نام و نام خانوادگی: افغانی سادات

نام آزمون: ۵۵ تست سراسری سه سال اخیر

آموزشگاه پرسا

ریاضی 3 و کنکور پایه

دوازدهم — فصل اول: تابع — تعریف تابع

۱- مجموعه‌های A و B به‌ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m-k=۱۴$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعهٔ $B-A$ چند عضو دارد؟

۱۱- متوسط مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

① ۸ ② ۶ ③ ۴ ④ ۳

۲- حداقل چند عضو از مجموعهٔ $\{f=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z},x=\frac{۷۲}{y^۲-۱}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱۴- متوسط مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۳- حداقل چند عضو از مجموعهٔ $\{f=\{(x\ ,\ y)|x\ ,\ y\in\mathbb{Z}\ ,\ x=\frac{۳۰}{۱+|y|}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱۵- سخت مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

① ۷ ② ۶

③ ۵ ④ ۴

۴- اگر $f(x)=\left((\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x\right)^۳$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(fof)(x)<f(۲^{-۳x})$ کدام است؟

۱۶- سخت مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

① $(۰,\frac{۱}{۸})$ ② $(۱,+\infty)$ ③ $(\frac{۱}{۸},+\infty)$ ④ $(۰,۱)$

دامنه توابع

۵- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_۴(|x^۲-۲|-x)$، کدام است؟

۲۱- متوسط مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

① $(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(۲,+\infty)$ ② $(-\infty,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$ ③ $[-۱,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$ ④ $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$

۶- دامنهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{۱}{۲}}x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

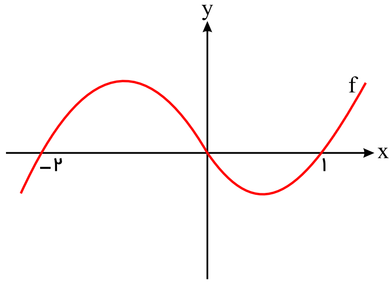
۲۲- متوسط مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619 4/21/24, 22:01 Page 1 of 42

۲۳- سخت‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۷ - نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

برد توابع

۱۵- متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۸ - فرض کنید $[a\ ,\ b]$ برد تابع $f(x)=۲^{-\sqrt{۵\sin^۲(x)-۱}}$ باشد. مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

تبدیل نمودار توابع

۹ - نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۲۴- متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) $۴\sqrt{۱۵}$ ۲) $۶\sqrt{۷}$ ۳) $۴\sqrt{۱۷}$ ۴) $۶\sqrt{۱۰}$

۱۰ - نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x; (x>۱)$، مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور xها را، ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱۹- متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۱۱ - قرینهٔ نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟

۳۲- متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۴

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619 4/21/24, 22:01 Page 3 of 42

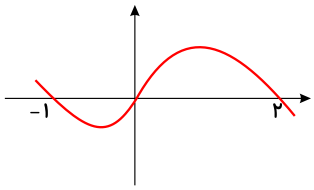
۱۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینهٔ آن نسبت به محور xها را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم؟ فاصلهٔ نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدا مختصات، کدام است؟ ۱۷- متوسط مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۱۳- نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور xها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{1}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a)=3$ کدام است؟ ۱۱- متوسط مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

① $2+\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2-\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{2}$

۱۴- شکل زیر، نمودار $f(x-2)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟ ۱۳- سخت مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲



① ۴ ② ۲
③ صفر ④ بیش از ۴

۱۵- قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟ ۴۸- متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

① $x=1$ ② $x=1/5$
③ $x=2$ ④ $x=2/5$

۱۶- ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟ ۲۶- آسان مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

① 0 ، 2 ② -1 ، 1 ③ -1 ، 2 ④ 1 ، -2

۱۷- نمودار تابع $y=2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟ ۱۳- متوسط مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۴

۱۸- نمودار منحنی $y=\sqrt{۴-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-۲$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به‌سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به‌دست‌آمده با محور xها کدام است؟ ۱۰- آسان‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

① -۴ ② -۳ ③ ۱ ④ ۲

۱۹- تابع $y=۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد xها در جهت منفی و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ ۲۰- متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

① $-\frac{۵}{۲}$ ② $-\frac{۳}{۲}$ ③ $\frac{۵}{۲}$ ④ $\frac{۷}{۲}$

۲۰- نمودار تابع با ضابطه $f(x)=۴x-x^۲$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟ ۲۴- متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

① ۱ ② ۲ ③ $۲\sqrt{۵}$ ④ $\sqrt{۱۰}$

ترکیب توابع

۲۱- اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$ باشند، بُرد تابع gof، کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است) ۲۰- سخت‌مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

① $[۰,۲)$ ② $[۰,۳)$ ③ $[۰,۴)$ ④ $[۱,۴)$

۲۲- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\frac{۱-۲x}{x+۱}$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.) ۱۳- سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

① $[-۱,۱)$ ② $(-۱,۱]$ ③ $[۱,+\infty)$ ④ $(-\infty,۱]$

۲۳- اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟ ۲۷- آسان‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

① ۴ ② -۴ ③ -۶ ④ ۶

۲۴- اگر $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=f([x-f(x)])$ باشد، $fog(-\frac{۱}{۳})$ کدام است؟ ۱۸- آسان‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

① -۲ ② ۲ ③ -۴ ④ ۴

۵۵ تست سراسری سه سال اخیر

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619 4/21/24, 22:01 Page 7 of 42

۲۵- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<-۱\\ x & -۱\leq x\leq ۱\\ ۱ & x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$، ماکزیمم مقدار تابع $gof-fog$، کدام است؟

۱۳- سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

① -۱ ② صفر ③ $\frac{۱}{۲}$ ④ ۱

۲۶- اگر $gof(x)=۵x^۲+۱۱$ و $f(x)=۲x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-۷)$ چقدر است؟

۲۰- متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

① ۳ ② ۷ ③ ۹ ④ ۱۱

۲۷- اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{۲})$ کدام است؟

۴۱- آسان‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

① $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ② $\sqrt{۲}$ ③ ۲ ④ $\frac{۱}{۲}$

انواع تابع

۲۸- دو تابع $f(x)=b-۳ax$ و $g(x)=c-(۳b-۳)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=۵$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

۲۳- آسان‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

① -۶ ② -۴ ③ ۴ ④ ۶

۲۹- اگر $f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^۲$ ضابطهٔ یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟

۱۹- آسان‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

① $-\frac{۲}{۷}$ ② $\frac{۲}{۷}$ ③ $-\frac{۴}{۷}$ ④ $\frac{۴}{۷}$

۳۰- تابع $f(x)=mx^۲-nx-k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعهٔ زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟

۲۰- آسان‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

$\{(m\,,\,n-۱)\,,\,(۰,k)\,,\,(n-۱,m^۲+۲m-۱)\,,\,(۳k+۲,۲k+۱)\}$

① -۱ ② $-\sqrt{۵}$ ③ ۱ ④ $\sqrt{۵}$

۳۱- فرض کنید برد تابع $f(x)=۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲(x)-۱}}-۲^{\sqrt[۳]{۱-۹\cos^۲(x)}}$ به‌صورت $[a,b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۹- سخت‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

① $\frac{۹}{۴}$ ② $\frac{۱۵}{۴}$ ③ $\frac{۹}{۲}$ ④ $\frac{۲۱}{۴}$

۳۲- تابع $f(x)=(-۹+k^۲)x^۳+۵$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k، چقدر است؟

۳۰- آسان‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۶

۳۳- تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(۳)=۰$ باشد، دامنهٔ $g(x)=\sqrt{x^۲f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۲۴- متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

① صفر ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۴- تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{(x+1)^2}-|3x-6|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱۶- متوسطمرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

(۱) $-\frac{1}{2}x-7\,,\,x\geq 2$ (۲) $-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\,,\,x\leq 3$ (۳) $-2x+14\,,\,x\leq 3$ (۴) $-2x-\frac{14}{3}\,,\,x\geq 2$

۳۵- تابع f اکیداً نزولی و دامنهٔ آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2-m-5)<f(-3+2m-m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱۳- متوسطمرجع: سراسری- ۱۴۰۲

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۳۶- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6)+g(12)$، کدام است؟

۴۳- متوسطمرجع: سراسری- ۱۳۹۹

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۳۷- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{2}{x}$ در دامنهٔ $D_f=(-\infty,0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۲۳- متوسطمرجع: سراسری- ۱۳۹۹

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۱۵- سختمرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۳۸- فرض کنید در دامنهٔ $[0,+\infty)$، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2^x+(\frac{1}{2})^x}{2}$، مفروض باشد. $f^{-1}(2)$، کدام است؟

(۱) $\log_2(2-\sqrt{3})$ (۲) $\log_2(\sqrt{3}-1)$ (۳) $\log_2(1+\sqrt{3})$ (۴) $\log_2(2+\sqrt{3})$

۳۹- فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3)+g(15)$، کدام است؟

۴۵- متوسطمرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

(۱) ۱۲ (۲) ۱۱
(۳) ۱۰ (۴) ۸

۴۰- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{1}{2x}$ بر دامنهٔ $(0,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۲۲- متوسطمرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

(۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۶- سختمرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۴۱- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2^x-(\frac{1}{2})^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$، کدام است؟

(۱) $\log_2(-1+\sqrt{5})$ (۲) $\log_2(1+\sqrt{5})$ (۳) $\log_2(2+\sqrt{5})$ (۴) $\log_2(3+\sqrt{5})$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619
4/21/24, 22:01
Page 11 of 42

۴۲ - فرض کنید M نقطهٔ تلاقی نمودار تابع $y=\sqrt{x+۳}-۱$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات کدام است؟

۲۹- متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

① $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ② $\sqrt{۲}$ ③ ۳ ④ $۲\sqrt{۲}$

۴۳ - نمودار منحنی $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام‌یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به‌دست آمده، قرار دارد؟

۱۲- سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

① $(۱-\sqrt{۵}\,,\,۰)$ ② $(-\sqrt{۵}\,,\,۰)$ ③ $(۰\,,\,۱-\sqrt{۵})$ ④ $(۰\,,\,-\sqrt{۵})$

۴۴ - وارون تابع $y=x^۳-x+۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۳۶- آسان‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

① $(-۱,-۲)$ ② $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲})$ ③ $(۱,۲)$ ④ $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱۱}{۸})$

۴۵ - تابع $f(x)=x^۲\sqrt{x^۲}$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱۵- آسان‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

① $-\sqrt{x^۳}, x\leq ۰$

② $-\sqrt[۳]{x}, x\leq ۰$

③ $-\sqrt{x^۳}, x\geq ۰$

④ $-\sqrt[۳]{x}, x\geq ۰$

۴۶ - وارون تابع $y=-۳x^۳+۲x-۱۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۳۷- آسان‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

① $(۹,-۲)$ ② $(۲,-۳۱)$ ③ $(-۱,۱۰)$ ④ $(-۱۲,-۱)$

۴۷ - فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y=x^۳+۳x-۱۲$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱۸- متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

① $۲\sqrt{۳}$

② $\sqrt{۳}$

③ $۲\sqrt{۲}$

④ $\sqrt{۲}$

۴۸ - اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}\ ,\ x\geq ۱$ باشد، $(gog)(۱)$ کدام است؟

۲۴- متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

① ۱ ② ۴ ③ ۹ ④ صفر

۴۹ - تابع $f(x)=\begin{cases} ۲-۳x & , \quad ۲x+۳\leq ۰ \\ ۲+۲mx-x^۲ & , \quad ۲x+۳>۰ \end{cases}$ روی دامنهٔ تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به‌ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱۹)$ کدام است؟

۱۰- متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ صفر

۵۰ - وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-۲\sqrt{mx-۱}}$ در دامنهٔ محدود، خط $y=۱۲-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+۴)$ کدام است؟

۱۴- متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

① $\frac{۱}{۲}$ ② $\frac{۱}{۴}$ ③ ۲ ④ ۱

۵۵ تست سراسری سه سال اخیر

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619 4/21/24, 22:01 Page 13 of 42

۵۱- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} & ۲x - ۵ \geq ۰ \\ -۲x^۲ + ax - ۲۱ & ۲x - ۵ < ۰ \end{cases}$ روی دامنهٔ تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به‌ازای بزرگ‌ترین مقدار صحیح a باشد، مقدار $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟

۹- سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۱

۳۸- متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۵۲- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{۹x + ۶}{۱ - x}$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۲۰)$، کدام است؟

① $\frac{۲}{۵}$ ② $\frac{۳}{۵}$ ③ $\frac{۲}{۳}$ ④ $\frac{۳}{۴}$

۵۳- با فرض $x \geq ۲ \;;\; f(x) = x^۲ - ۴x + ۹$ و $g(x) = \frac{۳ - x}{۲}$، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)$ کدام است؟

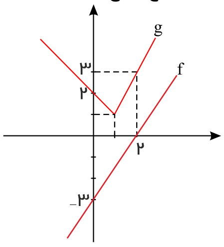
۴۰- متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

① ۳ ② ۴

③ ۵ ④ ۶

۲۶- سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۵۴- با توجه به نمودارهای f و g در شکل زیر، حاصل $gof^{-۱}(-۲) \times gog(۰)$ کدام است؟



① ۶

② ۴

③ -۴

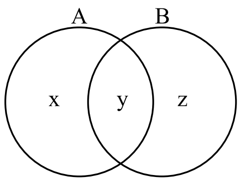
④ -۶

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619

4/21/24, 22:01
Page 15 of 42

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۴



$$(x+y)-(y+z)=۱۴\Rightarrow x-z=۱۴$$
$$(x+y+z)-y=x+z=۲۰$$
$$\Rightarrow x=۱۷\quad,\quad z=۳\quad n(B-A)=Z=۳$$

۲ ـ گزینه ۲ $y^۲-۱$ شمارندهٔ ۷۲ است؛ بنابراین:

$$y^۲=۰,۴,۹,۲۵\rightarrow y=۰,\pm۲,\pm۳,\pm۵$$

بنابراین با حذف ۳ زوج مرتب عضو که زوج مرتب‌های f تابع می‌شود.

۳ ـ گزینه ۱

$$f=\left\{(۳۰,۰),\underbrace{\begin{matrix}(۱۵,۱)\\(۱۵,-۱)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۱۰,۲)\\(۱۰,-۲)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۶,۴)\\(۶,-۴)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۵,۵)\\(۵,-۵)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۳,۹)\\(۳,-۹)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۲,۱۴)\\(۲,-۱۴)\end{matrix}},\underbrace{\begin{matrix}(۱,۲۹)\\(۱,-۲۹)\end{matrix}}\right\}$$

می‌بایست حداقل ۷ عضو که عضوهای اول برابر دارند را حذف کنیم.

۴ ـ گزینه ۴ درون پرانتز مجموع دو تابع اکیداً نزولی است که به توان عدد فردِ ۳ می‌رسند، پس تابع اکیداً نزولی می‌شود.

$$(fof)(x)<f(۲^{-۳x})\Rightarrow f(f(x))<f(۲^{-x})^۳\rightarrow f(x)>(۲^{-x})^۳\Rightarrow$$
$$((\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x)^۳>((\frac{۱}{۲})^x)^۳\rightarrow(\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۵}x>(\frac{۱}{۲})^x\Rightarrow\log_{۰/۵}x>۰\Rightarrow x\in(۰,۱)$$

۵ ـ گزینه ۴ روش اول: کافی است عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار دهید.

$$|x^۲-۲|-x>۰\rightarrow|x^۲-۲|>x$$

ریشه‌های داخل قدرمطلق $\pm\sqrt{۲}$ هستند.

$$x<-\sqrt{۲}\rightarrow x^۲-۲>x\rightarrow x^۲-x-۲>۰\rightarrow(x-۲)(x+۱)>۰\rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۲\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}x<-\sqrt{۲}$$
$$\sqrt{۲}\le x\le\sqrt{۲}\rightarrow -x^۲+۲>x\rightarrow x^۲+x-۲<۰\rightarrow(x+۲)(x-۱)<۰\rightarrow -۲<x<۱\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}-۲<x<۱$$
$$x>\sqrt{۲}\rightarrow x^۲-۲>x\rightarrow x^۲-x-۲>۰\rightarrow(x-۲)(x+۱)>۰\rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۲\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}}x>۲$$

از اجتماع جواب‌های به‌دست آمده به $x>۲$ یا $x<۱$ می‌رسیم.

روش دوم: به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x=۲\rightarrow$ جلوی لگاریتم منفی می‌شود $\rightarrow$ گزینه‌های ۲ و ۳ حذف می شوند

$x=-۱\rightarrow$ جلوی لگاریتم مثبت می‌شود $\rightarrow$ گزینهٔ ۱ حذف می شود

۶ ـ گزینه ۱ عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید نامنفی باشد. جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال به صورت زیر است:

x		۰		۱	
x	−	۰	+		+
$\log_{۰/۵}x$			+	۰	−
P			+		−

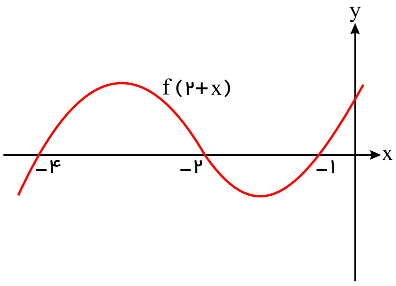
https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619
4/21/24, 22:01
Page 17 of 42

$D_f = (۰, ۱)$

در دامنهٔ تابع f، هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.

۷ ـ گزینه ۱ برای رسم نمودار $f(x+۲)$ باید نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

با توجه به شکل داده‌شده $D_f = R \Leftarrow$



$$-\frac{f(x)}{f(۲+x)} \geq ۰ \Rightarrow \frac{f(x)}{f(۲+x)} \leq ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq ۰ \ , \ f(۲+x) < ۰ \\ \text{یا} \\ f(x) \leq ۰ \ , \ f(۲+x) > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq ۰ \ , \ f(۲+x) < ۰ \Rightarrow [-۲, ۰] \cup [۱, \infty) \cap (-۲, -۱) \cup (-\infty, -۴) \Rightarrow (-۲, -۱) & (۱) \\ f(x) \leq ۰ \ , \ f(۲+x) > ۰ \Rightarrow (-\infty, -۲] \cup [۰, ۱] \cap (-۴, -۲) \cup (-۱, +\infty) \Rightarrow (-۴, -۲) \cup [۰, ۱] & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \cup (۲) \Rightarrow (-۲, -۱) \cup (-۴, -۲) \cup [۰, ۱] \Rightarrow \underbrace{-۳, ۰, ۱}_{\text{۳ عدد صحیح}}$$

۸ ـ گزینه ۴ می‌توان نوشت:

$$-۱ \leq \sin x \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq \sin^۲ x \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq ۵\sin^۲ x \leq ۵ \Rightarrow -۱ \leq ۵\sin^۲ x - ۱ \leq ۴$$

چون $۵\sin^۲ x - ۱$ زیر رادیکال است باید نامنفی باشد، پس:

$$۰ \leq \sqrt{۵\sin^۲ x - ۱} \leq ۲ \Rightarrow ۰ \geq -\sqrt{۵\sin^۲ x - ۱} \geq -۲$$

تابع ۲^t اکیداً صعودی است، پس:

$$۲^۰ \geq ۲^{-\sqrt{۵\sin^۲ x - ۱}} \geq ۲^{-۲} \Rightarrow R_f = [\frac{۱}{۴}, ۱] \Rightarrow a = \frac{۱}{۴} \ , \ b = ۱ \Rightarrow a + b = \frac{۵}{۴}$$

۹ ـ گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{۱۲ واحد در جهت مثبت محور } x \text{ ها}} g(x) = \sqrt{x - ۱۲} \xrightarrow{\text{۲ واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}} h(x) = \sqrt{x - ۱۲} + ۲$$

$$\text{تلاقی} : \sqrt{x} = \sqrt{x - ۱۲} + ۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x = x - ۱۲ + ۴ + ۴\sqrt{x - ۱۲} \to ۸ = ۴\sqrt{x - ۱۲} \to ۲ = \sqrt{x - ۱۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴ = x - ۱۲ \to x = ۱۶ \xrightarrow{\text{تابع}} y = ۴$$

$$\text{پس} : A\Big|^{۱۶}_{۴} \ , \ O\Big|^{۰}_{۰} \to AO = \sqrt{(۱۶-۰)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۱۶^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۱۶^۲ + ۱۶} = \sqrt{۱۶(۱۶+۱)} = ۴\sqrt{۱۷}$$

۱۰ ـ گزینه ۱

$$f(x) = (x-۱)^۲ - ۱ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} g(x) = -(x-۱)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{۱۶ واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}} h(x) = -(x-۱)^۲ + ۱ + ۱۶ \to h(x) = -(x-۱)^۲ + ۱۷$$

$$\text{تلاقی} : (x-۱)^۲ - ۱ = -(x-۱)^۲ + ۱۷ \to ۲(x-۱)^۲ = ۱۸ \to (x-۱)^۲ = ۹ \to \begin{cases} x - ۱ = ۳ \to x = ۴ \to y = ۸ \\ x - ۱ = -۳ \to x = -۲ \ (x > ۱) \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{پس} : A\Big|^{۴}_{۸} , B\Big|^{۰}_{۰} \to AB = \sqrt{(۴-۰)^۲ + (۸-۰)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۶۴} = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$$

۱۱ ـ گزینه ۳ معکوس تابع را به دست می‌آوریم (قرینه نسبت به $y = x$)، دقت کنید برد تابع $y \geq ۲$ است پس دامنهٔ تابع معکوس $x \geq ۲$ خواهد بود:

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \Rightarrow x - 1 = (y-2)^2 \Rightarrow x = (y-2)^2 + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 + 1; x \geq 2$$

$$\xrightarrow[\text{۳ واحد پایین}]{\text{۲ واحد راست}} g(x) = (x-4)^2 - 2;\ x \geq 4 \Rightarrow g(4) = -2$$

۱۲ ـ گزینه ۴ طبق تبدیل‌های گفته شده داریم:

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to x-1} y = \frac{1}{x-1} \xrightarrow[\text{مصدر } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \frac{-1}{x-1} \xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}} y = \frac{-1}{x-1} - 2$$

حال معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم تا نقطهٔ برخورد تابع حاصل با f به‌دست آید.

$$\frac{-1}{x-1} - 2 = \frac{1}{x} \xrightarrow{\times x(x-1)} -x - 2x(x-1) = x - 1 \Rightarrow -x - 2x^2 + 2x = x - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \text{نقطهٔ برخورد } A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}) \text{ یا } A(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$$

فاصلهٔ نقطهٔ A تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\pm\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۱۳ ـ گزینه ۳ تابع f همانی است، پس $f(x) = x$ ؛ ضابطهٔ تابع g نیز به‌صورت $g(x) = \frac{1}{x-a}$ می‌شود. طبق فرض، ریشهٔ معادله زیر برابر $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است:

$$|g(x)| - 2 = \frac{1}{|f(x)|} \Rightarrow |\frac{1}{x-a}| - 2 = \frac{1}{|x|}$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\sqrt{2}}{2}} \left|\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - a}\right| - 2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{1}{|\frac{\sqrt{2}}{2} - a|} = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow |\frac{\sqrt{2}}{2} - a| = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |\frac{\sqrt{2}}{2} - a| = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} - a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - a = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

چون تابع f همانی است، پس از $f(x+a) = 3$ نتیجه می‌شود $x + a = 3$ و اختلاف مقادیر x در آن به‌صورت زیر می‌شود:

$$x_1 + a_1 = 3 = x_2 + a_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = a_2 - a_1$$
$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

۱۴ ـ گزینه ۱

$$f(x-2) = ax(x+1)(x-2)\ , a < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = a(x+2)(x+3)(x)\ , a < 0 \\ f(1-x) = a(3-x)(4-x)(1-x)\ , a < 0 \\ f(x+1) = a(x+3)(x+4)(x+1)\ , a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(1-x)}{f(x+1)} = \frac{a(3-x)(4-x)(1-x)}{a(x+3)(x+4)(x+1)} \geq 0 \to \boxed{\frac{f(1-x)}{f(x+1)} = \frac{(3-x)(4-x)(1-x)}{(x+3)(x+4)(x+1)} \geq 0}$$

x		-4		-3		-1		1		3		4	
$\frac{f(1-x)}{f(x+1)}$	$-$	○	$+$	○	$-$	○	$+$	○	$-$	○	$+$	○	$-$

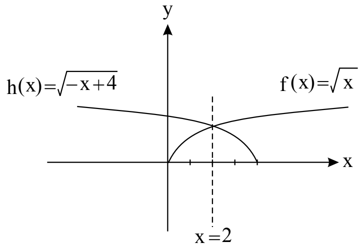
تنها اعداد قابل‌قبول با توجه به بازه‌های مثبت و اعدادی که صفر می‌کنند عبارتند از : $\boxed{x = 0\ ,\ x = 1\ ,\ x = 3\ ,\ x = 4}$

۱۵ ـ گزینه ۳

۲ نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619

$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} g(x)=\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت راست}} h(x)=\sqrt{-(x-۴)}=\sqrt{-x+۴}$

$\rightarrow$ 

مشخص است که این دو نسبت به خط $x=۲$ متقارن هستند.

۱۶ ـ گزینه ۲

$f(x)=(x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} g(x)=-(-x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت بالا}} h(x)=-(-x-۱)^۲+۴$

تلاقی: $(x-۱)^۲=-(-x-۱)^۲+۴ \Rightarrow x^۲+۱-۲x=-x^۲-۱-۲x+۴ \Rightarrow ۲x^۲=۲ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=۱\ ,\ x=-۱$

۱۷ ـ گزینه ۳

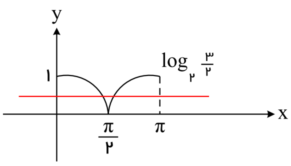
$y=۲^{|\sin x|} \xrightarrow{\frac{\pi}{۲}\text{ به راست}} y=۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|}=۲^{|\cos x|} \xrightarrow{\frac{۳}{۲}\text{ به پایین}} \Rightarrow y=۲^{|\cos x|}-\frac{۳}{۲} \xrightarrow{y=۰} ۲^{|\cos x|}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \log_۲\frac{۳}{۲}=|\cos x|$

$\log_۲\frac{۳}{۲}$ در واقع عدد بین صفر تا یک است؛ زیرا:

$\underbrace{\log_۲ ۱}_{\text{صفر}}<\log_۲\frac{۳}{۲}<\underbrace{\log_۲ ۲}_{۱}$

حال تابع $y=|\cos x|$ و خط $y=log_۲\frac{۳}{۲}$ را رسم می‌کنیم.

خط و نمودار در دو نقطه تقاطع دارند.



۱۸ ـ گزینه ۳

روش اول:

$y=\sqrt{۴-x} \xrightarrow[\text{راستای قائم}]{k\text{ واحد در}} y=\sqrt{۴-x}+k \xrightarrow[\text{راستای افقی}]{k-۲\text{ واحد در}} y=\sqrt{۴-(x-(k-۲))}+k$

محل برخورد تابع فوق و وارونش در نقطه‌ای با عرض ۱ است که باید روی خط $y=x$ باشد، پس نقطهٔ $(۱,۱)$ در تابع صدق می‌کند.

$۱=\sqrt{۴-(۱-(k-۲))}+k \Rightarrow \sqrt{k+۱}+k=۱ \Rightarrow k=۰ \Rightarrow y=\sqrt{۲-x} \xrightarrow{\text{یک واحد پایین}} y=\sqrt{۲-x}-۱ \xrightarrow[y=۰]{\text{محل برخورد با } x \text{ ها}} \sqrt{۲-x}=۱ \Rightarrow ۲-x=۱$

$\Rightarrow x=۱$

روش دوم: توابع رادیکالی به فرم داده‌شده در صورت سؤال، وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کنند. پس منحنی جدید وارون خود را در نقطه $(۱,۱)$ قطع کرده است. با انتقال ۱ واحد این نمودار به پایین، نقطه $(۱,۱)$ به نقطه $(۱,۰)$ متناظر می‌شود، درنتیجه طول نقطه برخورد نمودار نهایی با محور xها برابر ۱ است.

۱۹ ـ گزینه ۱

$y=۲^{x+|x|} \xrightarrow{\text{۳ واحد چپ}} y_۱=۲^{x+۳+|x+۳|} \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} y_۲=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲ \xrightarrow{y=۰} ۲^{x+۳+|x+۳|}=۲^۱ \rightarrow x+۳+|x+۳|=۱$

$\rightarrow x+|x+۳|=-۲ \xrightarrow{\text{چک کردن گزینه‌ها}} x=-\frac{۵}{۲}$

۲۰ ـ گزینه ۴ برای انتقال در راستای محور xها به اندازهٔ ۲ واحد به چپ، باید x را به $x+2$ تبدیل کنیم، پس:

$$f(x)=4x-x^2 \xrightarrow{x\to x+2} f(x+2)=4(x+2)-(x+2)^2 \Rightarrow f(x+2)=4x+8-x^2-4x-4=4-x^2$$

حال نقطهٔ تلاقی توابع $y=4-x^2$ و $y=4x-x^2$ را می‌یابیم.

$$\begin{cases} y=4x-x^2 \\ y=4-x^2 \end{cases} \Rightarrow 4x-x^2=4-x^2 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$$

$y=4-1^2=3 \Rightarrow$ نقطه تلاقی $: A(1,3)$

$$OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

۲۱ ـ گزینه ۲ روش اول:

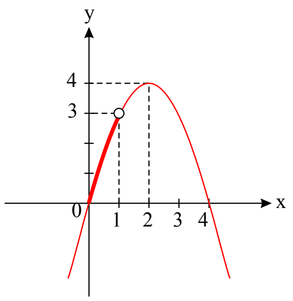
می‌دانیم که $0\le u-[u]<1$ است پس $0\le 2x-[2x]<1$ است یعنی $0\le f(x)<1$ است.

$$gof(x)=g(f(x))=-f^2(x)+4f(x)=-(f^2(x)-4f(x))=-((f(x)-2)^2-4)=-(f(x)-2)^2+4$$

پس $: 0\le f(x)<1 \to -2\le f(x)-2<-1 \to 1<(f(x)-2)^2\le 4 \to -1>-(f(x)-2)^2\ge -4 \to 3>-(f(x)-2)^2+4\ge 0$

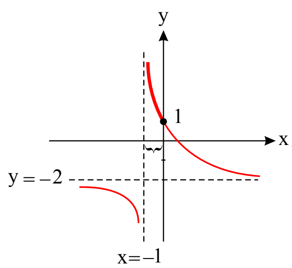
$\to 0\le gof(x)<3 \to R_{gof}=[3,0)$

روش دوم: در تابع $gof(x)$ ورودی تابع $2x-[2x]$ است که می‌دانیم $0\le 2x-[2x]<1$ است کافی است تابع $g(x)$ را رسم کرده و مشخص کنیم وقتی $0\le x<1$ است چه عرضی به ما می‌دهد.



۲۲ ـ گزینه ۳

در تابع $gof(x)$ ورودی تابع $[x]-x$ است که می‌دانیم $-1<[x]-x\le 0$ است کافی است تابع $g(x)$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم وقتی $-1<x\le 0$ است چه عرضی به ما می‌دهد.



$\to Rgof_{(x)}=[1,+\infty)$

۲۳ ـ گزینه ۳ ابتدا مقدار تابع داخلی را محاسبه می‌کنیم:

$$gof(-\frac{5}{3})=g(f(-\frac{5}{3}))\Rightarrow f(-\frac{5}{3})=2[\overset{-2}{\cancel{-\frac{5}{3}}}]-(-\frac{5}{3})=-4+\frac{5}{3}=-\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow g(-\frac{7}{3})=f([-\frac{7}{3}+f(-\frac{7}{3})])\Rightarrow f(-\frac{7}{3})=2[-\frac{7}{3}]-(-\frac{7}{3})=-6+\frac{7}{3}=-\frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow g(-\frac{7}{3})=f([-\frac{7}{3}-\frac{11}{3}])=f(-6)=2[-6]-(-6)=-12+6=-6$$

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619
4/21/24, 22:01
Page 25 of 42

۲۴ ـ گزینه ۴

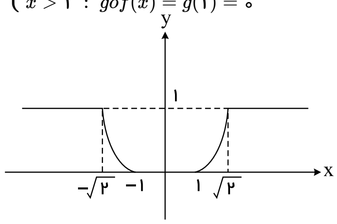
$$f(-\frac{۱}{۳}) = -\frac{۱}{۳} + [-\frac{۱}{۳}] = -\frac{۱}{۳} - ۱ \Longrightarrow f(-\frac{۱}{۳}) = -\frac{۴}{۳}$$

$$g(-\frac{۱}{۳}) = f([-\frac{۱}{۳} - f(-\frac{۱}{۳})]) = f([-\frac{۱}{۳} - (-\frac{۴}{۳})]) = f(۱) = ۲$$

$$f(g(-\frac{۱}{۳})) = f(۲) = ۴$$

۲۵ ـ گزینه ۴ ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x < -۱ \ : \ gof(x) = g(-۱) = ۰ \\ -۱ \le x \le : \ gof(x) = g(x) = ۱ - x^۲ \\ x > ۱ \ : \ gof(x) = g(۱) = ۰ \end{cases}$$



$$fog = f(۱ - x^۲) = \begin{cases} -۱ & ۱ - x^۲ < -۱ \Rightarrow x^۲ > ۲ \Rightarrow x < -\sqrt{۲} \vee x > \sqrt{۲} \\ ۱ - x^۲ & -۱ \le ۱ - x^۲ \le x \Rightarrow ۱ \ge x^۲ - ۱ \ge -۱ \ge -۱ \Rightarrow ۰ \le x^۲ \le \sqrt{۲} \Rightarrow -\sqrt{۲} \le x \le \sqrt{۲} \\ ۱ & ۱ - x^۲ > ۱ \Rightarrow x^۲ < ۰ \Rightarrow x \in \varnothing \end{cases}$$

$$\Rightarrow fog(x) = \begin{cases} -۱ & x < -\sqrt{۷}x > \sqrt{۲} \\ ۱ - x^۲ & -\sqrt{۲} \le x \le \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$x < -\sqrt{۲} \Rightarrow gof(x) - fog(x) = ۰ - (-۱) = ۱ \ , \ -\sqrt{۲} \le x < -۱ \Rightarrow gof(x) - fog(x) = ۰ - (۱ - x^۲) = x^۲ - ۱$$

$$-۱ \le x \le ۱ \Rightarrow gof(x) - fog(x) = ۱ - x^۲ - (۱ - x^۲) = ۰ \ \ , \ ۱ < x \le \sqrt{۲} \Rightarrow gof(x) - fog(x) = ۰ - (۱ - x^۲) = x^۲ - ۱$$

$$x > \sqrt{۲} \Rightarrow gof(x) - fog(x) = ۰ - (-۱) = ۱$$

در نمودار $gof - fog$ بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است.

۲۶ ـ گزینه ۴

ابتدا ضابطه $g(x)$ را می‌یابیم.

$$f(x) = ۲x, gof(x) = ۵x^۲ + ۱۱ \Rightarrow g(f(x)) = ۵x^۲ + ۱۱ \Rightarrow g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱ \xrightarrow{x \to \frac{۱}{۲}x} g(۲ \times \frac{۱}{۲}x) = ۵(\frac{۱}{۲}x)^۲ + ۱۱ \Rightarrow g(x) = \frac{۵}{۴}x^۲ + ۱۱$$

حال تابع $g(x - ۷)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = g(x - ۷) = \frac{۵}{۴}(x - ۷)^۲ + ۱۱$$

در تابع فوق به‌ازای $x = ۷$، کمترین مقدار تابع به دست می‌آید.

$$y_{min} = g(۷) = ۰ + ۱۱ = ۱۱$$

۲۷ ـ گزینه ۱

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{3x-\sqrt{2}}\Rightarrow f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(f(f(\sqrt{2})))=f(f(\frac{\sqrt{2}}{2}))=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$f(f(f(\sqrt{2})))=f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۲۸ ـ گزینه ۳ چون f و g تابع ثابت هستند، در ضابطهٔ داده‌شده برای آنها، ضریب x باید صفر باشد.

$$f(x)=b-3ax\Rightarrow 3a=0\Rightarrow a=0\Rightarrow f(x)=b$$

$$g(x)=c-(3b-3)x\Rightarrow 3b-3=0\Rightarrow b=1\Rightarrow\begin{cases}f(x)=1\\ g(x)=c\end{cases}$$

$$f+g=5\Rightarrow 1+c=5\Rightarrow c=4\Rightarrow b\times c=1\times 4=4$$

۲۹ ـ گزینه ۳ ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2=abx-ax^2+2b-2x-7x^2$$
$$\Rightarrow f(x)=(-a-7)x^2+(ab-2)x+2b$$

چون f، تابع ثابت است، پس داریم:

$$-a-7=0\Rightarrow a=-7\ ,\ \ ab-2=0\Rightarrow -7b-2=0\Rightarrow b=\frac{-2}{7}$$

$$f(x)=2b=2\times(-\frac{2}{7})=-\frac{4}{7}$$

۳۰ ـ گزینه ۳ تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است، پس:

$$f(x)=mx^2-nx-k=\text{ثابت}\Rightarrow m=n=0\ ,\ f(x)=-k$$

مجموعهٔ داده‌شده در صورتی تابع است که:

$$(\underbrace{m}_{0}\ ,\ n-1)=(0\ ,k)\Rightarrow k=n-1=-1$$

پس $f(x)=1$ و در نتیجه $f(\sqrt{5})=1$.

۳۱ ـ گزینه ۴

$$0\le\cos^2x\le1\Rightarrow 0\le 9\cos^2x\le 9\Rightarrow -1\le 9\cos^2x-1\le 8\Rightarrow -1\le\underbrace{\sqrt[3]{9\cos 2x-1}}_{t}\le 2\Rightarrow -1\le t\le 2$$

$$f(x)=2^t-2^{-t}$$

تابع 2^t همواره صعودی است و تابع 2^{-t} همواره نزولی است پس تابع -2^{-t} نیز همواره صعودی است. پس می‌توان نتیجه گرفت تابع $f(x)$ یک تابع صعودی است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{کمترین مقدار تابع}: t=-1\Rightarrow 2^{-1}-2^{1}=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}\\ \text{بیشترین مقدار تابع}: t=2\Rightarrow 2^{2}-2^{-2}=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}]$$

$$\Rightarrow b-a=\frac{15}{4}-(-\frac{3}{2})=\frac{21}{4}$$

توجه: اگر تابع پیوسته $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد آنگاه برد تابع برابر است با:

$$R_f=[f(a)\ ,\ f(b)]$$

۳۲ ـ گزینه ۱ تابع $f(x)=(-۹+k^۲)x^۳+۵$ زمانی اکیداً نزولی است که ضریب $x^۳$ عددی منفی باشد، پس داریم:

$$-۹+k^۲<۰\Rightarrow k^۲<۹\Rightarrow |k|<۳\Rightarrow -۳<k<۳$$

k مقادیر صحیح : $-۲,-۱,۰,۱,۲\Rightarrow$ مجموع $=-۲-۱+۰+۱+۲=۰$

۳۳ ـ گزینه ۴ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(۳)=۰$ است. پس داریم:

$$x<۳\Rightarrow f(x)>f(۳)\Rightarrow f(x)>۰$$
$$x>۳\Rightarrow f(x)<f(۳)\Rightarrow f(x)<۰$$

برای $x<۳$، تابع f، مثبت و برای $x>۳$، تابع f، منفی است. حال برای تعیین دامنهٔ $g(x)=\sqrt{x^۲f(x)}$ باید نامعادلهٔ $x^۲f(x)\geq ۰$ را حل کنیم که با تعیین علامت داریم:

x	$-\infty$	۰		۳	$+\infty$
$x^۲$	+	۰	+		+
f(x)	+		+	۰	−
$x^۲f(x)$	+	۰	+	۰	−

$$x\leq ۳\Rightarrow D\cdot g=(-\infty,۳]$$

دامنهٔ g شامل اعداد صحیح نامنفی $۰,۱,۲,۳$ است.

۳۴ ـ گزینه ۲

$$y=\sqrt{(x+۱)^۲}-|۳x-۶|=|x+۱|-|۳x-۶|$$

با توجه به ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها یعنی $x=-۱$ و $x=۲$ محدوده‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x<-۱\Rightarrow y=-(x+۱)+۳x-۶=۲x-۷$$
$$-۱\leq x<۲\Rightarrow y=x+۱+۳x-۶=۴x-۵$$
$$x\geq ۲\Rightarrow y=x+۱-(۳x-۶)=-۲x+۷$$

در محدودهٔ $x\geq ۲$ تابع نزولی است و داریم:

$$x\geq ۲\Rightarrow -۲x\leq -۴\to -۲x+۷\leq -۴+۷\Rightarrow y\leq ۳$$
$$y=-۲x+۷\Rightarrow ۲x=-y+۷\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}y+\frac{۷}{۲}$$
$$\text{تابع وارون}: y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۷}{۲}\ ;\ x\leq ۳$$

۳۵ ـ گزینه ۱ طبق فرض، دامنهٔ f مجموعه‌ای از مقادیر منفی است، پس:

$$\begin{cases} m^۲-m-۵<۰\to \dfrac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲}<m<\dfrac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲} & (I)\\ -m^۲+۲m-۳<۰\to \Delta=۴-۱۲<۰\Rightarrow (\text{همواره برقرار}) \end{cases}$$

$$\text{از طرفی}: f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲)\xrightarrow{\text{اکیداً نزولی}} m^۲-m-۵>-۳+۲m-m^۲$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-۳m-۲>۰\Rightarrow (۲m+۱)(m-۲)>۰\Rightarrow (m<-\frac{۱}{۲})\cup(m>۲)\quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II),(I)\ \text{اشتراک}} (\overbrace{\frac{۱-\sqrt{۲۱}}{۲}}^{\simeq -۱/۷۵},-\frac{۱}{۲})\cup(۲,\overbrace{\frac{۱+\sqrt{۲۱}}{۲}}^{\simeq ۲/۷۵})\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=-۱$$

m فقط یک مقدار صحیح را می‌تواند بپذیرد.

۳۶ ـ گزینه ۳ می‌دانیم که $f(a)=b\to f^{-۱}(b)=a$ است. سؤال در حقیقت $f^{-۱}(۶)+f^{-۱}(۱۲)$ را خواسته است.

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619
4/21/24, 22:01
Page 31 of 42

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(۶)=a \to f(a)=۶ \to a+\sqrt{a}=۶ \to a=۴ \\ f^{-1}(۱۲)=b \to f(b)=۱۲ \to b+\sqrt{b}=۱۲ \to b=۹ \end{array}\right. \to a+b=۱۳$$

۳۷ - گزینه ۲ می‌دانیم که $f(a)=b \to f^{-1}(b)=a$ است برای آنکه مشخص کنیم نمودار تابع $f^{-1}(x)$، نیمساز ناحیهٔ چهارم $(y=-x)$ را با کدام طول قطع می‌کند باید معادلهٔ $f^{-1}(x)=-x$ را حل کنید.

$$f^{-1}(x)=-x \to f(-x)=x \to -x-\frac{۲}{-x}=x \to \frac{۲}{x}=۲x \to x^۲=۱ \to \begin{cases} x=۱ \text{ ق ق} \\ x=-۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید که در ناحیهٔ چهارم، $x>۰$ است.

۳۸ - گزینه ۴ می‌دانیم که $f(a)=b \to f^{-1}(b)=a$ است پس برای محاسبهٔ $f^{-1}(۲)$ کافی است در تابع اصلی به جای y و ۲ بگذاریم.

$$۲=\frac{۲^x+(\frac{۱}{۲})^x}{۲} \to ۲^x+\frac{۱}{۲^x}=۴ \xrightarrow{۲^x=A} A+\frac{۱}{A}=۴$$

$$\xrightarrow{\times A} A^۲+۱=۴A \to A^۲-۴A+۱=۰ \to \Delta=۱۶-۴=۱۲ \to \begin{cases} A=\frac{۴+\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۴+۲\sqrt{۳}}{۲}=۲+\sqrt{۳} \\ A=\frac{۴-\sqrt{۱۲}}{۲}=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۲}=۲-\sqrt{۳} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\log_b^a=c \to a=b^c$ است.

$$A=۲+\sqrt{۳} \to ۲^x=۲+\sqrt{۳} \to x=\log_۲^{۲+\sqrt{۳}}$$
$$A=۲-\sqrt{۳} \to ۲^x=۲-\sqrt{۳} \to x=\log_۲^{۲-\sqrt{۳}} \text{ غ ق ق}$$

توجه کنید که $\log_۲^{۲-\sqrt{۳}}$ تقریباً معادل $\log_۲^{۰/۳}$ است که حتماً مقدار آن منفی است و چون دامنهٔ تابع شده بزرگ‌ترمساوی صفر است بنابراین برد تابع معکوس نمی‌تواند منفی باشد.

۳۹ - گزینه ۳ می‌دانیم که $f(a)=b \to f^{-1}(b)=a$ است. سوال در حقیقت $f^{-1}(۳)+f^{-1}(۱۵)$ را خواسته است.

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(۳)=a \to f(a)=۳ \to a+۲\sqrt{a}=۳ \to a=۱ \\ f^{-1}(۱۵)=b \to f(b)=۱۵ \to b+۲\sqrt{b}=۱۵ \to b=۹ \end{array}\right. \to a+b=۱۰$$

۴۰ - گزینه ۴ می‌دانیم که $f(a)=b \to f^{-1}(b)=a$ است برای آن‌که مشخص کنیم نمودار تابع $f^{-1}(x)$، نیمساز ناحیهٔ دوم $(y=-x)$ را با کدام طول قطع می‌کند باید معادلهٔ $f^{-1}(x)=-x$ را حل کنید.

$$f^{-1}(x)=-x \to f(-x)=x \to -x-\frac{۱}{-۲x}=x \to \frac{۱}{۲x}=۲x \to ۴x^۲=۱ \to x^۲=\frac{۱}{۴} \to \begin{cases} x=\frac{۱}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x=-\frac{۱}{۲} \text{ ق ق} \end{cases}$$

توجه کنید که در ناحیهٔ دوم، $x<۰$ است.

۴۱ - گزینه ۳ می‌دانیم که $f(a)=b \to f^{-1}(b)=a$ است پس برای محاسبهٔ $f^{-1}(۲)$ کافی است در تابع اصلی به جای y، ۲ بگذاریم.

$$۲=\frac{۲^x-(\frac{۱}{۲})^x}{۲} \to ۲^x-\frac{۱}{۲^x}=۴ \xrightarrow{۲^x=A} A-\frac{۱}{A}=۴ \xrightarrow{\times A} A^۲-۱=۴A \to A^۲-۴A-۱=۰ \to \Delta=۱۶+۴=۲۰$$

$$\to \begin{cases} A=\frac{۴+\sqrt{۲۰}}{۲}=\frac{۴+۲\sqrt{۵}}{۲}=۲+\sqrt{۵} \\ A=\frac{۴-\sqrt{۲۰}}{۲}=\frac{۴-۲\sqrt{۵}}{۲}=۲-\sqrt{۵} \end{cases}$$

می‌دانیم که $\log_b^a=c \to a=b^c$ است.

$$A=۲+\sqrt{۵} \to ۲^x=۲+\sqrt{۵} \to x=\log_۲^{۲+\sqrt{۵}}$$
$$A=۲-\sqrt{۵} \to ۲^x=\underbrace{۲-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}} \quad \text{امکان ندارد}$$

۴۲ - گزینه ۲ تابع در واقع $y=\sqrt{x}$ است که سه واحد به‌سمت چپ و یک واحد به‌سمت پایین انتقال یافته است. این تابع اکیداً

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619
4/21/24, 22:01
Page 33 of 42

صعودی است. می‌دانیم محل تقاطع یک تابع صعودی و معکوسش روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی $y=x$ خواهد بود، پس کافی است تابع را با $y=x$ در یک دستگاه حل کنیم تا محل تقاطع حاصل شود.

$$\begin{cases} y=\sqrt{x+۳}-۱ \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+۳}-۱=x \Rightarrow \sqrt{x+۳}=x+۱ \xrightarrow[x>-1]{\text{توان ۲}} x+۳=x^۲+۲x+۱$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$|OA|=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$$

۴۳ - گزینه ۳ تابع اکیداً صعودی است؛ پس منحنی وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند؛ بنابراین منحنی $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}+k$ وارون خود را در نقطهٔ $(۱\ ,\ ۱)$ قطع می‌کند و این نقطه روی تابع نیز صدق می‌کند.

$$۱=\sqrt{۱+۳}+k \Rightarrow k=-۱$$

بنابراین نمودار یک واحد به پایین منتقل شده است. این منحنی را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x}+۳}+۱$$

حال نمودار را ۴ واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

$$y=-\sqrt{\sqrt{x+۴}+۳}+۱$$

نقطهٔ $(\sqrt{۵}-۱\ ,\ ۰)$ روی این منحنی قرار دارد.

۴۴ - گزینه ۲ می‌دانیم اگر نقطهٔ $A(a,b)$ متعلق به تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(b,a)$ متعلق به تابع f^{-1} است و بالعکس. پس گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=x^۳-x+۱$$

گزینه ۱) $(-۱,-۲) \Rightarrow (-۲,-۱) \Rightarrow f(-۲)=-۸+۲+۱=-۵$ نادرست

گزینه ۲) $(\frac{۵}{۸},\frac{۱}{۲}) \Rightarrow (\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۸}) \Rightarrow f(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱-۴+۸}{۸}=\frac{۵}{۸}$ درست

گزینه ۳) $(۱,۲) \Rightarrow (۲,۱) \Rightarrow f(۲)=۸-۲+۱=۷$ نادرست

گزینه ۴) $(-\frac{۱}{۲},-\frac{۱۱}{۸}) \Rightarrow (-\frac{۱۱}{۸},-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow f(-\frac{۱۱}{۸})\neq-\frac{۱}{۲}$

۴۵ - گزینه ۴

$$f(x)=x^۲\sqrt{x^۲}=x^۲|x|$$

تابع f را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲\cdot x=x^۳ & x\geq ۰ \\ x^۲(-x)=-x^۳ & x\leq ۰ \end{cases}$$

مشخص است که تابع f برای $x\leq ۰$، نزولی است و داریم:

$$x\leq ۰ \Rightarrow x^۳\leq ۰ \Rightarrow -x^۳\geq ۰ \Rightarrow f(a)\geq ۰ \Rightarrow \text{برد}:[۰,+\infty]$$

$$y=-x^۳ \Rightarrow x^۳=-y \Rightarrow x=\sqrt[۳]{-y} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{-x}=-\sqrt[۳]{x}, x\geq ۰$$

۴۶ - گزینه ۱ نقطهٔ $A(a,b)$ بر روی تابع قرار دارد اگر و فقط اگر نقطهٔ $A'(b,a)$ روی وارون تابع قرار داشته باشد، بنابراین جواب گزینهٔ ۱ است، زیرا:

$$y=-۳x^۳+۲x-۱۱$$

$$(۹,-۲)\rightarrow(-۲,۹) \Rightarrow ۹=-۳(-۸)-۴-۱۱=۲۴-۱۵=۹$$

۴۷ - گزینه ۳ تابع $y=x^۳+۳x-۱۲$ اکیداً صعودی است. پس نقطهٔ برخورد تابع و وارون آن بر روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y=x$ قرار دارد. پس باید تابع را با $y=x$ قطع بدهیم.

$$\begin{cases} y = x^3 + 3x - 12 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$$

$x = 2$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند، پس داریم:

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(2,2) \Rightarrow OA = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

۴۸ ـ گزینه ۳ ضابطهٔ تابع g که وارون تابع f است را می‌یابیم:

$$f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x} \Rightarrow y = (\sqrt{x} - 1)^2 \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1 \Rightarrow x = (\sqrt{y} + 1)^2$$
$$\Rightarrow g(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$
$$g(g(1)) = g(4) = 9$$

۴۹ ـ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & x \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow R_f = [\frac{13}{2}, \infty) \\ 2 + 2mx - x^2 & x > -\frac{3}{2} \Rightarrow 2 + 2m(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})^2 \leq \frac{13}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2 - \frac{9}{4} - 3m \leq \frac{13}{2} \Rightarrow -3m \leq \frac{13}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow -3m \leq \frac{27}{4} \Rightarrow m \geq -\frac{9}{4} \quad (1)$$
$$\text{رأس سهمی } x = m \Rightarrow 2 + 2m^2 - m^2 + 2 < \frac{13}{2} \Rightarrow m^2 + 2 < \frac{13}{2}$$
$$\Rightarrow m^2 < \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} < m < \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (2)$$
$$(1), (2) \Rightarrow m = -2$$
$$f^{-1}(-19) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -19$$
$$\Rightarrow 2 - 4\alpha - \alpha^2 = -19 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 21 = 0 \Rightarrow (\alpha + 7)(\alpha - 3) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -7 & \text{غ ق ق} \\ \alpha = 3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

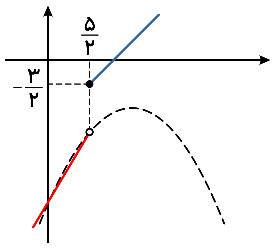
۵۰ ـ گزینه ۴ نقطه تلاقی تابع $y = f^{-1}(x)$ و خط $y = 12 - x$، نقطه‌ای به عرض ۱۰ است، پس:

$$\begin{cases} 10 = 12 - x \Rightarrow x = 2 \\ 10 = f^{-1}(x) \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(2) = 10 \Rightarrow f(10) = 2(*)$$
$$f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{mx - 1}} \overset{(*)}{\Rightarrow} \sqrt{10 - 2\sqrt{10m - 1}} = 2 \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3 \Rightarrow 10m - 1 = 9 \Rightarrow m = 1$$

در نتیجه خواسته سؤال $f(5)$ است که به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5 - 1}} = \sqrt{5 - 4} = 1$$

۵۱ ـ گزینه ۱ توابع یک‌به‌یک وارون‌پذیر هستند. از طرفی طول رأس تابع درجه ۲ باید بعد از $x = \frac{5}{2}$ باشد تا تابع یک‌به‌یک شود.



$$x_A = -\frac{b'}{2a'} > \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{a}{-4} > \frac{5}{2} \Rightarrow a > 10 \ (1)$$
$$-2(\frac{5}{2})^2 + \frac{5}{2}a - 21 < \frac{1}{2}(\frac{5}{2}) - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}a < 32 + \frac{5}{4} \Rightarrow a < 13/3 \xrightarrow{(1)} a_{max} = 13$$
$$f^{-1}(-3) = a \Rightarrow f(a) = -3 \Rightarrow -2a^2 + 13a - 21 = -3 \Rightarrow 2a^2 - 13a + 18 = 0 \xrightarrow{a < \frac{5}{2}} \begin{cases} x = 2 \\ x = 4/5 \end{cases}$$

۵۵ تست سراسری سه سال اخیر

https://app.monta.ir/gwt/#!print;a2=6930619
4/21/24, 22:01
Page 37 of 42

۵۲ - گزینه ۱ می‌دانیم که $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ است.

توجه کنید:

$$f^{-1}(۲۰) = a \Rightarrow f(a) = a + \sqrt{a} = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۶ \Rightarrow f^{-1}(۲۰) = ۱۶ g^{-1}(۱۶) = b \Rightarrow g(b) = \frac{۹b + ۶}{۱ - b} = ۱۶ \Rightarrow b = \frac{۲}{۵}$$

$$g^{-1}of^{-1}(۲۰) = g^{-1}(f^{-1}(۲۰)) = g^{-1}(۱۶) = \frac{۲}{۵}$$

۵۳ - گزینه ۴ می‌دانیم که $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$ است.

$$f^{-1}og^{-1}(-۹) = f^{-1}(g^{-1}(-۹)) = f^{-1}(۲۱) = ۶$$

توجه کنید:

$$g^{-1}(-۹) = a \Rightarrow g(a) = -۹ \Rightarrow \frac{۳ - a}{۲} = -۹ \Rightarrow ۳ - a = -۱۸ \Rightarrow a = ۲۱$$

$$f^{-1}(۲۱) = b \Rightarrow f(b) = ۲۱ \Rightarrow b^۲ - ۴b + ۹ = ۲۱ \Rightarrow b^۲ - ۴b - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (b - ۶)(b + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = ۶ \\ b = -۲ \ \text{(غ ق ق (با توجه به دامنه}) \end{cases}$$

۵۴ - گزینه ۲ هر کدام از عبارات $gof^{-1}(-۲)$ و $gog(۰)$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به مقادیر مشخص شده روی نمودارها، داریم:

$$gog(۰) = g(g(۰)) = g(۲) = ۳$$

f تابع خطی گذرنده از دو نقطهٔ $(۰, -۳)$ و $(۲, ۰)$ است.

$$\text{شیب} = \frac{۰ - (-۳)}{۲ - ۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y - ۰ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f(x) = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f^{-1}(-۲) = k \Rightarrow f(k) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}k - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}k = ۱ \Rightarrow k = \frac{۲}{۳} \Rightarrow f^{-1}(-۲) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow gof^{-1}(-۲) = g(f^{-1}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳})$$

برای $a \leq ۱$، تابع خطی گذرنده از نقاط $(۱, ۱)$ و $(۰, ۲)$ است.

$$\text{شیب} = \frac{۲ - ۱}{۰ - ۱} = -۱ \Rightarrow y - ۲ = -۱(x - ۰) \Rightarrow y = -x + ۲$$

$$x \leq ۱ \Rightarrow g(x) = -x + ۲ \Rightarrow g(\frac{۲}{۳}) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$gof^{-1}(-۲) \times gog(۰) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۹ - ۳	۱۷ - ۳	۲۵ - ۴	۳۳ - ۴	۴۱ - ۳	۴۹ - ۱
۲ - ۲	۱۰ - ۱	۱۸ - ۳	۲۶ - ۴	۳۴ - ۲	۴۲ - ۲	۵۰ - ۴
۳ - ۱	۱۱ - ۳	۱۹ - ۱	۲۷ - ۱	۳۵ - ۱	۴۳ - ۳	۵۱ - ۱
۴ - ۴	۱۲ - ۴	۲۰ - ۴	۲۸ - ۳	۳۶ - ۳	۴۴ - ۲	۵۲ - ۱
۵ - ۴	۱۳ - ۳	۲۱ - ۲	۲۹ - ۳	۳۷ - ۲	۴۵ - ۴	۵۳ - ۴
۶ - ۱	۱۴ - ۱	۲۲ - ۳	۳۰ - ۳	۳۸ - ۴	۴۶ - ۱	۵۴ - ۲
۷ - ۱	۱۵ - ۳	۲۳ - ۳	۳۱ - ۴	۳۹ - ۳	۴۷ - ۳	
۸ - ۴	۱۶ - ۲	۲۴ - ۴	۳۲ - ۱	۴۰ - ۴	۴۸ - ۳	