نام آزمون: ۳۰ تست سراسری مشتق چهار سال اخیر

آموزشگاه پرسا

۱) مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳$، در نقطهٔ $x=۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

۲) مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{(\dfrac{۲x-x^۲}{۳x+۵})^۲}$، در نقطهٔ $x=-۲$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳) اگر $f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۵}$

۴) اگر $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{۲x^۲+x-۱}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۵) خط d در نقطهٔ $(-۱,۵)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{۱}{۲}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x}f(x)$ باشد، مقدار $g'(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶}$

۶) در تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ;۰\leq x<۴\\ [\frac{x}{۴}](x^۲-۹x) & ;۴\leq x<۸\end{cases}$ ، مقدار $f'(۲)-f'(۵)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۷) در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ;۰\leq x<۴\\ [\frac{x}{۴}](x^۲-۹x) & ;۴\leq x<۸\end{cases}$ ، مقدار $f'(۲)-f'(۵)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۸) خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\dfrac{۵x-۴}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=۴$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹) خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^۲+bx$، در نقطهٔ $x=۲$، مشترک‌اند. مقدار b، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۱ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۲ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۱) -12 ۲) -8 ۳) 8 ۴) 12

۱۳ از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x) = \sqrt{x} + 2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر α زاویهٔ حادهٔ بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(2\alpha)$، کدام است؟

۱) $\dfrac{7}{15}$ ۲) $\dfrac{8}{15}$ ۳) $\dfrac{225}{289}$ ۴) $\dfrac{240}{289}$

۱۴ معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x+3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به‌صورت $4y - 3x = n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

۱۵ اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \dfrac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) $\dfrac{2}{3}$ ۴) ۱

۱۶ در کدام نقطه از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$، خط مماس بر منحنی، بر $6y - 3x = 1$ عمود است؟

۱) $(-2, 17)$ ۲) $(-1, 10)$ ۳) $(1, 2)$ ۴) $(2, 1)$

۱۷ خط d موازی محور xها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصلهٔ خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱٫۲۵ ۲) ۳٫۲۵ ۳) ۰٫۷۵ ۴) ۲٫۷۵

۱۸ فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1$ و $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$، مقدار مشتق تابع fog در $x = \dfrac{3}{\sqrt{8}}$ چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

۱) -4 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۹ فرض کنید $f(x) = (x[x])^3$ و $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$؛ مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-48\sqrt{5})$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۰ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x < -1 \\ x & ; \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$ تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۱) تابع f مشتق‌پذیر و با دورهٔ تناوب ۵ است. اگر $f'(-۱)=\frac{۳}{۲}$ و $g(x)=f(x+۱)+f(۳x+۱۰)$ باشد، حاصل $g'(-۲)$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) $\frac{۷}{۲}$　　۳) ۶　　۴) $\frac{۱۳}{۲}$

۲۲) اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۳-|x^۳|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[۳]{۲})f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) ۱　　۴) -۱

۲۳) اگر $f(x)=-\frac{۱}{\sqrt[۵]{x+|x|}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۵+|x^۵|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $-\frac{۱}{۳}$　　۳) -۱　　۴) ۱

۲۴) تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & ;x\leq -۲\\ -\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c & ;x>-۲\end{cases}$، در $x=-۲$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$　　۲) $-\frac{۱}{۳}$　　۳) $\frac{۱}{۳}$　　۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۵) فرض کنید $g(x)=ax^۲+bx+c$، $(a\neq ۰)$ ، $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\geq k\\ g'(x) & x<k\end{cases}$ باشد اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد حداکثر مقدار k با شرط $b+c=a$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$　　۲) ۱　　۳) ۳　　۴) ۴

۲۶) فرض کنید $g(x)=ax^۲+۵x+b$. اگر $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\leq ۲\\ g'(x) & x>۲\end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$　　۲) $-\frac{۵}{۲}$　　۳) $\frac{۵}{۲}$　　۴) $\frac{۱۵}{۲}$

۲۷) آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}$ در بازهٔ $[۵,۶]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، در کدام طول x است؟

۱) $۴+\sqrt{۲}$　　۲) $۳+۲\sqrt{۲}$　　۳) $۲+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$　　۴) $۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

۲۸) در بازه $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}\right]$، آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin x\cos ۲x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin^۴ x-\cos^۴ x$ است؟

۱) -۱　　۲) ۱　　۳) $-\frac{۱}{۲}$　　۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخنامه تشریحی

۱) ۱ ۲ ۳ **۴**

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳=\frac{x^۲+۲x}{(x^۲-x)^۳}\to f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲-x)^۳-۳(x^۲-x)^۲(۲x-۱)(x^۲+۲x)}{(x^۲-x)^۶}\to f'(۲)=\frac{(۶)(۸)-۳(۴)(۳)(۸)}{۶۴}$$

$$=\frac{۴۸-۲۸۸}{۶۴}=\frac{-۲۴۰}{۶۴}=\frac{-۱۵}{۴}$$

۲) ۱ ۲ ۳ **۴**

$$f(x)=\sqrt[۳]{(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵})^۲}\to f'(x)=\frac{۲(\frac{(۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲)}{(۳x+۵)^۲})}{۳\sqrt[۳]{\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}}}\to f'(-۲)=\frac{۲(\frac{(۶)(-۱)-۳(-۸)}{۱})}{۳\sqrt[۳]{\frac{-۸}{-۱}}}=\frac{۲(۱۸)}{۶}=۶$$

۳) ۱ **۲** ۳ ۴

$$f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$$

حد خواسته‌شده را به‌صورت تعریف مشتق می‌نویسیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}$$

چون $f(۵)=۱\times\sqrt[۳]{۸}=۲$، داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۵-h)-۱}{۵-h}\times\lim_{h\to ۰}\frac{f(۵-h)-۲}{h}=\frac{f(۵-h)-۲}{h}\times\lim_{h\to ۰}\frac{f(۵-h)-۲}{h}$$

$$=\frac{۲-۱}{۵}\times\lim_{h\to ۰}\frac{f(۵+(-h))-f(۵)}{h}=-\frac{۱}{۵}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۵+(-h))-f(۵)}{-h}$$

با فرض $-h=t$ داریم:

$$-\frac{۱}{۵}\lim_{t\to ۰}\frac{f(۵+t)-f(۵)}{t}=-\frac{۱}{۵}f'(۵)$$

$$f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}\Rightarrow f'(x)=۱\times\sqrt[۳]{x+۳}+\frac{x-۴}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$$

$$f'(۵)=\sqrt[۳]{۸}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۶۴}}=۲+\frac{۱}{۳\times ۴}=۲+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲۵}{۱۲}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$-\frac{۱}{۵}f'(۵)=-\frac{۱}{۵}\times\frac{۲۵}{۱۲}=-\frac{۵}{۱۲}$$

۴) ۱ **۲** ۳ ۴ با فاکتور گرفتن ۲ از صورت کسر داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲(f(x)-\frac{۱}{۲})}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-\frac{۱}{۲}}{x-۱}$$

در تابع $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{۲x^۲+x-۱}$، توجه کنید که $f(۱)=\frac{۱}{۲}$، پس:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=f'(۱)$$

حال مشتق f در $x=۱$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{x}+\frac{x}{۲\sqrt{x}})(۲x^۲+x-۱)-(۴x+۱)x\sqrt{x}}{(۲x^۲+x-۱)^۲}$$

$$f'(۱)=\frac{(۱+\frac{۱}{۲})(۲+۱-۱)-(۴+۱)\times ۱}{(۲+۱-۱)^۲}=\frac{\frac{۳}{۲}\times ۲-۵}{۴}=-\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

۵) ۱ ۲ ۳ **۴** طبق فرض، شیب خط مماس در نقطهٔ $(۵,-۱)$ از تابع برابر $\frac{-۱}{۲}$ است، پس:

$$\begin{cases} f(-1)=5 \\ f'(-1)=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

مشتق تابع g به‌صورت زیر می‌شود:

$$g(x)=\sqrt[3]{x}\cdot f(x)\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}f(x)+\sqrt[3]{x}f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-1} g'(-1)=\frac{1}{3}f(-1)-f'(-1)=\frac{5}{3}+\frac{1}{2}=\frac{13}{6}$$

۶ — **۱** ۲ ۳ ۴

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+6x} & ;0\le x<4 \\ [\frac{x}{4}](x^2-9x) & ;4\le x<8 \end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ تابع، برای محاسبهٔ $f'(2)$ از ضابطهٔ بالایی و برای محاسبهٔ $f'(5)$ از ضابطهٔ پایینی استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^2+6x}\to f'(x)=\frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}\Rightarrow f'(2)=\frac{4+6}{2\times 4}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

برای مشتق تابع در $x=5$ باید از ضابطه پایینی استفاده کنیم:

$$f(x)=[\frac{x}{4}](x^2-9x)$$

ابتدا باید براکت را در $x=5$ تعیین عدد کنیم و سپس مشتق بگیریم:

$$x=5: f(x)=x^2-9x\Rightarrow f'(x)=2x-9\Rightarrow f'(5)=1$$

$$f'(2)-f'(5)=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$

۷ — **۱** ۲ ۳ ۴ توجه کنید که وقتی $4\le x<8$ است آن‌گاه $1\le\frac{x}{4}<2$ بوده و $[\frac{x}{4}]=1$ می‌باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+6x} & 0\le x<4 \\ x^2-9x & 4\le x<8 \end{cases}$$

برای محاسبهٔ $f'(2)$ سراغ ضابطهٔ بالا و برای محاسبهٔ $f'(5)$ سراغ ضابطهٔ پایین می‌رویم.

$$f'(2)=\frac{1(2x+6)}{2\sqrt{x^2+6x}}=\frac{4+6}{2\sqrt{4+12}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$f'(5)=2x-9=10-9=1$$

پس: $f'(2)-f'(5)=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$

۸ — ۱ ۲ **۳** ۴

$$1)\ x=4\xrightarrow{\text{تابع}}y=8\Rightarrow A\left|\begin{matrix}4\\8\end{matrix}\right.$$

$$2)\ y'=\frac{5\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-4)}{x}\xrightarrow{x=4}m_{\text{مماس}}=\frac{10-\frac{1}{4}(16)}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$3)\ y-8=\frac{3}{2}(x-4)\to y=\frac{3}{2}x+2\xrightarrow{x=0}y=2$$

۹ — ۱ ۲ ۳ **۴** اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ بر هم مماس باشند، آن‌گاه $f(a)=g(a)$ و $f'(a)=g'(a)$ است.

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x+2}{x-1} \\ g(x)=ax^2+bx \end{cases}\to f(2)=g(2)\to 4=4a+2b\ \ (I)$$

$$f'(2)=g'(2)\to\frac{1(x-1)-1(x+2)}{(x-1)^2}=2ax+b\to -3=4a+b\ \ (II)$$

از حل دستگاه $a=\frac{-5}{2}$ و $b=7$ به‌دست می‌آید.

۱۰ — ۱ ۲ ۳ **۴** چون در $x=4$ مماس مشترک دارند پس در این نقطه هم مقادیرشان با هم برابر است و هم مشتق این دو تابع در $x=4$ با هم برابر هستند.

$$y_۱ = f(x) = x\sqrt{x} \quad , \quad y_۲ = g(x) = x^۲ + ax + b$$

$$f(۴) = ۴ \times \sqrt{۴} = ۸ \Rightarrow g(۴) = ۱۶ + ۴a + b \Rightarrow \boxed{۴a + b = -۸} \quad (۱)$$

$$f'(۴) = g'(۴) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = ۳$$

$$g'(x) = ۲x + a \Rightarrow g'(۴) = ۸ + a \Rightarrow ۸ + a = ۳ \Rightarrow a = -۵ \xrightarrow{(۱)} \boxed{b = ۱۲}$$

۱۱ ۴ ۳ ۲ ۱ اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ بر هم مماس باشند آن‌گاه $f(a) = g(a)$ و $f'(a) = g'(a)$ است. دو تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ و $g(x) = x^۲ + ax + b$ داده شده است.

$$f(۴) = g(۴) \to ۸ = ۱۶ + ۴a + b \to ۴a + b = -۸$$

$$f'(۴) = g'(۴) \to \sqrt{x} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}x = ۲x + a \to ۲ + ۱ = ۸ + a \to a = -۵ \xrightarrow{۴a+b=-۸} -۲۰ + b = -۸ \to b = ۱۲$$

۱۲ ۴ ۳ ۲ ۱ ابتدا ضابطهٔ وارون تابع داده شده را به‌دست می‌آوریم.

$$y = \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱} \to \sqrt{x}y - y = \sqrt{x} + ۱ \to \sqrt{x}y - \sqrt{x} = y + ۱ \to \sqrt{x}(y-۱) = y + ۱ \to \sqrt{x} = \frac{y+۱}{y-۱} \to x = (\frac{y+۱}{y-۱})^۲ \to f^{-۱}(x) = (\frac{x+۱}{x-۱})^۲$$

اکنون از تابع معکوس، مشتق گرفته و به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم.

$$\text{مشتق} = ۲(\frac{x+۱}{x-۱})^۱ (\frac{۱(x-۱) - ۱(x+۱)}{(x-۱)^۲}) \to m_{\text{مماس}} = ۲(۳)(-۲) = -۱۲$$

۱۳ ۴ ۳ ۲ ۱ تابع f اکیداً صعودی است؛ پس وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می‌کند:

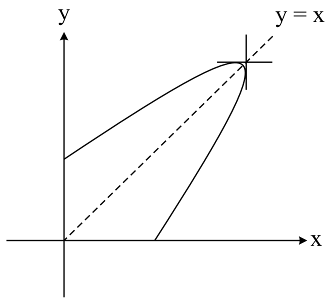
$$\begin{cases} y = \sqrt{x} + ۲ \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{x} + ۲ \Rightarrow x - \sqrt{x} - ۲ = ۰ \Rightarrow (\sqrt{x}+۱)(\sqrt{x}-۲) = ۰ \Rightarrow \sqrt{x} - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

پس نقطهٔ تلاقی $(۴ \,,\, ۴)$ است. شیب خط مماس بر منحنی f در $x = ۴$ برابر $f'(۴)$ است:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۴}$$

ضابطهٔ تابع وارون را می‌یابیم:

$$f(x) = y = \sqrt{x} + ۲ \Rightarrow y - ۲ = \sqrt{x} \Rightarrow x = (y-۲)^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = (x-۲)^۲ \Rightarrow (f^{-۱})'(x) = ۲(x-۲) \Rightarrow (f^{-۱})'(۴) = ۴$$



پس شیب خط مماس بر منحنی $f^{-۱}$ در نقطهٔ $(۴ \,,\, ۴)$ برابر ۴ است. می‌دانیم شیب یک خط برابر تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور x هاست. اگر زاویهٔ بین این دو مماس و محور xها را به‌ترتیب $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ و زاویهٔ بین این دو مماس را α بنامیم، داریم:

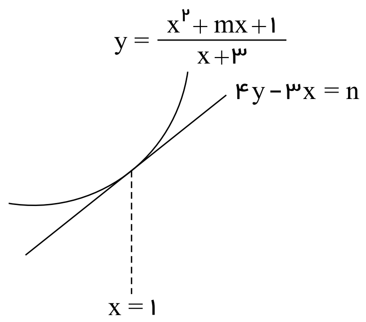
$$\alpha = \alpha_۲ - \alpha_۱ \Rightarrow \tan\alpha = \tan(\alpha_۲ - \tan\alpha_۱) = \frac{\tan\alpha_۲ - \tan\alpha_۱}{۱ + \tan\alpha_۲ \tan\alpha_۱} = \frac{۴ - \frac{۱}{۴}}{۱ + ۴ \times \frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{۱۵}{۴}}{۲} = \frac{۵}{۸}$$

بنابراین:

$$\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ + \tan^۲\alpha} = \frac{۲ \times \frac{۱۵}{۸}}{۱ + \frac{۲۲۵}{۶۴}} = \frac{۲۴۰}{۲۸۹}$$

۱۴) ۱ ۲ ۳ ۴

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



$$y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$$

$$۴y-۳x=n$$

$$۴y=۳x+n\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x+\frac{n}{۴}\Rightarrow \text{شیب}=\frac{۳}{۴}$$

شیب خط مماس در $x=۱$ برابر $\frac{۳}{۴}$ است، پس:

$$y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}\Rightarrow y'=\frac{(۲x+m)(x+۳)-۱\times(x^۲+mx+۱)}{(x+۳)^۲}$$

$$y'(۱)=\frac{(۲+m)\times۴-(۱+m+۱)}{۴^۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴(m+۲)-۲-m=۱۲\Rightarrow ۴m+۸-۲-m=۱۲\Rightarrow ۳m=۶\Rightarrow m=۲$$

$$y=\frac{x^۲+۲x+۱}{x+۳}\xrightarrow{x=۱}y=\frac{۱+۲+۱}{۱+۳}=۱\Rightarrow A(۱,۱)$$

نقطه $A(۱,۱)$ بر روی خط $۴y-۳x=n$ نیز قرار دارد.

$$۴\times۱-۳\times۱=n\Rightarrow n=۱\Rightarrow m+n=۲+۱=۳$$

۱۵) ۱ ۲ ۳ ۴ خط $y=۲x+b$ در نقطه‌ای به طول $x=۱$ بر تابع $y=\frac{x+a}{ax+۱}$ مماسی است، پس خط مماس یعنی مشتق د $x=۱$ برابر ۲ است.

$$y'=\frac{۱\times(ax+۱)-a(x+a)}{(ax+۱)^۲}=\frac{ax+۱-ax-a^۲}{(ax+۱)^۲}=\frac{۱-a^۲}{(ax+۱)^۲}$$

$$y'(۱)=\frac{۱-a^۲}{(a+۱)^۲}=۲\Rightarrow ۲(a^۲+۲a+۱)=۱-a^۲$$

$$۲a^۲+۴a+۲-۱+a^۲=۰\Rightarrow ۳a^۲+۴a+۱=۰\Rightarrow (a+۱)(۳a+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}a=-۱\\ a=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

به ازای $a=-۱$ تابع $y=\frac{x-۱}{-x+۱}=-۱$ تابع ثابت است و خط $y=۲x+b$ نمی‌تواند بر آن مماس شود، پس $a=-\frac{۱}{۳}$ قابل قبول است و داریم:

$$y=\frac{x-\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۳}x+۱}=\frac{۳x-۱}{-x+۳}\xrightarrow{x=۱}y=\frac{۳-۱}{-۱+۳}=۱$$

نقطهٔ $A(۱,۱)$ بر روی خط $y=۲x+b$ نیز قرار دارد.

$$۱=۲+b\Rightarrow b=-۱\Rightarrow a-b=-\frac{۱}{۳}+۱=\frac{۲}{۳}$$

۱۶) ۱ ۲ ۳ ۴ شیب خط $۶y-۳x=۱$ را می‌یابیم:

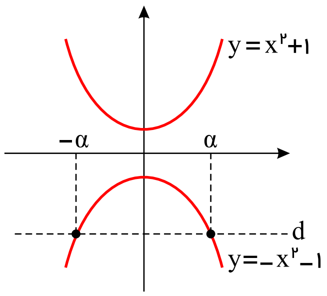
$$۶y=۳x+۱\Rightarrow y=\frac{۳}{۶}x+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۶}\Rightarrow \text{شیب}=\frac{۱}{۲}$$

$$\text{شیب خط مماس}=-۲$$

بنابراین در تابع $y=x^۲-۴x+۵$ باید نقطه‌ای را بیابیم که شیب خط مماس یعنی مشتق در آن برابر -۲ باشد.

$$y'=۲x-۴=-۲\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=۱-۴+۵=۲\Rightarrow \left|\begin{array}{l}x=۱\\ y=۲\end{array}\right.$$

۱۷) ۱ ۲ ۳ ۴ مطابق شکل، ضابطهٔ قرینه سهمی نسبت به محور xها برابر می‌شود با: $y=-x^۲-۱$ خط افقی d، نمودار تابع را در نقطه به طول‌های α و $-\alpha$ قطع می‌کند؛ از طرفی طبق فرض، مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند، یعنی:



$$\begin{cases} f'(\alpha)\cdot f'(-\alpha)=-۱ \\ f(x)=-x^۲-۱ \Rightarrow f'(x)=-۲x \end{cases} \Rightarrow (-۲\alpha)(+۲\alpha)=-۱ \Rightarrow \alpha^۲=\frac{۱}{۴}$$

عرض نقاط مورد نظر (نقاط به طول α و $-\alpha$) برابر می‌شود با:

$$f(\alpha)=f(-\alpha)=-\alpha^۲-۱=\frac{-۱}{۴}-۱=-\frac{۵}{۴}$$

یعنی معادلهٔ خط d به‌صورت $y=\frac{-۵}{۴}$ است و مبدأ مختصات به فاصلهٔ $\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$ از خط d است.

۱۸ ① ② ③ **④** می‌دانیم: $(fog(x))'=f'(g(x))\times g'(x)$، پس ابتدا $g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ را حساب می‌کنیم:

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}}=۲ \Rightarrow (fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})\cdot f'(۲) \quad (*)$$

$$g(x)=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{۳}(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}}\times ۲x=\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{-۲\times\frac{۳}{\sqrt{۸}}}{۳\sqrt[۳]{(\frac{۱}{۸})^۴}}=\frac{-۱۶}{\sqrt{۲}}=-۸\sqrt{۲}$$

حال برای محاسبهٔ $f'(۲)$، در یک همسایگی $x=۲$ ضابطهٔ f به‌صورت زیر است و داریم:

$$f(x)=(۴x)^۲+۱ \Rightarrow f'(x)=۳۲x \Rightarrow f'(۲)=۶۴$$

$$\xrightarrow{(*)} (fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-۸\sqrt{۲}\times ۶۴=-۱۲۸\sqrt{۲}\times ۴$$

۱۹ ① ② ③ **④** می‌دانیم:

$$(fog(x))'=f'(g(x))\times g'(x)$$

ابتدا از تابع $g(x)$ در نقطهٔ $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ مشتق می‌گیریم. دقت کنید تابع در این نقطه پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{۲}(x^۲-۱)^{-\frac{۳}{۲}}\times ۲x \Rightarrow g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=-\frac{۱}{۲}\times(\frac{۱}{۴})^{-\frac{۳}{۲}}\times\sqrt{۵}=-۴\sqrt{۵}$$

در قدم بعدی $g(x)$ را به‌ازای $x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-$ محاسبه می‌کنیم.

$$x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^- \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^-}}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^-}=۲^+$$

پس باید از تابع f به‌ازای $x\to ۲^+$ مشتق بگیریم:

$$x\to ۲^+ \Rightarrow [۲^+]=۲ \Rightarrow f(x)=(۲x)^۳=۸x^۳ \Rightarrow f'(x)=۲۴x^۲ \Rightarrow f'(۲^+)=۲۴\times ۴$$

در نتیجه مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^-))\times g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲}^-)=۲۴\times ۴\times(-۴\sqrt{۵})=۸(-۴۸\sqrt{۵})$$

۲۰ ① ② **③** ④ هر کدام از توابع fog و gof را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x)=\begin{cases}-۱ & ; \quad ۱-x^۲<-۱\\ ۱-x^۲ & ; \quad -۱\leq ۱-x^۲\leq ۱\\ ۱ & ; \quad ۱-x^۲>۱ \text{ غ ق ق}\end{cases}\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}-۱ & ; \quad x^۲>۲\\ ۱-x^۲ & ; \quad x^۲\leq ۲\end{cases}$$

$\Rightarrow (fog(x))'=\begin{cases}۰ & x^۲>۲\\ -۲x & x^۲<۲\end{cases}\Rightarrow$ این تابع در نقاط مرزی $\{\pm\sqrt{۲}\}$ مشتق‌ناپذیر است.

$(gof)(x)=\begin{cases}۰ & ; \quad x<-۱\\ ۱-x^۲ & ; \quad -۱\leq x\leq ۱\\ ۰ & ; \quad x>۱\end{cases}\Rightarrow (gof(x))'=\begin{cases}-۲x & ; \quad -۱\leq x\leq ۱\\ ۰ & ; \quad x<-۱ \text{ یا } x>۱\end{cases}\Rightarrow$ نقاط مشتق‌ناپذیر $=\{-۱,۱\}$

در مجموع ۴ نقطهٔ مشتق‌ناپذیر در دو تابع وجود دارد.

۲۱ ۱ ۲ **۳** ۴ چون f متناوب با دورهٔ متناوب ۵ است، پس مشتق f نیز متناوب با دوره متناسب ۵ است، زیرا:

$$f(x+۵)=f(x)\xrightarrow{\text{مشتق}}۱\times f'(x+۵)=f'(x)\Rightarrow f'(x+۵)=f'(x)$$

حال مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=f(x+۱)+f(۳x+۱۰)\to g'(x)=f'(x+۱)+۳f'(۳x+۱۰)$$
$$g'(-۲)=f'(-۲+۱)+۳f'(-۶+۱۰)=f'(-۱)+۳f'(۴)\quad (۱)$$

f' متناوب با دورهٔ تناوب ۵ است، پس:

$$f'(۴)=f'(۴-۵)=f'(-۱)\xrightarrow{(۱)}g'(-۲)=۴f'(-۱)=۴\times\frac{۳}{۲}=۶$$

۲۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$(fog)'(-\sqrt[۳]{۲})=g'(-\sqrt[۳]{۲})\times f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))\Rightarrow x=-\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x}}\\ g(x)=\frac{۱}{۲x^۳}\end{cases}$$

$$f(g(x))=f(\frac{۱}{۲x^۳})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۲}{۲x^۳}}}=x\Rightarrow (fog)'=(x)'=۱$$

۲۳ ۱ ۲ **۳** ۴

$$g'(x)\times f'(g(x))=(fog)'(x)$$

$$x>۰\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{۲x^۵}\quad,\quad x>۰\Rightarrow f(x)=\frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}};\xrightarrow{x>۰}(fog)(x)=\frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲(\frac{۱}{۲x^۵})}}\Rightarrow (fog)(x)=-x$$

$$(fog)'(x)=-۱\Rightarrow (fog)'(\sqrt[۵]{۳})=-۱$$

۲۴ ۱ ۲ **۳** ۴ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$x_{\text{پیوستگی}}=-۲\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^+}(-\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c)=-۲-۲b+c\\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\sqrt{۵-۲x}=\sqrt{۵+۴}=\sqrt{۹}=۳\quad\Rightarrow -۲-۲b+c=۳\\ f(-۲)=\sqrt{۵+۴}=\sqrt{۹}=۳\end{cases}$$

$$f'((-۲)^+)=f'((-۲)^-)\to -x+b=\frac{۱(-۲)}{۲\sqrt{۵-۲x}}\to ۲+b=\frac{-۲}{۶}\to ۱۲+۶b=-۲\to ۶b=-۱۴\to b=\frac{-۷}{۳}\xrightarrow{-۲b+c=۵}\frac{۱۴}{۳}+c=۵\to c=\frac{۱}{۳}$$

۲۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx+c & x\geq k\\ ۲ax+b & x<k\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲ax+b & x\geq k\\ ۲a & x<k\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(۱)\ \text{شرط پیوستگی}: ak^۲+bk+c=۲ak+b\\ (۲)\ \text{شرط مشتق‌پذیری}: ۲ak+b=۲a\end{array}\right\}\Rightarrow ak^۲+bk+c=۲a$$

$$\xrightarrow[c=a-b]{b=۲a-۲ak}ak^۲+(۲a-۲ak)k+a-(۲a-۲ak)=۲a$$

$$\Rightarrow ak^۲+۲ak-۲ak^۲+a-۲a+۲ak=۲a\Rightarrow -ak^۲+۴ak-۳a=۰\xrightarrow{\div(-a)}k^۲-۴k+۳=۰\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}}\begin{cases}k=۱\\ k=۳(max)\end{cases}$$

۲۶ **۱** ۲ ۳ ۴

$$f(x)=\begin{cases}ax^۲+۵x+b & x\leq ۲\\ ۲ax+۵ & x>۲\end{cases}$$

شرط مشتق‌پذیر بودن تابع f در $x=a$ آن است که تابع در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی:}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4a+5\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4a+10+b \qquad \to 4a+10+b=4a+5\to b=-5\\ f(2)=4a+10+b\end{cases}$$

$$f'(2^+)=f'(2^-)\to 2a=2ax+5\to 2a=4a+5\to a=-\frac{5}{2}$$

پس $a+b=-\frac{5}{2}-5=-\frac{15}{2}$ است.

۲۷) ۱) ۲) ۳) ۴ ✓

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [5,6]=\frac{f(6)-f(5)}{6-5}=\frac{\sqrt{21-36+24}-\sqrt{21-25+20}}{1}=3-4=-1$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}=y'=\frac{1(-2x+4)}{2\sqrt{21-x^2+4x}}=\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری}}\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}=-1\Rightarrow -x+2=-\sqrt{21-x^2+4x}\xrightarrow{\text{توان } 2} x^2+4-4x=21-x^2+4x\Rightarrow 2x^2-8x-17=0\Rightarrow x=2\pm\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

اما $x=2-\frac{5}{2}\sqrt{2}$ در معادله صدق می‌کند.

۲۸) ۱ ✓) ۲) ۳) ۴ آهنگ تغییر متوسط دو تابع داده‌شده در بازهٔ $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ را می‌یابیم.

$$y=\sin x\cos 2x\Rightarrow\frac{y(\frac{\pi}{2})-y(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\pi-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{1\times(-1)-0}{\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{\pi}$$

$$y=\sin^4x-\cos^4x=\underbrace{(\sin^2x+\cos^2x)}_{1}(\sin^2x-\cos^2x)=\sin^2x-\cos^2x=-\cos 2x$$

$$\frac{y(\frac{\pi}{2})-y\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}=\frac{-\cos\pi+\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{-(-1)+0}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{-\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}}=-1$$

پاسخنامه کلیدی

سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ	سؤال	پاسخ
۱	۴	۸	۳	۱۵	۳	۲۲	۳
۲	۴	۹	۴	۱۶	۳	۲۳	۳
۳	۲	۱۰	۴	۱۷	۱	۲۴	۳
۴	۲	۱۱	۴	۱۸	۴	۲۵	۳
۵	۴	۱۲	۱	۱۹	۴	۲۶	۱
۶	۱	۱۳	۴	۲۰	۳	۲۷	۴
۷	۱	۱۴	۴	۲۱	۳	۲۸	۱