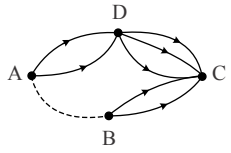
ریاضی و آمار ۳

فصل اول: آمار و احتمال شمارش اصل جمع و ضرب

۱. با ارقام "۷، ۴، ۸، ۵، ۳، ۱، ۲ و ۰" چند عدد ۵ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۲. با توجه به شکل اگر تعداد راه‌های مسافرت از شهر A به شهر C برابر ۱۴ باشد، از شهر A به شهر B چند راه داریم؟



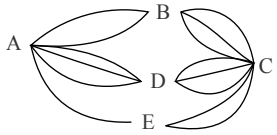
۳. در یک دوره بازی ۱۵ تیم با هم به صورت رفت و برگشت بازی می‌کنند. اگر همهٔ تیم‌ها با هم بازی کنند در پایان دوره چند بازی انجام خواهد شد؟

۴. می‌دانیم برای یک آزمون چهارگزینه‌ای با n سؤال، دانش‌آموزان می‌توانند ۳۱۲۵ حالت پاسخ‌نامهٔ متمایز داشته باشند. اگر ۳ سؤال چهارگزینه‌ای دیگر به آزمون اضافه کنیم، چند پاسخ‌نامهٔ متفاوت به شرط آنکه به همهٔ سؤالات پاسخ داده شود، می‌تواند وجود داشته باشد؟

۵. در یک دوره بازی ۱۰ تیم شرکت کرده‌اند. اگر بازی‌ها رفت و برگشت باشد و همهٔ تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دور رفت چند بازی انجام شده است؟

۶. چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۵۰۰ وجود دارد که مجموع ارقام یکان و دهگان آنها ۸ باشد؟

۷. بین ۵ شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه‌هایی موجود است. به چند طریق می‌توان:(از هر شهر حداکثر یک بار عبور می‌کند.)

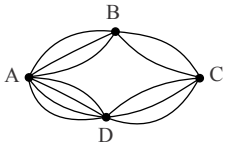


الف) از A به شهر C مسافرت کرد.

ب)از شهر A بدون عبور از شهر E به شهر C مسافرت کرد.

۸. با ارقام "۵، ۳، ۲، ۱ و ۰" چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۹. مطابق شکل روبه‌رو بین چهار شهر A, B, C, D راه‌هایی وجود دارد. به چند طریق می‌توان:



الف) از شهر A به شهر C از طریق B مسافرت کرد؟

ب) از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟(از هر شهر حداکثر یک بار عبور می‌کنیم.)

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 1 of 132

۱۰. مجموعه‌ای دارای ۲۸ زیرمجموعهٔ دوعضوی است. این مجموعه چند زیرمجموعهٔ چهارعضوی دارد؟

فاکتوریل، جایگشت و ترکیب

۱۱. از ۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توان یک تیم ۴ نفره انتخاب کرد هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی از پایه یازدهم و دوازدهم حضور داشته باشند؟

ب) حداقل سه نفر از پایه دوازدهم باشند؟

۱۲. یک دورهٔ بازی فوتبال بین n تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همهٔ تیم‌ها با هم بازی داشته باشند و در پایان دوره ۹۰ بازی انجام شده باشد، تعداد تیم‌ها چندتاست؟

۱۳. می‌خواهیم از ۵ دانش‌آموز انسانی و ۴ دانش‌آموز تجربی یک تیم ۶ نفره انتخاب کنیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توان این تیم را تشکیل داد هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی از رشتهٔ انسانی و تجربی حضور داشته باشند؟

ب) کاپیتان از رشتهٔ انسانی باشد؟

۱۴. ۱۲ نقطه روی محیط یک دایرهٔ واقع است.

الف) چند ۴ ضلعی با این ۱۲ نقطه می‌توان تشکیل داد؟

ب) چند وتر روی این دایره می‌توان تشکیل داد؟

۱۵. یک مجموعه، ۱۰ زیر مجموعهٔ سه عضوی دارد، این مجموعه چند زیر مجموعهٔ یک عضوی دارد؟

۱۶. مجموعه $A=\{۳,۷,۴,۵,۹,۱\}$ مفروض است.

الف) چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی متشکل از اعضای فرد A می‌توان نوشت؟

ب) چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی شامل ۹ و فاقد ۴ می‌توان نوشت؟

۱۷. مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۵,۷,۸,۹\}$ مفروض است.

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی بزرگتر از ۷۰۰۰۰ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

ج) چند زیر مجموعه سه عضوی از مجموعه A می‌توان نوشت؟

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 3 of 132

۱۸. سینا، آرش، آریا، بهراد، رامان و بهروز می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. به چند طریق می‌توانند عکس بگیرند به‌طوری که در یک ردیف ایستاده و آرش و آریا هر دو هم‌زمان در ابتدا یا انتهای ردیف نباشند؟

۱۹. چند عدد ۵ رقمی بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت که دقیقاً ۲ رقم آن فرد باشد؟

۲۰. به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، توزیع کرد به‌طوری‌که نفر اول ۱ اسباب‌بازی و نفر دوم ۲ اسباب‌بازی و نفر سوم ۳ اسباب‌بازی بگیرد؟

۲۱. در یک جعبه ۴ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان دو مهره خارج کرد به طوری که:

الف) یک مهره قرمز و یک مهره سبز باشد.

ب) هر دو هم رنگ باشند.

۲۲. از بین ۷ دانش آموز دوازدهم و ۵ دانش‌آموز یازدهم به چند طریق می‌توان یک تیم چهار نفره انتخاب کرد به طوری که:

الف) سه دانش‌آموز از پایه دوازدهم و یک دانش‌آموز از پایه یازدهم باشد.

ب) حداکثر یک دانش‌آموز از پایه یازدهم باشد.

۲۳. جای خالی را کامل کنید.

$$\frac{P(n,r)}{\square} = C(n,r)$$

۲۴. مجموعهٔ $A = \{۱,۳,۵,۸,۹\}$ مفروض است.

الف) چند زیر مجموعهٔ ۴ عضوی از A می‌توان نوشت؟

ب) چند زیر مجموعه سه عضوی شامل ۳ می‌توان نوشت؟

ج) چند زیر مجموعهٔ دو عضوی فاقد ۵ می‌توان نوشت؟

۲۵. روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه وجود دارد.

الف) چه تعداد مثلث با این ۱۰ نقطه می‌توان نوشت؟

ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

۲۶. به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر یک تیم ۶ نفره برای والیبال انتخاب کرد.

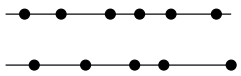
۲۷. با حروف کلمهٔ «شیرازه» چند کلمهٔ سه‌حرفی بامعنی و بی‌معنی می‌توان نوشت؟

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 5 of 132

۲۸. از بین ۹ کارمند می‌خواهیم ۵ نفر را برای اعزام به خارج انتخاب کنیم. اگر ۳ فرد به‌خصوص از میان آنها از قبل برای اعزام انتخاب شده باشند، تکمیل افراد اعزامی به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۲۹. مقدار n در عبارت $\frac{n!\,(n-۳)!}{(n-۲)!\,(n-۱)!} = \frac{۳}{۲}$ را به دست آورید.

۳۰. مطابق شکل زیر، روی دو خط موازی ۱۱ نقطهٔ مشخص شده است. با این نقاط حداکثر چند مثلث می‌توان رسم کرد به‌طوری که نقاط راس‌های مثلث‌ها باشند؟



۳۱. تابع بودن هر مورد را بررسی کنید.

الف) رابطهٔ بین شعاع دایره و مساحت آن

ب) رابطهٔ بین هر فرد و اندازهٔ قد او در یک زمان مشخص

ج) رابطهٔ بین یک عدد طبیعی اول و مقسوم‌علیه‌های آن

د) رابطهٔ بین هر داوطلب کنکور رشته‌ای خاص و رتبهٔ کشوری‌اش در آن رشته

احتمال فضای نمونه، پیشامد و اعمال روی پیشامدها

۳۲. اگر $S = \{۱, ۲, \cdots, ۶\}$ فضای نمونه باشد و $A = \{۱, ۳, ۵\}$ باشد، دو پیشامد B و C بنویسید که با A ناسازگار باشند ولی C و B خودشان ناسازگار نباشند.

۳۳. ۶ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی در یک ظرف موجود است. سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) هر سه یک رنگ باشند. **ب) حداقل دو تا قرمز باشد.**

۳۴. از بین ۷ دانش‌آموز انسانی، ۵ دانش‌آموز تجربی و ۴ دانش‌آموز ریاضی می‌خواهیم یک تیم سه نفره انتخاب می‌کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) هر سه انسانی باشند.

ب) هر سه از سه رشتهٔ متفاوت باشند.

ج) هر سه از یک پایه باشند.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 7 of 132

۳۵. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونهٔ پرتاب تاس.

ب) پیشامد A که عدد روشده زوج باشد.

ج) پیشامد B که عدد روشده بیشتر از ۴ باشد.

د) پیشامد $B - A$.

۳۶. یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم، مطلوب است محاسبه:

الف) فضای نمونهٔ پرتاب دو بار سکه.

ب) پیشامد A که حداقل یک‌بار رو بیاید.

پ) پیشامد B که تعداد رو و پشت‌ها یکسان ظاهر شده باشد.

ت) پیشامد $A \cap B$.

۳۷. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس.

ب) پیشامد A که مجموع دو تاس ۱۱ شود.

ج) پیشامد B که حاصلضرب دو تاس کمتر از ۱۲ شود.

د) پیشامد $B - A$.

۳۸. در پرتاب دو تاس با هم پیشامد آن‌که دو تاس یکسان یا مجموع هر دو تاس ۴ باشد را بنویسید.

۳۹. هر یک از اعداد طبیعی کمتر از ۲۱ را روی ۲۰ کارت نوشته و پس از مخلوط کردن، یک کارت به تصادف بر می‌داریم. مطلوب است:

الف) فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی.

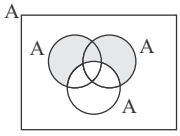
ب) پیشامد A که عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.

پ) پیشامد B که روی کارت مجذور کامل باشد.

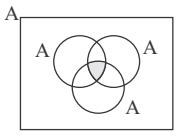
ت) پیشامدهای $A \cap B, A \cup B, A - B$ را بنویسید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 9 of 132

۴۰. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.



(ب)



(الف)

۴۱. هر یک از ارقام $۱, ۲, ۰۰۰, ۷$ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن، یک کارت به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی.

ب) پیشامد A که عدد روی کارت مضرب ۵ باشد.

پ) پیشامد B که عدد روی کارت اول باشد.

ت) پیشامد $A \cup B$ را بنویسید.

۴۲. تعداد عضوهای فضای نمونهٔ سه بار پرتاب یک تاس چند برابر تعداد عضوهای فضای نمونه پرتاب سه سکه باهم است؟

احتمال یک پیشامد

۴۳. از یک جعبه که ۱۰ سیب در آن موجود است، سه سیب خارج می‌کنیم. احتمال اینکه هر سه سالم باشند، $\frac{۷}{۲۴}$ است. چند سیب سالم در جعبه وجود دارد؟

۴۴. از بین ۹ عضو انجمن مدرسه در یک رأی‌گیری ۳ نفر رأی مثبت، ۲ نفر رأی منفی و ۴ نفر رأی ممتنع داده‌اند. سه نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر سه رأی مثبت یا هر سه رأی ممتنع داده باشند.

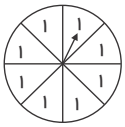
ب) دو نفر رأی مثبت و یکی رأی منفی داده باشد.

۴۵. از بین ۱۱ قوچ، ۷تا نشانه‌دار شده‌است. سه قوچ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه:

الف) هر سه نشانه‌دار باشند.

ب) دوتا نشانه‌دار و یکی بدون نشانه باشد.

۴۶. ۶پرچم روی شش میلهٔ پرچم با شماره‌های ۱ تا ۶ نصب شده‌است. اگر پرچم‌ها به تصادف کنارهم قرار بگیرند، مطلوب است احتمال اینکه میلهٔ پرچم‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشد.



۴۷. عقربهٔ دستگاه چرخندهٔ زیر روی یکی از ۸ ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد:الف) عقربه روی یکی از اعداد اول بایستد.

ب) عقربه روی عدد اول یا فرد بایستد.

پ) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.

۴۸. از جعبه‌ای که دارای ۷ سیب سالم و ۶ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب سالم باشند.

ب) دو سیب سالم و یکی لکه‌دار باشد.

پ) تعداد سیب‌های سالم بیشتر باشد.

۴۹. در یک بازی به هر یک از ۱۱ نفر یکی از شماره‌های ۲ و ۳ و ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم، سپس دو تاس می‌اندازیم. مجموع دو تاس نفر برنده را مشخص می‌کند.

الف) چه شماره‌ای شانس برنده شدن بیشتری نسبت به بقیه دارد؟

ب) شانس برنده شدن کدام شماره از همه کمتر است؟

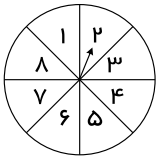
۵۰. ۵ نفر در یک تاکسی سوار شده‌اند. احتمال اینکه:

الف) هر ۵ نفر در ماه خرداد متولد شده باشند.

ب) هر ۵ نفر در یک ماه خاص از سال متولد شده باشند.

ج) تولد هیچ دوتای آن‌ها در یک ماه نباشد.

۵۱. یک صفحهٔ عقربه‌دار به ۸ قسمت مساوی مطابق شکل تقسیم شده است. عقربهٔ این صفحه دو بار چرخانده می‌شود و بار اول رقم یکان و بار دوم رقم دهگان یک عدد دورقمی را تشکیل می‌دهند. احتمال آنکه حاصل، عددی اول کوچک‌تر از ۶۰ را نشان دهد کدام است؟



۵۲. با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ و ۹ یک عدد ۴ رقمی بدون ارقام تکراری به‌تصادف می‌نویسیم. احتمال آنکه رقم یکان و یکان هزار آن هر دو فرد و دو رقم دیگر آن هر دو زوج باشند، چقدر است؟

۵۳. یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) تاس زوج باشد.

ب) تاس زوج و سکه رو بیاید.

۵۴. در یک جعبه، ۱۲ لامپ وجود دارد که ۹ تای آن سالم است. دو لامپ به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر دو سالم باشد.

ب) یکی سالم و یکی ناسالم باشد.

۵۵. از بین ۷ زن و ۳ مرد یک تیم سه نفره انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) هر سه هم‌جنس باشند.

ب) دوتا زن و یک مرد باشد.

۵۶. می‌خواهیم از بین ۳ گروه ۲ نفره که در هر گروه دو نفر برادر دوقلو هستند، ۳ نفر را به‌تصادف انتخاب کنیم. احتمال آنکه در ۳ نفر انتخاب‌شده هیچ دو نفری برادر دوقلو نباشند. کدام است؟

۵۷. در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی، ۶ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ سبز قرار دارد. ۳ مهره به‌تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه هر ۳ مهره هم‌رنگ باشند، چقدر است؟

احتمال متمم – قوانین

۵۸. در یک فروشگاه ۵ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۳ پیراهن زرد موجود است. شخصی به تصادف سه پیراهن انتخاب می‌کند. مطلوب است احتمال اینکه:

الف) سه پیراهن یک رنگ باشد.

ب) هر سه پیراهن آبی نباشد.

۵۹. شخصی در یک آزمون استخدامی شرکت می‌کند. اگر نسبت احتمال استخدام شدن او به احتمال استخدام نشدن او $\frac{۵}{۱۲}$ باشد، احتمال استخدام شدن او چقدر است؟

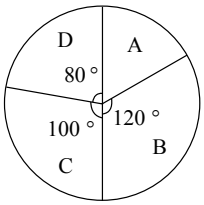
آمار

۶۰. برای داده‌های زیر نمودار میانگین و انحراف معیار را رسم کنید.

۳ و ۷ و ۴ و ۶ و ۵

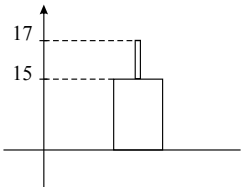
https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 15 of 132

۶۱. با توجه به نمودار زیر اگر کل افراد ۳۰ نفر باشند چه تعداد از افراد در گروه A هستند؟



۶۲. در گزارش‌های متغیرهای کیفی ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد چگونه می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟ (با ذکر مثال)

۶۳. با توجه به نمودار زیر اختلاف میانگین از انحراف معیار چقدر است؟



۶۴. جدول زیر را کامل کنید

شماره گام	نام گام	توضیح گام
۲		
	بیان مسئله	
۳		
		به تفسیر نتایج بدست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش آماری پیدا می‌کنیم
۴		

۶۵. درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) برای توصیف داده‌های کمی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد برابر باشد.

ب) مرتب کردن داده‌ها در گام دوم چرخه آمار اتفاق می‌افتد.

پ) طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است که در مرحلهٔ بیان مسئله صورت می‌گیرد.

ت) پیشامد $B - A$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد B رخ دهد و پیشامد A رخ ندهد.

۶۶. اگر داده‌ها به میانگین نزدیک‌تر شوند، انحراف معیار ..... .

۶۷. اگر داده‌ها از میانگین ..... انحراف معیار بزرگتر می‌شود.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 17 of 132

۶۸. در هر مورد اجرای نادرست کدام گام از چرخه آمار اتفاق افتاده است.

الف) مسئله به صورتی بیان شده که اجراکنندگان برداشت متفاوتی از اعداد پژوهش دارند.

ب) اندازه‌گیری افراد نمونه با دو واحد متفاوت انجام شده است.

پ) حذف تمامی داده‌های دورافتاده.

۶۹. در هر مورد اجرای نادرست کدام گام از چرخه آمار اتفاق افتاده است.

الف) استفاده از نمودار نامناسب.

ب) پاسخی برای پرسش اصلی پیدا نکرده باشیم.

۷۰. گام اول چرخه آمار در حل مسائل را بیان کرده و به طور مختصر توضیح دهید

۷۱. دومین گام در چرخه آمار در حل مسائل را بیان و به طور مختصر توضیح دهید.

۷۲. آخرین گام در چرخه مسائل آمار را نام برده و به‌طور مختصر توضیح دهید.

۷۳. طرح یک پرسش دقیق و شفاف ..... گام رسیدن به پاسخ در یک بررسی آماری است.

۷۴. اندازه‌گیری یا سنجش ..... برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر موردنظر است.

۷۵. در اندازه‌گیری سعی می‌کنیم تا حد ممکن اطلاعات ..... را به اطلاعات ..... تبدیل کنیم.

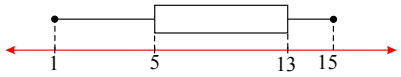
۷۶. در زیر نمرات یک دانش‌آموز لیست شده است. در کدام ردیف اشتباه رخ داده است.

ردیف	نمره
۱	۱۷
۲	۱۵
۳	۵۱
۴	۱۸

۷۷. میانگین و انحراف معیار داده‌های زیر را بدست آورید.

۲ و ۸ و ۳ و ۷ و ۵

۷۸. با توجه به نمودار جعبه‌ای زیر IQR را بدست آورید.



۷۹. در داده‌های زیر میانه و دامنه تغییرات را بدست آورید.

۸ و ۳ و ۱۶ و ۵ و ۲ و ۱۷ و ۲ و ۳ و ۶ و ۷ و ۵

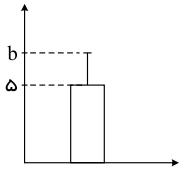
۸۰. گام‌های بعد و قبل از تحلیل داده‌ها در چرخه آمار را نام برید.

۸۱. در گام‌های مرتبط با چرخه آمار بعد از کدام گام به ارائه نمودار ما می‌پردازیم.

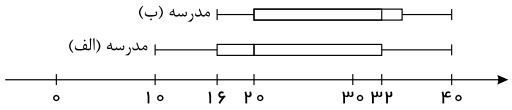
https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 19 of 132

۸۲. اگر در استفاده از شاخص‌ها و نمودارها اشتباه کرده باشیم، در کدام گام دچار اشتباه شده‌ایم و در چه گام‌هایی اثر دارد؟

۸۳. نمودار میانگین و انحراف معیار داده‌های ۷ و ۶ و $a+1$ و a و ۳ به صورت زیر است. مقدار $a+b$ را به دست آورید.



۸۴. نمودار جعبه‌ای داده‌های مربوط به نمرات فلسفهٔ دوازدهم انسانی در دو مدرسه به صورت زیر است. درستی یا نادرستی موارد زیر را بررسی کنید.



الف بهترین نمرهٔ فلسفه مربوط به مدرسهٔ ب است.

ب میانگین نمرات فلسفهٔ دو مدرسه برابر است.

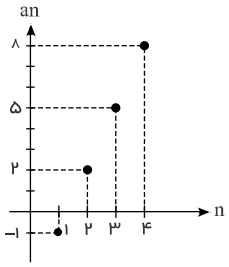
پ به‌طور تقریبی می‌توان گفت ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ (الف) در درس فلسفه نمره‌ای کمتر از همهٔ دانش‌آموزان مدرسه (ب) گرفته است.

ت چارک اول نمرات فلسفهٔ مدرسهٔ الف برابر میانهٔ نمرات ریاضی مدرسهٔ (ب) است.

فصل دوم: الگوهای خطی مدل‌سازی و دنباله

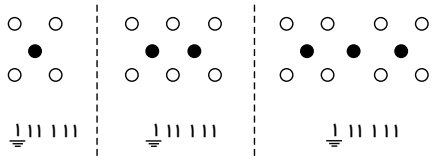
۸۵. برای جملات دنبالهٔ $۲, ۴, ۸, ۱۶, ۰۰۰$:
الف) رابطهٔ بازگشتی دنباله را مشخص کنید.
ب) ضابطهٔ تابعی دنباله را به دست آورید.

۸۶. با توجه به نمودار مقابل، ضابطهٔ دنباله را بیابید.



https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 21 of 132

۸۷. با توجه به شکل زیر، در چه مرحله‌ای $\frac{۱۱}{۳۵}$ شکل، توپ‌های توپر است؟



۸۸. مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = (-۱)^{n+۱} \times (۱۱ - n)^۲$ را بیابید.

۸۹. در دنبالهٔ $a_n = (-۱)^n \frac{n}{n+۱}$ حاصل‌ضرب جملات $a_۱$ تا $a_{۱۰۰}$ را بیابید.

۹۰. اولین جملهٔ مثبت در دنبالهٔ $a_n = \frac{n-۲۰}{۲n+۱} + \frac{۱}{۱۰۰}$، کدام جمله است؟

۹۱. در دنبالهٔ $a_{n+۱} = ۲a_n + ۳$، اگر جملهٔ ۱۰اُم برابر ۴۹ باشد، جملهٔ هشتم را بیابید.

۹۲. جملهٔ چهارم دنبالهٔ $a_n = \frac{n^۲ + n}{n - ۳}$ با جملهٔ چندم از همین دنباله برابر است؟

۹۳. در دنبالهٔ $a_n = \sqrt{n+۱} - \sqrt{n}$ مجموع ۲۴ جملهٔ اول را بیابید.

۹۴. مجموع ۵ جملهٔ اول دنبالهٔ $a_n = \left[\frac{n+۱}{۲}\right]$ را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۹۵. در دنبالهٔ $a_{n+۱} = \frac{a_n}{n+۱}$ و $a_۱ = ۱$ چند جملهٔ بزرگتر از $\frac{۱}{۳۰۰}$ وجود دارد؟

۹۶. در دنبالهٔ $a_n = \left[\frac{۲n+۳}{n+۱}\right]$ مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله را بیابید. ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۹۷. در دنبالهٔ $a_n = \frac{(n+۱)!}{۲n+۱}$ مجموع جملات چهارم و پنجم را بیابید.

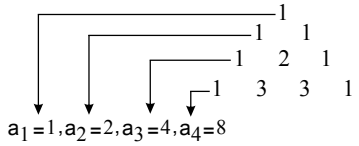
۹۸. چندمین جمله از دنبالهٔ $a_n = \frac{n}{n^۲ + ۷}$ برابر $\frac{۱}{۸}$ است؟

۹۹. دنبالهٔ $a_n = \frac{n+۳}{۵n - ۴۷}$ چند جملهٔ منفی دارد؟

۱۰۰. در دنبالهٔ $۱, ۱, ۲, \frac{۱}{۲}, ۳, \frac{۱}{۳}, ۴, \frac{۱}{۴}, \ldots$ تفاضل جملهٔ ۲۰ام از ۲۱ام را به دست آورید.

۱۰۱. هرگاه $(\ldots, x, ۲۵۸۴, ۴۱۸۱, y, \ldots)$ قسمتی از دنبالهٔ فیبوناچی باشد، حاصل $x + y$ چقدر است؟

۱۰۲. با توجه به الگوی زیر، مجموع جمله‌های ششم و هفتم را به دست آورید.



۱۰۳. اگر $a_۱ = ۷$ و $a_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(a_n + \frac{۷}{a_n})$، باشد مقدار $a_۳$ را به دست آورید.

دنباله‌های حسابی

۱۰۴. در دنبالهٔ $a_n = ۳n - ۵$ بدون نوشتن جملات دنباله، مقدار اختلاف مشترک و جملهٔ اول را به دست آورید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 23 of 132

۱۰۵. میان دو عدد ۲۳ و ۷−، پنج عدد قرار می‌دهیم به‌طوری که جملات حاصل، تشکیل دنبالهٔ کاهشی دهند. جملهٔ سوم چند است؟

۱۰۶. دنبالهٔ $a_n = \frac{۱}{۴} + (x+۳)n$ مفروض است، بررسی کنید به ازای مقادیر مختلف x دنبالهٔ، در چه حالتی دنباله روند کاهشی، افزایشی و ثابت دارد؟

۱۰۷. با توجه به دنبالهٔ حسابی ۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, ۰۰۰ جملهٔ ۳۲اُم این دنباله را به دست آورید.

۱۰۸. در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = ۷n - ۳$ جملهٔ $(۳n-۲)$اُم این دنباله را به دست آورید.

۱۰۹. در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n = ۷n - ۳$ واسطهٔ حسابی بین دو جملهٔ پنجاه و چهارم و هفتاد و سوم این دنباله را به دست آورید.

۱۱۰. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n$

ب) $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + ۲n - ۱$

۱۱۱. یک کارمند در ماه اول سال ۱, ۰۰۰, ۰۰۰ تومان حقوق می‌گیرد و هر ماه ۲% از حقوق اولیه به حقوق ماه قبل وی اضافه می‌شود، در انتهای سال مجموع حقوق دریافتی سالانهٔ وی چقدر است؟

۱۱۲. طول پله‌های یک نردبانی به طول یکنواخت از بالا به پایین از $۲۵cm$ تا $۴۰cm$ افزایش می‌یابد. اگر مجموع طول پله‌ها ۵٫۸۵ متر باشد، تعداد پله‌ها چقدر است؟

۱۱۳. دنبالهٔ حسابی با اطلاعات زیر مفروض است، مجموع جملات را به دست آورید.

$a_۳ = ۶ \quad , \quad a_۶ = ۷٫۵ \quad , \quad n = ۲۰$

۱۱۴. در دنبالهٔ حسابی زیر، مجموع جملات داده شده را بیابید.

۵, ۱۲, ۱۹, ۰۰۰, ۱۰۳

۱۱۵. مجموع همهٔ اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۷ را به دست آورید.

۱۱۶. اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی $S_n = ۷n^۲ - ۱۵n$ باشد، اختلاف مشترک و جملهٔ اول این دنباله را به دست آورید.

۱۱۷. مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارات $۳m - ۱$ و $m + ۵$ و $۲m - ۴$ جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند.

۱۱۸. بین ریشه‌های معادله $x^۲ - ۴x - ۲۱ = ۰$ یک واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم. این واسطه را به دست آورید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 25 of 132

۱۱۹. مجموع جملات دوم، چهارم و ششم در یک دنبالهٔ حسابی برابر ۹۹ است، حاصل $۴a_۴ - ۲۵$ چند است؟

۱۲۰. چند عدد مضرب ۸ بین ۳۰۰ تا ۵۰۰ وجود دارد؟

۱۲۱. m را چنان بیابید که واسطهٔ حسابی بین ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - (۲m - ۴)x - ۳ = ۰$ باشد.

۱۲۲. اگر جملات یک دنبالهٔ حسابی را در عددی ضرب کنیم، آیا دنبالهٔ حاصل نیز حسابی است؟

۱۲۳. اگر طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۰ بوده و اضلاع آن از بزرگ به کوچک یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، اضلاع دیگر را بیابید.

۱۲۴. اگر بتوان بین $۲m$ و ۱۵، شش واسطهٔ حسابی با اختلاف مشترک ۵ درج کرد، m چه‌قدر است؟

۱۲۵. اگر مجموع n جملهٔ اول دنباله‌ای به صورت $S_n = ۳n^۲ - ۸n$ باشد، حاصل $a_{۱۰} + a_{۱۱} + a_{۱۲} + a_{۱۳}$ را بیابید.

۱۲۶. اگر مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی به صورت $S_n = ۳n^۲ - ۸n$ باشد، اختلاف مشترک این دنباله را بیابید.

۱۲۷. اگر مجموع n جملهٔ اول دنباله‌ای حسابی به صورت $S_n = ۳n^۲ - ۸n$ باشد، جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.

۱۲۸. معادلهٔ زیر را حل کنید و مقدار x را به دست آورید.

$$(x + ۱) + (x + ۴) + (x + ۷) + \cdots + (x + ۳۱) = ۴۰۰$$

۱۲۹. بین دو عدد ۵ و ۲۱، هفت عدد چنان درج کرده‌ایم که همهٔ اعداد تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. مجموع کل جملات دنباله را بیابید.

۱۳۰. مقدار x را به دست آورید.

$$۱۷ + ۲۳ + ۲۹ + \cdots + x = ۵۱۷$$

۱۳۱. اگر در یک دنبالهٔ حسابی داشته باشیم $a_{۱۰} + a_۵ = ۱۰۰$، مجموع ۱۴ جملهٔ اول را بیابید.

۱۳۲. در یک دنبالهٔ حسابی که دارای ۱۰۰ جمله است، مجموع سه جملهٔ اول و سه جملهٔ آخر برابر ۳۰۰ است، حاصل جمع تمام جملات چند است؟

۱۳۳. اگر از اختلاف مشترک یک دنبالهٔ حسابی ۱ واحد کم و به جملهٔ اول آن ۳ واحد اضافه شود، مجموع ۲۰ جملهٔ اول آن چه تغییری می‌کند؟

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 27 of 132

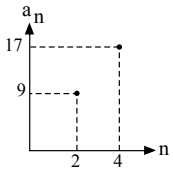
۱۳۴. اگر دنباله‌های حسابی زیر را داشته باشیم، مجموع ۲۰ جملهٔ اول هر دنباله را حساب کنید.

الف) $a_۱ = ۲ \quad , \quad d_۱ = -۶$

ب) $b_۱ = ۲ \quad , \quad d_۲ = ۴$

۱۳۵. در دنبالهٔ حسابی $-۲۷, x, -۲۱, \cdots$ مجموع جملات منفی را بیابید.

۱۳۶. نمودار شکل زیر، برخی از جملات یک دنبالهٔ حسابی را نشان می‌دهد. جملهٔ چندم این دنباله برابر ۶۵ است؟



۱۳۷. مجموع جملات دنبالهٔ $۳, ۸, ۱۳, ۱۸, \cdots, ۲۰۳$ را به دست آورید.

۱۳۸. اگر $۲p, -\frac{۱۳}{۲}, p - ۱$ به‌ترتیب از چپ به راست سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با اختلاف مشترک مثبت باشند، جملهٔ چندم این دنباله برابر با ۱ است؟

۱۳۹. شخصی در ماه اول A ریال پس‌انداز کرده است. در هر ماه به اندازهٔ $\frac{۱}{۲۰}A$ بیشتر از ماه قبل پس‌انداز می‌کند تا مقدار پس‌انداز ماهانه به دو برابر پس‌انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان مجموع پس‌انداز شخص ۶۳۰۰۰ تومان باشد، اولین پس‌انداز وی چقدر بوده است؟

۱۴۰. در دنباله‌ای با جملهٔ اول ۳۲ و اختلاف مشترک -۴ به‌ازای چه مقدار n مجموع جملات صفر است؟

۱۴۱. تعداد صندلی‌های هر ردیف در آمفی‌تئاتر یک دانشگاه تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر ردیف پنجم ۲۱۰ صندلی و ردیف پانزدهم ۷۰ صندلی داشته باشد، اولین ردیف چند صندلی دارد؟

۱۴۲. مجموع چند جمله از دنبالهٔ حسابی $-۱۲, -۹, -۶, \ldots$ برابر جملهٔ پنجم است؟

فصل سوم: الگوهای غیرخطی دنباله‌ی هندسی

۱۴۳. در دنبالهٔ هندسی $-۳, ۳\sqrt{۲}, -۶, \cdots$ حاصل $\frac{a_n}{a_{n+۱}}$ را به‌دست آورید.

۱۴۴. در هر دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n = a_۱ r^{n-۱}$ با فرض $a_۱ > ۰$ اگر $۰ < r < ۱$ باشد، دنباله ..... و اگر $r > ۱$ باشد، دنباله ..... و اگر $r = ۱$ باشد، دنباله ..... است.

۱۴۵. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ آن $\frac{۳۵}{۲}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۲۵ است. این سه عدد را پیدا کنید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 29 of 132

۱۴۶. حاصل $\frac{۱ + x + x^{۲} + \cdots + x^{۱۱}}{۱ + x^{۳} + x^{۶} + x^{۹}}$ را به‌ازای $x = \sqrt{۲}$ به‌دست آورید.

۱۴۷. مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n = ۳ \times ۲^{n+۱}$ به‌دست می‌آید. جملهٔ ششم را به‌دست آورید.

۱۴۸. در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ سوم $-\frac{۱}{۴}$ و جملهٔ هشتم ۸ است. جملهٔ دهم را به‌دست آورید.

۱۴۹. حاصل $\frac{۱}{۳۲۰} + \cdots + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۵}$ را به‌دست آورید.

۱۵۰. حاصلضرب ۵ عدد که با هم تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند ۲۴۳ است. یکی از این اعداد حتماً چه عددی است؟

۱۵۱. حاصل $۶۵۶۱ + \cdots + ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹}$ را به‌دست آورید.

۱۵۲. مجموع جملات اول و دوم و سوم یک دنبالهٔ هندسی ۲۱ و مجموع جملات چهارم و پنجم و ششم آن ۱۶۸ است؛

الف) نسبت مشترک را به‌دست آورید.

ب) جملهٔ چهارم را به‌دست آورید.

۱۵۳. جملهٔ چهارم یک دنبالهٔ هندسی ۱۰ و مجموع جملات پنجم و ششم آن ۶۰ است. نسبت مشترک را به‌دست آورید.

۱۵۴. بین ۶ و ۱۹۲ چهار عدد را به گونه‌ای قرار داده‌ایم که این ۶ عدد با هم تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند. آن جملات کدام‌اند؟

۱۵۵. در یک دنبالهٔ هندسی $a_۳ = ۲۷$ و $a_۵ = ۲۴۳$ است. جملهٔ نهم را به‌دست آورید.

۱۵۶. جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی ۱۰۲۴ است و هر جمله نسبت به جملهٔ قبلی خود ۵۰ درصد کاهش می‌یابد. جملهٔ پنجم را به‌دست آورید.

۱۵۷. در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول -۲ و نسبت‌مشترک $\sqrt{۲}$، جملهٔ هشتم را به‌دست آورید.

۱۵۸. در یک دنبالهٔ هندسی افزایشی، مجموع جملهٔ چهارم و پنجم ۳۰ و جملهٔ سوم ۵ است. نسبت مشترک را به‌دست آورید.

۱۵۹. در دنبالهٔ هندسی $\begin{cases} a_{n+۱} = \sqrt{۲}a_n \\ a_۱ = -۲ \end{cases}$ مجموع ده جملهٔ اول را به‌دست آورید.

۱۶۰. در یک دنبالهٔ هندسی $a_۱ = -۲, a_{n+۱} = -۳a_n$ است.

الف) جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید.

ب) جملهٔ هشتم را به‌دست آورید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 31 of 132

۱۶۱. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع دو جملهٔ اول و چهارم برابر ۲۸ و مجموع جملات دوم و سوم برابر ۱۲ است. نسبت‌مشترک را به‌دست آورید.

۱۶۲. در دنبالهٔ هندسی اگر $a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \times a_۴ \times a_۵ = ۳۲$ باشد، مقدار $a_۲ \times a_۴$ را به‌دست آورید.

۱۶۳. بین دو عدد ۶ و ۹۶ سه واسطهٔ هندسی درج کنید که این ۵ عدد با هم تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند.

۱۶۴. دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \cdots$ را درنظر بگیرید؛

الف) جملهٔ هشتم را به‌دست آورید.

ب) اگر a_n جملهٔ عمومی این دنباله باشد $\frac{a_{۱۲}}{a_{۱۰}}$ را به‌دست آورید.

۱۶۵. واسطهٔ هندسی بین دو عدد $\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

۱۶۶. جملهٔ دهم یک دنبالهٔ هندسی ۶۴ برابر جملهٔ هفتم آن است. حاصل $\frac{۲a_{۱۴}+a_۳}{a_{۱۲}-a_۵}$ را به‌دست آورید.

۱۶۷. در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ بیست‌وهفتم معکوس جملهٔ پنجم است. جملهٔ شانزدهم را به‌دست آورید.

۱۶۸. بین دو عدد ۴ و ۱۲۸، چهار عدد را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که این ۶ عدد با هم تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند. مجموع آن چهار عدد را به‌دست آورید.

۱۶۹. اگر $۲x-۱, x+۱, ۲x+۱$ جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، x را به‌دست آورید.

۱۷۰. مجموع ده جمله از دنبالهٔ $a_n = \frac{۳}{۴^n}$ را به‌دست آورید.

۱۷۱. اگر $۱۶^{x+۳y}$ و $۸^{x-۲y}$ و $۴^{۲x+y}$ جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند، x و y چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۱۷۲. جملات چهارم و ششم یک دنبالهٔ هندسی ۵ و ۱۰ می‌باشند. جملهٔ بیست‌ویکم را به‌دست آورید.

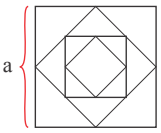
۱۷۳. واسطهٔ هندسی بین جملات ششم و دهم دنبالهٔ هندسی $a_n = ۳ \times ۲^{۱-n}$ را به‌دست آورید.

۱۷۴. اگر $x^۲, x^۴, ۶۴, \cdots$ جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند؛

الف) جملهٔ پنجم را به‌دست آورید.

ب) مجموع ده جملهٔ اول را به‌دست آورید.

۱۷۵. در یک مربع به ضلع ۴۸ وسط‌های اضلاع مجاور را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدید ایجاد شود و این کار را ادامه می‌دهیم. مساحت مربع مرحلهٔ دهم را به‌دست آورید. (مرحلهٔ اول را مربع به ضلع ۴۸ در نظر بگیرید)



۱۷۶. در یک دنبالهٔ هندسی حاصلضرب شش جملهٔ اول ۸۱ و نسبت مشترک $\sqrt[۳]{۳}$ است. جملهٔ اول را به‌دست آورید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 33 of 132

۱۷۷. اگر حاصلضرب ۷ جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی $۳^{۱۴} \times ۱۲۸$ باشد، جملهٔ چهارم این دنباله را به‌دست آورید.

۱۷۸. جملهٔ سوم یک دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۹}$ و جملهٔ پنجم آن $\frac{۱}{۸۱}$ است. جملهٔ هفتم را به‌دست آورید.

۱۷۹. مجموع سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی ۶ برابر جملهٔ دوم آن است. نسبت مشترک را به‌دست آورید.

۱۸۰. در یک دنبالهٔ هندسی نسبت مشترک $\sqrt{۵}$ و حاصلضرب پنج جملهٔ اول ۲۴۳ است. جملهٔ سوم را به‌دست آورید.

۱۸۱. در یک دنبالهٔ هندسی $a_۸ = ۴a_۶$ و $a_۲ + a_۵ = ۲۱۶$ است. جملهٔ اول را به‌دست آورید.

۱۸۲. در دنبالهٔ $۲, ۶, ۱۸, \cdots$ جملهٔ هفتم و حاصل جمع هفت جملهٔ اول را به‌دست آورید.

۱۸۳. اگر ریشهٔ سوم A برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، ریشهٔ دوم آن را بدست آورید.

۱۸۴. حاصل $\frac{\sqrt{۷۵} + \sqrt{۱۲} - \sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۴}}$ چند برابر ریشهٔ دوم مثبت عدد ۶ می‌باشد؟

۱۸۵. ساده شدهٔ عبارت $\sqrt{(۲ + \sqrt{۲})^۲ - ۴\sqrt{۲}} - (\frac{۱}{۴})^{-۰/۲۵}$ را بدست آورید.

۱۸۶. حاصل $۸۱^{\frac{۱}{۴}} \times (۰/۰۴)^{-\frac{۳}{۲}} \times ۱۶^{\frac{۳}{۴}}$ را بدست آورید.

۱۸۷. حاصل $\sqrt[۴]{\frac{۱}{۹}} \times (۲۷^{\frac{۵}{۳}})^{\frac{۲}{۵}}$ را بدست آورید.

۱۸۸. اگر $\sqrt[۵]{۳\sqrt{۳}}$ را به‌صورت ۳^A بنویسیم، A را بدست آورید.

۱۸۹. اگر $\frac{x^{m-۱}y^{۲n-۳}z^۲}{x^۲y^۵} = \frac{xz^۲}{y^۴}$ باشد، حاصل $m + ۲n$ را بدست آورید.

۱۹۰. حاصل $۲۷^{\frac{۱}{۳}} - ۸^{\frac{۲}{۳}}$ را بدست آورید.

۱۹۱. حاصل عبارت $\sqrt[۵]{(\sqrt{۳} - ۱)^۵} - \sqrt[۶]{(۲ - ۲\sqrt{۳})^۶}$ را بدست آورید.

۱۹۲. حاصل $۲۵^{\frac{۱}{۲}} + ۱۶^{\frac{۱}{۲}}$ را بدست آورید.

۱۹۳. حاصل $\sqrt{۹ - ۴\sqrt{۵}}$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۱۹۴. مقدار x را از معادلهٔ $\sqrt[۳]{x} = x$ بدست آورید.

۱۹۵. اگر ریشهٔ سوم و پنجم عددی مثبت با هم برابر باشند، جمع ریشه‌های هفتم و نهم آن عدد را بدست آورید.

۱۹۶. اگر $f(x) = \begin{cases} ۲^x & x \geq ۰ \\ ۳^x & x \leq ۰ \end{cases}$ باشد، $f(۳) \cdot f(-۲)$ را بدست آورید.

۱۹۷. در تابع نمایی $f(x) = (k-۲)x^۲ + k^x$ مقدار $f(۳)$ را بدست آورید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 35 of 132

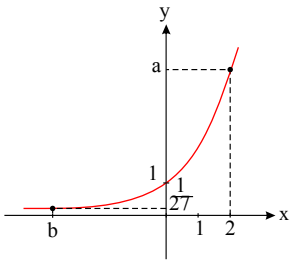
۱۹۸. نمودارهای دو تابع $y = ۲^x$, $y = (\frac{۱}{۲})^x$ یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟

۱۹۹. اگر نمودار دو تابع $f(x) = ۳^x + ۲$ و $g(x) = (\frac{۱}{۳})^x$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول x قطع کنند، ۳^x را بدست آورید.

۲۰۰. نمودار $f(x) = -(۰/۲۵)^{x-۳}$ را رسم کنید.

۲۰۱. اگر $f(x) = (۲ + k)x^۲ + ۳^x$ تابعی نمایی باشد، آنگاه $f(x) = (k + ۴)^x$ به ازای $x = ۳$ چه عرضی دارد؟

۲۰۲. اگر نمودار مقابل، $f(x) = ۳^x$ باشد، آنگاه a و b را بدست آورید.



۲۰۳. اگر $f(x) = (k + ۲)x + ۵^x$ تابعی نمایی باشد، آنگاه مقدار $[(k + ۴)^x]$ را به ازای $x = ۲$ به دست آورید.

۲۰۴. نمودار $f(x) = (\frac{۱}{۵})^{x-۲} + ۱$ را رسم کنید.

۲۰۵. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} ۵^x & x \geq ۰ \\ (\frac{۱}{۳})^x & x < ۰ \end{cases}$ را رسم کنید.

۲۰۶. نقطهٔ تلاقی $f(x) = (\frac{۱}{۳})^{۳x-۱}$ با محور عرض‌ها را به‌دست آورید.

۲۰۷. نقطهٔ تلاقی $f(x) = ۳^{۲x-۱}$ با محور عرض‌ها را به‌دست آورید.

۲۰۸. اگر مبلغ ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان در بانکی سرمایه‌گذاری کنیم که با نرخ ثابت سالانه ۲۰ درصد به ما سود می‌دهد، پس از ۳ سال چه مبلغی می‌توان برداشت کرد؟

۲۰۹. یک کیف در سال ۱۳۹۰ به قیمت ۲۵,۰۰۰ تومان و در سال ۱۳۹۲ به مبلغ ۶۴,۰۰۰ تومان فروخته شده است. اگر نرخ تورم سالانه را ثابت در نظر بگیریم، آن را به‌دست آورید.

۲۱۰. اگر تعداد باکتری‌های قسمتی از بدن ۷ میلیارد باکتری بوده و به‌طور نمایی تکثیر شود و پس از ۳۵ سال ۲ برابر شود، در ۷۰ سال بعد، چند میلیارد خواهد شد؟

۲۱۱. اگر مقدار یک ماده هر ۱۰۰ سال به نصف خود برسد و پس از گذشت ۶ قرن ۲۰ گرم از این ماده باقی مانده باشد، مقدار اولیهٔ آن چند گرم بوده است؟

۲۱۲. نقطهٔ برخورد دو تابع $f(x) = (\frac{۱}{۲})^{x-۱}$ و $g(x) = (\frac{۱}{۴})^{x+۱}$ را به‌دست آورید.

۲۱۳. نمودار تابع $f(x) = k^۲ \times ۳^x$ از نقطهٔ $(۲, ۳۶)$ می‌گذرد. اگر $g(x) = k^x$ باشد، $g(۳)$ را به‌دست آورید. ($k > ۰$ است.)

۲۱۴. نمودارهای $f(x) = ۳^x$، $g(x) = ۴^x$ و $h(x) = ۵^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 37 of 132

۲۱۵. در یک دنبالهٔ هندسی ۶ جمله‌ای، مجموع دو جملهٔ اول ۸۱ و مجموع دو جملهٔ آخر ۱۶ است. مجموع این ۶ جمله، را به دست آورید.

۲۱۶. در دنبالهٔ هندسی $\frac{۲}{۹}, \frac{-۲}{۳}, ۲, \cdots$ نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر را به دست آورید (تعداد جملات دنبالهٔ مورد نظر زوج است.)

۲۱۷. در یک دنبالهٔ هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر با ۸ و مجموع جملات چهارم و ششم برابر با ۶۴ است. جملهٔ اول این دنباله را به دست آورید.

۲۱۸. در یک دنبالهٔ هندسی داریم $a_۷ = a_۳ \times \frac{۸۱}{۱۶}$ و جملهٔ چهارم برابر $\frac{۹}{۴}$ است. جملهٔ دوم این دنباله را به دست آورید. (نسبت‌مشترک عددی مثبت است.)

۲۱۹. اگر $۶, x, ۱۴$ به همین ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنباله حسابی باشند و $۴, ۱۲, y$ به همین ترتیب سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی باشند. برای آنکه اعداد x, y, z به همین ترتیب تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، مقدار z را به دست آورید.

۲۲۰. در یک دنبالهٔ هندسی با جملات منفی، $a_۱ + a_۳ = -\frac{۱۳}{۱۸}$ و $a_۲ \times a_۴ = \frac{۴}{۸۱}$ است. جملهٔ اول این دنباله را به دست آورید.

توان‌های گویا

۲۲۱. حاصل $\sqrt{۲۵} - \sqrt[۳]{-۱۲۵}$ را بدست آورید.

۲۲۲. عدد $۱۷^{\frac{۱}{۳}}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۲۲۳. حاصل $\sqrt{۴ + ۲\sqrt{۳}} + \sqrt{۷ - ۴\sqrt{۳}}$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۲۲۴. ریشهٔ ششم عددی ۳ است، ریشهٔ دوم آن را بدست آورید.

۲۲۵. حاصل $(۲\frac{۱}{۱۰})^{۵} \times (\frac{۲۱}{۱۰})^{۳} \times (۲٫۱)^{۶}$ را بدست آورید.

۲۲۶. اگر $a = ۳\sqrt{۳}$ باشد، حاصل $۹a^{\frac{۲}{۳}}$ را بدست آورید.

۲۲۷. حاصل $(۰٫۰۰۸)^{-\frac{۲}{۳}}$ را بدست آورید.

تابع نمایی

۲۲۸. مقدار اولیهٔ یک دارو ۸۰ میلی‌گرم است. بعد از ۴ نیمه‌عمر مقدار دارو در بدن چند میلی‌گرم می‌شود؟

۲۲۹. در تابع نمایی $f(x) = (۳k - ۶)^x$ ، متغیر k چه اعدادی نمی‌تواند باشد؟

۲۳۰. اگر نرخ افزایش قیمت میوه در شهر تهران ۲۰ درصد باشد، ۲ سال دیگر قیمت میوه‌ای که اکنون کیلویی ۱۰۰۰ تومان است به چند تومان خواهد رسید؟

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 39 of 132

۲۳۱. اگر نیمهٔ عمر کربن ۵۷۰۰ سال باشد و هم‌اکنون، کربن موجود در یک ماده $۱۲٫۵\%$ مقدار اولیه‌اش باشد، قدمت این ماده چقدر است؟

۲۳۲. اگر نیمهٔ عمر یک مادهٔ رادیواکتیو ۱۴ روز باشد و در حال حاضر ۴ گرم از این ماده داشته باشیم، پس از گذشت چند روز فقط ۱ گرم از آن باقی می‌ماند؟

۲۳۳. نیمهٔ عمر یک مادهٔ رادیواکتیو ۶ ساعت است. اگر ۹۶ گرم از این ماده موجود باشد، بعد از یک شبانه‌روز چند گرم از آن تجزیه نشده باقی می‌ماند؟

۲۳۴. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a(\frac{۱}{۳})^x$ در نقطه‌ای به عرض ۴، محور yها را قطع می‌کند. مقدار تابع در $x = -۲$ را به دست آورید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 41 of 132

پاسخنامه تشریحی

۱ . تذکر ۱: عددی زوج است که یکان آن زوج باشد.

تذکر ۲: رقم صفر در اولین رقم سمت چپ عدد نمی‌تواند قرار بگیرد.

صفر یکان باشد ... یا ... صفر یکان نباشد

$$\boxed{۴}\times\boxed{۵}\times\boxed{۶}\times\boxed{۷}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{\text{صفر}}+\boxed{۶}\times\underbrace{\boxed{۶}}_{\text{یکی کم و صفر اضافه می‌شود}}\times\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\underbrace{\boxed{۳}}_{\text{۲ یا ۴ یا ۸}}$$

$$=۸۴۰+۲۱۶۰=۳۰۰۰$$

۲ . اگر از A به B ، x راه داشته‌باشیم:

$$\text{تعداد راه‌ها از } A \text{ به } C = (A\to B\to C \text{ مسیر}) \text{ یا } (A\to D\to C \text{ مسیر})$$

$$۱۴=۲\times۳+x\times۲\Rightarrow ۱۴=۶+۲x\Rightarrow ۱۴-۶=۲x$$

$$\Rightarrow ۸=۲x\to x=\frac{۸}{۲}=۴$$

۳ . چون هر ۱۵ تیم با هم بازی می‌کنند. پس هر تیم ۱۴ بازی رفت و ۱۴ بازی برگشت انجام می‌دهد (فقط با خودش بازی نمی‌کند)

توجه: در شمارش تعداد کل بازی‌ها چون هر بازی بین دو تیم برگزار می‌شود پس هر بازی دوبار شمرده می‌شود.

هر تیم ۱۴ بازی می‌کند

$$\text{تعداد بازی‌ها}=\frac{۱}{۲}\times\underbrace{۱۵}_{\text{۱۵ تیم داریم}}\times\overbrace{۱۴}^{\uparrow}\times\underbrace{۲}_{\text{بازی رفت و برگشت}}=۲۲۰$$

۴ .

در ابتدا چون می‌توان به هر سؤال به ۵ حالت پاسخ داد (یکی از گزینه‌ها انتخاب شود یا بدون پاسخ (سفید) بماند.) پس:

$$\underbrace{۵\times۵\times\cdots\times۵}_{n\text{ تا}}=۵^{n}=۳۱۲۵$$

$$\Rightarrow ۵^{n}=۵^{۵}\Rightarrow n=۵$$

سه سؤال اضافه شود و شرط پاسخ‌گویی به تمام سؤالات را داشته باشیم:

$$\underbrace{۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴}_{۸\text{ تا}}=۴^{۸}=۲^{۱۶}$$

۵ .

چون همه تیم‌ها با هم بازی می‌کنند و ۱۰ تیم داریم پس هر تیم ۹ بازی انجام می‌دهد.

هر تیم ۹ بازی می‌کند

$$\text{تعداد کل بازی‌ها}:\overset{I}{\frac{۱}{۲}}\times\underbrace{۱۰}_{\text{۱۰ تیم}}\times\overbrace{۹}^{\uparrow}\times\underbrace{۱}_{\text{بازی رفت}}=۴۵$$

(I): توجه کنید که در شمارش عادی تعداد کل بازی‌ها، چون هر بازی بین دو تیم برگزار می‌شود پس هر بازی ۲ بار شمارش می‌شود، درنتیجه حاصل کل عبارت را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم.

۶ .

با توجه به صورت سؤال، برای آنکه اعداد موردنظر بزرگ‌تر از ۵۰۰ باشند در رقم صدگان یکی از ارقام ۵، ۶ و ۷ و ۸ و ۹ می‌تواند قرار بگیرد و در حالت کلی برای اینکه مجموع ارقام یکان و دهگان ۸ باشد مجموعهٔ اعداد

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 43 of 132

$\{(۰,۸),(۱,۷),(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴)\}$ را خواهیم داشت، بنابراین داریم:

یکان دهگان صدگان

$\boxed{۵,۶,۷,۸,۹}\ \boxed{۸}\ \boxed{۰} \Rightarrow ۵ \times ۱ \times ۱ = ۵$

یکان دهگان صدگان

$\boxed{۵,۶,۷,۸,۹}\ \boxed{۰}\ \boxed{۸} \Rightarrow ۵ \times ۱ \times ۱ = ۵$

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان صفر یا ۸ باشد ۱۰ حالت است، به همین ترتیب برای مجموعهٔ ارقام $\{(۱,۷),(۲,۶),(۳,۵)\}$ نیز همین روند را داریم:

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان ۱ یا ۷ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان ۲ یا ۶ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان ۳ یا ۵ باشد، ۱۰ حالت است.

یکان دهگان صدگان

$\boxed{۵,۶,۷,۸,۹}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴} \Rightarrow ۵ \times ۱ \times ۱ = ۵$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر خواهد بود با: $۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۵ = ۴۵$

۷.

الف) مسیر $A \to B \to C$ یا مسیر $A \to D \to C$ یا مسیر $A \to E \to C$

$(۲ \times ۳) + (۳ \times ۳) + (۱ \times ۲) = ۶ + ۹ + ۲ = ۱۷$

ب) اگر بدون عبور از E باشد، یکی از دو مسیر $A \to B \to C$ یا $A \to D \to C$ انتخاب می‌شود. بنابراین:

$(A \to B \to C)$ یا $(A \to D \to C)$

$(۲ \times ۳) + (۳ \times ۳) = ۶ + ۹ = ۱۵$

۸. تذکر: صفر در اولین رقم سمت چپ عدد یعنی ده‌هزارگان نمی‌تواند قرار داشته باشد.

یکان: $\boxed{۱}$ یکی‌یکی کم می‌شود

دهگان: $\boxed{۲}$ یکی‌یکی کم می‌شود

صدگان: $\boxed{۳}$ یکی‌یکی کم می‌شود

هزارگان: $\boxed{۴}$ یکی از ۴ تا کم شده می‌شود ۳ تا و با بازگشت صفر دوباره ۴ تا می‌شود

ده‌هزارگان: $\boxed{۴}$ همه به جز صفر پس ۴ انتخاب داریم

$\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} = ۹۶$

۹.

الف) $۶ =$ $\underset{\text{۳ راه از } A \text{ به } B}{۳} \times \underset{\text{۲ راه از } B \text{ به } C}{۲}$

ب)

$\underbrace{B \to C \to D}_{\text{مسیر}}$ یا $\underbrace{B \to A \to D}_{\text{مسیر}}$

۲ (دو راه از B به C) و $\times$ ۳ (سه راه از C به D) $+$ ۳ (سه راه از B به A) و $\times$ ۴ (چهار راه از A به D) $= ۶ + ۱۲ = ۱۸$

۱۰.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 45 of 132

می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های kعضوی یک مجموعهٔ nعضوی برابر است با $\binom{n}{k}$ بنابراین:

$$\binom{n}{۲} = ۲۸ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲} = ۲۸ \Rightarrow \underbrace{n(n-۱)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = ۵۶ \Rightarrow n = ۸$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۴عضوی برابر است با:

$$\binom{۸}{۴} = \frac{۸!}{۴!۴!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۴!} = ۷۰$$

۱۱.

الف) باید ۲ نفر دوازدهمی و ۲ نفر یازدهمی باشند:

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دونفر پایه دوازدهم}} \times_{\text{و}} \underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{دو نفر پایه یازدهم}} = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰$$

ب) حداقل ۳ نفر پایهٔ دوازدهم یعنی ۳ نفر دوازدهمی و یک نفر یازدهمی یا هر چهار نفر دوازدهمی باشند:

$$\Rightarrow \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{سه تا دوازدهم}} \times_{\text{و}} \underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{یکی یازدهم}} +_{\text{یا}} \underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{هر چهارتا یازدهم}} = ۱۰ \times ۶ + ۵ = ۶۵$$

۱۲. چون تعداد بازی‌های رفت با بازی‌های برگشت برابر است پس ۴۵ بازی رفت داریم. چون هر بازی بین دو تیم برگزار می‌شود:

$$\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} = ۴۵$$
$$\Rightarrow n(n-۱) = ۹۰ = ۱۰ \times ۹ \Rightarrow n = ۱۰$$

۱۳. الف) در این حالت باید سه نفر انسانی و سه نفر تجربی باشند

سه نفر انسانی و سه نفر تجربی = تعداد مساوی هر دو رشته

$$= \binom{۴}{۳} \times \binom{۵}{۳} = ۴ \times ۱۰ = ۴۰$$

ب) برای انتخاب کاپیتان از ۵ دانش‌آموز انسانی یکی را انتخاب می‌کنیم که تعداد آن $\binom{۵}{۱}$ است که همان ۵ است. پس داریم:

$$\underbrace{۵}_{\text{انتخاب کاپیتان}} \times \underbrace{\binom{۸}{۵}}_{\text{بعد از کنار گذاشتن کاپیتان}} = ۵ \times \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۵ \times ۵۶ = ۲۸۰$$

۱۴. الف) برای تشکیل یک ۴ ضلعی باید ۴ نقطه از ۱۲ نقطه را (بدون اهمیت ترتیب) انتخاب کنیم.

$$\text{تعداد چهارضلعی} = \binom{۱۲}{۴} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۴۹۵$$

ب) برای تشکیل وتر، باید ۲ نقطه از ۱۲ نقطه را (بدون اهمیت ترتیب) انتخاب کنیم.

$$\text{تعداد وتر} = \binom{۱۲}{۲} = \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۶۶$$

۱۵. اگر فرض کنیم مجموعهٔ n عضو داشته باشد، تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی آن برابر $\binom{n}{۳}$ است، پس:

$$\binom{n}{۳} = ۱۰ \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۰$$
$$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲) = ۶۰$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 47 of 132

$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۵\times۴\times۳\Rightarrow n=۵$

پس مجموعهٔ A ، ۵ عضوی است و $\binom{۵}{۱}=۵$ زیر مجموعهٔ تک عضوی دارد.

۱۶ . الف) اعضای فرد A " ۳ و ۷ و ۵ و ۹ و ۱" هستند که ۵ عضو است. پس تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از اعضای فرد A برابر $\binom{۵}{۳}$ است.

$$\binom{۵}{۳}=\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times\cancel{۴}^{۲}}{۲}=۱۰$$

ب)

$$\binom{۴}{۲}=\frac{\cancel{۴}^{۲}\times۳}{\cancel{۲}}=۶$$

۱۷ .

الف) $\underbrace{\boxed{۳}^{\text{دهزارگان}}\times\boxed{۴}^{\text{هزارگان}}\times\boxed{۵}^{\text{صدگان}}\times\boxed{۶}^{\text{دهگان}}}_{\text{از ۷ عضو } A \text{ یک زوج حذف شده}\\ \text{۶ عضو می‌ماند و در خانهٔ}\\ \text{بعدی یکی یکی کم می‌شود}}\times\underbrace{\boxed{۲}^{\text{یکان}}}_{\text{یکی از دو زوج ۸,۲}}=۷۲۰$

ب) $\underbrace{\boxed{۳}^{\text{دهزارگان}}\times\boxed{۶}^{\text{هزارگان}}\times\boxed{۵}^{\text{صدگان}}\times\boxed{۴}^{\text{دهگان}}\times\boxed{۳}^{\text{یکان}}}_{\text{یکی یکی کم می‌شود}}=۱۰۸۰$

دهزارگان باید ۸,۷ یا ۹ باشد

۳ عضو از ۷ عضو مجموعهٔ A انتخاب می‌کنیم:

ج) $\binom{۷}{۳}=\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵}{\cancel{۶}}=۳۵$

۱۸ .

ابتدا تعداد حالت‌های کل را به دست می‌آوریم. سپس حالت‌هایی که آرش و آریا هر دو هم‌زمان در ابتدا یا انتهای صف باشند را حساب می‌کنیم و از حالت‌های کل کم می‌کنیم.

تعداد حالت‌های کل $=۶!=۷۲۰$

تعداد حالت‌های نامطلوب $=\underbrace{۴!}_{\text{بهراد، رامان، بهروز، سینا}}\times\underbrace{۲!}_{\text{۴!}}=۴!\times۲!=۴۸\Rightarrow$ اصل متمم $=۷۲۰-۴۸=۶۲۷$

۱۹ .

ابتدا از بین ارقام فرد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ دو رقم انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۳!\times۲!}=۱۰$$

برای ارقام زوج دو حالت داریم:

۱ از بین ارقام ۲ و ۴ و ۶ و ۸ نیز ۳ رقم دیگر انتخاب شود:

$$\binom{۴}{۳}=\frac{۴!}{۱!\times۳!}=۴$$

جایگشت 5 رقم انتخاب شده $=۵!$

$\Rightarrow ۱۰\times۴\times۵!=۴۰\times۵!=۴۰\times۵\times۴!=۲۰۰\times۴!$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 49 of 132

۲ از بین ارقام ۲ و ۴ و ۶ و ۸ دو رقم زوج انتخاب شود و رقم آخر انتخابی صفر باشد:

$$\binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲! \times ۲!} = ۶$$

$$\text{جایگشت 5 رقم انتخاب شده که یکی از آنها صفر است} = \frac{۴}{\text{غیرصفر}} \times \frac{۴}{} \times \frac{۳}{} \times \frac{۲}{} \times \frac{۱}{} = ۴ \times ۴!$$

$$\Rightarrow ۱۰ \times ۶ \times ۴ \times ۴! = ۲۴۰ \times ۴!$$

$$\xrightarrow[\text{اصل جمع}]{} ۲۰۰ \times ۴! + ۲۴۰ \times ۴! = ۴۴۰ \times ۴! = ۱۰۵۶۰$$

۲۰ . برای بچهٔ اول ۱ اسباب‌بازی از بین ۶ تا و برای بچهٔ دوم ۲ تا از بین ۵ تا اسباب‌بازی مانده و برای بچهٔ سوم ۳ تا از بین ۳ تا اسباب‌بازی مانده انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۱} \times \binom{۵}{۲} \times \binom{۳}{۳} = ۶ \times ۱۰ \times ۱ = ۶۰$$

۲۱ .

(الف

$$\underset{\text{یک قرمز}}{\binom{۶}{۱}} \underset{\text{و}}{\times} \underset{\text{یک سبز}}{\binom{۴}{۱}} = ۶ \times ۴ = ۲۴$$

ب) هر دو سبز یا هر دو قرمز = هر دو همرنگ

$$= \underset{\text{۲ قرمز}}{\binom{۶}{۲}} \overset{\text{یا}}{+} \underset{\text{۲ سبز}}{\binom{۴}{۲}} = \frac{\overset{۳}{\cancel{۶}} \times ۵}{\cancel{۲}} + \frac{\overset{۲}{\cancel{۴}} \times ۳}{\cancel{۲}} = ۱۵ + ۶ = ۲۱$$

۲۲ .

(الف

$$\underset{\text{سه تا دوازدهم}}{\binom{۷}{۳}} \underset{\text{و}}{\times} \underset{\text{یکی یازدهم}}{\binom{۵}{۱}} = \frac{۷ \times \cancel{۶} \times ۵}{\cancel{۶}} \times ۵ = ۱۷۵$$

ب) هر ۴ تا دوازدهم یا یکی یازدهم و سه تا دوازدهم = حداکثر یک یازدهم

$$\binom{۷}{۳} \times \binom{۵}{۱} + \binom{۷}{۴} = \frac{۷ \times \cancel{۶} \times ۵}{\cancel{۶}} \times ۵ + \frac{۷ \times \cancel{۶} \times ۵ \times \cancel{۴}}{\cancel{۴} \times \cancel{۳ \times ۲} \times ۱} = ۱۷۵ + ۳۵ = ۲۱۰$$

۲۳ .

چون $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} = \frac{P(n,r)}{r!}$ **درنتیجه:**

$r!$

۲۴ .

مجموعهٔ A **، ۵ عضو دارد. بنابراین:**

(الف

$$\binom{۵}{۴} = \binom{۵}{۱} = ۵$$

چون شامل ۳ است دو عضو دیگر را از بین ۴ عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم:

ب)

$$\binom{۴}{۲} = \frac{۴ \times ۳}{۲} = ۶$$

چون فاقد ۵ است، پس از ۴ عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم:

ج)

$$\binom{۴}{۲} = \frac{۴ \times ۳}{۲} = ۶$$

۲۵ .

الف) برای تشکیل یک مثلث ۳ نقطه از ۱۰ نقطه را انتخاب می‌کنیم:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 51 of 132

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰ \times \overset{۳}{\cancel{۹}} \times \overset{۴}{\cancel{۸}}}{\cancel{۳} \times \cancel{۲}} = ۱۲۰$$

ب) هر وتر از به هم وصل کردن دو نقطه متمایز روی دایره تشکیل می‌شود. پس از ۱۰ نقطه روی دایره، هر دو نقطه یک وتر تشکیل می‌دهد پس دو نقطه از ۱۰ نقطه انتخاب می‌کنیم.

$$\text{تعداد وترها} = \binom{۱۰}{۲} = \frac{\overset{۵}{\cancel{۱۰}} \times ۹}{\cancel{۲}} = ۴۵$$

۲۶ . چون ترتیب مهم نیست از فرمول ترکیب حل می‌کنیم:

$$\binom{۸}{۶} = \binom{۸}{۲} = \frac{\overset{۴}{\cancel{۸}} \times ۷}{\cancel{۲}} = ۲۸$$

۲۷ . کلمهٔ «شیرازه» شامل حروف "ش، ی، ر، ا، ز، ه" می‌باشد که دارای ۶ حرف است و سه حرف آن را انتخاب می‌کنیم. چون ترتیب مهم است تعداد این انتخاب‌ها از $P(۶,۳)$ به دست می‌آید:

$$\text{تعداد کلمات سه حرفی} = P(۶,۳) = \frac{۶!}{۳!} = ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$$

۲۸ .

۳ نفر خاص، قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید ۲ نفر دیگر را از بین ۶ ، $(۶ - ۳ = ۹)$ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم. چون ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست به‌کمک فرمول ترکیب محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌های انتخاب} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{(۶-۲)! \times ۲!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۲ \times ۱} = ۱۵$$

۲۹ .

$$\frac{n!\,(n-۳)!}{(n-۲)!\,(n-۱)!} = \frac{۳}{۲} = \frac{n(n-۱)! \times (n-۳)!}{(n-۲)(n-۳)! \times (n-۱)!} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{n}{n-۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۳n - ۶ = ۲n$$

$$\Rightarrow ۳n - ۲n = ۶ \Rightarrow n = ۶$$

۳۰ .

چون در رسم مثلث سه نقطه نمی‌تواند روی یک خط راست باشند، بنابراین:

$$\binom{۶}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۵}{۲}\binom{۶}{۱} = ۱۵ \times ۵ + ۱۰ \times ۶ = ۱۳۵$$

۳۱ . الف) تابع است چون می‌دانیم برای هر دایره با شعاع مشخص، فقط یک عدد به‌عنوان مساحت به‌دست می‌آید.

ب) تابع است چون هر فرد در یک زمان مشخص فقط دارای یک عدد برای قدش است.

پ) تابع نیست چون هر عدد طبیعی اول دو مقسوم‌علیه دارد.

ت) تابع است چون هر داوطلب کنکور، فقط یک رتبهٔ کشوری در رشته‌اش دارد. اما هر عدد اول دارای ۲ مقسوم‌علیه است، خودش و یک.

۳۲ . باید B و A اشتراک نداشته باشند و C و A نیز اشتراک نداشته‌باشند ولی B و C اشتراک داشته‌باشند. مانند:

$$\begin{cases} B = \{۲,۴\} \\ C = \{۶,۲\} \end{cases}$$

نمونه‌های دیگر نیز می‌توان نوشت. (باید عضوهای B و C زوج باشند ولی عضو مشترک داشته باشند.)

۳۳ . الف)

$$\underset{\text{هرسه قرمز}}{\binom{۶}{۳}} \overset{\text{یا}}{+} \underset{\text{هرسه آبی}}{\binom{۵}{۳}} = ۲۰ + ۱۰ = ۳۰$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 53 of 132

ب)

$$\underset{\text{دوتا قرمز}}{\binom{۶}{۲}} \overset{\text{و}}{\times} \underset{\text{یکی آبی}}{\binom{۵}{۱}} \overset{\text{یا}}{\times} \underset{\text{هرسه قرمز}}{\binom{۶}{۳}} = \cancel{۱۵ \times ۵}^{۷۵} + ۲۰ = ۹۵$$

۳۴ . الف)

$$\text{هر سه انسانی} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷ \times \cancel{۶} \times ۵}{\cancel{۳ \times ۲} \times ۱} = ۳۵$$

ب)

$$\text{هر سه از سه رشته متفاوت} = \underset{\text{یکی انسانی}}{\binom{۷}{۱}} \overset{\text{و}}{\times} \underset{\text{یکی تجربی}}{\binom{۵}{۱}} \overset{\text{و}}{\times} \underset{\text{یکی ریاضی}}{\binom{۴}{۱}} = ۷ \times ۵ \times ۴ = ۱۴۰$$

ج)

$$\text{هر سه از یک پایه} = \underset{\text{هرسه انسانی}}{\binom{۷}{۳}} \overset{\text{یا}}{+} \underset{\text{هرسه تجربی}}{\binom{۵}{۳}} \overset{\text{یا}}{+} \underset{\text{هرسه ریاضی}}{\binom{۴}{۳}} = ۳۵ + ۱۰ + ۴ = ۴۹$$

۳۵ . الف)

$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$

ب)

$A = \{۲, ۴, ۶\}$

ج)

$B = \{۵, ۶\}$

د)

$B - A = \{۵\}$

۳۶ . الف)

$S = \{(ر، ر), (ر، پ), (پ، ر), (پ، پ)\}$

ب)

$A = \{(ر، ر), (پ، ر), (ر، پ)\}$

پ)

$B = \{(پ، ر), (ر، پ)\}$

ت)

$A \cap B = \{(پ، ر), (ر، پ)\}$

۳۷ . الف)

$S = \{(۱, ۱), \cdots, (۱, ۶), (۲, ۱), \cdots, (۲, ۶), \cdots (۶, ۱), \cdots (۶, ۶)\}$

ب)

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 55 of 132

ج)

مجموع دو تاس ۱۱: $A = \{(۵,۶),(۶,۵)\}$

حاصلضرب دو تاس کمتر از ۱۲: $B = \{(۱,۱),(۱,۲),\cdots(۱,۶),(۲,۱),\cdots(۲,۵),(۳,۱),\cdots(۳,۳),$

$(۴,۱),(۴,۲),(۵,۱),(۵,۲),(۶,۱)\}$

د) A و B هیچ اشتراکی ندارند پس:

$$B - A = B$$

۳۸.

$$A = \{\underbrace{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)}_{\text{دو تاس یکسان}} , \underbrace{(۱,۳),(۳,۱)}_{\text{مجموع ۴}}\}$$

$(۲,۲)$ نیز مجموع ۴ دارد ولی چون در هر دو مشترک است یک‌بار نوشته‌شده است.

۳۹. الف)

$$S = \{۱,۲,\cdots,۲۰\}$$

ب)

$$A = \{۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰\}$$

پ)

$$B = \{۱,۴,۹,۱۶\}$$

ت)

$$\begin{cases} A \cup B = \{۱,۴,۸,۹,۱۲,۱۶,۲۰\} \\ A \cap B = \{۴,۱۶\} \\ A - B = \{۸,۱۲,۲۰\} \end{cases}$$

۴۰. الف) A و B و C با هم اتفاق بیفتند.

$$(A \cap B) \cap C$$

ب) A یا B اتفاق بیفتد ولی C رخ ندهد.

$$(A \cup B) - C$$

۴۱. الف)

$$S = \{۱,۲,۳,\cdots,۷\}$$

ب)

$$A = \{۵\}$$

پ)

$$B = \{۲,۳,۵,۷\}$$

ت)

$$A \cup B = \{۲,۳,۵,۷\}$$

۴۲.

پرتاب سه بار یک تاس: $n(S) = \underbrace{۶}_{\text{پرتاب اول}} \times \underbrace{۶}_{\text{پرتاب دوم}} \times \underbrace{۶}_{\text{پرتاب سوم}}$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 57 of 132

پرتاب سه سکه: $n(S) = \underbrace{۲}_{\text{سکه اول}} \times \underbrace{۲}_{\text{سکه دوم}} \times \underbrace{۲}_{\text{سکه سوم}}$

$$\frac{n(S)}{\text{سه بار تاس}} = \frac{۶^{۳} \times ۶^{۳} \times ۶^{۳}}{۲ \times ۲ \times ۲} = ۲۷$$
$$\frac{n(S)}{\text{سه سکه}}$$

۴۳ . فرض کنیم x سیب سالم باشد:

$$\underbrace{P(A)}_{\text{هر سه سالم}} = \frac{۷}{۲۴} \Rightarrow \frac{\binom{x}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۷}{۲۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x(x-۱)(x-۲)}{۳!}}{\frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳!}} = \frac{۷}{۲۴} \Rightarrow \frac{x(x-۱)(x-۲)}{۱۰ \times ۹ \times ۸} = \frac{۷}{۲۴}$$

$$\Rightarrow x(x-۱)(x-۲) = \frac{۱۰ \times ۹^{۳} \times ۸ \times ۷}{۲۴} = ۱۰ \times ۳ \times ۷ = ۵ \times \underbrace{۲ \times ۳}_{۶} \times ۷$$

$$\Rightarrow x(x-۱)(x-۲) = ۷ \times ۶ \times ۵ \Rightarrow x = ۷$$

۴۴ . الف)

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹^{۳} \times ۸^{۴} \times ۷}{۳ \times ۲} = ۸۴$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{هر سه مثبت}} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{هر سه ممتنع}} = ۱ + ۴ = ۵$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۸۴}$$

ب)

$$n(B) = \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو نفر رای مثبت}} \overset{\text{و}}{\times} \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{یک نفر رای منفی}} = ۳ \times ۲ = ۶$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۸۴} = \frac{۱}{۱۴}$$

۴۵ . الف)

$$n(S) = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱ \times ۱۰^{۵} \times ۹^{۳}}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۶۵$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 59 of 132

$$n(A) = \underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{هر سه نشانه‌دار}} = \frac{۷ \times \cancel{۶} \times ۵}{\cancel{۳ \times ۲} \times ۱} = ۳۵$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۵}{۱۳۵} = \frac{۷}{۳۳}$$

ب)

$$n(B) = \underbrace{\binom{۷}{۲}}_{\text{دوتا نشانه‌دار}} \overset{\text{و}}{\times} \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یکی بدون نشانه}} = \frac{۷ \times \overset{۳}{\cancel{۶}}}{\cancel{۲}} \times ۴ = ۸۴$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۸۴}{۱۶۵} = \frac{۲۸}{۵۵}$$

۴۶.

$$n(S) = ۶!$$

میله‌های غیر اول ۱, ۴, ۶ می‌باشد و مکان‌های زوج ۲,۴,۶ می‌باشد که ۳! جابه‌جایی دارند و اعداد اول ۲, ۳, ۵ نیز ۳! جابه‌جایی دارند پس:

$$n(A) = ۳! \times ۳!$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۳!}{۶!} = \frac{\cancel{۳ \times ۲} \times ۱ \times \cancel{۳!}}{\cancel{۶} \times ۵ \times ۴ \times \cancel{۳!}} = \frac{۱}{۲۰}$$

۴۷.

$$S = \{۱, ۲, \cdots, ۸\} \Rightarrow n(S) = ۸$$

الف)

$$A = \underbrace{\{۲, ۳, ۵, ۷\}}_{\text{اعداد اول}} \rightarrow n(A) = ۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

ب)

$$B = \underbrace{\{۱, ۳, ۵, ۷, ۲\}}_{\text{عدد اول یا فرد}} \Rightarrow n(B) = ۵ \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۵}{۸}$$

پ)

$$C = \underbrace{\{۳, ۶\}}_{\text{مضرب ۳}} \Rightarrow n(C) = ۲ \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

۴۸. الف)

$$n(S) = \binom{۱۳}{۳} = \frac{۱۳ \times \overset{۲}{\cancel{۱۲}} \times ۱۱}{\cancel{۳ \times ۲} \times ۱} = ۲۸۶$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{۳ سالم}} = \frac{۷ \times \cancel{۶} \times ۵}{\cancel{۳ \times ۲} \times ۱} = ۳۵ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S} = \frac{۳۵}{۲۸۶}$$

ب)

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 61 of 132

$$n(B) = \underset{\text{دوتا سالم}}{\binom{۷}{۲}} \overset{\text{و}}{\times} \underset{\text{یکی لکه‌دار}}{\binom{۶}{۱}} = ۲۱ \times ۶ = ۱۲۶$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۱۲۶}{۲۸۶} = \frac{۶۳}{۱۴۳}$$

پ)

$$n(C) = \underset{\text{هر سه سالم}}{\binom{۷}{۳}} \overset{\text{یا}}{+} \underset{\text{دوتا سالم}}{\binom{۷}{۲}} \times \underset{\text{یکی لکه‌دار}}{\binom{۶}{۱}} = ۳۵ + \overset{۱۲۶}{\cancel{۲۱ \times ۶}} = ۱۶۱$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۱۶۱}{۲۸۶}$$

۴۹ . الف) در پرتاب دو تاس کل حالات به‌صورت زیر است:

$$S = \{(۱,۱), \cdots, (۱,۶), (۲,۱), \cdots, (۲,۶), \cdots, (۶,۱), \cdots, (۶,۶)\}$$

که ۳۶ حالت دارد. پس $n(S) = ۳۶$

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

پس مجموع دو تاس اگر ۷ باشد، ۶ حالت دارد که از همه شانس بیشتری دارد. پس شانس برنده شدن شمارهٔ ۷ از همه بیشتر است.

ب) ولی دو شمارهٔ ۲ و ۱۲ هر کدام فقط یک حالت دارند، پس کمترین شانس را دارند.

۵۰ .

الف)

$$n(S) = ۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲ = ۱۲^۵$$

هر ۵ نفر در ماه خرداد متولد شده باشند: $n(A) = ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۱۲^۵}$$

ب) نفر اول ۱۲ انتخاب دارد اما نفرات بعدی باید همان ماه نفر اول باشند.

هر ۵ نفر یک ماه خاص: $n(B) = \underbrace{۱۲}_{\text{نفر اول}} \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱۲$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۱۲^۵} = \frac{۱}{۱۲^۴}$$

ج)

هیچ دو نفری یک ماه نباشد. (ماه همه متفاوت باشد): $n(C) = ۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{\cancel{۱۲} \times ۱۱ \times \overset{۵}{\cancel{۱۰}} \times \cancel{۹} \times \cancel{۸}}{\cancel{۱۲} \times ۱۲ \times ۱۲ \times \cancel{۱۲} \times \cancel{۱۲}} = \frac{۵۵}{۱۴۴}$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 63 of 132

۵۱ .

تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با:

$n(S) = ۸ \times ۸ = ۶۴$

اعضای پیشامد موردنظر برابر اعداد اول دو رقمی کوچک‌تر از ۶۰ است. بنابراین:

$$A = \{۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷, ۵۳, ۵۹\} \Rightarrow n(A) = ۱۳ \Rightarrow P(A) = \frac{۱۳}{۶۴}$$

۵۲ .

ابتدا تعداد کل اعداد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = \underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۳۶۰$$

تعداد اعضای پیشامد موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$n(A) = \underset{\text{فرد}}{\underline{۴}} \times \underline{۲} \times \underline{۱} \times \underset{\text{فرد}}{\underline{۳}} = ۲۴$$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{۲۴}{۳۶۰} = \frac{۱}{۱۵}$$

۵۳ . الف)

$$S = \{(ر, ۱), (ر, ۲), \cdots (ر, ۶), (پ, ۱), \cdots (پ, ۶)\}$$
$$\Rightarrow n(S) = ۱۲$$

تاس زوج باشد: $A = \{(ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶), (پ, ۲), (پ, ۴), (پ, ۶)\}$

$$\Rightarrow n(A) = ۶ \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

ب)

تاس زوج و سکه رو: $B = \{(ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶)\} \Rightarrow n(B) = ۳$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

۵۴ . الف)

$$n(S) = \binom{۱۲}{۲} = \frac{\overset{۶}{\cancel{۱۲}} \times ۱۱}{۲ \times ۱} = ۶۶$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{۹}{۲}}_{\text{هر دو سالم}} = \frac{۹ \times \overset{۴}{\cancel{۸}}}{\cancel{۲} \times ۱} = ۳۶$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۶}{۶۶} = \frac{۶}{۱۱}$$

ب)

$$n(B) = \underset{\text{یکی سالم}}{\binom{۹}{۱}} \overset{\text{و}}{\times} \underset{\text{یکی ناسالم}}{\binom{۳}{۱}} = ۹ \times ۳$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 65 of 132

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۹ \times \cancel{۴}}{\cancel{۶۶}_{۲۲}} = \frac{۹}{۲۲}$$

۵۵ . الف)

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰ \times \cancel{۹}^{۳} \times \cancel{۸}^{۴}}{\cancel{۳} \times \cancel{۲} \times ۱} = ۱۲۰$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{هر سه زن}} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{هر سه مرد}} = ۳۵ + ۱ = ۳۶$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۶}{۱۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

ب)

$$n(B) = \underbrace{\binom{۷}{۲}}_{\text{دو تا زن}} \times \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک مرد}} = ۲۱ \times ۳ = ۶۳$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶۳}{۱۲۰} = \frac{۲۱}{۴۰}$$

۵۶ .

ابتدا برای محاسبهٔ $n(S)$، ۳ نفر را از بین ۶ نفر انتخاب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳! \times ۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۰$$

برای آنکه در ۳ نفر انتخاب‌شده هیچ دو نفری برادر دو قلو نباشند، از هر گروه ۱ نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$n(A) = \binom{۲}{۱} \times \binom{۲}{۱} \times \binom{۲}{۱} = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۸}{۲۰} = \frac{۲}{۵}$$

۵۷ .

ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد اعضای پیشامد خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{۴ + ۶ + ۲}{۳} = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۹! \times ۳!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۲۰$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{۶}{۳}}_{\text{۳ مهره قرمز}} + \underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{۳ مهره آبی}} = \frac{۶!}{۳! \times ۳!} + \frac{۴!}{۱! \times ۳!} = ۲۰ + ۴ = ۲۴$$

دقت کنید که ۳ مهرهٔ سبز نداریم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۴}{۲۲۰} = \frac{۶}{۵۵}$$

۵۸ .

الف)

کل پیراهن‌ها $۵ + ۴ + ۳ = ۱۲$

$$n(S) = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۲۰$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 67 of 132

$$n(A) = \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{هرسه قرمز}} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{هرسه آبی}} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{هرسه زرد}} = ۱۰ + ۴ + ۱ = ۱۵$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۱۵}{۲۲۰} = \frac{۳}{۴۴}$$

ب) ابتدا متمم پیشامد یعنی احتمال آن‌که هر ۳ پیراهن آبی باشد را به دست می‌آوریم:

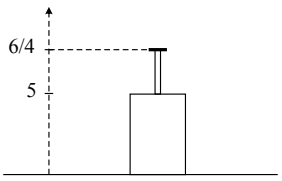
$$n(B) = \underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{هر سه آبی}} = ۴ \Rightarrow P(B) = \frac{۴}{۲۲۰} = \frac{۱}{۵۵}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(B')}_{\text{هر سه آبی نباشد}} = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۱}{۵۵} = \frac{۵۴}{۵۵}$$

۵۹ .

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{۵}{۱۲} \Rightarrow \frac{P(A)}{۱ - P(A)} = \frac{۵}{۱۲} \Rightarrow ۱۲P(A) = ۵ - ۵P(A) \Rightarrow ۱۷P(A) = ۵ \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۱۷}$$

۶۰ .



$$\text{میانگین } \overline{x} = \frac{۵ + ۶ + ۴ + ۷ + ۳}{۵} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$$

$$\text{انحراف معیار } \sigma = \sqrt{\frac{(۵-۵)^۲ + (۶-۵)^۲ + (۴-۵)^۲ + (۷-۵)^۲ + (۳-۵)^۲}{۵}}$$

$$= \sqrt{\frac{۰ + ۱ + ۱ + ۴ + ۴}{۵}} = \sqrt{۲} \simeq ۱/۴$$

۶۱ .

با توجه به شکل چون کل دایره ۳۶۰° است، پس زاویهٔ گروه A برابر ۶۰° است زیرا:

$$\text{زاویهٔ گروه } A = ۳۶۰^\circ - (۱۲۰^\circ + ۱۰۰^\circ + ۸۰^\circ) = ۶۰^\circ$$

$$\text{زاویهٔ گروه } A = \frac{\text{تعداد افراد گروه A}}{\text{تعداد کل}} \times ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ = \frac{\text{تعداد گروه A}}{\text{تعداد کل}} \times ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۶} = \frac{\text{تعداد گروه A}}{۳۰} \Rightarrow \text{تعداد گروه A} = \frac{۳۰}{۶} = ۵$$

۶۲ . برای مثال یک مدرسه سال قبل یک قبولی و امسال دو قبولی در دانشگاه می‌دهد و گزارش می‌کند که قبولی‌ها ۱۰۰ درصد افزایش یافته است ولی مدرسه دیگر از ۲۰ قبولی به ۳۰ قبولی می‌رسد و گزارش می‌کند قبولی ما ۵۰ درصد افزایش یافته است پس در یک نگاه بدون گزارش تعداد مدرسه اول بهتر است ولی با گزارش تعداد متوجه می‌شویم مدرسه دوم بهتر است.

۶۳ .

با توجه به نمودار $\overline{x}$ برابر ۱۵ و σ انحراف معیار برابر ۱۵ − ۱۷ یعنی ۲ است، پس داریم:

اختلاف میانگین از انحراف معیار = ۱۵ − ۲ = ۱۳

۶۴ .

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 69 of 132

ترتیب گام	نام گام	توضیح گام
۲	طرح و برنامه‌ریزی	راهی برای رسیدن به پاسخ پیدا می‌کنیم به نمونه‌گیری شیوهٔ اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم.
۱	بیان مسئله	ابتدا مسئله‌ای که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری بیان می‌کنیم.
۳	گردآوری و پاک‌سازی	به گردآوری داده‌ها می‌پردازیم و تا حد ممکن از درستی آن‌ها مطمئن می‌شویم.
۵	بحث و نتیجه‌گیری	به تفسیر نتایج بدست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش آماری پیدا می‌کنیم
۴	تحلیل داده‌ها	با استفاده از معیارها و نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم نتایج را مشابه با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم.

۶۵ .

الف نادرست

ب نادرست

پ درست

ت درست

۶۶ . به صفر نزدیک می‌شود

۶۷ . دورتر شوند.

۶۸ . الف) بیان مسئله

ب) طرح و برنامه‌ریزی

پ) گردآوری داده‌ها و پاک‌سازی

۶۹ . الف) تحلیل داده‌ها

ب) بحث و نتیجه‌گیری

۷۰ . گام اول: بیان مسئله است.

مسئله‌ای که در دنیای واقعی به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم و با توجه به اهمیت موضوع و بودجه و زمان و سایر شرایط، جامعه آماری را محدود می‌کنیم.

۷۱ . گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی است.

راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم به نمونه‌گیری شیوه اندازه‌گیری متغیر و نمونه‌گیری و چگونگی تفسیر نتایج می‌اندیشیم.

۷۲ . گام آخر بحث و نتیجه‌گیری است.

در گام آخر به تفسیر نتایج بدست آمده می‌پردازیم و پاسخی برای پرسش اصلی بدست می‌آوریم.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 71 of 132

۷۳ . مهم‌ترین یا اولین

۷۴ . اولین قدم

۷۵ . کیفی - کمی

۷۶ . در ردیف ۳ نمره ۵۱ اشتباه وارد شده است.

۷۷ . ابتدا میانگین را بدست می‌آوریم

$$\bar{x} = \frac{۵ + ۷ + ۳ + ۸ + ۲}{۵} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$$

$$\text{انحراف معیار } \sigma = \sqrt{\frac{(۵-۵)^۲ + (۷-۵)^۲ + (۳-۵)^۲ + (۸-۵)^۲ + (۲-۵)^۲}{۵}} = \sqrt{\frac{۰ + ۴ + ۴ + ۹ + ۹}{۵}} = \sqrt{\frac{۲۶}{۵}}$$

۷۸ . با توجه به شکل $Q_۱ = ۵$ و $Q_۳ = ۱۳$ می‌باشد. بنابراین:

$$IQR = Q_۳ - Q_۱ = ۱۳ - ۵ = ۸$$

۷۹ . ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

میانه
↑
۱۷ و ۱۶ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲

پس دامنه تغییرات برابر است با:

دامنه تغییرات $R = max - min = ۱۷ - ۲ = ۱۵$

و میانه نیز ۵ است.

۸۰ . گام قبل گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها است.

گام بعد بحث و نتیجه‌گیری است.

۸۱ . در گام تحلیل داده‌ها به سراغ نمودارها می‌رویم که بعد از گام گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها می‌باشد.

۸۲ . استفاده از شاخص‌ها و نمودارها در گام چهارم تحلیل داده‌ها است که اشتباه در آن باعث اشتباه در گام پنجم یعنی بحث و نتیجه‌گیری می‌شود.

۸۳ .

با توجه به نمودار (ارتفاع مستطیل) میانگین برابر ۵ است. بنابراین:

$$\bar{x} = \frac{۳ + a + a + ۱ + ۶ + ۷}{۵} \Rightarrow ۵ = \frac{۲a + ۱۷}{۵} \Rightarrow ۲a = ۲۵ - ۱۷ \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(۳-۵)^۲ + (۴-۵)^۲ + (۵-۵)^۲ + (۶-۵)^۲ + (۷-۵)^۲}{۵}} = \sqrt{\frac{۱۰}{۵}} = \sqrt{۲} \Rightarrow b = ۵ + \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow a + b = ۴ + ۵ + \sqrt{۲} = ۹ + \sqrt{۲}$$

۸۴ .

الف نادرست

ب نادرست

پ

درست. با توجه به اینکه کمترین نمرهٔ مدرسهٔ (ب) برابر چارک اول مدرسهٔ (الف) است. پس به طور تقریبی می‌توان گفت که ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ (الف) در درس فلسفه نمره‌ای کمتر از همهٔ دانش‌آموزان مدرسه (ب) گرفته‌اند.

ت نادرست

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 73 of 132

۸۵ . الف) با توجه به جملات دنباله مشخص می‌شود که هر جمله ۲ برابر جملهٔ قبلی است، یعنی اگر هر جمله را در ۲ ضرب کنیم جملهٔ بعدی به دست می‌آید. بنابراین رابطهٔ بازگشتی به صورت زیر است:

$$a_{n+1} = ۲a_n \qquad (a_۱ = ۲)$$

ب) چون هر جمله از ۲ برابر کردن جملهٔ قبل به دست می‌آید، بنابراین رابطه به صورت ۲^n خواهد بود.

$$\left.\begin{array}{l} a_۱ = ۲^۱ \\ a_۲ = ۲^۲ \\ a_۳ = ۲^۳ \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = ۲^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

۸۶ . ابتدا جدول مقادیر n و a_n را تشکیل می‌دهیم:

n	۱	۲	۳	۴
a_n	-۱	۲	۵	۸

با توجه به دنبالهٔ $-۱, ۲, ۵, ۸, \cdots$ می‌توان فهمید جملات دنباله نسبت به جملهٔ قبلی خود ۳ واحد اضافه می‌شوند. بنابراین این دنباله به صورت $۳n + a$ است.

حال با جایگذاری $(n = ۱, a_۱ = -۱)$ در رابطهٔ $a_n = ۳n + a$ مقدار a را می‌یابیم:

$$a_n = ۳n + a \xrightarrow{n=۱} a_۱ = ۳(۱) + a \xrightarrow{a_۱ = -۱} -۱ = ۳ + a \Rightarrow a = -۴$$

بنابراین ضابطهٔ این دنباله به صورت $a_n = ۳n - ۴$ است.

۸۷ . با توجه به شکل در هر مرحله یک توپ توپر اضافه می‌شود و همچنین تعداد کل توپ‌ها در هر مرحله ۳ واحد اضافه می‌شود.

مرحله اول: $\frac{\text{ت.توپر}}{\text{ک.ل.ت.توپ‌ها}}\ \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۳\times۱+۲}$ — مرحله دوم: $\frac{۲}{۸} = \frac{۲}{۳\times۲+۲}$ — مرحله سوم: $\frac{۳}{۱۱} = \frac{۳}{۳\times۳+۲}$

بنابراین رابطهٔ نسبت توپ‌های رنگ شده به کل توپ‌ها در مرحلهٔ nام به صورت $\frac{n}{۳n+۲}$ است.

حال با مساوی قرار دادن $\frac{n}{۳n+۲}$ و $\frac{۱۱}{۳۵}$ مرحلهٔ موردنظر را می‌یابیم.

$$\frac{n}{۳n+۲} = \frac{۱۱}{۳۵} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۳۵n = ۳۳n + ۲۲ \Rightarrow ۲n = ۲۲ \Rightarrow n = ۱۱$$

مرحلهٔ یازدهم است.

۸۸ . با توجه به رابطهٔ دنباله، جملات ۱ تا ۱۰ را می‌یابیم.

$$a_n = (-۱)^{n+۱} \times (۱۱ - n)^۲ \begin{cases} \xrightarrow{n=۱} (-۱)^۲ \times (۱۱ - ۱)^۲ = ۱۰^۲ \\ \xrightarrow{n=۲} (-۱)^۳ \times (۱۱ - ۲)^۲ = -۹^۲ \\ \xrightarrow{n=۳} (-۱)^۴ \times (۱۱ - ۳)^۲ = ۸^۲ \\ \vdots \\ \xrightarrow{n=۱۰} (-۱)^{۱۱} \times (۱۱ - ۱۰)^۲ = -۱^۲ \end{cases}$$

مجموع ۱۰ جملهٔ اول به صورت مقابل است.

$$S_{۱۰} = \underbrace{۱۰^۲ - ۹^۲}_{\text{اتحاد مزدوج}} + \underbrace{۸^۲ - ۷^۲}_{\text{اتحاد مزدوج}} + \cdots + \underbrace{۲^۲ - ۱^۲}_{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$S_{۱۰} = (\cancel{۱۰ - ۹}^{۱})(\cancel{۱۰ - ۹}^{۱}) + (\cancel{۸ - ۷}^{۱})(۸ + ۷) + \cdots + (\cancel{۲ - ۱}^{۱})(۲ + ۱) = ۱۰ + ۹ + ۸ + ۷ + \cdots + ۲ + ۱$$

مجموع اعداد طبیعی کوچکتر مساوی n از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. (دنباله‌ای حسابی با $a_۱ = ۱$ و $d = ۱$)

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

بنابراین داریم:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 75 of 132

$$۱+۲+۳+\cdots+۱۰=\frac{۱۰(۱۰+۱)}{۲}=\frac{۱۰\times ۱۱}{۲}=۵۵$$

۸۹ . ابتدا به کمک چند جملهٔ اول دنباله، الگوی جملات دنباله و صد جملهٔ اول دنباله را به‌دست می‌آوریم:

$$a_n=(-۱)^n\frac{n}{n+۱}\begin{cases}\xrightarrow{n=۱} -۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۲}\\ \xrightarrow{n=۲} ۱\times\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}\\ \xrightarrow{n=۳} -۱\times\frac{۳}{۴}=\frac{-۳}{۴}\end{cases}$$

بنابراین جملات این دنباله به صورت $\frac{-۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{-۳}{۴},\frac{۴}{۵},\frac{-۵}{۶},\cdots$ هستند، حال حاصل‌ضرب ۱۰۰ جملهٔ اول دنباله را می‌یابیم:

$$\frac{-۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{-۳}{۴}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{-۵}{۶}\times\cdots\times\frac{-۹۹}{۱۰۰}\times\frac{۱۰۰}{۱۰۱}$$

صورت هر کسر با مخرج کسر قبلی ساده می‌شود و فقط صورت کسر اول و مخرج کسر آخر باقی می‌ماند، همچنین تعداد جملات منفی ۵۰ تا است (نیمی از جملات) که حاصل‌ضرب ۵۰ منفی در هم مثبت می‌شود:

$$\frac{-۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{-۳}{۴}\times\cdots\times\frac{-۹۹}{۱۰۰}\times\frac{۱۰۰}{۱۰۱}=+\frac{۱}{۱۰۱}$$

۹۰ . اگر جمله‌ای مثبت باشد باید از صفر بزرگ‌تر باشد، پس با رابطهٔ $a_n>۰$ مسأله را حل می‌کنیم.

$$a_n>۰\Rightarrow\frac{n-۲۰}{۲n+۱}+\frac{۱}{۱۰۰}>۰\Rightarrow\frac{n-۲۰}{۲n+۱}>\frac{-۱}{۱۰۰}$$

طرفین را در $۲n+۱$ ضرب می‌کنیم:

$$n-۲۰>\frac{-۲n-۱}{۱۰۰}$$

حال طرفین را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم:

$$۱۰۰n-۲۰۰۰>-۲n-۱\Rightarrow ۱۰۲n>۱۹۹۹\Rightarrow n>\frac{۱۹۹۹}{۱۰۲}\Rightarrow n>۱۹/۵۹$$

چون n عدد طبیعی است، بنابراین اولین عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۹/۵۹ عدد ۲۰ است، پس اولین جملهٔ مثبت دنباله، جملهٔ بیستم است.

۹۱ . با توجه به رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۱}=۲a_n+۳$ برای یافتن رابطه بین جملات نهم و دهم به جای n عدد ۹ را قرار می‌دهیم.

$$a_{n+۱}=۲a_n+۳\xrightarrow{n=۹}a_{۱۰}=۲a_۹+۳$$

با توجه به اینکه جملهٔ دهم ۴۹ است، داریم:

$$۴۹=۲a_۹+۳\Rightarrow ۲a_۹=۴۶\Rightarrow a_۹=۲۳$$

و همچنین اگر به جای n در رابطه بازگشتی عدد ۸ قرار دهیم رابطهٔ جملات نهم و هشتم به دست می‌آید:

$$a_{n+۱}=۲a_n+۳\xrightarrow{n=۸}a_۹=۲a_۸+۳$$

می‌دانیم $a_۹=۲۳$ می‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$۲۳=۲a_۸+۳\Rightarrow ۲a_۸=۲۰\Rightarrow a_۸=۱۰$$

۹۲ . ابتدا جملهٔ چهارم دنباله a_n را به دست می‌آوریم:

$$a_n=\frac{n^۲+n}{n-۳}\xrightarrow{n=۴}a_۴=\frac{۴^۲+۴}{۴-۳}=\frac{۲۰}{۱}=۲۰$$

جملهٔ دیگری نیز برابر جملهٔ چهارم، است بنابراین $\frac{n^۲+n}{n-۳}$ را برابر ۲۰ قرار می‌دهیم تا شمارهٔ آن جمله (n) را بیابیم.

$$\frac{n^۲+n}{n-۳}=۲۰\Rightarrow n^۲+n=۲۰n-۶۰\Rightarrow n^۲-۱۹n+۶۰=۰$$

معادله را با تجزیه حل می‌کنیم.

$$(n-۱۵)(n-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}n-۱۵=۰\Rightarrow n=۱۵\\ n-۴=۰\Rightarrow n=۴\end{cases}$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 77 of 132

بنابراین جملهٔ ۱۵اُم نیز ۲۰ است. و با جملهٔ چهارم برابر است.

۹۳ . با نوشتن جملات اول تا ۲۴اُم، مجموع آن‌ها را به دست می‌آوریم.

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{n=1} a_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \\ \xrightarrow{n=2} a_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \xrightarrow{n=3} a_3 = \sqrt{4} - \sqrt{2} \\ \vdots \\ \xrightarrow{n=24} a_{24} = \sqrt{25} - \sqrt{24} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24} =$$

$$(\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}) + (\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}) + (\cancel{\sqrt{4}} - \cancel{\sqrt{3}}) + \cdots + (\cancel{\sqrt{4}} - \cancel{\sqrt{3}}) + (\sqrt{25} - \cancel{\sqrt{24}})$$

$$= \sqrt{25} - \sqrt{1} = 5 - 1 = 4$$

۹۴ . با جای‌گذاری اعداد ۵, ۴, ۳, ۲, ۱ در جملهٔ عمومی دنباله، جملات را می‌یابیم.

$$a_n = \left[\frac{n+1}{2}\right] \left.\begin{array}{l} \xrightarrow{n=1} a_1 = \left[\frac{1+1}{2}\right] = [1] = 1 \\ \xrightarrow{n=2} a_2 = \left[\frac{2+1}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1 \\ \xrightarrow{n=3} a_3 = \left[\frac{3+1}{2}\right] = \left[\frac{4}{2}\right] = 2 \\ \xrightarrow{n=4} a_4 = \left[\frac{4+1}{2}\right] = \left[\frac{5}{2}\right] = 2 \\ \xrightarrow{n=5} a_5 = \left[\frac{5+1}{2}\right] - \left[\frac{6}{2}\right] = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9$$

۹۵ . ابتدا باید جملهٔ عمومی دنباله را (رابطهٔ تابعی دنباله) با استفاده از جملات به دست آوریم:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \left.\begin{array}{l} \xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!} \\ \xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!} \\ \xrightarrow{n=3} a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!} \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$$

حال جملاتی که از $\frac{1}{300}$ بزرگتر هستند را می‌یابیم.

$$a_n > \frac{1}{300} \Rightarrow \frac{1}{n!} > \frac{1}{300}$$

طرفین را وارون می‌کنیم علامت نامساوی تغییر می‌کند:

$$n! < 300 \xrightarrow[6!=720]{5!=120} n \leq 5 \Rightarrow n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

۵ جمله بزرگتر از $\frac{1}{300}$ داریم:

۹۶ . ابتدا به کمک چند جملهٔ اول دنباله، مقدار ۲۰ جمله از دنباله را می‌یابیم:

$$a_n = \left[\frac{2n+3}{n+1}\right] \left\{\begin{array}{l} \xrightarrow{n=1} a_1 = \left[\frac{5}{2}\right] = 2 \\ \xrightarrow{n=2} a_2 = \left[\frac{7}{3}\right] = 2 \\ \xrightarrow{n=3} a_3 = \left[\frac{9}{4}\right] = 2 \end{array}\right.$$

بنابراین تمام جملات این دنباله همگی برابر ۲ هستند. بنابراین مجموع ۲۰ جملهٔ اول این دنباله برابر است با:

$$20 \times 2 = 40$$

۹۷ . در جملهٔ عمومی به جای n اعداد ۴ و ۵ را قرار می‌دهیم تا جملات چهارم و پنجم را بیابیم.

$$a_n = \frac{(n+1)!}{2n+1} \xrightarrow{n=4} a_4 = \frac{(4+1)!}{2 \times (4) + 1} = \frac{5!}{9} = \frac{120}{9} = \frac{40}{3}$$

$$\xrightarrow{n=5} a_5 = \frac{(5+1)!}{2 \times (5) + 1} = \frac{6!}{11} = \frac{720}{11}$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 79 of 132

حال مجموع جملات چهارم و پنجم را به دست می‌آوریم:

$$a_۴ + a_۵ = \frac{۴۰}{۳} + \frac{۷۲۰}{۱۱} = \frac{۴۴۰ + ۲۱۶۰}{۳۳} = \frac{۲۶۰۰}{۳۳}$$

. ۹۸

جملهٔ عمومی را برابر $\frac{۱}{۸}$ قرار می‌دهیم تا n (شماره جمله) را بیابیم:

$$a_n = \frac{n}{n^۲ + ۷} = \frac{۱}{۸} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} n^۲ + ۷ = ۸n \Rightarrow n^۲ - ۸n + ۷ = ۰$$

عبارت درجهٔ دوم را با کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$\Rightarrow (n-۷)(n-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n - ۷ = ۰ \Rightarrow n = ۷ \\ n - ۱ = ۰ \Rightarrow n = ۱ \end{cases}$$

. ۹۹

برای به‌دست آوردن تعداد جملات منفی $a_n < ۰$ قرار می‌دهیم:

$$a_n < ۰ \Rightarrow \frac{n+۳}{۵n - ۴۷} < ۰$$

می‌دانیم چون n عدد طبیعی است، پس $n + ۳$ همواره مثبت است؛ بنابراین مخرج کسر باید منفی باشد تا حاصل منفی شود.

$$۵n - ۴۷ < ۰ \Rightarrow ۵n < ۴۷ \Rightarrow n < \frac{۴۷}{۵} \Rightarrow n < ۹٫۴$$

اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۹٫۴ شامل $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$ هستند. بنابراین ۹ جملهٔ منفی دارد.

. ۱۰۰

این دنباله، یک دنبالهٔ دو ضابطه‌ای است، که برای جملات با شماره فرد یک رابطه و برای جملات با شمارهٔ زوج رابطهٔ دیگری داریم:

در جملات فرد داریم: $a_۱ = ۱, a_۳ = ۲, a_۵ = ۳, \cdots$

در جملات زوج داریم: $a_۲ = ۱, a_۴ = \frac{۱}{۲}, a_۶ = \frac{۱}{۳}, \cdots$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{n+۱}{۲}, & n \text{ فرد} \\ \frac{۱}{\frac{n}{۲}}, & n \text{ زوج} \end{cases} \Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{n+۱}{۲}, & n \text{ فرد} \\ \frac{۲}{n}, & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{۲۱} - a_{۲۰} = (\frac{۲۱+۱}{۲}) - \frac{۲}{۲۰} = ۱۱ - \frac{۱}{۱۰} = ۱۰/۹$$

. ۱۰۱

می‌دانیم در دنبالهٔ فیبوناچی هر جمله برابر مجموع دو جملهٔ قبلی است، بنابراین داریم:

$$x, ۲۵۸۴, ۴۱۸۱, y \Rightarrow ۴۱۸۱ = ۲۵۸۴ + x \Rightarrow x = ۴۱۸۱ - ۲۵۸۴ = ۱۵۹۷ \Rightarrow y = ۲۵۸۴ + ۴۱۸۱ = ۶۷۶۵$$

حال حاصل $x + y$ را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow x + y = ۱۵۹۷ + ۶۷۶۵ = ۸۳۶۲$$

. ۱۰۲

با توجه به مثلث خیام‌پاسکال داریم:

a1 ← 1
a2 ← 1 1
a3 ← 1 2 1
a4 ← 1 3 3 1
a5 ← 1 4 6 4 1
a6 ← 1 5 10 10 5 1
a7 ← 1 6 15 20 15 6 1

مجموع اعداد در جملهٔ ششم برابر:

$$a_۶ = ۱ + ۵ + ۱۰ + ۱۰ + ۵ + ۱ = ۳۲$$

مجموع اعداد در جملهٔ هفتم برابر:

$$a_۷ = ۱ + ۶ + ۱۵ + ۲۰ + ۱۵ + ۶ + ۱ = ۶۴$$

بنابراین مجموع جملات شش و هفت برابر:

$$a_۶ + a_۷ = ۳۲ + ۶۴ = ۹۶$$

۱۰۳ .

با استفاده از رابطهٔ بازگشتی داده‌شده، جملات دوم و سوم را به‌دست می‌آوریم:

$$n = ۱ \Rightarrow a_۲ = \frac{۱}{۲}(a_۱ + \frac{۷}{a_۱}) = \frac{۱}{۲}(۷ + \frac{۷}{۷}) = \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴$$

$$n = ۲ \Rightarrow a_۳ = \frac{۱}{۲}(a_۲ + \frac{۷}{a_۲}) = \frac{۱}{۲}(۴ + \frac{۷}{۴}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۳}{۴} = \frac{۲۳}{۸}$$

۱۰۴ . فرمول کلی جملهٔ عمومی دنباله‌ای به صورت زیر است:

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)d = a_۱ + nd - d$$

در نتیجه ضریب n اختلاف مشترک و جملهٔ فاقد n برابر $a_۱ - d$ است.

بنابراین در $a_n = ۳n - ۵$ داریم:

$۳n = dn \Rightarrow d = ۳$ (اختلاف مشترک)

$a_۱ - d = -۵ \Rightarrow a_۱ - ۳ = -۵ \Rightarrow a_۱ = -۵ + ۳ = -۲$ (جملهٔ اول)

۱۰۵ . برای به دست آوردن اختلاف مشترک، هنگامی که m واسطه میان اعدادمان قرار می‌دهیم برابر است با:

$$d = \frac{b - a}{m + ۱}$$

برای کاهشی بودن دنباله باید $a > b$ باشد.

$$a, \underbrace{\cdots\cdots}_{m}, b$$

$$d = \frac{b - a}{m + ۱} = \frac{-۷ - ۲۳}{۵ + ۱} = \frac{-۳۰}{۶} = -۵ \quad , \quad a_۱ = ۲۳$$

در نتیجه جملهٔ عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = a_۱ + (n - ۱)d$$

$$= ۲۳ + (n - ۱)(-۵) = ۲۳ + ۵ - ۵n = -۵n + ۲۸ \Rightarrow a_n = -۵n + ۲۸$$

پس $a_۳$ برابر است با:

$$n = ۳ \Rightarrow a_n = -۵n + ۲۸ = -۵(۳) + ۲۸ = -۱۵ + ۲۸ = ۱۳$$

۱۰۶ . ضریب n در جملهٔ عمومی شیب نمودار را نشان می‌دهد که مثبت بودن شیب به منزلهٔ افزایشی بودن و منفی بودن شیب به منزلهٔ کاهشی بودن دنباله و صفر بودن شیب به منزلهٔ ثابت بودن دنباله است.

$$a_n = \frac{۱}{۴} + \underbrace{(x + ۳)}_{\text{شیب}}n$$

$x + ۳ > ۰ \Rightarrow x > -۳ \Rightarrow$ دنباله روند افزایشی دارد.

$x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow$ دنباله روند ثابتی را طی می‌کند.

$x + ۳ < ۰ \Rightarrow x < -۳ \Rightarrow$ دنباله روند کاهشی دارد.

۱۰۷ . برای به دست آوردن جملهٔ ۳۲اُم، در ابتدا لازم است جملهٔ عمومی را به دست آوریم:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 83 of 132

جملهٔ اول $a_۱ = ۴$

$d = a_{n+۱} - a_n \Rightarrow d = ۱۸ - ۱۱ = ۷$

جملهٔ عمومی برابر است با:

$a_n = a_۱ + (n-۱)d$

$a_n = ۴ + (n-۱)۷ \Rightarrow a_n = ۴ + ۷n - ۷ \Rightarrow a_n = ۷n - ۳$

اکنون برای به دست آوردن جملهٔ ۳۲اُم، $n = ۳۲$ را قرار می‌دهیم:

$a_n = ۷n - ۳ \xrightarrow{n=۳۲} a_{۳۲} = ۷ \times (۳۲) - ۳ = ۲۲۴ - ۳ = ۲۲۱$

جملهٔ ۳۲اُم برابر است با:

$a_{۳۲} = ۲۲۱$

۱۰۸ . جملهٔ عمومی دنباله ذکر شده برابر است با:

$a_n = ۷n - ۳$

در نتیجه برای به دست آوردن جملهٔ $(۳n-۲)$اُم کافیست به‌جای n، عبارت $(۳n-۲)$ را قرار دهیم:

$a_n = ۷n - ۳ \xrightarrow{\text{جمله } ۳n-۲} a_{(۳n-۲)} = ۷(۳n-۲) - ۳$

$\Rightarrow a_{(۳n-۲)} = ۲۱n - ۱۴ - ۳ \Rightarrow a_{(۳n-۲)} = ۲۱n - ۱۷$

پس جملهٔ $(۳n-۲)$اُم برابر است با: $(۲۱n-۱۷)$.

۱۰۹ . در ابتدا باید جملهٔ پنجاه و چهارم و هفتاد و سوم را با استفاده از جملهٔ عمومی به دست آوریم:

$a_n = ۷n - ۳$

$\xrightarrow{n=۵۴} a_{۵۴} = ۷ \times (۵۴) - ۳ = ۳۷۸ - ۳ = ۳۷۵$

$\xrightarrow{n=۷۳} a_{۷۳} = ۷ \times (۷۳) - ۳ = ۵۱۱ - ۳ = ۵۰۸$

اگر واسطهٔ حسابی بین دو جمله را x بنامیم، داریم:

$x = \frac{a_{۵۴} + a_{۷۳}}{۲}$

$\Rightarrow x = \frac{۳۷۵ + ۵۰۸}{۲} = \frac{۸۸۳}{۲} = ۴۴۱٫۵$

واسطهٔ حسابی بین جملات پنجاه و چهارم و هفتاد و سوم برابر است با: ۴۴۱٫۵.

۱۱۰ . الف) دنباله $۱, ۲, ۳, \cdots$، دنباله‌ای حسابی با $a_۱ = ۱$ و $d = ۱$ است، بنابراین مجموع جملات داده شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$

$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n, \quad n = n \ , \ a_۱ = ۱ \ , \ d = ۱$

$S_n = \frac{n}{۲}(۲ \times (۱) + (n-۱)۱) = \frac{n}{۲}(۲ + (n-۱)) = \frac{n}{۲}(n+۱) = \frac{n^۲ + n}{۲}$

ب) دنبالهٔ $۱, ۳, ۵, \cdots$ دنباله‌ای حسابی با $a_۱ = ۱$ و $d = ۲$ است. بنابراین:

$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + ۲n - ۱$

$n = n \ , \ a_۱ = ۱ \ , \ d = ۲$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(۲(۱) + (n-۱)۲) = \frac{n}{۲}(۲ + (n-۱)۲) = \frac{n}{۲}(\cancel{۲} + ۲n - \cancel{۲}) = \frac{n}{۲} \times ۲n = n^۲$

۱۱۱ . ۲ درصد از حقوق اولیه را حساب می‌کنیم که همان اختلاف مشترک (d) دنبالهٔ حسابی است:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 85 of 132

$$۱,۰۰۰,۰\cancel{۰۰} \times \frac{۲}{۱\cancel{۰۰}} = ۲۰,۰۰۰$$

حقوق ماه اول: ۱۰۰۰۰۰۰، حقوق ماه دوم ۱۰۰۰۰۰۰ + ۲۰۰۰۰ = ...

$$۱,۰۰۰,۰۰۰ \quad , \quad ۱,۰۰۰,۰۰۰ + ۲۰,۰۰۰ \quad , \quad ۱,۰۰۰,۰۰۰ + ۲(۲۰,۰۰۰) \; , \; \cdots$$

$$a_۱ = ۱,۰۰۰,۰۰۰ \quad , \quad d = ۲۰,۰۰۰$$

مجموع حقوق دریافتی سالانهٔ وی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$n = ۱۲$ تعداد ماه‌های سال است.

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$S_{۱۲} = \frac{۱۲}{۲}(۲(۱,۰۰۰,۰۰۰) + (۱۲-۱)۲۰,۰۰۰) = ۶(۲,۰۰۰,۰۰۰ + (۱۱) \times ۲۰,۰۰۰)$$

$$= ۶(۲,۰۰۰,۰۰۰ + ۲۲۰,۰۰۰) = ۶ \times (۲,۲۲۰,۰۰۰) = ۱۳,۳۲۰,۰۰۰$$

مجموع حقوق دریافتی سالانهٔ وی (تومان) $S_{۱۲} = ۱۳,۳۲۰,۰۰۰$ است.

۱۱۲ .

$$۲۵, \cdots, ۴۰$$

به دلیل اینکه طول پله‌ها به طور یکنواخت تغییر می‌کند، پس اندازهٔ پله‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند که کمترین آن‌ها ۲۵ سانتی‌متر و بیش‌ترین آن‌ها ۴۰ سانتی‌متر است.

مجموع جملات در دنبالهٔ حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$

اکنون مجموع طول پله‌ها را داریم، کافیست با قرار دادن در فرمول S_n مقدار n را بدست آوریم:

نکته: ۵٫۸۵ متر برابر است با ۵۸۵ سانتی‌متر

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow ۵۸۵ = \frac{n}{۲}(۲۵ + ۴۰)$$

$$(۵۸۵) \times ۲ = ۶۵n$$

$$\Rightarrow ۶۵n = ۱۱۷۰ \Rightarrow n = \frac{۱۱۷۰}{۶۵} = ۱۸$$

تعداد کل پله‌ها برابر با ۱۸ است.

۱۱۳ . برای به دست آوردن مجموع جملات ابتدا باید اختلاف مشترک و جملهٔ اول را به دست آوریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m-n} \Rightarrow d = \frac{a_۶ - a_۳}{۶-۳} = \frac{۷٫۵-۶}{۶-۳} = \frac{۱٫۵}{۳} = ۰٫۵$$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow a_۳ = ۶ = a_۱ + ۲d \Rightarrow ۶ = a_۱ + ۲(۰٫۵)$$

$$۶ = a_۱ + ۱ \Rightarrow a_۱ = ۵$$

اکنون مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \Rightarrow S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲ \times (۵) + (۲۰-۱)۰٫۵) =$$

$$۱۰(۱۰ + (۱۹) \times (\frac{۱}{۲})) = ۱۰(\frac{۲۰}{۲} + \frac{۱۹}{۲}) = ۱۰(\frac{۳۹}{۲}) = \frac{۱۰ \times ۳۹}{۲} = ۵ \times ۳۹ = ۱۹۵$$

پس مجموع ۲۰ جملهٔ اول برابر است با:

$$S_{۲۰} = ۱۹۵$$

۱۱۴ . برای به دست آوردن مجموع جملات از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 87 of 132

$a_۱ = ۵, \quad d = ۱۲ - ۵ = ۷$

شماره جملهٔ $a_n = ۱۰۳$ و تعداد جملات را به‌دست می‌آوریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۵ + (n-۱) \times ۷ \Rightarrow ۱۰۳ = ۷n - ۲ \Rightarrow n = \frac{۱۰۵}{۷} = ۱۵$$

بنابراین مجموع ۱۵ جمله را می‌خواهیم حساب کنیم:

$$S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}(۲ \times (۵) + (\cancel{۱۵-۱}^{۱۴})۷)$$
$$\Rightarrow S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}(۱۰ + ۱۴ \times (۷)) = \frac{۱۵}{۲} \times (۱۰ + ۹۸) = \frac{۱۵}{۲} \times (۱۰۸) = ۱۵ \times ۵۴ = ۸۱۰$$

پس مجموع جملات برابر است با:

$S_{۱۵} = ۸۱۰$

۱۱۵ . باید دنبالهٔ اعداد سه رقمی مضرب ۷ را بنویسیم:

$$\underbrace{۱۰۵, ۱۱۲, \cdots, ۹۹۴}_{۷}$$

اکنون $a_۱ = ۱۰۵$ و $d = ۷$، کافیست با نوشتن جملهٔ عمومی n را به دست آوریم.

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۱۰۵ + (n-۱)۷ = ۱۰۵ + ۷n - ۷ = ۷n + ۹۸$$
$$a_n = ۹۹۴ \Rightarrow ۷n + ۹۸ = ۹۹۴ \Rightarrow ۷n = ۹۹۴ - ۹۸ = ۸۹۶$$
$$۷n = ۸۹۶ \Rightarrow n = \frac{۸۹۶}{۷} = ۱۲۸$$

اکنون با داشتن n می‌توان مجموع جملات را به دست آورد:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \Rightarrow S_{۱۲۸} = \frac{۱۲۸}{۲}(۲ \times (۱۰۵) + (۱۲۸-۱)۷)$$
$$\Rightarrow S_{۱۲۸} = ۶۴(۲۱۰ + ۱۲۷(۷)) = ۶۴(\cancel{۲۱۰ + ۸۸۹}^{۱۰۹۹}) = ۷۰۳۳۶$$

۱۱۶ . در دنبالهٔ $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ مجموع n جملهٔ اول برابر است با:

$$a_۱ = S_۱ = ۷ \times ۱^۲ - ۱۵ \times ۱ = -۸$$
$$d = a_۲ - a_۱, \quad a_۲ = S_۲ - S_۱ = ۷ \times ۲^۲ - ۱۵ \times ۲ - (-۸) = ۶$$
$$\Rightarrow d = ۶ - (-۸) = ۱۴$$

۱۱۷ . اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی را داشته باشیم، واسطهٔ حسابی آن برابر است با:

$$b = \frac{a+c}{۲}$$
$$a, b, c \Rightarrow a + c = ۲b$$

پس برای جملات متوالی $۲m-۴, m+۵, ۳m-۱$ داریم:

$$m + ۵ = \frac{(۳m-۱) + (۲m-۴)}{۲}$$
$$(۳m-۱) + (۲m-۴) = ۲(m+۵)$$
$$۳m - ۱ + ۲m - ۴ = ۲m + ۱۰$$
$$۵m - ۵ = ۲m + ۱۰ \Rightarrow ۵m - ۲m = ۱۰ + ۵$$
$$۳m = ۱۵ \Rightarrow m = ۵$$

بنابراین مقدار m با ۵ برابر است.

۱۱۸ . ابتدا معادلهٔ روبه‌رو را حل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۴x - ۲۱ = ۰$$

برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌توان از روش تجزیهٔ (اتحاد جمله مشترک) استفاده کرد.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 89 of 132

$x^۲ - ۴x - ۲۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + (-۷ + ۳)x + (۳)(-۷) = ۰$

$\Rightarrow (x - ۷) \times (x + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = ۷ \end{cases}$

اگر عدد m، واسطهٔ حسابی بین -۳ و ۷ باشد، داریم:

$۷ + (-۳) = ۲m$

$\Rightarrow ۷ - ۳ = ۲m \Rightarrow ۴ = ۲m \Rightarrow m = ۲$

۱۱۹ . با گسترده کردن جملات دنباله بر حسب $a_۱$ و d داریم:

$a_۲ + a_۴ + a_۶ = ۹۹$

$\Rightarrow a_۱ + d + a_۱ + ۳d + a_۱ + ۵d = ۹۹$

$\Rightarrow ۳a_۱ + ۹d = ۹۹ \Rightarrow ۳(a_۱ + ۳d) = ۹۹ \Rightarrow a_۱ + ۳d = ۳۳$

عبارت $a_۱ + ۳d$ برابر است با $a_۴$.

$\Rightarrow a_۴ = ۳۳$

بنابراین حاصل عبارت $۴a_۴ - ۲۵$ برابر:

$۴a_۴ - ۲۵ \xrightarrow{a_۴ = ۳۳} ۴ \times (۳۳) - ۲۵ = ۱۳۲ - ۲۵ = ۱۰۷$

۱۲۰ . دنبالهٔ جملات مضرب ۸ را بین ۳۰۰ تا ۵۰۰ می‌نویسیم:

$\frac{۳۰۰}{۸} = ۳۷/۵ \Rightarrow ۳۸ \times ۸ = ۳۰۴$ اولین جمله

$\frac{۵۰۰}{۸} = ۶۲/۵ \Rightarrow ۶۲ \times ۸ = ۴۹۶$ آخرین جمله

جملهٔ اول برابر ۳۰۴ و اختلاف مشترک آن ۸ است.

$۳۰۴, \cdots, ۴۹۶$

پس جملهٔ عمومی برابر است با:

$a_n = a_۱ + (n - ۱)d \xrightarrow[d=۸]{a_۱ = ۳۰۴} a_n = ۳۰۴ + (n - ۱)۸$

$a_n = ۳۰۴ + ۸n - ۸ = ۸n + ۲۹۶$

اکنون با به دست آوردن شماره جملهٔ ۴۹۶ از طریق جملهٔ عمومی، تعداد جملات را به دست می‌آوریم:

$a_۸ = ۸n + ۲۹۶ = ۴۹۶ \Rightarrow ۸n + ۲۹۶ = ۴۹۶$

$\Rightarrow ۸n = ۴۹۶ - ۲۹۶ \Rightarrow ۸n = ۲۰۰ \Rightarrow n = \frac{۲۰۰}{۸} = ۲۵$

۱۲۱ . معادله را تقسیم بر ضریب $۲x^۲$ می‌کنیم:

$\frac{۲x^۲ - (۲m - ۴)x - ۳ = ۰}{۲}$

$\frac{۲x^۲}{۲} - \frac{۲(m - ۲)x}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ - (m - ۲)x - \frac{۳}{۲} = ۰$

اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند، داریم:

$x_۱ + x_۲ = ۲m$

در معادلهٔ درجه ۲ با ریشه‌های $x_۱$ و $x_۲$ از طریق اتحاد جمله مشترک داریم:

$(x - x_۱)(x - x_۲) = ۰$

اگر معادلهٔ صورت سوال را مساوی عبارت روبه‌رو قرار دهیم مجموع ریشه‌ها برابر می‌شود با قرینهٔ ضریب x:

$x^۲ - (x_۱ + x_۲)x + x_۱x_۲ = ۰$

$(x_۱ + x_۲) = (m - ۲) \Rightarrow x_۱ + x_۲ = m - ۲$

و چون m واسطهٔ حسابی ریشه‌ها است می‌توان نوشت:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 91 of 132

$m-۲=۲m \Rightarrow ۲m-m=-۲ \Rightarrow m=-۲$

۱۲۲ . دنبالهٔ حسابی a_n با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت d را در نظر می‌گیریم.

$a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$

اگر جملات دنباله را در عدد دلخواه k ضرب کنیم، در دنبالهٔ جدید b_n داریم:

$b_۱, b_۲, b_۳, \cdots \Rightarrow ka_۱, ka_۲, ka_۳$

با گسترده کردن جملات داریم:

$ka_۱, k(a_۱+d), k(a_۱+۲d), \cdots$

دنباله‌ای حسابی است که اختلاف هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی باشد.

$b_۲-b_۱=ka_۲-ka_۱=k(a_۱+d)-ka_۱=\cancel{ka_۱}+kd-\cancel{ka_۱}=kd$

$b_۳-b_۲=ka_۳-ka_۲=k(a_۱+۲d)-k(a_۱+d)=\cancel{ka_۱}+۲kd-\cancel{ka_۱}-kd=۲kd-kd=kd$

پس دنبالهٔ حاصل نیز حسابی است.

۱۲۳ . وتر مثلث بزرگترین ضلع مثلث قائم‌الزاویه است، پس دنبالهٔ اضلاع آن برابر است با:

$۱۰, ۱۰-d, ۱۰-۲d$

بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ فیثاغورس برابر است.

$(۱۰)^۲=(۱۰-d)^۲+(۱۰-۲d)^۲$

$\cancel{۱۰۰}=\cancel{۱۰۰}-۲۰d+d^۲+۱۰۰-۴۰d+۴d^۲$

$\Rightarrow ۵d^۲-۶۰d+۱۰۰=۰ \xrightarrow{\text{تقسیم بر پنج}} d^۲-\frac{۶۰}{۵}d+\frac{۱۰۰}{۵}=۰$

$d^۲-۱۲d+۲۰=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه اتحاد جمله مشترک}} (d-۱۰)(d-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} d=۱۰ \text{ غ ق ق} \\ d=۲ \end{cases}$

$d=۱۰ \Rightarrow ۱۰, ۱۰-۱۰, ۱۰-۲۰ \Rightarrow ۱۰, ۰, -۱۰$

اگر $d=۱۰$ باشد، اضلاع مثلث برابر با صفر و منفی می‌شود که در نتیجه ۱۰ غیر قابل‌قبول است.

$d=۲ \Rightarrow ۱۰, ۸, ۶$ **اضلاع مثلث**

۱۲۴ . اگر n واسطهٔ حسابی بین دو جملهٔ a و b درج کنیم، اختلاف مشترک دنباله برابر است با:

$d=\frac{b-a}{n+۱} \Rightarrow ۵=\frac{۱۵-۲m}{۷}$

دو حالت می‌توان در نظر گرفت. حالت اول ($۱۵>۲m$):

با طرفین وسطین عبارت فوق داریم:

$\Rightarrow ۳۵=۱۵-۲m \Rightarrow ۳۵-۱۵=-۲m$

$۲۰=-۲m \Rightarrow m=\frac{۲۰}{-۲} \Rightarrow \boxed{m=-۱۰}$

پس جملات حالت اول به صورت زیر خواهند بود:

$\Rightarrow -۲۰, \underbrace{-۱۵, -۱۰, -۵, ۰, ۵, ۱۰}_{\text{۶ واسطه}}, ۱۵$

حالت دوم ($۱۵<۲m$):

$d=\frac{۲m-۱۵}{۷}=۵ \Rightarrow ۲m-۱۵=۳۵ \Rightarrow \boxed{m=۲۵}$

پس جملات حالت دوم به صورت زیر خواهند بود:

$\Rightarrow ۱۵, \underbrace{۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, ۴۰, ۴۵}_{\text{۶ واسطه}}, ۵۰$

۱۲۵ . برای محاسبهٔ $a_{۱۰} + a_{۱۱} + a_{۱۲} + a_{۱۳}$ می‌توانیم از مجموع جملات کمک بگیریم.

$$a_{۱۰} + a_{۱۱} + a_{۱۲} + a_{۱۳} = S_{۱۳} - S_{۹}$$

$$S_n = ۳n^۲ - ۸n \Rightarrow \begin{cases} S_{۱۳} = ۳ \times (۱۳)^۲ - ۸ \times (۱۳) = ۳ \times (۱۶۹) - ۱۰۴ = ۵۰۷ - ۱۰۴ = ۴۰۳ \\ S_{۹} = ۳ \times (۹)^۲ - ۸ \times (۹) = ۳ \times (۸۱) - ۷۲ = ۲۴۳ - ۷۲ = ۱۷۱ \end{cases}$$

$$S_{۱۳} - S_{۹} = ۴۰۳ - ۱۷۱ = ۲۳۲$$

$$\Rightarrow a_{۱۰} + a_{۱۱} + a_{۱۲} + a_{۱۳} = ۲۳۲$$

۱۲۶ . برای به‌دست آوردن اختلاف مشترک باید دو جمله از دنباله را داشته باشیم. جملات اول و دوم را بدست می‌آوریم:

اگر در $S_n = ۳n^۲ - ۸n$ به جای n مقدار ۱ را قرار دهیم، $S_۱$ برابر با جملهٔ اول خواهد بود، پس داریم:

$$S_۱ = a_۱ \Rightarrow S_۱ = ۳ \times (۱)^۲ - ۸ \times (۱) = ۳ - ۸ = -۵$$

حال با جایگذاری $n = ۲$ در S_n، $S_۲$ را بدست می‌آوریم.

$$S_n = ۳n^۲ - ۸n \xrightarrow{n=۲} S_۲ = ۳ \times (۲)^۲ - ۸ \times (۲) = ۱۲ - ۱۶ = -۴$$

می‌دانیم $a_۲ = S_۲ - S_۱$ بنابراین داریم:

$$a_۲ = S_۲ - S_۱ = -۴ - (-۵) = ۱$$

برای به دست آوردن اختلاف مشترک به کمک $a_۱$ و $a_۲$ داریم:

$$d = a_۲ - a_۱ = ۱ - (-۵) = ۶$$

۱۲۷ . برای به دست آوردن a_n اگر مجموع n جملهٔ اول را از $(n-۱)$ جملهٔ اول کم کنیم، حاصل جملهٔ nاُم خواهد بود؛ یعنی:

$$a_n = S_n - S_{n-۱}$$

$$S_n = ۳n^۲ - ۸n$$

$$S_{n-۱} = ۳(n-۱)^۲ - ۸(n-۱) = ۳(n^۲ - ۲n + ۱) - ۸n + ۸$$

$$= ۳n^۲ - ۶n + ۳ - ۸n + ۸ = ۳n^۲ - ۱۴n + ۱۱$$

پس جملهٔ عمومی دنباله برابر است با:

$$a_n = S_n - S_{n-۱} = ۳n^۲ - ۸n - (۳n^۲ - ۱۴n + ۱۱)$$

$$= \cancel{۳n^۲} - ۸n - \cancel{۳n^۲} + ۱۴n - ۱۱ = ۶n - ۱۱$$

$$\Rightarrow a_n = ۶n - ۱۱$$

۱۲۸ . هر پرانتز را یک جمله از یک دنبالهٔ حسابی می‌توان در نظر گرفت که جملهٔ اول آن $a_۱ = x + ۱$ است. اختلاف مشترک برابر است با:

$$d = a_۲ - a_۱ = x + ۴ - x - ۱ = ۳$$

تعداد کل جملات برابر است با:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow a_n - a_۱ = (n-۱)d \Rightarrow \frac{a_n - a_۱}{d} = n - ۱$$

$$\Rightarrow n = \frac{a_n - a_۱}{d} + ۱ = \frac{\cancel{x} + ۳۱ - \cancel{x} - ۱}{۳} + ۱ \Rightarrow n = \frac{۳۰}{۳} + ۱ = ۱۱$$

مجموع جملات دنباله با مشخصات به دست آمده برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(۲(x+۱) + (n-۱)۳)$$

مجموع ۱۱ جملهٔ اول دنباله برابر ۴۰۰ شده است، با جایگذاری در معادله، مقدار x به دست می‌آید.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 95 of 132

$$S_{۱۰} = \frac{۱۱}{۲}(۲(x+۱) + (\cancel{۱۱-۱}^{۱۰})۳) = ۴۰۰ \Rightarrow \frac{۱۱}{۲}(۲x+۲+۳۰) = ۴۰۰$$
$$\xrightarrow{\times ۲} ۱۱(۲x+۳۲) = ۸۰۰ \Rightarrow ۲۲x + ۳۵۲ = ۸۰۰ \Rightarrow ۲۲x = ۸۰۰ - ۳۵۲$$
$$۲۲x = ۴۴۸ \Rightarrow x = \frac{۴۴۸}{۲۲} = \frac{۲۲۴}{۱۱}$$

۱۲۹ . تعداد کل جملات دنبالهٔ حاصل برابر ۹ تا است:

$$۵, \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{هفت عدد}}, ۲۱$$
$$n = ۷ + ۲ = ۹$$

پس مجموع جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$
$$S_۹ = \frac{۹}{۲}(۲۱ + ۵) = \frac{۹}{۲} \times (۲۶) = ۹ \times (۱۳) = ۱۱۷$$

۱۳۰ . در دنبالهٔ روبه‌رو، مجموع اعداد ثابت و x برابر است با: (اعداد یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند.)

$$a_۱ = ۱۷ \quad , \quad d = a_۲ - a_۱ \Rightarrow d = ۲۳ - ۱۷ = ۶$$

مجموع جملات $S_n = ۵۱۷$ است. بنابراین مقدار n که تعداد جملات است را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$
$$S_n = \frac{n}{۲}(۲ \times (۱۷) + (n-۱)۶) = \frac{n}{۲}(۳۴ + ۶n - ۶) = \frac{n}{۲}(۲۸ + ۶n) = ۵۱۷$$
$$\frac{n}{\cancel{۲}} \times \cancel{۲}(۱۴ + ۳n) = ۵۱۷ \Rightarrow ۳n^۲ + ۱۴n - ۵۱۷ = ۰$$
$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۱۴)^۲ - ۴(۳)(-۵۱۷) = ۱۹۶ + ۶۲۰۴ = ۶۴۰۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۸۰$$
$$n_۱ = -\frac{۱۴ + ۸۰}{۶} = \frac{۶۶}{۶} = ۱۱ \text{ ق ق}$$
$$n_۲ = \frac{-۱۴ - ۸۰}{۶} = \frac{-۹۴}{۶} \text{ غ ق ق}$$

تعداد جملات است و باید عدد طبیعی باشد، پس $-\frac{۹۶}{۴}$ غیرقابل قبول بوده و ۱۱ قابل قبول است.

تعداد جملات به عبارتی شمارهٔ آخرین جمله بوده است، یعنی:

$$a_{۱۱} = x \, , a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow a_{۱۱} = ۱۷ + (۱۱-۱)۶$$
$$a_{۱۱} = ۱۷ + ۶۰ = ۷۷ \Rightarrow x = ۷۷$$

۱۳۱ . در دنبالهٔ حسابی a_n داریم:

$$m + l = k + p \Rightarrow a_m + a_L = a_k + a_P$$
$$a_{۱۰} + a_۵ = ۱۰۰ \xrightarrow{۱۰+۵=۱۴+۱} a_{۱۰} + a_۵ = a_{۱۴} + a_۱ = ۱۰۰$$

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$
$$S_{۱۴} = \frac{۱۴}{۲}(a_۱ + a_{۱۴}) \xrightarrow{a_۱ + a_{۱۴} = ۱۰۰} S_{۱۴} = ۷ \times (۱۰۰) = ۷۰۰$$

۱۳۲ . در دنبالهٔ حسابی a_n داریم:

$$m + l = k + p \Rightarrow a_m + a_l = a_k + a_p$$

طبق فرض داریم:

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_{۹۸} + a_{۹۹} + a_{۱۰۰} = ۳۰۰$$
$$a_۱ + a_{۱۰۰} = a_۲ + a_{۹۹} = a_۳ + a_{۹۸} \Rightarrow ۳(a_۱ + a_{۱۰۰}) = ۳۰۰$$
$$\Rightarrow a_۱ + a_{۱۰۰} = \frac{۳۰۰}{۳} = ۱۰۰$$

حاصل جمع تمام جملات برابر است با:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 97 of 132

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow S_{۱۰۰} = \frac{۱۰۰}{۲}(a_۱ + a_{۱۰۰}) = ۵۰(a_۱ + a_{۱۰۰})$$
$$\xrightarrow{a_۱ + a_{۱۰۰} = ۱۰۰} S_{۱۰۰} = ۵۰ \times (۱۰۰) = ۵۰۰۰$$

۱۳۳ . اگر دنبالهٔ اولیه با جملهٔ اول $a_۱$ و اختلاف مشترک d باشد و دنبالهٔ ثانویه با جملهٔ اولیهٔ $a'_۱$ و اختلاف مشترک d' باشد، داریم:

$$d' = d - ۱$$
$$a'_۱ = a_۱ + ۳$$

مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ اولیه برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲۰}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$
$$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲a_۱ + (۲۰-۱)d) = ۱۰(۲a_۱ + ۱۹d) = ۲۰a_۱ + ۱۹۰d$$

مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ ثانویه برابر است با:

$$S'_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲a'_۱ + (۲۰-۱)d') \Rightarrow S'_{۲۰} = ۱۰(۲(a_۱ + ۳) + ۱۹(d-۱))$$
$$S'_{۲۰} = ۱۰(۲a_۱ + ۶ + ۱۹d - ۱۹) = ۱۰(۲a_۱ + ۱۹d - ۱۳) = ۲۰a_۱ + ۱۹۰d - ۱۳۰$$

پس اختلاف مجموع ۲۰ جملهٔ اولیه از ۲۰ جملهٔ ثانویه برابر است با:

$$S_{۲۰} - S_{۲۰} = ۲۰a_۱ + ۱۹۰d - (۲۰a_۱ + ۱۹۰d - ۱۳۰) =$$
$$۲۰a_۱ + ۱۹۰d - ۲۰a_۱ + ۱۹۰d + ۱۳۰ = ۱۳۰$$

۱۳۴ . جملات هریک از دنباله‌ها را می‌نویسیم:

$$a_n \Rightarrow ۲, -۴, -۱۰, -۱۶, -۲۲$$
$$b_n \Rightarrow ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۲$$

الف) مجموع جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$
$$S_{an} = \frac{n}{۲}(۲ \times (۲) + (n-۱)(-۶)) = \frac{n}{۲}(۴ - ۶n + ۶) = \frac{n}{۲}(-۶n + ۱۰)$$
$$\Rightarrow S_{۲۰} = ۱۰ \times (-۱۲۰ + ۱۰) = -۱۱۰۰$$

ب)

$$S_{bn} = \frac{n}{۲}(۲ \times (۲) + (n-۱)۴) = \frac{n}{۲}(۴ + ۴n - ۴) = \frac{n}{۲}(۴n) = ۲n^۲ \Rightarrow S_{۲۰} = ۲ \times ۲۰^۲ = ۸۰۰$$

۱۳۵ . در دنبالهٔ مورد نظر جملهٔ عمومی را می‌نویسیم:

$$a_۱ = -۲۷ \quad , \quad d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$
$$d = \frac{a_۳ - a_۱}{۳ - ۱} = \frac{-۲۱ - (-۲۷)}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$
$$a_n = a_۱ + (n-۱)d = -۲۷ + (n-۱)۳ = -۲۷ + ۳n - ۳ = ۳n - ۳۰$$

تعداد جملات منفی را به دست می‌آوریم:

$$a_n < ۰$$
$$۳n - ۳۰ < ۰ \Rightarrow ۳n < ۳۰ \Rightarrow n < \frac{۳۰}{۳} = ۱۰$$

نتیجه می‌شود که ۹ جملهٔ اول منفی است.
بنابراین مجموع جملات برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) = \frac{n}{۲}(۲(-۲۷) + (n-۱)۳)$$
$$S_۹ = \frac{۹}{۲}(-۵۴ + ۸ \times ۳) = \frac{۹}{۲}(-۵۴ + ۲۴) = -۱۳۵$$

۱۳۶.

با توجه به نمودار جملهٔ دوم برابر ۹ و جملهٔ چهارم برابر ۱۷ است:

$$\times(-)\ \begin{cases} a_۲ = a_۱ + d = ۹ \\ a_۴ = a_۱ + ۳d = ۱۷ \end{cases} \Rightarrow ۲d = ۸ \to d = ۴$$

$$a_۱ + ۴ = ۹ \Rightarrow a_۱ = ۵$$

جملهٔ عمومی : $a_n = a_۱ + (n-۱)d = ۵ + (n-۱) \times ۴ = ۵ + ۴n - ۴ = ۴n + ۱$

$$a_n = ۶۵ \Rightarrow ۴n + ۱ = ۶۵ \Rightarrow ۴n = ۶۴ \Rightarrow n = ۱۶$$

۱۳۷.

$$a_۱ = ۳\ ,\ d = ۵\ ,\ a_n = ۲۰۳$$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۲۰۳ = ۳ + (n-۱) \times ۵ \Rightarrow n - ۱ = \frac{۲۰۰}{۵} = ۴۰ \Rightarrow n = ۴۱$$

$$S_{۴۱} = \frac{۴۱}{۲}(۲ \times ۳ + ۴۰ \times ۵) = ۴۲۲۳$$

۱۳۸.

$$a, b, c \xrightarrow{\text{شرط دنبالهٔ حسابی}} ۲b = a + c \quad \text{یا} \quad b = \frac{a+c}{۲}$$

$$۲p, -\frac{۱۳}{۲}, p - ۱ \Rightarrow -\frac{۱۳}{۲} = \frac{۲p + (p-۱)}{۲} \Rightarrow ۳p - ۱ = -۱۳ \Rightarrow ۳p = -۱۲ \Rightarrow p = -۴$$

$$\Rightarrow \text{جملات دنباله} : -۸, -\frac{۱۳}{۲}, -۵, \cdots \Rightarrow a_۱ = -۸$$

$$\text{اختلاف مشترک} : d = -\frac{۱۳}{۲} - (-۸) = \frac{۳}{۲} = ۱٫۵$$

$$a_n = ۱\ ,\ n = ?$$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۱ = -۸ + (n-۱)۱٫۵$$

$$۱ = -۸ + ۱٫۵n - ۱٫۵ \Rightarrow ۱٫۵n = ۱۰٫۵ \Rightarrow n = \frac{۱۰٫۵}{۱٫۵} = ۷$$

۱۳۹.

$$a_۱ = A, a_۲ = A + \frac{۱}{۲۰}A, a_۳ = a_۲ + \frac{۱}{۲۰}A, \cdots$$

چون در دنبالهٔ فوق مقدار ثابت $\frac{۱}{۲۰}A$ به هر جملهٔ قبل اضافه می‌شود، پس دنبالهٔ مذکور دنبالهٔ حسابی با اختلاف مشترک $\frac{۱}{۲۰}A$ است.

$$a_۱ = A\ ,\ d = \frac{۱}{۲۰}A\ ,\ a_n = ۲A, S_n = ۶۳۰۰۰$$

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۲A = A + (n-۱)\frac{۱}{۲۰}A$$

$$\Rightarrow A = (n-۱)\frac{۱}{۲۰}A \Rightarrow n - ۱ = ۲۰ \Rightarrow n = ۲۱$$

$$S_n = \frac{n[۲a_۱ + (n-۱)d]}{۲} \Rightarrow ۶۳۰۰۰ = \frac{۲۱\left[۲A + ۲۰ \times \frac{۱}{۲۰}A\right]}{۲} \Rightarrow ۱۲۶۰۰۰ = ۲۱ \times ۳Q \Rightarrow A = ۲۰۰۰$$

۱۴۰.

مجموع جملات دنباله حسابی با مشخصات ذکر شده برابر است با:

$$a_۱ = ۳۲\ ,\ d = -۴$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(۲(۳۲) + (n-۱)(-۴))$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۶۴ - ۴n + ۴) = \frac{n}{۲}(۶۸ - ۴n) = n(۳۴ - ۲n)$$

کافیست مجموع جملات را برابر صفر قرار داده و مقدار n را به دست آوریم:

$$S_n = n(۳۴ - ۲n) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۰ \\ ۳۴ - ۲n = ۰ \Rightarrow ۳۴ = ۲n \Rightarrow n = ۱۷ \end{cases}$$

$n = ۰$ غیر قابل قبول است، چرا که دنباله را به‌ازای مقادیر طبیعی بررسی می‌کنیم، پس تنها پاسخ قابل قبول $n = ۱۷$ است.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 101 of 132

۱۴۱ .

در دنبالهٔ حسابی تعداد صندلی‌ها $a_{۵} = ۲۱۰$ و $a_{۱۵} = ۷۰$ است، پس برای به دست آوردن اختلاف مشترک داریم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \Rightarrow d = \frac{a_{۵} - a_{۱۵}}{۵ - ۱۵} = \frac{۲۱۰ - ۷۰}{۵ - ۱۵} = \frac{۱۴۰}{-۱۰} = -۱۴$$

از طرفی در جملهٔ عمومی دنباله داریم:

$$a_n = a_{۱} + (n - ۱)d$$

پس با جای‌گذاری در جملهٔ پنجم برای $a_{۱}$ داریم:

$$a_{۵} = a_{۱} + (۵ - ۱)(-۱۴)$$
$$a_{۵} = a_{۱} + (۴)(-۱۴) \Rightarrow ۲۱۰ = a_{۱} + (-۵۶) \Rightarrow a_{۱} = ۲۱۰ + ۵۶ \Rightarrow a_{۱} = ۲۶۶$$

۱۴۲ .

ابتدا مقدار **d** و سپس جمله عمومی و دنباله را به دست می‌آوریم.

$$-۱۲, -۹, -۶, \ldots$$

جملهٔ عمومی دنباله برابر است با:

$$a_{۱} = -۱۲ \ , \ d = a_{۲} - a_{۱} = -۹ - (-۱۲) = ۳$$
$$a_n = a_{۱} + (n - ۱)d \Rightarrow a_n = -۱۲ + (n - ۱)۳ = -۱۲ + ۳n - ۳ = ۳n - ۱۵$$

مجموع جملات دنباله حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_{۱} + (n - ۱)d) = \frac{n}{۲}(۲(-۱۲) + (n - ۱)۳) = \frac{n}{۲}(-۲۴ + ۳n - ۳) \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(۳n - ۲۷)$$

مجموع جملات را برابر با جملهٔ پنجم قرار می‌دهیم:

$$a_{۵} = ۳ \times (۵) - ۱۵ = ۱۵ - ۱۵ = ۰$$
$$S_n = a_{۵} \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳n - ۲۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{۲} = ۰ \Rightarrow n = ۰ \text{ غ‌ق‌ق} \\ ۳n - ۲۷ = ۰ \Rightarrow ۳n = ۲۷ \Rightarrow n = ۹ \text{ ق‌ق} \end{cases}$$

۱۴۳ . می‌دانیم نسبت‌مشترک برابر است با:

$$r = \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{۳\sqrt{۲}}{-۳} = -\sqrt{۲}$$

پس:

$$\frac{a_n}{a_{n+۱}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۴۴ . کاهشی ـ افزایشی ـ ثابت

۱۴۵ . سه جمله را $\frac{a}{r}, a, ar$ درنظر می‌گیریم؛

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = a^{۳} = ۱۲۵ \Rightarrow a = ۵$$
$$\frac{۵}{r} + ۵ + ۵r = \frac{۳۵}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{r} + \frac{۵r}{۱} = \frac{۳۵}{۲} - ۵$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{r} + \frac{۵r}{۱} = \frac{۲۵}{۲} \Rightarrow \frac{۵ + ۵r^{۲}}{r} = \frac{۲۵}{۲}$$
$$۱۰ + ۱۰r^{۲} = ۲۵r$$
$$۱۰r^{۲} - ۲۵r + ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۲r^{۲} - ۵r + ۲ = ۰, \Delta = b^{۲} - ۴ac \Rightarrow \Delta = ۲۵ - ۴(۴) = ۹$$
$$r = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۵ \pm ۳}{۴} \rightarrow \begin{cases} r = ۲ \rightarrow \frac{۵}{۲}, ۵, ۱۰ \\ r = \frac{۱}{۲} \rightarrow ۱۰, ۵, \frac{۵}{۲} \end{cases}$$

۱۴۶ . عبارت صورت سؤال مجموع ۱۲ جمله از دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و نسبت مشترک x است، بنابراین داریم:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 103 of 132

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_{12} = 1 \times \frac{1-x^{12}}{1-x}$$

و عبارت مخرج سؤال مجموع ۴ جمله از دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و نسبت مشترک x^3 است، بنابراین داریم:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_4 = 1 \times \frac{1-(x^3)^4}{1-x^3} = \frac{1-x^{12}}{1-x^3}$$

بنابراین از تقسیم این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{1-x^{12}}{1-x}}{\frac{1-x^{12}}{1-x^3}} = \frac{1-x^3}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = 1+x+x^2 \xrightarrow{x=\sqrt{2}} 1+\sqrt{2}+2 = 3+\sqrt{2}$$

۱۴۷ . برای به‌دست آوردن جملهٔ ششم، کافی است مجموع شش جملهٔ اول را منهای مجموع پنج جملهٔ اول کنیم.

مجموع شش جملهٔ اول : $S_6 = 3 \times 2^{6+1} = 384$

مجموع پنج جملهٔ اول : $S_5 = 3 \times 2^{5+1} = 192$

$$a_6 = 384 - 192 = 192$$

$$\underbrace{\overbrace{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}^{192}+\boxed{a_6}}_{384}$$

۱۴۸ . با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی؛

$$\begin{cases} a_3 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 r^2 = -\frac{1}{4} \\ a_8 = 8 \Rightarrow a_1 r^7 = 8 \end{cases}$$

طرفین ۲ رابطهٔ بالا را بر هم تقسیم می‌کنیم؛

$$\frac{1}{r^5} = \frac{-\frac{1}{4}}{8} = -\frac{1}{32} \Rightarrow r = -2$$

نسبت مشترک را در یکی از رابطه‌های بالا جایگزین کرده و جملهٔ اول را به‌دست می‌آوریم:

$$a_1 r^2 = -\frac{1}{4} \xrightarrow{r=-2} a_1 \times (-2)^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 \times 4 = -\frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{-\frac{1}{4}}{4} = -\frac{1}{16}$$

بنابراین جملهٔ دهم برابر است با:

$$a_{10} = a_1 r^9 = -\frac{1}{16} \times (-2)^9 = -\frac{1}{16} \times -512 = 32$$

۱۴۹ . ابتدا جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \cdots$ را می‌نویسیم:

$$a_1 = \frac{1}{5},\ r = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}, a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

باید ببینیم جملهٔ چندم $\frac{1}{320}$ است؛

$$\frac{1}{320} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \frac{1}{64} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 64 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^6 = 2^{n-1} \Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

پس مجموع ۷ جمله از دنبالهٔ هندسی $a_n = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2^{n-1}}$ از ما خواسته شده است؛

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_7 = \frac{1}{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times \frac{1-\frac{1}{128}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times \frac{127}{128} = \frac{127}{320}$$

۱۵۰ . چون تعداد جملات فرد است بهتر است آن‌ها را به‌صورت زیر درنظر بگیریم:

جملات دنباله: $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

$$\frac{a}{r^2} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^2 = 243 \Rightarrow a^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow a = 3$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 105 of 132

پس یکی از این اعداد حتماً ۳ است.

۱۵۱ . عبارت داده شده مجموع جملات دنبالهٔ هندسی است.

$$a_۱ = \frac{۱}{۹},\ r = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۹}} = ۳$$

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} = \frac{۱}{۹} \times ۳^{n-۱} = \frac{۳^{n-۱}}{۳^۲} = ۳^{n-۳}$$

حال باید ببینیم ۶۵۶۱ جملهٔ چندم دنباله است؛

$$۳^{n-۳} = ۶۵۶۱ = ۳^۸ \Rightarrow n - ۳ = ۸ \Rightarrow n = ۱۱$$

بنابراین باید مجموع ۱۱ جمله از این دنباله را به‌دست آوریم:

$$S_n = a_۱ \times \frac{۱ - r^n}{۱ - r} \Rightarrow S_{۱۱} = \frac{۱}{۹} \times \frac{۱ - ۳^{۱۱}}{۱ - ۳} = \frac{۱}{۹} \times \frac{۱ - ۳^{۱۱}}{-۲} = \frac{۳^{۱۱} - ۱}{۱۸}$$

۱۵۲ . با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی می‌توان نوشت:

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۲۱ \rightarrow a_۱ + a_۱ r + a_۱ r^۲ = ۲۱ \rightarrow a_۱ \left(۱ + r + r^۲\right) = ۲۱ \qquad (۱)$$

$$a_۴ + a_۵ + a_۶ = ۱۶۸ \rightarrow a_۱ r^۳ + a_۱ r^۴ + a_۱ r^۵ = ۱۶۸ \rightarrow a_۱ r^۳ \left(۱ + r + r^۲\right) = ۱۶۸ \qquad (۲)$$

طرفین رابطهٔ (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم؛

الف)

$$\frac{۱}{r^۳} = \frac{۲۱}{۱۶۸} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow r^۳ = ۸ \Rightarrow r = ۲$$

ب)

$r = ۲$ را در رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم.

$$a_۱ (۱ + ۲ + ۴) = ۲۱ \Rightarrow a_۱ \times ۷ = ۲۱ \Rightarrow a_۱ = ۳$$

بنابراین جملهٔ چهارم برابر است با:

$$a_۴ = a_۱ r^۳ = ۳ \times ۲^۳ = ۲۴$$

۱۵۳ . با استفاده از جملهٔ عمومی و دنبالهٔ هندسی می‌توانیم بنویسیم:

$$a_۴ = ۱۰ \Rightarrow a_۱ r^۳ = ۱۰ \qquad (۱)$$

$$a_۵ + a_۶ = ۶۰ \Rightarrow a_۱ r^۴ + a_۱ r^۵ = ۶۰ \Rightarrow a_۱ r^۴ (۱ + r) = ۶۰ \qquad (۲)$$

طرفین رابطهٔ (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_۱ r^۳}{a_۱ r^۴ (۱ + r)} = \frac{۱۰}{۶۰} \Rightarrow \frac{۱}{r(۱ + r)} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow r(r + ۱) = ۶ \Rightarrow r^۲ + r - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (r + ۳)(r - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} r = -۳ \\ r = ۲ \end{cases}$$

۱۵۴ . ابتدا نسبت مشترک را به کمک فرمول درج واسطه هندسی به‌دست می‌آوریم:

$$r^{n+۱} = \frac{b}{a}$$

$$r^{۴+۱} = \frac{۱۹۲}{۶} \Rightarrow r^۵ = ۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow r = ۲$$

بنابراین این جملات عبارتند از:

$$۶, \underset{\curvearrowright}{\overset{\times ۲}{۱۲}}, ۲۴, ۴۸, ۹۶, ۱۹۲$$

۱۵۵ . با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی می‌توان نوشت:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 107 of 132

$a_۳ = ۲۷ \to a_۱ r^۲ = ۲۷ \quad (۱)$
$a_۵ = ۲۴۳ \to a_۱ r^۴ = ۲۴۳ \quad (۲)$

طرفین رابطهٔ (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم؛

$$\frac{۱}{r^۲} = \frac{۲۷}{۲۴۳} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow r = \pm ۳$$

این نسبت مشترک را در رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$a_۱ \times (\pm ۳)^۲ = ۲۷ \Rightarrow a_۱ \times ۹ = ۲۷ \Rightarrow a_۱ = ۳$$

بنابراین جملهٔ نهم برابر است با:

$$a_۹ = a_۱ r^۸ = ۳ \times (\pm ۳)^۸ = ۳^۹$$

۱۵۶ . هر جمله $\frac{۵۰}{۱۰۰}$ جملهٔ قبلی خود است، پس نسبت مشترک $\frac{۵۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲}$ است و $a_۱ = ۱۰۲۴$ است. بنابراین:

$$a_n = a_۱ r^{n-۱}$$
$$a_۵ = ۱۰۲۴ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ = \frac{۱۰۲۴}{۲^۴} = \frac{۲^{۱۰}}{۲^۴} = ۲^۶ = ۶۴$$

۱۵۷ . با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی می‌توان نوشت:

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \quad , \quad a_۱ = -۲ \quad , \quad r = \sqrt{۲}$$
$$a_۸ = a_۱ r^۷ = -۲ \times (\sqrt{۲})^۷ = -۲ \times (\sqrt{۲})^۶ \times \sqrt{۲} = -۲ \times ۲^۳ \times \sqrt{۲} = -۱۶\sqrt{۲}$$

۱۵۸ . با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی و اطلاعات داده شده در سوال خواهیم داشت:

$a_۴ + a_۵ = ۳۰ \Rightarrow a_۱ r^۳ + a_۱ r^۴ = ۳۰ \Rightarrow a_۱ r^۳ (۱ + r) = ۳۰ \quad (۱)$
$a_۳ = ۵ \Rightarrow a_۱ r^۲ = ۵ \quad (۲)$

* از تقسیم طرفین روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{a_۱ r^۳ (۱ + r)}{a_۱ r^۳} = \frac{۳۰}{۵}$$
$$r(۱ + r) = ۶ \Rightarrow r + r^۲ = ۶ \Rightarrow r^۲ + r - ۶ = ۰ \Rightarrow (r + ۳)(r - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} r = -۳ \\ r = ۲ \end{cases}$$

چون دنبالهٔ هندسی افزایشی است، $r = ۲$ مورد قبول است.

۱۵۹ . از رابطهٔ $a_{n+۱} = \sqrt{۲} a_n$ به این نتیجه می‌رسیم که هر جمله $\sqrt{۲}$ برابر جملهٔ قبل است، یعنی نسبت مشترک آن $\sqrt{۲}$ است. بنابراین مجموع ده جملهٔ آن برابر است با:

$$S_n = a_۱ \times \frac{۱ - r^n}{۱ - r} \Rightarrow S_{۱۰} = -۲ \times \frac{۱ - (\sqrt{۲})^{۱۰}}{۱ - ۲} = ۲\left(۱ - ۲^۵\right) = ۲(-۳۱) = -۶۲$$

۱۶۰ . با توجه به $a_{n+۱} = -۳a_n$ به این نتیجه می‌رسیم که هر جمله -۳ برابر جملهٔ قبل است، پس $r = -۳$ و $a_۱ = -۲$ است.

الف)

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} = -۲ \times (-۳)^{n-۱}$$

ب)

$$a_۸ = a_۱ r^۷ = -۲ \times (-۳)^۷ = -۲ \times (-۲۱۸۷) = ۴۳۷۴$$

۱۶۱ . با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی و اطلاعات سوال:

$a_۱ + a_۴ = ۲۸ \Rightarrow a_۱ + a_۱ r^۳ = ۲۸ \Rightarrow a_۱ \left(۱ + r^۳\right) = ۲۸ \quad (۱)$
$a_۲ + a_۳ = ۱۲ \Rightarrow a_۱ r + a_۱ r^۲ = ۱۲ \Rightarrow a_۱ r (۱ + r) = ۱۲ \quad (۲)$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 109 of 132

$$\frac{۱+r^۳}{r(۱+r)}=\frac{۲۸}{۱۲}=\frac{۷}{۳}\xrightarrow{\text{اتحاد}}\frac{\cancel{(۱+r)}\left(۱-r+r^۲\right)}{r\cancel{(۱+r)}}=\frac{۷}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳-۳r+۳r^۲=۷r\Rightarrow ۳r^۲-۱۰r+۳=۰\ ,\ a=۳۰\ ;b=-۱۰\ ,\ c=۳$$

$$\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۱۰۰-۴(۹)=۶۴\Rightarrow r=\frac{۱۰\pm ۸}{۶}\Rightarrow\begin{cases}r=۳\\ r=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

۱۶۲ . چون تعداد جملات فرد است می‌توان با توجه به تعریف دنبالهٔ هندسی آن‌ها را به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$\begin{array}{ccccccccc}a_۱ & \times & a_۲ & \times & a_۳ & \times & a_۴ & \times & a_۵ & =۳۲\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \frac{a}{r^۲} & \times & \frac{a}{r} & \times & a & \times & ar & \times & ar^۲ & =۳۲\end{array}$$

$$\Rightarrow a^۵=۳۲\Rightarrow a=۲$$

بنابراین:

$$a_۲\times a_۴=\frac{a}{r}\times ar=a^۲=۲^۲=۴$$

۱۶۳ .

برای درج n واسطهٔ هندسی بین a و b کافی است نسبت مشترک را از رابطهٔ $r^{n+۱}=\frac{b}{a}$ بدست آوریم.

$$r^{n+۱}=\frac{b}{a}\Rightarrow r^{۳+۱}=\frac{۹۶}{۶}\Rightarrow r^۴=۱۶\Rightarrow r=\pm ۲$$

$$\overset{\times ۲}{\curvearrowright}\ ۶\ \overset{\times ۲}{\curvearrowright}\ ۱۲\ \overset{\times ۲}{\curvearrowright}\ ۲۴\ \overset{\times ۲}{\curvearrowright}\ ۴۸\ \overset{\times ۲}{\curvearrowright}\ ۹۶\quad \text{یا}\quad \overset{\times(-۲)}{\curvearrowright}\ ۶\ \overset{\times(-۲)}{\curvearrowright}\ -۱۲\ \overset{\times(-۲)}{\curvearrowright}\ ۲۴\ \overset{\times(-۲)}{\curvearrowright}\ -۴۸\ \overset{\times(-۲)}{\curvearrowright}\ ۹۶$$

۱۶۴ . با استفاده از جملهٔ اول و نسبت مشترک به سوالات پاسخ می‌دهیم:

$$a_۱=\frac{۱}{۲},\ r=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

الف)

$$a_n=a_۱r^{n-۱}\Rightarrow a_۸=a_۱r^۷=\frac{۱}{۲}\times ۲^۷=۶۴$$

ب)

$$\frac{a_{۱۲}}{a_{۱۰}}=\frac{a_۱r^{۱۱}}{a_۱r^۹}=r^۲=۲^۲=۴$$

۱۶۵ . می‌دانیم واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و c را اگر b بنامیم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید؛

$$b^۲=ac$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$b^۲=\left(\sqrt{۵}-\sqrt{۳}\right)\left(\sqrt{۵}+\sqrt{۳}\right)\Rightarrow b^۲=۵-۳=۲\Rightarrow b=\pm\sqrt{۲}$$

۱۶۶ . با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی و اطلاعات سوال می‌نویسیم:

$$a_{۱۰}=۶۴a_۷\Rightarrow a_۱r^۹=۶۴a_۱r^۶\Rightarrow r^۳=۶۴\Rightarrow r=۴$$

سپس عبارت خواسته شده را به ساده‌ترین شکل می‌نویسیم:

$$\frac{۲a_{۱۴}+a_۳}{a_{۱۲}-a_۵}=\frac{۲a_۱r^{۱۳}+a_۱r^۲}{a_۱r^{۱۱}-a_۱r^۴}=\frac{a_۱r^۲\left(۲r^{۱۱}+۱\right)}{a_۱r^۴\left(r^۷-۱\right)}=\frac{۲r^{۱۱}+۱}{r^۲\left(r^۷-۱\right)}$$

$$=\frac{۲\times ۴^{۱۱}+۱}{۴^۲\left(۴^۷-۱\right)}=\frac{۲^{۲۳}+۱}{۲^{۱۸}-۲^۴}=\frac{۲^{۲۳}+۱}{۲^{۱۸}-۱۶}$$

۱۶۷ . با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی می‌توانیم بنویسیم:

$$a_n=a_۱r^{n-۱}\ ,\ a_{۲۷}=\frac{۱}{a_۵}\Rightarrow a_{۲۷}a_۵=۱$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 111 of 132

$$\Rightarrow a_1 r^{26} \times a_1 r^4 = 1 \Rightarrow a_1^2 r^{30} = 1 \Rightarrow \underbrace{a_1 r^{15}}_{a_{16}} = \pm 1 \Rightarrow a_{16} = \pm 1$$

۱۶۸ . اگر بین دو عدد a و b تعداد n عدد را به‌گونه‌ای قرار دهیم که با هم تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند نسبت مشترک از رابطهٔ $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید. بنابراین:

$$r^{4+1} = \frac{128}{4} = 32 \Rightarrow r^5 = 2^5 \Rightarrow r = 2$$

بنابراین آن اعداد عبارتند از:

$$4, \overset{\times 2}{\underset{\curvearrowright}{8}}, \overset{\times 2}{\underset{\curvearrowright}{16}}, \overset{\times 2}{\underset{\curvearrowright}{32}}, \overset{\times 2}{\underset{\curvearrowright}{64}}, \overset{\times 2}{\underset{\curvearrowright}{128}}$$

مطلوب سوال:

$$8 + 16 + 32 + 64 = 120$$

۱۶۹ . اگر a, b, c جملات متوالی دنبالهٔ هندسی باشند $b^2 = ac$ است، بنابراین:

$$(x+1)^2 = (2x-1)(2x+1) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4x^2 - 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$a = 3\ ,\ b = -2\ ,\ c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(-6) = 28 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

۱۷۰ . کافی است جملهٔ اول و نسبت مشترک را به‌دست آورده و سپس از رابطهٔ مجموع جملات استفاده کنیم:

$$\begin{matrix} a_1 = \frac{3}{4} \\ a_2 = \frac{3}{16} \end{matrix} \rightarrow r = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{16} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{4}$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{3}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{1 - \frac{1}{4^{10}}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{4^{10}} = \frac{4^{10} - 1}{4^{10}}$$

۱۷۱ . می‌دانیم اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی باشند b واسطهٔ هندسی است و $b^2 = ac$ است.

$$\left(8^{x-2y}\right)^2 = 4^{2x+y} \times 16^{x+3y} \Rightarrow 8^{2x-4y} = 2^{4x+2y} \times 2^{4x+12y} \Rightarrow 2^{6x-12y} = 2^{4x+2y} \times 2^{4x+12y}$$

$$2^{6x-12y} = 2^{8x+14y} \Rightarrow 6x - 12y = 8x + 14y \Rightarrow -2x = 26y \Rightarrow x = -13y$$

به‌عبارتی x همواره ۱۳ − برابر y است.

۱۷۲ . با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} a_4 = 5 \rightarrow a_1 r^3 = 5 \\ a_6 = 10 \rightarrow a_1 r^5 = 10 \end{matrix} \xrightarrow{\text{طرفین را بر هم تقسیم می‌کنیم}} \frac{1}{r^2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$$

نسبت‌مشترک را در یکی از رابطه‌ها جایگذاری می‌کنیم:

$$a_1 r^3 = 5 \begin{cases} \xrightarrow{r=\sqrt{2}} a_1 \times 2\sqrt{2} = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ \xrightarrow{r=-\sqrt{2}} a_1 \times -2\sqrt{2} = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{-5}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

بنابراین جملهٔ بیست‌ویکم برابر است با:

$$a_{21} = a_1 r^{20} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{2}} \times \left(\sqrt{2}\right)^{20} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \times 2^{10} = \frac{5 \times 2^9}{\sqrt{2}} \\ \frac{-5}{2\sqrt{2}} \times \left(-\sqrt{2}\right)^{20} = \frac{-5}{2\sqrt{2}} \times 2^{10} = \frac{-5 \times 2^9}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

۱۷۳ . ابتدا جملات اول و دوم دنبالهٔ داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 113 of 132

$a_۱ = ۳ \times ۲^{۱-۱} = ۳$

$a_۲ = ۳ \times ۲^{۱-۲} = ۳ \times ۲^{-۱} = \frac{۳}{۲}$

$r = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۱}} = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_۶ = a_۱ r^۵ = ۳ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۵ = \frac{۳}{۳۲} \\ a_{۱۰} = a_۱ r^۹ = ۳ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۹ = \frac{۳}{۵۱۲} \end{cases}$

واسطهٔ هندسی بین دو عدد c و a برابر است با: $b^۲ = ac$ بنابراین:

$b^۲ = \frac{۳}{۳۲} \times \frac{۳}{۵۱۲} = \frac{۳^۲}{۲^۵ \times ۲^۹} = \frac{۳^۲}{۲^{۱۴}} \Rightarrow b = \pm\frac{۳}{۲^۷} = \pm\frac{۳}{۱۲۸}$

۱۷۴ . ابتدا x را به‌دست آوریم؛

$x^۲, x^۴, ۶۴$ سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند، بنابراین:

$\left(x^۴\right)^۲ = x^۲ \times ۶۴ \Rightarrow x^۸ = x^۲ \times ۶۴ \Rightarrow x^۶ = ۶۴ \Rightarrow x = \pm ۲$

بنابراین $a_۱ = (\pm ۲)^۲ = ۴$ و $r = \frac{x^۴}{x^۲} = x^۲ = ۴$ است.

الف)

$a_۵ = a_۱ r^۴ = ۴ \times ۴^۴ = ۴^۵ = ۱۰۲۴$

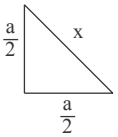
ب)

$S_n = a_۱ \times \frac{۱ - r^n}{۱ - r} \Rightarrow S_{۱۰} = ۴ \times \frac{۱ - ۴^{۱۰}}{۱ - ۴} = -\frac{۴}{۳}\left(۱ - ۴^{۱۰}\right) = -\frac{۴}{۳} + \frac{۴^{۱۱}}{۳} = \frac{۴^{۱۱} - ۴}{۳}$

۱۷۵ . کافی است مساحت‌های مربع‌های ایجاد شده را به‌دست آوریم و ببینیم چه رابطه‌ای با هم دارند.

$S_۱ = a^۲$

$S_۲ = x^۲ = \frac{a^۲}{۲}$



$x^۲ = \frac{a^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۴} = \frac{a^۲}{۲}$

$\vdots$

$S_n = \frac{a^۲}{۲^{n-۱}} \xrightarrow[n=۱۰]{a=۴۸} S = \frac{۴۸^۲}{۲^۹} = \frac{\left(۳ \times ۲^۴\right)^۲}{۲^۹} = \frac{۳^۲ \times ۲^۸}{۲^۹} = \frac{۹}{۲}$

۱۷۶ . حاصل‌ضرب شش جملهٔ اول را با جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی می‌نویسیم:

$a_n = a_۱ r^{n-۱} \Rightarrow a_۱ \times a_۱ r \times a_۱ r^۲ \times a_۱ r^۳ \times a_۱ r^۴ \times a_۱ r^۵ = ۸۱$

$\Rightarrow a_۱^۶ r^{۱۵} = ۸۱ \xrightarrow{r=\sqrt[۳]{۳}} a_۱^۶ \times \left(\sqrt[۳]{۳}\right)^{۱۵} = ۸۱ \Rightarrow a_۱^۶ \times ۳^۵ = ۸۱ \Rightarrow a_۱^۶ = \frac{۸۱}{۳^۵} = \frac{۳^۴}{۳^۵} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a_۱ = \pm\frac{۱}{\sqrt[۶]{۳}}$

۱۷۷ . چون تعداد فرد از جملات دنباله داده شده، می‌توانیم جملات را به‌صورت زیر بنویسیم:

$\frac{a}{r^۳}, \frac{a}{r^۲}, \frac{a}{r}, \overset{\text{جملهٔ چهارم}}{\overset{\downarrow}{a}}, ar, ar^۲, ar^۳$

$\frac{a}{r^۳} \times \frac{a}{r^۲} \times \frac{a}{r} \times a \times ar \times ar^۲ \times ar^۳ = ۱۲۸ \times ۳^{۱۴} \Rightarrow a^۷ = ۱۲۸ \times ۳^{۱۴}$

$\Rightarrow a^۷ = ۲^۷ \times \left(۳^۲\right)^۷ \Rightarrow a = ۲ \times ۳^۲ = ۱۸$

و جملهٔ چهارم همان ۱۸ است.

۱۷۸ . با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $a_n = a_۱ \times r^{n-۱}$ می‌توان نوشت:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 115 of 132

$$\begin{matrix} a_۳ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow a_۱ r^۲ = \frac{۱}{۹} \\ a_۵ = \frac{۱}{۸۱} \Rightarrow a_۱ r^۴ = \frac{۱}{۸۱} \end{matrix} \xrightarrow{\text{طرفین را تقسیم می‌کنیم}} \frac{۱}{r^۲} = \frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۱}{۸۱}} = ۹ \Rightarrow r^۲ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow r = \pm\frac{۱}{۳}$$

نسبت مشترک را در یکی از رابطه‌هایی که داریم جایگزین می‌کنیم تا جملهٔ اول به‌دست آید.

$$a_۱ r^۲ = \frac{۱}{۹} \xrightarrow{r=\pm\frac{۱}{۳}} a_۱ \left(\pm\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۹} \Rightarrow a_۱ = ۱$$

حال با داشتن جملهٔ اول و نسبت مشترک می‌توانیم جملهٔ هفتم را بنویسیم:

$$a_۷ = a_۱ r^۶ = ۱ \times \left(\pm\frac{۱}{۳}\right)^۶ = ۱ \times \frac{۱}{۷۲۹} = \frac{۱}{۷۲۹}$$

۱۷۹ . با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی و فرضیات سوال می‌توانیم بنویسیم:

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۶a_۲$$

$$a_۱ + a_۱ r + a_۱ r^۲ = ۶a_۱ r \Rightarrow \cancel{a_۱}\left(۱ + r + r^۲\right) = ۶\cancel{a_۱} r$$

$$r^۲ - ۵r + ۱ = ۰ \xrightarrow{a=۱\,,\,b=-۵\,,\,c=۱} \Delta = b^۲ - ۴ac = ۲۵ - ۴(۱) = ۲۱ \Rightarrow r = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۱}}{۲}$$

۱۸۰ . با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی حاصلضرب جملات اول تا پنجم را می‌نویسیم:

$$a_۱ \times a_۱ r \times a_۱ r^۲ \times a_۱ r^۳ \times a_۱ r^۴ = ۲۴۳$$

$$a_۱^۵ r^{۱۰} = ۲۴۳ \Rightarrow \left(a_۱ r^۲\right)^۵ = ۳^۵ \Rightarrow a_۱ r^۲ = ۳ \Rightarrow a_۳ = ۳$$

۱۸۱ . ابتدا با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی جملات داده شده را باز می‌کنیم؛ سپس نسبت مشترک و جملهٔ اول را به‌دست می‌آوریم:

$$a_۸ = ۴a_۶ \Rightarrow a_۱ r^۷ = ۴a_۱ r^۵ \Rightarrow r^۲ = ۴ \Rightarrow r = \pm ۲$$

$$a_۲ + a_۵ = ۲۱۶ \Rightarrow a_۱ r + a_۱ r^۴ = ۲۱۶ \Rightarrow a_۱ r\left(۱ + r^۳\right) = ۲۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = ۲ : \; ۲a_۱ \times ۹ = ۲۱۶ \Rightarrow a_۱ = ۱۲ \\ r = -۲ : \; -۲a_۱ \times -۷ = ۲۱۶ \Rightarrow a_۱ = \frac{۱۰۸}{۷} \end{cases}$$

۱۸۲ . ابتدا نسبت مشترک را به‌دست آورده و سپس خواهیم داشت:

$$a_۱ = ۲$$

$$r = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \Rightarrow a_۷ = ۲ \times ۳^۶ = ۱۴۵۸$$

$$S_n = a_۱ \times \frac{۱ - r^n}{۱ - r} \Rightarrow S_۷ = ۲ \times \frac{۱ - ۳^۷}{۱ - ۳} = ۲ \times \frac{۱ - ۳^۷}{-۲} = ۳^۷ - ۱ = ۲۱۸۶$$

۱۸۳ .

$$\sqrt[۳]{A} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow A = \frac{۲^۳}{۳^۳}$$

ریشهٔ دوم A : $\pm\sqrt{A} = \pm\sqrt{\frac{۲^۳}{۳^۳}} = \pm\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}} = \pm\frac{۲}{۳} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \pm\frac{۲}{۹}\sqrt{۶}$

۱۸۴ .

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{۷۵} = \sqrt{۵^۲ \times ۳} = ۵\sqrt{۳} \\ \sqrt{۱۲} = \sqrt{۲^۲ \times ۳} = ۲\sqrt{۳} \\ \sqrt{۲۷} = \sqrt{۳^۲ \times ۳} = ۳\sqrt{۳} \\ \sqrt[۴]{۴} = \sqrt[۴]{۲^۲} = \sqrt{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{۵\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۲} = ۲\sqrt{۶}$$

ریشهٔ دوم مثبت عدد ۶ برابر $\sqrt{۶}$ است، بنابراین داریم:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 117 of 132

$$\frac{۲\sqrt{۶}}{\sqrt{۶}} = ۲$$

۱۸۵.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(۲+\sqrt{۲})^۲ - ۴\sqrt{۲}} = \sqrt{۴+۴\sqrt{۲}+۲-۴\sqrt{۲}} = \sqrt{۶} \\ (\frac{۱}{۴})^{-۰/۲۵} = (۲^{-۲})^{-\frac{۱}{۴}} = ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{حاصل عبارت} : \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$$

۱۸۶.

$$۱۶^{\frac{۳}{۴}} \times (۰/۰۴)^{-\frac{۳}{۲}} \times ۸۱^{\frac{۱}{۴}} = (۲^۴)^{\frac{۳}{۴}} \times (\frac{۴}{۱۰۰})^{-\frac{۳}{۲}} \times (۳^۴)^{\frac{۱}{۴}} = ۲^۳ \times (\frac{۲^۲}{۱۰^۲})^{-\frac{۳}{۲}} \times ۳$$

$$= ۲^۳ \times \frac{۲^{-۳}}{۱۰^{-۳}} \times ۳ = ۲^۳ \times \frac{۱۰^۳}{۲^۳} \times ۳ = ۱۰^۳ \times ۳ = ۳۰۰۰$$

۱۸۷.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۴]{\frac{۱}{۹}} = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۳^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = ۳^{-\frac{۱}{۲}} \\ (۲۷^{\frac{۵}{۳}})^{\frac{۲}{۵}} = ((۳^۳)^{\frac{۵}{۳}})^{\frac{۲}{۵}} = ۳^{۳\times\frac{۵}{۳}\times\frac{۲}{۵}} = ۳^۲\end{array}\right\} \Rightarrow ۳^{-\frac{۱}{۲}} \times ۳^۲ = ۳^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt{۳^۳} = \sqrt{۳^۲ \times ۳} = ۳\sqrt{۳}$$

۱۸۸.

$$\sqrt[۵]{۳\sqrt[۲]{۳}} = \sqrt[۵]{\sqrt[۲]{۳^۲ \times ۳}} = \sqrt[۵]{\sqrt[۲]{۳^۳}} = \sqrt[۱۰]{۳^۳} = ۳^{\frac{۳}{۱۰}}$$

$$۳^A = ۳^{\frac{۳}{۱۰}} \Rightarrow A = \frac{۳}{۱۰}$$

۱۸۹.

$$\text{طرف اول تساوی} = \frac{\boxed{x^{m-۱}}\, y^{۲n-۳} z^۲}{\boxed{x^۲}\, y^۵} = x^{m-۱-۲} y^{۲n-۳-۵} z^۲ = x^{m-۳} y^{۲n-۸} z^۲ \text{، طرف دوم تساوی} = \frac{xz^۲}{y^۴} = xy^{-۴}z^۲$$

$$\Rightarrow \text{توان‌های طرفین برابر باشد.} \begin{cases} m-۳ = ۱ \rightarrow m = ۴ \\ ۲n - ۸ = -۴ \rightarrow ۲n = ۸ - ۴ = ۴ \Rightarrow n = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + ۲n = ۴ + ۲(۲) = ۴ + ۴ = ۸$$

۱۹۰.

$$\left.\begin{array}{l}۸^{\frac{۲}{۳}} = (۲^۳)^{\frac{۲}{۳}} = ۲^{۳\times\frac{۲}{۳}} = ۲^۲ = ۴ \\ ۲۷^{\frac{۱}{۳}} = (۳^۳)^{\frac{۱}{۳}} = ۳^{۳\times\frac{۱}{۳}} = ۳\end{array}\right\} \Rightarrow ۸^{\frac{۲}{۳}} - ۲۷^{\frac{۱}{۳}} = ۴ - ۳ = ۱$$

۱۹۱.

$$\sqrt[۵]{(\sqrt{۳}-۱)^۵} = \sqrt{۳} - ۱$$

$$\sqrt[۶]{(۲-۲\sqrt{۳})^۶} = \underbrace{|۲-۲\sqrt{۳}|}_{\text{منفی}} = -(۲-۲\sqrt{۳}) = -۲ + ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳} - ۱ - (-۲ + ۲\sqrt{۳}) = \sqrt{۳} - ۱ + ۲ - ۲\sqrt{۳} = ۱ - \sqrt{۳}$$

۱۹۲.

$$\left.\begin{array}{l}۱۶^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۶} = ۴ \\ ۲۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲۵} = ۵\end{array}\right\} \Rightarrow ۴ + ۵ = ۹$$

۱۹۳.

$$\sqrt{۹ - ۴\sqrt{۵}} = \sqrt{(۲-\sqrt{۵})^۲} = |\underbrace{۲-\sqrt{۵}}_{\text{داخل قدرمطلق منفی است.}}| = -(۲-\sqrt{۵}) = -۲ + \sqrt{۵}$$

۱۹۴.

$$\sqrt[۳]{x} = x \xrightarrow{\text{طرفین به توان } ۳} x = x^۳ \Rightarrow x^۳ - x = ۰$$

$$x(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ و } x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 119 of 132

۱۹۵.

$\sqrt[۳]{x}=\sqrt[۵]{x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان } ۱۵} x^۵=x^۳$ ریشهٔ سوم و پنجم عددی برابرند ⇒

$x^۵-x^۳=۰ \Rightarrow x^۳(x^۲-۱)=۰ \Rightarrow$

$\begin{cases} \Rightarrow x=۰ \text{ غیرقابل قبول } (\text{زیرا } x \text{ عددی مثبت است}) \\ \text{یا} \\ \Rightarrow x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=+۱ \checkmark \\ x=-۱ \text{ غیرقابل قبول} \end{cases} \end{cases}$

در نتیجه عدد مورد نظر $x=۱$ است؛ داریم:

$\left.\begin{matrix} \text{ریشهٔ هفتم}: \sqrt[۷]{۱}=۱ \\ \text{ریشهٔ نهم}: \sqrt[۹]{۱}=۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۱+۱=۲$

۱۹۶.

$\left.\begin{matrix} f(۳)=۲^۳=۸ \\ f(-۲)=۳^{-۲}=\frac{۱}{۳^۲}=\frac{۱}{۹} \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۸\times\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}$

۱۹۷. می‌دانیم تابع نمایی عامل $x^۲$ ندارد؛ بنابراین داریم:

$k-۲=۰ \to k=۲ \quad , \quad f(x)=۲^x \Rightarrow f(۳)=۲^۳=۸$

۱۹۸.

راه حل اول:

ابتدا دو تابع را با هم مساوی قرار می‌دهیم تا طول نقطهٔ تقاطع بدست آید.

$۲^x=(\frac{۱}{۲})^x \Rightarrow ۲^x=\frac{۱}{۲^x} \Rightarrow ۲^{۲x}=۱ \Rightarrow ۲x=۰ \to x=۰$

$x=۰$ را در یکی از معادلات جایگزین می‌کنیم:

$y=۲^۰=۱$

بنابراین دو تابع یکدیگر را در نقطهٔ $(۰,۱)$ قطع می‌کنند.

راه حل دوم:

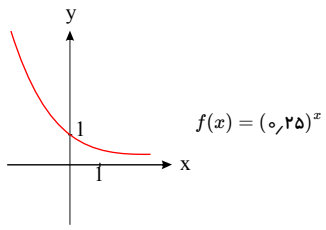
اگر نمودار دو تابع را رسم کنیم، چون هر دو تابع‌نمایی می‌باشد، از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرد که همان نقطهٔ تقاطع دو نمودار است.

۱۹۹. معادلات دو نمودار را برابر هم قرار می‌دهیم:

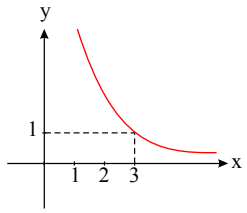
$۳^x+۲=(\frac{۱}{۳})^x \Rightarrow ۳^x+۲=\frac{۱}{۳^x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۳^{۲x}+۲\times۳^x-۱=۰ \quad , \quad ۳^x=t \quad , \quad t^۲+۲t-۱=۰$

$\Delta=۴-۴(-۱)=۸ \quad , \quad t=\frac{-۲\pm\sqrt{۸}}{۲}=\frac{-۲\pm۲\sqrt{۲}}{۲} \quad , \quad t=-۱\pm\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۳^x=-۱-\sqrt{۲} \text{ غیرقابل قبول } (\text{عدد منفی}) \\ ۳^x=-۱+\sqrt{۲} \text{ قابل قبول} \end{cases}$

۲۰۰.

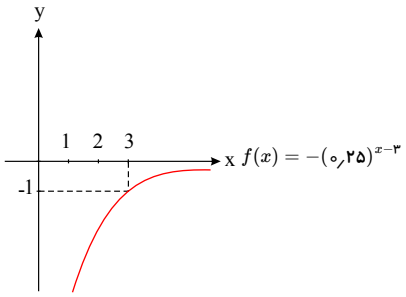


$f(x)=(۰/۲۵)^x$



$f(x)=(۰/۲۵)^{x-۳}$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 121 of 132



۲۰۱ . تابع نمایی به صورت $f(x)=a^x$ می‌باشد، بنابراین ضریب $x^۲$ باید صفر شود:

$$۲+k=۰\rightarrow k=-۲$$

$$f(x)=(-۲+۴)^x=۲^x \xrightarrow{x=۳} ۲^۳=۸$$

۲۰۲ . اگر به جای x عدد ۲ را قرار دهیم، y برابر a می‌شود:

$$x=۲\rightarrow y=۳^۲=۹\Rightarrow a=۹$$

و اگر به جای x عدد b را قرار دهیم، y برابر $\frac{۱}{۲۷}$ می‌شود.

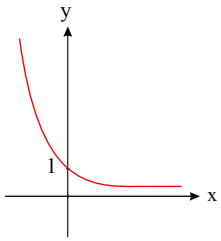
$$\frac{۱}{۲۷}=۳^b\Rightarrow \frac{۱}{۳^۳}=۳^b\Rightarrow ۳^{-۳}=۳^b\Rightarrow b=-۳$$

۲۰۳ . می‌دانیم تابع نمایی به صورت $y=a^x$ می باشد؛ بنابراین ضریب x در تابع $f(x)$ باید صفر شود.

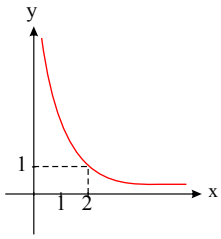
$$k+۲=۰\rightarrow k=-۲$$

$$[(-۲+۴)^x]=[۲^x]\xrightarrow{x=۲}[۲^۲]=۴$$

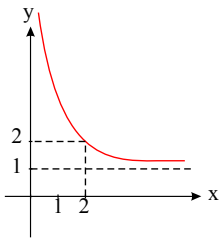
۲۰۴ .



$f(x)=(\frac{۱}{۵})^x$

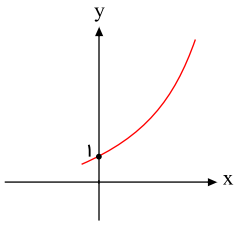


$f(x)=(\frac{۱}{۵})^{x-۲}$

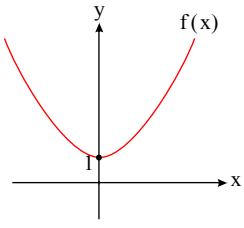


$f(x)=(\frac{۱}{۵})^{x-۲}+۱$

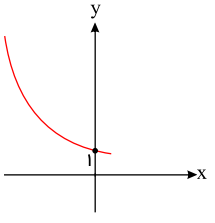
۲۰۵ . به ازای xهای بزرگتر مساوی صفر یعنی $f(x)=۵^x$



و به ازای xهای کوچکتر از صفر یعنی $f(x)=(\frac{۱}{۳})^x$



را داریم، با توجه به تمام مقادیر x و ترکیب دو نمودار داریم:



۲۰۶ . کافی است به‌جای x، عدد صفر را قرار دهیم:

$$f(۰)=(\frac{۱}{۳})^{۰^{-۱}}=(\frac{۱}{۳})^{-۱}=۳^۱=۳\Rightarrow \text{نقطهٔ تلاقی}: (۰,۳)$$

۲۰۷ . کافی است به‌جای x، صفر قرار دهیم:

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 123 of 132

$f(۰) = ۳^{۰-۱} = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow$ نقطهٔ تلاقی : $(۰, \frac{۱}{۳})$

۲۰۸.

با توجه به فرمول رشدنمایی و مقادیر داده شده مسئله را حل می‌کنیم.

$$f(t) = c(1+r)^t$$

$$f(3) = 100,000,000 \times (1+\frac{20}{100})^3 = 100,000,000 \times (1/2)^3 = 100,000,000 \times 1/728 = 172,800,000 \text{ تومان}$$

۲۰۹ . از سال ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۲ دو سال سپری شده است.

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(2) = c(1+r)^2 \Rightarrow 64,000 = 25,000(1+r)^2$$
$$\Rightarrow \frac{64}{25} = (1+r)^2 \Rightarrow \frac{8}{5} = 1+r \Rightarrow r = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = \%60$$

۲۱۰ . ابتدا ضریب رشد آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$f(t) = c(1+r)^t \xrightarrow{\text{پس از ۳۵ سال ۲ برابر می‌شود}} 2c = c(1+r)^{35} \Rightarrow 2 = (1+r)^{35} \quad (1)$$

حال اگر بخواهیم این تعداد را پس از ۷۰ سال پیدا کنیم:

$$f(70) = 7(1+r)^{70} = 7((1+r)^{35})^2 \xrightarrow{\text{با توجه به (1)}} 7(2)^2 = 7 \times 4 = 28$$

روش دوم:

$$\text{۲۸ میلیارد} \xrightarrow[\times 2]{\text{۳۵ سال}} \text{۱۴ میلیارد} \xrightarrow[\times 2]{\text{۳۵ سال}} \text{۷ میلیارد}$$

۲۱۱ . بهتر است با استفاده از فلش‌گذاری از آخر به اول سؤال برگردیم:

$$20gr \xleftarrow[\times 2]{\text{۱۰۰ سال}} 40gr \xleftarrow[\times 2]{\text{۱۰۰ سال}} 80gr \xleftarrow[\times 2]{\text{۱۰۰ سال}} 160gr \xleftarrow[\times 2]{\text{۱۰۰ سال}} 320gr \xleftarrow[\times 2]{\text{۱۰۰ سال}} 640gr \xleftarrow[\times 2]{\text{۱۰۰ سال}} 1280gr$$

درنتیجه مقدار اولیه $1280gr$ است.

۲۱۲ . کافی است؛ معادلات دو تابع را با هم برابر قرار دهیم:

$$(\frac{1}{2})^{x-1} = (\frac{1}{4})^{x+1} \Rightarrow (2^{-1})^{x-1} = (2^{-2})^{x+1} \Rightarrow 2^{-x+1} = 2^{-2x-2}$$
$$\Rightarrow -x+1 = -2x-2 \Rightarrow x = -3$$

$x=-3$ را در یکی از توابع مثلاً $f(x)$، جایگزین می‌کنیم:

$$f(-3) = (\frac{1}{2})^{-3-1} = (2^{-1})^{-4} = 2^4 = 16 \Rightarrow$$ نقطهٔ برخورد $(-3,16)$ است.

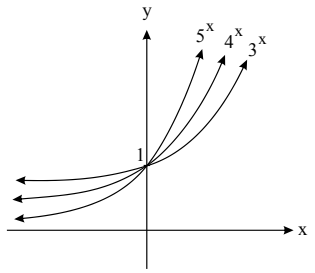
۲۱۳ . نمودار تابع $f(x)$ از نقطهٔ $(2,36)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$36 = k^2 \times 3^2 \Rightarrow 36 = k^2 \times 9 \rightarrow k^2 = 4 \rightarrow k = 2$$

پس تابع $g(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$g(x) = 2^x \Rightarrow g(3) = 2^3 = 8$$

۲۱۴ .



۲۱۵ .

به کمک فرمول جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $a_n = a_1 r^{n-1}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 81 \xrightarrow{a_n = a_1 r^{n-1}} a_1 + a_1 r = 81 \Rightarrow a_1(1+r) = 81 \quad (1) \\ a_5 + a_6 = 16 \xrightarrow{a_n = a_1 r^{n-1}} a_1 r^4 + a_1 r^5 = 16 \Rightarrow a_1 r^4 (1+r) = 16 \quad (2) \end{cases}$$

حال، دو عبارت به‌دست‌آمده را بر هم تقسیم می‌کنیم، درنتیجه داریم:

$$\Rightarrow \frac{a_1(1+r)}{a_1 r^4 (1+r)} = \frac{81}{16} \Rightarrow \frac{1}{r^4} = \frac{81}{16} \Rightarrow r^4 = \frac{16}{81} \quad (3)$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 125 of 132

مجموع شش جمله $= \underbrace{a_1 + a_2}_{۸۱} + a_3 + a_4 + \underbrace{a_5 + a_6}_{۱۶} = ۹۷ + a_3 + a_4 = ۹۷ + a_1 r^2 + a_1 r^3 = ۹۷ + a_1 r^2 (1 + r)$

$\xrightarrow{a_1(1+r)=۸۱} ۹۷ + ۸۱ r^2 = ۹۷ + ۸۱\sqrt{r^4} \overset{(۳)}{=\!=} ۹۷ + ۸۱$

$\sqrt{\frac{۱۶}{۸۱}} = ۹۷ + ۸۱(\frac{۴}{۹}) = ۹۷ + ۳۶ = ۱۳۳$

۲۱۶.

در یک دنبالهٔ هندسی اگر تعداد جملات زوج باشد، نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر نسبت مشترک دنباله است.

اثبات نکته:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_4}{t_3} = \cdots = r$$

$$t_2 = r t_1, t_4 = r t_3 \Rightarrow \frac{t_2 + t_4 + t_6 + \cdots + t_{2n}}{t_1 + t_3 + \cdots + t_{2n-1}} = \frac{r(t_1 + t_3 + \cdots + t_{2n-1})}{(t_1 + t_3 + \cdots + t_{2n-1})} = r$$

در این دنباله داریم:

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{-\frac{۲}{۳}}{\frac{۲}{۹}} = \frac{-۱۸}{۶} = -۳$$

نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر (-۳) است.

۲۱۷.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 r^2 = ۸ \\ a_1 r^3 + a_1 r^5 = ۶۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + r^2) = ۸ \\ a_1 r^3 (1 + r^2) = ۶۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 r^3 (1 + r^2)}{a_1 (1 + r^2)} = \frac{۶۴}{۸}$$

$$r^3 = ۸ \Rightarrow r^3 = ۲^3 \Rightarrow r = ۲$$

$$a_1 + a_1 r^2 = ۸ \xrightarrow{r=۲} a_1 + a_1 \times ۲^2 = ۸ \Rightarrow a_1 + ۴a_1 = ۸ \Rightarrow ۵a_1 = ۸ \Rightarrow a_1 = \frac{۸}{۵}$$

۲۱۸.

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{۸۱}{۱۶} \rightarrow \frac{\cancel{a_1} \times r^6}{\cancel{a_1} \times r^2} = \frac{۸۱}{۱۶} \rightarrow r^4 = \frac{۸۱}{۱۶} \rightarrow r = \pm\frac{۳}{۲} \rightarrow r = +\frac{۳}{۲}$$

$$a_4 = a_1 \times r^3 = a_1 \times \frac{۲۷}{۸} = \frac{۹}{۴} \rightarrow a_1 = \frac{۲}{۳}$$

$$a_2 = a_1 r = \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۲} = ۱$$

۲۱۹.

$$\xrightarrow[\text{سه جملهٔ متوالی حسابی}]{۶,x,۱۴} x = \frac{۱۴ + ۶}{۲} = ۱۰$$

$$\xrightarrow[\text{سه جملهٔ متوالی هندسی}]{۴,۱۲,y} ۱۲^2 = ۴ \times y \Rightarrow y = \frac{۱۴۴}{۴} = ۳۶$$

$$x, y, z \Rightarrow ۱۰, ۳۶, z \xrightarrow{\text{تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند}} ۳۶^2 = ۱۰ \times z \Rightarrow z = ۳٫۶ \times ۳۶ = ۱۲۹٫۶$$

۲۲۰.

در هر دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و نسبت مشترک r، جملهٔ nام از رابطهٔ $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

$$a_2 \times a_4 = \frac{۴}{۸۱} \Rightarrow a_1 r \times a_1 r^3 = \frac{۴}{۸۱} \Rightarrow a_1^2 r^4 = \frac{۴}{۸۱} \Rightarrow (a_1 r^2)^2 = \frac{۴}{۸۱} \Rightarrow a_1 r^2 = \pm\frac{۲}{۹}$$

چون r^2 مثبت است و جملات دنباله، منفی هستند، پس $a_1 r^2 = -\frac{۲}{۹}$ است.

$$a_1 + a_3 = -\frac{۱۳}{۱۸} \Rightarrow a_1 + a_1 r^2 = -\frac{۱۳}{۱۸} \xrightarrow{a_1 r^2 = -\frac{۲}{۹}} a_1 - \frac{۲}{۹} = -\frac{۱۳}{۱۸} \Rightarrow a_1 = -\frac{۱۳}{۱۸} + \frac{۲}{۹}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-۱۳ + ۴}{۱۸} = -\frac{۹}{۱۸} = -\frac{۱}{۲}$$

۲۲۱.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 127 of 132

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۳]{-۱۲۵}=\sqrt[۳]{(-۵)^۳}=-۵\\ \sqrt{۲۵}=۵\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[۳]{-۱۲۵}-\sqrt{۲۵}=-۵-۵=-۱۰$$

۲۲۲ . عدد $\sqrt[۳]{۱۷}$ بین دو عدد $\sqrt[۳]{۸}$ و $\sqrt[۳]{۲۷}$ قرار دارد پس داریم:

$$\sqrt[۳]{۸}<\sqrt[۳]{۱۷}<\sqrt[۳]{۲۷}$$
$$\sqrt[۳]{۲^۳}<\sqrt[۳]{۱۷}<\sqrt[۳]{۳^۳}\Rightarrow ۲<\sqrt[۳]{۱۷}<۳$$

پس بین دو عدد ۲ ,۳ قرار می‌گیرد.

۲۲۳ .

$$\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(۱+\sqrt{۳})^۲}+\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^۲}=\underbrace{|۱+\sqrt{۳}|}_{\text{مثبت}}+\underbrace{|۲-\sqrt{۳}|}_{\text{مثبت}}$$
$$=۱+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}=۳$$

۲۲۴ .

$$\sqrt[۶]{x}=۶\xrightarrow{\text{طرفین به توان }۶} x=۳^۶$$
$$x\text{ ریشهٔ دوم}=\pm\sqrt[۲]{۳^۶}=\pm۳^{\frac{۶}{۲}}=\pm۳^۳=\pm۲۷$$

۲۲۵ .

$$(۲/۱)^۶\times(\frac{۲۱}{۱۰})^۳\times(۲\frac{۱}{۱۰})^۵=(۲/۱)^۶\times(۲/۱)^۳\times(۲/۱)^۵=(۲/۱)^{۱۴}$$

۲۲۶ .

$$a=۳\sqrt{۳}=\sqrt{۲۷}\Rightarrow ۹a^{\frac{۲}{۳}}=۹(\sqrt{۲۷})^{\frac{۲}{۳}}=۹((۲۷)^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۲}{۳}}$$
$$=۹\times۲۷^{\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}}=۹\times۲۷^{\frac{۱}{۳}}=۹\times(۳^۳)^{\frac{۱}{۳}}=۹\times۳=۲۷$$

۲۲۷ .

$$(۰/۰۰۸)^{-\frac{۲}{۳}}=(\frac{۸}{۱۰۰۰})^{-\frac{۲}{۳}}=(\frac{۲^۳}{۱۰^۳})^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۲^{-۲}}{۱۰^{-۲}}=\frac{۱۰^۲}{۲^۲}=\frac{۱۰۰}{۴}$$

۲۲۸ . بعد از هر نیمه‌عمر مقدار دارو نصف می‌شود، بنابراین:

$$۸۰^{mg}\longrightarrow ۴۰^{mg}\longrightarrow ۲۰^{mg}\longrightarrow ۱۰^{mg}\longrightarrow ۵^{mg}$$

بنابراین بعد از گذشت ۴ نیمه‌عمر ۵ میلی‌گرم از آن در بدن باقی می‌ماند.

۲۲۹ . در تابع $f(x)=a^x$ می‌دانیم $۰<a<۱$ یا $a>۱$ است پس a نمی‌تواند صفر، یک و اعداد منفی باشد:

$$۳k-۶\neq ۰\Rightarrow ۳k\neq ۶\Rightarrow k\neq ۲$$
$$۳k-۶\neq ۱\Rightarrow ۳k\neq ۷\Rightarrow k\neq\frac{۷}{۲}\Rightarrow k\neq ۳/۵$$
$$۳k-۶\not<۰\rightarrow ۳k\not<۶\Rightarrow k\not<۲$$

پس k نمی‌تواند ۲ و ۳ و اعداد کوچک‌تر از ۲ باشد.

۲۳۰ .

$$f(t)=c(۱+r)^t\Rightarrow f(t)=۱۰۰۰(۱+\frac{۲۰}{۱۰۰})^۲=۱۰۰۰\times(۱/۲)^۲=۱۰۰۰\times۱/۴۴=۱۴۴۰\quad(\text{تومان})$$

۲۳۱ . بهتر است با استفاده از روش فلش‌گذاری، سؤال را از آخر به اول حل کنیم:

$$\underset{\times۲}{\overset{۵۷۰۰\text{ سال}}{\longleftarrow}}\ ۱۲/۵\ \underset{\times۲}{\overset{۵۷۰۰\text{ سال}}{\longleftarrow}}\ ۲۵\ \underset{\times۲}{\overset{۵۷۰۰\text{ سال}}{\longleftarrow}}\ ۵۰\ \longleftarrow\ ۱۰۰\text{ درصد اولیه}$$

مدت زمان: $۳\times۵۷۰۰=۱۷۱۰۰$ سال $=۱۷۱$ قرن

۲۳۲ .

$$۴gr\xrightarrow{۱۴\text{ روز}}۲gr\xrightarrow{۱۴\text{ روز}}۱gr\Rightarrow\text{ مدت زمان : }۲\times۱۴=۲۸\text{ روز}$$

۲۳۳ .

$$۹۶gr\xrightarrow{۶\text{ ساعت}}۴۸gr\xrightarrow{۶\text{ ساعت}}۲۴gr\xrightarrow{۶\text{ ساعت}}۱۲gr\xrightarrow{۶\text{ ساعت}}۶gr\Rightarrow\text{ ۶ گرم باقی می‌ماند.}$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 129 of 132

۲۳۴ .

$y = a(\frac{۱}{۳})^x$

نقطه‌ای به عرض ۴ روی محور yها نقطهٔ $(۰, ۴)$ است. بنابراین:

$$\Rightarrow ۴ = a(\frac{۱}{۳})^{۰} \Rightarrow ۴ = a \times ۱ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow y = ۴ \times (\frac{۱}{۳})^x \xrightarrow{x=-۲} y = ۴ \times (\frac{۱}{۳})^{-۲} = ۴ \times ۹ = ۳۶$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=7013016
6/1/24, 01:41
Page 131 of 132