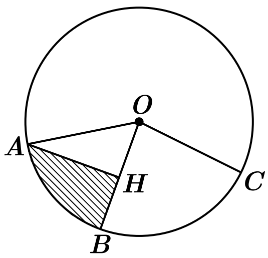
نام آزمون: ۴۰ تست سراسری مثلثات سه سال اخیر

آموزشگاه پرسا

۱) نمودار تابع $y=۲^{|sinx|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[۰,\pi]$ کدام است؟

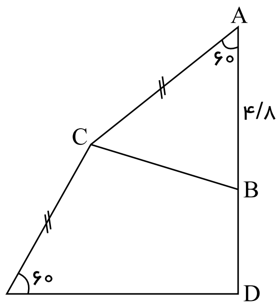
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۲) مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به محیط ۲π و AH عمودمنصف OB است. محیط قسمت هاشورخورده چقدر از محیط مثلث OAH، بزرگ‌تر است؟



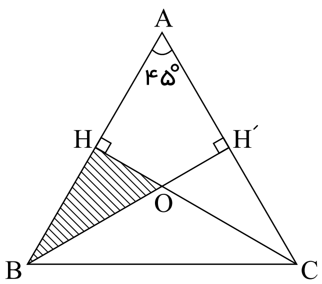
۱) $\frac{۲\pi-۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲\pi-۳}{۶}$ ۳) $\frac{\pi-۱}{۶}$ ۴) $\frac{\pi-۳}{۳}$

۳) در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $۷/۲\sqrt{۳}$ است. فاصلهٔ D از C کدام است؟



۱) $۶\sqrt{۶}$
۲) $۳\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

۴) در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB، کدام است؟



۱) $\frac{۶}{۲+\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۸}{۲+\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳+۲\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$

۵) اگر $-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}$ و $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-m}{۲+m}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(-۲,۱]$ ۳) $(-۱,۲]$ ۴) $(-۱,۲)$

۶) اگر $-\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{۵\pi}{۱۲}$ و $\sin ۲x=\frac{m-۱}{۴}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۱,۵)$ ۲) $(-۱,۵]$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(-۱,۱]$

۷) خط $۳=۲mx+(m^۲-۱)y$، به‌ازای دو مقدار m با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد. اختلاف مقادیر m کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$

۸) اگر $\tan x + \cot x = -۳$ و $۳\pi < ۴x < ۴\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\cos^۳ x + \sin^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰٫۵\sqrt{۶}$ ۲) $۰٫۷۵\sqrt{۳}$ ۳) $-۰٫۷۵\sqrt{۳}$ ۴) $۰٫۵\sqrt{۶}$

۹) اگر $\tan x + \cot x = ۴$ و $۵\pi < ۴x < ۶\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰٫۸\sqrt{۲}$ ۲) $۰٫۸\sqrt{۲}$ ۳) $-\frac{۱٫۶}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۱٫۶}{\sqrt{۳}}$

۱۰) اگر $f(x) = ۳۲\cos^۲(x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$ ۲) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۳۲}$

۱۱) فرض کنید زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲}) - \sin(\alpha-\pi))}{|\tan^۲(\alpha)-۱|}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴(۲+\sqrt{۵})}{۳}$ ۲) $\frac{۴(-۲+\sqrt{۵})}{۳}$ ۳) $\frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$ ۴) $\frac{-۴(۲+\sqrt{۵})}{۳}$

۱۲) اگر $۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$ باشد، حاصل $\tan^۲ x$ کدام است؟ $(x \neq ۰)$

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۳) اگر $\sin\alpha = ۲\cos\alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$

۱۴) اگر $f(x) = ۱۶\cos^۲(۳x)\cos^۲(۶x)\cos^۲(۱۲x)\cos^۲(۲۴x)$، مقدار $f(\frac{\pi}{۳۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{۶-۳\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۲) $\frac{۶-\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶+\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$

۱۵) اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی و $tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(۲\alpha-\frac{\pi}{۲}) + \cos(\alpha+\pi)}{\cot(۲\alpha)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۲) $\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$ ۳) $\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۴) $-\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

۱۶) اگر $\tan(\frac{\alpha}{۲}) = \frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha)-\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)-\cos(\alpha)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۹۱}{۱۰۵}$ ۲) $-\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۱۰۵}$ ۴) $\frac{۹۱}{۱۰۵}$

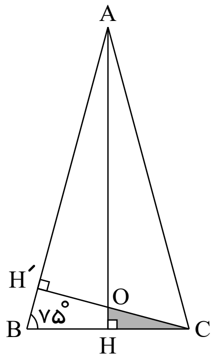
۱۷) اگر $f(\alpha) = ۴\sin(\alpha)\cos(۲\alpha) + ۲\sin(\alpha)$ باشد مقدار $f(\frac{۴۱\pi}{۹})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۱۸) خطوط $x+۲y=۳$ و $۲x+ay=۶$ یکدیگر را در نقطهٔ A و خط $x+y=۰$ را به‌ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیهٔ دوم واقع باشد، مقدار $\cot(B-C)$ در مثلث ABC کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۱۹ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC کدام است؟



(۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲) $\frac{۴}{۳}$

(۳) $\frac{۱۸}{۷+۴\sqrt{۳}}$ (۴) $\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$

۲۰ سادهٔ شدهٔ عبارت $\frac{۱+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}+\frac{\sin(\theta)}{۱-\cos(\theta)}$، کدام است؟

(۱) $\cos(\frac{\theta}{۲})$ (۲) $\sin(\frac{\theta}{۲})$ (۳) $۲\cot(\frac{\theta}{۲})$ (۴) $۲\tan(\frac{\theta}{۲})$

۲۱ اگر $۱۰(\sin x+\cos x)=۶\sqrt{۵}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

(۱) $-\frac{۱}{۳}$ (۲) -۲ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) ۳

۲۲ اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}=۴$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{۲}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۲۳ اگر اختلاف جواب‌های غیرصفر معادلهٔ $\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})=\cot(\frac{\pi+۴x}{۲})$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۴}\ ,\ \frac{\pi}{۴}]$ برابر α باشد، مقدار $\cos(۳\alpha)$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ (۲) $-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ (۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ (۴) $-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۲۴ تابع متناوب $f(x)=\begin{cases} x & ;۰\le x\le ۱\\ ۲-x & ;۱<x\le ۲\end{cases}$ را که دورهٔ تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیهٔ محصور به منحنی f و محور x ها در بازهٔ $[-۰٫۷۵,۳٫۲۵]$، کدام است؟

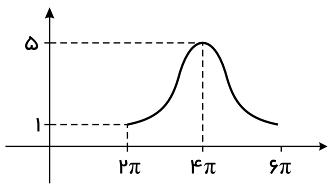
(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $۳٫۵$ (۴) ۴

۲۵ فرض کنید تابع f به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ نسبت به خطوط $x=۱$ و $x=۳$ متقارن باشد. کدام عبارت زیر درست است؟

(۱) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۵ است. (۲) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۳ است.

(۳) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است. (۴) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

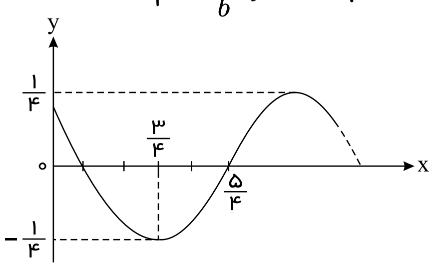
۲۶ شکل زیر، نمودار تابع $y=c+a\cos bx$ را در یک دورهٔ تناوب، نشان می‌دهد. مقدار c کدام است؟



(۱) ۵ (۲) ۴

(۳) ۳ (۴) ۱

۲۷ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos(bx+c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b>۰$ و $۰<c<\pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟



(۱) $\frac{۱}{۱۶}$

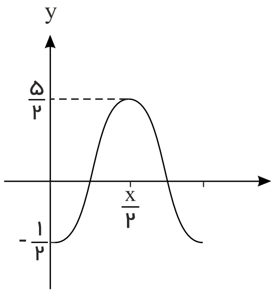
(۲) ۱

(۳) $\frac{۱}{۴\pi}$

(۴) π

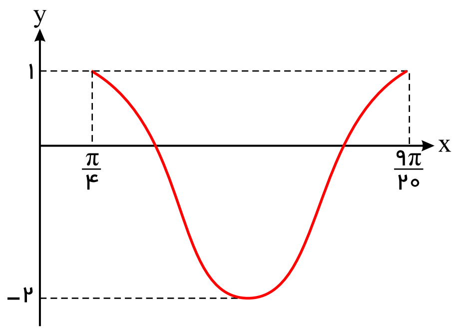
۴۰ تست سراسری مثلثات سه سال اخیر

۲۸ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y=c+a\cos bx$ را نشان می‌دهد، مقدار ac کدام است؟



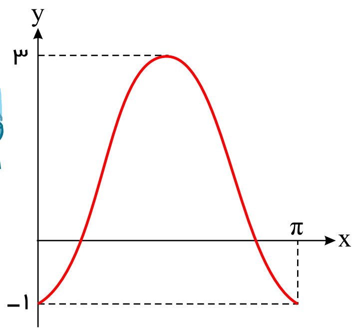
۱) -۵
۲) -۲
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۲}$

۲۹ شکل زیر، نمودار تابع $y=a\cos^{۲}(bx-\frac{\pi}{۴})+c$ در یک بازهٔ تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



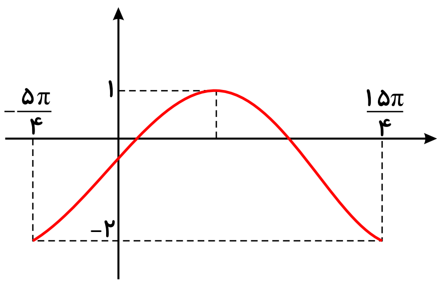
۱) ۱۵
۲) -۱۵
۳) ۷٫۵
۴) $-۷٫۵$

۳۰ اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(cx-\frac{۳\pi}{۴})\cos(cx-\frac{۳\pi}{۴})$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازهٔ $[۰,\pi]$، کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{۶}$
۲) $\frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

۳۱ شکل زیر، نمودار تابع $y=a\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴}-bx)+c$ در یک بازهٔ تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۱) $-۰٫۳$
۲) $۰٫۳$
۳) $-۰٫۶$
۴) $۰٫۶$

۳۲ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^{۲}(x)-\sin^{۲}(x)\cos(۳x)=۱$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

۳۳ فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha))(۱+\cos(۸\alpha))=\frac{۱}{۸}$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ باشد، ماکزیمم عضو مجموعهٔ A، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۷}\pi$
۲) $\frac{۶}{۷}\pi$
۳) $\frac{۷}{۹}\pi$
۴) $\frac{۸}{۹}\pi$

۳۴ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۵\sin^{۲}(x)+۲\cos(۳x)=-۲$، در فاصلهٔ $[-\pi,\pi]$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۵
۴) ۷

۳۵) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin(x)\cos(۲x) + \sin(x) = ۱$، در بازهٔ $[۰\ ,\ ۲\pi]$، کدام است؟

(۱) ۲π (۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ (۳) ۳π (۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

۳۶) تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(\alpha))(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha)) = \frac{۱}{۸}$، در فاصلهٔ $[۰\ ,\ ۲\pi]$ کدام است؟

(۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۳۷) تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۸\cos x - \tan^۲ x = ۱$ در بازه $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۳۸) تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۳}) = ۱$ در بازهٔ $[۰, ۲x]$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۹) مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴}) = ۱$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{۲}$ (۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ (۳) $\frac{\pi}{۴}$ (۴) $\frac{۵\pi}{۴}$

۴۰) کمترین فاصلهٔ بین دو مقدار از جواب‌های معادلهٔ $\frac{۱+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{۱+\sin x}$ کدام است؟

(۱) ۲π (۲) π (۳) $\frac{\pi}{۲}$ (۴) $\frac{\pi}{۳}$

۴۱) اگر اختلاف جواب‌های معادله $۰ = \frac{۱}{\cos(\frac{\pi+۸x}{۲})} + \frac{۱}{\sin(\frac{\pi+۴x}{۲})}$ در بازه $[۰, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(۲\alpha)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (۳) $\sqrt{۳}$ (۴) $-\sqrt{۳}$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱) (۱) (۲) **(۳)** (۴)

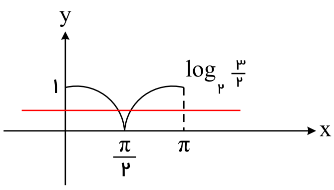
$$y=۲^{|\sin x|}\xrightarrow{\text{به راست } \frac{\pi}{۲}} y=۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|}=۲^{|\cos x|}\xrightarrow{\text{به پایین } \frac{۳}{۲}}\Rightarrow y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲}\xrightarrow{y=۰}۲^{|\cos x|}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \log_۲\frac{۳}{۲}=|\cos x|$$

$\log_۲\frac{۳}{۲}$ در واقع عدد بین صفر تا یک است؛ زیرا:

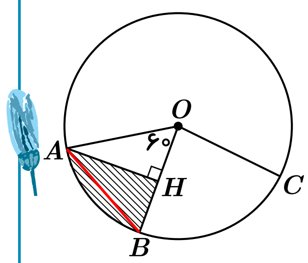
$$\underbrace{\log_۲ ۱}_{\text{صفر}}<\log_۲\frac{۳}{۲}<\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱}$$

حال تابع $y=|\cos x|$ و خط $y=log_۲\frac{۳}{۲}$ را رسم می‌کنیم.

خط و نمودار در دو نقطه تقاطع دارند.



۲) (۱) (۲) (۳) **(۴)**

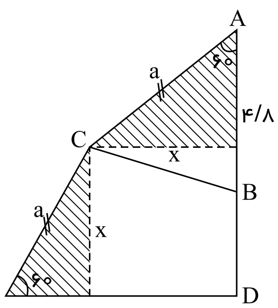


$$P=۲\pi r\Rightarrow ۲\pi=۲\pi r\Rightarrow r=۱\ ,\ OH=\frac{۱}{۲}OA\Rightarrow O\hat{A}H=۳۰^\circ\Rightarrow A\hat{O}B=۶۰^\circ$$

$$OA=OB=AB=۱\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\quad;\quad \overset{\frown}{AB}=\frac{۱}{۶}(۲\pi)=\frac{\pi}{۳}$$

$$(\cancel{AH}+\cancel{BH}+\overset{\frown}{AB})-(OA+\cancel{OH}+\cancel{AH})=\overset{\frown}{AB}-OA=\frac{\pi}{۳}-۱=\frac{\pi-۳}{۳}$$

۳) (۱) **(۲)** (۳) (۴) طبق مساحت سینوسی مثلث ABC داریم:



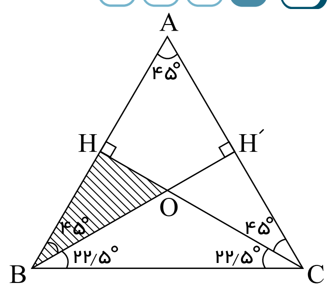
$$\begin{cases} S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a\times ۴/۸\times\sin ۶۰^\circ \\ \text{فرض}: S_{ABC}=۷/۲\sqrt{۳}\end{cases}\rightarrow ۱/۲a\sqrt{۳}=۷/۲\sqrt{۳}\Rightarrow a=۶$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ هاشورخورده با هم هم‌نهشت‌اند و داریم $x=a\sin ۶۰^\circ=۳\sqrt{۳}$؛ پس CD قطر مربعی به ضلع $۳\sqrt{۳}$ است و درنتیجه:

$$CD=۳\sqrt{۳}\times\sqrt{۲}=۳\sqrt{۶}$$

۴) (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$\overset{\Delta}{AH'B}:\sin ۴۵^\circ=\frac{AH'}{AB}\rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AH'}{۸}\rightarrow AH'=۴\sqrt{۲}\rightarrow AH=۴\sqrt{۲}\rightarrow BH=۸-۴\sqrt{۲}$$



۴۰ تست سراسری مثلثات سه سال اخیر

مثلث OHB به خاطر داشتن دو زاویهٔ 45° متساوی‌الساقین است، پس: $OH = BH = ۸ - ۴\sqrt{۲}$

$$S_{\overset{\Delta}{OBH}} = \frac{BH \times OH}{۲} = \frac{(۸ - ۴\sqrt{۲})(۸ - ۴\sqrt{۲})}{۲} = \frac{(۴(۲ - \sqrt{۲}))(۴(۲ - \sqrt{۲}))}{۲} = ۸(۲ - \sqrt{۲})^۲ = ۸(۴ + ۲ - ۴\sqrt{۲}) = ۸(۶ - ۴\sqrt{۲}) = ۱۶(۳ - ۲\sqrt{۲})$$

این جواب در گزینه‌ها نیست پس عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$۱۶(۳ - ۲\sqrt{۲})\frac{۳ + ۲\sqrt{۲}}{۳ + ۲\sqrt{۲}} = ۱۶\left(\frac{۹ - ۸}{۳ + ۲\sqrt{۲}}\right) = \frac{۱۶}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$$

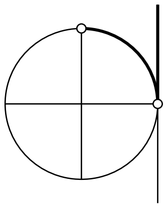
۵ ۴ ۳ ۲ **۱** زاویه $\frac{\pi}{۴} - x$ را تشکیل می‌دهیم:

$$-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۴} > -x > -\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴} > \frac{\pi}{۴} - x > \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۰ < \frac{\pi}{۴} - x < \frac{\pi}{۲}$$

فرض می‌کنیم $\alpha = \frac{\pi}{۴} - x$، داریم:

$$۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}, \tan\alpha = \frac{۱ - m}{۲ + m}$$

از روی دایرهٔ مثلثاتی مقابل مشخص است که اگر $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه $\tan\alpha > ۰$ پس داریم:



$$\frac{۱ - m}{۲ + m} > ۰ \Rightarrow$$

m		-۲		۱	
$\frac{۱-m}{۲+m}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

$$-۲ < m < ۱ \Rightarrow m \in (-۲\ ,\ ۱)$$

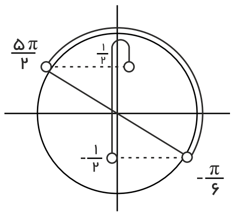
۶ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا حدود x را می‌یابیم:

$$-\frac{\pi}{۱۲} < x < \frac{۵\pi}{۱۲} \xrightarrow{\times ۲} -\frac{\pi}{۶} < ۲x < \frac{۵\pi}{۱۲}$$

با فرض $۲x = \alpha$ و استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\sin\alpha = \frac{m - ۱}{۴}\ ,\ -\frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶}$$

طبق دایرهٔ مثلثاتی مقابل، اگر $-\frac{\pi}{۶} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶}$، $\sin\alpha$ از $-\frac{۱}{۲}$ تا ۱ افزایش یافته و سپس تا $\frac{۱}{۲}$ کاهش می‌یابد، بنابراین در کل داریم:



$$-\frac{۱}{۲} < \sin\alpha \le ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < \frac{m - ۱}{۴} \le ۱ \xrightarrow{\times ۴} -۲ < m - ۱ \le ۴ \xrightarrow{+۱} -۱ < m \le ۵ \Rightarrow m \in (-۱, ۵]$$

۷ **۴** ۳ ۲ ۱ شیب خط داده‌شده به‌صورت $\frac{-۲m}{m^۲ - ۱}$ می‌شود که باید برابر $\tan ۶۰^\circ$ باشد، پس:

$$\frac{-۲m}{m^۲ - ۱} = \sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{۳}m^۲ + ۲m - \sqrt{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow m = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۲}}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow |m_۱ - m_۲| = \frac{۲\sqrt{۱۶}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

۸ ۴ **۳** ۲ ۱

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -۳ \Rightarrow \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x \cos x} = -۳ \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{۱}{۳}$$

$$(\sin x + \cos x)^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \sin x \cos x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$۳\pi < ۴x < ۴\pi \Rightarrow \frac{۳}{۴}\pi < x < \pi \Rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin^۳ x + \cos^۳ x = (\sin x + \cos x)(\sin^۲ x + \cos^۲ x - \sin x\cos x) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}(۱ + \frac{۱}{۳}) = -\frac{۴}{۹}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin^۳ x + \cos^۳ x} = \frac{۱}{-\frac{۴}{۹}\sqrt{۳}} = \frac{-۹}{۴\sqrt{۳}} = -\frac{۳\sqrt{۳}}{۴} = -۰٫۷۵\sqrt{۳}$$

۹ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$\tan x + \cot x = ۴ \Rightarrow \frac{۱}{\cos x\sin x} = ۴ \Rightarrow \cos x \sin x = \frac{۱}{۴}\ ,$$

$$۵\pi < ۴x < ۶\pi \xrightarrow{\div ۴} \frac{۵\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \sin x < \cos x < ۰ \to \sin x - \cos x < ۰ \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{(۱)} \sin x - \cos x = -\sqrt{۱ - ۲\cos x\sin x} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\sin^۳ x - \cos^۳ x = (\sin x - \cos x)(\cos^۲ x + \sin^۲ x + \cos x\sin x) = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱ + \frac{۱}{۴})$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x} = -۰٫۸\sqrt{۲}$$

۱۰ ۴ ۳ ۲ **۱** روش اول:

$$f(x) = ۳۲(\cos x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x)^۲$$

عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$f(x) = ۳۲(\frac{\sin x\cos x\cos ۲x\cos ۴x\cos ۸x\cos ۱۶x}{\sin x})^۲$$

$$f(x) = ۳۲(\frac{\frac{۱}{۳۲}\sin ۳۲x}{\sin x})^۲ = \frac{\sin^۲ ۳۲x}{۳۲\sin^۲ x} = \frac{\sin^۲ ۳۲x}{۱۶(۱ - \cos ۲x)}$$

در عبارت قبلی از اتحادهای $۲\sin^۲ x = ۱ - \cos ۲x$ و $\sin x\cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$ استفاده کرده‌ایم.

پس داریم: $f(\frac{\pi}{۱۲}) = \dfrac{\sin^۲\frac{۸\pi}{۳}}{۱۶(۱-\cos\frac{\pi}{۶})} = \dfrac{\sin^۲\frac{۲\pi}{۳}}{۱۶(۱-\cos\frac{\pi}{۶})} = \dfrac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})} \Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲}) = \dfrac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})} \times \dfrac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = \dfrac{۶+۳\sqrt{۳}}{۳۲} = \dfrac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$

روش دوم: می‌توانیم $\cos ۱۵^\circ$ را ابتدا محاسبه کرده و سپس در صورت سؤال قرار دهیم: $(\frac{\pi}{۱۲} = ۱۵^\circ)$

می‌دانیم: $\cos^۲ x = \dfrac{۱+\cos ۲x}{۲} \Rightarrow \cos^۲ ۱۵^\circ = \dfrac{۱+\cos ۳۰^\circ}{۲} = \dfrac{۲+\sqrt{۳}}{۴}$

پس داریم: $f(\frac{\pi}{۱۲}) = ۳۲\cos^۲ ۱۵^\circ\cos^۲ ۳۰^\circ\cos^۲ ۶۰^\circ\cos^۲ ۱۲۰^\circ\cos^۲ ۲۴۰^\circ = ۳۲ \times (\dfrac{۲+\sqrt{۳}}{۴}) \times \dfrac{۳}{۴} \times \dfrac{۱}{۴} \times \dfrac{۱}{۴} \times \dfrac{۱}{۴} = \dfrac{۶+۳\sqrt{۳}}{۳۲}$

۱۱ ۴ **۳** ۲ ۱ ابتدا صورت عبارت را کمی ساده کنیم، می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha) = \cos\alpha$ و $\sin(\alpha-\pi) = -\sin(\pi-\alpha) = -\sin\alpha$. داریم:

$$\cos\alpha = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{۱-\cos^۲\alpha} = \pm\sqrt{\frac{۵}{۹}} \overset{\text{ربع چهارم}}{=\!=\!=} -\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۹}{۴} \Rightarrow \tan^۲\alpha = \frac{۵}{۴}$$

حاصل عبارت موردنظر برابر می‌شود با:

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{|\tan^۲\alpha - ۱|} = \frac{\frac{۲}{۳} - \frac{\sqrt{۵}}{۳}}{|\frac{۵}{۴} - ۱|} = \frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

۱۲ ۴ **۳** ۲ ۱ طرفین $۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$ را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم و از رابطهٔ $\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۲\sin^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{\cos^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۲\tan^۲ x + ۱ = \frac{۴}{۳}(۱+\tan^۲ x) \xrightarrow{\times ۳} ۶\tan^۲ x + ۳ = ۴ + ۴\tan^۲ x \Rightarrow ۲\tan^۲ x = ۱ \Rightarrow \tan^۲ x = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم: از روابط $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$ و $\cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$ استفاده می‌کنیم.

$$۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$$

$$۲\sin^۲ x + ۱ - \sin^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۴}{۳} - ۱ = \frac{۱}{۳}$$

$$۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲(۱ - \cos^۲ x) + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \cos^۲ x = ۲ - \frac{۴}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\tan^۲ x = \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳ ۴ ۳ **۲** ۱ با توجه به رابطهٔ داده‌شده، مقدار کسینوس را به دست می‌آوریم:

$$\sin\alpha = ۲\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha = ۲$$

می‌دانیم:

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + ۴ = ۵ \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۵}$$

$$\xrightarrow[\cos\alpha<۰]{\text{ربع سوم}} \cos\alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۵}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۴ **۴** ۳ ۲ ۱

می‌دانیم: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$

ضابطهٔ تابع f را در $\sin^۲ ۳x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$f(x) = ۱۶\left(\frac{\overbrace{\sin ۳x\cos ۳x}^{\frac{۱}{۲}\sin ۶x}\cos ۶x\cos ۱۲x\cos ۲۴x}{\sin ۳x}\right)^۲$$

دقت کنید:

$$\sin ۳x\cos ۳x = \frac{۱}{۲}\sin ۶x$$

$$\sin ۶x\cos ۶x = \frac{۱}{۲}\sin ۱۲x$$

$$\sin ۱۲x\cos ۱۲x = \frac{۱}{۲}\sin ۲۴x$$

$$\sin ۲۴x\cos ۲۴x = \frac{۱}{۲}\sin ۴۸x$$

$$f(x) = ۱۶\left(\frac{\frac{۱}{۱۶}\sin ۴۸x}{\sin ۳x}\right)^۲$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{۳۶}\right) = ۱۶\left(\frac{\sin\frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin\frac{۳\times\pi}{۳۶}}\right)^۲ = \frac{\sin^۲\frac{۴\pi}{۳}}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}$$

از طرفی می‌دانیم $\sin^۲\alpha = \frac{۱ - \cos ۲\alpha}{۲}$ و $\sin\frac{۴\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و البته: $\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

$$f\left(\frac{\pi}{۳۶}\right) = \frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶\left(\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}\right)} = \frac{۳}{۱۶(۲-\sqrt{۳})} \times \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} = \frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۱۶}$$

۱۵ ۴ ۳ **۲** ۱ ابتدا کمی عبارت را ساده کنیم.

$$\frac{\cos(۲\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(۲\alpha)} = \frac{\sin ۲\alpha - \cos\alpha}{\cot(۲\alpha)}$$

دقت کنید که: $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$ و $\cos(۲\alpha - \frac{\pi}{۲}) = \sin ۲\alpha$.

برای حل سؤال مقادیر $\cos\alpha$، $\sin\alpha$، $\sin ۲\alpha$، $\cos ۲\alpha$ و $\cot ۲\alpha$ را نیاز داریم، که آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$1)\ 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+(\frac{3}{4})^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{16}{25}\xrightarrow{\alpha\ \text{در ربع سوم}}\cos\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$2)\ \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin^2\alpha=1-(-\frac{4}{5})^2=\frac{9}{25}\xrightarrow{\alpha\ \text{در ربع سوم}}\sin\alpha=-\frac{3}{5}$$

$$3)\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$$

$$4)\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(-\frac{4}{5})^2-(-\frac{3}{5})^2=\frac{7}{25}$$

$$5)\ \cot 2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}}=\frac{7}{24}$$

حال خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin 2\alpha-\cos\alpha}{\cot(2\alpha)}=\frac{\frac{24}{25}-(-\frac{4}{5})}{\frac{7}{24}}=\frac{44\times 24}{25\times 7}=\frac{1056}{175}$$

16 ① **②** ③ ④

می‌دانیم:

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\ ,\ 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15}$$

از طرفی:

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\frac{64}{225}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{225}{289}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{15}{17}\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\frac{8}{17}$$

حال خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=\frac{\frac{8\times17-8\times15}{15\times17}}{\frac{-7}{17}}=\frac{\frac{16}{15}}{-7}=-\frac{16}{105}$$

دقت کنید اگر $\frac{\alpha}{2}$ در ربع اول باشد با توجه به مقدار $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}$، α نیز ربع اول خواهد بود و اگر $\frac{\alpha}{2}$ در ربع سوم باشد باز هم α در ربع اول خواهد بود.

17 **①** ② ③ ④

قبل از حل سؤال نحوهٔ محاسبهٔ $\sin 3\alpha$ و اتحاد مثلثاتی آن را بررسی می‌کنیم.

$$\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha$$
$$\Rightarrow\sin 3\alpha=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\Rightarrow\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\Rightarrow\sin 3\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

حال تابع $f(\alpha)$ را ساده می‌کنیم.

$$f(\alpha)=4\sin\alpha\cos 2\alpha+2\sin\alpha=4\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\Rightarrow f(\alpha)=6\sin\alpha-8\sin^3\alpha=2(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)=2\sin 3\alpha$$

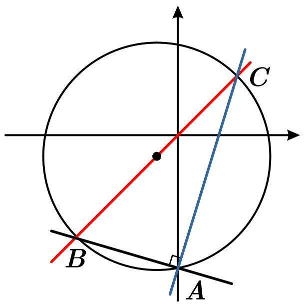
$$f(\frac{41\pi}{9})=2\sin(\frac{41\pi}{3})=2\sin(\frac{36\pi+5\pi}{3})=2\sin(12\pi+\frac{5\pi}{3})=2\sin\frac{5\pi}{3}=2\sin(2\pi-\frac{\pi}{3})=-2\sin\frac{\pi}{3}=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

18 ① **②** ③ ④ چون مرکز روی خط $y=-x$ است و دو خط دیگر با این خط متقاطع هستند، پس زاویهٔ A قائمه بوده و دو خط اولیه بر هم عمود هستند و داریم:

$$m=-\frac{۱}{۲}\ ,\ m'=\frac{-۲}{a}\ ,\ mm'=-۱\Rightarrow a=-۱\ ;\ \begin{cases}x+۲y=۳\\ ۲x-y=۶\end{cases}\Rightarrow A(۳\,,۰)$$

$$\begin{cases}۲y+x=۰\\ y+x=۰\end{cases}\Rightarrow B(-۳\,,۳)\ ;\ \begin{cases}۲x-y=۳\\ y+x=۰\end{cases}\Rightarrow C(۱\,,-۱)$$

$$AC=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}\ ,\ AB=\sqrt{۳۶+۹}=\sqrt{۴۵}$$



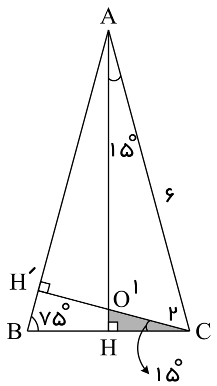
$$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۴۵}}=\frac{۱}{۳}\ ,\ \tan C=۳$$

$$\tan(B-C)=\frac{\tan B-\tan C}{۱+\tan B\tan C}=\frac{\frac{۱}{۳}-۳}{۱+\frac{۱}{۳}\times ۳}=-\frac{۴}{۳}\Rightarrow \cot(B-C)=-\frac{۳}{۴}$$

۱۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم: $\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}\ ,\ \cos^۲\alpha=\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲}$

روش اول: دقت کنید در مثلث $O\overset{\triangle}{H}C$ داریم $\hat{H}=۹۰^\circ,\hat{C}_۱=۱۵^\circ$.



نکته: در مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ ۱۵°، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

پس $S_{O\overset{\triangle}{H}C}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴}OC\times OC=\frac{OC^۲}{۸}$.

از طرفی در مثلث $O\overset{\triangle}{A}C$ طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{OC}{\sin ۱۵^\circ}=\frac{AC}{\sin\hat{O}_۱}\Rightarrow\frac{OC}{\sin ۱۵^\circ}=\frac{۶}{\underbrace{\sin ۱۰۵^\circ}_{\cos ۱۵^\circ}}\Rightarrow OC=۶\times\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}=۶\tan ۱۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin^۲ ۱۵^\circ=\dfrac{۱-\cos ۳۰^\circ}{۲}\\[2ex] \cos^۲ ۱۵^\circ=\dfrac{۱+\cos ۳۰^\circ}{۲}\end{array}\right.\Rightarrow\tan^۲ ۱۵^\circ=\frac{۱-\cos ۳۰^\circ}{۱+\cos ۳۰^\circ}=\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{(۲+\sqrt{۳})^۲}=\frac{۱}{۷+۴\sqrt{۳}}$$

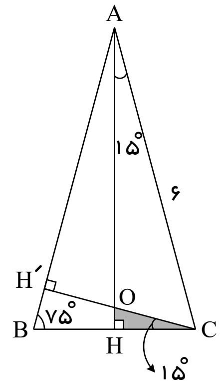
$$\Rightarrow S_{O\overset{\triangle}{H}C}=\frac{(۶\tan ۱۵^\circ)^۲}{۸}=\frac{۳۶}{۸}\times\frac{۱}{(۷+۴\sqrt{۳})}=\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$$

* این روش فراتر از کتاب ریاضی تجربی است و مناسب دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی است.

روش دوم:

$$\overset{\triangle}{AHC}: \sin 15^\circ = \frac{HC}{AC} \xrightarrow{AC=6} HC = 6\sin 15^\circ$$

$$\overset{\triangle}{OHC}: \tan 15^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = HC \times \tan 15^\circ$$



$$S_{\overset{\triangle}{OHC}} = \frac{1}{2} \times HC \times OH$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OHC}} = \frac{1}{2} \times (6\sin 15^\circ) \times (HC \tan 15^\circ) = \frac{1}{2} \times 36\sin^2 15^\circ \times \tan 15^\circ$$

می‌دانیم:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

از طرفی:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow \tan^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

پس داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{OHC}} = 18\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) \times \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{9}{2(2+\sqrt{3})^2} = \frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$$

۲۰ ۴ **۳** ۲ ۱ راه‌حل اول:

مخرج مشترک گرفته و ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + (1-\cos^2\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta} = \frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2\cot\frac{\theta}{2}$$

راه‌حل دوم:

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2} = 2\cot\frac{\theta}{2}$$

۲۱ ۴ **۳** ۲ ۱

$$10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{6\sqrt{5}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

طرفین تساوی فوق را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{9\times 5}{25} \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow 1 + \sin 2\alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

حال از رابطهٔ $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow 4 + 4\tan^2\alpha = 10\tan\alpha \Rightarrow 4\tan^2\alpha - 10\tan\alpha + 4 = 0 \Rightarrow 2\tan^2\alpha - 5\tan\alpha + 2 = 0$$

$$\Delta = ۲۵ - ۴ \times ۲ \times ۲ = ۹ \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۵ \pm ۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha = ۲ \\ \tan\alpha = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۲۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)** از رابطهٔ داده شده، مقدار $\sin x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x} = ۴ \Rightarrow ۴ + ۴\sin x = ۱ - \sin x \Rightarrow ۵\sin x = -۳ \Rightarrow \sin x = \frac{-۳}{۵}$$

$$\cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{۴}{۵} \xrightarrow{\text{ناحیهٔ ۳ } x} \cos x = \frac{-۴}{۵}$$

حاصل $\frac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x}$ را می‌یابیم.

$$\frac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x} = \frac{۲\sin^۲(\frac{x}{۲})}{۲\cos^۲(\frac{x}{۲})} = \tan^۲(\frac{x}{۲}) \Rightarrow \tan^۲(\frac{x}{۲}) = \frac{۱ - (-\frac{۴}{۵})}{۱ + (-\frac{۴}{۵})} \Rightarrow \tan^۲(\frac{x}{۲}) = \frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۱}{۵}} = ۹ \Rightarrow \tan(\frac{x}{۲}) = \pm ۳$$

$$\pi < x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\pi}{۲} < \frac{x}{۲} < \frac{۳\pi}{۴}$$

$\frac{x}{۲}$ زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم است و در این ناحیه مقدار تانژانت منفی است، پس:

$$\tan(\frac{x}{۲}) = -۳$$

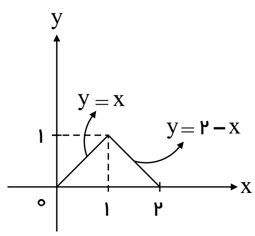
۲۳ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$$\cot(\frac{\pi + ۴x}{۲}) = \cot(\frac{\pi}{۲} + ۲x) = -\tan ۲x \;,\; \cos(\frac{\pi + ۸x}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۴x) = -\sin ۴x$$

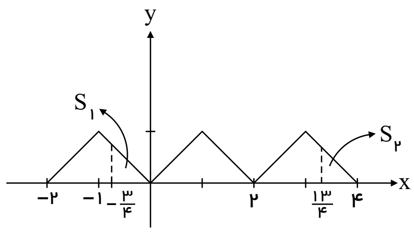
$$-\tan ۲x = -\sin ۴x \Rightarrow \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} = ۲\sin ۲x\cos ۲x \Rightarrow \frac{\sin ۲x(۱ - ۲\cos^۲ ۲x)}{\cos ۲x} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \\ \cos^۲ ۲x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x_۱ = \frac{\pi}{۸} \\ ۲x = -\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x_۲ = -\frac{\pi}{۸} \end{cases} \Rightarrow a = x_۱ - x_۲ = \frac{\pi}{۸} + \frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴}\;; \\ \cos(۳a) = \cos\frac{۳\pi}{۴} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ \cos ۲x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \text{جوابی در بازهٔ دادشده برای این حالت وجود ندارد.} \end{cases}$$

۲۴ **(۱)** (۲) (۳) (۴) نمودار تابع داده شده را در یک دورهٔ تناوبش رسم می‌کنیم.



اکنون شکل را در بازهٔ خواسته شده یعنی $[-\frac{۳}{۴}, \frac{۱۳}{۴}]$ رسم می‌کنیم:



چون $S_۱ = S_۲$ است بنابراین مساحت خواسته شده دو برابر مساحت یکی از مثلث‌های کامل است، یعنی $۲ \times (\frac{۲ \times ۱}{۲}) = ۲$.

۲۵ (۱) (۲) (۳) **(۴)** تابع زوج و فرد حذف شده!

نمودار تابع نسبت به خط $x = ۱$ متقارن است؛ پس:

$$f(۲ - x) = f(x)$$

نمودار تابع نسبت به خط $x = ۳$ متقارن است؛ پس:

$$f(۶-x)=f(x)$$

در رابطهٔ دوم به جای x قرار می‌دهیم: $x+۴$:

$$f(۶-(x+۴))=f(x+۴)\Rightarrow f(۲-x)=f(x+۴)$$

از طرفی $f(x)=f(۲-x)$، پس $f(x+۴)=f(x)$؛ بنابراین $t=۴$ دورهٔ تناوب است. حال بررسی می‌کنیم آیا $t=۲$ هم دورهٔ تناوب است. در رابطهٔ اول به جای x قرار می‌دهیم $x+۲$:

$$f(۲-(x+۲))=f(x+۲)\Rightarrow f(x+۲)=f(-x)$$

و دلیلی نداریم که $f(x)=f(-x)$، پس $t=۴$ کوچک‌ترین دورهٔ تناوب است.

۲۶ ۴ **۳** ۲ ۱ از روی نمودار، مشخص است که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است، پس داریم:

$$y=c+a\cos bx$$

$$\left.\begin{array}{l} max=|a|+c=۵ \\ min=-|a|+c=۱ \end{array}\right\}\Rightarrow ۲c=۶\Rightarrow c=۳$$

۲۷ ۴ ۳ ۲ **۱** با توجه به نمودار و اینکه $۰<c<\pi, b>۰$ مشخص است که a مثبت است.

$$\max=|a|=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{a>۰}a=\frac{۱}{۴}\to f(x)=\frac{۱}{۴}\cos(bx+c)$$

نقطهٔ $A(\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۴})$ در تابع صدق می‌کند:

$$\frac{۱}{۴}\cos(\frac{۳}{۴}b+c)=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos(\frac{۳b}{۴}+c)=-۱\Rightarrow\frac{۳b}{۴}+c=\pi$$

همچنین در $x=\frac{۵}{۴}$ مقدار تابع برابر صفر است.

$$f(\frac{۵}{۴})=۰\Rightarrow\frac{۱}{۴}\cos(\frac{۵}{۴}b+c)=۰\Rightarrow\cos(\frac{۵}{۴}b+c)=۰$$

با توجه به نمودار در $x=\frac{۵}{۴}$ دومین بار است که نمودار تابع محور xها را قطع می‌کند، پس داریم: $\frac{۵}{۴}b+c=\frac{۳\pi}{۲}$ و حال دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{۵}{۴}b+c=\frac{۳\pi}{۲}\\ \frac{۳}{۴}b+c=\pi\end{cases}\xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}}\frac{۵}{۴}b-\frac{۳}{۴}b=\frac{۳\pi}{۲}-\pi\Rightarrow\frac{۲}{۴}b=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow b=\pi$$

$$\frac{۵}{۴}b+c=\frac{۳\pi}{۲}\xrightarrow{b=\pi}c=\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}$$

$$\frac{a\cdot c}{b}=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{\pi}{۴}}{\pi}=\frac{۱}{۱۶}$$

۲۸ **۴** ۳ ۲ ۱ با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع برابر $\frac{۵}{۲}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{۱}{۲}$ است، پس:

$$\left.\begin{array}{l} c+|a|=\frac{۵}{۲} \\ c-|a|=-\frac{۱}{۲} \end{array}\right\}\Rightarrow ۲c=\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲}=۲\Rightarrow c=۱\Rightarrow ۱+|a|=\frac{۵}{۲}\Rightarrow|a|=\frac{۳}{۲}$$

چون نمودار در شکل برخورد با محور yها دارای مینیمم است، پس a منفی است.

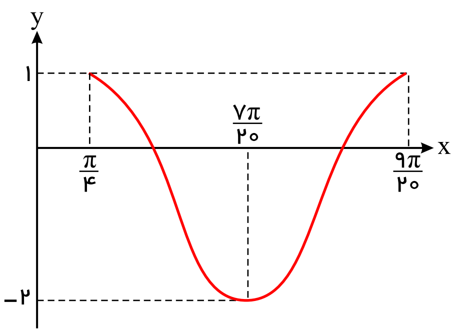
$$|a|=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{a<۰}a=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a\cdot c=-\frac{۳}{۲}\times ۱=-\frac{۳}{۲}$$

۲۹ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$T=\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۵}\Rightarrow|b|=۵\Rightarrow b=\pm۵\Rightarrow b=۵$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow a\cos^۲(۵\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})+c=۱\Rightarrow a+c=۱ \\ f(\frac{۷\pi}{۲۰})=-۲\Rightarrow a\cos^۲(۵\times\frac{۷\pi}{۲۰}-\frac{\pi}{۴})+c=-۲\Rightarrow c=-۲ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a=۳\quad\Rightarrow ab=۱۵$$



۳۰ **۴** ۳ ۲ ۱ ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + b\sin(cx - \frac{3\pi}{4})\cos(cx - \frac{3\pi}{4})$$

$$\Rightarrow fx = a + \frac{b}{2}\sin(2cx - \frac{3x}{2}) = a + \frac{b}{2}\cos(2cx)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نمودار}} \begin{cases} a - |\frac{b}{2}| = 1 \\ a + |\frac{b}{2}| = 3 \end{cases} \to a = 1 \xrightarrow{f(0)=-1} -1 = 1 + \frac{b}{2} \Rightarrow b = -4$$

مقدار c را هم از دورهٔ تناوب تابع به دست می‌آوریم:

$$\frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - 2\cos 2x \xrightarrow{\text{صفرهای } f} 1 - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \xrightarrow{0 \le x \le} \begin{cases} 2x_1 = \frac{\pi}{3} \\ 2x_2 = \frac{5x}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{5\pi}{6} \\ x_1 = \frac{\pi}{6} \end{cases} \to x_2 - x_1 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

۳۱ ۱ ۲ **۳** ۴ از نمودار مشخص است که $a(-b) > 0 \to ab < 0$ است.

$$\sin^2(\frac{\pi}{4} - bx) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2(\frac{\pi}{4} - bx)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2bx \Rightarrow y = -\frac{a}{2}\sin 2bx + \frac{a}{2} + c$$

$$\left\{\begin{matrix} y_{max} = |-\frac{a}{2}| + \frac{a}{2} + c = 1 \\ y_{min} = -|-\frac{a}{2}| + \frac{a}{2} + c = -2 \xrightarrow{\times -1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2|\frac{a}{2}| = 3 \to a = \pm 3,$$

$$T = \frac{15\pi}{4} - (-\frac{5\pi}{4}) = 5\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = 5\pi \Rightarrow b = \pm\frac{1}{5} \xrightarrow{ab<0} ab = -\frac{3}{5} = -0/6$$

۳۲ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ پس داریم:

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x\cos 3x = 1 \Rightarrow \sin^2 x\cos 3x + \sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x(\cos 3x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

معادلهٔ دوم نیز سه جواب دارد ($\frac{5\pi}{3}$، π و $\frac{\pi}{3}$) اما جواب π در هر دو معادله به دست آمد و تکراری است. پس در کل معادلهٔ فوق ۵ جواب $(0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ را خواهد داشت.

۳۳ ۱ ۲ ۳ **۴**

می‌دانیم:

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \ , \ 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha \times 2\cos^2 2\alpha \times 2\cos^2 4\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos^2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha\cos 4\alpha = \pm\frac{1}{8} \xrightarrow[\alpha\neq k\pi]{\times \sin\alpha} \underbrace{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 4\alpha} \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{4}\underbrace{\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 8\alpha}$$

$$= \frac{1}{8}\sin 8\alpha = \pm\frac{1}{8}\sin\alpha \Rightarrow \sin 8\alpha = \pm\sin\alpha$$

$$(1)\ \sin 8\alpha = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow max : \frac{6\pi}{7} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \Rightarrow max : \frac{7\pi}{9} \end{cases}$$

$$(۲)\ \sin ۸\alpha = -\sin\alpha \Rightarrow \sin ۸\alpha = \sin(-\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۸\alpha = ۲k\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{۲k\pi}{۹} \Rightarrow max = \dfrac{۸\pi}{۹} \\ ۸\alpha = ۲k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{۲k\pi}{۷} + \dfrac{\pi}{۷} \Rightarrow max = \dfrac{۵\pi}{۷} \end{cases}$$

* البته دقت کنید که $\alpha = \pi$ جواب قابل‌قبول برای معادله نیست. پس ماکزیمم جواب‌ها $\dfrac{۸\pi}{۹}$ است.

(۳۴) ۴ ۳ **۲** ۱ می‌دانیم که $۱ + \cos ۲x = ۲\cos^۲ x$ است.

$$۵\sin^۲ x + ۲\cos ۳x + ۲ = ۰ \to ۵\sin^۲ x + ۲(۱+\cos ۳x) = ۰ \to ۵\sin^۲ x + ۲\cos^۲\dfrac{۳x}{۲} = ۰$$

جمع دو عبارت نامنفی وقتی صفر است که تک‌تک آن‌ها صفر باشند و ریشهٔ مشترک، جواب معادله است.

$$۵\sin^۲ x = ۰ \to \sin x = ۰ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \to x = -\pi, ۰, \pi$$

$$۲\cos^۲\dfrac{۳x}{۲} = ۰ \to \cos\dfrac{۳x}{۲} = ۰ \xrightarrow{\cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۳x}{۲} = k\pi + \dfrac{\pi}{۲} \to x = \dfrac{۲k\pi}{۳} + \dfrac{\pi}{۳}$$
$$\to x = -\pi\ ,\ -\dfrac{\pi}{۳}\ ,\ \dfrac{\pi}{۳}\ ,\ \pi$$

بنابراین ریشه‌های مشترک π و $-\pi$ هستند. پس معادله دو جواب دارد.

(۳۵) ۴ ۳ **۲** ۱ می‌دانیم $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$، پس می‌توان نوشت:

$$۲\sin x(۱ - ۲\sin^۲ x) + \sin x = ۱ \Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۱$$

سمت چپ معادله برابر $\sin ۳x$ است، پس:

$$\sin ۳x = ۱ \Rightarrow ۳x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \dfrac{۲k\pi}{۳} + \dfrac{\pi}{۶} \xrightarrow{۰ \le x \le ۲\pi} x = \dfrac{\pi}{۶}\ ,\ \dfrac{۵\pi}{۶}\ ,\ \dfrac{۹\pi}{۶}$$

بنابراین مجموع این سه ریشه برابر $\dfrac{۵\pi}{۲} = \dfrac{۱۵\pi}{۶}$ است.

(۳۶) **۴** ۳ ۲ ۱

$$۲\cos^۲\dfrac{\alpha}{۲} \times ۲\cos^۲\alpha \times ۲\cos^۲ ۲\alpha = \dfrac{۱}{۸} \Rightarrow ۶۴\cos^۲\dfrac{\alpha}{۲}\cos^۲\alpha\cos^۲ ۲\alpha = ۱ \Rightarrow ۸\cos\dfrac{\alpha}{۲}\cos\alpha\cos ۲\alpha = \pm۱$$

دو طرف را در $\sin\dfrac{\alpha}{۲} \neq ۰$ ضرب می‌کنیم:

$$۴\underbrace{(۲\sin\dfrac{\alpha}{۲}\cos\dfrac{\alpha}{۲})}_{\sin\alpha}\cos\alpha\cos ۲\alpha = \pm\sin\dfrac{\alpha}{۲} \Rightarrow ۲\underbrace{(۲\sin\alpha\cos\alpha)}_{\sin ۲\alpha}\cos ۲\alpha = \pm\sin\dfrac{\alpha}{۲} \Rightarrow \sin ۴\alpha = \sin(\pm\dfrac{\alpha}{۲})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴\alpha = ۲k\pi \pm \dfrac{\alpha}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۷}{۲}\alpha = ۲k\pi \\ \dfrac{۹}{۲}\alpha = ۲k\pi \end{cases} \\ ۴\alpha = (۲k+۱)\pi \mp \dfrac{\alpha}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۹}{۲}\alpha = (۲k+۱)\pi \\ \dfrac{۷}{۲}\alpha = (۲k+۱)\pi \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۷}{۲}\alpha = k\pi \\ \dfrac{۹}{۲}\alpha = k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{۲k\pi}{۷} \\ \alpha = \dfrac{۲k\pi}{۹} \end{cases}$$

باید $\sin\dfrac{\alpha}{۲} \neq ۰$ یعنی $\alpha \neq ۲k\pi$، پس ریشه‌ها در بازهٔ $[۰\ ,\ ۲\pi]$ عبارتند از:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{۲\pi}{۷}, \dfrac{۴\pi}{۷}, \dfrac{۶\pi}{۷}, \cdots, \dfrac{۱۲\pi}{۷} & \text{۶ جواب} \\ \alpha = \dfrac{۲\pi}{۹}, \dfrac{۴\pi}{۹}, \dfrac{۶\pi}{۹}, \cdots, \dfrac{۱۶\pi}{۹} & \text{۸ جواب} \end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[۰\ ,\ ۲\pi]$، ۱۴ جواب دارد.

(۳۷) **۴** ۳ ۲ ۱

$$۸\cos x - \tan^۲ x = ۱ \Rightarrow ۸\cos x = ۱ + \tan^۲ x$$

با استفاده از رابطهٔ $۱ + \tan^۲ x = \dfrac{۱}{\cos^۲ x}$ داریم:

$$۸\cos x = \dfrac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۸\cos^۳ x = ۱ \xrightarrow{\text{فرجه ۳}} ۲\cos x = ۱ \Rightarrow \cos x = \dfrac{۱}{۲} = \cos\dfrac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \dfrac{\pi}{۳} \xrightarrow{۰ \le x \le ۲\pi} \begin{cases} x = \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲\pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

پس معادله در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ دارای ۲ جواب است.

۳۸ ۴ ۳ ۲ ۱ با استفاده از رابطهٔ $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ داریم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱ \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۶}))\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱ \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}-x-\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱ \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۳}-x)\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱$$

چون $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، پس:

$$\cos(x-\frac{\pi}{۳})\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱ \Rightarrow \cos^۲(x-\frac{\pi}{۳})=۱ \Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{۳})=\pm۱$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱ \Rightarrow x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{۳})=-۱ \Rightarrow x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\pi \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۴\pi}{۳}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ عبارتند از:

$$x=\frac{\pi}{۳},\ x=\frac{۴\pi}{۳}$$

۳۹ ۴ ۳ ۲ ۱ با استفاده از رابطهٔ $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ عبارت $\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ را به‌صورت زیر نوشته و در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۴}))=\cos(\frac{\pi}{۲}-x-\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{\pi}{۴}-x)$$

طبق رابطهٔ (۱) داریم:

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\cos(\frac{\pi}{۴}-x)=\cos(x-\frac{\pi}{۴})\quad (۱)$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴})=۱ \xrightarrow{(۱)} \cos^۲(x-\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{۴})=\pm۱$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi \to x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{۴})=-۱ \Rightarrow x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}$$

$$۰\le x\le ۲\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}=\frac{۶\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$$

۴۰ ۴ ۳ ۲ ۱ طبق فرض داریم:

$$\frac{\cos x}{۱+\sin x}=\frac{۱+\sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos^۲ x=(۱+\sin x)^۲$$

$$\Rightarrow ۱-\sin^۲ x=۱+\sin^۲ x+۲\sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x+۲\sin x=۰$$

$$\Rightarrow ۲\sin x(\sin x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\sin x=۰ \Rightarrow x=k\pi\\ ۱+\sin x=۰\quad \text{(چرا؟) غ ق ق}\end{cases}$$

جواب‌های معادله به‌صورت $k\pi$ هستند که فاصلهٔ هر دو جواب متوالی π است.

۴۱ ۴ ۳ ۲ ۱

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin(\frac{\pi}{۲}+۲x)}+\frac{۱}{\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x)}=۰ \Rightarrow \frac{-\sin ۴x+\cos ۲x}{(\cos ۲x)(-\sin ۴x)}=۰ \Rightarrow \sin ۴x=\cos ۲x$$

$$\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x=\cos ۲x \Rightarrow \cos ۲x(۲\sin ۲x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\cos ۲x=۰ \Rightarrow \text{غ ق ق}\\ \sin ۲x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶},\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}$$
$$x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲},\ x=k\pi+\frac{۵\pi}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases}x_۱=\frac{\pi}{۱۲}\\ x_۲=\frac{۵\pi}{۱۲}\end{cases} \Rightarrow \alpha=\frac{۵\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۳}$$

$$\tan(۲\alpha)=\tan(\frac{۲\pi}{۳})=-\sqrt{۳}$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۳
۲	۴
۳	۲
۴	۴
۵	۱
۶	۲
۷	۴
۸	۳
۹	۱
۱۰	۱
۱۱	۳
۱۲	۳
۱۳	۲
۱۴	۴
۱۵	۲
۱۶	۲
۱۷	۱
۱۸	۲
۱۹	۴
۲۰	۳
۲۱	۳
۲۲	۴
۲۳	۲
۲۴	۱
۲۵	۴
۲۶	۳
۲۷	۱
۲۸	۴
۲۹	۱
۳۰	۴
۳۱	۳
۳۲	۳
۳۳	۴
۳۴	۲
۳۵	۲
۳۶	۴
۳۷	۴
۳۸	۲
۳۹	۲
۴۰	۲
۴۱	۴