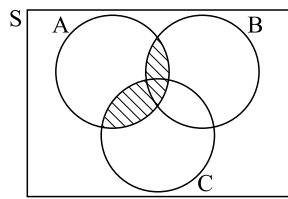


۱ خانواده‌ای دارای ۵ فرزند شامل ۲ فرزند پسر و ۳ فرزند دختر است. قرار است ۵ نفر از اعضای این خانواده با اتومبیل شخصی به مسافرت بروند. احتمال اینکه فقط والدین حق رانندگی داشته باشند و دو فرزند پسر با هم به مسافرت نروند، کدام است؟

- ① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{10}{21}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{1}{7}$



۲ سه پیشامد A ، B و C مطابق شکل زیر، در فضای نمونه‌ای S مفروض‌اند. کدام مورد این قسمت هاشورخورده، نادرست است؟

- ① $A \cap (B \cup C)$ ② $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ③ $(A - (A - B)) \cup (A - (A - C))$ ④ $(A - (A \cap B)) \cap (A \cap C)$

۳ ۳ نفر به همراه علی و حسن قرار است در یک هتل، هر کدام در یک اتاق، اقامت کنند. هتل سه اتاق خالی کنار هم در یک طرف راهرو و دو اتاق دیگر در کنار هم، در طرف دیگر راهرو دارد. به چند طریق این افراد در اتاق‌ها می‌توانند اقامت کنند، به طوری که علی و حسن در اتاق‌های کنار هم ساکن شوند؟

- ① ۸ ② ۲۴ ③ ۳۶ ④ ۷۲

۴ در یک مسابقه دو میدانی، ۷ نفر شرکت کرده‌اند، که ۳ دانش‌آموز از مدرسه A و ۴ دانش‌آموز از مدرسه B به خط پایان رسیده‌اند. با کدام احتمال، مقام اول و آخر، از مدرسه A است؟

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{3}{14}$

۵ مقدار $a_3 = \frac{17}{12}$ از رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{p}(a_n + \frac{a_1}{a_n})$ تقریبی از \sqrt{k} است. اگر $k \in \mathbb{N}$ و $a_1 = k$ باشد، مقدار k کدام است؟

- ① ۲ ② ۳ ③ ۵ ④ ۷

۶ اگر ریشه دوم جملات دوم، نهم و شانزدهم از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی را تشکیل دهند، نسبت مشترک دنباله هندسی کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ -۱ ④ -۲

۷ اگر $A = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{243} (\frac{1}{3})^{-\frac{7}{3}}$ باشد، حاصل $(5 + A)^{-\frac{1}{5}}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ ۲ ④ ۳

۸ یک پارکینگ دارای ۴ درب است. وقتی از یک درب وارد می‌شوید باید از درب دیگری خارج شوید. به چند طریق حسن و علی می‌توانند از این پارکینگ استفاده کنند به طوری که آنها درب ورودی و خروجی یکسانی نداشته باشند؟

- ① ۱۶۸ ② ۱۰۸ ③ ۸۴ ④ ۵۴

۹ جمله نهم دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = 1$ ، $a_{n+1} = a_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{n-\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)

- ① ۴ ② ۶ ③ ۸ ④ ۱۰

۱۰ نمودار تابع نمایی $f(x) = k + 4^{ax-b}$ محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۲ واحدی از مبدأ مختصات قطع می‌کند. مقدار bk کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۴ (۲) ۶ (۱)

۱۱ خانواده‌ای ۵ فرزند دارد که دو فرزند آنها دوقلو هستند. قرار است والدین به همراه ۳ تا از فرزندانشان به یک مهمانی بروند. احتمال اینکه دوقلوها با هم به مهمانی نروند، کدام است؟

- ۰٫۷ (۴) ۰٫۳ (۳) ۰٫۶ (۲) ۰٫۱ (۱)

۱۲ جمله ششم دنباله بازگشتی (a_n) که $a_1 = a_2 = 1$ ، $a_{n-1} = a_{n-[\frac{n}{2}]} + 2a_{n-[\frac{n}{3}]}$ ، $a_n = a_{n-[\frac{n}{2}]} + 2a_{n-[\frac{n}{3}]}$ ، $a_1 = a_2 = 1$ ، $a_{n-1} = a_{n-[\frac{n}{2}]} + 2a_{n-[\frac{n}{3}]}$ ، $a_n = a_{n-[\frac{n}{2}]} + 2a_{n-[\frac{n}{3}]}$ (علامت جزء صحیح است).

- ۱ (۴) -۱ (۳) ۳ (۲) -۳ (۱)

۱۳ اگر $\sqrt{3}$ واسطه هندسی ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + m^2 - 4 = 0$ باشد، مجموع ریشه‌های این معادله کدام است؟

- ۴ (۴) ۴ (۳) -۱ (۲) ۱ (۱)

۱۴ شاخص اجاره‌بهای مسکن در سال ۹۵، ۶ واحد بیشتر از شاخص اجاره‌بها در سال ۹۴ و درصد تورم شاخص اجاره‌بها در سال ۹۶ نسبت به سال ۹۴، ۴۴ درصد است. اگر درصد تورم این شاخص در هر سال نسبت به سال قبل یکسان باشد، درصد تورم اجاره‌بهای مسکن در سال ۹۵ نسبت به سال ۹۴ کدام است؟

- ۱۶ (۴) ۱۸ (۳) ۲۰ (۲) ۲۲ (۱)

۱۵ در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و بیست‌وهفتم از جمله پنجم، ۶۱ واحد بیشتر است. جمله بیست‌وششم این دنباله کدام است؟

- ۴۳ (۴) ۵۵ (۳) ۶۱ (۲) ۷۶ (۱)

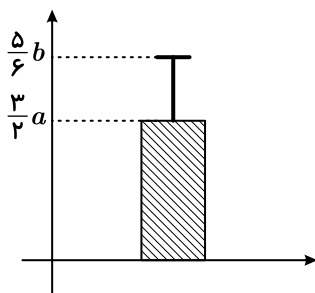
۱۶ در تساوی $7^3 = \frac{(2x)^5 \times 21^3}{15^3 \times 5^2}$ ، مقدار x کدام است؟

- ۲٫۵ (۱) ۳ (۲) ۴٫۵ (۳) ۵ (۴)

۱۷ اگر $E = C \cup D$ و $D = (B' - A) \cup (B' - A')$ ، $C = (A' - B) \cup (A' - B')$ باشد، E' کدام است؟

- $A \cap B$ (۴) $A \cup B$ (۳) $A' \cap B'$ (۲) $A' \cup B'$ (۱)

۱۸ نمودار زیر توصیف‌کننده شاخص‌های (مرکزی و پراکندگی) مناسب داده‌های $a, b, \frac{a}{2}, 12, 6$ است. اگر



انحراف معیار این داده‌ها $\frac{1}{4}$ میانگین باشد، انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

- ۱٫۲ (۱) ۲٫۴ (۳) ۱٫۸ (۲) ۳٫۶ (۴)

۱۹ با ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۷، ۰ چند عدد سه‌رقمی فرد بدون تکرار رقم‌ها که مضرب ۵ نباشد، می‌توان نوشت؟

- ۳۲ (۴) ۳۶ (۳) ۴۰ (۲) ۴۸ (۱)

۲۰ مریم می‌خواهد ۶ کتاب متمایز را به تعداد یکسان در دو ردیف یک قفسه به تصادف قرار دهد. با کدام احتمال مریم دو کتاب با عناوین ریاضی و ادبیات را کنار هم در یک ردیف قرار می‌دهد؟

- $\frac{4}{15}$ (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{9}{10}$ (۴)

۲۱ اگر دنباله‌های $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ و $b_n = \frac{2n + 1}{n + 1}$ باشند، حاصل $b_4 - a_3$ کدام است؟

- ۱٫۲ (۱) -۱٫۲ (۲) ۱٫۷ (۳) -۱٫۷ (۴)



۲۲) جمله اول و نسبت مشترک یک دنباله هندسی به ترتیب برابر ۱۴۵۸ و $\frac{1}{3}$ است. اگر جمله n ام این دنباله برابر ۲ باشد، n کدام است؟

- ۹ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۲۳) تابع نمایی $f(x) = 5 - 3^{ax+h}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(0) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) = 2$ باشد، مقدار جزء صحیح $f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) صفر

۲۴) اگر x, y, z دنباله‌ای هندسی با جملات نابرابر و $x, 3y, 5z$ یک دنباله حسابی باشد، مقدار $[\frac{x}{z}]$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۲۵ (۴)

۲۵) اگر $A = \sqrt[4]{4}\sqrt{8}(18)^{-1/5}$ باشد، حاصل $(10 + A^{-1})^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۰٫۷۵ (۲) ۰٫۵ (۳) ۰٫۲۵ (۴)

۲۶) یک فروشگاه دارای ۵ درب است. وقتی مشتری از یک درب وارد می‌شود باید از درب دیگری خارج شود. زهرا و نازنین به چند طریق می‌توانند از فروشگاه خرید کنند به طوری که آنها از درب ورودی و خروجی یکسانی استفاده نکرده باشند؟

- ۳۲۰ (۱) ۲۶۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۳۰ (۴)

۲۷) جملات x, y, z سه جمله متوالی یک دنباله حسابی و مجموع آنها برابر ۲۱ است. اگر $x + 6, y + 4, z + 2$ یک دنباله هندسی باشد، مقدار $[\frac{xy}{z}]$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۲۸) نمودار تابع نمایی $f(x) = k - (\frac{1}{9})^{ax+b}$ محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۶ واحدی از مبدأ مختصات قطع می‌کند، مقدار bk کدام است؟

- ۵٫۵ (۱) -۲٫۵ (۲) -۴٫۵ (۳) -۳٫۵ (۴)

۲۹) تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $\{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ که شامل عدد ۸ باشد، ولی شامل عدد ۴ نباشد، کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴)

۳۰) پنج بازیکن فوتبال تیم مدرسه‌ای، به طور تصادفی در یک ردیف کنار یکدیگر می‌ایستند. اگر دروازه‌بان و کاپیتان دو نفر متفاوت باشند، با کدام احتمال بین دروازه‌بان و کاپیتان دقیقاً دو نفر حضور دارند؟

- $\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{1}{10}$ (۲) $\frac{1}{15}$ (۳) $\frac{1}{20}$ (۴)

۳۱) در یک دنباله هندسی، جمله هشتم، ۸۱ برابر جمله چهارم است. اگر جمله سوم برابر ۱۸- باشد، جمله پنجم چقدر از جمله هفتم بیشتر است؟

- ۸۹۱ (۱) ۹۷۲ (۲) ۱۰۵۶ (۳) ۱۲۹۶ (۴)

۳۲) جمله 400 ام دنباله اعداد با رابطه $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{a_n+1} & \text{فرد } n \end{cases}$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴)

۳۳) اگر جمله اول و پنجم یک دنباله حسابی به ترتیب ۳ و ۱۱ باشد، جمله دهم این دنباله کدام است؟

- ۲۱ (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴)

۳۴) حاصل عبارت $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{72} + \sqrt{3}(\sqrt{96} - \sqrt{12}) - \sqrt{162}$ کدام است؟

- $\sqrt{3}$ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{18}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴)

پاسخ نامہ تشریحی

1 2 3 4 1

$$n(S) = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

$$n(A) = 1 \binom{2}{2} \times \binom{3}{3} + \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{3} + \binom{2}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{2}$$

والدین و ۳ دختر یکی از والدین و یک پسر و ۳ دختر والدین و یک پسر و ۲ دختر

$$= 1 + 4 + 6 = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{11}{21}$$

قسمت هاشور خورده را می توان به صورت های زیر نشان داد: 1 2 3 4 2

$$\underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap C)}_{\text{گزینه (۲)}} = A \cap \underbrace{(B \cup C)}_{\text{گزینه (۱)}}$$

$$A - (A - B) = A \cap B, \quad A - (A - C) = A \cap C$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A - (A - B)) \cup (A - (A - C))}_{\text{گزینه (۳)}} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

بنابراین گزینه (۴) با قسمت هاشور خورده برابر نیست.

اتاق های راهرو را به صورت زیر در نظر می گیریم: 1 2 3 4 3

A: 1 2 3
یا
B: 4 5

الف) حسن و علی در سمت A باشند:

$$2! \times 2! \times 3! = 2 \times 2 \times 6 = 24$$

ب) حسن و علی در سمت B باشند:

$$2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$$

پس کل حالات برابر $24 + 12 = 36$ است.

ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد حالت های پیشامد مورد نظر را به دست می آوریم: 1 2 3 4 4

$$n(S) = 7!$$

$$\frac{\overbrace{3}^{\text{نفر اول}} \times \underbrace{1+4+5}_{5!} \times \overbrace{2}^{\text{نفر آخر}}}{7!} = \frac{3 \times 5! \times 2}{7!} = \frac{5! \times 3 \times 2}{7 \times 6 \times 5!} = \frac{1}{7}$$

با توجه به آنکه، $\sqrt{2} = 1,4$ و $\frac{17}{12} \approx 1,4$ است، پس با فرض: $a_1 = k = 2$ داریم: 1 2 3 4 5

$$a_n + 1 = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a_1}{a_n} \right)$$

$$\xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{a_1}{a_1} \right) = \frac{1}{2} (2 + 1) = \frac{1}{2} (3) = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{2} \left(a_2 + \frac{a_1}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{6} \right) = \frac{17}{12}$$

ریشه دوم جملات دوم، نهم و شانزدهم حسابی را به صورت زیر در نظر می گیریم: 1 2 3 4 6
(فرض می کنیم ریشه های مثبت خواسته شده است.)

$$\sqrt{a_2}, \sqrt{a_9}, \sqrt{a_{16}}$$

$$(\sqrt{a_9})^2 = \sqrt{a_2 \times a_{16}} \Rightarrow a_9 = \sqrt{a_2 \times a_{16}}$$

$$a_1 + 8d = \sqrt{(a+d)(a_1 + 15d)} \Rightarrow (a_1 + 8d)^2 = a^2 + 15ad + ad + 15d^2$$

$$a^2 + 16ad + 64d^2 - a^2 - 16ad - 15d^2 = 0 \Rightarrow 49d^2 = 0 \Rightarrow d = 0$$

وقتی d در حسابی صفر است، پس دنباله ثابت و نسبت مشترک دنباله هندسی برابر ۱ است.

1 2 3 4 7

$$A = \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^5} \times 3^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^5} \times 3^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{3^8} \times 3^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{3^8 \times 3^7} = \sqrt[3]{3^{15}} = 3^5 = 27$$

$$\Rightarrow (\Delta + A)^{-\frac{1}{\Delta}} = (32)^{-\frac{1}{\Delta}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{\Delta}} = \frac{1}{2}$$

1 2 3 4 8

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = 48 \\ \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = 36 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 48 + 36 = 84$$

حسن از ورودی که علی وارد شده نمی تواند وارد شود همچنین از خروجی که علی خارج شده نمی تواند خارج شود پس دو حالت برای ورود حسن در نظر می گیریم حالتی که حسن از دری غیر از خروجی علی وارد شود که ۲ حالت می شود و حالتی که حسن دقیقاً از خروجی علی وارد شود که یک حالت می شود. سپس به کمک اصل جمع داریم:

$$48 + 36 = 84$$

1 2 3 4 9

$$\begin{aligned} n=2 &\Rightarrow a_2 = a_1 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ n=3 &\Rightarrow a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ n=4 &\Rightarrow a_4 = a_{4-2} + a_2 = a_2 + a_2 = 1 + 2 = 3 \\ n=5 &\Rightarrow a_5 = a_3 + a_2 = 2 + 2 = 4 \\ n=6 &\Rightarrow a_6 = a_4 + a_2 = 2 + 2 = 4 \\ n=7 &\Rightarrow a_7 = a_5 + a_2 = 4 \\ n=8 &\Rightarrow a_8 = a_6 + a_2 = 2 + 4 = 6 \end{aligned}$$

نمودار از دو نقطه روی محورهای عبور کرده که می تواند $(-2, 0)$ یا $(2, 0)$ روی محور x و $(0, 2)$ یا $(0, -2)$ روی محور y ها باشند. در نتیجه نقاط را به صورت $(n, 0)$ و $(0, m)$ در نظر می گیریم:

$$k + 4^{na-b} = 0 \Rightarrow k + \frac{4^{na}}{4^b} = 0 \Rightarrow k = -\frac{4^{na}}{4^b}$$

$$k + 4^{-b} = m \Rightarrow k + \frac{1}{4^b} = m \Rightarrow \frac{1}{4^b} - \frac{4^{na}}{4^b} = m$$

$$\Rightarrow 4^{na} - 1 = -4^b \times m \Rightarrow 2^{2na} + 2^{2b} \times m = 1$$

$$\frac{m=-2}{n=2} \rightarrow 2^{4a} - 2^{2b+1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ 2b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{4^{na}}{4^b} = 0 \Rightarrow k + \frac{\frac{1}{4^2}}{4^{-\frac{1}{2}}} = 0 \Rightarrow k = -4$$

$$\Rightarrow bk = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-4) = 2$$

1 2 3 4 11

$$n(S) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{3}{3} \times \binom{2}{0}}_{\text{هیچ دو قطر}} + \underbrace{\binom{2}{1} \times \binom{3}{2}}_{\text{یکی از دو قطر}} = 1 \times 1 + 2 \times 3 = 7$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{7}{10} = 0.7$$

باید همه جمله های دنباله را به ترتیب تا جمله ششم به دست آوریم: 1 2 3 4 12

$$n=4 \rightarrow a_4 = a_{4-2} + 2a_{4-1} = a_2 + 2a_3 \Rightarrow a_4 = -a_2 = -1$$

$$n=5 \rightarrow a_5 = a_{5-2} + 2a_{5-1} = a_3 + 2a_4 \Rightarrow a_5 = -a_3 = 1$$

$$n=6 \rightarrow a_6 = a_{6-3} + 2a_{6-2} = a_3 + 2a_4 = -1 + 2 = 1$$

$$n=7 \rightarrow a_7 = a_{7-3} + 2a_{7-2} = a_4 + 2a_5 = 1 + 2 = 3$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$mx^2 - 4x + m^2 - 4 = 0$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m^2 - 4}{m} \xrightarrow{\text{واسطه } \sqrt{3}} \frac{m^2 - 4}{m} = \sqrt{3} \Rightarrow m^2 - 4 = 3m$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m+1)(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m=-1} -x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -4$$

$$\xrightarrow{m=4} 3x^2 - 4x + 12 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد}$$

 درصد تورم در سال ۹۴ تا ۹۶ یکسان است با فرض r درصد تورم ثابت داریم: ۴۴ درصد تورم در ۲ سال پس $f(2)$ برابر $1,44c$ می‌شود. (c مقدار اولیه) ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$f(t) = c(1+r) \Rightarrow 1,44c = c(1+r)^2$$

$$\Rightarrow (1,2)^2 = (1+r)^2 \Rightarrow r = 0,2 \Rightarrow r = \frac{20}{100}$$

یعنی در هر سال ۲۰ درصد تورم داشته است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$a_3 + a_{28} = a_5 + 61$$

$$g/ + 2d + a_1 + 27d = g/ + 4d + 61$$

$$\underbrace{a_1 + 25d}_{a_{26}} = 61 \Rightarrow a_{26} = 61$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$\frac{(2x)^5 \times 21^3}{15^3 \times 5^2} = 7^3 \Rightarrow \frac{(2x)^5 \times 3^3 \times 7^3}{3^3 \times 5^3 \times 5^2} = 7^3$$

$$\Rightarrow \frac{2x^5}{5^3 \times 5^2} = 1 \Rightarrow (2x)^5 = 5^5$$

$$\Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

$$C = (A' - B) \cup (A' - B') = (A' \cap B') \cup (A' \cap B) = A' \cap \underbrace{(B' \cup B)}_U = A'$$

$$D = (B' \cap A') \cup (B' \cap A) = B' \cap \underbrace{(A' \cup A)}_U = B'$$

$$E = C \cup D = A' \cup B' \Rightarrow E' = A \cap B$$

با توجه به نمودار داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$\bar{x} = \frac{3}{2}a$$

$$\sigma = \frac{5}{6}b - \frac{3}{2}a$$

$$\xrightarrow{\text{فرض سوال}} \frac{5}{6}b - \frac{3}{2}a = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2}a \Rightarrow \frac{5}{6}b - \frac{3}{2}a = \frac{3}{8}a$$

$$\Rightarrow 20b - 36a = 9a \Rightarrow 20b = 45a \Rightarrow b = \frac{9}{4}a$$

از طرفی با توجه به داده‌ها و نمودار داریم:

$$\bar{x} = \frac{6 + 12 + \frac{a}{2} + a + b}{5} = \frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow 18 + \frac{3}{2}a + b = \frac{15}{2}a \xrightarrow{\times 2} 36 + 3a + 2b = 15a$$

$$\Rightarrow 12a = 2b + 36 \Rightarrow 24a = 9a + 72 \Rightarrow 15a = 72$$

$$\Rightarrow a = \frac{72}{15} = \frac{24}{5} \Rightarrow b = \frac{9}{4} \times \frac{24}{5} = \frac{54}{5}$$

$$\sigma = \frac{5}{6} \times \frac{54}{5} - \frac{3}{2} \times \frac{24}{5} = 9 - \frac{36}{5} = 9 - 7,2 = 1,8$$

کل اعداد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام که فرد باشد و مضرب ۵ نباشد، برابر است با: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

$$\frac{4}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} = 32$$

به غیر از صفر و رقم یکان به کار برده شده

{۱ یا ۷}

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

$$n(S) = \binom{6}{3} \times 3! \times \binom{3}{3} \times 3! \\ = 20 \times 6 \times 1 \times 6 = 720$$

$$n(A) = \left(\binom{4}{1} \times \underbrace{2!}_{\text{جایگشت ۲ کتاب}} \times \underbrace{2!}_{\text{جایگشت بسته‌ها}} \times \binom{3}{3} \times 3! \right) \times \underbrace{2}_{\text{جایم‌جایی ردیف}} = 192$$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{192}{720} = \frac{4}{15}$$

یکی از ۴ کتاب دیگر را با دو کتاب موردنظر در یک ردیف قرار می‌دهیم.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱

$$b_4 = \frac{8+1}{4+1} = \frac{9}{5}$$

$$a_9 = \frac{1}{9+1} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow b_4 - a_9 = \frac{9}{5} - \frac{1}{10} = \frac{17}{10} = 1,7$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲

$$a_1 = 1458, r = \frac{1}{3}$$

$$a_n = 2 \Rightarrow a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow 2 = 1458 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{729} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$\Rightarrow n-1 = 6 \Rightarrow n = 7$$

از تساوی داده‌شده نتیجه می‌گیریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳

$$f(0) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow 5 - 3^b = 2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \Rightarrow 5 - 3^{\frac{a}{2}+b} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5 - 3^b = 2 \Rightarrow 3^b = 3 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow 5 - 3^{\frac{a}{2}+1} = 4 \Rightarrow 3^{\frac{a}{2}+1} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = 5 - 3^{-2x+1}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 5 - 3^{-2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)+1} = 5 - 3^{\frac{1}{2}} = 5 - \sqrt{3^3}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) = 5 - \sqrt{27}$$

$$-1 < 5 - \sqrt{27} < 0 \Rightarrow [5 - \sqrt{27}] = -1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴

دنباله هندسی

$$\rightarrow y^r = xz$$

دنباله حسابی

$$\rightarrow 6y = x + 5z \Rightarrow y = \frac{x + 5z}{6}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x + 5z}{6}\right)^r = xz \Rightarrow x^r + 25z^r + 10 - xz = 36xz$$

$$\Rightarrow x^r + 25z^r - 26xz = 0$$

$$\xrightarrow{\div z^r} \left(\frac{x}{z}\right)^r + 25 - 26\left(\frac{x}{z}\right) = 0 \xrightarrow{\frac{x}{z}=t}$$

$$t^r - 26t + 25 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 & \text{غ ق} \\ t=25 & \text{ق غ} \end{cases}$$

 به‌ازای $t=1$ نتیجه می‌گیریم که $\frac{x}{z} = 1$ در نتیجه $x=z$ طبق فرض جملات برابر و $x \neq z$ پس $t=25$ قابل قبول است.

 عبارت A را ساده می‌کنیم تا در عبارت خواسته‌شده جایگزین کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{8}(18)^{-1,5}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{4^2 \times 8(2 \times 3^2)^{-1,5}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \times 2^3(2)^{-3}}(3)^{-3}} \\
 &= \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^7} \times (2)^{-\frac{3}{2}} \times (3)^{-3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}} \times 3^{-3} = 2^{-1} \times 3^{-3} \\
 (10 + A^{-1})^{-\frac{1}{3}} &= (10 + (2^{-1} \times 3^{-3})^{-1})^{-\frac{1}{3}} = (10 + 2 \times 3^3)^{-\frac{1}{3}} \\
 &= (10 + 54)^{-\frac{1}{3}} = 64^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} = 0,25
 \end{aligned}$$

برای ورود زهرا ۵ در و برای خروجش ۴ در می توان استفاده کرد. با توجه به شرطهای مسئله نازنین برای ورود و خروجش دو حالت زیر را می تواند به کار ببرد. حالت اول: در ورودی نازنین همان در خروجی زهرا باشد پس از ۴ در دیگر می تواند خارج شود بنابراین:

$$5 \times 4 \times 1 \times 4 = 80$$

حالت دوم: در ورودی نازنین دری غیر از ورود و خروج زهرا باشد، پس از ۳ در می تواند وارد شود و از ۳ در دیگر نیز می تواند خارج شود. بنابراین:

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} 80 + 180 = 260$$

۲۶) ۱ ۲ ۳ ۴ سه جمله متوالی دنباله حسابی اند. پس:

$$2y = x + z$$

$$x + y + z = 21 \Rightarrow y + 2y = 21 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow x + z = 14$$

$$\Rightarrow z = 14 - x \Rightarrow z + 2 = 16 - x \quad (1)$$

۲۷) ۱ ۲ ۳ ۴ سه جمله متوالی دنباله هندسی اند. پس:

$$(y + 4)^2 = (x + 6)(z + 2) \xrightarrow{y=7} 121 = (x + 6)(16 - x)$$

$$\Rightarrow 121 = 16x - x^2 + 96 - 6x \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$\Rightarrow z = 14 - 5 = 9$$

$$\Rightarrow \left[\frac{xy}{z} \right] = \left[\frac{5 \times 7}{9} \right] = 3$$

۲۸) ۱ ۲ ۳ ۴ فرض می کنیم نقاط برخورد با محورها $(-6, 0)$ و $(0, 6)$ باشد. بنابراین:

$$f(0) = 6 \Rightarrow 6 = k - \left(\frac{1}{9}\right)^b \Rightarrow k = 6 + \left(\frac{1}{9}\right)^b \quad (1)$$

$$f(-6) = 0 \Rightarrow 0 = k - \left(\frac{1}{9}\right)^{-6a+b} \Rightarrow k = \left(\frac{1}{9}\right)^{-6a+b} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \left(\frac{1}{9}\right)^{-6a+b} = 6 + \left(\frac{1}{9}\right)^b \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{-6a+b} - \left(\frac{1}{9}\right)^b = 6$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^b \left(\left(\frac{1}{9}\right)^{-6a} - 1 \right) = 3 \times 2 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{9}\right)^b = 3 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{9}\right)^{-6a} - 1 = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{-6a} = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$b = -\frac{1}{2} \xrightarrow{} k = 6 + \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 6 + 3 = 9$$

$$\Rightarrow bk = -\frac{1}{2} \times 9 = -4,5$$

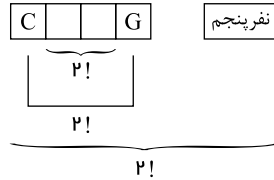
۲۹) ۱ ۲ ۳ ۴ چون می خواهیم شامل عدد ۸ باشد، پس ۸ انتخاب شده و ۳ عضو دیگر زیرمجموعه را از بین $\{0, 1, 2, 6, 9\}$ انتخاب می کنیم (دقت کنید که می خواهیم شامل ۴ نباشد)

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

۳۰) ۱ ۲ ۳ ۴ ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را به دست می آوریم:

$$n(S) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

حال تعداد اعضای پیشامد مورد نظر (A) را حساب می‌کنیم:



۲ نفر از بین ۳ نفر دیگر (به غیر از کاپیتان و دروازه‌بان) انتخاب می‌کنیم و بین کاپیتان و دروازه‌بان قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow n(A) = \binom{3}{2} \times 2! \times 2! = 24 \Rightarrow P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$a_8 = 81a_7 \Rightarrow \frac{a_8}{a_7} = 81 \Rightarrow \frac{a_1 r^8}{a_1 r^7} = 81 \Rightarrow r = 81 \xrightarrow{\text{جمله سوم منفی است}} r^2 = 9, -18 = a_1 r^2 \Rightarrow 9a_1 = -18 \Rightarrow a_1 = -2$$

$$a_5 - a_4 = a_1 r^5 - a_1 r^4 = a_1 r^4 (1 - r) = -2 \times 81(1 - 9) = -162 \times (-8) = 1296$$

قرار دادن $n = 1, 2, 3, 4$ جمله‌های اول تا پنجم را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$\xrightarrow{n=1} a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{n=2} a_2 = 1$$

$$\xrightarrow{n=3} a_3 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{n=4} a_4 = 1$$

بنابراین جمله‌ها با شماره زوج برابر $\frac{1}{2}$ و جمله‌ها با شماره فرد برابر ۱ است:

$$\Rightarrow a_{400} = \frac{1}{2}$$

با توجه به فرمول جمله عمومی دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$a_1 = 3, a_5 = 11 \Rightarrow 11 = 3 + 4d \Rightarrow 4d = 8 \Rightarrow d = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \times 2 = 21$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{72} + \sqrt{3}(\sqrt{96} - \sqrt{12}) - \sqrt{162} = \sqrt[3]{3 \times 72} + \sqrt{3 \times 96} - \sqrt{3 \times 12} - \sqrt{162} = \sqrt[3]{3 \times 2^3 \times 3^3} + \sqrt{288} - \sqrt{36} - \sqrt{81 \times 2}$$

$$= 3 \times 2 + \sqrt{144 \times 2} - 6 - 9\sqrt{2} = 6 + 12\sqrt{2} - 6 - 9\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$$

پاسخنامه کاپری

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴

۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴

۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴

۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴