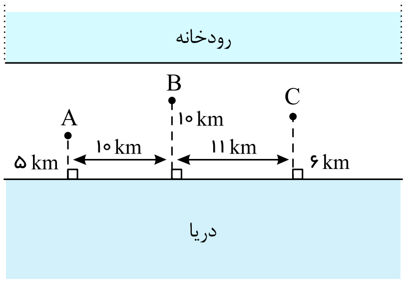
① ۱۲۰ ② ۱۳۲ ③ ۱۴۴ ④ ۱۵۶

۱۵۴ در شکل زیر می‌دانیم پاره‌خطی وجود دارد که دو سر آن روی دو دایره بوده و وسط آن منطبق بر نقطهٔ A است. با کدام تبدیل می‌توان این پاره‌خط را رسم کرد؟



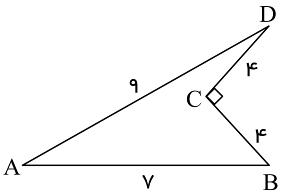
① دوران ② انتقال ③ بازتاب ④ تجانس مستقیم

۱۵۵ مطابق شکل، رودخانه‌ای موازی با قسمتی از ساحل یک دریا و به فاصلهٔ ۱۴ کیلومتر از آن قرار دارد. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم، به‌طوری که ۲ کیلومتر آن در ساحل دریا باشد و در ادامه جاده‌ای از B به C بسازیم به طوری‌که ۲ کیلومتر آن در ساحل رودخانه باشد. با توجه به اندازه‌های روی شکل، کمترین طول این جاده که از A به B و سپس به C می‌رود، چند کیلومتر است؟



① ۳۲ ② ۳۴ ③ ۳۶ ④ ۳۸

۱۵۶ دور زمینی مطابق شکل حصارکشی شده است. با جابه‌جایی حصارهای BC و CD بدون آنکه طول آنها تغییر کند، مساحت زمین را افزایش می‌دهیم. مقدار مساحت زمین چقدر می‌شود؟

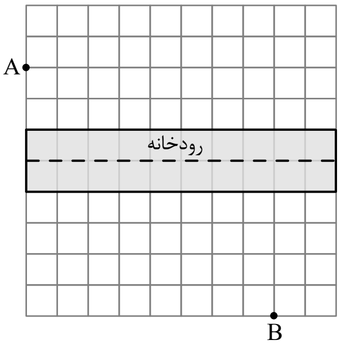


① $۸+۱۴\sqrt{۲}$
② $۱۴+۸\sqrt{۲}$
③ $۱۶+۱۴\sqrt{۲}$
④ $۱۴+۱۶\sqrt{۲}$

۱۵۷ دو دایرهٔ $C(O,۲)$ و $C'(O',۴)$ با طول خطالمرکزین $OO'=۹$ به مرکز A متجانس مستقیم و به مرکز B متجانس معکوس یکدیگرند. فاصلهٔ A و B از هم چقدر است؟

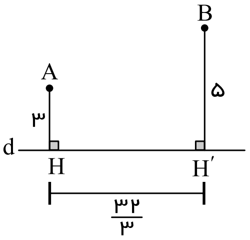
① ۱۰
② ۱۲
③ ۱۵
④ ۱۸

۱۵۸ یک رودخانه و دو نقطهٔ A و B مطابق شکل مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطهٔ A به نقطهٔ B برویم به‌طوری که برای عبور از رودخانه باید از پل عمود بر لبهٔ رودخانه استفاده کنیم. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن کدام است؟ (فاصلهٔ بین نقاط شبکه‌ای یک واحد است).



① $\sqrt{۱۳۶}+۲$
② $۸\sqrt{۲}+۲$
③ ۱۲
④ ۱۱

۱۵۹ در شکل زیر، نقطهٔ M را روی خط d طوری به دست می‌آوریم که $AM+BM$ کمترین مقدار را داشته باشد. طول AM چقدر است؟



① ۵
② ۶
③ ۴
④ ۳

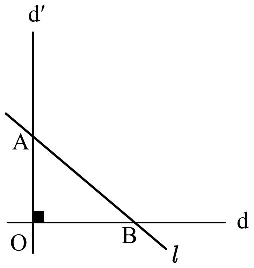
۱۶۰ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع ۸، به مرکز محل همرسی میانه‌ها و با نسبت‌های $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ مجانس رأس‌های C, B, A را به دست می‌آوریم تا به‌ترتیب مثلث‌های $A'B'C'$ و $A''B''C''$ پدید آیند. حاصل $A'A''+B'B''+C'C''$ چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

① ۱۲
② ۱۶
③ ۸
④ ۶

۱۶۱ اگر A' مجانس A در تجانس به مرکز O و با نسبت ۳ و O' مجانس O در تجانس به مرکز A و با نسبت -۲ باشد، نسبت $\frac{A'O'}{AO}$ کدام است؟

① صفر
② ۱
③ ۴
④ ۵

۱۶۲ در شکل $۲OA = OB = ۴$ است. خط l را در تجانس مستقیم به مرکز O و با نسبت تجانس k تصویر می‌کنیم و آن را l' می‌نامیم. اگر مساحت بین خط‌های l و l' و خطوط d و d'، ۸ واحد مربع باشد، نسبت تجانس کدام است؟

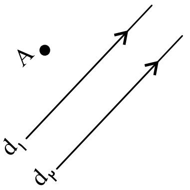


① $\sqrt{۵}$
② $\sqrt{۶}$
③ $\sqrt{۲}$
④ $\sqrt{۳}$

۱۶۳ در مثلث ABC با طول اضلاع $AB = ۲, AC = ۲\sqrt{۳}, BC = ۴$، نقطه M وسط ضلع AB است. M' بازتاب M نسبت به خط BC و همچنین M'' بازتاب M' نسبت به خط AC است. طول پاره‌خط MM'' کدام است؟

① $\sqrt{۱۰}$
② $\sqrt{۱۳}$
③ $\sqrt{۱۵}$
④ $\sqrt{۱۷}$

۱۶۴ در شکل، فاصلهٔ دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ برابر k واحد است. نقطهٔ A به فاصلهٔ $\frac{k}{۲}$ واحد از خط $d_۱$ قرار دارد. اگر نقطهٔ A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط $d_۲$ و نقطهٔ A'' بازتاب نقطهٔ A' نسبت به خط $d_۱$ باشد، فاصلهٔ AA'' کدام است؟



① k
② $۲k$
③ $۳k$
④ $۴k$

۱۶۵ نقطهٔ $A(x, ۲)$ را در تجانس به مرکز $M(۲, -۱)$ و نسبت تجانس ۳ تصویر می‌کنیم، سپس نقطهٔ حاصل را در تجانس به مرکز $N(-۳, ۱)$ و نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ تصویر می‌کنیم. اگر نقطهٔ نهایی $B(۳, y)$ باشد، مقدار مثبت x کدام است؟

① $\frac{۱۹}{۳}$
② $\frac{۱۳}{۳}$
③ $\frac{۷}{۳}$
④ $\frac{۱}{۳}$

۱۶۶ نقطه $A(-۳, ۴)$ در صفحه مختصات قرار دارد. نقطهٔ A را یک بار نسبت به خط $y = x$ بازتاب داده و بار دیگر نسبت به محور yها بازتاب می‌دهیم و تصاویر را به‌ترتیب B و C می‌نامیم. اگر D دوران یافته نقطه B حول نقطه C به اندازه ۱۲۰ درجه در جهت مثلثاتی باشد، طول پاره‌خط BD کدام است؟

① $۱۰\sqrt{۲}$
② $۵\sqrt{۶}$
③ ۱۰
④ $۸\sqrt{۳}$

۱۶۷ حاصل دو بازتاب محوری متوالی نسبت به دو خط متقاطع غیرمتعامد، یک .... است که شیب خط را ....

① انتقال – حفظ نمی‌کند
② دوران – حفظ می‌کند
③ انتقال – حفظ می‌کند
④ دوران – حفظ نمی‌کند

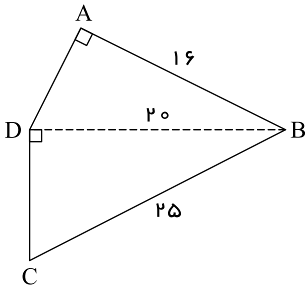
۱۶۸ مثلثی را با بردار انتقالی موازی با یکی از اضلاع و با اندازهٔ نصف آن ضلع انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیهٔ مشترک بین مثلث و تصویر آن، چه کسری از مساحت مثلث است؟

① $\frac{۱}{۴}$
② $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
③ $\frac{۱}{۲}$
④ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۶۹ نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O, R)$ قرار دارد. با دورانی به مرکز O و زاویهٔ ۶۰°، نقطهٔ A' حاصل می‌شود. اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر AA' برابر $۳\sqrt{۳}$ باشد، مساحت قطاع AOA' کدام است؟

① ۲π
② ۳π
③ ۴π
④ ۶π

۱۷۰ در چهارضلعی $ABCD$، یکی از اضلاع را حذف کرده و بقیهٔ شکل را نسبت به ضلع فوق، بازتاب می‌دهیم. حداقل مقدار محیط شش‌ضلعی به‌دست‌آمده کدام است؟



① ۷۸
② ۸۶
③ ۹۲
④ ۹۶

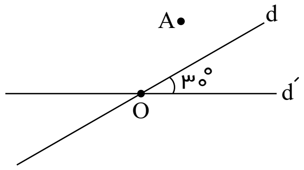
۱۷۱ یک دوازده‌ضلعی منتظم را حول مرکز آن، α درجه دوران می‌دهیم تا بر خودش منطبق شود. α کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

① ۱۵ ② ۴۵ ③ ۷۵ ④ ۹۰

۱۷۲ دایرهٔ $C(O,۲+m)$ را به مرکز نقطهٔ دلخواه A (که واقع بر دایرهٔ C نیست) و زاویهٔ ۹۰° دوران می‌دهیم، تا بر دایرهٔ $C'(O',۳m-۲)$ منطبق شود. اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایرهٔ اولیهٔ $۴\sqrt{۳}$ باشد، نسبت طول مماس مشترک خارجی به طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟

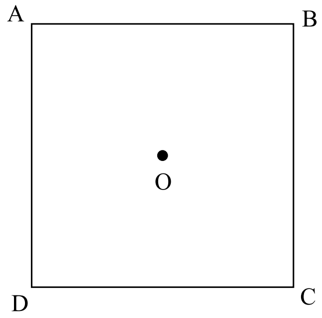
① $\sqrt{۲}$ ② $\sqrt{۳}$ ③ ۲ ④ $\sqrt{۶}$

۱۷۳ دو خط d و d' با زاویهٔ ۳۰° در نقطهٔ O متقاطع هستند. بازتاب نقطهٔ A را نسبت به d نقطهٔ A' و همچنین بازتاب نقطهٔ A' را نسبت به خط d' نقطهٔ A'' می‌نامیم. طول پاره‌خط AA'' کدام است؟ $(OA=۴\sqrt{۳})$



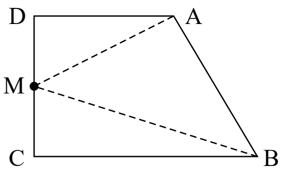
① $۶\sqrt{۳}$ ② ۶
③ ۴ ④ $۴\sqrt{۳}$

۱۷۴ مربعی به مرکز O نمایش داده شده است. اگر طول قطر مربع $۶\sqrt{۲}$ باشد و این مربع با تجانسی به مرکز O و نسبت $\frac{۱}{۳}$، تصویر شود، مساحت بین مربع $ABCD$ و مجانس آن کدام است؟



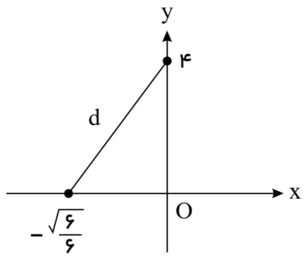
① ۲۴
② ۳۲
③ ۴۸
④ ۶۴

۱۷۵ در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$، اندازه‌های $CB=CD=۶$ و $AD=۲$ هستند. نقطهٔ M روی ساق قائم CD متحرک است. کمترین مقدار $MA+MB$، کدام است؟



① ۱۰ ② ۱۰٫۵
③ ۱۱ ④ ۱۱٫۵

۱۷۶ در شکل زیر، خط d را در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس $\sqrt{\sqrt{۶}+۱}$ بر خط d' تصویر می‌کنیم. مساحت محصور بین دو خط d و d' و محورهای مختصات کدام است؟



① $\sqrt{۲}$
② ۲
③ $\sqrt{۳}$
④ $\sqrt{۶}$

۱۷۷ مربعی به ضلع $\sqrt{۲}$ واحد و دایره‌ای به قطر ۸ واحد مفروض‌اند. فاصلهٔ مرکز دایره تا محل تلاقی قطرهای مربع برابر ۲۰ واحد است. اگر متجانس این مربع در یک تجانس معکوس داخل دایرهٔ محاط شود، آنگاه فاصلهٔ مرکز تجانس تا مرکز دایره کدام است؟

(۱) ۱۲
(۲) ۱۴
(۳) ۱۶
(۴) ۱۸

۱۷۸ دایرهٔ $C(O,۹)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱۲ واحد از مرکز آن مفروض است. این دایره را در تجانس به مرکز M و نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ بر دایرهٔ C' تصویر می‌کنیم. وضعیت این دو دایره چگونه است؟

(۱) متداخل
(۲) متخارج
(۳) مماس داخل
(۴) متقاطع

۱۷۹ تصویر مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۲\sqrt{۳}$ واحد را در تجانسی به مرکز یکی از رأس‌های آن و نسبت $k=-۲$ به‌دست می‌آوریم. فاصلهٔ نقاط همرسی میانه‌های دو مثلث کدام است؟

(۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

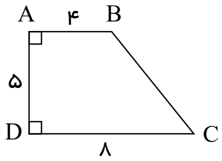
۱۸۰ اگر $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ تحت تجانس به مرکز A و نسبت $k=۲$ و $A''B''C''D''$ مجانس $A'B'C'D'$ تحت تجانس به‌مرکز C و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ باشد، مساحت سطح محصور بین $A'B'C'D'$ و $A''B''C''D''$ ، چند برابر مساحت $ABCD$ است؟

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۸۱ دو خط عمود برهم d و d' مفروض‌اند. نقاط صفحه را ابتدا نسبت به خط d و سپس تصاویر آن‌ها را نسبت به d' بازتاب می‌دهیم. اگر ترکیب این دو بازتاب را یک تبدیل فرض کنیم، کدام گزاره درمورد این تبدیل همواره درست است؟

(۱) این تبدیل، شیب خطوط و جهت اشکال را حفظ می‌کند.
(۲) این تبدیل، شیب خطوط و جهت اشکال را حفظ نمی‌کند.
(۳) این تبدیل، شیب خطوط را حفظ کرده ولی جهت اشکال را حفظ نمی‌کند.
(۴) این تبدیل، جهت اشکال را حفظ کرده ولی شیب خطوط را حفظ نمی‌کند.

۱۸۲ در ذوزنقهٔ شکل زیر، اگر M نقطهٔ دلخواهی از ساق قائم باشد، کمترین مقدار $MB+MC$ کدام است؟



(۱) ۱۲٫۵
(۲) ۱۳
(۳) ۱۳٫۵
(۴) ۱۴

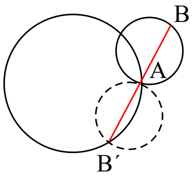
۱۸۳ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را که در آن طول اضلاع قائمهٔ برابر $AB=۲$ و $AC=۴$ است، به مرکز C و به اندازه ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. اگر B' تصویر نقطهٔ B در این دوران باشد، طول BB' کدام است؟

(۱) $۲\sqrt{۵}$
(۲) $۲\sqrt{۱۰}$
(۳) $۵\sqrt{۲}$
(۴) ۵

پاسخنامه تشریحی

۱

۴ ۳ ۲ ۱



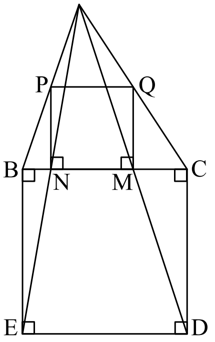
اگر دایرهٔ کوچک‌تر را نسبت به نقطهٔ A (نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ کوچک و بزرگ) بازتاب دهیم، دایرهٔ خط‌چین به‌دست می‌آید. واضح است که $AB = AB'$ زیرا نقطهٔ B' بازتاب نقطهٔ B نسبت به مرکز A است. از طرفی، AB' وتری از دایرهٔ بزرگ‌تر است. بنابراین از نقطهٔ A خطی گذشته (خط BB' که در دو دایرهٔ بزرگ و کوچک، وترهای مساوی جدا کرده است (وتر AB در دایرهٔ کوچک = وتر AB' در دایرهٔ بزرگ). پس گزینهٔ (۴) (یعنی بازتاب نسبت به نقطهٔ A) ما را به مقصود رسانده است.

۲

۴ ۳ ۲ ۱

مطابق شکل، روی ضلع BC و خارج آن، مربع $BCDE$ را بنا می‌کنیم. پاره‌خط‌های AD و AE ضلع BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. اگر از نقاط M و N عمودهایی بر ضلع BC وارد کنیم، نقاط تقاطع P و Q با اضلاع دیگر مثلث به‌دست می‌آید. به‌راحتی می‌توان نشان داد که مربع $MNPQ$ همان مربع موردنظر است، زیرا داریم:

$$\begin{cases} BE||PN : \frac{PN}{BE} = \frac{AP}{AB}\frac{AN}{AE} \\ CD||QM : \frac{QM}{CD} = \frac{AQ}{AC} = \frac{AM}{AD} \\ MN||DE : \frac{MN}{DE} = \frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AD} \end{cases} \Rightarrow$$ اضلاع $MNPQ$ باهم برابرند.



پس کافیست مربعی روی ضلع BC بنا کرده، سپس به مرکز A و نسبت تجانس $k = \frac{h_a}{a = h_a}$، این مربع را تصویر کنیم.

توجه: برای یافتن مقدار نسبت تجانس K، کافیست ارتفاع AH را رسم کرده و از قضیهٔ تالس (مشابه بالا) استفاده کنید.

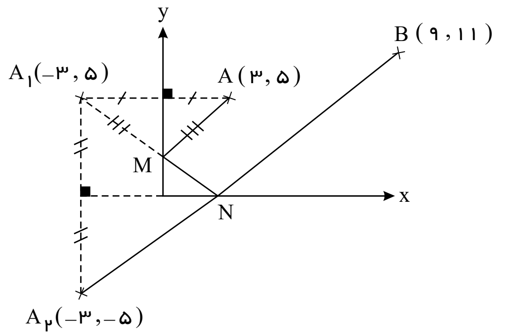
۳

۴ **۳** ۲ ۱

باید مسیر کوتاه را به‌دست آوریم. A را ابتدا نسبت به محور yها و سپس نقطهٔ حاصل را نسبت به محور xها بازتاب می‌کنیم:

$A_۱$: قرینهٔ A نسبت به محور yها است.

$A_۲$: قرینهٔ $A_۱$ نسبت به محور xها است.



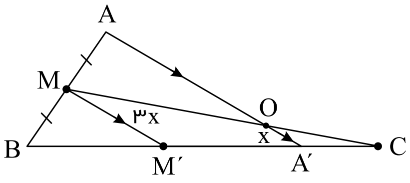
کمترین اندازهٔ خط شکسته $AMNB$ برابر می‌شود با:

$$|AMNB| = |A_۲B| = \sqrt{(x_B - x_{A_۲})^۲ + (y_B - y_{A_۲})^۲} = \sqrt{(۹ + ۳)^۲ + (۱۱ + ۵)^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵۶} = ۲۰$$

۴

۴ **۳** ۲ ۱

از M خطی موازی AA' رسم می‌کنیم تا BA' را در M' قطع کند.



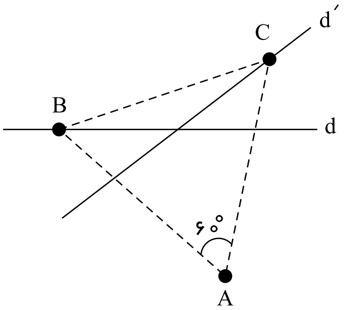
فرض : $\frac{OC}{OM}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{OC}{CM}=\frac{۱}{۳}$

$\overset{\Delta}{MM'C}:OA'||MM'\xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}}\frac{OC}{OM}=\frac{OA'}{MM'}=\frac{۱}{۳}\rightarrow\begin{cases}OA'=x\\MM'=۳x\end{cases}$

$|K|=\frac{OA'}{OA}=\frac{x}{۵x}=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{\text{تجانس معکوس است}}K=-\frac{۱}{۵}\overset{\Delta}{ABA'}:MM'||AA'\xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}}\frac{BM}{BA}=\frac{MM'}{AA'}\rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۳x}{OA+x}\rightarrow OA+x=۶x\rightarrow OA=۵x$

۵ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴]

$ABC \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ\ ,\ AB=AC\Rightarrow R_A^{۶۰^\circ}(B)=C$ متساوی‌الاضلاع است.



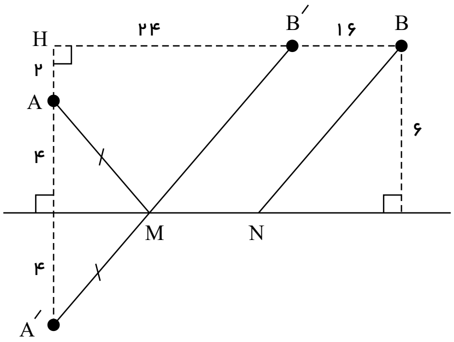
دوران خط d به مرکز A و زاویهٔ ۶۰، خط d' را در نقطهٔ C قطع می‌کند. همچنین دوران خط d' به مرکز A و زاویهٔ (-۶۰°)، خط d را در نقطهٔ B قطع می‌کند.

۶ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴] نقطهٔ C دوران‌یافتهٔ نقطهٔ B حول نقطهٔ A است. (زاویهٔ دوران ۵۰°)

نقطهٔ D دوران‌یافتهٔ نقطهٔ E حول نقطهٔ A است. (زاویهٔ دوران ۵۰°)

پس پاره‌خط CD دوران‌یافتهٔ BE حول نقطهٔ A است (زاویهٔ دوران ۵۰°). بنابراین، زاویهٔ بین BE و CD برابر ۵۰° است. بنابراین $\alpha=۱۳۰^\circ$ است.

۷ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴



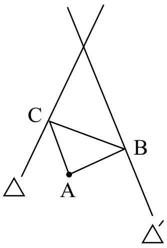
$$\overset{\Delta}{A'HB'}:\ A'H^۲+HB'^۲=A'B'^۲$$

$$\rightarrow ۱۰^۲+۲۴^۲=A'B'^۲\rightarrow A'B'^۲=۶۷۶\rightarrow A'B'=۲۶$$

$$AMNB\ \text{اندازهٔ مسیر}=AM+BN+MN$$

$$\rightarrow (A'M+MB')+MN=A'B'+MN=۲۶+۱۶=۴۲$$

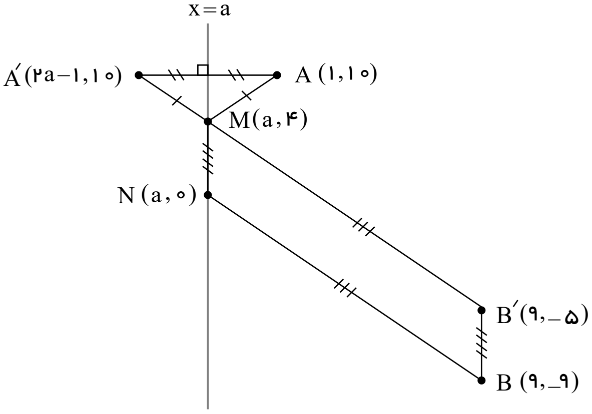
۸ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴ مسأله را حل‌شده فرض می‌کنیم. مطابق شکل، مثلث ABC $(\angle A=۹۰^\circ)$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است $AC=AB$. با دوران ۹۰° حول نقطهٔ A خطوط Δ و Δ' دوران می‌دهیم تا با برخورد با خطوط Δ و Δ' نقاط B و C حاصل شود.



۹ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴ در دوران تبدیل‌یافته، مرکز دوران حول خودش، خودش می‌شود. در بازتاب (تقارن محوری)، تبدیل‌یافته هر نقطه روی محور بازتاب، برخود آن نقطه تصویر می‌شود. در تجانس، متجانس مرکز تجانس خودش می‌شود. ولی در انتقال، تبدیل هیچ نقطه‌ای از صفحه بر خودش منطبق نمی‌شود.

۱۰ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴ الف) اگر فرض کنیم A و B در یک طرف خط $x=a$ قرار داشته باشند، آنگاه برای محاسبهٔ کمترین طول خط شکسته $AMNB$ داریم:

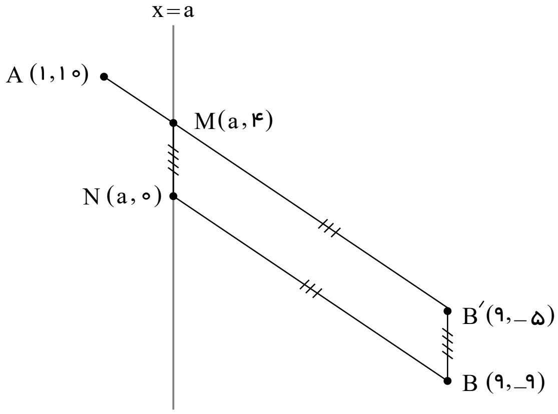
$$AM + MN + NB = (A'M + MB') + MN = A'B' + MN = A'B' + ۴$$
$$= \sqrt{(۲a - ۱۰)^۲ + ۱۵^۲} + ۴$$



عبارت بالا به‌ازای $a = ۵$ حداقل می‌گردد. اما به‌ازای این مقدار a نقاط A و B در دو طرف خط $x = ۵$ واقع می‌شوند که با فرض اولیه در تناقض است.

ب) اگر فرض کنیم A و B در دو طرف خط $x = a$ قرار داشته باشند، آنگاه برای محاسبهٔ کمترین طول خط شکستهٔ $AMNB$ داریم:

$$AM + MN + NB = (AM + MB') + MN = AB' + MN = AB' + ۴$$
$$= \sqrt{(۹ - ۱)^۲ + (-۵ - ۱۰)^۲} + ۴ = \sqrt{۸^۲ + ۱۵^۲} + ۴ = ۱۷ + ۴ = ۲۱$$

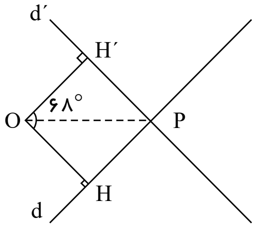


۱۱ ۴ ۳ **۲** ۱

برای دوران خط d حول نقطهٔ O ابتدا از O به d عمود کرده (پای عمود H)، در نقطهٔ O زاویهٔ $H'OH$ را برابر ۶۸° ساخته طوری که $OH' = OH$

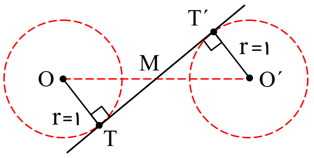
سپس در H' خط d' را بر OH' عمود می‌کنیم. (d' دوران‌یافتهٔ d به اندازهٔ ۶۸° حول O است) OP نیمساز زاویهٔ O است. پس:

$$\angle OPH = \frac{۱۸۰^\circ - ۶۸^\circ}{۲} = ۵۶^\circ$$



۱۲ ۴ **۳** ۲ ۱ انتقال طولپاست پس شعاع‌های دو دایره برابرند:

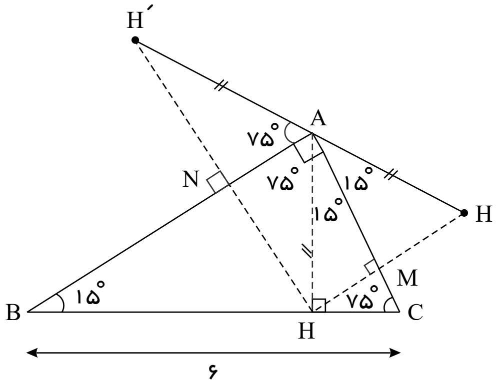
$$۳ - a = a - ۱ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow \text{شعاع دو دایره } r = ۳ - ۲ = ۱$$



$$TT' = ۳ \Rightarrow MT = MT' = \frac{۳}{۲}$$
$$\overset{\Delta}{MT}O : OT = r = ۱ \quad , \quad MT = \frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow OM^۲ = ۱^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۱۳}{۴} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$
$$\Rightarrow OO' = ۲ \times \frac{\sqrt{۱۳}}{۲} = \sqrt{۱۳}$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^۲ - (r - r)^۲} = OO' = \sqrt{۱۳}$$

۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴



$$\hat{A}=۹۰^\circ \ , \ \hat{B}=۱۵^\circ \ \rightarrow \ \hat{C}=۷۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{بازتاب } H \text{ نسبت به } AB \ \ H' \rightarrow AH=AH' \\ \text{بازتاب } H \text{ نسبت به } AC \ \ H'' \rightarrow AH=AH'' \end{array}\right\} \rightarrow AH'=AH''$$

از سال قبل می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه که یک زاویهٔ آن ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ است. پس:

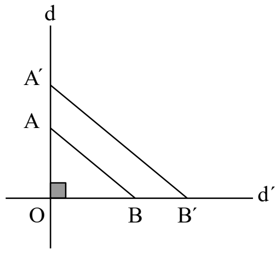
$$\rightarrow H'H''=۲AH \xrightarrow{AH=\frac{۱}{۴}BC} H'H''=\frac{۱}{۲}BC=۳$$

۱۴ ۱ **۲** ۳ ۴

مطابق شکل $A'B'$ مجانس AB به مرکز O و نسبت تجانس $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ می‌باشد.

توجه کنیم که $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}>۱$ می‌باشد و پس $A'B'>AB$.

داریم:



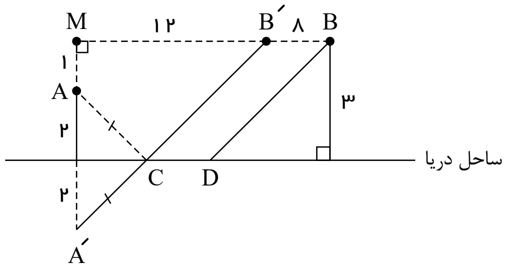
$$S_{\overset{\triangle}{AOB}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\sqrt{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{A'OB'}}}{S_{AOB}}=\left(\sqrt{۱+\sqrt{۲}}\right)^{۲} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{A'OB'}}=(۱+\sqrt{۲})\times\frac{۱}{۴}\times\sqrt{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{A'OB'}}=\frac{۱}{۴}\times\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}+۱\right)$$

$$S_{\text{بین دو خط}}=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}+۱\right)-\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

۱۵ ۱ **۲** ۳ ۴

مطابق شکل، A را نسبت به ساحل دریا، بازتاب می‌دهیم تا به نقطهٔ A' برسیم. داریم:

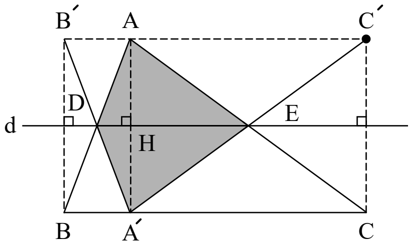


$$A'\overset{\triangle}{M}B' : A'B'^{۲}=A'M^{۲}+B'M^{۲} \rightarrow A'B'^{۲}=۵^{۲}+۱۲^{۲} \rightarrow A'B'^{۲}=۱۶۹ \rightarrow A'B'=۱۳$$

$$\Rightarrow ABCD \ \text{کوتاه‌ترین مسیر}=AC+\underbrace{CD}_{۸}+DB \xrightarrow{A'B'=AC+DB} \text{کوتاه‌ترین مسیر}=۸+۱۳=۲۱$$

۱۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

چون D و E وسط اضلاع هستند، بنابراین با توجه به شکل داریم:



$$DE \parallel BC \ \ , \ \ DE=\frac{BC}{۲} \Rightarrow AH=HA'$$

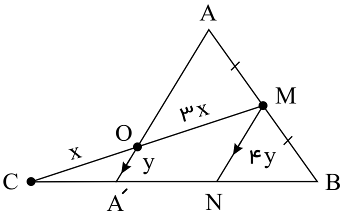
در بازتاب B و C نسبت به d نقاط B' و C' به‌دست می‌آید و بازتاب A (نقطهٔ A') روی ضلع BC قرار می‌گیرد.

پس:

$$S_{ADA'E} = ۶ \ , \ \ \overset{\triangle}{AD}E \cong A'\overset{\triangle}{D}E \to S_{\overset{\triangle}{AD}E} = ۳$$

$$\overset{\triangle}{AD}E \sim \overset{\triangle}{AB}C \to \frac{S_{\overset{\triangle}{AD}E}}{S_{\overset{\triangle}{AB}C}} = (\frac{DE}{BC})^۲ = \frac{۱}{۴} \to S_{\overset{\triangle}{AB}C} = ۴S_{ADE} = ۴(۳) = ۱۲$$

۱۷ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ ابتدا از نقطهٔ M خطی به موازات OA' رسم می‌کنیم تا پاره‌خط BC را در نقطهٔ N قطع کند. طبق فرض مسئله داریم:



$$\frac{OC}{OM} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow OC = x \ , \ OM = ۳x \ , \ CM = ۴x$$

$$M\overset{\triangle}{N}C : MN || OA' \Rightarrow \frac{OA'}{MN} = \frac{OC}{CM} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} OA' = y \\ MN = ۴y \end{cases}$$

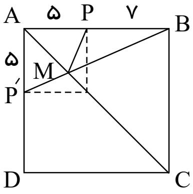
$$A\overset{\triangle}{A'}B : AA' || MN \Rightarrow \frac{MN}{AA'} = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{MN}{AA'} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۴y}{OA + y} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow OA + y = ۸y \Rightarrow OA = ۷y$$

حال، طبق تعریف تجانس داریم:

$$|k| = \frac{OA'}{OA} = \frac{y}{۷y} = \frac{۱}{۷} \xrightarrow{\text{تجانس معکوس}} k = -\frac{۱}{۷}$$

۱۸ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ اگر رأس دیگر مثلث را M فرض کنیم، برای یافتن نقطهٔ M به‌طوری‌که محیط مثلث PBM حداقل باشد، باید کمترین مقدار $PM + BM$ را پیدا کنیم. (مقدار $PB = ۷$ مشخص است.) برای این کار از روش هرون کمک می‌گیریم.

نقطهٔ P را نسبت به AC بازتاب داده و P' می نامیم. نقطهٔ M محل برخورد $P'B$ با AC است.



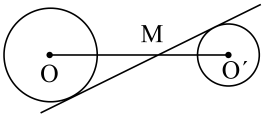
با توجه به شکل داریم:

$$PM + BM = P'M + BM = P'B$$

$$\overset{\triangle}{BAP'} : P'B^۲ = \underbrace{AP'^۲}_{۵} + \underbrace{AB^۲}_{۱۲} \Rightarrow P'B = ۱۳$$

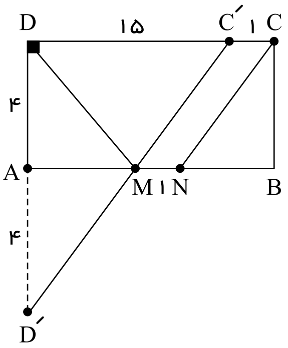
$$PBM \text{ محیط مثلث } = \underbrace{PM + BM}_{۱۳} + \underbrace{PB}_{۷} = ۲۰$$

۱۹ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ M مرکز تجانس معکوس دو دایره نقطه تلاقی مماس مشترک داخلی دو دایره با خط‌المرکزین می‌باشد، داریم:



$$\frac{MO}{MO'} = \frac{R}{R'} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{MO}{۱۲ - MO} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow MO = \frac{۶۰}{۸} = ۷/۵$$

۲۰ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱



برای پیدا کردن کمترین مقدار محیط ذوزنقه، C را با بردار $\overrightarrow{NM}$ انتقال می‌دهیم تا C' به‌دست آید. سپس D را نسبت به AB بازتاب می‌دهیم تا D' حاصل شود. محل تلاقی $C'D'$ با AB را M می‌نامیم و با بردار $\overrightarrow{C'C}$ انتقال می‌دهیم تا N ایجاد شود.

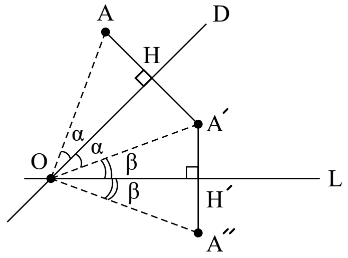
مسیر $DMNC$ کوتاه‌ترین مسیر است و داریم:

$$D\overset{\Delta}{D'}C' : D'C'^{۲} = DD'^{۲} + DC'^{۲} = ۸^{۲} + ۱۵^{۲} = ۱۷^{۲} \Rightarrow D'C' = ۱۷$$

$$DCNM \text{ محیط ذوزنقه } = DC + CN + MN + DM = ۱۶ + MC' + ۱ + D'M = ۱۷ + D'C' = ۱۷ + ۱۷ = ۳۴$$

۲۱ (۴) (۳) **(۲)** (۱) با توجه به شکل A' بازتاب A نسبت به خط D و A'' بازتاب A' نسبت به خط L می‌باشد. با توجه به شکل داریم:

پس:



$$H\hat{O}H' = \alpha + \beta = ۴۵^\circ \to A\hat{O}A'' = ۲\underbrace{(\alpha + \beta)}_{۴۵^\circ} = ۹۰^\circ$$

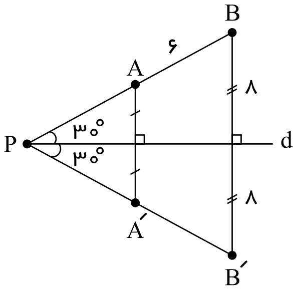
پس مثلث AOA'' یک مثلث قائم‌الزاویه است. درنتیجه:

$$OA = OA'' = ۱ \to AA'' = \sqrt{۲}$$

۲۲ (۴) **(۳)** (۲) (۱) چون بازتاب طولپاست، بنابراین:

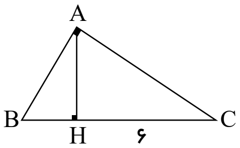
$$PB = PB' \xrightarrow{\hat{P}=۶۰^\circ} PB = PB' = BB' = ۱۶$$

(مثلث PBB' متساوی‌الاضلاع است)



$$\to PA = PB - AB = ۱۰ \to \frac{PA}{PB'} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

۲۳ (۴) (۳) (۲) **(۱)**



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \to ۹۰^\circ + ۵\hat{C} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$
$$\to \hat{C} = ۱۵^\circ , \hat{B} = ۵\hat{C} = ۵ \times ۱۵^\circ = ۷۵^\circ$$

می‌دانیم اگر در مثلث قائم‌الزاویه یکی از زوایا ۱۵ درجه باشد، آنگاه طول ارتفاع وارد بر وتر، یک چهارم طول وتر است.

$$۱۵^\circ \text{ ارتفاع روبه‌رو به } AH = \frac{BC}{۴} = \frac{۱}{۴} \times ۶ = \frac{۳}{۲}$$
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times ۶ = \frac{۹}{۲}$$

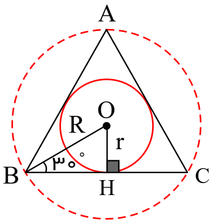
چون تبدیل طولپا است بنابراین مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC هم‌نهشت است.

$$S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} = S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۹}{۲}$$

۲۴ (۴) (۳) **(۲)** (۱) در هر تجانس تنها نقطه ثابت، مرکز تجانس می‌باشد. بنابراین مرکز دایره محاطی داخلی مثلث، مرکز تجانس می‌باشد. به این ترتیب مرکز دو دایره بر هم منطبق است و این تنها در مثلث متساوی‌الاضلاع ممکن می‌باشد. همچنین k برابر است با نسبت شعاع‌های دو دایره.

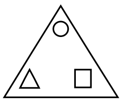
داریم:

$$O : K = \frac{R}{r} = \frac{۱}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲ \text{ مرکز تجانس}$$

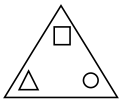


۲۵ **(۴)** (۳) (۲) (۱)

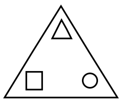
در قرینهٔ شکل نسبت به خط $L_۱$، جای مثلث و مربع تعویض می‌شود.



در قرینهٔ این شکل نسبت به خط L_2، جای مربع و دایره عوض می‌شود.

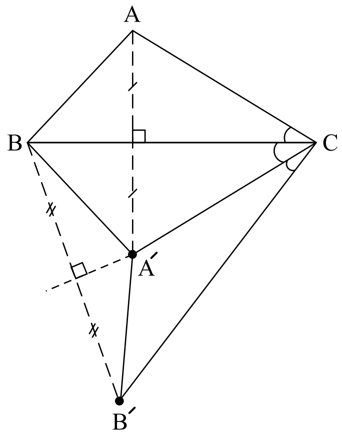


در قرینهٔ شکل نسبت به خط L_3، جای مثلث و مربع تعویض می‌شود.



۲۶ ۴ ۳ **۲** ۱

ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، یک دوران نسبت به محل برخورد دو محور یعنی نقطه C و با زاویه‌ای مساوی با دوبرابر زاویه بین دو محور یعنی $2\hat{C}$ می‌باشد.



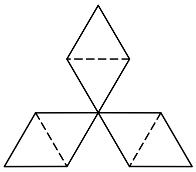
۲۷ ۴ **۳** ۲ ۱

ویژگی نوع تبدیل	شیب حفظ می‌شود.	جهت حفظ می‌شود.
بازتاب محوری	×	×
انتقال	✓	✓
دوران	×	✓
تجانس	✓	✓

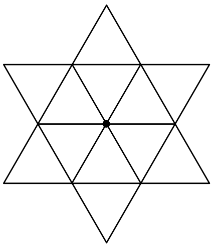
تذکر: مطابق کتاب درسی، منظور از جهت، ساعتگرد یا پادساعتگرد می‌باشد.

۲۸ ۴ **۳** ۲ ۱

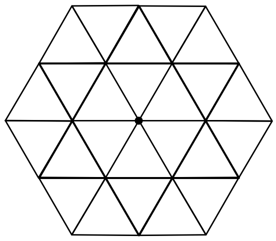
به کمک تبدیل بازتاب می‌توان بدون تغییر محیطی مساحت شکل را در دو مرحله افزایش داد.



→ شکل اولیه از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت تشکیل شده است.



$\xrightarrow{\text{مرحله ۱}}$ **۱۲** مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت هستند.

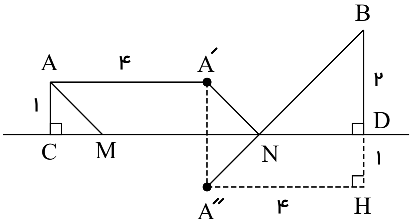


$\xrightarrow{\text{مرحله ۲}}$ **۲۴** مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت هستند. $\Rightarrow \dfrac{\text{مساحت شکل جدید}}{\text{مساحت شکل اولیه}} = \dfrac{۲۴}{۶} = ۴$

۲۹ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا نقطهٔ A را با برداری موازی CD (به طرف راست) مطابق شکل و به اندازهٔ ۴ واحد بر نقطهٔ A' تصویر می‌کنیم. قرینهٔ A' را نسبت به CD نقطهٔ A'' می‌نامیم. خط $A''B$ را رسم می‌کنیم تا CD را در نقطه‌ای مانند N قطع کند، حال MN را به‌اندازهٔ ۴ واحد روی خط CD جدا می‌کنیم. داریم:

$$A''B^۲ = BH^۲ + A''H^۲ \to A''B^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \to A''B = ۵ \xrightarrow[A'N=AM]{A''N=A'N}$$

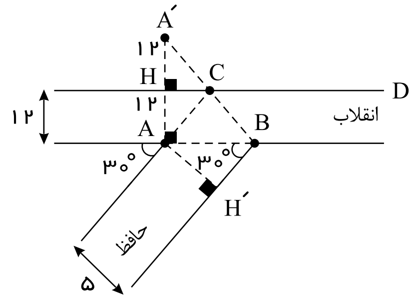
$$\Rightarrow \ min(AM + MN + NB) = (AM + NB) + MN = A''B + MN = ۵ + ۴ = ۹$$



۳۰ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا بازتاب A نسبت به خط D را A' می‌نامیم. خط $A'B$ خط D را در C قطع می‌کند. طول کوتاهترین مسیر برابر $AC + CB$ خواهد بود.

AC میانه وارد بر وتر است. $AH = A'H \xrightarrow[\text{تالس}]{HC\|AB} A'C = CB \to$

بنابراین: $AC = A'C = BC$.



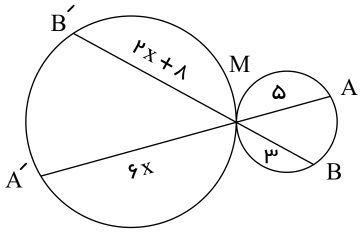
$$A\overset{\triangle}{H'}B : (\text{ضلع مقابل به } ۳۰^\circ)AH' = \frac{۱}{۲}AB \to ۵ = \frac{۱}{۲}AB \to AB = ۱۰$$

$$A\overset{\triangle}{A'}B(\text{فیثاغورس}) : A'B^۲ = AB^۲ + AA'^۲ \to A'B^۲ = ۱۰^۲ + ۲۴^۲ \to A'B = ۲۶$$

کوتاه‌ترین مسیر : $AC + CB = A'B = ۲۶$

۳۱ ۴ **۳** ۲ ۱ نقطهٔ M مرکز تجانس معکوس دو دایرهٔ مماس خارج است. (مرکز تجانس همواره روی خط‌المرکزین و یا امتداد آن قرار دارد) حال، بنابر تعریف تجانس داریم:

$$\begin{cases} |k| = \frac{A'M}{AM} = \frac{۶x}{۵} \\ |k| = \frac{B'M}{BM} = \frac{۲x+۸}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۶x}{۵} = \frac{۲x+۸}{۳}$$

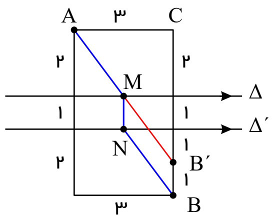


$$\Rightarrow ۱۸x = ۱۰x + ۴۰ \Rightarrow x = ۵$$

۳۲ **۴** ۳ ۲ ۱ نقطهٔ B را به اندازهٔ فاصلهٔ بین Δ و Δ' روی BC به بالا منتقل می‌کنیم تا B' به دست می‌آید. از A به B' وصل می‌کنیم تا Δ را در M قطع کند. مسیر $AMNB$ کوتاهترین مسیر ممکن است و طول آن برابر است با:

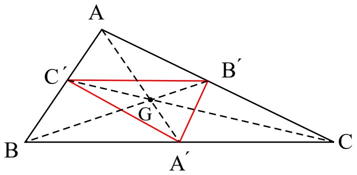
$$AMNB \text{ طول مسیر} = AM + MN + \overset{MB'}{\cancel{NB}}$$

$$= AB' + MN = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} + ۱ = ۵ + ۱ = ۶$$



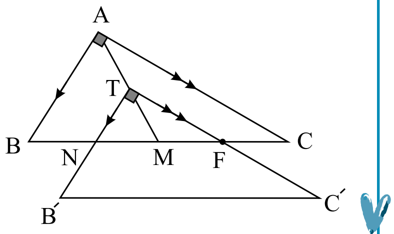
۳۳ ۴ ۳ **۲** ۱

چون نقاط A' و B' و C' اوساط اضلاع هستند، پس A' که متناظر A است را به‌هم وصل کرده و B' که متناظر B است را نیز به‌هم وصل کرده این دو (میانه ها) همدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که مرکز تجانس است. پس مرکز تجانس نقطهٔ همرسی سه میانه مثلث و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ است.



$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA} \ , \ \overrightarrow{GB'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB} \ , \ \overrightarrow{GC'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GC}$$

۳۴ ۴ ۳ ۲ **۱**



$$\overset{\Delta}{NTF} \sim \overset{\Delta}{ABC} \rightarrow \text{نسبت مساحت} = (\text{نسبت تشابه})^۲ = (\text{نسبت میانه‌های نظیر})^۲$$

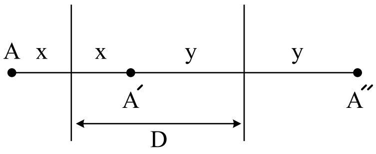
$$\rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{NFT}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = (\frac{TM}{AM})^۲ = \frac{۱}{۱۶} \rightarrow \frac{TM}{AM} = \frac{۱}{۴}$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر است. بنابراین:

$$\frac{TM}{\frac{BC}{۲}} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{BC=۸} \frac{TM}{۴} = \frac{۱}{۴} \rightarrow TM = ۱ \rightarrow AT = AM - TM = ۴ - ۱ = ۳$$

۳۵ ۴ ۳ ۲ **۱** دقت کنید پس از رسم $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ متوجه می‌شویم که شیب اضلاع با شیب اضلاع ABC یکسان است، پس نمی‌تواند بازتاب باشد.

همچنین با توجه به شکل زیر، ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی و به فاصلهٔ D از یکدیگر یک انتقال به اندازهٔ برداری به طول $۲D$ می‌باشد.



$$AA'' = ۲(x+y)$$

بنابراین، چون فاصلهٔ $d_۱$ و $d_۲$ برابر $۳cm$ است، پس: $AA'' = BB'' = CC'' = ۶$

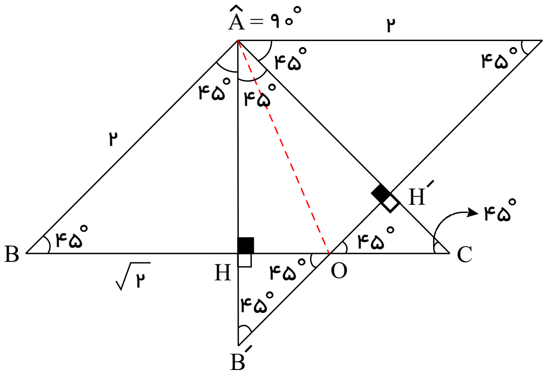
۳۶ ۴ ۳ **۲** ۱ مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بوده و $AB = AC = ۲$. بنابراین داریم:

$$BC = \sqrt{۲}AB = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow BH = \frac{BC}{۲} = \sqrt{۲}$$

از آن‌جا که دوران تبدیلی طولپاست، داریم:

$$\begin{cases} AB' = AB = AC = AC' = ۲ \\ B'C' = BC \Rightarrow B'H' = BH = CH = C'H' = \sqrt{۲} \\ AH' = AH = \sqrt{AB^۲ - BH^۲} = \sqrt{۴-۲} = \sqrt{۲} \quad (۱) \end{cases}$$

$$\Rightarrow OH = B'H = AB' - AH = ۲ - \sqrt{۲} \quad (۲)$$



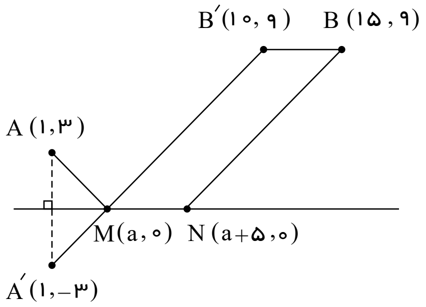
اگر A را به O وصل کنیم دو مثلث $AH'O$ و AHO بنابر وتر و یک ضلع قائمه همنهشت بوده و درنتیجه: $OH' = OH$.

$$\Rightarrow AB'C' \text{ و تصویرش } ABC \text{ سطح محصور بین مثلث} = S_{AHOH'} = ۲S_{\overset{\Delta}{AHO}} = ۲ \times \frac{۱}{۲}AH \cdot OH \xlongequal{\text{طبق (۱),(۲)}} \sqrt{۲}(۲-\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲} - ۲$$

۳۷ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا نقطهٔ A را نسبت به محور xها بازتاب داده تا به نقطهٔ A' برسیم، سپس نقطهٔ B را با بردار $\overrightarrow{NM}$ انتقال می‌دهیم تا به نقطهٔ B' برسیم. داریم:

$$AMNB \text{ کمترین اندازهٔ خط شکسته} = AM + MN + NB = (AM + NB) + MN$$

$$= (A'M + MB') + MN = A'B' + MN = ۱۵ + ۵ = ۲۰$$



$$\text{توجه}: |A'B'| = \sqrt{(۱۰-۱)^۲ + (۹-(-۳))^۲} = ۱۵$$

۳۸ **۴** ۳ ۲ ۱ دو پاره‌خط AD و DE همراستا و متجانس یکدیگرند. پس مرکز تجانس در امتداد آن‌هاست، در مورد دو پاره‌خط BC و CF نیز همین موضوع برقرار است، پس مرکز تجانس، نقطهٔ برخورد امتداد این دو ضلع است. از طرفی دو شکل متجانس همواره متشابه هستند. بنابراین:

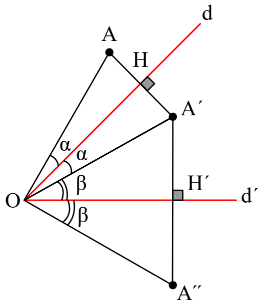
$$\frac{AB}{CD}=\frac{CD}{EF}\Rightarrow\frac{۴}{CD}=\frac{CD}{۹}\Rightarrow CD=۶$$

حال با توجه به این‌که با این تجانس AB بر CD تصویر می‌شود، می توان نوشت:

$$K=\frac{CD}{AB}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$$

۳۹ ۴ **۳** ۲ ۱

مطابق شکل بازتاب A نسبت به d، A' و بازتاب A' نسبت به d'، A'' می‌باشد.



از طرفی داریم:

$$H\widehat{O}H'=\alpha+\beta=۴۵^\circ\Rightarrow A\widehat{O}A''=۲(\alpha+\beta)=۲\times۴۵^\circ=۹۰^\circ$$

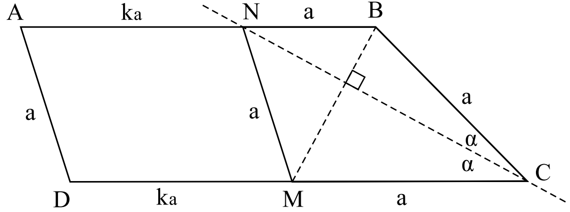
$$OA=OA'=OA''=۲\Rightarrow AA''=۲\sqrt{۲}$$

۴۰ ۴ **۳** ۲ ۱ درواقع مثلث ACD، دوران یافته‌ی مثلث ABE به مرکز A و زاویه‌ی ۴۰° است. پس زاویه‌ی حاده‌ی بین BE و CD برابر ۴۰° است و داریم:

$$\alpha=۱۸۰^\circ-۴۰^\circ=۱۴۰^\circ$$

۴۱ ۴ **۳** ۲ ۱ مطابق شکل، بازتاب‌یافتهٔ نقطهٔ B نسبت به نیمساز CN نقطهٔ M است که روی ضلع CD قرار دارد. می‌دانیم $BCMN$ یک لوزی است. فرض کنیم:

$$BC=BN=CM=MN=a \quad \text{و} \quad AN=DM=ka$$



طبق فرض داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{محیط}\ ABCD=۲a+(۲k+۲)a=(۲k+۴)a\\ \text{محیط}\ BCMN=۴a\end{array}\right\}\rightarrow(۲k+۴)a=۲(۴a)\Rightarrow k=۲$$

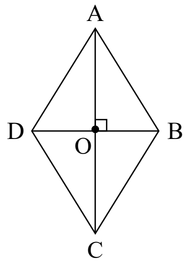
بنابراین $AN=۲a$ و $AB=۳a$ پس:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BCMN}}=\frac{AB}{MC}=\frac{۳a}{a}=۳$$

۴۲ ۴ **۳** ۲ ۱ می‌دانیم از به‌هم وصل کردن وسط اضلاع یک چهارضلعی محدب، یک چهارضلعی پدید می‌آید که مساحت آن نصف مساحت چهار ضلعی اولیه است.

در اینجا از به‌هم وصل کردن وسط اضلاع لوزی، یک مستطیل پدید می‌آید و داریم:

$$S_{\text{مستطیل}}=۱۰\Rightarrow S_{ABCD\ \text{لوزی}}=۲\times۱۰=۲۰$$

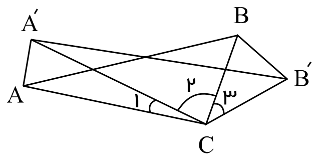


از طرفی، می‌دانیم تبدیل دوران، تبدیلی طولپاست (ایزومتری است) و در تبدیل دوران، مساحت شکل اولیه با مساحت دوران یافته، برابر است. به این‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$S_{A'B'C'D'\ \text{لوزی}}=S_{ABCD\ \text{لوزی}}=\frac{۱}{۲}AC\cdot BD=۲۰\Rightarrow AC\cdot BD=۴۰\Rightarrow A'C'\times B'D'=۴۰$$

۴۳ ۴ ۳ **۲** ۱

مطابق شکل در دوران به مرکز C و زاویهٔ دوران α، A به A' و B به B' دوران می‌یابد. داریم:

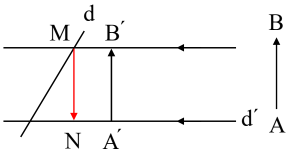


$$A'C=AC\ ,\ B'C=BC\ ,\ B\hat{C}B'=A\hat{C}A'=\alpha \Rightarrow A\hat{C}B=A'\hat{C}B'=\theta$$

در مثلث $A'B'C$ و ABC به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ θ متشابه‌اند. داریم:

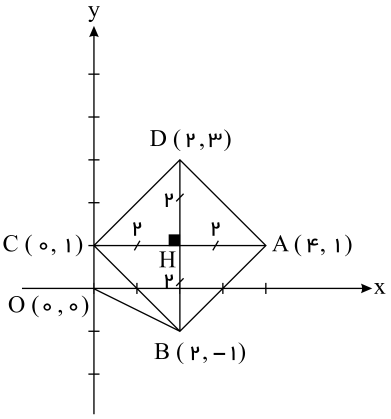
$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow \frac{۱۰}{BB'}=\frac{۲۰}{۱۲}\Rightarrow BB'=۶$$

۴۴ ۴ ۳ **۲** ۱ مطابق شکل، یک نقطه از خط d' مثل A' را با بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم تا به نقطهٔ B' برسیم و از آنجا که خطی موازی d' رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ M قطع کند، حال نقطهٔ M را با بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ N واقع بر خط d' حاصل می‌شود. پاره‌خط MN همان پاره‌خطی است که دو سر آن روی دو خط متقاطع d و d' واقع است و موازی و مساوی AB نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی $MB'A'N$ متوازی‌الاضلاع است).



۴۵ ۴ ۳ ۲ **۱** بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق است. بنابراین C روی محور yها قرار دارد و مختصات آن $(۰,۱)$ می‌باشد.

چهارضلعی $ABCD$ مربع است. بنابراین اندازهٔ قطرهای آن برابرند و عمودمنصف یکدیگر می‌باشند و داریم:



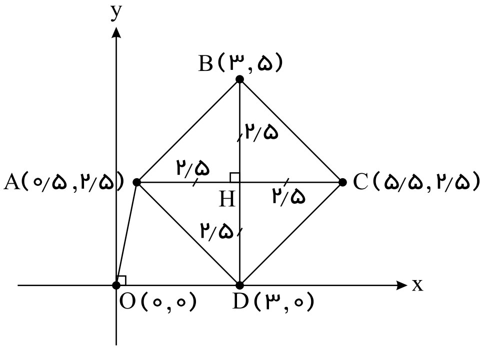
$$CH=AH=\frac{BD}{۲}=\frac{AC}{۲}=\frac{x_A-x_C}{۲}=\frac{۴-۰}{۲}=۲$$

بازتاب نقطهٔ D نسبت به قطر AC نقطهٔ B می‌باشد که فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OB=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۱-۰)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

۴۶ ۴ ۳ **۲** ۱ بازتاب قطر D نسبت به محور xها بر خودش منطبق است. بنابراین D روی محور x ها قرار دارد و مختصات آن $(۳,۰)$ است.

چهارضلعی $ABCD$ مربع است بنابراین اندازه قطرهای آن برابرند و عمودمنصف یکدیگر هستند و داریم:



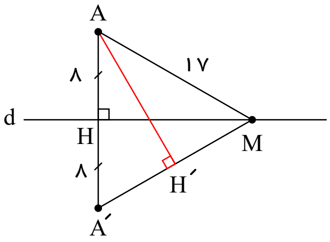
$$AH=HC=\frac{AC}{۲}=\frac{BD}{۲}=\frac{y_B-y_D}{۲}=\frac{۵-۰}{۲}=۲٫۵$$

بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD نقطهٔ A است که فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{(۰٫۵-۰)^۲+(۲٫۵-۰)^۲}=\sqrt{۰٫۲۵+۶٫۲۵}=\sqrt{۶٫۵}$$

۴۷ ۴ **۳** ۲ ۱ طبق فرض $AH=۸$ و $AM=۱۷$، پس در مثلث قائم‌الزاویه AHM با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس داریم:

از آنجا که تبدیل بازتاب، ایزومتری است، پس $A'M = AM = ۱۷$. درنتیجه، خواهیم داشت:



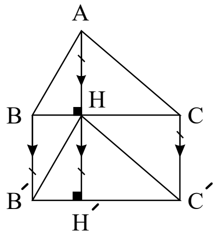
$$MH = \sqrt{۲۸۹ - ۶۴} = ۱۵$$

$$S_{AMA'} = \frac{۱}{\cancel{۲}} AA' \cdot MH = \frac{۱}{\cancel{۲}} A'M \cdot AH'$$

$$\Rightarrow ۱۶ \times ۱۵ = ۱۷ \times AH' \Rightarrow AH' = \frac{۲۴۰}{۱۷} \simeq ۱۴/۱$$

که این عدد به ۱۴ نزدیک‌تر است.

۴۸ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱



$$BB' \overset{||}{=} AH \rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع است } ABB'H \rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABH}} = S_{\overset{\triangle}{BB'H}}$$

$$CC' \overset{||}{=} AH \rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع است } ACC'H \rightarrow S_{\overset{\triangle}{AHC}} = S_{\overset{\triangle}{HCC'}}$$

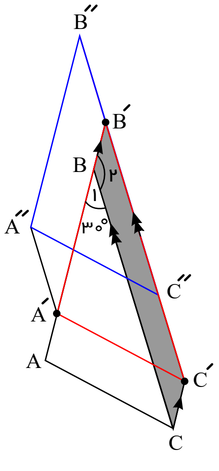
$$\xrightarrow[\text{جمع می‌کند}]{\text{طرفین دو تساوی را}} S_{\overset{\triangle}{ABH}} + S_{\overset{\triangle}{AHC}} = S_{\overset{\triangle}{BB'H}} + S_{\overset{\triangle}{HCC'}} \rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{BB'H}} + S_{\overset{\triangle}{HCC'}} \quad (۱)$$

$$\text{انتقال طول‌پاست} \rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong B'\overset{\triangle}{H}C' \rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{B'HC'}} \quad (۲)$$

$$S_{ABB'C'C} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{BB'H}} + S_{\overset{\triangle}{HCC'}} + S_{\overset{\triangle}{B'HC'}} \xrightarrow{(۱),(۲)}$$

$$S_{ABB'C'C} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۳S_{ABC} = ۳ \times ۲۰ = ۶۰$$

۴۹ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱

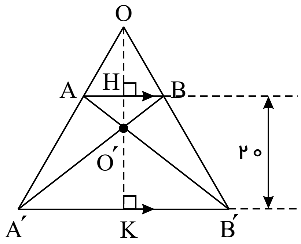


$$\left.\begin{matrix} \text{انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.} \rightarrow BB'||CC' \\ BC||B'C' \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{.متوازی‌الاضلاع است } BB'CC'$$

$$\hat{B}_۱ = ۳۰^\circ \rightarrow \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵۰^\circ \rightarrow C\hat{C'}C'' = ۱۵۰^\circ$$

۵۰ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

مطابق شکل در تجانس مستقیم، مرکز تجانس O و در تجانس معکوس مرکز تجانس O' است. می‌خواهیم طول OO' را بیابیم، داریم:



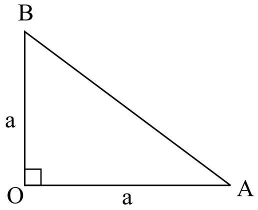
$$O\overset{\triangle}{A}B \sim O\overset{\triangle}{A'}B' : \frac{OH}{OK} = \frac{۱۰}{۱۵} \Rightarrow \frac{OH}{OH + ۲۰} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳OH = ۲OH + ۴۰ \Rightarrow OH = ۴۰$$

$$O'\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{A'}B' \Rightarrow \frac{O'H}{O'K} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{O'H}{۲۰ - O'H} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳O'H = ۴۰ - ۲O'H \Rightarrow O'H = ۸ \Rightarrow OO' = ۴۰ + ۸ = ۴۸$$

(۵۱) ④ ③ ② ① از فرض نتیجه می‌گیریم که ترکیب ۴ دوران به مرکز O و زاویهٔ θ یک دوران ۶۰° است، پس $\theta = ۱۵^\circ$.

حال اگر ۶ بار دوران ۱۵° را انجام دهیم به یک دوران ۹۰° می‌رسیم. داریم:



$$OA = OB = a \Rightarrow AB = a\sqrt{۲}$$

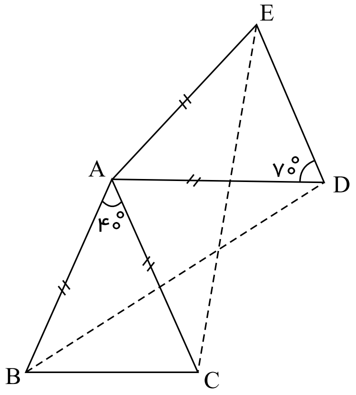
$$\Rightarrow \frac{AB}{AA'} = \frac{\sqrt{۲}a}{a} = \sqrt{۲}$$

(۵۲) ④ ③ ② ① دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و ADE هم‌نهشت هستند.

$$B\hat{A}C = ۴۰^\circ \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = ۷۰^\circ$$

$$A\hat{D}E = A\hat{E}D = ۷۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}E = ۴۰^\circ$$

پس اگر دورانی به مرکز A و زاویهٔ ۴۰° در نظر بگیریم، پاره‌خط BD به روی پاره‌خط CE تصویر می‌شود، یعنی داریم:



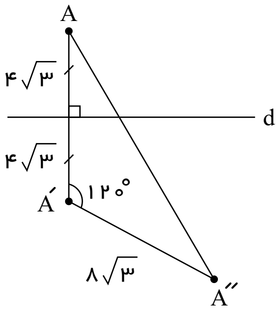
$$R(D) = E \text{ و } R(B) = C \Rightarrow R(BD) = CE$$

پس زاویهٔ بین BD و CE برابر ۴۰° است.

(۵۳) ④ ③ ② ① روش اول: مطابق شکل، نقطهٔ A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d بوده و نقطهٔ A'' دوران‌یافتهٔ نقطهٔ A نسبت به مرکز دوران A' و به اندازهٔ ۱۲۰° در جهت ساعتگرد است. کافی است رابطهٔ کسینوس‌ها را در مثلث $AA'A''$ بنویسیم:

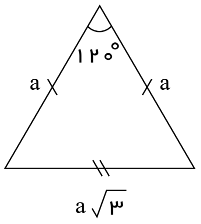
$$AA''^{۲} = AA'^{۲} + A'A''^{۲} - ۲AA' \cdot A'A'' \cdot \cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow AA''^{۲} = (۸\sqrt{۳})^{۲} + (۸\sqrt{۳})^{۲} - ۲ \times ۸\sqrt{۳} \times ۸\sqrt{۳} \times (-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow AA''^{۲} = ۱۹۲ + ۱۹۲ + ۱۹۲ = ۵۷۶ \Rightarrow AA'' = ۲۴$$



روش دوم: مطابق شکل مقابل، در مثلث متساوی‌الساقین به ساق a و زاویهٔ رأس ۱۲۰°، قاعده برابر است با $a\sqrt{۳}$.

در اینجا $a = ۸\sqrt{۳}$؛ پس جواب برابر است با: $a\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۲۴$



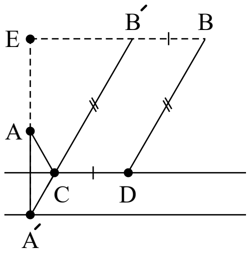
(۵۴) ④ ③ ② ① در تبدیل تجانس، مرکز تجانس نقطهٔ ثابت تجانس است. بنابراین، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مرکز تجانس است. لذا مرکز دو دایره برهم منطبق بوده و درنتیجه، مثلث باید متساوی‌الاضلاع باشد و نسبت تجانس k برابر است با:

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع

a، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲}{۳}h=R$ و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۶}=\frac{۱}{۳}h=r$ است، پس $R=۲r$ و نسبت تجانس این دو دایره برابر می‌شود با:

$$k=\frac{r}{R}\Rightarrow k=\frac{r}{۲r}=\frac{۱}{۲}$$

(۵۵) ۴ **۳** ۲ ۱



$$\overset{\Delta}{AEB}\ \text{قضیهٔ فیثاغورس}:\ BE=\sqrt{۱۰^{۲}-۶^{۲}}=۸$$

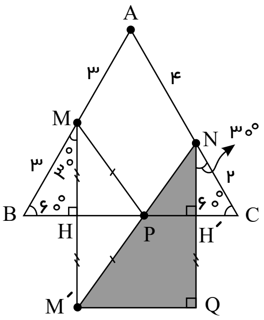
$$EB'=EB-BB'=۸-۳=۵$$

$$\overset{\Delta}{A'EB'}\ \text{قضیهٔ فیثاغورس}:\ A'B'=\sqrt{۱۲^{۲}+۵^{۲}}=۱۳$$

$$ACDB\ \text{طول مسیر}=AC+DB+CD=(A'C+CB')+CD=A'B'+CD=۱۳+۳=۱۶$$

(۵۶) **۴** ۳ ۲ ۱ برای یافتن کمترین مقدار $MP+NP$ (طبق مسئله هرون)، ابتدا بازتاب M نسبت‌به BC را به‌دست می‌آوریم (M'). سپس این نقطه را به N وصل می‌کنیم. محل برخورد MN' و BCهمان نقطه مورد نظر (P) است و داریم:

می‌دانیم: در مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ ضلع روبه رو به زاویه ۶۰° $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر طول وتر است و اندازهٔ ضلع روبه رو به زاویه ۳۰° $\frac{۱}{۲}$ برابر طول وتر است.



$$\overset{\Delta}{BMH}:۶۰^\circ\ \text{روبه رو به}\ MH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۳=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\to M'H=QH'=MH=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{CNH'}:۶۰^\circ\ \text{روبه رو به}\ NH'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۲=\sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{BMH}:۳۰^\circ\ \text{روبه رو به}\ BH=\frac{۱}{۲}\times ۳=\frac{۳}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{CNH'}:۳۰^\circ\ \text{روبه رو به}\ CH'=\frac{۱}{۲}\times ۲=۱$$

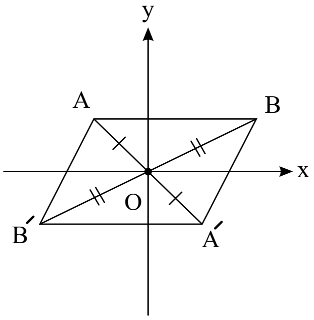
$$HH'=BC-(BH+CH')=۶-(\frac{۳}{۲}+۱)=\frac{۷}{۲}\to M'Q=HH'=\frac{۷}{۲}$$

$$QN=NH'+QH'=\sqrt{۳}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{NQM'}\ \text{قضیهٔ فیثاغورس در}:\ M'N=\sqrt{M'Q^{۲}+QN^{۲}}=\sqrt{(\frac{۷}{۲})^{۲}+(\frac{۵\sqrt{۳}}{۲})^{۲}}=\sqrt{\frac{۴۹}{۴}+\frac{۷۵}{۴}}=\sqrt{۳۱}$$

$$MP+NP=M'P+NP=M'N=\sqrt{۳۱}$$

(۵۷) **۴** ۳ ۲ ۱



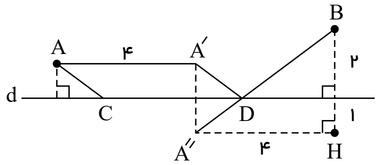
$$\left.\begin{array}{l}OA=OA'\\OB=OB'\end{array}\right\}\to \begin{array}{c}\text{چهار ضلعی } ABA'B' \text{ متوازی‌الاضلاع}\\ \text{است زیرا قطر هایش منصفند.}\end{array}\to \begin{array}{l}AB||A'B'\\AB=A'B'\end{array}$$

در نتیجه:

T یک تبدیل طولپا است که شیب خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

(۵۸) ۴ **۳** ۲ ۱ نقطهٔ A را تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ موازی خط d (به سمت راست) و به طول ۴ بر نقطه A' تصویر می‌کنیم. قرینهٔ A' را نسبت به خط d نقطهٔ A'' و نقطهٔ تلاقی خط

d و پاره‌خط $A''B$ را نقطهٔ D می‌نامیم.



سپس CD را به طول ۴ روی خط d جدا می‌کنیم. مسیر $ACDB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. داریم:

$$A''B^۲ = BH^۲ + A''H^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow A''B = ۵ \Rightarrow A''D + BD = ۵$$

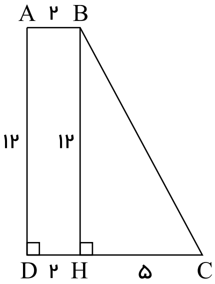
$$\xrightarrow[\text{طولپایی بازتاب}]{A'D=A''D} A'D + BD = ۵$$

$$\xrightarrow[\text{طولپایی انتقال}]{AC=A'D} AC + BD = ۵$$

$$ACDB \text{ طول مسیر } = AC + CD + DB = (AC + BD) + CD = ۵ + ۴ = ۹$$

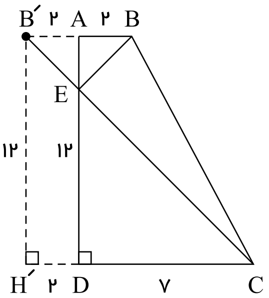
۵۹ ۴ **۳** ۲ ۱

مطابق شکل روبه‌رو، طول ساق مایل BC را از طریق قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:



$$BC^۲ = BH^۲ + HC^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۳$$

برای به‌دست آوردن کمترین مقدار $BE + EC$، طبق مسأله هرون، کافی است قرینهٔ B را نسبت به ساق قائم AD پیدا کرده و فاصلهٔ آن را از رأس C بیابیم:



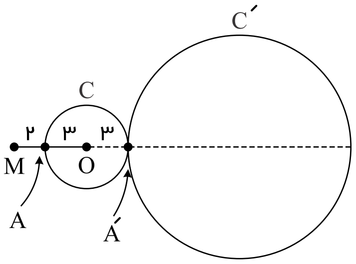
$$B\overset{\Delta}{H'}C : B'C^۲ = B'H'^۲ + H'C^۲ = ۱۲^۲ + ۹^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow B'C = ۱۵ \text{ (قضیهٔ فیثاغورس)}$$

پس کمترین مقدار محیط مثلث BEC برابر می‌شود با:

$$min(P_{B\overset{\Delta}{E}C}) = BC + B'C = ۱۳ + ۱۵ = ۲۸$$

۶۰ ۴ ۳ **۲** ۱

چون C و C' فقط یک نقطهٔ مشترک دارند، پس مماس خارج‌اند و با توجه به نسبت تجانس $k > ۱$، شکل زیر را برای آن رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، نقطهٔ A (نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ C) به نقطهٔ A' (نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ C') که همان نقطهٔ تماس دو دایره است، تصویر می‌شود. پس نسبت تجانس برابر می‌شود با:

$$k = \frac{MA'}{MA} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

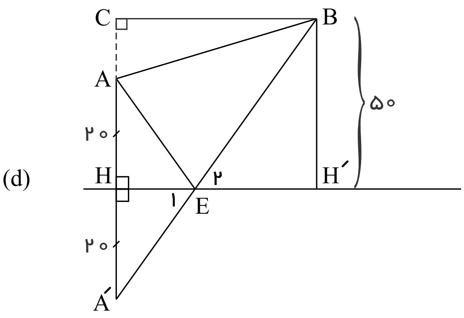
و درنتیجه، شعاع دایرهٔ C' برابر است با:

$$R' = kR = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

پس طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس خارج C و C' برابر می‌شود با:

$$۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{۳ \times ۱۲} = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

۶۱ ۴ ۳ ۲ ۱



بازتاب نقطهٔ A را نسبت به d به‌دست آورده و آن را A' می‌نامیم.

A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در E قطع کند، داریم:

$$AH = HA' (AA' \text{ عمودمنصف } d)$$

$$AE + EB = A'E + EB = A'B$$

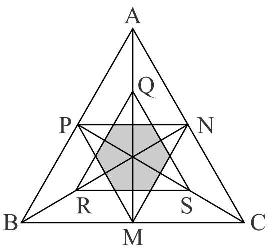
از نقطهٔ B عمودی بر راستای AH رسم می‌کنیم. در این‌صورت، داریم:

$$AC = ۵۰ - ۲۰ = ۳۰$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : BC^۲ = AB^۲ - AC^۲ = ۵۰^۲ - ۳۰^۲ = ۱۶۰۰ \Rightarrow BC = ۴۰$$

$$A'\overset{\Delta}{B}C : A'B^۲ = A'C^۲ + BC^۲ = ۷۰^۲ + ۴۰^۲ = ۴۹۰۰ + ۱۶۰۰ = ۶۵۰۰ \Rightarrow A'B \simeq ۸۰/۶$$

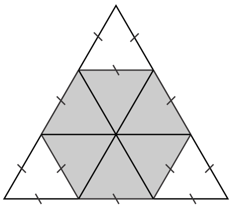
۶۲ ۴ ۳ ۲ ۱ اگر مثلث ABC را در یک تجانس به مرکز G و نسبت $-\frac{۱}{۲}$ تصویر کنیم. مثلث MNP حاصل می‌شود. همچنین اگر ABC را در یک تجانس به مرکز G و نسبت $\frac{۱}{۲}$ تصویر کنیم، مثلث QRS حاصل می‌شود. مطابق شکل، از اشتراک این دو مثلث، یک شش‌ضلعی منتظم حاصل می‌شود که مساحت این شش‌ضلعی منتظم $\frac{۲}{۳}$ مساحت هر یک از مثلث‌های MNP یا QRS است.



$$NP \| BC \xrightarrow[M\overset{\Delta}{N}P \cong A\overset{\Delta}{P}N]{\text{قضیهٔ اساسی تشابه}} M\overset{\Delta}{N}P \sim A\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{S_{M\overset{\Delta}{N}P}}{S_{A\overset{\Delta}{B}C}} = \frac{S_{A\overset{\Delta}{P}N}}{S_{A\overset{\Delta}{B}C}} = (\frac{AP}{AB})^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$$

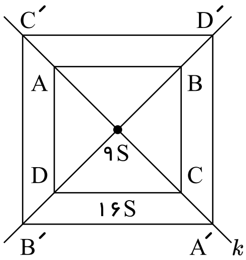
$$S_{\text{رنگی}} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۴} S_{ABC} = \frac{۱}{۶} S_{ABC}$$

تذکر: مطابق شکل، مساحت شش‌ضلعی منتظم شکل مقابل نسبت به مساحت کل مثلث $\frac{۲}{۳}$ است.



۶۳ ۴ ۳ ۲ ۱

مطابق شکل و فرض سؤال، $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ در این تجانس است، داریم:



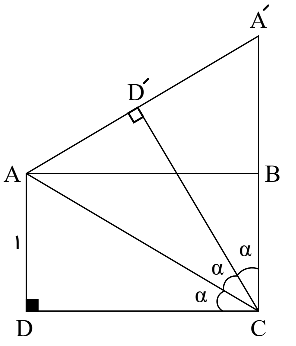
$$k = -\frac{۵}{۳} \Rightarrow k^۲ = \frac{۲۵}{۹} = \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} \Rightarrow \begin{cases} S_{A'B'C'D'} = ۲۵S \\ S_{ABCD} = ۹S \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} ۱۶S = ۱۶ \Rightarrow S = ۱$$

$$\begin{cases} S_{A'B'C'D'} = ۲۵S = ۲۵ \times ۱ = ۲۵ \Rightarrow A'B' = ۵ \\ S_{ABCD} = ۹S = ۹ \times ۱ = ۹ \Rightarrow AB = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'B'C'D' \text{ محیط} - ABCD \text{ محیط} = ۴ \times ۵ - ۴ \times ۳ = ۸$$

۶۴ ④ ③ [✓ ②] ① **بازتاب نسبت به خط، تبدیلی طولپاست و تحت آن اندازهٔ زاویه‌ها ثابت باقی می‌ماند.**

مطابق شکل، CD' **بازتاب** CD **نسبت به** AC **است، بنابراین** $D\hat{C}A = A\hat{C}D' = \alpha$.



همچنین CA' **بازتاب** CA **نسبت به** CD' **است، بنابراین:**

$$D'\hat{C}A' = A\hat{C}D' = \alpha$$

درنتیجه:

$$۳\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

حال در مثلث‌قائم‌الزاویه ADC**، ضلع** AD **روبه‌روی زاویهٔ** ۳۰° **است، پس نصف وتر است. بنابراین:**

$$AC = ۲ \Rightarrow DC = \sqrt{AC^۲ - AD^۲} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow S_{ABCD} = AD \times DC = ۱ \times \sqrt{۳} = \sqrt{۳}$$

۶۵ ④ [✓ ③] ② ① **از آنجا که ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع** a **برابر** $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ **است، داریم:**

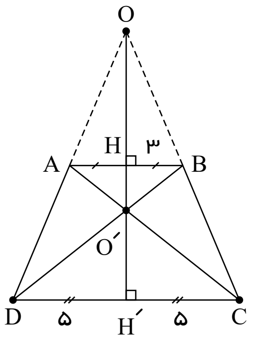
ضلع مثلث جدید در تجانس اول (ضلع مثلث مجانس): $h = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۲ \Rightarrow a = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

$$\Rightarrow k = \frac{\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}}{۴\sqrt{۳}} \Rightarrow k = \frac{۱}{۳} \Rightarrow k = \frac{\text{ضلع مربع جدید}}{\text{ضلع مربع اولیه}} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{\text{ضلع مربع جدید}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow \text{ضلع مربع جدید} = \frac{\sqrt{۳}}{۶} \Rightarrow S_{\text{مربع جدید}} = (\frac{\sqrt{۳}}{۶})^۲ = \frac{۱}{۱۲}$$

۶۶ ④ ③ [✓ ②] ①

مطابق شکل زیر، نقاط O **و** O' **مراکز تجانس مستقیم و معکوس دو قاعدهٔ ذوزنقه هستند، داریم:**

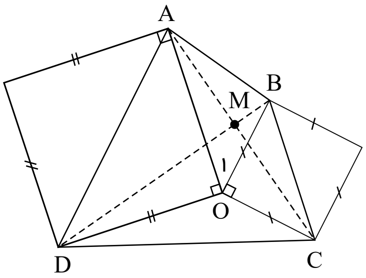
$$O'\overset{\Delta}{A}B \sim O'\overset{\Delta}{C}D \Rightarrow \frac{O'H}{O'H'} = \frac{AB}{CD} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{O'H}{O'H'} = \frac{۳}{۵}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} O'H = ۳k \\ O'H' = ۵k \end{cases} \xrightarrow{HH'=۱۲} ۸k = ۱۲ \Rightarrow k = \frac{۳}{۲} \Rightarrow O'H = \frac{۹}{۲} \quad (۱)$$
$$O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{C}D \Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{CD} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{OH}{OH'} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{OH}{OH + ۱۲} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow OH = ۱۸ \quad (۲)$$
$$\Rightarrow OO' = OH + O'H \xrightarrow{(۲),(۱)} OO' = ۱۸ + \frac{۹}{۲} = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵$$



۶۷ [✓ ④] ③ ② ① **دو مثلث** AOC **و** BOD **بنابر (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند. زیرا:**

$$\begin{cases} A\hat{O}C = B\hat{O}D = ۹۰^\circ + \hat{O}_۱ \\ OA = OD \\ OB = OC \end{cases} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AC = BD \quad (۱)$$

$$\text{دوران به مرکز } O \begin{cases} D \xrightarrow[\text{ساعتگرد}]{\text{دوران } ۹۰^\circ} A \\ B \xrightarrow[\text{ساعتگرد}]{\text{دوران } ۹۰^\circ} C \end{cases} \Rightarrow BD \xrightarrow[\text{ساعتگرد}]{\text{دوران } ۹۰^\circ} AC$$

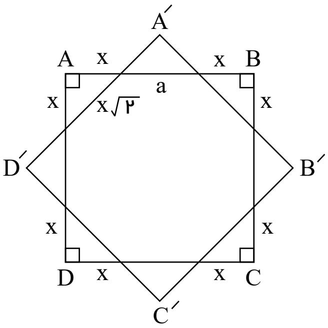


از آنجا که زاویهٔ دوران برابر زاویهٔ بین دو خط دوران‌یافته است، نتیجه می‌شود: (۲) $A\hat{M}D = ۹۰^\circ$.

بنابراین طبق روابط (۱) و (۲) در گزینهٔ (۴) صحیح است.

۶۸ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

اگر مطابق شکل مربع $ABCD$ را حول مرکز تقارن آن به اندازهٔ ۴۵° دوران دهیم، مربع $A'B'C'D'$ تشکیل می‌شود و سطح محصور بین این دو مربع، یک هشت ضلعی منتظم است. فرض می‌کنیم ضلع هشت ضلعی منتظم a باشد، بنابراین داریم:



$$\begin{cases} \text{طول ضلع مربع} = ۲x + a \\ a = x\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = ۲x + x\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow \underset{\text{۸ ضلعی}}{S} = \underset{ABCD}{S} - ۴\underset{\triangle\text{قائم‌الزاویه}}{S} \Rightarrow \underset{\text{۸ ضلعی}}{S} = (۴ + ۲\sqrt{۲})^۲ - ۴ \times \frac{۱}{۲}x^۲$$

$$\xrightarrow{x=۲} \underset{\text{۸ ضلعی}}{S} = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$$

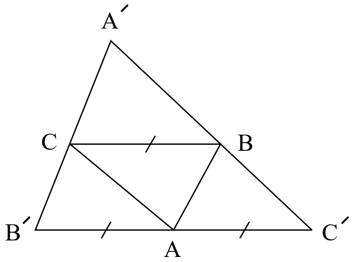
۶۹ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به محور xها، نقطهٔ $A'(-۳, -۱۳)$ است و B نقطهٔ تلاقی خط $A'C$ با محور xها می‌باشد، بنابراین داریم:

$$m_{CA'} = \frac{-۱۳ - ۳}{-۳ - ۵} = \frac{۱۶}{۸} = ۲$$

$$y - ۳ = ۲(x - ۵) \Rightarrow y = ۲x - ۷ \xrightarrow{y=۰} ۲x - ۷ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۷}{۲}$$

۷۰ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ می‌دانیم تبدیل تجانس، تبدیلی است که شیب خطوط را حفظ می‌کند.

طبق فرض، نوع تجانس، معکوس بوده و مثلث $A'B'C'$ بر مثلث ABC محیط شده است. بنابراین، طبق شکل داریم:



$$\begin{cases} BC || AB' \\ B'C || AB \end{cases} \Rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع } ABCB' \Rightarrow AB' = BC \quad (۱)$$

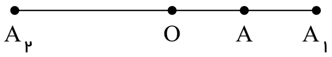
$$\begin{cases} BC || AC' \\ BC' || AC \end{cases} \Rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع } ACBC' \Rightarrow AC' = BC \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow B'C' = ۲BC$$

به همین‌ترتیب، نتیجه می‌شود $A'C' = ۲AC$ و $A'B' = ۲AB$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = ۲ \xrightarrow{\text{تجانس معکوس}} k = -۲$$

۷۱ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ بیشترین فاصله نقاط $A_۱$ و $A_۲$ در صورتی ایجاد می‌شود که یکی از دو تجانس مستقیم و دیگری معکوس باشد. با فرض $K_۱ > ۰$ و $K_۲ < ۰$ داریم:



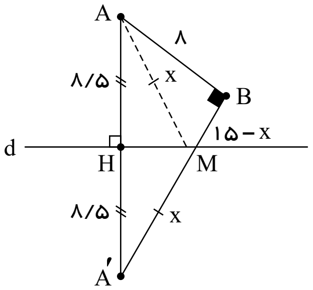
$$K_۱^۲ = ۴ \xrightarrow{K_۱>۰} K_۱ = ۲ \quad , \quad K_۲^۲ = \frac{۲۵}{۴} \xrightarrow{K_۲<۰} K_۲ = -\frac{۵}{۲}$$

$$A_۱A_۲ = OA_۱ + OA_۲ = |K_۱| \times OA + |K_۲| \times OA = ۲ \times ۴ + \frac{۵}{۲} \times ۴ = ۱۸$$

توجه: در صورتی که $K_۱ < ۰$ و $K_۲ > ۰$ باشد، نیز همین مقدار برای $A_۱A_۲$ حاصل می‌شود.

۷۲ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

باتوجه به شکل زیر داریم:



$$MA + MB = A'B = ۱۵$$

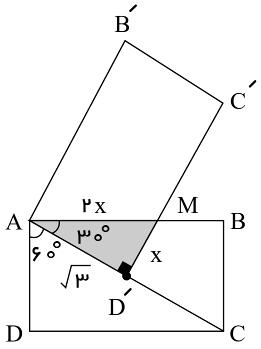
$$۱۵^۲ + ۸^۲ = ۱۷^۲ \to \hat{B} = ۹۰^\circ$$

$$MA = MA' = x \to MB = ۱۵ - x$$

قضیهٔ فیثاغورس در $\overset{\triangle}{AMB} = MB^۲ + AB^۲ = MA^۲ \to (۱۵ - x)^۲ + ۸^۲ = x^۲ \to ۲۲۵ - ۳۰x + x^۲ + ۶۴ = x^۲$

$$\to ۳۰x = ۲۸۹ \to x = \frac{۲۸۹}{۳۰}$$

۷۳ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

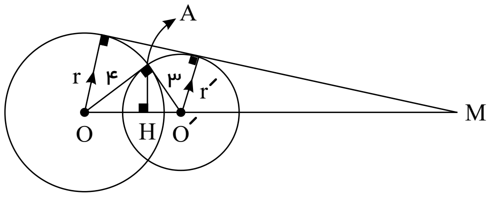


دوران طولپاست $\rightarrow AD' = AD = BC = \sqrt{۳},\ \overset{\Delta}{AMD'}$: ۳۰° روبه‌رو $MD' = \frac{۱}{۲}AM \rightarrow \begin{cases} D'M = x \\ AM = ۲x \end{cases}$

$\overset{\Delta}{AMD'}$ قضیهٔ فیثاغورس در : $AM^{۲} = AD'^{۲} + MD'^{۲} \rightarrow (۲x)^{۲} = (\sqrt{۳})^{۲} + x^{۲} \rightarrow ۴x^{۲} = ۳ + x^{۲} \rightarrow ۳x^{۲} = ۳ \rightarrow x^{۲} = ۱ \rightarrow x = ۱$

$$S_{\overset{\Delta}{AMD'}} = \frac{۱}{۲}AD' \cdot MD' = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times \sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۷۴ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱



$$k = \frac{r'}{r} = \frac{۳}{۴} \rightarrow \frac{MO'}{MO} = \frac{۳}{۴} \rightarrow \frac{MO'}{۲۰} = \frac{۳}{۴} \rightarrow MO' = ۱۵$$

$$OO' = MO - MO' = ۲۰ - ۱۵ = ۵$$

$$OA^{۲} + O'A^{۲} = OO'^{۲} \xrightarrow{\text{عکس قضیه}} O\hat{A}O' = ۹۰^{\circ}$$

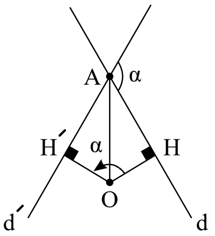
$$AH \times OO' = OA \times O'A \rightarrow AH \times ۵ = ۴ \times ۳ \rightarrow AH = \frac{۱۲}{۵} = ۲٫۴$$

خطالمرکزین دو دایرهٔ متقاطع عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست. $\rightarrow AB = ۲AH = ۴٫۸$

۷۵ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ این سؤال در دو حالت قابل بررسی است:

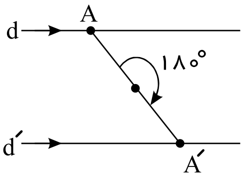
حالت اول: d و d' با زاویهٔ α متقاطع باشند.

در این حالت هر نقطه مانند O روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط، مرکز دورانی با زاویهٔ α است که در آن d' تصویر خط d می‌باشد.

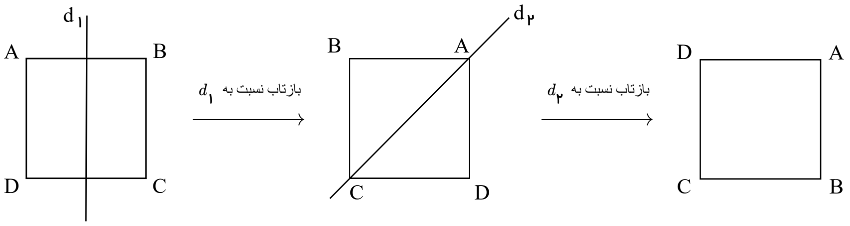


حالت دوم: d و d' موازی باشند.

در این حالت d' در بی‌شمار دوران با زاویهٔ ۱۸۰° تصویر خط d است که مرکز این دوران‌ها روی خطی موازی و به فاصلهٔ مساوی از خطوط d و d' قرار دارند.



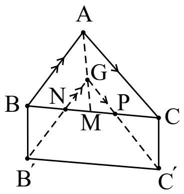
۷۶ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱



با توجه به شکل‌های بالا مربع به اندازهٔ دو برابر زاویهٔ بین محور بازتاب متقاطع یعنی ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران یافته است، بنابراین نقطهٔ ثابت تبدیل مرکز دوران (محل برخورد خطوط $d_۱$ و $d_۲$) است.

۷۷ ۴ **۳** ۲ ۱

مطابق شکل، $GB'C'$ انتقال یافتهٔ ABC با بردار $\overrightarrow{AG}$ می‌باشد. داریم:

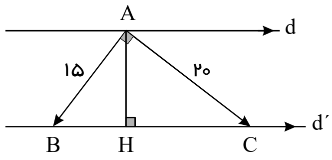


$$\begin{cases} PG||AC \Rightarrow \frac{PG}{AC}=\frac{GM}{AM}=\frac{PM}{MC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow PG=\frac{۱}{۳}AC \\ GN||AB \Rightarrow \frac{NG}{AB}=\frac{GM}{AM}=\frac{MN}{BM}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow NG=\frac{۱}{۳}AB \\ N\hat{G}P=B\hat{A}C \end{cases}$$

پس دو مثلث NGP و ABC متشابه‌اند و نسبت تشابه به آن‌ها $\frac{۱}{۳}$ است. پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{GNP}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱}{۹}$$

۷۸ ۴ **۳** ۲ ۱

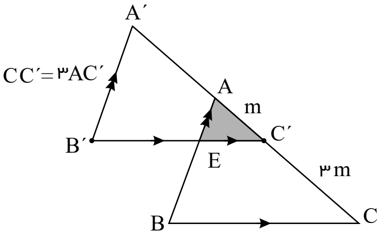


برای یافتن AH داریم:

$$BC^۲=۱۵^۲+۲۰^۲\Rightarrow BC=۲۵ \quad , \quad AH=\frac{AB\times AC}{BC}\Rightarrow AH=\frac{۱۵\times ۲۰}{۲۵}=۱۲$$

۷۹ **۴** ۳ ۲ ۱

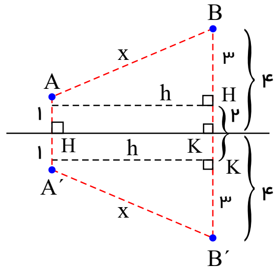
مطابق شکل روبه‌رو مثلث ABC با بردار CC' انتقال یابد و $A'B'C'$ بدست می‌آید. انتقال طولپاست پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ همنهشت هستند. داریم:



$$C'E \parallel BC \Rightarrow \frac{C'E}{BC}=\frac{m}{۴m}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AEC'}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{۱}{۴})^۲=\frac{۱}{۱۶}$$

۸۰ ۴ ۳ **۲** ۱

چهارضلعی $ABB'A'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. از طرفی اگر محیطی باشد، داریم:



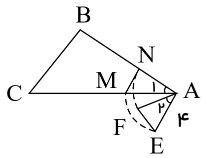
$AB=A'B'=x$ (بازتاب طولپاست)

محیطی $ABB'A' \Rightarrow x+x=۸+۲=۱۰\Rightarrow x=۵$

$$HK=AA'=۲\ ,\ BH=B'K=\frac{۸-۲}{۲}=۳\Rightarrow \overset{\triangle}{ABH}: h^۲=۵^۲-۳^۲=۴^۲\Rightarrow h=۴$$

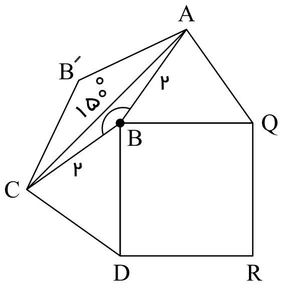
$$S_{ABB'A'}=\frac{(۸+۲)\times ۴}{۲}=۲۰$$

۸۱ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ دو مثلث متشابه‌اند، زیرا $\frac{۱}{۳}=\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{BC}$. بنابراین $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ و $C\hat{A}E=B\hat{A}F=\alpha$. به این ترتیب، اگر دو نقطه‌ی E و F را حول مرکز A به زاویه‌ی ثابت α دوران دهیم، دو نقطه‌ی M و N به‌ترتیب منطبق بر دو ضلع AC و AB به‌دست می‌آید که مثلث AMN تصویر مثلث AEF در این دوران است. از طرفی دیگر همین مثلث، تصویر مثلث ABC در یک تجانس به مرکز A و به نسبت $\frac{۱}{۳}=\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}$ نیز هست.



۸۲ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

مطابق شکل، کافی است بازتاب نقطهٔ B را نسبت به پاره‌خط AC به‌دست آوریم. در این‌صورت داریم:

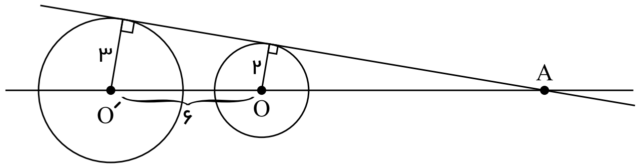


$$A\hat{B}C=۳۶۰^\circ-۹۰^\circ-۲\times۶۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

$$S_{\text{اضافه شده}}=۲\times\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\underbrace{\sin ۱۵۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}}=۲$$

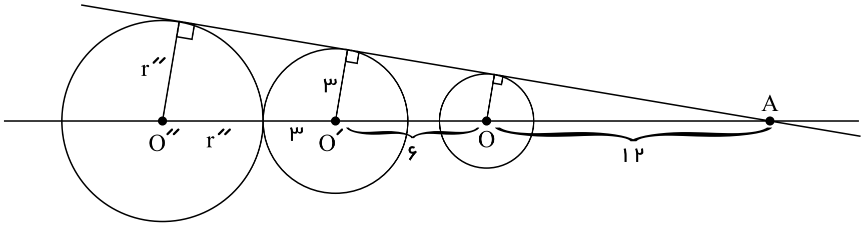
۸۳ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

مرکز تجانس مستقیم دو دایره، نقطهٔ تقاطع خط‌المرکزین دو دایره و مماس مشترک خارجی آنهاست. با توجه به شکل و با استفاده از قضیهٔ تالس خواهیم داشت:



$$\frac{OA}{O'A}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{OA}{OA+۶}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳OA=۲OA+۱۲\Rightarrow OA=۱۲$$

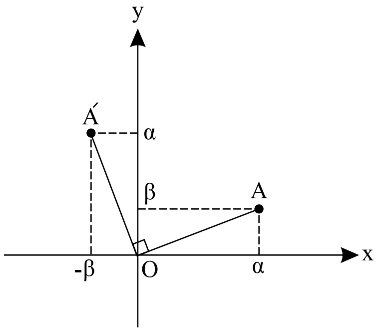
مرکز دایرهٔ مورد نظر را O'' می‌گیریم. مطابق شکل زیر داریم:



$$\frac{O'A}{O''A}=\frac{۳}{r''}\Rightarrow\frac{۱۸}{۲۱+r''}=\frac{۳}{r''}\Rightarrow ۳r''+۶۳=۱۸r''\Rightarrow ۱۵r''=۶۳\Rightarrow r''=\frac{۲۱}{۵}=۴٫۲$$

۸۴ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

مطابق شکل، نقطهٔ $A(\alpha,\beta)$ تحت دوران ۹۰° حول مبدأ مختصات به نقطهٔ $A'(-\beta,\alpha)$ تصویر می‌شود. لذا داریم:

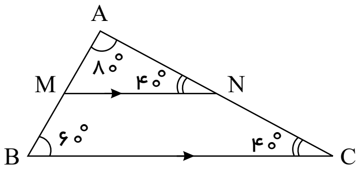


$$P\Big|\begin{matrix} n \\ m+۲\end{matrix} \xrightarrow{\text{دوران } ۹۰^\circ \text{ حول مبدأ}} Q\Big|\begin{matrix} m \\ ۲n-۲\end{matrix} : \begin{cases} m=-(m+۲) \Rightarrow m=-۱ \\ ۲n-۲=n \Rightarrow n=۲\end{cases} \Rightarrow ۲m-n=-۲-۲=-۴$$

۸۵ ۴ ۳ ۲ **۱** طبق فرض داریم:

$$\hat{A}=۸۰^\circ, \hat{B}=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-(۸۰^\circ+۶۰^\circ)=۴۰^\circ$$

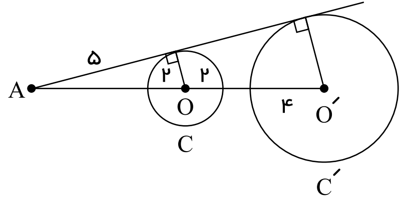
$$MN||BC \Rightarrow A\hat{N}M=\hat{C}=۴۰^\circ$$



پس زاویهٔ بین AN و MN برابر ۴۰° است. درنتیجه، زاویهٔ بین مجانس‌های AN و MN نیز ۴۰° است. زیرا در تبدیل تجانس، شیب خطوط و زوایای متناظر ثابت باقی می‌مانند و بستگی به مرکز تجانس و نسبت تجانس ندارد.

۸۶ ۴ **۳** ۲ ۱ طبق فرض $R=۲$، $OA=۷$ و $k=۲$، طبق شکل داریم:

$$\begin{cases} R'=kR=۲\times۲=۴ \\ AO'=k\cdot AO=۲\times۷=۱۴\end{cases} \Rightarrow OO'=AO'-AO=۱۴-۷=۷$$



درنتیجه، دو دایره متخارج بوده و طول مماس مشترک داخلی آنها برابر است با:

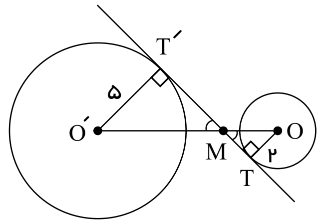
$$\sqrt{OO'^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۴۹-۳۶}=\sqrt{۱۳}$$

۸۷ ۴ ۳ **۲** ۱ نخست وضعیت دو دایره را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} OO'=۸ \\ R=۲ \\ R'=۵\end{cases} \Rightarrow OO'>R+R' \Rightarrow \text{دو دایره متخارج هستند.}$$

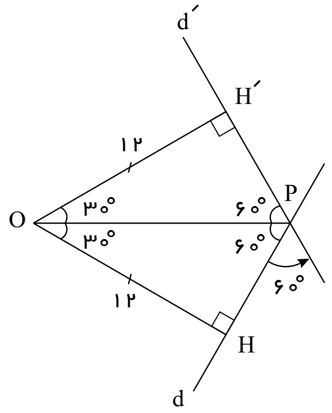
مرکز تجانس معکوس دو دایرهٔ متخارج، نقطهٔ همرسی خط‌المرکزین با مماس مشترک داخلی دو دایره است (M). بنابراین، داریم:

$$\frac{O'M}{OM}=\frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{OO'-OM}{OM}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۸-OM}{OM}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow ۱۶-۲OM=۵OM \Rightarrow OM=\frac{۱۶}{۷}$$



۸۸ ۴ ۳ ۲ **۱**

مطابق شکل با دوران خط d حول مرکز دوران O و به اندازهٔ ۶۰°، خط d' به‌دست می‌آید. در مثلث OHP، ضلع OH روبه‌روی زاویهٔ ۶۰° بوده، بنابراین داریم:



$$OH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OP \Rightarrow ۱۲=\frac{\sqrt{۳}}{۲}OP \Rightarrow OP=\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}=۸\sqrt{۳}$$

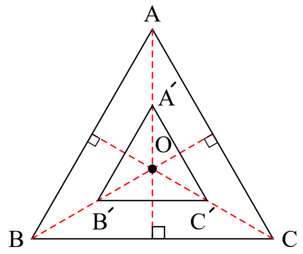
تذکر: از آنجا که تبدیل دوران، تبدیلی طولپاست $(OH'=OH)$، دو مثلث قائم‌الزاویه شکل فوق بنابر تساوی وتر و یک ضلع قائمه هم‌نهشت‌اند.

۸۹ ۴ **۳** ۲ ۱ طبق فرض و شکل زیر داریم:

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{۱}{۳}$$

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند و نسبت تشابه $k=\frac{۱}{۳}$ بوده، بنابراین نسبت مساحت‌ها برابر است با:

$$\frac{S'}{S}=k^۲=\frac{۱}{۹}\Rightarrow S'=\frac{۱}{۹}S$$

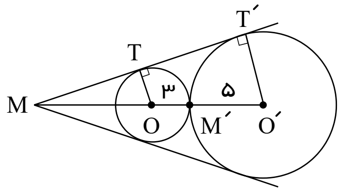


$$\text{فرض : مساحت بین دو مثلث}=S-S'=S-\frac{۱}{۹}S=\frac{۸}{۹}S=\sqrt{۳}\Rightarrow S=\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}$$

$$\text{ضلع مثلث } ABC\ a\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}\Rightarrow a^۲=\frac{۹}{۲}\Rightarrow a=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}=۳a=\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$$

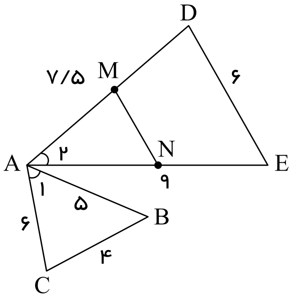
۹۰ ۴ ۳ **۲** ۱ مطابق شکل، M مرکز تجانس مستقیم و M' مرکز تجانس معکوس است. داریم:

$$OT\|O'T'\Rightarrow\frac{OM}{O'M}=\frac{OT}{O'T'}\Rightarrow\frac{OM}{OM+۸}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow ۵OM=۳OM+۲۴\Rightarrow OM=۱۲$$
$$\Rightarrow MM'=OM+OM'=۱۲+۳=۱۵$$



۹۱ ۴ ۳ **۲** ۱ دو مثلث متشابه‌اند. زیرا: $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{۲}{۳}$

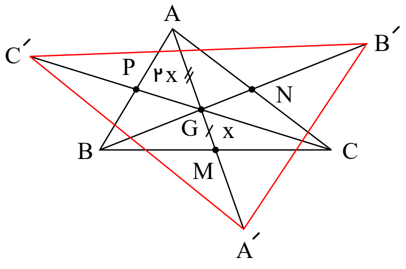
بنابراین، $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ و $B\hat{A}D=C\hat{A}E=\alpha$. درنتیجه، اگر دو نقطهٔ B و C را حول مرکز A و به زاویهٔ α دوران دهیم، دو نقطهٔ M و N به‌ترتیب منطبق بر دو ضلع AD و AE به‌دست می‌آید که مثلث AMN تصویر مثلث ABC است. همچنین این مثلث، تصویر مثلث ADE در یک تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{۲}{۳}=\frac{MN}{DE}=\frac{AM}{AD}=\frac{AN}{AE}$ می‌باشد.



۹۲ **۴** ۳ ۲ ۱ مطابق شکل، G محل تلاقی میانه‌هاست. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}GA=\frac{۲}{۳}AM\\ GM=\frac{۱}{۳}AM\end{cases}\xrightarrow[GM=x]{\text{فرض}}GA=۲GM=۲x\ ,\ AM=۳x$$

$$A'M\overset{\text{فرض مسئله}}{=\!=\!=}\frac{۳}{۴}AM\Rightarrow A'M=\frac{۳}{۴}\times۳x=\frac{۹}{۴}x$$



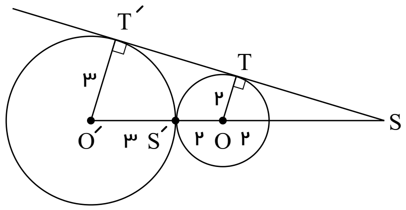
A' مجانس A نسبت به مرکز تجانس G است و A و A' در دو طرف مرکز تجانس G قرار دارند، پس تجانس معکوس بوده و ضریب تجانس k، منفی است.

حال طبق تعریف تجانس داریم:

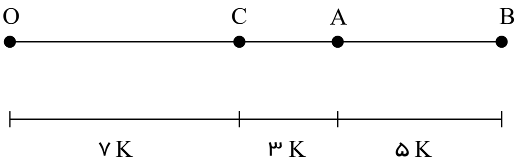
$$\begin{cases} |k| = \dfrac{GA'}{GA} = \dfrac{\frac{۱۳}{۴}x}{۲x} = \dfrac{۱۳}{۸} \Rightarrow k = -\dfrac{۱۳}{۸} \\ GA' = GM + A'M = x + \dfrac{۹}{۴}x = \dfrac{۱۳}{۴}x \end{cases}$$

۹۳ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ مراکز تجانس S و S' روی خط‌المرکزین و یا امتداد آن قرار دارند. برای محاسبهٔ SS' داریم:

$$OT \| O'T' \Rightarrow \frac{SO}{SO'} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \begin{cases} SO = \frac{۲}{۳}SO' \Rightarrow OO' = \frac{۱}{۳}SO' \xrightarrow{OO'=۵} \begin{cases} SO' = ۱۵ \\ SO = ۱۰ \end{cases} \\ SS' = SO + OS' = ۱۰ + ۲ = ۱۲ \end{cases}$$



۹۴ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

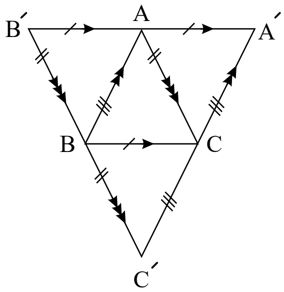


$$\frac{OB}{OA} = \frac{۳}{۲} \rightarrow OB = ۱۵K \text{ و } OA = ۱۰K \rightarrow AB = OB - OA = ۱۵K - ۱۰K = ۵K$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{۳}{۵} \rightarrow \frac{AC}{۵K} = \frac{۳}{۵} \rightarrow AC = ۳K$$

$$\frac{BC}{OC} = \frac{۸K}{۷K} = \frac{۸}{۷}$$

۹۵ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

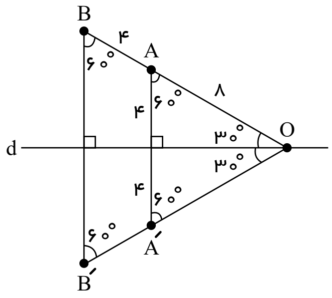


متوازی‌الاضلاع است $AA'CB \rightarrow$ { $AA' = BC \rightarrow$ انتقال
$AA' \| BC \rightarrow$.انتقال شیب خط را ثابت نگه می‌دارد }

متوازی‌الاضلاع است $ACBB' \rightarrow$ { $BB' = AC \rightarrow$ انتقال
$BB' \| AC \rightarrow$.انتقال شیب خط را ثابت نگه می‌دارد }

۹۶ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

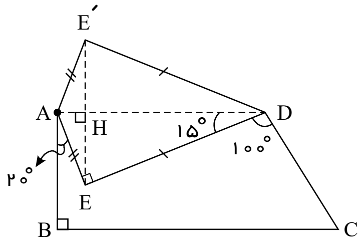


$$S_{ABB'A'} = S_{\overset{\triangle}{OBB'}} - S_{\overset{\triangle}{OAA'}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}OB^۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۴}OA^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(OB^۲ - OA^۲) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۲^۲ - ۸^۲) = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۸۰ = ۲۰\sqrt{۳}$$

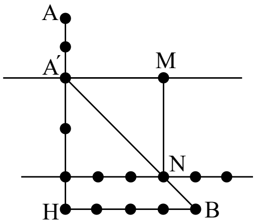
۹۷ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

$A\overset{\triangle}{E}H$: ۱۵° ارتفاع وارد بر وتر روبه رو به $EH = \frac{AD}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$

$$S_{AEDE'} = ۲ \times \frac{۱}{۲}EH(AD) = ۲ \times ۸ = ۱۶$$



۹۸ ۴ **۳** ۲ ۱

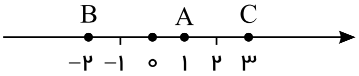


مطابق مطالب کتاب درسی نقطهٔ A را با بردار ۲ انتقال می‌دهیم تا A' بدست آید. محل تلاقی $A'B$ با رودخانهٔ N و پل مورد نظر MN می‌باشد. کوتاه‌ترین مسیر $AMNB$ است.

$$AMNB = AM + MN + NB = A'N + NB + MN = A'B + MN$$
$$MN = ۲\ ,\ A'B^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow A'B = ۵ \Rightarrow AMNB = ۷$$

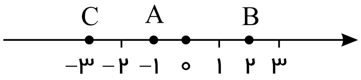
۹۹ ۴ ۳ **۲** ۱ از آنجا که در تجانس به مرکز A، نوع تجانس انقباضی و معکوس است، پس اولاً B و C در دو طرف A قرار دارند و ثانیاً نسبت تجانس کمتر از ۱ می‌باشد. داریم:

حالت اول:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵} = ۰٫۶$$

حالت دوم:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵} = ۰٫۶$$

۱۰۰ ۴ ۳ **۲** ۱ مطابق شکل A' بازتاب A نسبت به d و A'' دوران‌یافتهٔ A به مرکز A' و زاویهٔ ۱۲۰° می‌باشد، داریم:

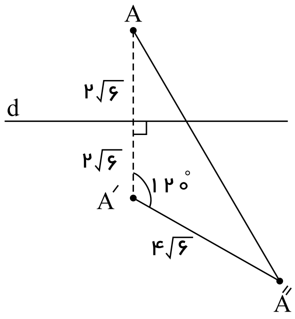
$$AA' = A'A'' = ۴\sqrt{۶}$$

قضیهٔ کسینوس‌ها : $\overset{\Delta}{AA'A''}$

$$AA''^۲ = AA'^۲ + A'A''^۲ - ۲AA' \cdot A'A'' \times \cos ۱۲۰^\circ$$

$$AA''^۲ = (۴\sqrt{۶})^۲ + (۴\sqrt{۶})^۲ + ۲ \times ۴\sqrt{۶} \times ۴\sqrt{۶} \times \frac{۱}{۲}$$

$$= ۹۶ + ۹۶ + ۹۶ = ۲۸۸ \Rightarrow AA'' = ۱۲\sqrt{۲}$$



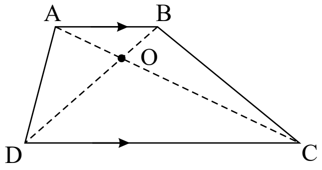
۱۰۱ ۴ **۳** ۲ ۱ می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، یک انتقال است و بردار انتقال دو برابر فاصلهٔ دو خط موازی است. داریم:

$$AA'' = ۲\times\ (\text{فاصلهٔ دو خط بازتاب}) \Rightarrow m + ۱ = ۲(۴ - m) \Rightarrow m = \frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow BB'' = AA'' = ۱ + \frac{۷}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

۱۰۲ **۴** ۳ ۲ ۱

گزینهٔ ۱: بازتاب AB نسبت به CD حتماً با AB موازی است پس با CD هم موازی است.

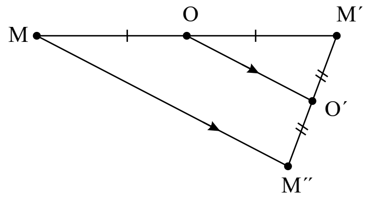


گزینهٔ ۲: مجانس AB نسبت به هر نقطه مثل O حتماً با AB موازی است پس با CD هم موازی است.

گزینهٔ ۳: در هر انتقال، AB با تصویرش موازی است پس با CD هم موازی است.

گزینهٔ ۴: از آنجا که دوران‌یافتهٔ AB به مرکز O و زاویهٔ $A\hat{O}B$، با AB زاویه‌ای برابر با $A\hat{O}B$ می‌سازد، پس دوران‌یافتهٔ AB با AB متقاطع است پس نمی‌تواند با CD موازی باشد.

۱۰۳ ۴ ۳ ۲ **۱** مطابق شکل M' دوران‌یافتهٔ M به مرکز O و M'' دوران‌یافتهٔ M' به مرکز O' می‌باشد. داریم:



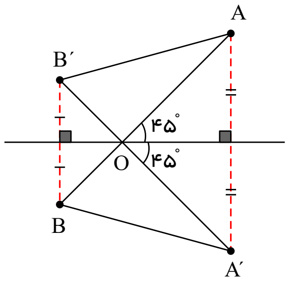
$OM = OM'\ ,\ O'M' = O'M''$

عکس تالس : $OO' \| MM''\ ,\ MM'' = ۲OO'$

از آن‌جا که OO' ثابت است پس بردار $\overrightarrow{MM''}$، M را بر M'' منتقل می‌کند.

۱۰۴ ۴ ۳ ۲ **۱**

مطابق شکل، A' بازتاب A و B' بازتاب B می‌باشد. داریم:



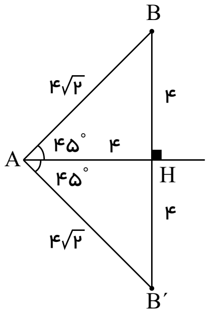
بازتاب طولپاست $AA' \| BB'\ ,\ AB' = A'B$

ذوزنقهٔ $AB'BA'$ متساوی‌الساقین است.

$$\Rightarrow AB = A'B' = ۴\ ,\ A\hat{O}A' = ۹۰^\circ \Rightarrow S_{AA'BB'} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۴ = ۸$$

۱۰۵ **۴** ۳ ۲ ۱

مطابق شکل برای محاسبهٔ شعاع دایره محاطی خارجی داریم:

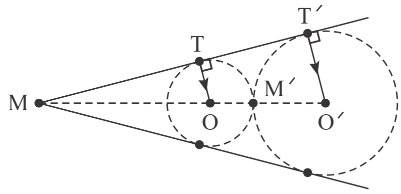


$$S_{ABB'} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۸ = ۱۶ \text{ و } P = \frac{۴\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲} + ۸}{۲} = ۴\sqrt{۲} + ۴$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۱۶}{۴\sqrt{۲} + ۴ - ۸} = \frac{۱۶}{۴\sqrt{۲} - ۴} = \frac{۴}{\sqrt{۲} - ۱} = ۴(\sqrt{۲} + ۱)$$

$$r_b = r_{b'} = \frac{S}{P-b} = \frac{۱۶}{۴\sqrt{۲} + ۴ - ۴\sqrt{۲}} = ۴$$

۱۰۶ ۴ **۳** ۲ ۱ مطابق شکل در مرکز تجانس مستقیم، M می‌باشد و مرکز تجانس معکوس M' می‌باشد.



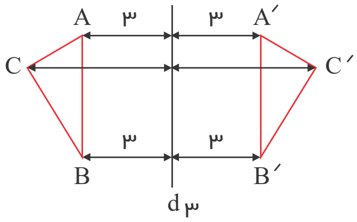
$$OT \parallel O'T' \Rightarrow \frac{OM}{O'M} = \frac{OT}{O'T'} \Rightarrow \frac{OM}{OM + ۶} = \frac{۲}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴OM = ۲OM + ۱۲ \Rightarrow OM = ۶$$

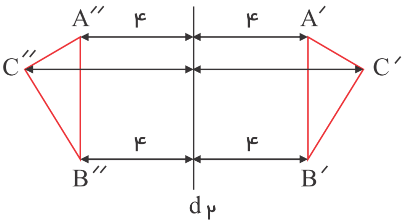
$$\Rightarrow MM' = OM + OM' = ۶ + ۲ = ۸$$

۱۰۷ ۴ ۳ ۲ **۱**

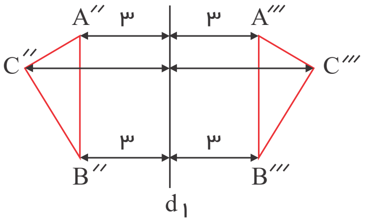
بازتاب نسبت به $d_۳$:



چون فاصلهٔ A' تا $d_۲$ برابرست با $۳ + ۱ = ۴$، پس داریم:



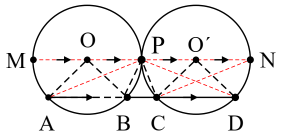
فاصلهٔ A'' تا $d_۱$ برابرست با $۴ - ۱ = ۳$، پس داریم:



فاصلهٔ A''' تا $d_۱$ برابر با ۳ و فاصلهٔ A تا $d_۱$ برابر با ۱ می‌باشد پس: $AA''' = ۳ + ۱ = ۴$.

۱۰۸ **۴** ۳ ۲ ۱

مطابق شکل از آنجا که دو دایره مساویند، پس می‌توان گفت که دایره به مرکز O'، انتقال یافته دایره به مرکز O، با بردار $OO' = ۲r$ می‌باشد. انتقال طولپاست، پس:



$$\begin{cases} AD \parallel OO' \Rightarrow A \to C, B \to D \Rightarrow AB = CD \\ OA = OB = O'C = O'D \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{CO'D}$$

$$AP \parallel CN, AP = CN \Rightarrow A\hat{P}C = P\hat{C}N, P\hat{C}N = \frac{\overset{\frown}{PN}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow A\hat{P}C = ۹۰^\circ$$

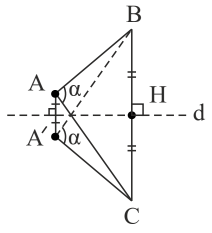
به همین ترتیب: $B\hat{P}D = ۹۰^\circ$.

$$\begin{cases} PB = PC \\ PD = PA \Rightarrow \overset{\triangle}{APB} \cong \overset{\triangle}{CPD} \Rightarrow A\hat{P}C = B\hat{P}C \\ AB = CD \end{cases}$$

۱۰۹ ۴ **۳** ۲ ۱ می‌دانیم که محور بازتاب، عمود منصف نقطه و تصویرش می‌باشد. در این سوال نقاط B و C بازتاب هم هستند، پس محور بازتاب عمود منصف BC می‌باشد.

در این بازتاب A'، تصویر A تحت بازتاب به محور خط d (عمود منصف BC) می‌باشد. همچنین چون بازتاب زوایا را حفظ می‌کند. داریم:

$$B\overset{\triangle}{A'}C = B\overset{\triangle}{A}C = \alpha$$



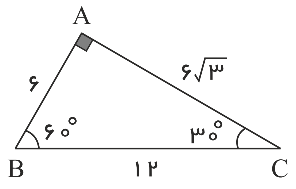
۱۱۰ **۴** ۳ ۲ ۱ از آنجا که تبدیل T طولپاست پس مساحت دو مثلث $ABC, A'B'C'$ برابرست. داریم:

$$\hat{A} = \frac{۳}{۲}\hat{B} = ۳\hat{C}, A + B + C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A + \frac{۲}{۳}A + \frac{۱}{۳}A = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow B = ۶۰^\circ \ , \quad C = ۳۰^\circ \Rightarrow AB = ۱۲ \times \sin ۳۰^\circ = ۶ \ , \quad AC = ۱۲ \times \sin ۶۰^\circ = ۶\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۶\sqrt{۳} = ۱۸\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۱۸\sqrt{۳}$$



۱۱۱ ۴ ۳ ۲ **۱** ضابطهٔ دوران حول مبدأ و به زاویهٔ $\alpha = \frac{۳\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی به‌صورت زیر است:

$$(x, y) \xrightarrow{\alpha = \frac{۳\pi}{۲}} (y, -x)$$

تصویر مرکز دایره $O'(۳,۲) \rightarrow O(-۲,۳)$ مرکز دایره

همچنین در دوران که یک تبدیل ایزومتریست، شعاع دایره ثابت می‌ماند، پس:

$$R' = R = \frac{۵}{۲}$$

طول مماس مشترک داخلی دو دایره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

خط المرکزین : $\Rightarrow OO' = \sqrt{(۳-(-۲))^۲ + (۳-۲)^۲} = \sqrt{۲۵+۱} = \sqrt{۲۶}$

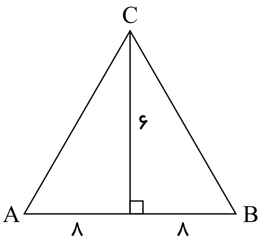
طول مماس مشترک داخلی : $TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R+R')^۲} = \sqrt{۲۶ - (\frac{۵}{۲} + \frac{۵}{۲})^۲} = \sqrt{۲۶ - ۲۵} = ۱$

۱۱۲ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ **طول ارتفاع وارد بر AB برابر می‌شود با:**

$$S = ۴۸ = \frac{۱}{۲} \times ۱۶ \times h \Rightarrow h = ۶$$

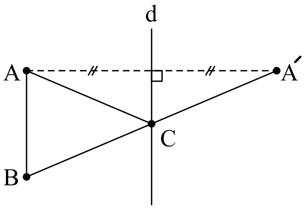
(نکته) در بین مثلث‌هایی که طول یک ضلع و ارتفاع وارد بر آن ثابت است، کمترین محیط مربوط به مثلث متساوی‌الساقین است.

براساس این نکته داریم:



$$\overset{\Delta}{ACH} : AC^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow AC = AB = ۱۰$$

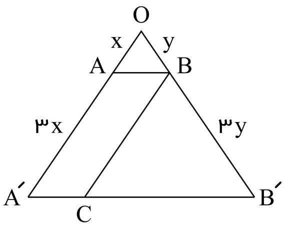
در نتیجه کمترین مقدار مثلث مورد نظر برابر $۳۶ = ۱۶ + ۱۰ \times ۲$ است.



(اثبات نکته) از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم. قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط d، A' می‌نامیم. براساس مسئلهٔ هرون، اگر B را به A' وصل کنیم و نقطهٔ برخورد آن با d را C بنامیم، آنگاه $BCA' = BC + AC$ کمترین مقدار برای $AC + BC$ خواهد بود.

از آنجا که $AB||d$ در نتیجه $AA' \perp AB$، یعنی مثلث ABA' در رأس A قائمه است و C وسط وتر BA' است و در نتیجه $AC = BC$.

۱۱۳ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱] **مطابق شکل، پاره‌خط‌های AB و BC موازی اضلاع مثلث $OA'B'$ هستند و داریم:**



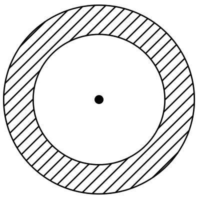
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{OA'B'} \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{OA'B'}} = (\frac{OA}{OA'})^۲ = \frac{۱}{۱۶} & (۱) \\ \overset{\Delta}{B'BC} \sim \overset{\Delta}{OA'B'} \Rightarrow \frac{S_{B'BC}}{S_{OA'B'}} = (\frac{BB'}{OB'})^۲ = \frac{۹}{۱۶} & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{S_{ABCA'}}{S_{OA'B'}} = ۱ - (\frac{۱}{۱۶} + \frac{۹}{۱۶}) = \frac{۶}{۱۶} \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۳)} \frac{S_{ABCA'}}{S_{OAB}} = \frac{\frac{۶}{۱۶}}{\frac{۱}{۱۶}} = ۶$$

۱۱۴ **۴** ۳ ۲ ۱

شعاع دایرهٔ اولیه را R می‌گیریم؛ شعاع دایرهٔ تصویر برابر می‌شود با:



$$r = R \times ۰/۶ = \frac{۳}{۵}R$$

با توجه به فرض داریم:

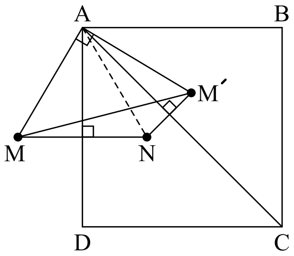
$$\pi R^۲ - \pi r^۲ = ۱۶ \Rightarrow \pi(R^۲ - \frac{۹}{۲۵}R^۲) = ۱۶ \Rightarrow \pi \times \frac{۱۶}{۲۵}R^۲ = ۱۶ \Rightarrow R^۲ = \frac{۲۵}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۵}{\sqrt{\pi}}$$

محیط دایرهٔ اولیه برابر می‌شود با:

$$P = ۲\pi R = ۲\pi \times \frac{۵}{\sqrt{\pi}} = ۱۰\sqrt{\pi}$$

۱۱۵ **۴** ۳ ۲ ۱

مطابق شکل، حاصل این دو تبدیل یک دوران است به مرکز A و با زاویه‌ای دو برابر زاویهٔ بین AD و AC است.



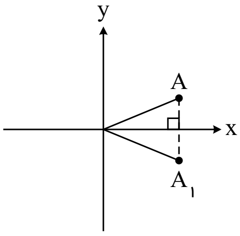
$$D\hat{A}C = ۴۵^\circ \Rightarrow M\hat{A}M' = ۲ \times ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$

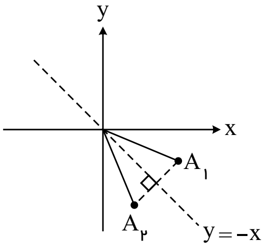
از طرفی:

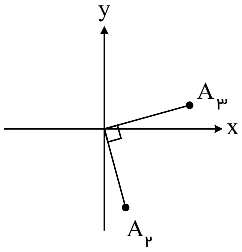
$$AM' = AM = ۲ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} MM'^۲ = AM^۲ + AM'^۲ = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow MM' = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

۱۱۶ **۴** ۳ ۲ ۱

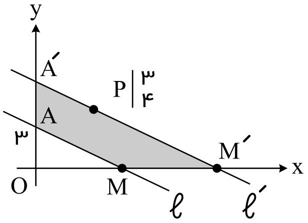
در بین گزینه‌ها، فقط ترکیب ۳ تبدیل (الف) و (د) و (هـ) همانی است. زاویهٔ بین محور xها و خط $y = -x$ برابر ۴۵° است. از طرفی، ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، یک دوران است که زاویهٔ دوران دو برابر زاویهٔ بین دو محور بازتاب و مرکز دوران، محل تقاطع دو محور بازتاب می‌باشد. بنابراین، ترکیب دو بازتاب نسبت به محور xها و خط $y = -x$، یک دوران ۹۰° حول مبدأ مختصات در جهت ساعتگرد است. اگر $A_۲$ تصویر نقطهٔ A بعد از این دو بازتاب باشد، آنگاه نقطهٔ $A_۳$ (تصویر $A_۲$ تحت دوران ۹۰° حول مبدأ مختصات در جهت پادساعتگرد) بر نقطهٔ A منطبق می‌شود.







۱۱۷ ۴ **۳** ۲ ۱ مطابق شکل، نقاط برخورد خطوط ℓ و ℓ' را با محورهای x, y، A, A', M و M' می‌نامیم. ابتدا عرض نقطهٔ A' را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{OA'}{OA} = k \Rightarrow \frac{OA'}{۳} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow OA' = ۵$$

خط ℓ' از نقاط $A'(۰,۵)$ و $P(۳,۴)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y - ۵ = (\frac{۵-۴}{۰-۳})(x-۰) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + ۵ : \ell'$$

نقاط برخورد ℓ و ℓ' با محور xها را به‌دست می‌آوریم:

$$\ell' : y = -\frac{۱}{۳}x + ۵ \xrightarrow{y=۰} x = ۱۵ \Rightarrow M'(۱۵,۰)$$

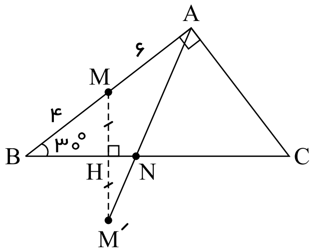
$$\frac{OM'}{OM} = k \Rightarrow \frac{۱۵}{OM} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow OM = ۹ \Rightarrow M(۹,۰)$$

مساحت ناحیهٔ رنگی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S_۱ = S_{OA'M'} - S_{OAM} = \frac{۱}{۲}(۵\times۱۵) - \frac{۱}{۲}(۳\times۹) = \frac{۷۵-۲۷}{۲} = ۲۴$$

۱۱۸ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

طبق مسئلهٔ هرون، برای یافتن کمترین محیط مثلث AMN، با توجه به اینکه در جمع اضلاع این مثلث، یعنی $AM + MN + AN$، طول AM ثابت است، پس باید N را طوری روی وتر درنظر بگیریم که $AN + MN$ به کمترین مقدار خود برسد. پس ابتدا تصویر M را نسبت به وتر BC به دست می‌آوریم.



در این‌صورت، از M' به A وصل می‌کنیم تا BC را در N قطع کند:

$$\overset{\Delta}{BMH} : \underset{\text{ضلع روبه‌روی زاویهٔ }۳۰^\circ}{\underset{\downarrow}{MH}} = \frac{BM}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \rightarrow MM' = ۲MH = ۲\times۲ = ۴$$

در مثلث AMM' قضیهٔ کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

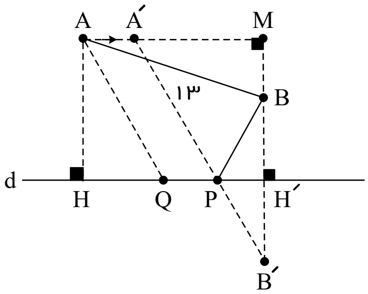
$$\overset{\Delta}{AMM'} : AM'^۲ = AM^۲ + MM'^۲ - ۲AM\times MM'\cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow AM'^۲ = ۶^۲ + ۴^۲ - ۲\times۶\times۴\times(-\frac{۱}{۲}) = ۷۶ \rightarrow AM' = \sqrt{۷۶} = ۲\sqrt{۱۹}$$

$$\rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\ \text{کمترین محیط} = AM + AM' = ۶ + ۲\sqrt{۱۹}$$

۱۱۹ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

طبق مسئلهٔ هرون، ابتدا تصویر نقطهٔ B را نسبت به خط d (نقطهٔ B') می‌یابیم. سپس نقطهٔ A' را به اندازهٔ ۲ واحد به سمت B و موازی خط d انتقال می‌دهیم تا به A' برسیم. کوتاه‌ترین مسیر شکستهٔ $AQPB$ طولی معادل $A'B' + AA'$ دارد.

مطابق شکل داریم:



$$BH' = ۶, AH = MH' = BH' + BM \rightarrow ۱۱ = ۶ + BM \rightarrow BM = ۵$$

$$\overset{\Delta}{ABM} : AB^۲ = BM^۲ + AM^۲ \rightarrow ۱۳^۲ = ۵^۲ + AM^۲ \rightarrow AM = ۱۲ \rightarrow A'M = AM - AA' = ۱۲ - ۲ = ۱۰$$

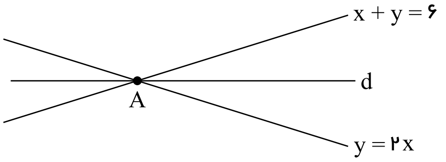
$$\overset{\Delta}{A'MB'} : A'B'^{۲} = A'M^{۲} + MB'^{۲} = ۱۰^{۲} + (\underbrace{MB}_{۵} + \underset{۲BH'=۲\times ۶}{\overset{}{\underset{\downarrow}{BB'}}})^{۲} = ۱۰^{۲} + ۱۷^{۲} = ۱۰۰ + ۲۸۹ = ۳۸۹$$

$$\rightarrow A'B' = \sqrt{۳۸۹}$$

$$\rightarrow min(AQPB) = A'B' + AA' = \sqrt{۳۸۹} + ۲$$

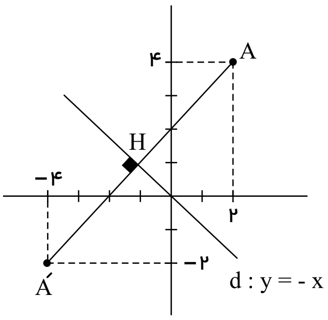
۱۲۰ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴

تنها نقطه‌ای از بازتاب دو خط داده‌شده نسبت به خط d که می‌تواند نقطهٔ ثابت تبدیل نام گیرد، همان نقطهٔ تقاطع دو خط (نقطهٔ A) است که مختصات آن از حل دستگاه زیر به دست می‌آید:



$$\begin{cases} y = ۲x \\ x + y = ۶ \end{cases} \rightarrow ۳x = ۶ \rightarrow x = ۲ \rightarrow y = ۴ \rightarrow A\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۴ \end{matrix}\right.$$

حال برای یافتن مختصات نقطهٔ A' (بازتاب A نسبت به خط $y = -x$) ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از A که بر خط $y = -x$ عمود است را می‌نویسیم:



$$m_{\Delta} = -۱ \rightarrow m_{AA'} = \frac{-۱}{m_{\Delta}} = \frac{-۱}{-۱} = +۱ \rightarrow AA' : y - y_{A} = m_{AA'}(x - x_{A}) \rightarrow y - ۴ = ۱(x - ۲) \rightarrow y = x + ۲ \xrightarrow[\text{با } y=-x]{\text{قطع}} \begin{cases} y = x + ۲ \\ y = -x \end{cases}$$

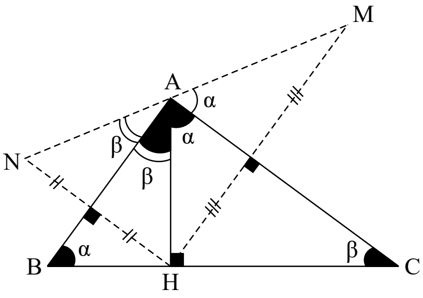
$$\rightarrow -x = x + ۲ \rightarrow x = -۱, y = +۱ \rightarrow H(-۱, ۱) \rightarrow A' = ۲H - A = ۲(-۱, ۱) - (۲, ۴) = (-۴, -۲)$$

$$\rightarrow A'M = \sqrt{(\Delta x)^{۲} + (\Delta y)^{۲}} = \sqrt{۵^{۲} + ۱۲^{۲}} = ۱۳$$

نکتهٔ بسیار مهم: تصویر (بازتاب) نقطهٔ $A(\alpha, \beta)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم محورهای مختلف (خط $y = -x$) نقطهٔ $A'(-\beta, -\alpha)$ می‌شود. و همچنین نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (خط $y = x$) نقطهٔ $A'(\beta, \alpha)$ است.

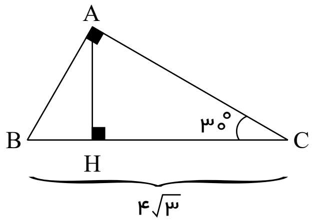
۱۲۱ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴

مطابق شکل، ابتدا ارتفاع AH (وارد بر وتر BC) را رسم کرده، سپس بازتاب نقطهٔ H (پای ارتفاع وارد بر وتر) را نسبت به دو ضلع AB و AC به‌ترتیب N و M نامیده‌ایم. دقت کنید وقتی ارتفاع وارد بر وتر را در یک مثلث قائم‌الزاویه رسم می‌کنیم، زاویهٔ این ارتفاع با اضلاع قائم، با دو زاویهٔ حادهٔ مثلث، به‌طور ضربدری مساوی است. (مثلاً $H\hat{A}C = \hat{B} = \alpha$)



چون $\alpha + \beta = ۹۰^{\circ}$ پس $M\hat{A}N = ۲\alpha + ۲\beta = ۲ \times ۹۰^{\circ} = ۱۸۰^{\circ}$ پس M و A و N روی یک خط راست بوده و $MN = MA + AN$. از طرفی، چون M بازتاب H نسبت به AC است، پس $MA = AH$ و به همین ترتیب $AN = AH$ پس مطلوب مسئله $MA + AN = ۲AH$ می‌شود.

حال هدف یافتن AH است:



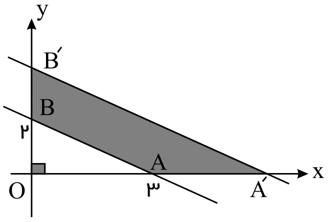
$$\overset{\Delta}{AHC}: \sin\hat{C} = \frac{AH}{AC} \rightarrow AH = AC \sin \underset{۳۰^\circ}{\underset{\downarrow}{\hat{C}}} = \frac{AC}{۲} \quad (*)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \cos \underset{۳۰^\circ}{\underset{\downarrow}{\hat{C}}} = \frac{AC}{BC} \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AC}{۴\sqrt{۳}} \rightarrow AC = ۶$$

$$\xrightarrow{\text{طبق}(*)} AH = \frac{۶}{۲} = ۳ \rightarrow \text{مطلوب مسئله} = ۲AH = ۶$$

۱۲۲ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

ابتدا خط $۲x + ۳y = ۶$ را رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases} x = ۰ \rightarrow y = ۲ \rightarrow B\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right. \\ y = ۰ \rightarrow x = ۳ \rightarrow A\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right. \end{cases}$$

حال طبق تعریف تجانس داریم:

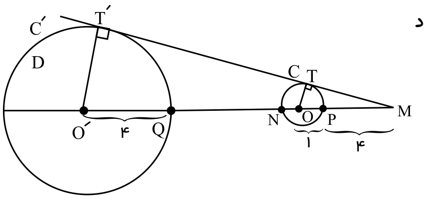
$$\text{است } A \text{ مجانس } A' \rightarrow OA' = |k|OA = ۲ \times ۳ = ۶$$

$$\text{است } B \text{ مجانس } B' \rightarrow OB' = |k|OB = ۲ \times ۲ = ۴$$

$$\rightarrow S_{\text{هاشورزده}} = S_{\overset{\Delta}{OA'B'}} - S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{OA' \times OB'}{۲} - \frac{OB \times OA}{۲} = \frac{۶ \times ۴}{۲} - \frac{۳ \times ۲}{۲} = ۱۲ - ۳ = ۹$$

۱۲۳ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱

می‌دانیم دو دایره همواره متجانس مستقیم و معکوس یکدیگرند. مرکز تجانس مستقیم دو دایرهٔ متجانس (و البته متخارج)، محل برخورد مماس‌های مشترک خارجی و خط‌المرکزین است.



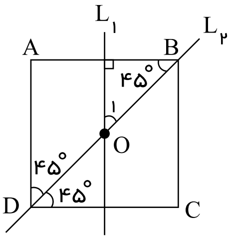
بنابراین، مطابق شکل در مثلث $MO'T'$ می‌توانیم قضیهٔ تالس جزء به کل را بنویسیم:

$$\overset{\Delta}{MO'T'}:\ OT || O'T' \rightarrow \frac{MO}{MO'} = \frac{OT}{O'T'} \rightarrow \frac{۴+۱}{MO'} = \frac{۱}{۴} \rightarrow MO' = ۲۰$$

$$\rightarrow \underset{\text{فاصله نزدیک‌ترین نقاط دو دایره}}{\underset{\downarrow}{QN}} = MO' - (\underset{R'}{\underset{\downarrow}{O'Q}} + \underset{R}{\underset{\downarrow}{ON}} + OM) = ۲۰ - (۴ + ۱ + ۵) = ۱۰$$

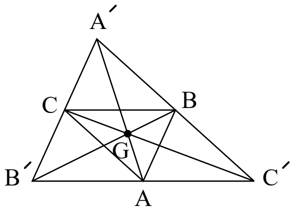
۱۲۴ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ از آنجا که قطرهای مربع، نیمسازند، داریم: $\hat{O}_۱ = ۴۵^\circ$

مطابق شکل، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به‌ترتیب عمودمنصف AB و امتداد قطر BD هستند و ترکیب دو بازتاب محوری $L_۱$ و $L_۲$ که باهم زاویهٔ α می‌سازند، یک دوران به اندازهٔ ۲α است که محل تلاقی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ مرکز دوران است. درنتیجه، تبدیل مورد نظر دورانی با زاویهٔ ۹۰° است.



۱۲۵ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ بدیهی است G، محل تلاقی میانه‌های مثلث $A'B'C'$ بوده و از آنجا که G هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند، داریم:

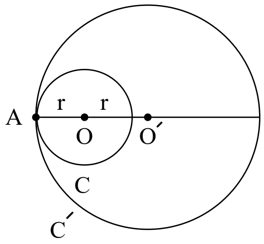
$$\frac{GA'}{GA}=\frac{GB'}{GB}=\frac{GC'}{GC}=۲$$



از طرفی، هر نقطه و تجانس‌یافتهٔ آن (مانند A و A') در دو طرف مرکز تجانس G قرار دارند. پس تجانس معکوس بوده و نسبت تجانس برابر است با $k=-۲$.

۱۲۶ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ چون دو دایره مماس داخل هستند، پس مطابق شکل، دایرهٔ C' مجانس دایرهٔ C به مرکز تجانس A (نقطهٔ تماس دو دایره) و با نسبت تجانس $k=۴$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{AO'}{AO}=۴\Rightarrow AO'=۴AO\xrightarrow{AO=r}OO'=۳r\xrightarrow{OO'=۱۲}\begin{cases}r=۴\\R=۱۶\end{cases}\Rightarrow \text{مساحت بین دو دایره}=\pi R^۲-\pi r^۲=\pi(R^۲-r^۲)$$
$$=\pi(۲۵۶-۱۶)=۲۴۰\pi$$

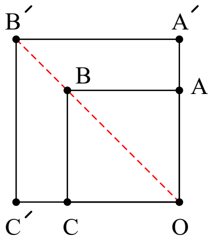


۱۲۷ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ از آنجا که نسبت تجانس برابر $k=\frac{۴}{۳}$، پس نسبت مساحت‌ها برابر است با:

$$\frac{S'}{S}=k^۲\Rightarrow S'=k^۲S=\frac{۱۶}{۹}S$$

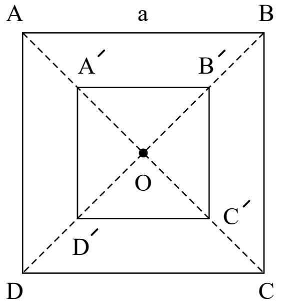
فرض : $S'-S=۱۴$

$$\Rightarrow(\frac{۱۶}{۹}-۱)S=۱۴\Rightarrow\frac{۷}{۹}S=۱۴\Rightarrow S=۱۸$$



۱۲۸ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ مربع $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ به مرکز O و نسبت تجانس $k=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

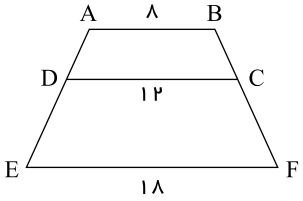


بنابراین، نسبت مساحت‌های دو مربع برابر است با:

$$\frac{S'}{S}=k^۲=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S'=\frac{۳}{۴}S\Rightarrow \text{مساحت ناحیهٔ بین دو مربع}\ S=S-S'=S-\frac{۳}{۴}S=\frac{۱}{۴}S\overset{\text{فرض}}{=}۴\Rightarrow S=۱۶\Rightarrow a^۲=۱۶\Rightarrow a=۴$$
$$\Rightarrow \text{محیط مربع}\ ABCD=۴a=۱۶$$

۱۲۹ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱] دو پاره‌خط AD و DE هم‌راستا و متجانس یکدیگرند (به همین‌ترتیب، دو پاره‌خط BC و CF هم‌راستا و متجانس یکدیگرند) پس مرکز تجانس در امتداد آنها و نقطهٔ برخورد امتدادهای دو ساق ذوزنقه است. حال نسبت تجانس را می‌نویسیم:

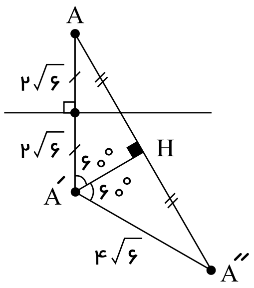
$$\frac{AB}{CD}=\frac{CD}{EF}\Rightarrow\frac{۸}{CD}=\frac{CD}{۱۸}\Rightarrow CD^۲=۱۴۴\Rightarrow CD=۱۲$$



از آنجا که در این تجانس، AB بر CD تصویر می‌شود، خواهیم داشت:

$$k=\frac{CD}{AB}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

۱۳۰ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱] با توجه به شکل زیر داریم:

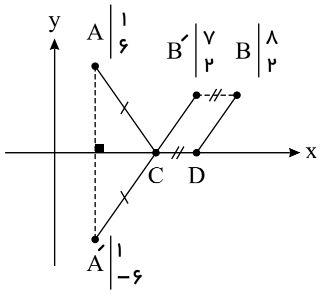


$$\overset{\Delta}{AA'H} \text{ در مثلث قائم‌الزاویه : } ۶۰^\circ \text{ روبه‌رو} AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AA' = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴\sqrt{۶} = ۶\sqrt{۲}$$

$$AA'' = ۲AH = ۲ \times ۶\sqrt{۲} = ۱۲\sqrt{۲}$$

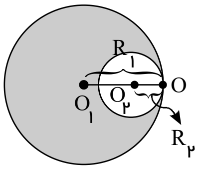
۱۳۱ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ با توجه به شکل زیر داریم:

$$ACDB_{\text{طول مسیر}} = AC + CD + DB = A'C + CB' + CD = A'B' + CD = \sqrt{(۷-۱)^۲ + (۲+۶)^۲} + ۱ = ۱۱$$



۱۳۲ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱ دو دایرهٔ C و C' مماس داخل هستند و نقطهٔ تماس آن‌ها مرکز تجانس است.

بنابراین:



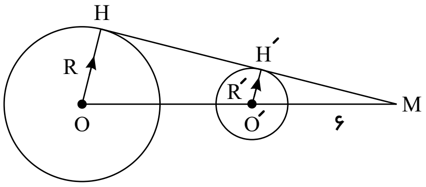
$$\frac{OO_۲}{OO_۱} = k = \frac{۱}{۳} \to \begin{cases} OO_۲ = x \\ OO_۱ = ۳x \end{cases}$$

$$O_۱O_۲ = ۳x - x = ۲x = ۲ \to \begin{cases} OO_۲ = R_۲ = ۱ \\ OO_۱ = R_۱ = ۳ \end{cases}$$

در نتیجه مساحت هاشورخورده برابر است با:

$$S_{\text{هاشور}} = \pi(R_۱^۲ - R_۲^۲) = \pi(۹ - ۱) = ۸\pi$$

۱۳۳ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]



$$\overset{\Delta}{OHM} : O'H' || OH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{R'}{R} = \frac{MO'}{MO} \text{ نسبت تجانس و : } \frac{R'}{R} = \frac{۳}{۵}$$

$$\to \frac{۳}{۵} = \frac{۶}{۶ + OO'} \to ۱۸ + ۳OO' = ۳۰$$

$$\to ۳OO' = ۱۲ \to \text{ طول خط المرکزین : } OO' = ۴$$

۱۳۴ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱

میدانیم که $K = \frac{۱}{۳}$ نسبت تجانس. داریم:

$$K = \frac{MO'}{MO} = \frac{۱}{۳}, \ MO = ۶ \Rightarrow MO' = ۲ \Rightarrow OO' = ۴$$

$$K = \frac{۱}{۳} = \frac{R'}{R} = \frac{۱}{۳}, \ R = ۳ \Rightarrow R' = ۱$$

داریم:

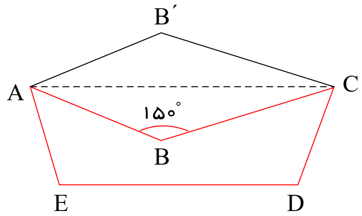
$$OO' = ۴, \ R + R' = ۴ \Rightarrow OO' = R + R'$$

پس دو دایره مماس خارج‌اند.

۱۳۵ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱] مطابق شکل نقطهٔ B را نسبت به AC بازتاب می‌دهیم، میزان افزایش مساحت، اندازهٔ مساحت چهارضلعی $ABCB'$ یا دو برابر مساحت مثلث ABC است.

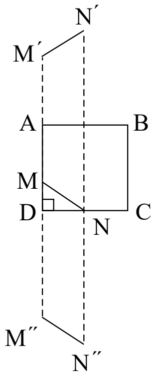
پس:

$$S_{ABCB'} = ۲S_{ABC} = ۲ \times (\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ \times \sin ۱۵۰^{\circ}) = ۲ \times ۳ = ۶$$

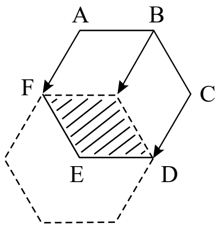


۱۳۶ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ دو محور بازتاب AB و CD موازی هستند، پس ترکیب این دو بازتاب معادل تبدیل انتقال است، پس $M''N''$ انتقال‌یافتهٔ MN است. طول بردار انتقال، دو برابر فاصلهٔ AB تا CD است و راستای انتقال عمودی است، بنابراین $MNN''M''$ متوازی‌الاضلاع است و داریم:

$$\begin{cases} MM'' = ۲AD = ۴ \\ DN = \dfrac{CD}{۲} = ۱ \end{cases} \Rightarrow S_{MNN''M''} = MM'' \times DN = ۴$$



۱۳۷ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ چون تبدیل انتقال طولپاست، پس شش‌ضلعی منتظم و تصویرش هم‌نهشت هستند، یعنی تمام اضلاع برابر بوده و ناحیهٔ مشترک یک لوزی است. مساحت این لوزی شامل دو مثلث متساوی‌الاضلاع است و مساحت شش‌ضلعی منتظم شامل شش مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶}$ می‌باشد.

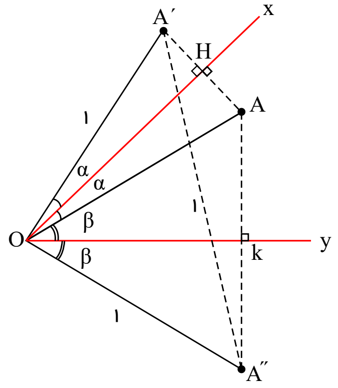


۱۳۸ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

$$x\hat{O}y = ۴۵^{\circ} \Rightarrow (\alpha + \beta) = ۴۵^{\circ} \Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta = ۹۰^{\circ}$$

$$OA = ۱ \Rightarrow OA' = OA = OA'' = ۱ \rightarrow A'\hat{O}A'' = ۹۰^{\circ}$$

$$A'A''^{۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲} \Rightarrow A'A'' = \sqrt{۲}$$

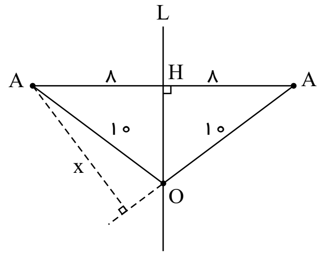


۱۳۹ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ طبق ویژگی‌های بازتاب داریم:

$$AH = A'H = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \text{ و } OA = OA' = ۱۰$$

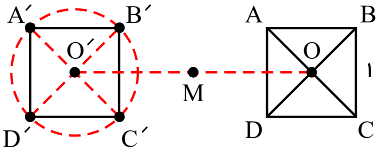
$$OH^{۲} = ۱۰^{۲} - ۸^{۲} \Rightarrow OH = ۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{AOA'}} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۶ = \frac{۱}{۲} \times x \times ۱۰ \Rightarrow x = ۹/۶$$



۱۴۰ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

در مربع $A'B'C'D'$ داریم:

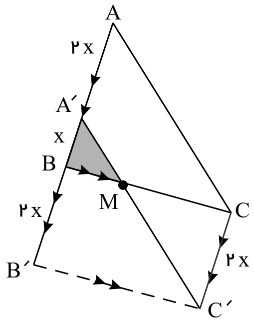


$$\overset{\triangle}{A'O'B'}:\ \hat{O}'=۹۰^\circ\ ,\ O'A'=O'B'=\sqrt{۲}\Rightarrow A'B'^{۲}=\sqrt{۲}\times O'A'=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۲$$

نسبت تجانس : $K=\frac{AB}{A'B'}=\frac{۱}{۲}\ ,\ OO'=۶\Rightarrow\frac{OM}{O'M}=K=\frac{۱}{۲}\Rightarrow OM=۲\ ,\ O'M=۴$

۱۴۱ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ مطابق شکل مثلث ABC با بردار AA' انتقال یافته است.

داریم:



$$BB'\parallel AA'\ ,\ BB'=AA'$$

$$CC'\parallel AA'\ ,\ CC'=AA'$$

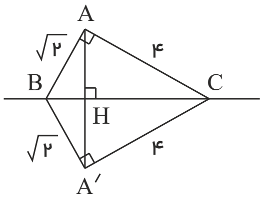
$$\frac{AA'}{A'B}=۲\ ,\ A'B=x\Rightarrow AA'=۲x\Rightarrow BB'=CC'=۲x$$

می‌دانیم که انتقال طولپاست، پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ همنهشت و مساحت‌های برابر دارند. داریم:

$$BM\parallel B'C'\Rightarrow\overset{\triangle}{A'BM}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{A'BM}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}}=(\frac{x}{۳x})^{۲}=\frac{۱}{۹}$$

۱۴۲ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ نقاط B و C، نقاط ثابت بازتاب هستند، پس محور بازتاب از BC می‌گذرد.

داریم:



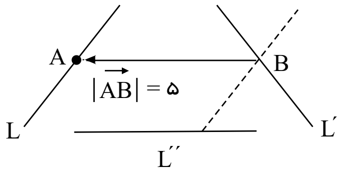
$$\text{بازتاب طولپاست}\Rightarrow AB=A'B=\sqrt{۲}\ ,\ AC=A'C=۴$$

$$\Rightarrow AH=A'H=\frac{۱}{۲}AA'\quad(۱)$$

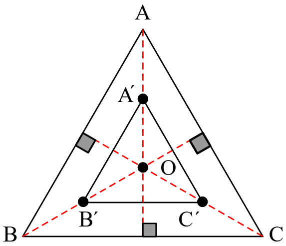
$$A\overset{\triangle}{B}C:BC^{۲}=(\sqrt{۲})^{۲}+۴^{۲}=۱۸\Rightarrow BC=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{\sqrt{۲}\times۴}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow(۱):\frac{۱}{۲}AA'=\frac{۴}{۳}\Rightarrow AA'=\frac{۸}{۳}$$

۱۴۳ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ با استفاده از انتقال، خط L را با یک بردار به اندازهٔ ۵ و موازی خط L'' انتقال می‌دهیم تا خط L' را در نقطهٔ B قطع کند، سپس این نقطه را با همین بردار و در خلاف جهت انتقال می‌دهیم تا خط L را در نقطهٔ A قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسئله است.



۱۴۴ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱



$$\frac{OA'}{OA}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow OA'=\frac{۱}{۲}OA$$

$$\frac{OB'}{OB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow OB'=\frac{۱}{۲}OB$$

$$\frac{OC'}{OC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow OC'=\frac{۱}{۲}OC$$

در مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابهند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد، داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}=\frac{۱}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت ناحیهٔ بین دو مثلث}=\frac{۳}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}}\Rightarrow\frac{۳}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۴\sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}\ \text{ضلع مثلث}\ a\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=۴\sqrt{۳}\Rightarrow a=۴\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط}=۱۲$$

۱۴۵ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): دو شکل متجانس همواره متشابهند اما اگر دو شکل متشابه باشند، می‌توانند مجانس نباشند یعنی اضلاع آن‌ها دو به دو موازی نباشند.

گزینهٔ (۲): تبدیلی مثل دوران، جهت شکل را حفظ می‌کند اما شیب خطوط را حفظ نمی‌کند.

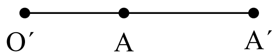
گزینهٔ (۳): تبدیلی مثل متجانس، اندازهٔ زاویه‌ها را حفظ می‌کند اما طولپا نیست.

گزینهٔ (۴): تبدیلی که تمام نقاط صفحه را بر خودشان تصویر کند همانی است.

۱۴۶ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

$$d:۲y+x=۶\ ,\ \ O'(۲,۱)\ ,\ \ k=\frac{۳}{۲}$$

نقطهٔ $A(۰,۳)$ روی خط $d:۲y+x=۶$ قرار دارد. فرض می‌کنیم A' مجانس A به مرکز تجانس $O'(۲,۱)$ و نسبت $k=\frac{۳}{۲}$ می‌باشد، داریم:



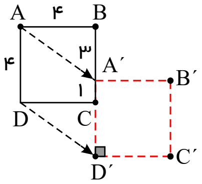
$$\overrightarrow{O'A'}=\frac{۳}{۲}\overrightarrow{O'A}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}-x_{O'}=\frac{۳}{۲}(x_A-x_{O'})\Rightarrow(x_{A'}-۲)=\frac{۳}{۲}(۰-۲)\Rightarrow x_{A'}=-۱\\(y_{A'}-y_{O'})=\frac{۳}{۲}(y_A-y_{O'})\Rightarrow(y_{A'}-۱)=\frac{۳}{۲}(۳-۱)\Rightarrow y_{A'}=۴\end{cases}\quad\Rightarrow\quad A'=\left|\begin{matrix}-۱\\۴\end{matrix}\right.$$

شیب خط مجانس (d') با شیب d یکسان است، پس داریم:

$$d':(y-۴)=-\frac{۱}{۲}(x+۱)\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\Rightarrow ۲y+x=۷$$

۱۴۷ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱

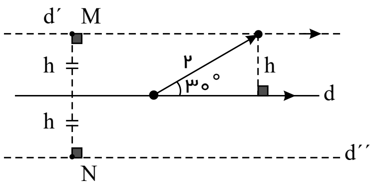


$$A'C=۱,BC=۴\Rightarrow A'B=۳$$

$$AA'^۲=۴^۲+۳^۲=۵^۲\Rightarrow AA'=۵$$

$$\text{بردار انتقال}\ \left|\overrightarrow{V}\right|=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\left|\overrightarrow{DD'}\right|=۵$$

۱۴۸ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ مطابق شکل d' انتقال یافته d با بردار ۲ می‌باشد. داریم:



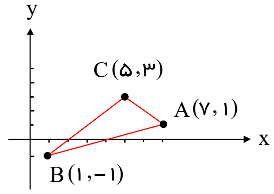
$$h=۲\times\sin ۳۰^\circ=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

فاصلهٔ بین d' و d'' (بازتاب d' نسبت به d) برابرست با:

$$MN=۲h=۲$$

۱۴۹ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱] باید مساحت مثلث را بدست آورده در $\frac{۱}{۴}$ آن را ضرب کنیم

مثلث ABC در رأس C قائمه است زیرا شیب BC, AC عکس قرینه‌ی یکدیگرند.



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AC \times BC = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۸})(\sqrt{۳۲}) = ۸$$

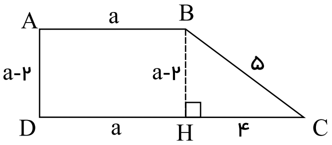
$$S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} = \frac{۱}{۴} \times ۸ = ۲$$

۱۵۰ ۴ ۳ ۲ ۱ می‌دانیم در تبدیل طولپا، طول هر پاره‌خط با طول پاره‌خط تبدیل‌یافته‌اش برابر است، پس محیط $A'B'C'D'$ همان محیط ذوزنقه $ABCD$ است.

مطابق شکل، طول قاعدهٔ کوچک را a در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

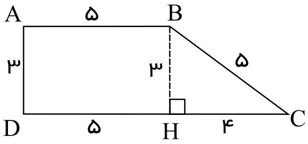
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(AB + CD) \times BH = ۲۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(۲a + ۴)(a - ۲) = ۲۱ \Rightarrow a^۲ - ۴ = ۲۱ \Rightarrow a^۲ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

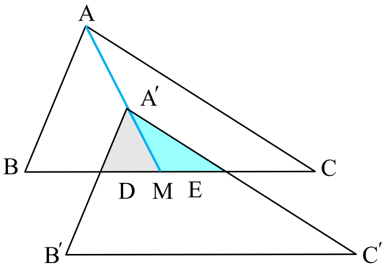


شکل ذوزنقه به‌صورت روبه‌رو خواهد بود که در آن طول ساق مایل نیز برابر ۵ می‌شود. محیط ذوزنقه برابر است با :

$$\text{محیط} = ۵ + ۵ + ۹ + ۳ = ۲۲$$



۱۵۱ ۴ ۳ **۲** ۱ مطابق شکل تصویر مثلث ABC در انتقال با بردار $\overrightarrow{AA'}$ (A' محل همرسی میانه‌های مثلث ABC است)، مثلث $A'B'C'$ است. ناحیهٔ مشترک بین این دو مثلث، مثلث $A'DE$ است. تصویر یک پاره‌خط در یک انتقال با آن پاره‌خط موازی است، پس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} A'B' || AB \Rightarrow A'D || AB \\ A'C' || AC \Rightarrow A'E || AC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{A'DE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

نسبت میانه‌ها در دو مثلث متشابه، برابر نسبت تشابه است. از طرفی میانه‌ها در هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، پس داریم:

$$\frac{S_{A'DE}}{S_{ABC}} = (\frac{A'M}{AM})^۲ = (\frac{۱}{۳})^۲ \Rightarrow \frac{S_{A'DE}}{۷۲} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow S_{A'DE} = ۸$$

۱۵۲ ۴ ۳ ۲ **۱** می‌دانیم در یک تجانس به نسب k، طول پاره‌خط‌ها $|k|$ برابر و اندازهٔ مساحت‌ها $k^۲$ برابر می‌شود. طول هر ضلع مربعی به طول قطر $\sqrt{۲}$، برابر ۱ است. اگر S و S' به‌ترتیب مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۴ و مساحت مثلث تبدیل‌یافتهٔ آن تحت این تجانس باشند، آنگاه داریم:

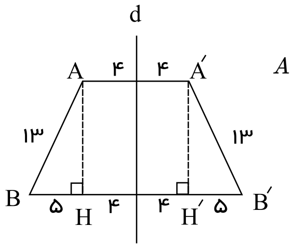
$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴^۲ = ۴\sqrt{۳}$$

$$\frac{S'}{S} = k^۲ \Rightarrow \frac{S'}{۴\sqrt{۳}} = (\frac{۱}{۲\sqrt{۲}})^۲ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow S' = \frac{۴\sqrt{۳}}{۸} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۵۳ **۴** ۳ ۲ ۱

مطابق شکل $AA' = ۸$ و $BB' = ۱۸$ است. چهارضلعی $AA'B'B$ محیطی است، بنابراین داریم:

$$AB + A'B' = AA' + BB' = ۸ + ۱۸ = ۲۶$$



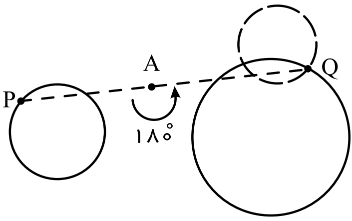
بازتاب تبدیلی طولپاست، پس $AB = A'B' = ۱۳$ است و در نتیجه داریم:

$$\overset{\Delta}{AHB}: AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴ \Rightarrow AH = ۱۲$$

$$S_{AA'B'B} = \frac{۱}{۲}AH(AA' + BB') = \frac{۱}{۲} \times ۱۲(۸ + ۱۸) = ۱۵۶$$

۱۵۴ ۴ ۳ ۲ **۱**

فرض کنیم مطابق شکل، پاره‌خط PQ ویژگی موردنظر را دارد. در واقع نقطهٔ P با دوران ۱۸۰° نسبت به نقطهٔ A بر نقطهٔ Q منطبق می‌شود. پس بهترین کار آن است که دایرهٔ کوچک را با دوران ۱۸۰° حول نقطهٔ A دوران دهیم و با دایرهٔ بزرگ‌تر تقاطع دهیم. نقطهٔ تقاطع همان نقطهٔ Q خواهد بود و بدین ترتیب پاره‌خط QA را از طرف A امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ کوچک را در نقطهٔ P قطع کند.



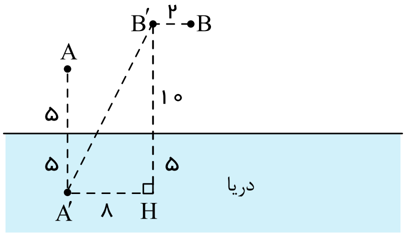
توجه: با تجانس معکوس و ضریب تجانس $k = -۱$ هم می‌توان این کار را انجام داد.

۱۵۵ ۴ **۳** ۲ ۱

ابتدا B را ۲ کیلومتر به‌سمت چپ (و موازی ساحل دریا) انتقال می‌دهیم و نقطهٔ حاصل را B' می‌نامیم. همچنین بازتاب A نسبت به ساحل دریا را نقطهٔ A' می‌نامیم. مطابق شکل مسیر $A'B'B$ کوتاه‌ترین جاده از A به B است که ۲ کیلومتر آن در ساحل دریا قرار دارد:

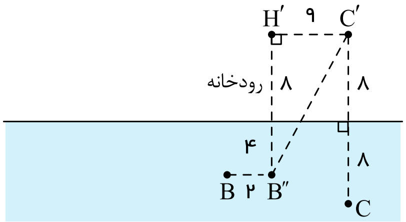
$$\overset{\Delta}{A'HB'}: \begin{cases} B'H = ۱۰ + ۵ = ۱۵ \\ A'H = ۱۰ - ۲ = ۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} A'B'^۲ = ۱۵^۲ + ۸^۲ = ۲۸۹ \Rightarrow A'B' = ۱۷$$

طول مسیر $A'B'B$ برابر $۱۷ + ۲ = ۱۹$ کیلومتر است. مشابه همین کار را برای جادهٔ دوم بین B و C انجام می‌دهیم.



$$B''H'C': \begin{cases} B''H' = ۴ + ۸ = ۱۲ \\ H'C' = ۱۱ - ۲ = ۹ \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} B''C'^۲ = ۹^۲ + ۱۲^۲ = ۲۲۵ \Rightarrow B''C' = ۱۵$$

طول مسیر $BB''C'$ برابر $۱۵ + ۲ = ۱۷$ کیلومتر است. در نتیجه طول جادهٔ موردنظر برابر $۱۹ + ۱۷ = ۳۶$ کیلومتر می‌شود.

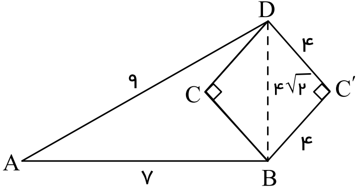


۱۵۶ ۴ ۳ ۲ **۱**

طول وتر BD در مثلث قائم‌الزاویه BCD برابر $۴\sqrt{۲}$ می‌شود. رابطهٔ فیثاغورس بین اضلاع مثلث ABD برقرار است، پس این مثلث در رأس B قائم‌الزاویه است:

$$\begin{cases} AB = ۷ \\ BD = ۴\sqrt{۲} \to ۷^۲ + (۴\sqrt{۲})^۲ = ۸۱ = ۹^۲ \\ AD = ۹ \end{cases}$$

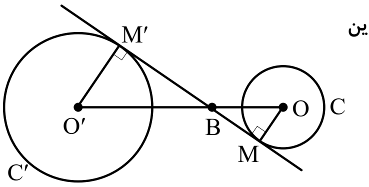
با بازتاب نقطهٔ C نسبت به پاره‌خط BD، نقطهٔ C' را می‌یابیم؛ با این کار بدون تغییر در محیط چهارضلعی $ABCD$، مساحت آن را افزایش می‌دهیم. مقدار مساحت زمین $ABC'D$ نیز برابر است با:



$$S_{ABC'D} = S_{ABD} + S_{BC'D} = \frac{۷ \times ۴\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۴ \times ۴}{۲} = ۱۴\sqrt{۲} + ۸$$

۱۵۷ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

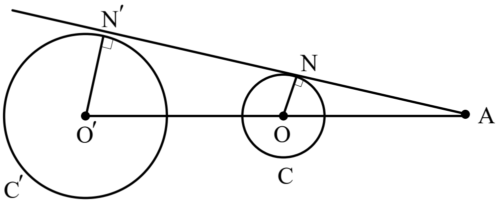
دو دایرهٔ C و C' متخارج‌اند. محل تقاطع خط‌المرکزین با مماس‌های مشترک داخلی، مرکز تجانس معکوس B و محل تقاطع امتداد خط‌المرکزین با مماس‌های مشترک خارجی، مرکز تجانس مستقیم A است. با توجه به شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{OMB} \sim \overset{\Delta}{O'M'B} \Rightarrow \frac{OB}{O'B} = \frac{OM}{O'M'} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{OB}{OO'} = \frac{۲}{۲+۴} \Rightarrow OB = \frac{۲}{۶} \times ۹ = ۳$$

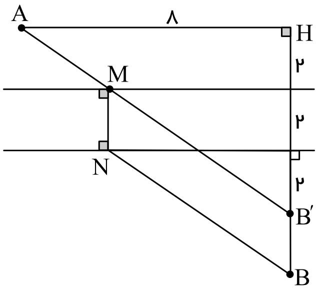
$$\overset{\Delta}{ONA} \sim \overset{\Delta}{O'N'A} \Rightarrow \frac{OA}{O'A} = \frac{ON}{O'N'} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{OA}{OO'} = \frac{۲}{۴-۲} \Rightarrow OA = \frac{۲}{۲} \times ۹ = ۹$$

در نتیجه با توجه به شکل $AB = OB + OA = ۱۲$ است.



۱۵۸ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

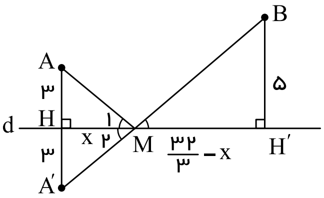
نقطهٔ B را به اندازهٔ عرض رودخانه (۲ واحد) عمود بر راستای رودخانه به‌سمت بالا انتقال می‌دهیم، AB' لبهٔ بالای رودخانه را در M قطع می‌کند. پل MN را مطابق شکل قرار می‌دهیم. کوتاه‌ترین مسیر ممکن $AMNB$ برابر است با:



$$AM + MN + NB = (AM + MB') + MN = AB' + MN = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} + ۲ = ۱۰ + ۲ = ۱۲$$

۱۵۹ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

نقطهٔ A را نسبت به خط d بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ A' به دست آید. محل تقاطع $A'B$ با d نقطهٔ M است.



$$\overset{\Delta}{AHM} \sim \overset{\Delta}{BMH'} \ (\text{زز}) \xrightarrow{\text{تناسب اضلاع}} \frac{AH}{BH'} = \frac{MH}{MH'} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{x}{\frac{۳۲}{۳} - x} \Rightarrow ۵x = ۳۲ - ۳x \Rightarrow ۸x = ۳۲ \Rightarrow x = ۴$$

$$\overset{\Delta}{AHM} : AM^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow AM = ۵$$

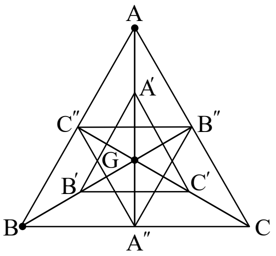
۱۶۰ ۴ [✓ ۳] ۲ ۱

می‌دانیم میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند. بنابراین:

$$\frac{GA''}{AA''} = \frac{۱}{۳}, \frac{GA}{AA''} = \frac{۲}{۳}$$

با توجه به نکتهٔ بالا مجانس رأس A به مرکز G (محل همرسی میانه‌ها) با نسبت $\frac{۱}{۲}$، نقطه A' (وسط AG) و با نسبت $-\frac{۱}{۲}$ نقطه A'' (وسط BC) می‌باشد و داریم:

$AA' = A'G = GA'' = \frac{۱}{۳}AA''$.



داریم:

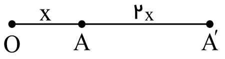
$$A'A'' = A'G + GA'' = \frac{۱}{۳}AA'' + \frac{۱}{۳}AA'' = \frac{۲}{۳}AA'' = \frac{۲}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۸ = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

به روش مشابه می‌توان نشان داد که $B'B'' = C'C'' = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$ می‌باشد پس حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

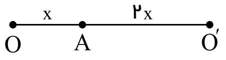
$$A'A'' + B'B'' + C'C'' = ۳ \times \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} = ۸\sqrt{۳}$$

۱۶۱ **۱** ۲ ۳ ۴

طبق فرض داریم:



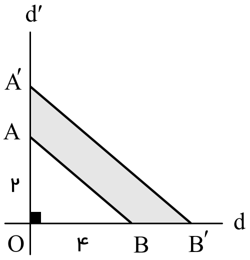
$$\frac{A'O}{AO} = ۳ \xrightarrow{OA=x} OA' = ۳x \Rightarrow AA' = ۳x - x = ۲x$$



$$\frac{AO'}{AO} = ۲ \Rightarrow AO' = ۲x$$

O' بر A' منطبق است پس $\frac{A'O'}{AO} = \frac{۰}{AO} = ۰$

۱۶۲ ۱ ۲ ۳ **۴**



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{A'OB'}}}{S_{\overset{\Delta}{AOB}}} = k^۲ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{A'OB'}} = k^۲ S_{\overset{\Delta}{AOB}}$$

$$S_{A'ABB'} = S_{\overset{\Delta}{A'OB'}} - S_{\overset{\Delta}{AOB}} \Rightarrow S_{A'ABB'} = k^۲ S_{\overset{\Delta}{AOB}} - S_{\overset{\Delta}{AOB}} \Rightarrow S_{A'ABB'} = S_{\overset{\Delta}{AOB}}(k^۲ - ۱)$$

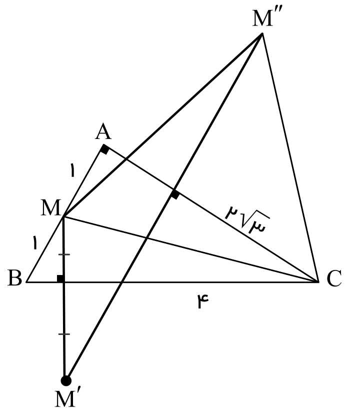
$$\Rightarrow ۸ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۴(k^۲ - ۱) \Rightarrow k^۲ - ۱ = ۲ \Rightarrow k = \sqrt{۳}$$

۱۶۳ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به فرض داریم:

$$۲^۲ + (۲\sqrt{۳})^۲ = ۴^۲ \Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \xrightarrow{\text{عکس قضیه فیثاغورس}} \hat{A} = ۹۰^\circ$$

$$AB = \frac{۱}{۲}BC \Rightarrow \hat{C} = ۳۰^\circ$$

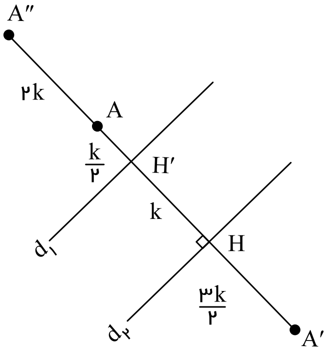


می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به محورهای بازتاب متقاطع معادل یک دوران است به مرکز محل تقاطع دو محور و با زاویه دورانی به اندازهٔ دو برابر زاویه تقاطع دو محور بازتاب. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} M\hat{C}M'' = ۶۰^\circ \\ MC = M''C \end{array}\right\} \Rightarrow \text{متساوی‌الاضلاع است } \overset{\Delta}{MCM''} \Rightarrow MM'' = CM \Rightarrow MM'' = \sqrt{۱^۲ + (۲\sqrt{۳})^۲} = \sqrt{۱۳}$$

۱۶۴ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به محورهای بازتاب موازی معادل یک انتقال است با طول برداری به اندازهٔ دو برابر فاصله بین دو محور بازتاب. بنابراین داریم:

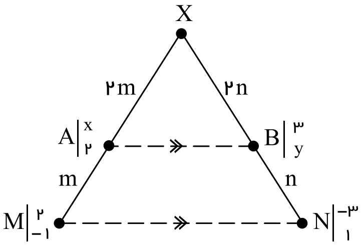


$$AA'' = ۲HH' = ۲k$$

۱۶۵ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱]

شکل روبه‌رو، این دو تجانس متوالی هم را نشان می‌دهد.

در این شکل داریم:



$$\begin{cases} AB || MN \\ AB = \frac{۲}{۳}MN \end{cases}$$

در نتیجه:

$$m_{AB} = m_{MN} \Rightarrow \frac{y-۲}{۳-x} = \frac{۱+۱}{-۳-۲} \Rightarrow y-۲ = \frac{۲}{۵}(x-۳) \quad (۱)$$

$$AB = \frac{۲}{۳}MN \Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲ + (y-۲)^۲} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۵^۲+۲^۲} \xrightarrow{(۱)} \sqrt{(x-۳)^۲ + \frac{۴}{۲۵}(x-۳)^۲} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲۹}$$

$$\Rightarrow |x-۳|\sqrt{\frac{۲۹}{۲۵}} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲۹} \Rightarrow |x-۳| = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x-۳ = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱۹}{۳} \\ x-۳ = \frac{-۱۰}{۳} \Rightarrow x = \frac{-۱}{۳} \end{cases}$$

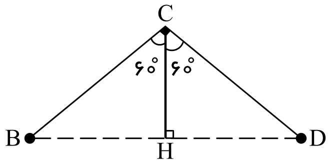
۱۶۶ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱ مختصات نقاط B و C به‌صورت زیر می‌شوند:

$$A\left|\begin{matrix}-۳\\ ۴\end{matrix}\right. \xrightarrow[\text{به محور } y]{\text{بازتاب نسبت}} C\left|\begin{matrix}۳\\ ۴\end{matrix}\right.$$

$$A\left|\begin{matrix}-۳\\ ۴\end{matrix}\right. \xrightarrow[\text{به خط } y=x]{\text{بازتاب نسبت}} B\left|\begin{matrix}۴\\ -۳\end{matrix}\right.$$

شکل روبه‌رو، دوران نقطه B حول نقطه C به اندازهٔ ۱۲۰ درجه را نشان می‌دهد:

در این شکل داریم:



$$BC = \sqrt{(۴-۳)^۲ + (-۳-۴)^۲} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

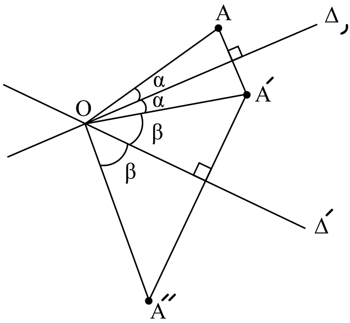
ضلع روبه‌رو به ۶۰° $= \frac{\sqrt{۳}}{۲}$(وتر) $\Rightarrow BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۵\sqrt{۲} = \frac{۵\sqrt{۶}}{۲}$

در نتیجه:

$$BD = ۲BH = ۵\sqrt{۶}$$

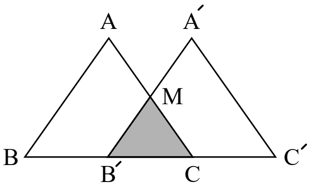
۱۶۷ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ مطابق شکل داریم:

$$\begin{cases} OA = OA' \\ OA' = OA'' \end{cases} \Rightarrow OA = OA'' \Rightarrow A''\hat{O}A = ۲(\alpha+\beta) = ۲ \times (\text{زاویهٔ بین } \Delta', \Delta)$$



پس A'' دوران‌یافتهٔ A حول نقطه O با زاویه‌ای دو برابر زاویهٔ بین دو خط است که چون زاویهٔ دوران مضربی از ۱۸۰° نیست، پس شیب خط‌ها در این دوران حفظ نمی‌شود.

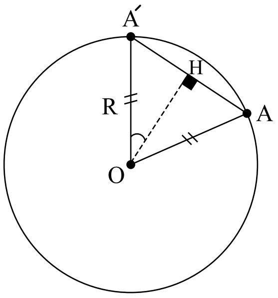
۱۶۸ ۴ ۳ ۲ [✓ ۱] فرض کنید مثلث ABC را با بردار $\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BC}$ انتقال دهیم تا بر مثلث $A'B'C'$ تصویر شود. چون انتقال، شیب خط‌ها را حفظ می‌کند. بنابراین:



$$AB||A'B' \Rightarrow AB||MB' \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} M\overset{\Delta}{B'}C \sim A\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{S_{MB'C}}{S_{ABC}} = (\frac{B'C}{BC})^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$$

۱۶۹ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ طبق شکل زیر، در مثلث متساوی‌الساقین AOA' زاویهٔ رأس ۶۰ درجه است، پس این مثلث، متساوی‌الاضلاع بوده و ارتفاع OH (فاصلهٔ مرکز از وتر AA') به‌صورت زیر است:

$$OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OA \Rightarrow ۳\sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}r \Rightarrow r = ۶ \ (\text{شعاع دایره})$$

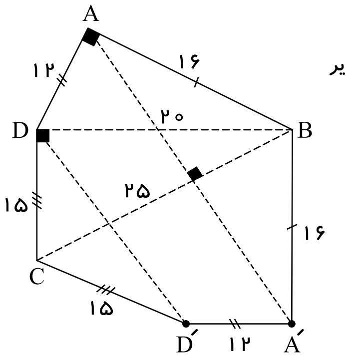


مساحت قطاع AOA' برابر است با:

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ}(\pi r^۲) = \frac{۱}{۶}\pi(۶^۲) = ۶\pi$$

۱۷۰ ۴ ۳ [✓ ۲] ۱

مطابق شکل، برای اینکه محیط شش‌ضلعی به کمترین مقدار برسد، باید بازتاب حول ضلع BC (بزرگ‌ترین ضلع) انجام شود. به این موضوع توجه کنید که در مثلث ADB، ضلع DB بزرگ‌ترین ضلع (وتر) است و در مثلث DBC هم ضلع BC (وتر) بزرگ‌ترین مقدار را دارد. همچنین تصاویر B و C که روی ضلع BC یعنی محور بازتاب هستند، روی خودشان می‌افتد.



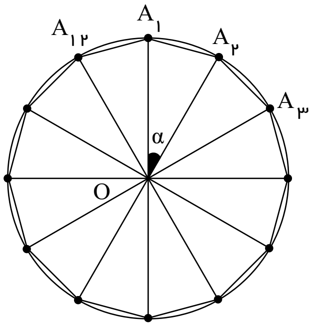
داریم:

$$\begin{cases} A\overset{\Delta}{D}B : AD = \sqrt{BD^۲ - AB^۲} = \sqrt{۲۰^۲ - ۱۶^۲} = ۱۲ \\ B\overset{\Delta}{D}C : DC = \sqrt{BC^۲ - BD^۲} = \sqrt{۲۵^۲ - ۲۰^۲} = ۱۵ \end{cases}$$

$$ABA'D'CD_{\text{محیط}} = AB + AD + DC + CD' + D'A' + A'B = ۱۶ + ۱۲ + ۱۵ + ۱۵ + ۱۲ + ۱۶ = ۸۶$$

۱۷۱ [✓ ۴] ۳ ۲ ۱ می‌دانیم اولاً یک nضلعی منتظم همواره محاطی (و همچنین همواره محیطی) است. پس رئوس یک nضلعی منتظم، دایرهٔ محیطی آن را به n کمان مساوی

یکدیگر که برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ می‌باشد، تقسیم می‌کند. ثانیاً چون nضلعی منتظم است؛ حداقل زاویه‌ای که لازم است تا طی دوران به مرکز O، این nضلعی روی خودش منطبق شود همین $\alpha = \frac{۳۶۰^\circ}{n}$ خواهد بود. درنتیجه، با زاویه‌هایی که مضارب صحیح α هستند هم nضلعی روی خودش منطبق می‌شود:

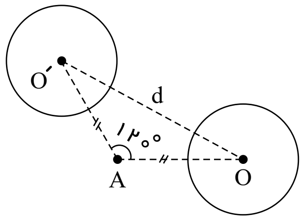


$$n = ۱۲ \to \alpha = \frac{۳۶۰^\circ}{۱۲} = ۳۰^\circ$$

گزینه‌ای که مضرب صحیح ۳۰° است، همان ۹۰° می‌باشد.

۱۷۲ ۴ ۳ **۲** ۱ طبق شکل زیر، چون C و C' دوران‌یافتهٔ یکدیگر هستند، پس شعاع آنها یکسان است:

$$R = R' \to ۲ + m = ۳m - ۲ \to m = ۲ \to R = R' = ۴$$



حال طول خط‌المرکزین (d) دو دایره را به دست می‌آوریم. دقت کنید چون $OA = O'A = ۴\sqrt{۳}$ (شعاع دوران ثابت می‌ماند)، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

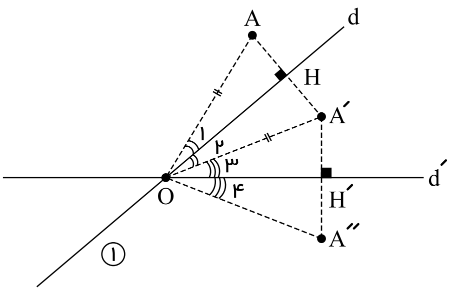
$$d = OO' = \sqrt{OA^۲ + OA'^۲} = \sqrt{۴۸ + ۴۸} = \sqrt{۹۶} = ۴\sqrt{۶}$$

در آخر، طول مماس‌های مشترک خارجی و داخلی را می‌یابیم:

$$\frac{\text{طول مماس مشترک خارجی}}{\text{طول مماس مشترک داخلی}} = \frac{\sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}}{\sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}} = \frac{\sqrt{۹۶ - ۰}}{\sqrt{۹۶ - ۶۴}} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۴\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}$$

۱۷۳ **۴** ۳ ۲ ۱

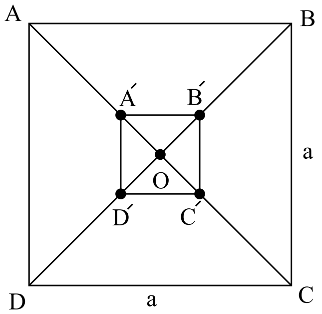
مطابق شکل، می‌دانیم تحت بازتاب نسبت به خط d، به‌دلیل هم‌نهشتی مثلث‌های OAH و $OA'H$، زاویه‌های $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ مساوی‌اند. به‌طریق مشابه داریم: $\hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$، پس می‌توان A'' را دوران‌یافتهٔ A به مرکز O و زاویهٔ $۲\alpha = ۶۰^\circ$ در نظر گرفت.



مثلث OAA'' یک مثلث متساوی‌الساقین $(OA = OA'')$ با زاویهٔ رأس $\hat{O} = ۶۰$ است. پس در حقیقت، یک مثلث متساوی‌الاضلاع خواهد بود. یعنی: $AA'' = OA = ۴\sqrt{۳}$.

۱۷۴ (۴) (۳) **(۲)** (۱)

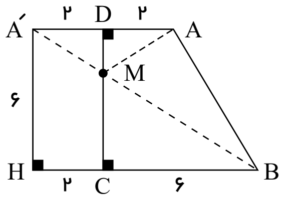
با داشتن طول قطر مربع، طول ضلع این مربع (که $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر قطر آن می‌باشد) عبارت است از: $۶ = ۲\sqrt{۶} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = a$، پس مساحت مربع $ABCD$ برابر است با: $S = a^۲ = ۳۶$.



چون مربع $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ است، با نسبت $k = \frac{۱}{۳}$، پس مساحت مربع ثانویه برابر است با $S' = k^۲S = \frac{۱}{۹} \times ۳۶ = ۴$؛ در نهایت، مساحت ناحیهٔ بین این دو مربع عبارت است از: $\Delta S = S - S' = ۳۶ - ۴ = ۳۲$

۱۷۵ (۴) (۳) (۲) **(۱)**

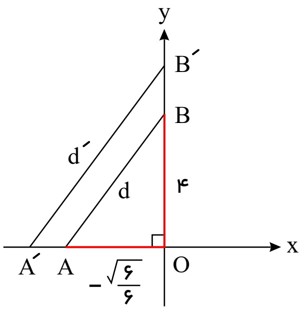
بازتاب A را نسبت به ساق قائم CD، نقطهٔ A' می‌نامیم. مطابق شکل، کمترین مقدار $MA + MB$، برابر طول پاره‌خط $A'B$ است.



در مثلث قائم‌الزاویه $A'HB$ داریم:

$$A'B^۲ = A'H^۲ + BH^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰۰ \to A'B = ۱۰ \quad \text{: قضیهٔ فیثاغورس}$$

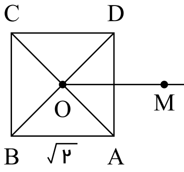
۱۷۶ (۴) (۳) **(۲)** (۱) مطابق شکل، مساحت دو مثلث OAB و $OA'B'$ را به‌ترتیب S و S' می‌نامیم، داریم:

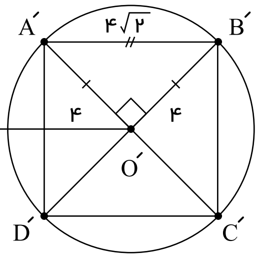


$$\begin{cases} S' = k^۲ \cdot S \\ S = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \frac{\sqrt{۶}}{۶} = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \end{cases} \Rightarrow S_{ABB'A'} = S' - S \xrightarrow{k=\sqrt{\sqrt{۶}+۱}} S_{ABB'A'} = k^۲S - S = (k^۲ - ۱)S$$

$$= (\sqrt{۶} + ۱ - ۱) \times \frac{\sqrt{۶}}{۳} = ۲$$

۱۷۷ (۴) **(۳)** (۲) (۱) طبق فرض مسئله، قطر دایره برابر ۸ واحد بوده، پس شعاع دایره R برابر ۴ واحد است. مطابق شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'O'B'$ با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:





$$A'B' = ۴\sqrt{۲}$$

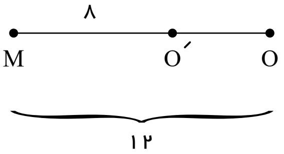
$$\Rightarrow \quad \text{نسبت تجانس:}\ |k| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{O'M}{OM} = |k| = ۴ \Rightarrow O'M = ۴OM \quad (۱)$$

$$\xrightarrow[OO'=۲۰]{\text{فرض مسئله}} OM + O'M = ۲۰ \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} OM = ۴ \Rightarrow O'M = ۱۶$$

(از آنجا که تجانس معکوس داریم، پس O و O' در دو طرف مرکز تجانس M قرار می‌گیرند و $k = -۴$ است.)

۱۷۸ **(۴)** (۳) (۲) (۱) طبق فرض مسئله داریم:

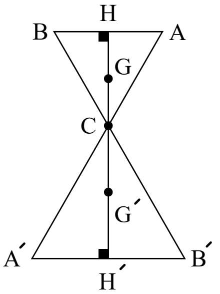


$$\begin{cases} R = ۹ \\ OM = ۱۲ \end{cases} \xrightarrow{k=\frac{۲}{۳}} \begin{cases} k = \dfrac{MO'}{MO} = \dfrac{۲}{۳} \Rightarrow MO' = ۸ \\ k = \dfrac{R'}{R} = \dfrac{۲}{۳} \Rightarrow R' = ۶ \end{cases} \Rightarrow OO' = MO - MO' = ۴ \Rightarrow \text{دو دایره متقاطع‌اند.}$$

دو دایرهٔ C و C'، «متقاطع» هستند، زیرا داریم:

$$\underbrace{|R - R'|}_{۳} < \underbrace{OO'}_{۴} < \underbrace{R + R'}_{۱۵}$$

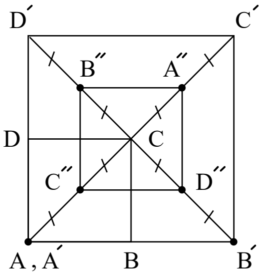
۱۷۹ ۱ ۲ ۳ [✓ ۴] شکل زیر را در نظر بگیرید:



$$\frac{CG'}{CG} = |k| = ۲ \to CG' = ۲CG$$

$$GG' = CG' + CG = ۲CG + CG = ۳CG = \cancel{۳} \times \frac{۲}{\cancel{۳}} CH = ۲CH = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۶$$

۱۸۰ ۱ ۲ [✓ ۳] ۴ شکل زیر را در نظر بگیرید:



$$S_{A'B'C'D'} = ۴S_{ABCD}$$

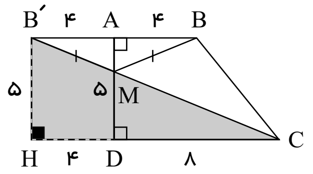
$$\frac{S_{A''B''C''D''} = S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'} - S_{A''B''C''D''}} = ۳S_{ABCD}$$

۱۸۱ [✓ ۱] ۲ ۳ ۴ ترکیب دو بازتاب با محورهای غیر موازی معادل یک دوران است به مرکز محل برخورد دو محور و زاویهٔ دوران دو برابر زاویهٔ بین محورها. در این سؤال زاویهٔ بین دو خط ۹۰° است، پس ترکیب این دو بازتاب معادل دوران ۱۸۰° می‌باشد. پس این تبدیل شیب خطوط و جهت اشکال‌ها را حفظ می‌کند.

نکته: دوران شیب خطوط را در حالتی که زاویهٔ دوران مضرب صحیح ۱۸۰° باشد، حفظ می‌کند.

سوال تکراری با سوال ۳۳۵۱۳۷ - غیرفعال شد

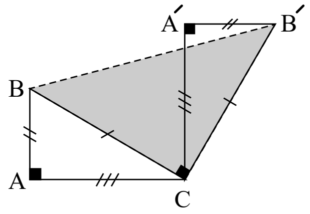
۱۸۲ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴ B' (بازتاب‌یافتهٔ B نسبت به AD) را به C وصل می‌کنیم. محل برخورد $B'C$ با AD نقطهٔ مورد نظر (M) است.



$$MB + MC = MB' + MC = B'C$$

$$\overset{\Delta}{B'HC} : B'C = \sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲} = ۱۳$$

۱۸۳ ۱ [✓ ۲] ۳ ۴ در دوران، زاویه بین هر پاره‌خط و تصویر آن برابر با زاویهٔ دوران است یعنی $B\hat{C}B = ۹۰^\circ$ و داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ قضیهٔ فیثاغورس } : BC = \sqrt{AB^۲ + AC^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶} \to BC = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \xrightarrow{\text{دوران طولپا است}} B'C = ۲\sqrt{۵}$$

$$\overset{\Delta}{BCB'} \text{ قضیهٔ فیثاغورس } : BB' = \sqrt{BC^۲ + CB^۲} = \sqrt{(۲\sqrt{۵})^۲ + (۲\sqrt{۵})^۲} = \sqrt{۲۰ + ۲۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۲	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۳	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۴	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۵	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۶	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۷	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۸	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۹	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۰	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۱	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۲	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۳	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۴	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۵	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۷	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۸	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۹	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۲۰	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۲۱	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۲۲	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۲۳	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۲۴	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۲۶	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۲۷	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۲۸	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۲۹	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۳۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۳۱	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۳۲	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۳۳	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۳۴	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۳۵	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۳۶	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۳۷	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۳۸	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۳۹	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۴۰	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۴۱	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۴۲	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۴۳	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۴۴	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۴۵	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۴۶	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۴۷	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۴۸	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۵۰	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۵۱	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۵۲	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۵۳	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۵۴	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۵۵	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۵۶	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۵۷	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۵۸	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۵۹	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۶۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۶۲	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۶۳	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۶۴	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۶۵	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۶۶	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۶۸	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۶۹	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۷۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۷۱	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۷۲	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۷۳	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۷۵	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۷۶	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۷۷	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۷۸	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۷۹	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۸۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۸۱	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۸۲	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۸۳	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۸۴	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۸۵	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۸۷	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۸۸	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۹۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۹۱	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۹۳	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۹۴	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۹۶	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۹۷	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۹۸	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۹۹	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۰۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۰۳	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۰۴	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۰۶	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۰۷	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۰۹	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۱۱	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۱۳	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۱۵	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۱۶	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۱۷	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۱۸	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۲۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۲۲	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۲۴	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۲۵	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۲۶	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۲۷	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۲۸	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۲۹	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۳۰	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۳۲	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۳۳	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۳۵	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۳۷	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۳۸	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۴۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۴۲	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۴۳	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۴۶	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۴۸	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۴۹	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۵۱	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۵۲	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۵۴	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۵۶	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۵۹	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۶۱	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۶۳	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۶۴	۱	[✓ ۲]	۳	۴

۱۶۵	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۶۶	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۶۷	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۶۸	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۶۹	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۷۰	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۷۱	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۷۲	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۷۳	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۷۴	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۷۵	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۷۶	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۷۷	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۷۸	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۷۹	۱	۲	۳	[✓ ۴]
۱۸۰	۱	۲	[✓ ۳]	۴
۱۸۱	[✓ ۱]	۲	۳	۴
۱۸۲	۱	[✓ ۲]	۳	۴
۱۸۳	۱	[✓ ۲]	۳	۴