حسابان ۲ و کنکور پایه

تابع

۱. تابع $y=x^{۳}$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع f حاصل شود. ضابطهٔ تابع وارون تابع f را بیابید.

پاسخ:

$$y=x^{۳}\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y=(-x)^{۳}=-x^{۳}\xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد چپ}} y=-(x+۲)^{۳}$$
$$\xrightarrow{\text{۵ واحد بالا}} y=f(x)=-(x+۲)^{۳}+۵\Rightarrow (x+۲)^{۳}=۵-y$$
$$\Rightarrow x+۲=\sqrt[۳]{۵-y}\Rightarrow x+۲=-\sqrt[۳]{y-۵}\Rightarrow x=-۲-\sqrt[۳]{y-۵}$$
$$\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=-۲-\sqrt[۳]{x-۵}$$

۲. نمودار $y=\sqrt[۳]{x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را ۴ واحد به راست منتقل می‌کنیم و سپس آن را ۳ واحد به پایین می‌بریم تا تابع f حاصل شود. ضابطهٔ تابع وارون تابع f را بیابید.

پاسخ:

$$y=\sqrt[۳]{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x \text{ ها}} y=-\sqrt[۳]{x}\xrightarrow[x\to x-۴]{\text{۴ واحد راست}} y=-\sqrt[۳]{x-۴}$$
$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} y=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳\Rightarrow f(x)=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳$$
$$y=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳\Rightarrow \sqrt[۳]{x-۴}=-y-۳\Rightarrow x-۴=(-y-۳)^{۳}$$
$$\Rightarrow x=(-y-۳)^{۳}+۴\Rightarrow x=۴-(۳+y)^{۳}\Rightarrow y=۴-(۳+x)^{۳}=f^{-۱}(x)$$

۳. اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|۲x-۱|)-f(|x+۱|)}$$

پاسخ: **نکته:** اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a)\le f(b)$ باشد، آنگاه $a\ge b$.

$$g(x)=\sqrt{f(|۲x-۱|)-f(|x+۱|)}\Rightarrow f(|۲x-۱|)-f(|x+۱|)\ge ۰$$
$$\Rightarrow f(|۲x-۱|)\ge f(|x+۱|)\xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |۲x-۱|\le |x+۱|$$
$$\Rightarrow (۲x-۱)^{۲}\le (x+۱)^{۲}\Rightarrow ۴x^{۲}-۴x+۱\le x^{۲}+۲x+۱\Rightarrow ۳x^{۲}-۶x\le ۰$$
$$\Rightarrow ۳x(x-۲)\le ۰\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & ۰ & & ۲ & \\ \hline ۳x(x-۲) & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array}\Rightarrow ۰\le x\le ۲$$
$$\Rightarrow D_g=[۰,۲]$$

۴. توابع f و g هردو اکیداً نزولی هستند و تابع fog تعریف شده است. اگر $fog(m^{۲})=۲a-۱$ و $fog(m^{۲}+۱)=-a+۴$ باشند، حدود a را بیابید.

پاسخ: برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ fog داریم:

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{g \text{ اکیداً نزولی}} g(x_1) > g(x_2) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(g(x_1)) < f(g(x_2))$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow fog(x_1) < fog(x_2) \Rightarrow fog \text{ اکیداً صعودی}$$

می‌دانیم : $m^2 + 1 > m^2 \Rightarrow fog(m^2 + 1) > fog(m^2) \Rightarrow -a + 4 > 2a - 1$

$$\Rightarrow 4 + 1 > 2a + a \Rightarrow 3a < 5 \Rightarrow \boxed{a < \frac{5}{3}}$$

۵. اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2) = 0$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 81)f(x)}$$

پاسخ:

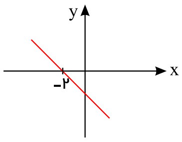
$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 81)f(x)} \Rightarrow (x^2 - 81)f(x) \geq 0$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2) = 0$ است، داریم:

برای $x < -2$ تابع f مثبت است. $\Rightarrow x < -2 \Rightarrow f(x) > f(-2) \Rightarrow f(x) > 0$

برای $x > -2$ تابع f منفی است. $\Rightarrow x > -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow f(x) < 0$

نمودار f تقریباً به‌صورت مقابل است.



$$x^2 - 81 = 0 \Rightarrow x = \pm 9$$

x		-9		-2		9	
$x^2 - 81$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$(x^2 - 81)f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow x \leq -9$ یا $-2 \leq x \leq 9 \Rightarrow D_g = (-\infty, -9] \cup [-2, 9]$

۶. اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 3x)f(x)}$$

پاسخ:

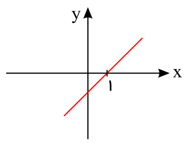
$$g(x) = \sqrt{(x^2 - 3x)f(x)} \Rightarrow (x^2 - 3x)f(x) \geq 0$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ است، داریم:

برای $x < 1$ تابع f منفی است. $\Rightarrow x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$

برای $x > 1$ تابع f مثبت است. $\Rightarrow x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$

به‌طور تقریبی نمودار f به‌صورت مقابل است.



$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \,,\, x = 3$$

x		0		1		3	
$x^2 - 3x$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x^2 - 3x)f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ یا $x \geq 3 \Rightarrow D_g = [0, 1] \cup [3, +\infty)$

۷. اگر f روی $\mathbb{R}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-۲|) - f(|x+۱|)}$$

پاسخ: **نکته:** اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \leq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-۲|) - f(|x+۱|)} \Rightarrow f(|x-۲|) - f(|x+۱|) \geq ۰$$

$$\Rightarrow f(|x-۲|) \geq f(|x+۱|) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} |x-۲| \geq |x+۱|$$

برای حل این‌گونه نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x-۲)^۲ \geq (x+۱)^۲ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ \geq x^۲ + ۲x + ۱ \Rightarrow ۴ - ۱ \geq ۲x + ۴x$$

$$\Rightarrow ۶x \leq ۳ \Rightarrow x \leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_g = (-\infty, \frac{۱}{۲}]$$

۸. اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-۳|) - f(|x+۲|)}$$

پاسخ: **نکته:** اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \geq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-۳|) - f(|x+۲|)} \Rightarrow f(|x-۳|) - f(|x+۲|) \geq ۰$$

$$\Rightarrow f(|x-۳|) \geq f(|x+۲|) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |x-۳| \leq |x+۲|$$

$$(x-۳)^۲ \leq (x+۲)^۲ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۹ \leq x^۲ + ۴x + ۴ \Rightarrow ۹ - ۴ \leq ۴x + ۶x$$

$$\Rightarrow ۱۰x \geq ۵ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_g = [\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

۹. صعودی و نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = [-۲x] + ۱$$

پاسخ:

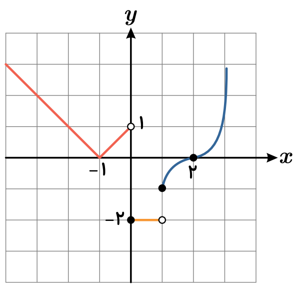
$$f(x) = [-۲x] + ۱$$
$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow -۲x_۱ > -۲x_۲ \Rightarrow [-۲x_۱] \geq [-۲x_۲] \Rightarrow [-۲x_۱] + ۱ \geq [-۲x_۲] + ۱$$
$$\Rightarrow f(x_۱) \geq f(x_۲) \text{ نزولی}$$

۱۰. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-۲)^۳ & x \geq ۱ \\ -۲ & ۰ \leq x < ۱ \\ |x+۱| & x < ۰ \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

پاسخ:

اکیداً صعودی $[-۱, ۰)$, $[۱, +\infty)$

اکیداً نزولی $(-\infty, -۱]$



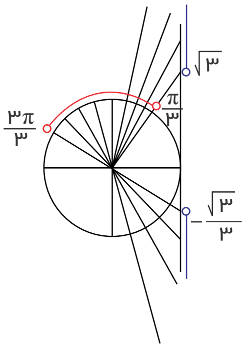
مثلثات

۱۱. اگر $\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶}$ و $\tan\alpha = \frac{۲m-۱}{۳}$، آنگاه حدود m را بیابید.

پاسخ:

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل داریم:

$$\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \frac{\pi}{۳} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{۶}$$



$$\frac{\pi}{۳} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \tan\alpha > \sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad \tan\alpha < -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲m-۱}{۳} > \sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad \frac{۲m-۱}{۳} < -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲m-۱ > ۳\sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad ۲m-۱ < -\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow m > \frac{۳\sqrt{۳}+۱}{۲} \quad \text{یا} \quad m < \frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۲. ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = ۲\sin^۴ x - ۵$ ب) $g(x) = -۳\sin^۵ ۲x + ۱۰$

پاسخ:

نکته: زوج $n \to ۰ \le \sin^n u \le ۱$ و $۰ \le \cos^n u \le ۱$

نکته: فرد $n \to -۱ \le \sin^n u \le ۱$ و $-۱ \le \cos^n u \le ۱$

الف) $f(x) = ۲\sin^۴ x - ۵$

$$۰ \le \sin^۴ x \le ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰ \le ۲\sin^۴ x \le ۲ \Rightarrow ۰ - ۵ \le ۲\sin^۴ x - ۵ \le ۲ - ۵$$

$$\Rightarrow -۵ \le f(x) \le -۳ \Rightarrow min\ f = -۵ \quad \text{و} \quad max\ f = -۳$$

ب) $g(x) = -۳\sin^۵ ۲x + ۱۰$

$$-۱ \le \sin^۵ ۲x \le ۱ \xrightarrow{\times(-۳)} ۳ \ge -۳\sin^۵ ۲x \ge -۳ \Rightarrow -۳ + ۱۰ \le -۳\sin^۵ ۲x + ۱۰ \le ۳ + ۱۰$$

$$\Rightarrow ۷ \le g(x) \le ۱۳ \Rightarrow min\ g = ۷ \quad \text{و} \quad max\ g = ۱۳$$

۱۳. دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{\tan^۲ x - ۱}$ را بیابید.

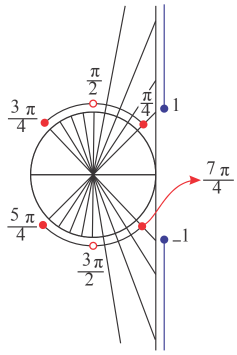
پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{\tan^۲ x - ۱} \Rightarrow \tan^۲ x - ۱ \ge ۰ \Rightarrow \tan^۲ x \ge ۱ \Rightarrow |\tan x| \ge ۱$$

$$\Rightarrow \tan x \le -۱ \quad \text{یا} \quad \tan x \ge ۱$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.

$$\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad \frac{۵\pi}{۴} \le x \le \frac{۷\pi}{۴} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{۳\pi}{۲}$$



در حالت کلی داریم:

$$۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \le x \le ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \le x \le ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۴} \quad \text{و} \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

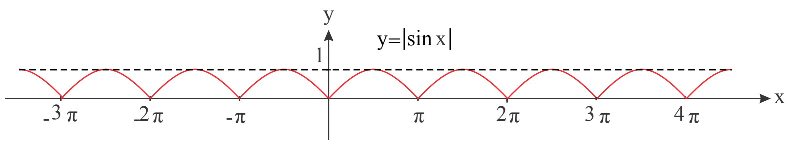
۱۴ . نمودار هریک از توابع داده‌شده را رسم کرده و بیشترین و کمترین مقدار و دورهٔ تناوب تابع را مشخص کنید.

الف) $y = |\sin x|$

ب) $y = |\cos ۲x|$

پاسخ: **الف)** با رسم $y = \sin x$ و قرینه کردن قسمت‌های زیر محور طول‌ها نسبت به این محور خواهیم داشت:

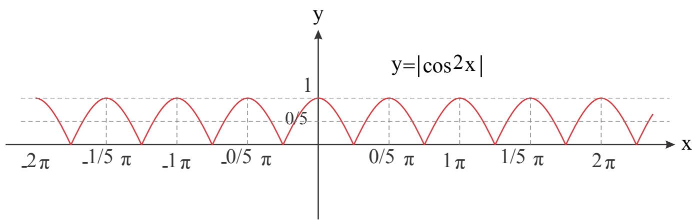
$$\begin{cases} T = \pi \\ \max = ۱ \\ \min = ۰ \end{cases}$$



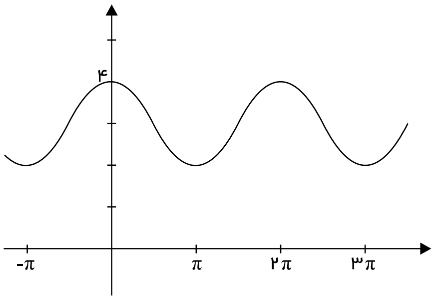
ب) کافی است نمودار $y = \cos x$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده $(\cos ۲x)$ و سپس نقاط با عرض منفی را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم $|\cos ۲x|$ تا به نمودار زیر برسیم:

$$x = ۰,\ \frac{\pi}{۲},\ \pi,\ \frac{۳\pi}{۲},\ ۲\pi,\ \cdots \to y = ۱ \Rightarrow T = \frac{\pi}{۲}$$

$$\begin{cases} T = \frac{\pi}{۲} \\ \max = ۱ \\ \min = ۰ \end{cases}$$



۱۵. نمودار تابع $f(x) = a + \cos bx$ به‌صورت زیر است. حاصل $a+b$ را به دست آورید. $(b > ۰)$



پاسخ:

$T = ۲\pi \quad b = ۱ \quad a = ۳ \quad a + b = ۴$

۱۶. معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳$$

پاسخ: می‌دانیم: $\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳ \Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - (\frac{۵\pi}{۸} - x)) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۲} - \frac{۵\pi}{۸} + x) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\sin(x - \frac{\pi}{۸}) - ۳ = ۰ \ , \ \sin(x - \frac{\pi}{۸}) = t$$

$$\Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \ , \ t = -۳$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{۸}) = -۳ \ \text{غ ق ق} \ , \ \sin(x - \frac{\pi}{۸}) = ۱ \Rightarrow x - \frac{\pi}{۸} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۸}$$

۱۷. معادلات زیر را حل کنید.

پاسخ:

الف

$$\tan ۲x = ۳\tan x$$

پاسخ: **نکته:**

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x}$$

به کمک رابطهٔ فوق ظاهر معادله را تغییر می‌دهیم:

$$\frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x} = ۳\tan x$$

$۱)\ \tan x = ۰ = \tan(۰) \Rightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$$۲)\ \tan x \neq ۰ \Rightarrow \frac{۲\cancel{\tan x}}{۱-\tan^۲ x} = ۳\cancel{\tan x} \Rightarrow \frac{۲}{۱-\tan^۲ x} = ۳$$

$$\Rightarrow ۳ - ۳\tan^۲ x = ۲ \Rightarrow ۳\tan^۲ x - ۱ = ۰ \Rightarrow \tan^۲ x = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ \tan x = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan(\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ ۲)\ \ \tan x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۶}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ب

$$\tan^۳ x - \tan^۲ x + ۱ = \tan x$$

پاسخ: با مرتب کردن معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$\tan^۳ x - \tan^۲ x - \tan x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\tan x = t}$$

$$t^۳ - t^۲ - t + ۱ = ۰ \Rightarrow t^۲(t-۱) - (t-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow (t-۱)(t^۲-۱) = ۰ \Rightarrow (t-۱)^۲(t+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱)\ t = \tan x = -۱ = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ ۲)\ t = \tan x = ۱ = \tan(\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

پ

$$\tan^۴ x - ۲\tan^۲ x - ۳ = ۰$$

پاسخ: با جای‌گذاری $\tan^۲ x = m$ در معادله داریم:

$$m^۲ - ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow (m+۱)(m-۳) = ۰ \Rightarrow$$

$۱)\ m = \tan^۲ x = -۱ \rightarrow$ امکان ندارد.

$$۲)\ \ m = \tan^۲ x = ۳ \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{۳} = \tan(\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \tan x = -\sqrt{۳} = \tan(\frac{-\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ت

$$\cos ۳x = ۴\cos^۲ x$$

پاسخ: نکته: $\cos ۳x = ۴\cos^۳ x - ۳\cos x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۳x = ۴\cos^۲ x \Rightarrow ۴\cos^۳ x - ۳\cos x = ۴\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۳ x - ۴\cos^۲ x - ۳\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱)\cos x = ۰ = \cos\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}\ \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$۲)\ ۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳ = ۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۱۶ + ۴۸ = ۶۴} = ۸$$

$$\Rightarrow \cos x = \begin{cases} \frac{۴+۸}{۸} = \frac{۳}{۲} \rightarrow \text{نا ممکن است.} \\ \frac{۴-۸}{۸} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{۲\pi}{۳}) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}\ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث

$$\sin ۳x + ۲\cos ۲x = ۲$$

پاسخ: نکته: $\sin ۳x = ۳\sin x - ۴\sin^۳ x$ ، $۱ - \cos ۲x = ۲\sin^۲ x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

$$۳\sin x - ۴\sin^۳ x + ۲\cos ۲x = ۲ \Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۲ - ۲\cos ۲x = ۲(۱ - \cos ۲x) \quad (*)$$
$$\Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۲ \times ۲\sin^۲ x \Rightarrow ۴\sin^۳ x + ۴\sin^۲ x - ۳\sin x = ۰$$
$$\Rightarrow \sin x(۴\sin^۲ x + ۴\sin x - ۳) = ۰$$
$$\Rightarrow ۱)\ \sin x = ۰ = \sin(۰) \Rightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$
$$۲)\ ۴\sin^۲ x + ۴\sin x - ۳ = ۰ \Rightarrow (۲\sin x + ۳)(۲\sin x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-۳}{۲} \rightarrow \text{ناممکن است.} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin(\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = \begin{cases} ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \ (k \in \mathbb{Z}) \\ ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

۱۸. اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۴}$ و $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{۱}{۶}$ باشد حاصل $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ را بیابید. $(۰ \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{۲})$

پاسخ: با توجه به فرض $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۴}$ از دو طرف تساوی تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(\frac{\pi}{۴}) = ۱ \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = ۱$$

با جایگذاری $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{۱}{۶}$ داریم:

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \frac{۱}{۶}} = ۱ \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \tan\beta = \frac{۵}{۶} - \tan\alpha \quad (۱)$$

پس نتیجه (۱) را در عبارت $\tan\alpha \tan\beta = \frac{۱}{۶}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\tan\alpha(\frac{۵}{۶} - \tan\alpha) = \frac{۱}{۶} \xrightarrow{\tan\alpha = m} \frac{۵}{۶}m - m^۲ = \frac{۱}{۶} \xrightarrow{\times ۶} ۵m - ۶m^۲ = ۱ \Rightarrow ۶m^۲ - ۵m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۵ \pm ۱}{۱۲}$$
$$\Rightarrow m = \tan\alpha = \begin{cases} \frac{۱}{۳} \Rightarrow \tan\beta = \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan\beta = \frac{۱}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\beta > \alpha} \tan\beta > \tan\alpha \Rightarrow \tan\beta = \frac{۱}{۲} \ , \ \tan\alpha = \frac{۱}{۳}$$

۱۹. اگر $\tan(\alpha + \beta) = ۳$ و $\tan(\alpha - \beta) = ۲$ باشد حاصل $\tan ۲\alpha$ را بیابید.

پاسخ: ابتدا زاویهٔ ۲α را برحسب $\alpha + \beta$ و $\alpha - \beta$ می‌نویسیم:

$$۲\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \xrightarrow[\tan \text{ می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} \tan ۲\alpha = \tan((\alpha + \beta) + (\alpha - \beta))$$

$$\Rightarrow \tan ۲\alpha = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{۱ - \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)}$$

$$\Rightarrow \tan ۲\alpha = \frac{۳ + ۲}{۱ - ۳ \times (+۲)} = \frac{۵}{-۵} = -۱$$

۲۰. اگر $\sin x \cdot \sin y = \frac{۳}{۴}$ و $\tan x \cdot \tan y = ۳$ باشد حاصل $\tan(x - y)$ را بیابید.

پاسخ: طبق فرض $\tan x \tan y = ۳$ داریم:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = ۳ \Rightarrow \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = ۳$$
$$\xrightarrow[\sin x \sin y = \frac{۳}{۴}]{\text{طبق فرض}} \frac{\frac{۳}{۴}}{\cos x \cos y} = ۳ \Rightarrow \cos x \cos y = \frac{۱}{۴}$$

با باز کردن عبارت $\cos(x - y)$ داریم:

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=۱$$

حال طبق رابطهٔ $۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$ داریم:

$$۱+\tan^{۲}(x-y)=\frac{۱}{\cos^{۲}(x-y)}\Rightarrow ۱+\tan^{۲}(x-y)=۱\Rightarrow\tan(x-y)=۰$$

۲۱ . هریک از عبارات داده شده را برحسب $\tan\frac{x}{۲}$ بنویسید.

پاسخ:

الف

$$\frac{۱+\cos x}{\sin x}$$

پاسخ: **نکته:** $\begin{cases}۱+\cos x=۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}\\ \sin x=۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}\end{cases}$ بنابراین:

$$\frac{۱+\cos x}{\sin x}=\frac{۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}$$

ب

$$\frac{۱+\cos x}{۱-\cos x}$$

پاسخ: **می‌دانیم:** $\begin{cases}\sin^{۲}x=\frac{۱-\cos ۲x}{۲}\\ \cos^{۲}x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}\end{cases}$ بنابراین:

$$\frac{۱+\cos x}{۱-\cos x}=\frac{۲\cos^{۲}(\frac{x}{۲})}{۲\sin^{۲}(\frac{x}{۲})}=\cot^{۲}(\frac{x}{۲})=\frac{۱}{\tan^{۲}(\frac{x}{۲})}$$

پ

$$\frac{\sin x}{۱+\sin x}$$

پاسخ: **نکته:** $(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^{۲}=۱+\sin x$ بنابراین:

$$\frac{\sin x}{۱+\sin x}=\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^{۲}}=\frac{۲}{\frac{(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}}=\frac{۲}{(\frac{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}})(\frac{\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}})}$$
$$=\frac{۲}{(۱+\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}})(۱+\tan\frac{x}{۲})}=\frac{۲}{۱+\tan\frac{x}{۲}+\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}+۱}$$
$$=\frac{۲}{۲+\tan\frac{x}{۲}+\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}}=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{\tan^{۲}\frac{x}{۲}+۲\tan\frac{x}{۲}+۱}$$

حد

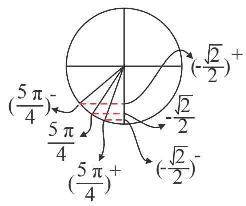
۲۲ . حاصل حد مقابل را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{۵\pi}{۴}}\frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱}$$

پاسخ: **با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:**

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to(\frac{۵\pi}{۴})^-}\frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱}=\frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\varepsilon)+۱}=\frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-۱+\sqrt{۲\varepsilon}+۱}$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to(\frac{۵\pi}{۴})^+} \frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\varepsilon)+۱} = \frac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-۱-\sqrt{۲}\varepsilon+۱} \left\{\begin{array}{l} = \dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{+\sqrt{۲}\varepsilon} = \dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{۰^+} = +\infty \\ = \dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-\sqrt{۲}\varepsilon} = \dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{۰^-} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



توجه کنید که $\frac{۵\pi}{۴} - ۱$ عددی مثبت است.

۲۳. حاصل $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{۱+\cos x}$ را بیابید.

پاسخ: **با استفاده از تغییر متغیر داریم:**

$x \to \pi$

$$x - \pi = t \Rightarrow \begin{cases} x = \pi + t \\ t \to ۰ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{۱+\cos x} = \lim_{t\to ۰} \frac{\sin(\pi+t)}{۱+\cos(\pi+t)} = \lim_{t\to ۰} \frac{-\sin t}{۱-\cos t} \times \frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}$$

*** با توجه به این نکته که وقتی $t \to ۰$ میل کند، $sint \sim t$ داریم:**

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{-\sin t(۱+\cos t)}{۱-\cos^۲ t} = \lim_{t\to ۰} \frac{-\sin t(۱+\cos t)}{\sin^۲ t} = \lim_{t\to ۰} \frac{-(۱+\cos t)}{\sin t}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{-۱-\cos t}{\frac{\sin t}{t}\times t} = \lim_{t\to ۰} \frac{-۱-\cos t}{t} = \left\{\begin{array}{l} lim_{x\to ۰^-} \frac{-۱-\cos t}{t} = \frac{-۲}{۰^-} = +\infty \\ lim_{x\to ۰^+} \frac{-۱-\cos t}{t} = \frac{-۲}{۰^+} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

۲۴. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n+۳x^۴-x^۲+۱}{۲x^n-x^۴+۵}$ را به‌ازای مقادیر مختلف n $(n\in\mathbb{N})$ به دست آورید.

پاسخ:

با توجه به قاعده پرتوان داریم:

قاعدهٔ پرتوان : $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots x \overset{\sim}{\longrightarrow} \pm\infty\ ax^n$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n+۳x^۴-x^۲+۱}{۲x^n-x^۴+۵} = \begin{cases} \xrightarrow{n<۴} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{۳x^۴}{-x^۴} = -۳ \\ \xrightarrow{n=۴} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^۴+۳x^۴}{۲x^۴-x^۴} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{۴x^۴}{x^۴} = ۴ \\ \xrightarrow{n>۴} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{۲x^n} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

۲۵. در تابع $f(x) = \dfrac{x+۲}{x^۲+mx+۶}$، m را چنان بیابید که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

پاسخ: حالت ۱ — مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$f(x)=\frac{x+۲}{x^۲+mx+۶}$$

$$x^۲+mx+۶=۰\Rightarrow\Delta=۰\Rightarrow m^۲-۲۴=۰\Rightarrow m=\pm۲\sqrt{۶}$$

$$m=۲\sqrt{۶}\Rightarrow f(x)=\frac{x+۲}{x^۲+۲\sqrt{۶}x+۶}=\frac{x+۲}{(x+\sqrt{۶})^۲}$$

فقط $x=-\sqrt{۶}$ مجانب قائم است.

$$m=-۲\sqrt{۶}\Rightarrow f(x)=\frac{x+۲}{x^۲-۲\sqrt{۶}x+۶}=\frac{x+۲}{(x-\sqrt{۶})^۲}$$

فقط $x=\sqrt{۶}$ مجانب قائم است.

حالت ۲ : عبارت $x+۲$ از صورت و مخرج ساده شود، یعنی مخرج بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد.

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow x^۲+mx+۶=۰\Rightarrow ۴-۲m+۶=۰\Rightarrow m=۵$$

$$f(x)=\frac{x+۲}{x^۲+۵x+۶}=\frac{x+۲}{(x+۲)(x+۳)}=\frac{۱}{x+۳}$$

فقط $x=-۳$ مجانب قائم است.

۲۶. در تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+۴x+۳}{x^۲+mx+۹}$ ، m را چنان بیابید که تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

پاسخ: صورت کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲+mx+۹}$$

حالت ۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد.

$$x^۲+mx+۹=۰\Rightarrow\Delta=۰\Rightarrow m^۲-۳۶=۰\Rightarrow m=\pm۶$$

$$m=۶\Rightarrow f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲+۶x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x+۳)^۲}=\frac{x+۱}{x+۳}$$

فقط $x=-۳$ مجانب قائم است. (که در این حالت بعد از ساده کردن کسر، ریشهٔ مخرج مضاعف نیست.)

$$m=-۶\Rightarrow f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲-۶x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x-۳)^۲}$$

فقط $x=۳$ مجانب قائم است.

حالت ۲) مخرج بر $x+۳$ بخش‌پذیر باشد

$$x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\Rightarrow x^۲+mx+۹=۰\Rightarrow ۹-۳m+۹=۰\Rightarrow m=۶$$

این حالت در بالا بررسی شده است.

حالت ۳) مخرج بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow x^{۲}+mx+۹=۰ \Rightarrow ۱-m+۹=۰ \Rightarrow m=۱۰$$

$$f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^{۲}+۱۰x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x+۱)(x+۹)}=\frac{x+۳}{x+۹}$$

فقط $x=-۹$ مجانب قائم است.

۲۷. تابع $f(x)=\dfrac{\tan x}{۲\sin x-۱}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ چند مجانب قائم دارد؟

پاسخ:

$$f(x)=\frac{\tan x}{۲\sin x-۱}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{۲\sin x-۱}=\frac{\sin x}{\cos x(۲\sin x-۱)}$$

$$\cos x(۲\sin x-۱)=۰ \Rightarrow \cos x=۰\ ,\ \sin x=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{[۰,۲\pi]} x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} x=\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} x=\frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

با توجه به این که هیچ‌کدام از مقادیر $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=\frac{۵\pi}{۶}$ صورت کسر یعنی $\sin x$ را صفر نمی‌کنند، پس همگی مجانب قائم هستند.

۲۸. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx^{۳}-(x-۱)^{۳}+x^{۲}+۲)=+\infty$، آنگاه حدود m را بیابید.

پاسخ: با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^{n}+bx^{n-۱}+\cdots \overset{\sim}{\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}} ax^{n}$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(mx^{۳}-(x-۱)^{۳}+x^{۲}+۲)=\lim_{x\to-\infty}(mx^{۳}-x^{۳}+۳x^{۲}-۳x+۱+x^{۲}+۲)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}((m-۱)x^{۳}+۴x^{۲}-۳x+۳)=+\infty$$

حالت ۱) $m=۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(۴x^{۲}-۳x+۳)=\lim\limits_{x\to-\infty}۴x^{۲}=۴(-\infty)^{۲}=۴(+\infty)=+\infty$ قابل قبول

حالت ۲) $m\neq۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}((m-۱)x^{۳}+۴x^{۲}-۳x+۳)=\lim\limits_{x\to-\infty}(m-۱)x^{۳}=(m-۱)(-\infty)^{۳}$

$$\Rightarrow (m-۱)(-\infty)=+\infty \Rightarrow m-۱<۰ \Rightarrow m<۱$$

در کل باید $m\le۱$ باشد.

۲۹. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}((x+۱)^{۳}+mx^{۳}-۴x^{۲}+۲)=+\infty$، آنگاه حدود m را بیابید.

پاسخ: با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^{n}+bx^{n-۱}+\cdots \overset{\sim}{\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}} ax^{n}$ داریم:

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+3x+1+mx^3-4x^2+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}((m+1)x^3-x^2+3x+3)=+\infty$

حالت ۱) $m=-1\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+3x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)$

$=-(-\infty)^2=-(+\infty)=-\infty$ غیر قابل قبول

حالت ۲) $m\neq-1\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}((m+1)x^3-x^2+3x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(m+1)x^3$

$\Rightarrow(m+1)(-\infty)^3=(m+1)(-\infty)=+\infty\Rightarrow m+1<0\Rightarrow m<-1$

۳۰. اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx^2+(x+2)^2-7x)=+\infty$، آنگاه حدود m را بیابید.

پاسخ:

$\lim\limits_{x\to-\infty}mx^2+x^2+4x+4-7x=\lim\limits_{x\to-\infty}((m+1)x^2-3x+4)=+\infty$

حالت ۱) $m=-1\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x+4)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=-3(-\infty)=+\infty$ قابل قبول است.

حالت ۲) $m\neq-1\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}((m+1)x^2-3x+4)=\lim\limits_{x\to-\infty}(m+1)x^2=(m+1)(-\infty)^2$

$\Rightarrow(m+1)(+\infty)=+\infty\Rightarrow m+1>0\Rightarrow m>-1$

در کل باید $m\geq-1$ باشد.

۳۱. اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^n+mx^3+x^2-1}{4x^3+x^2-3}=-2$، آنگاه m و n را بیابید. $(n\in\mathbb{N})$

پاسخ: با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-1}+\cdots \underset{x\to\pm\infty}{\sim} ax^n$ داریم:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^n+mx^3+x^2-1}{4x^3+x^2-3}=-2$

حالت ۱) $n<3\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{mx^3}{4x^3}=\dfrac{m}{4}=-2\Rightarrow m=-8\Rightarrow n<3\ ,\ m=-8$ جواب

حالت ۲) $n=3\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+mx^3}{4x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(2+m)x^3}{4x^3}=\dfrac{2+m}{4}=-2$

$\Rightarrow 2+m=-8\Rightarrow m=-10\Rightarrow n=3\ ,\ m=-10$ جواب

حالت ۳) $n>3\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^n}{4x^3}=\pm\infty\to$ غیرقابل‌قبول

۳۲. حاصل $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\dfrac{-2x+1}{x-2}]$ را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

پاسخ: می‌دانیم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x+1}{x-2}=-2$، حال باید ببینیم $\dfrac{-2x+1}{x-2}$ چگونه به -2 میل می‌کند. برای این کار -2 برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\dfrac{-2x+1}{x-2}]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\dfrac{-2x+4-3}{x-2}]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[\dfrac{-2(x-2)}{x-2}+\dfrac{-3}{x-2}]$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[-2+\dfrac{-3}{x-2}]$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [-۲ + \dfrac{-۳}{x-۲}] = [-۲ + \dfrac{-۳}{+\infty}] = [-۲ + ۰^-] = [-۲ - \varepsilon] = -۳ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} [-۲ + \dfrac{-۳}{x-۲}] = [-۲ + \dfrac{-۳}{-\infty}] = [-۲ + ۰^+] = [-۲ + \varepsilon] = -۲ \end{cases}$$

۳۳. حاصل حدهای زیر را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

پاسخ:

الف

$$\lim_{x\to+\infty} [\frac{۳x+۱}{x+۲}]$$

پاسخ: می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۳x+۱}{x+۲} = ۳$، حال باید ببینیم کسر $\frac{۳x+۱}{x+۲}$ چگونه به ۳ میل می‌کند، برای این کار ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} [\frac{۳x+۱}{x+۲}] = \lim_{x\to+\infty} [\frac{۳x+۶-۵}{x+۲}] = \lim_{x\to+\infty} [\frac{۳(x+۲)}{x+۲} - \frac{۵}{x+۲}] = \lim_{x\to+\infty} [۳ - \frac{۵}{x+۲}]$$

$$= [۳ - \frac{۵}{+\infty}] = [۳ - ۰^+] = [۳ - \varepsilon] = ۲$$

ب

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to-\infty} [\frac{x+۲}{x-۱}]$$

پاسخ: می‌دانیم $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+۲}{x-۱} = ۱$، حال باید ببینیم کسر $\frac{x+۲}{x-۱}$ چگونه به یک میل می‌کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty} [\frac{x+۲}{x-۱}] = \lim_{x\to-\infty} [\frac{x-۱+۳}{x-۱}] = \lim_{x\to-\infty} [\frac{x-۱}{x-۱} + \frac{۳}{x-۱}] = \lim_{x\to-\infty} [۱ + \frac{۳}{x-۱}]$$

$$= [۱ + \frac{۳}{-\infty}] = [۱ + ۰^-] = [۱ - \varepsilon] = ۰$$

۳۴. فرض کنید $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ، محل تقاطع مجانب‌های آن، نقطه $(۲,۱)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-۱,۰)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

پاسخ:

$$cx+d=۰ \Rightarrow d=-۲c \qquad (-۱,۰) \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = ۰ \Rightarrow a=b$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{cx} = ۱ \Rightarrow a=c \qquad f(x) = \frac{x+۱}{x-۲}$$

مشتق

۳۵. مشتق تابع $f(x)=\sin x$ در نقطهٔ $x=\dfrac{\pi}{۶}$ را با استفاده از تعریف بیابید.

پاسخ:

$$f(x)=\sin x,\ f(\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲}$$

$$f'(\frac{\pi}{۶}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{۶}}{x-\frac{\pi}{۶}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \frac{\sin x - \frac{۱}{۲}}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x-\frac{\pi}{6}=t \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+t , t\to 0$$

$$f'(\frac{\pi}{6})=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{6}+t)-\frac{1}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{6}\cos t+\cos\frac{\pi}{6}\sin t-\frac{1}{2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1-cost)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\times 2\sin^2(\frac{t}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\times\frac{t}{2})^2}{t}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{4}t^2}{t}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\lim_{t\to 0}(-\frac{1}{4}t)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۶. مشتق تابع $f(x)=\cos x$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{6}$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

پاسخ:

$$f(x)=\cos x$$

$$f'(\frac{\pi}{6})=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{6})}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x-\frac{\pi}{6}=t \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+t , t\to 0$$

$$f'(\frac{\pi}{6})=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(\frac{\pi}{6}+t)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{6}\cos t-\sin\frac{\pi}{6}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cost}-\frac{1}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos t)-\frac{1}{2}\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sin^2(\frac{t}{2})}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sqrt{3}(\frac{sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\times\frac{t}{2})^2}{t}-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sqrt{3}\times\frac{1}{4}t^2}{t}-\frac{1}{2}\times 1=\lim_{t\to 0}(-\frac{\sqrt{3}}{4}t)-\frac{1}{2}=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

۳۷. مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} , f(0)=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

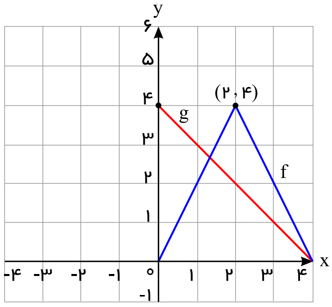
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-1+x^2}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$f'_{+}(\circ) = \lim_{x\to\circ^{+}} \frac{x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}} = \lim_{x\to\circ^{+}} \frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

تابع در $x=\circ$ مشتق‌ناپذیر است.

۳۸. نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

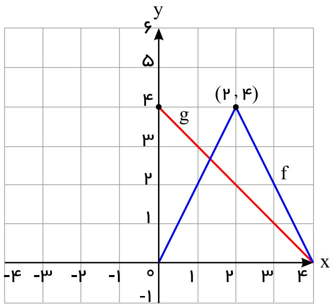


الف) اگر $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

پاسخ:

الف) توابع f و g توابع خطی هستند و باید ضابطهٔ آنها را بیابیم. برای تابع f باید خط گذرنده از نقاط $(\circ,\circ)$ و $(۲,۴)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(۲,۴)$ و $(۴,\circ)$ را بیابیم.



$$(\circ,\circ),(۲,۴) \Rightarrow m=\frac{۴-\circ}{۲-\circ}=۲ \Rightarrow y-\circ=۲(x-\circ) \Rightarrow y=۲x$$

$$(۲,۴),(۴,\circ) \Rightarrow m=\frac{۴-\circ}{۲-۴}=-۲ \Rightarrow y-\circ=-۲(x-۴) \Rightarrow y=-۲x+۸$$

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & \circ\le x\le ۲ \\ -۲x+۸ & ۲<x\le ۴ \end{cases}$$

برای یافتن تابع g باید خط گذرنده از نقاط $(\circ,۴)$ و $(۴,\circ)$ را بیابیم.

$$(\circ,۴),(۴,\circ) \Rightarrow m=\frac{۴-\circ}{\circ-۴}=-۱ \Rightarrow y-\circ=-۱(x-۴) \Rightarrow y=-x+۴ \Rightarrow g(x)=-x+۴$$

$$h(x)=f(x)\cdot g(x) \Rightarrow h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

$$f(۱)=۲\ ,\ \circ<x<۲ \Rightarrow f(x)=۲x \Rightarrow f'(x)=۲ \Rightarrow f'(۱)=۲$$

$$g(۱)=۳\ ,\ g(x)=-x+۴ \Rightarrow g'(x)=-۱ \Rightarrow g'(۱)=-۱$$

$h'(۱) = f'(۱) \cdot g(۱) + g'(۱) \cdot f(۱) = ۲ \times ۳ + (-۱) \times ۲ = ۶ - ۲ = ۴$

تابع f در $x = ۲$ مشتق‌ناپذیر است زیرا:

$$f'_-(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲x - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲(x - ۲)}{x - ۲} = ۲$$

$$f'_+(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{-۲x + ۸ - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{-۲(x - ۲)}{x - ۲} = -۲$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست بنابراین $h'(۲)$ نیز وجود ندارد.

$$f(۳) = ۲ \,,\ f'(۳) = -۲ \,,\ g(۳) = ۱ \,,\ g'(۳) = -۱$$

$$h'(۳) = f'(۳) \cdot g(۳) + g'(۳) \cdot f(۳) = -۲ \times ۱ + (-۱) \times ۲ = -۴$$

ب)

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^۲(x)}$$

$$k'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}$$

$$k'(۱) = \frac{۲ \times ۳ - (-۱) \times ۲}{۳^۲} = \frac{۶ + ۲}{۹} = \frac{۸}{۹}$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست پس $k'(۲)$ هم وجود ندارد.

$$k'(۳) = \frac{f'(۳)g(۳) - g'(۳)f(۳)}{g^۲(۳)} = \frac{(-۲) \times ۱ - (-۱) \times ۲}{۱^۲} = \frac{-۲ + ۲}{۱} = ۰$$

۳۹. اگر $۴f(a) = f'(a) = ۲$ مشتق $f^۲(x) + \dfrac{۱}{f(x)}$ در $x = a$ کدام است؟

۱) -۴ **۲) -۶**

۳) ۴ **۴) ۶**

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$۴f(a) = ۲ \Rightarrow f(a) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \,,\ f'(a) = ۲$$

$$(f^۲(x) + \frac{۱}{f(x)})' = ۲f(x)f'(x) - \frac{f'(x)}{f^۲(x)} \overset{x=a}{=} ۲f(a)f'(a) - \frac{f'(a)}{f^۲(a)} = \cancel{۲} \times \frac{۱}{\cancel{۲}} \times ۲ - \frac{۲}{(\frac{۱}{۲})^۲} = ۲ - ۸ = -۶$$

۴۰. نقاطی از منحنی $y = \dfrac{۲x + ۳}{۱ - x}$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط بر خط $y + ۵x = ۸$ عمود باشد.

پاسخ:

$y + ۵x = ۸ \Rightarrow y = -۵x + ۸ \Rightarrow$ شیب $= -۵$

$\Rightarrow$ شیب خط عمود $= \frac{۱}{۵} \Rightarrow$ شیب خط مماس بر منحنی دادەشده $= \frac{۱}{۵}$

$$y = \frac{۲x + ۳}{۱ - x} \Rightarrow y' = \frac{۲(۱ - x) - (-۱)(۲x + ۳)}{(۱ - x)^۲} = \frac{۲ - ۲x + ۲x + ۳}{(۱ - x)^۲}$$

$$y' = \frac{۵}{(۱-x)^۲} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow (۱-x)^۲ = ۲۵ \Rightarrow ۱ - x = \pm ۵ \Rightarrow \begin{cases} x = -۴ \\ x = ۶ \end{cases}$$
$$x = -۴ \Rightarrow y = \frac{۲(-۴)+۳}{۱-(-۴)} = \frac{-۵}{۵} = -۱ \Rightarrow A(-۴,-۱)$$
$$x = ۶ \Rightarrow y = \frac{۲\times ۶+۳}{۱-۶} = \frac{۱۵}{-۵} = -۳ \Rightarrow B(۶,-۳)$$

۴۱. اگر f تابعی مشتق‌پذیر بوده و $g(x) = x^۳ + ۱$ و $(fog)(x) = x^۲ + ۲$، آنگاه $f'(۰)$ را بیابید.

پاسخ:

$$g(x) = x^۳ + ۱ \Rightarrow g'(x) = ۳x^۲$$
$$(fog)(x) = x^۲ + ۲ \xrightarrow{\text{مشتق}} (fog)'(x) = ۲x \Rightarrow g'(x)\cdot f'(g(x)) = ۲x$$
$$۳x^۲ \times f'(x^۳+۱) = ۲x \xrightarrow{x=-۱} ۳f'(۰) = -۲ \Rightarrow f'(۰) = -\frac{۲}{۳}$$

۴۲. در تابع $f(x) = \dfrac{x^۲}{x+۱}$ حاصل $f''(۱)$ را بیابید.

پاسخ:

$$f(x) = \frac{x^۲}{x+۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x(x+۱) - x^۲}{(x+۱)^۲} = \frac{x^۲+۲x}{(x+۱)^۲}$$
$$f''(x) = \frac{(۲x+۲)(x+۱)^۲ - ۲(x+۱)(x^۲+۲x)}{(x+۱)^۴} = \frac{(x+۱)((۲x+۲)(x+۱) - ۲(x^۲+۲x))}{(x+۱)^۴}$$
$$f''(x) = \frac{(۲x+۲)(x+۱) - ۲(x^۲+۲x)}{(x+۱)^۳} \Rightarrow f''(۱) = \frac{۴\times ۲ - ۲\times ۳}{۲^۳} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$$

۴۳. مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{|x+۲|}$ در نقطهٔ $x = -۲$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{|x+۲|},\ f(-۲) = ۰$$
$$f'(-۲) = \lim_{x\to -۲} \frac{f(x) - f(-۲)}{x-(-۲)} = \lim_{x\to -۲} \frac{\sqrt{|x+۲|} - ۰}{x+۲} \times \frac{\sqrt{|x+۲|}}{\sqrt{|x+۲|}}$$
$$= \lim_{x\to -۲} \frac{|x+۲|}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}$$
$$f'_-(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{-(x+۲)}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{-۱}{\sqrt{|x+۲|}} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$
$$f'_+(-۲) = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{x+۲}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}} = \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{۱}{\sqrt{|x+۲|}} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

تابع در $x = -۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۴۴. مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} [x]\sin|x| & x < ۰ \\ x^۲(|x| + [x]) & x \geq ۰ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۰$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} [x]\sin|x| & x < ۰ \\ x^۲(|x|+[x]) & x \geq ۰ \end{cases} \quad f(۰) = ۰$$
$$f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{[x]\sin|x| - ۰}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{[x]\sin(-x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to ۰^-} \frac{-[x]\sin x}{x} = \lim_{x\to ۰^-} -[x]\times ۱ = -\left[۰^-\right] = -(-۱) = ۱$$
$$f'_+(۰) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲(|x|+[x]) - ۰}{x}$$
$$= \lim_{x\to ۰^+} x(|x|+[x]) = ۰$$

تابع در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است.

۴۵. مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sin x\,|\cos x|$ در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{2}$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$f(x)=\sin x\,|\cos x|\ ,\ f(\frac{\pi}{2})=0$$

$$f'(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,|\cos x|-0}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,|\cos x|}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$x-\frac{\pi}{2}=t\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+t\ ,\ t\to 0$$

$$f'(\frac{\pi}{2})=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+t)\left|\cos(\frac{\pi}{2}+t)\right|}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t\,|\sin t|}{t}$$

$$f'_-(\frac{\pi}{2})=\lim_{t\to 0^-}\frac{\cos t|\sin t|}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\cos t(-\sin t)}{t}=\lim_{t\to 0^-}-\cos t\times\frac{\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^-}-\cos t\times 1=-1$$

$$f'_+(\frac{\pi}{2})=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos t|\sin t|}{t}=\lim_{t\to 0^+}\cos t\times\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0^+}\cos t\times 1=1$$

تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ مشتق‌ناپذیر است.

کاربرد مشتق

۴۶. نقاط بحرانی تابع $f(x)=2x^2-|x|$ را بیابید.

پاسخ: تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=2x^2-|x|$$

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-x & x\geq 0\\ 2x^2+x & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}4x-1 & x>0\\ 4x+1 & x<0\end{cases}$$

$$f'_-(0)=4\times 0+1=1\quad ,\quad f'_+(0)=4\times 0-1=-1\Rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0)$$

$x=0$ بحرانی است زیرا مشتق‌ناپذیر است.

$x>0\Rightarrow f'(x)=4x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ قابل قبول $\Rightarrow$ بحرانی است

$x<0\Rightarrow f'(x)=4x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{4}$ قابل قبول $\Rightarrow$ بحرانی است

تابع سه نقطهٔ بحرانی $x=0\ ,\ x=\frac{1}{4}\ ,\ x=-\frac{1}{4}$ دارد.

۴۷. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^2+|x+1|$ را در بازهٔ $[-2,2]$ بیابید.

پاسخ:

$$f(x)=x^2+|x+1|=\begin{cases}x^2+x+1 & x\geq -1\\ x^2-x-1 & x<-1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x+1 & x>-1\\ 2x-1 & x<-1\end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقطهٔ $x=-1$ به‌دست آوریم.

$$f'_+(-1)=-1$$
$$f'_-(-1)=-3$$

بنابراین در نقطهٔ $x=-۱$ مشتق‌پذیر نیست از طرفی ریشهٔ f' نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۲}$ و نقاط بحرانی تابع‌اند با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه به سادگی مینیمم مطلق مشخص می‌شود.

$f(-۱)=۱ \rightarrow$ مینیمم مطلق

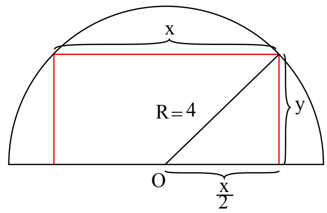
$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$

$f(-۲)=۴+۱=۵$

$f(۲)=۴+۳=۷ \rightarrow$ ماکزیمم مطلق

۴۸. یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

پاسخ:



$$(\frac{x}{۲})^۲+y^۲=۴^۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+y^۲=۱۶$$

$$y^۲=۱۶-\frac{x^۲}{۴}=\frac{۶۴-x^۲}{۴} \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^۲}$$

$S=xy=x\times\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^۲} \Rightarrow S(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴x^۲-x^۴}$

$y^۲\geq ۰ \Rightarrow ۱۶-\frac{x^۲}{۴}\geq ۰ \Rightarrow \frac{x^۲}{۴}\leq ۱۶ \Rightarrow x^۲\leq ۶۴ \Rightarrow -۸\leq x\leq ۸ \quad (۱)$

$x\geq ۰ \xrightarrow{(۱)} ۰\leq x\leq ۸ \Rightarrow S(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴x^۲-x^۴}$ دامنه $=[۰,۸]$

$S'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۲۸x-۴x^۳}{۲\sqrt{۶۴x^۲-x^۴}}=۰ \Rightarrow ۱۲۸x-۴x^۳=۰ \Rightarrow ۴x(۳۲-x^۲)=۰$

$\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm۴\sqrt{۲}$

$x=۰ \Rightarrow S(۰)=۰\ ,\ x=۴\sqrt{۲} \Rightarrow S(۴\sqrt{۲})=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴\times۳۲-۲۵۶\times۴}=۱۶$

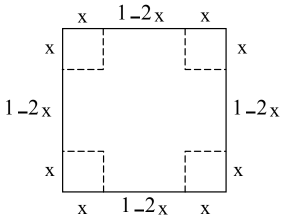
$x=۸ \Rightarrow S(۸)=۰$, مقدار ماکزیمم مساحت $=۱۶$

به‌ازای $x=۴\sqrt{۲}$، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را دارد. پس داریم:

$x=۴\sqrt{۲} \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-۳۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲}=\frac{۱}{۲}\times۴\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$

۴۹. ورق فلزی مربع شکل به‌طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

پاسخ:



$\rightarrow V_{\text{جعبه}} = $ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع

$$V = (۱ - ۲x)^۲ \cdot x = (۱ + ۴x^۲ - ۴x)x = ۴x^۳ - ۴x^۲ + x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۱۲x^۲ - ۸x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۶۴ - ۴۸ = ۱۶} \begin{cases} x = \dfrac{۸+۴}{۲۴} = \dfrac{۱}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x = \dfrac{۸-۴}{۲۴} = \dfrac{۱}{۶} \end{cases}$$

۵۰. بازه‌هایی که تابع $y = x\sqrt{۴ - x^۲}$ بر آنها صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.

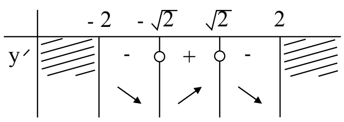
پاسخ: برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$، مشتق اول آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y = x\sqrt{۴ - x^۲}$$

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \rightarrow x^۲ \leq ۴ \rightarrow |x| \leq ۲ \rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \rightarrow \ D = [-۲, ۲]$$

$$y' = \sqrt{۴ - x^۲} + \frac{-۲x}{۲\sqrt{۴ - x^۲}} \times x$$

$$\rightarrow y' = \frac{۴ - x^۲ - x^۲}{\sqrt{۴ - x^۲}} = ۰ \rightarrow ۲x^۲ = ۴ \rightarrow x^۲ = ۲ \rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$



تابع در بازهٔ $[-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$ صعودی است و در بازه‌های $[-۲, -\sqrt{۲}]$ و $[\sqrt{۲}, ۲]$ نزولی است.

۵۱. نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ + ۳x^۲ & x \leq ۰ \\ x^۲ - ۶x & x > ۰ \end{cases}$$

پاسخ:

$$f(۰) = ۰\ ,\ \text{حد چپ} = \lim_{x \to ۰^-} (x^۳ + ۳x^۲) = ۰\ ,\ \text{حد راست} = \lim_{x \to ۰^+} (x^۲ - x) = ۰$$

تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + ۶x & x < ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x + ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰\ ,\ x = -۲ \\ ۲x - ۶ & x > ۰ \Rightarrow ۲x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

$f'_-(۰) = ۰\ ,\ f'_+(۰) = ۰ - ۶ = -۶ \Rightarrow f'_-(۰) \neq f'_+(۰) \Rightarrow$ مشتق ناپذیر $x = ۰$

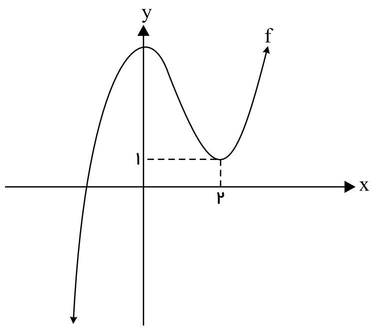
نقاط بحرانی عبارتند از: $x = ۰\ ,\ x = -۲\ ,\ x = ۳$

x	$-\infty$		-۲		۰		۳		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$x = -۲ \Rightarrow f(-۲) = -۸ + ۱۲ = ۴\ ,\ x = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۹ - ۱۸ = -۹$

نقطهٔ $(-۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ $(۳, -۹)$ مینیمم نسبی است.

۵۲. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ به‌صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.



پاسخ:

$f'(۲) = ۰ \to f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx \to b = -۳$
$f(۲) = ۱ \to ۸ + (-۱۲) + d = ۱ \to d = ۵$

۵۳. جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

پاسخ:

الف دوره تناوب تابع $y = ۷\sin(\frac{-\pi}{۲}x) + ۲$ برابر .... است.

پاسخ: ۴

ب اگر برای هر x در بازه I؛ $f''(x) > ۰$، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به .... دارد.

پاسخ: بالا

۵۴. در تابع $f(x) = x^۳ + ۹x^۲ + ۱$ جهت تقعر و نقطه‌ی عطف را در صورت وجود پیدا کنید.

پاسخ: برای تعیین جهت تقعر و نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$، باید مشتق دوم آن را تعیین علامت کنیم.

$f(x) = x^۳ + ۹x^۲ + ۱ \to f'(x) = ۳x^۲ + ۱۸x$
$\to f''(x) = ۶x + ۱۸ = ۰ \to x = -۳$

	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$
y	$\cap$		$\cup$

نقطه‌ی $I = (-۳, ۱)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع است.

۵۵. نقاط عطف تابع $f(x) = \dfrac{x^۲}{x^۲ + ۱۲}$ را در صورت وجود بیابید.

پاسخ: تابع f روی R پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$f(x) = \dfrac{x^۲}{x^۲ + ۱۲}$

$$f'(x)=\frac{۲x(x^{۲}+۱۲)-۲x\times x^{۲}}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}=\frac{۲۴x}{(x^{۲}+۱۲)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{۲۴(x^{۲}+۱۲)^{۲}-۲\times ۲x(x^{۲}+۱۲)^{۲}\times ۲۴x}{(x^{۲}+۱۲)^{۴}}=\frac{(x^{۲}+۱۲)(۲۴x^{۲}+۲۴\times ۱۲-۴x\times ۲۴x)}{(x^{۲}+۱۲)^{۴}}$$

$$f''(x)=\frac{۲۴x^{۲}+۲۸۸-۹۶x^{۲}}{(x^{۲}+۱۲)^{۳}}=\frac{۲۸۸-۷۲x^{۲}}{(x^{۲}+۱۲)^{۳}}=\frac{۷۲(۴-x^{۲})}{(x^{۲}+۱۲)^{۳}}$$

علامت f'' فقط به‌صورت آن بستگی دارد زیرا مخرج آن عبارتی همواره مثبت است.

$$۴-x^{۲}=۰\Rightarrow x=\pm ۲$$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$f''(x)=\frac{۷۲(۴-x^{۲})}{(x^{۲}+۱۲)^{۳}}$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

نقاط $x=\pm ۲$ نقاط عطف تابع هستند.

۵۶. نقاط عطف تابع $f(x)=\dfrac{x^{۳}}{x^{۲}+۱}$ را بیابید.

پاسخ: تابع f در کل R پیوسته است.

$$f(x)=\frac{x^{۳}}{x^{۲}+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۳x^{۲}(x^{۲}+۱)-۲x\times x^{۳}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}=\frac{x^{۴}+۳x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{(۴x^{۳}+۶x)(x^{۲}+۱)^{۲}-۲\times ۲x(x^{۲}+۱)(x^{۴}+۳x^{۲})}{(x^{۲}+۱)^{۴}}$$

$$f''(x)=\frac{(x^{۲}+۱)\left((۴x^{۳}+۶x)(x^{۲}+۱)-۴x(x^{۴}+۳x^{۲})\right)}{(x^{۲}+۱)^{۴}}=\frac{۴x^{۵}+۴x^{۳}+۶x^{۳}+۶x-۴x^{۵}-۱۲x^{۳}}{(x^{۲}+۱)^{۳}}$$

$$f''(x)=\frac{۶x-۲x^{۳}}{(x^{۲}+۱)^{۳}}=۰\Rightarrow ۲x(۳-x^{۲})=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm\sqrt{۳}$$

عطف f'' فقط به‌صورت آن بستگی دارد زیرا مخرج عبارتی همواره مثبت است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f''(x)=\frac{۶x-۲x^{۳}}{(x^{۲}+۱)^{۳}}$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	
		$\smile$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

نقاط $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{۳}$ نقاط عطف تابع هستند.

۵۷. در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^{۲}+۱}$ مقادیر a، b را چنان بیابید که نقطهٔ $A(۱,۳)$ نقطهٔ عطف تابع باشد.

پاسخ:

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x^{۲}+۱}$ نقطهٔ عطف $A(۱,۳)$

$$f(1)=3 \Rightarrow \frac{a+b}{2}=3 \Rightarrow a+b=6$$

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}=\frac{ax^2+a-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2ax-2b)(x^2+1)^2-2\times 2x(x^2+1)(-ax^2-2bx+a)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)\left((-2ax-2b)(x^2+1)-4x(-ax^2-2bx+a)\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(-2ax-2b)(x^2+1)-4x(-ax^2-2bx+a)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f''(1)=0$$

$$\Rightarrow (-2a-2b)\times 2-4(-a-2b+a)=0 \Rightarrow -4a-4b+8b=0$$

$$\Rightarrow -4a+4b=0 \Rightarrow b=a \Rightarrow a+b=6 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=b=3$$

۵۸. تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ مفروض است. c, b, a را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $A(1,-1)$ مرکز تقارن تابع بوده و خط مماس بر منحنی در نقطهٔ عطف عمود بر خط $x+3y=7$ باشد.

پاسخ: **در تابع درجهٔ سوم مرکز تقارن همان نقطهٔ عطف تابع است.**

$f(x)=ax^3+bx^2+c$ نقطهٔ عطف $A(1,-1) \Rightarrow f(1)=-1 \Rightarrow a+b+c=-1 \quad (1)$

$f'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow 6a+2b=0 \Rightarrow b=-3a \quad (2)$

$x+3y=7 \Rightarrow 3y=-x+7 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3} \Rightarrow$ شیب $=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ شیب مماس در عطف $=3 \Rightarrow f'(1)=3 \Rightarrow 3a+2b=3 \quad (3)$

$(2)\ ,\ (3) \Rightarrow 3a+2(-3a)=3 \Rightarrow 3a-6a=3 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow b=3$

$(1) \Rightarrow -1+3+c=-1 \Rightarrow c=-3$

۵۹. تابع $y=mx+n+\dfrac{x^2-1}{x+2}$ مفروض است. m و n را چنان بیابید که این تابع هموگرافیک شود و مرکز تقارنش روی نیمساز ربع اول باشد.

پاسخ:

$$y=mx+n+\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{(x+2)(mx+n)+x^2-1}{x+2}$$

$$y=\frac{mx^{۲}+nx+۲mx+۲n+x^{۲}-۱}{x+۲}=\frac{(m+۱)x^{۲}+(n+۲m)x+۲n-۱}{x+۲}$$

$$m+۱=۰\Rightarrow m=-۱\Rightarrow y=\frac{(n-۲)x+۲n-۱}{x+۲}$$

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\quad,\quad y=\frac{n-۲}{۱}=n-۲$$

مرکز تقارن $=(-۲,n-۲)\quad,\quad y=x\Rightarrow n-۲=-۲\Rightarrow n=۰$

۶۰. فرض کنید $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطهٔ $(۲,۱)$ است. اگر این تابع از نقطهٔ $(-۱,۰)$ بگذرد، ضابطهٔ تابع را به دست آورید.

پاسخ:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$
$$f(-۱)=۰\Rightarrow\frac{-a+b}{-c+d}=۰\Rightarrow -a+b=۰\Rightarrow a=b$$

طول نقطهٔ تقاطع مجانب‌ها برابر با مجانب قائم و عرض این نقطه برابر با مجانب افقی است. پس داریم:

نقطهٔ تقاطع مجانب‌ها $(۲,۱)\Rightarrow$ مجانب قائم: $x=۲$ مجانب افقی: $y=۱$

$$cx+d=۰\Rightarrow x=-\frac{d}{c}=۲\Rightarrow d=-۲c$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax}{cx}=\frac{a}{c}\Rightarrow y=\frac{a}{c}=۱\Rightarrow a=c$$

$$d=-۲c\xrightarrow{c=a}d=-۲a$$
$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{ax+a}{ax-۲a}=\frac{a(x+۱)}{a(x-۲)}=\frac{x+۱}{x-۲}$$

پاسخنامه تشریحی

۱.

$$y=x^۳ \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y=(-x)^۳=-x^۳ \xrightarrow[x\to x+۲]{\text{۲ واحد چپ}} y=-(x+۲)^۳$$
$$\xrightarrow{\text{۵ واحد بالا}} y=f(x)=-(x+۲)^۳+۵ \Rightarrow (x+۲)^۳=۵-y$$
$$\Rightarrow x+۲=\sqrt[۳]{۵-y} \Rightarrow x+۲=-\sqrt[۳]{y-۵} \Rightarrow x=-۲-\sqrt[۳]{y-۵}$$
$$\Rightarrow y=f^{-۱}(x)=-۲-\sqrt[۳]{x-۵}$$

۲.

$$y=\sqrt[۳]{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x \text{ ها}} y=-\sqrt[۳]{x} \xrightarrow[x\to x-۴]{\text{۴ واحد راست}} y=-\sqrt[۳]{x-۴}$$
$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} y=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳ \Rightarrow f(x)=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳$$
$$y=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{x-۴}=-y-۳ \Rightarrow x-۴=(-y-۳)^۳$$
$$\Rightarrow x=(-y-۳)^۳+۴ \Rightarrow x=۴-(۳+y)^۳ \Rightarrow y=۴-(۳+x)^۳=f^{-۱}(x)$$

۳. نکته: اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a)\le f(b)$ باشد، آنگاه $a\ge b$.

$$g(x)=\sqrt{f(|۲x-۱|)-f(|x+۱|)} \Rightarrow f(|۲x-۱|)-f(|x+۱|)\ge ۰$$
$$\Rightarrow f(|۲x-۱|)\ge f(|x+۱|) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} |۲x-۱|\le|x+۱|$$
$$\Rightarrow (۲x-۱)^۲\le(x+۱)^۲ \Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱\le x^۲+۲x+۱ \Rightarrow ۳x^۲-۶x\le ۰$$
$$\Rightarrow ۳x(x-۲)\le ۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & ۰ & & ۲ & \\ \hline ۳x(x-۲) & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array} \Rightarrow ۰\le x\le ۲$$
$$\Rightarrow D_g=[۰,۲]$$

۴. برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ fog داریم:

$$x_۱<x_۲ \xrightarrow{g \text{ اکیداً نزولی}} g(x_۱)>g(x_۲) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(g(x_۱))<f(g(x_۲))$$
$$x_۱<x_۲ \Rightarrow fog(x_۱)<fog(x_۲) \Rightarrow fog \text{ اکیداً صعودی}$$
$$\text{می‌دانیم}: m^۲+۱>m^۲ \Rightarrow fog(m^۲+۱)>fog(m^۲) \Rightarrow -a+۴>۲a-۱$$
$$\Rightarrow ۴+۱>۲a+a \Rightarrow ۳a<۵ \Rightarrow \boxed{a<\frac{۵}{۳}}$$

۵.

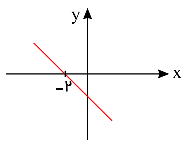
$$g(x)=\sqrt{(x^۲-۸۱)f(x)} \Rightarrow (x^۲-۸۱)f(x)\ge ۰$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-۲)=۰$ است، داریم:

برای $x<-۲$ تابع f مثبت است. $x<-۲ \Rightarrow f(x)>f(-۲) \Rightarrow f(x)>۰ \Rightarrow$

برای $x>-۲$ تابع f منفی است. $x>-۲ \Rightarrow f(x)<f(-۲) \Rightarrow f(x)<۰ \Rightarrow$

نمودار f تقریباً به‌صورت مقابل است.



$$x^۲-۸۱=۰ \Rightarrow x=\pm ۹$$

x		-۹		-۲		۹	
$x^۲-۸۱$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$f(x)$	$+$		$+$	۰	$-$		$-$
$(x^۲-۸۱)f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow x\le -۹ \text{ یا } -۲\le x\le ۹ \Rightarrow D_g=(-\infty,-۹]\cup[-۲,۹]$$

۶.

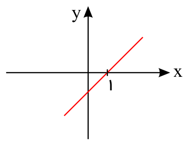
$$g(x)=\sqrt{(x^۲-۳x)f(x)} \Rightarrow (x^۲-۳x)f(x)\ge ۰$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(1)=0$ است، داریم:

برای $x<1$ تابع f منفی است. $x<1 \Rightarrow f(x)<f(1) \Rightarrow f(x)<0 \Rightarrow$

برای $x>1$ تابع f مثبت است. $x>1 \Rightarrow f(x)>f(1) \Rightarrow f(x)>0 \Rightarrow$

به‌طور تقریبی نمودار f به‌صورت مقابل است.



$$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0\,,\ x=3$$

x		0		1		3	
x^2-3x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x^2-3x)f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow 0\le x\le 1$ یا $x\ge 3 \Rightarrow D_g=[0,1]\cup[3,+\infty)$

۷ . نکته: اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(a)\le f(b)$ باشد، آنگاه $a\le b$.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-2|)-f(|x+1|)} \Rightarrow f(|x-2|)-f(|x+1|)\ge 0$$

$$\Rightarrow f(|x-2|)\ge f(|x+1|) \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } f} |x-2|\ge|x+1|$$

برای حل این‌گونه نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x-2)^2\ge(x+1)^2 \Rightarrow x^2-4x+4\ge x^2+2x+1 \Rightarrow 4-1\ge 2x+4x$$

$$\Rightarrow 6x\le 3 \Rightarrow x\le\frac{1}{2} \Rightarrow D_g=(-\infty,\frac{1}{2}]$$

۸ . نکته: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a)\le f(b)$ آنگاه $a\ge b$.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-3|)-f(|x+2|)} \Rightarrow f(|x-3|)-f(|x+2|)\ge 0$$

$$\Rightarrow f(|x-3|)\ge f(|x+2|) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} |x-3|\le|x+2|$$

$$(x-3)^2\le(x+2)^2 \Rightarrow x^2-6x+9\le x^2+4x+4 \Rightarrow 9-4\le 4x+6x$$

$$\Rightarrow 10x\ge 5 \Rightarrow x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow D_g=[\frac{1}{2},+\infty)$$

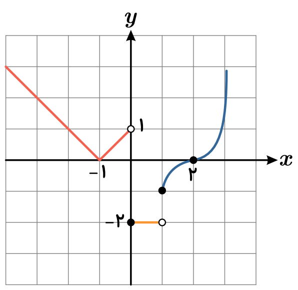
۹ .

$$f(x)=[-2x]+1$$
$$x_1<x_2 \Rightarrow -2x_1>-2x_2 \Rightarrow [-2x_1]\ge[-2x_2] \Rightarrow [-2x_1]+1\ge[-2x_2]+1$$
$\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$ نزولی

۱۰ .

اکیداً صعودی $[-1,0)\,,[1,+\infty)$

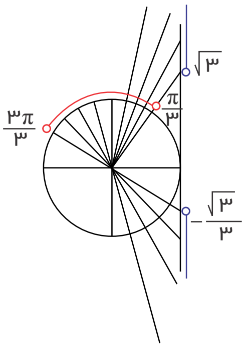
اکیداً نزولی $(-\infty,-1]$



۱۱ .

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل داریم:

$$\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \frac{\pi}{۳} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{۶}$$



$$\frac{\pi}{۳} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \tan\alpha > \sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad \tan\alpha < -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲m-۱}{۳} > \sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad \frac{۲m-۱}{۳} < -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲m-۱ > ۳\sqrt{۳} \quad \text{یا} \quad ۲m-۱ < -\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow m > \frac{۳\sqrt{۳}+۱}{۲} \quad \text{یا} \quad m < \frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۲.

نکته: n زوج $\rightarrow ۰ \le \sin^n u \le ۱$ و $۰ \le \cos^n u \le ۱$

نکته: n فرد $\rightarrow -۱ \le \sin^n u \le ۱$ و $-۱ \le \cos^n u \le ۱$

الف) $f(x) = ۲\sin^۴ x - ۵$

$$۰ \le \sin^۴ x \le ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰ \le ۲\sin^۴ x \le ۲ \Rightarrow ۰ - ۵ \le ۲\sin^۴ x - ۵ \le ۲ - ۵$$

$$\Rightarrow -۵ \le f(x) \le -۳ \Rightarrow min\ f = -۵ \quad \text{و} \quad max\ f = -۳$$

ب) $g(x) = -۳\sin^۵ ۲x + ۱۰$

$$-۱ \le \sin^۵ ۲x \le ۱ \xrightarrow{\times(-۳)} ۳ \ge -۳\sin^۵ ۲x \ge -۳ \Rightarrow -۳ + ۱۰ \le -۳\sin^۵ ۲x + ۱۰ \le ۳ + ۱۰$$

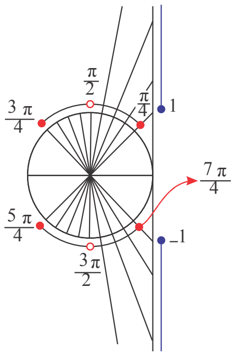
$$\Rightarrow ۷ \le g(x) \le ۱۳ \Rightarrow min\ g = ۷ \quad \text{و} \quad max\ g = ۱۳$$

۱۳.

$$f(x) = \sqrt{\tan^۲ x - ۱} \Rightarrow \tan^۲ x - ۱ \ge ۰ \Rightarrow \tan^۲ x \ge ۱ \Rightarrow |\tan x| \ge ۱$$

$$\Rightarrow \tan x \le -۱ \quad \text{یا} \quad \tan x \ge ۱$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.



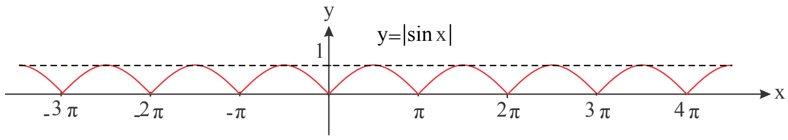
$$\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad \frac{۵\pi}{۴} \le x \le \frac{۷\pi}{۴} \quad \text{و} \quad x \ne \frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{۳\pi}{۲}$$

در حالت کلی داریم:

$$۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \le x \le ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴} \le x \le ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۴} \quad \text{و} \quad x \ne k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

۱۴. الف) با رسم $y = \sin x$ و قرینه کردن قسمت‌های زیر محور طول‌ها نسبت به این محور خواهیم داشت:

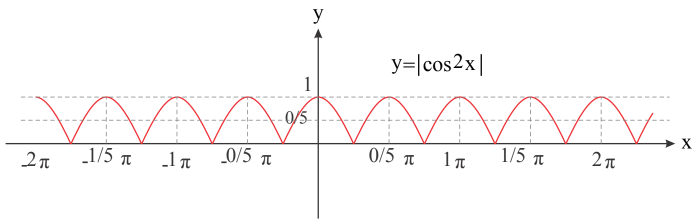
$$\begin{cases} T=\pi \\ \max=1 \\ \min=0 \end{cases}$$



ب) کافی است نمودار $y=\cos x$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{1}{2}$ ضرب کرده $(\cos 2x)$ و سپس نقاط با عرض منفی را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم $|\cos 2x|$ تا به نمودار زیر برسیم:

$x=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \cdots \rightarrow y=1 \Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} T=\frac{\pi}{2} \\ \max=1 \\ \min=0 \end{cases}$$



۱۵ .

$T=2\pi \qquad b=1 \qquad a=3 \qquad a+b=4$

۱۶ . می‌دانیم: $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$

$\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+2\cos(\frac{5\pi}{8}-x)=3 \Rightarrow \sin^2(x-\frac{\pi}{8})+2\sin(\frac{\pi}{2}-(\frac{5\pi}{8}-x))-3=0$

$\Rightarrow \sin^2(x-\frac{\pi}{8})+2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{8}+x)-3=0$

$\Rightarrow \sin^2(x-\frac{\pi}{8})+2\sin(x-\frac{\pi}{8})-3=0\ ,\ \sin(x-\frac{\pi}{8})=t$

$\Rightarrow t^2+2t-3=0 \Rightarrow t=1\ ,\ t=-3$

$\sin(x-\frac{\pi}{8})=-3$ غ ق ق $\ ,\ \sin(x-\frac{\pi}{8})=1 \Rightarrow x-\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{8}$

۱۷ .

نکته:

الف

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

به کمک رابطهٔ فوق ظاهر معادله را تغییر می‌دهیم:

$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=3\tan x$

1) $\tan x=0=\tan(0) \Rightarrow x=k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$

$$۲)\ \tan x \neq ۰ \Rightarrow \frac{۲\cancel{\tan x}}{۱-\tan^۲ x} = ۳\cancel{\tan x} \Rightarrow \frac{۲}{۱-\tan^۲ x} = ۳$$

$$\Rightarrow ۳ - ۳\tan^۲ x = ۲ \Rightarrow ۳\tan^۲ x - ۱ = ۰ \Rightarrow \tan^۲ x = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ \tan x = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan(\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ ۲)\ \tan x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ب

با مرتب کردن معادلهٔ داده‌شده داریم:

$$\tan^۳ x - \tan^۲ x - \tan x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\tan x = t}$$

$$t^۳ - t^۲ - t + ۱ = ۰ \Rightarrow t^۲(t-۱) - (t-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow (t-۱)(t^۲-۱) = ۰ \Rightarrow (t-۱)^۲(t+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱)\ t = \tan x = -۱ = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ ۲)\ t = \tan x = ۱ = \tan(\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

پ

با جای‌گذاری $\tan^۲ x = m$ در معادله داریم:

$$m^۲ - ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow (m+۱)(m-۳) = ۰ \Rightarrow$$

$۱)\ m = \tan^۲ x = -۱ \rightarrow$ امکان ندارد.

$$۲)\ \ m = \tan^۲ x = ۳ \Rightarrow \tan x = \pm\sqrt{۳} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{۳} = \tan(\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ \tan x = -\sqrt{۳} = \tan(\frac{-\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ت

نکته: $\cos ۳x = ۴\cos^۳ x - ۳\cos x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۳x = ۴\cos^۲ x \Rightarrow ۴\cos^۳ x - ۳\cos x = ۴\cos^۲ x$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۳ x - ۴\cos^۲ x - ۳\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱)\cos x = ۰ = \cos\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$۲)\ ۴\cos^۲ x - ۴\cos x - ۳ = ۰ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۱۶+۴۸=۶۴} = ۸$$

$$\Rightarrow \cos x = \begin{cases} \frac{۴+۸}{۸} = \frac{۳}{۲} \rightarrow \text{نا ممکن است.} \\ \frac{۴-۸}{۸} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{۲\pi}{۳}) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث

نکته: $\sin ۳x = ۳\sin x - ۴\sin^۳ x$ ، $۱ - \cos ۲x = ۲\sin^۲ x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

$$۳\sin x - ۴\sin^۳ x + ۲\cos ۲x = ۲ \Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۲ - ۲\cos ۲x = ۲(۱-\cos ۲x)\quad (*)$$

$$\Rightarrow ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = ۲\times ۲\sin^۲ x \Rightarrow ۴\sin^۳ x + ۴\sin^۲ x - ۳\sin x = ۰$$

$$\Rightarrow \sin x(۴\sin^۲ x + ۴\sin x - ۳) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱)\ \ \sin x = ۰ = \sin(۰) \Rightarrow x = k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$۲)\ ۴\sin^۲ x + ۴\sin x - ۳ = ۰ \Rightarrow (۲\sin x + ۳)(۲\sin x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-۳}{۲} \rightarrow \text{ناممکن است.} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin(\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = \begin{cases} ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \\ ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}\ \ (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

۱۸ . با توجه به فرض $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۴}$ از دو طرف تساوی تانژانت می‌گیریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=۱$$

با جایگذاری $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{۱}{۶}$ داریم:

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\frac{۱}{۶}}=۱\Rightarrow\tan\alpha+\tan\beta=\frac{۵}{۶}\Rightarrow\tan\beta=\frac{۵}{۶}-\tan\alpha\qquad(۱)$$

پس نتیجه (۱) را در عبارت $\tan\alpha\tan\beta=\frac{۱}{۶}$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\tan\alpha(\frac{۵}{۶}-\tan\alpha)=\frac{۱}{۶}\xrightarrow{\tan\alpha=m}\frac{۵}{۶}m-m^۲=\frac{۱}{۶}\xrightarrow{\times۶}۵m-۶m^۲=۱\Rightarrow۶m^۲-۵m+۱=۰\Rightarrow m=\frac{۵\pm۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow m=\tan\alpha=\begin{cases}\frac{۱}{۳}\Rightarrow\tan\beta=\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲}\Rightarrow\tan\beta=\frac{۱}{۳}\end{cases}\xrightarrow{\beta>\alpha}\tan\beta>\tan\alpha\Rightarrow\tan\beta=\frac{۱}{۲}\ ,\ \tan\alpha=\frac{۱}{۳}$$

۱۹ . ابتدا زاویهٔ ۲α را برحسب $\alpha+\beta$ و $\alpha-\beta$ می‌نویسیم:

$$۲\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\xrightarrow[\text{tan می‌گیریم}]{\text{از طرفین}}\tan۲\alpha=\tan((\alpha+\beta)+(\alpha-\beta))$$

$$\Rightarrow\tan۲\alpha=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{۱-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$$

$$\Rightarrow\tan۲\alpha=\frac{۳+۲}{۱-۳\times(+۲)}=\frac{۵}{-۵}=-۱$$

۲۰ . طبق فرض $\tan x\tan y=۳$ داریم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}=۳\Rightarrow\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=۳$$
$$\xrightarrow[\sin x\sin y=\frac{۳}{۴}]{\text{طبق فرض}}\frac{\frac{۳}{۴}}{\cos x\cos y}=۳\Rightarrow\cos x\cos y=\frac{۱}{۴}$$

با باز کردن عبارت $\cos(x-y)$ داریم:

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=۱$$

حال طبق رابطهٔ $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ داریم:

$$۱+\tan^۲(x-y)=\frac{۱}{\cos^۲(x-y)}\Rightarrow۱+\tan^۲(x-y)=۱\Rightarrow\tan(x-y)=۰$$

۲۱ .

الف

نکته: $\begin{cases}۱+\cos x=۲\cos^۲\frac{x}{۲}\\ \sin x=۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}\end{cases}$ بنابراین:

$$\frac{۱+\cos x}{\sin x}=\frac{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}$$

ب

می‌دانیم: $\begin{cases}\sin^۲x=\frac{۱-\cos۲x}{۲}\\ \cos^۲x=\frac{۱+\cos۲x}{۲}\end{cases}$ بنابراین:

$$\frac{۱+\cos x}{۱-\cos x}=\frac{۲\cos^۲(\frac{x}{۲})}{۲\sin^۲(\frac{x}{۲})}=\cot^۲(\frac{x}{۲})=\frac{۱}{\tan^۲(\frac{x}{۲})}$$

پ

نکته: $(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^۲=۱+\sin x$ بنابراین:

$$\frac{\sin x}{1+\sin x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}=\frac{2}{\frac{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}=\frac{2}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)}$$

$$=\frac{2}{(1+\frac{1}{\tan\frac{x}{2}})(1+\tan\frac{x}{2})}=\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}+1}$$

$$=\frac{2}{2+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+1}$$

۲۲ . با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:

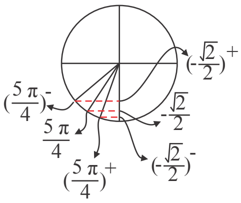
$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to(\frac{5\pi}{4})^-}\frac{x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\varepsilon)+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{-1+\sqrt{2\varepsilon}+1}$$

$$=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{+\sqrt{2\varepsilon}}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{0^+}=+\infty$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to(\frac{5\pi}{4})^+}\frac{x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\varepsilon)+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{-1-\sqrt{2\varepsilon}+1}$$

$$=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{-\sqrt{2\varepsilon}}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{0^-}=-\infty$$

$\Rightarrow$ پس تابع در این نقطه حد ندارد



توجه کنید که $\frac{5\pi}{4}-1$ عددی مثبت است.

۲۳ . با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$x\to\pi$

$$x-\pi=t\Rightarrow\begin{cases}x=\pi+t\\ t\to 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{1+\cos(\pi+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{1-\cos t}\times\frac{1+\cos t}{1+\cos t}$$

* با توجه به این نکته که وقتی $t\to 0$ میل کند، $sint\sim t$ داریم:

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t(1+\cos t)}{1-\cos^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t(1+\cos t)}{\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}\frac{-(1+\cos t)}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-1-\cos t}{\frac{\sin t}{t}\times t}=\lim_{t\to 0}\frac{-1-\cos t}{t}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1-\cos t}{t}=\frac{-2}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1-\cos t}{t}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

$\Rightarrow$ پس تابع در این نقطه حد ندارد

۲۴ .

با توجه به قاعده پرتوان داریم:

قاعدهٔ پرتوان : $ax^n + bx^{n-1} + \cdots x \xrightarrow{\sim} \pm\infty \; ax^n$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n + ۳x^۴ - x^۲ + ۱}{۲x^n - x^۴ + ۵} = \begin{cases} \xrightarrow{n<۴} \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x^۴}{-x^۴} = -۳ \\ \xrightarrow{n=۴} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۴ + ۳x^۴}{۲x^۴ - x^۴} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x^۴}{x^۴} = ۴ \\ \xrightarrow{n>۴} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{۲x^n} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۲۵ . حالت ۱ − مخرج ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$f(x) = \frac{x + ۲}{x^۲ + mx + ۶}$$

$$x^۲ + mx + ۶ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۲۴ = ۰ \Rightarrow m = \pm۲\sqrt{۶}$$

$$m = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow f(x) = \frac{x + ۲}{x^۲ + ۲\sqrt{۶}x + ۶} = \frac{x + ۲}{(x + \sqrt{۶})^۲}$$

فقط $x = -\sqrt{۶}$ مجانب قائم است.

$$m = -۲\sqrt{۶} \Rightarrow f(x) = \frac{x + ۲}{x^۲ - ۲\sqrt{۶}x + ۶} = \frac{x + ۲}{(x - \sqrt{۶})^۲}$$

فقط $x = \sqrt{۶}$ مجانب قائم است.

حالت ۲ : عبارت $x + ۲$ از صورت و مخرج ساده شود، یعنی مخرج بر $x + ۲$ بخش‌پذیر باشد.

$$x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow x^۲ + mx + ۶ = ۰ \Rightarrow ۴ - ۲m + ۶ = ۰ \Rightarrow m = ۵$$

$$f(x) = \frac{x + ۲}{x^۲ + ۵x + ۶} = \frac{x + ۲}{(x + ۲)(x + ۳)} = \frac{۱}{x + ۳}$$

فقط $x = -۳$ مجانب قائم است.

۲۶ . صورت کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x + ۱)(x + ۳)}{x^۲ + mx + ۹}$$

حالت ۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد.

$$x^۲ + mx + ۹ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۳۶ = ۰ \Rightarrow m = \pm۶$$

$$m = ۶ \Rightarrow f(x) = \frac{(x + ۱)(x + ۳)}{x^۲ + ۶x + ۹} = \frac{(x + ۱)(x + ۳)}{(x + ۳)^۲} = \frac{x + ۱}{x + ۳}$$

فقط $x = -۳$ مجانب قائم است. (که در این حالت بعد از ساده کردن کسر، ریشهٔ مخرج مضاعف نیست.)

$$m = -۶ \Rightarrow f(x) = \frac{(x + ۱)(x + ۳)}{x^۲ - ۶x + ۹} = \frac{(x + ۱)(x + ۳)}{(x - ۳)^۲}$$

فقط $x = ۳$ مجانب قائم است.

حالت ۲) مخرج بر $x + ۳$ بخش‌پذیر باشد

$$x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow x^۲ + mx + ۹ = ۰ \Rightarrow ۹ - ۳m + ۹ = ۰ \Rightarrow m = ۶$$

این حالت در بالا بررسی شده است.

حالت ۳) مخرج بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow x^۲+mx+۹=۰ \Rightarrow ۱-m+۹=۰ \Rightarrow m=۱۰$$

$$f(x)=\frac{(x+۱)(x+۳)}{x^۲+۱۰x+۹}=\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x+۱)(x+۹)}=\frac{x+۳}{x+۹}$$

فقط $x=-۹$ مجانب قائم است.

۲۷ .

$$f(x)=\frac{\tan x}{۲\sin x-۱}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{۲\sin x-۱}=\frac{\sin x}{\cos x(۲\sin x-۱)}$$

$$\cos x(۲\sin x-۱)=۰ \Rightarrow \cos x=۰\ ,\ \sin x=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{[۰,۲\pi]} x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} x=\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \xrightarrow{۰\le x\le ۲\pi} x=\frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

با توجه به این که هیچ‌کدام از مقادیر $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=\frac{۵\pi}{۶}$ صورت کسر یعنی $\sin x$ را صفر نمی‌کنند، پس همگی مجانب قائم هستند.

۲۸ . با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x \xrightarrow{\sim} \pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(mx^۳-(x-۱)^۳+x^۲+۲)=\lim_{x\to-\infty}(mx^۳-x^۳+۳x^۲-۳x+۱+x^۲+۲)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}((m-۱)x^۳+۴x^۲-۳x+۳)=+\infty$$

حالت ۱) $m=۱ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(۴x^۲-۳x+۳)=\lim_{x\to-\infty}۴x^۲=۴(-\infty)^۲=۴(+\infty)=+\infty$ قابل قبول

حالت ۲) $m\neq ۱ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}((m-۱)x^۳+۴x^۲-۳x+۳)=\lim_{x\to-\infty}(m-۱)x^۳=(m-۱)(-\infty)^۳$

$$\Rightarrow (m-۱)(-\infty)=+\infty \Rightarrow m-۱<۰ \Rightarrow m<۱$$

در کل باید $m\le ۱$ باشد.

۲۹ . با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x \xrightarrow{\sim} \pm\infty\ ax^n$ داریم:

$\lim\limits_{x\to -\infty} (x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ + mx^۳ - ۴x^۲ + ۲) = \lim\limits_{x\to -\infty} ((m+۱)x^۳ - x^۲ + ۳x + ۳) = +\infty$

۱ حالت) $m = -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} (-x^۲ + ۳x + ۳) = \lim\limits_{x\to -\infty} (-x^۲)$

$= -(-\infty)^۲ = -(+\infty) = -\infty$ غیر قابل قبول

۲ حالت) $m \neq -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} ((m+۱)x^۳ - x^۲ + ۳x + ۳) = \lim\limits_{x\to -\infty} (m+۱)x^۳$

$\Rightarrow (m+۱)(-\infty)^۳ = (m+۱)(-\infty) = +\infty \Rightarrow m+۱ < ۰ \Rightarrow m < -۱$

۳۰.

$\lim\limits_{x\to -\infty} mx^۲ + x^۲ + ۴x + ۴ - ۷x = \lim\limits_{x\to -\infty} ((m+۱)x^۲ - ۳x + ۴) = +\infty$

۱ حالت) $m = -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} (-۳x + ۴) = \lim\limits_{x\to -\infty} (-۳x) = -۳(-\infty) = +\infty$ قابل قبول است.

۲ حالت) $m \neq -۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} ((m+۱)x^۲ - ۳x + ۴) = \lim\limits_{x\to -\infty} (m+۱)x^۲ = (m+۱)(-\infty)^۲$

$\Rightarrow (m+۱)(+\infty) = +\infty \Rightarrow m+۱ > ۰ \Rightarrow m > -۱$

در کل باید $m \geq -۱$ باشد.

۳۱. با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots x \overset{\sim}{\longrightarrow} \pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{۲x^n + mx^۳ + x^۲ - ۱}{۴x^۳ + x^۲ - ۳} = -۲$$

۱ حالت) $n < ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{mx^۳}{۴x^۳} = \dfrac{m}{۴} = -۲ \Rightarrow m = -۸ \Rightarrow n < ۳\ ,\ m = -۸$ جواب

۲ حالت) $n = ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{۲x^۳ + mx^۳}{۴x^۳} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(۲+m)x^۳}{۴x^۳} = \dfrac{۲+m}{۴} = -۲$

$\Rightarrow ۲ + m = -۸ \Rightarrow m = -۱۰ \Rightarrow n = ۳\ ,\ m = -۱۰$ جواب

۳ حالت) $n > ۳ \Rightarrow \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{۲x^n}{۴x^۳} = \pm\infty \rightarrow$ غیرقابل‌قبول

۳۲. می‌دانیم $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{-۲x+۱}{x-۲} = -۲$، حال باید ببینیم $\dfrac{-۲x+۱}{x-۲}$ چگونه به -۲ میل می‌کند. برای این کار -۲ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to \pm\infty} [\frac{-۲x+۱}{x-۲}] = \lim_{x\to \pm\infty} [\frac{-۲x+۴-۳}{x-۲}] = \lim_{x\to \pm\infty} [\frac{-۲(x-۲)}{x-۲} + \frac{-۳}{x-۲}]$$

$$= \lim_{x\to \pm\infty} [-۲ + \frac{-۳}{x-۲}]$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} [-۲ + \dfrac{-۳}{x-۲}] = [-۲ + \dfrac{-۳}{+\infty}] = [-۲ + ۰^-] = [-۲ - \varepsilon] = -۳ \\ \lim\limits_{x\to -\infty} [-۲ + \dfrac{-۳}{x-۲}] = [-۲ + \dfrac{-۳}{-\infty}] = [-۲ + ۰^+] = [-۲ + \varepsilon] = -۲ \end{cases}$$

۳۳.

الف

می‌دانیم $\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x+۱}{x+۲}=۳$ ، حال باید ببینیم کسر $\frac{۳x+۱}{x+۲}$ چگونه به ۳ میل می‌کند، برای این کار ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۱}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۶-۵}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳(x+۲)}{x+۲}-\frac{۵}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[۳-\frac{۵}{x+۲}]$$

$$=[۳-\frac{۵}{+\infty}]=[۳-۰^{+}]=[۳-\varepsilon]=۲$$

ب

می‌دانیم $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۲}{x-۱}=۱$ ، حال باید ببینیم کسر $\frac{x+۲}{x-۱}$ چگونه به یک میل می‌کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty}[\frac{x+۲}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{x-۱+۳}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{x-۱}{x-۱}+\frac{۳}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[۱+\frac{۳}{x-۱}]$$

$$=[۱+\frac{۳}{-\infty}]=[۱+۰^{-}]=[۱-\varepsilon]=۰$$

.۳۴

$$cx+d=۰\Rightarrow d=-۲c \qquad (-۱,۰)\Rightarrow\frac{-a+b}{-c+d}=۰\Rightarrow a=b$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{cx}=۱\Rightarrow a=c \qquad f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$$

۳۵ .

$$f(x)=\sin x,\ f(\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}$$

$$f'(\frac{\pi}{۶})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{۶}}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin x-\frac{۱}{۲}}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x-\frac{\pi}{۶}=t\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}+t,t\to۰$$

$$f'(\frac{\pi}{۶})=\lim_{t\to۰}\frac{\sin(\frac{\pi}{۶}+t)-\frac{۱}{۲}}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\sin\frac{\pi}{۶}\cos t+\cos\frac{\pi}{۶}\sin t-\frac{۱}{۲}}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{\frac{۱}{۲}\cos t-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{-\frac{۱}{۲}(۱-cost)+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{-\frac{۱}{۲}\times۲\sin^{۲}(\frac{t}{۲})+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin t}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{-(\frac{\sin\frac{t}{۲}}{\frac{t}{۲}}\times\frac{t}{۲})^{۲}}{t}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\lim_{t\to۰}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{-\frac{۱}{۴}t^{۲}}{t}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۱=\lim_{t\to۰}(-\frac{۱}{۴}t)+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

.۳۶

$$f(x)=\cos x$$

$$f'(\frac{\pi}{۶})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{۶}}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

با استفاده از تغییر متغیر مقابل داریم:

$$x-\frac{\pi}{۶}=t\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}+t,t\to۰$$

$$f'(\frac{\pi}{۶})=\lim_{t\to۰}\frac{\cos(\frac{\pi}{۶}+t)-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\cos\frac{\pi}{۶}\cos t-\sin\frac{\pi}{۶}\sin t-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos t - \frac{۱}{۲}\sin t - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t} = \lim_{t\to ۰} \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱-\cos t) - \frac{۱}{۲}\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۲\sin^{۲}(\frac{t}{۲})}{t} + \lim_{t\to ۰} \frac{-\frac{۱}{۲}\sin t}{t} = \lim_{t\to ۰} \frac{-\sqrt{۳}\left(\frac{sin\frac{t}{۲}}{\frac{t}{۲}} \times \frac{t}{۲}\right)^{۲}}{t} - \frac{۱}{۲}\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{t}$$

$$= \lim_{t\to ۰} \frac{-\sqrt{۳}\times \frac{۱}{۴}t^{۲}}{t} - \frac{۱}{۲}\times ۱ = \lim_{t\to ۰}(-\frac{\sqrt{۳}}{۴}t) - \frac{۱}{۲} = ۰ - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

.۳۷

$$f(x) = \sqrt{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}},\ f(۰) = ۰$$

$$f'(۰) = \lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}}}{x}\times\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}}$$

$$= \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-۱+x^{۲}}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}} = \lim_{x\to ۰}\frac{|x|}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}}$$

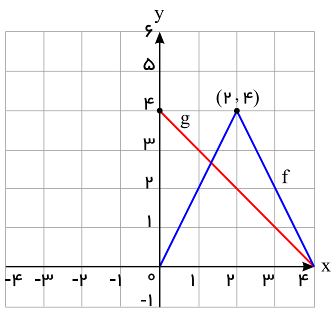
$$f'_{-}(۰) = \lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}} = \lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}}$$

$$f'_{+}(۰) = \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}} = \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

تابع در $x = ۰$ مشتق‌ناپذیر است.

.۳۸

الف) توابع f و g توابع خطی هستند و باید ضابطهٔ آنها را بیابیم. برای تابع f باید خط گذرنده از نقاط $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(۲,۴)$ و $(۴,۰)$ را بیابیم.



$$(۰,۰),(۲,۴) \Rightarrow m = \frac{۴-۰}{۲-۰} = ۲ \Rightarrow y-۰ = ۲(x-۰) \Rightarrow y = ۲x$$

$$(۲,۴),(۴,۰) \Rightarrow m = \frac{۴-۰}{۲-۴} = -۲ \Rightarrow y-۰ = -۲(x-۴) \Rightarrow y = -۲x+۸$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & ۰\le x\le ۲ \\ -۲x+۸ & ۲ < x \le ۴ \end{cases}$$

برای یافتن تابع g باید خط گذرنده از نقاط $(۰,۴)$ و $(۴,۰)$ را بیابیم.

$$(۰,۴),(۴,۰) \Rightarrow m = \frac{۴-۰}{۰-۴} = -۱ \Rightarrow y-۰ = -۱(x-۴) \Rightarrow y = -x+۴ \Rightarrow g(x) = -x+۴$$

$$h(x) = f(x)\cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$$

$f(۱) = ۲\ ,\ ۰ < x < ۲ \Rightarrow f(x) = ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲ \Rightarrow f'(۱) = ۲$

$g(۱) = ۳\ ,\ g(x) = -x + ۴ \Rightarrow g'(x) = -۱ \Rightarrow g'(۱) = -۱$

$h'(۱) = f'(۱) \cdot g(۱) + g'(۱) \cdot f(۱) = ۲ \times ۳ + (-۱) \times ۲ = ۶ - ۲ = ۴$

تابع f در $x = ۲$ مشتق‌ناپذیر است زیرا:

$$f'_-(۲) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲x - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲(x - ۲)}{x - ۲} = ۲$$

$$f'_+(۲) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{-۲x + ۸ - ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{-۲(x - ۲)}{x - ۲} = -۲$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست بنابراین $h'(۲)$ نیز وجود ندارد.

$f(۳) = ۲\ ,\ f'(۳) = -۲\ ,\ g(۳) = ۱\ ,\ g'(۳) = -۱$

$h'(۳) = f'(۳) \cdot g(۳) + g'(۳) \cdot f(۳) = -۲ \times ۱ + (-۱) \times ۲ = -۴$

ب)

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^۲(x)}$$

$$k'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}$$

$$k'(۱) = \frac{۲ \times ۳ - (-۱) \times ۲}{۳^۲} = \frac{۶ + ۲}{۹} = \frac{۸}{۹}$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست پس $k'(۲)$ هم وجود ندارد.

$$k'(۳) = \frac{f'(۳)g(۳) - g'(۳)f(۳)}{g^۲(۳)} = \frac{(-۲) \times ۱ - (-۱) \times ۲}{۱^۲} = \frac{-۲ + ۲}{۱} = ۰$$

۳۹. گزینهٔ «۲»

$$۴f(a) = ۲ \Rightarrow f(a) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}\ ,\ f'(a) = ۲$$
$$(f^۲(x) + \frac{۱}{f(x)})' = ۲f(x)f'(x) - \frac{f'(x)}{f^۲(x)} \overset{x=a}{=} ۲f(a)f'(a) - \frac{f'(a)}{f^۲(a)} = \cancel{۲} \times \frac{۱}{\cancel{۲}} \times ۲ - \frac{۲}{(\frac{۱}{۲})^۲} = ۲ - ۸ = -۶$$

۴۰.

$y + ۵x = ۸ \Rightarrow y = -۵x + ۸ \Rightarrow$ شیب $= -۵$

$\Rightarrow$ شیب خط عمود $= \frac{۱}{۵} \Rightarrow$ شیب خط مماس بر منحنی داده‌شده $= \frac{۱}{۵}$

$$y = \frac{۲x + ۳}{۱ - x} \Rightarrow y' = \frac{۲(۱ - x) - (-۱)(۲x + ۳)}{(۱ - x)^۲} = \frac{۲ - ۲x + ۲x + ۳}{(۱ - x)^۲}$$
$$y' = \frac{۵}{(۱ - x)^۲} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow (۱ - x)^۲ = ۲۵ \Rightarrow ۱ - x = \pm ۵ \Rightarrow \begin{cases} x = -۴ \\ x = ۶ \end{cases}$$
$$x = -۴ \Rightarrow y = \frac{۲(-۴) + ۳}{۱ - (-۴)} = \frac{-۵}{۵} = -۱ \Rightarrow A(-۴, -۱)$$
$$x = ۶ \Rightarrow y = \frac{۲ \times ۶ + ۳}{۱ - ۶} = \frac{۱۵}{-۵} = -۳ \Rightarrow B(۶, -۳)$$

۴۱.

$$g(x)=x^{۳}+۱\Rightarrow g'(x)=۳x^{۲}$$

$$(fog)(x)=x^{۲}+۲\xrightarrow{\text{مشتق}}(fog)'(x)=۲x\Rightarrow g'(x)\cdot f'(g(x))=۲x$$

$$۳x^{۲}\times f'(x^{۳}+۱)=۲x\xrightarrow{x=-۱}۳f'(۰)=-۲\Rightarrow f'(۰)=-\frac{۲}{۳}$$

.۴۲

$$f(x)=\frac{x^{۲}}{x+۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(x+۱)-x^{۲}}{(x+۱)^{۲}}=\frac{x^{۲}+۲x}{(x+۱)^{۲}}$$

$$f''(x)=\frac{(۲x+۲)(x+۱)^{۲}-۲(x+۱)(x^{۲}+۲x)}{(x+۱)^{۴}}=\frac{(x+۱)((۲x+۲)(x+۱)-۲(x^{۲}+۲x))}{(x+۱)^{۴}}$$

$$f''(x)=\frac{(۲x+۲)(x+۱)-۲(x^{۲}+۲x)}{(x+۱)^{۳}}\Rightarrow f''(۱)=\frac{۴\times۲-۲\times۳}{۲^{۳}}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

.۴۳

$$f(x)=\sqrt{|x+۲|},f(-۲)=۰$$

$$f'(-۲)=\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)-f(-۲)}{x-(-۲)}=\lim_{x\to-۲}\frac{\sqrt{|x+۲|}-۰}{x+۲}\times\frac{\sqrt{|x+۲|}}{\sqrt{|x+۲|}}$$

$$=\lim_{x\to-۲}\frac{|x+۲|}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}$$

$$f'_{-}(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^{-}}\frac{-(x+۲)}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}=\lim_{x\to(-۲)^{-}}\frac{-۱}{\sqrt{|x+۲|}}=\frac{-۱}{۰^{+}}=-\infty$$

$$f'_{+}(-۲)=\lim_{x\to(-۲)^{+}}\frac{x+۲}{(x+۲)\sqrt{|x+۲|}}=\lim_{x\to(-۲)^{+}}\frac{۱}{\sqrt{|x+۲|}}=\frac{۱}{۰^{+}}=+\infty$$

تابع در $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

.۴۴

$$f(x)=\begin{cases}[x]\sin|x| & x<۰\\ x^{۲}(|x|+[x]) & x\geq۰\end{cases}\quad f(۰)=۰$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{[x]\sin|x|-۰}{x}=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{[x]\sin(-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{-[x]\sin x}{x}=\lim_{x\to۰^{-}}-[x]\times۱=-\left[۰^{-}\right]=-(-۱)=۱$$

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{x^{۲}(|x|+[x])-۰}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰^{+}}x(|x|+[x])=۰$$

تابع در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

.۴۵

$$f(x)=\sin x\,|\cos x|\ \ ,\ \ f(\frac{\pi}{۲})=۰$$

$$f'(\frac{\pi}{۲})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۲})}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin x\,|\cos x|-۰}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin x\,|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}$$

$$x-\frac{\pi}{۲}=t\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}+t\ \ ,\ \ t\to۰$$

$$f'(\frac{\pi}{۲})=\lim_{t\to۰}\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+t)\left|\cos(\frac{\pi}{۲}+t)\right|}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\cos t\,|\sin t|}{t}$$

$$f'_{-}(\frac{\pi}{۲})=\lim_{t\to۰^{-}}\frac{\cos t|\sin t|}{t}=\lim_{t\to۰^{-}}\frac{\cos t(-\sin t)}{t}=\lim_{t\to۰^{-}}-\cos t\times\frac{\sin t}{t}$$

$$=\lim_{t\to۰^{-}}-\cos t\times۱=-۱$$

$$f'_{+}(\frac{\pi}{۲})=\lim_{t\to۰^{+}}\frac{\cos t|\sin t|}{t}=\lim_{t\to۰^{+}}\cos t\times\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to۰^{+}}\cos t\times۱=۱$$

تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ مشتق‌ناپذیر است.

۴۶. تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$f(x)=2x^2-|x|$

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-x & x\geq 0\\ 2x^2+x & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}4x-1 & x>0\\ 4x+1 & x<0\end{cases}$$

$f'_-(0)=4\times 0+1=1 \quad , \quad f'_+(0)=4\times 0-1=-1\Rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0)$

$x=0$ بحرانی است زیرا مشتق‌ناپذیر است.

$x>0\Rightarrow f'(x)=4x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ قابل قبول $\Rightarrow$ بحرانی است

$x<0\Rightarrow f'(x)=4x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{4}$ قابل قبول $\Rightarrow$ بحرانی است

تابع سه نقطهٔ بحرانی $x=0\ ,\ x=\frac{1}{4}\ ,\ x=-\frac{1}{4}$ دارد.

۴۷.

$$f(x)=x^2+|x+1|=\begin{cases}x^2+x+1 & x\geq -1\\ x^2-x-1 & x<-1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x+1 & x>-1\\ 2x-1 & x<-1\end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقطهٔ $x=-1$ به‌دست آوریم.

$f'_+(-1)=-1$

$f'_-(-1)=-3$

بنابراین در نقطهٔ $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست از طرفی ریشهٔ f' نقطهٔ $x=-\frac{1}{2}$ و نقاط بحرانی تابع‌اند با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه به سادگی مینیمم مطلق مشخص می‌شود.

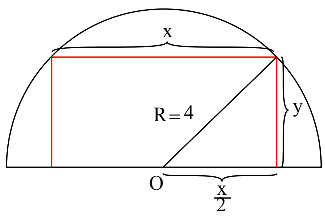
$f(-1)=1\rightarrow$ مینیمم مطلق

$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$f(-2)=4+1=5$

$f(2)=4+3=7\rightarrow$ ماکزیمم مطلق

۴۸.



$$(\frac{x}{2})^2+y^2=4^2\Rightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=16$$

$$y^2=16-\frac{x^2}{4}=\frac{64-x^2}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\sqrt{64-x^2}$$

$S=xy=x\times\frac{1}{2}\sqrt{64-x^2}\Rightarrow S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{64x^2-x^4}$

$y^2\geq 0\Rightarrow 16-\frac{x^2}{4}\geq 0\Rightarrow \frac{x^2}{4}\leq 16\Rightarrow x^2\leq 64\Rightarrow -8\leq x\leq 8 \quad (1)$

$x\geq 0\xrightarrow{(1)} 0\leq x\leq 8\Rightarrow S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{64x^2-x^4}$ دامنه $=[0,8]$

$$S'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۲۸x-۴x^{۳}}{۲\sqrt{۶۴x^{۲}-x^{۴}}}=۰\Rightarrow ۱۲۸x-۴x^{۳}=۰\Rightarrow ۴x(۳۲-x^{۲})=۰$$

$$\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm۴\sqrt{۲}$$

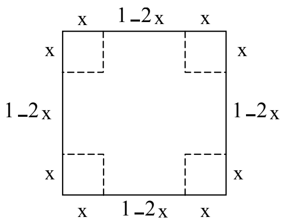
$$x=۰\Rightarrow S(۰)=۰\ ,\ x=۴\sqrt{۲}\Rightarrow S(۴\sqrt{۲})=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴\times ۳۲-۲۵۶\times ۴}=۱۶$$

$x=۸\Rightarrow S(۸)=۰$, مقدار ماکزیمم مساحت $=۱۶$

به‌ازای $x=۴\sqrt{۲}$، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را دارد. پس داریم:

$$x=۴\sqrt{۲}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-۳۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲}=\frac{۱}{۲}\times۴\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

۴۹ .



$\rightarrow V_{\text{جعبه}}=$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع

$$V=(۱-۲x)^{۲}\cdot x=(۱+۴x^{۲}-۴x)x=۴x^{۳}-۴x^{۲}+x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰}۱۲x^{۲}-۸x+۱=۰\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac=۶۴-۴۸=۱۶}\begin{cases}x=\dfrac{۸+۴}{۲۴}=\dfrac{۱}{۲}\ \text{غ ق ق}\\ x=\dfrac{۸-۴}{۲۴}=\dfrac{۱}{۶}\end{cases}$$

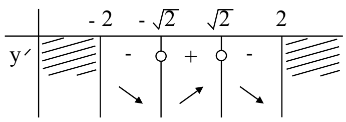
۵۰ . برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$، مشتق اول آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y=x\sqrt{۴-x^{۲}}$$

$$۴-x^{۲}\geq ۰\rightarrow x^{۲}\leq ۴\rightarrow |x|\leq ۲\rightarrow -۲\leq x\leq ۲\rightarrow\ D=[-۲,۲]$$

$$y'=\sqrt{۴-x^{۲}}+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^{۲}}}\times x$$

$$\rightarrow y'=\frac{۴-x^{۲}-x^{۲}}{\sqrt{۴-x^{۲}}}=۰\rightarrow ۲x^{۲}=۴\rightarrow x^{۲}=۲\rightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$



تابع در بازهٔ $[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ صعودی است و در بازه‌های $[-۲,-\sqrt{۲}]$ و $[\sqrt{۲},۲]$ نزولی است.

۵۱ .

$$f(۰)=۰\ ,\quad \text{حد چپ}\ =\lim_{x\to ۰^{-}}(x^{۳}+۳x^{۲})=۰\ ,\quad \text{حد راست}\ =\lim_{x\to ۰^{+}}(x^{۲}-x)=۰$$

تابع در $x=۰$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}۳x^{۲}+۶x & x<۰\Rightarrow ۳x^{۲}+۶x=۰\Rightarrow ۳x(x+۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-۲\\ ۲x-۶ & x>۰\Rightarrow ۲x-۶=۰\Rightarrow x=۳\end{cases}$$

$f'_{-}(۰)=۰\ ,\ f'_{+}(۰)=۰-۶=-۶\Rightarrow f'_{-}(۰)\neq f'_{+}(۰)\Rightarrow$ مشتق ناپذیر $x=۰$

نقاط بحرانی عبارتند از: $x = ۰$, $x = -۲$, $x = ۳$

x	$-\infty$		-۲		۰		۳		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$x = -۲ \Rightarrow f(-۲) = -۸ + ۱۲ = ۴$, $x = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۹ - ۱۸ = -۹$

نقطهٔ $(-۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ $(۳, -۹)$ مینیمم نسبی است.

۵۲ .

$f'(۲) = ۰ \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx \rightarrow b = -۳$
$f(۲) = ۱ \rightarrow ۸ + (-۱۲) + d = ۱ \rightarrow d = ۵$

۵۳ .

الف) ۴

ب) بالا

۵۴ . برای تعیین جهت تقعر و نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$، باید مشتق دوم آن را تعیین علامت کنیم.

$f(x) = x^۳ + ۹x^۲ + ۱ \rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۱۸x$
$\rightarrow f''(x) = ۶x + ۱۸ = ۰ \rightarrow x = -۳$

	$-\infty$		-3		$+\infty$
y''		$-$	۰	$+$	
y		$\cap$		$\cup$	

نقطه‌ی $I = (-۳, ۱)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع است.

۵۵ . تابع f روی R پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ + ۱۲}$$

$$f'(x) = \frac{۲x(x^۲ + ۱۲) - ۲x \times x^۲}{(x^۲ + ۱۲)^۲} = \frac{۲۴x}{(x^۲ + ۱۲)^۲}$$

$$f''(x) = \frac{۲۴(x^۲ + ۱۲)^۲ - ۲ \times ۲x(x^۲ + ۱۲)^۲ \times ۲۴x}{(x^۲ + ۱۲)^۴} = \frac{(x^۲ + ۱۲)(۲۴x^۲ + ۲۴ \times ۱۲ - ۴x \times ۲۴x)}{(x^۲ + ۱۲)^۴}$$

$$f''(x) = \frac{۲۴x^۲ + ۲۸۸ - ۹۶x^۲}{(x^۲ + ۱۲)^۳} = \frac{۲۸۸ - ۷۲x^۲}{(x^۲ + ۱۲)^۳} = \frac{۷۲(۴ - x^۲)}{(x^۲ + ۱۲)^۳}$$

علامت f'' فقط به‌صورت آن بستگی دارد زیرا مخرج آن عبارتی همواره مثبت است.

$۴ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x)=\frac{72(4-x^2)}{(x^2+12)^3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

نقاط $x=\pm 2$ نقاط عطف تابع هستند.

۵۶ . تابع f در کل R پیوسته است.

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x\times x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2\times 2x(x^2+1)(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)\left((4x^3+6x)(x^2+1)-4x(x^4+3x^2)\right)}{(x^2+1)^4}=\frac{4x^5+4x^3+6x^3+6x-4x^5-12x^3}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow 2x(3-x^2)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=\pm\sqrt{3}$$

عطف f'' فقط به‌صورت آن بستگی دارد زیرا مخرج عبارتی همواره مثبت است.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)=\frac{6x-2x^3}{(x^2+1)^3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\smile$		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

نقاط $x=0$ و $x=\pm\sqrt{3}$ نقاط عطف تابع هستند.

۵۷ .

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ نقطهٔ عطف $A(1,3)$

$$f(1)=3 \Rightarrow \frac{a+b}{2}=3 \Rightarrow a+b=6$$

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-2x(ax+b)}{(x^2+1)^2}=\frac{ax^2+a-2ax^2-2bx}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2ax-2b)(x^2+1)^2-2\times 2x(x^2+1)(-ax^2-2bx+a)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)\left((-2ax-2b)(x^2+1)-4x(-ax^2-2bx+a)\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(-2ax-2b)(x^2+1)-4x(-ax^2-2bx+a)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f''(1)=0$$

$\Rightarrow (-۲a - ۲b) \times ۲ - ۴(-a - ۲b + a) = ۰ \Rightarrow -۴a - ۴b + ۸b = ۰$

$\Rightarrow -۴a + ۴b = ۰ \Rightarrow b = a \Rightarrow a + b = ۶ \Rightarrow ۲a = ۶ \Rightarrow a = b = ۳$

۵۸ . در تابع درجهٔ سوم مرکز تقارن همان نقطهٔ عطف تابع است.

$f(x) = ax^۳ + bx^۲ + c$ نقطهٔ عطف $A(۱, -۱) \Rightarrow f(۱) = -۱ \Rightarrow a + b + c = -۱ \quad (۱)$

$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx \Rightarrow f''(x) = ۶ax + ۲b \Rightarrow f''(۱) = ۰ \Rightarrow ۶a + ۲b = ۰ \Rightarrow b = -۳a \quad (۲)$

$x + ۳y = ۷ \Rightarrow ۳y = -x + ۷ \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x + \frac{۷}{۳} \Rightarrow$ شیب $= -\frac{۱}{۳}$

$\Rightarrow$ شیب مماس در عطف $= ۳ \Rightarrow f'(۱) = ۳ \Rightarrow ۳a + ۲b = ۳ \quad (۳)$

$(۲)\ ,\ (۳) \Rightarrow ۳a + ۲(-۳a) = ۳ \Rightarrow ۳a - ۶a = ۳ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow b = ۳$

$(۱) \Rightarrow -۱ + ۳ + c = -۱ \Rightarrow c = -۳$

۵۹ .

$$y = mx + n + \frac{x^۲ - ۱}{x + ۲} = \frac{(x + ۲)(mx + n) + x^۲ - ۱}{x + ۲}$$

$$y = \frac{mx^۲ + nx + ۲mx + ۲n + x^۲ - ۱}{x + ۲} = \frac{(m + ۱)x^۲ + (n + ۲m)x + ۲n - ۱}{x + ۲}$$

$$m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = -۱ \Rightarrow y = \frac{(n - ۲)x + ۲n - ۱}{x + ۲}$$

$$x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \quad , \quad y = \frac{n - ۲}{۱} = n - ۲$$

مرکز تقارن $= (-۲, n - ۲) \quad , \quad y = x \Rightarrow n - ۲ = -۲ \Rightarrow n = ۰$

۶۰ .

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$
$$f(-۱) = ۰ \Rightarrow \frac{-a + b}{-c + d} = ۰ \Rightarrow -a + b = ۰ \Rightarrow a = b$$

طول نقطهٔ تقاطع مجانب‌ها برابر با مجانب قائم و عرض این نقطه برابر با مجانب افقی است. پس داریم:

نقطهٔ تقاطع مجانب‌ها $(۲, ۱) \Rightarrow$ **مجانب قائم:** $x = ۲$ **مجانب افقی:** $y = ۱$

$$cx + d = ۰ \Rightarrow x = -\frac{d}{c} = ۲ \Rightarrow d = -۲c$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a}{c} = ۱ \Rightarrow a = c$$

$d = -۲c \xrightarrow{c=a} d = -۲a$

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{ax+a}{ax-۲a} = \dfrac{a(x+۱)}{a(x-۲)} = \dfrac{x+۱}{x-۲}$