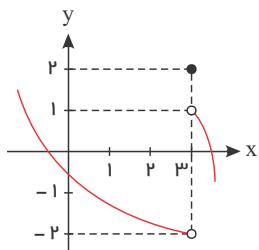


فصل ششم: حد و پیوستگی

درس اول: فرآیندهای حدی بررسی حد روی نمودارها و اشکال هندسی

۱- شکل مقابل نمودار تابع f است، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3)$ را بدست آورید.

متوسط - منتهی - ۱۳۹۷



سخت - گل واژه - ۱۳۹۸

۲- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \geq 1 \\ 4 - x^2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x = 1$ بررسی کنید.

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۳- تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه ۲ تعریف نشده باشد. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

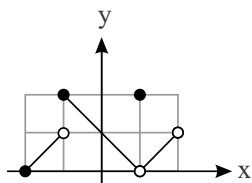
۴- تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه ۳ حد نداشته باشد. $f(3) = 1$

متوسط- تمرین های کتاب- ۱۴۰۲

۵- مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه ۲ مساوی ۱- باشد.

متوسط- تمرین های کتاب- ۱۴۰۲

۶- برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟



متوسط- تمرین های کتاب- ۱۴۰۲

(الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

(ب) $f(1) = 2$

(ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

(پ) $f(2) = 1$

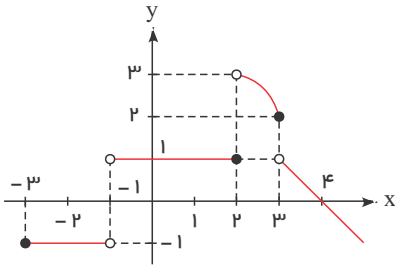
(ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

(ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

(ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.

(چ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۷ - نمودار تابع f بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

چ) $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x)$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$

خ) $f(-3)$

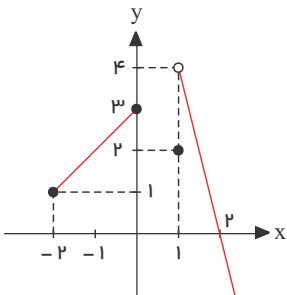
د) $f(2)$

ذ) $f(3)$

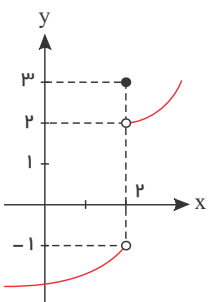
ر) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ز) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x)$

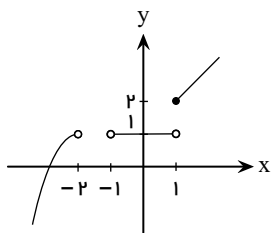
متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۸ - با کمک نمودار زیر مقدار عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + 2f(1)$ را بدست آورید.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۹ - شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2)$ را محاسبه کنید.

متوسط - گل واژه - ۱۳۹۸



۱۰ - با توجه به نمودار داده شده، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

متوسط - گل واژه - ۱۳۹۸

الف حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ برابر ۲ است.

متوسط - گل واژه - ۱۳۹۸

ب حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ برابر ۱ است.

متوسط - گل واژه - ۱۳۹۸

پ حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ برابر ۲ است.

متوسط - گل واژه - ۱۳۹۸

ت حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ برابر ۱ است.

بررسی حد در توابع چند ضابطه ای

۱۱ - تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 2 \\ ax^2 + 3bx + 1, & x < 2 \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ باشد حاصل $a + b$ را بدست آورید.

سخت - منتا - ۱۳۹۷

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۱۲ - اگر $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ موجود است؟

۱۳ - تابع $f(x) = \begin{cases} (a-1)x + 5, & x > -2 \\ x^2 + 2b, & x < -2 \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow (-4)} f(x) = 8$ باشد، a و b را بدست آورید.

سخت - منتا - ۱۳۹۷

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۱۴- اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1, & x < 1 \\ x^2 + 2a, & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

سخت - منتهای ۱۳۹۷

۱۵- اگر در تابع $f(x) = \begin{cases} x - a & x \geq 1 \\ x^2 + 2a & x < 1 \end{cases}$ مقدار حد راست در $x = 1$ ، نصف حد چپ در این نقطه باشد، a را بدست آورید.

۱۶- توابع زیر را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ دهید:

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 2x + 1 \quad (x \neq 2), \quad h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

الف) مقادیر $f(2)$ ، $h(2)$ و $g(2)$ را در صورت وجود به دست آورید.

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۱۷- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ -2x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۱۸- آیا حد تابع زیر در $x = 2$ موجود است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x > 2 \\ -2 & x = 2 \\ x - 3 & x < 2 \end{cases}$$

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۱۹- در تابع $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$ اختلاف حد چپ و راست تابع را در نقطه $x = 0$ بدست آورید.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۲۰- تابع $f(x) = \begin{cases} (a+2)x-3, & x > 2 \\ -x^2+1, & x \leq 2 \end{cases}$ مفروض است، اگر تابع f در $x=2$ دارای حد باشد، مقدار a را بدست آورید.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۲۱- اگر $f(x) = \sqrt{8+2x}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow (-4)} f(x)$ را بدست آورید.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۲۲- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < -2 \\ 1-2x, & x \geq -2 \end{cases}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x)$ را بدست آورید.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۲۳- اگر $f(x) = \sqrt{x-5}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ را محاسبه کنید.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۲۴- آیا تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x=3$ حد دارد؟

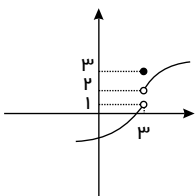
متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۲۵- در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x)$ را بدست آورید.

درس دوم : محاسبه ی حد توابع قضایای حد

۲۶- با توجه به شکل، حاصل عبارت روبه رو را تعیین کنید.

سخت - گل واژه - ۱۳۹۸



$$A = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 5} + \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{xf(x)}{x + f(x)}$$

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۲۷- در هر یک از حالت های زیر دربارهٔ حد تابع $f + g$ چه می توان گفت؟
 الف) اگر توابع f و g هیچ کدام در نقطه ای مانند a حد نداشته باشند.
 ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۲۸- دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

متوسط - منّا - ۱۳۹۷

۲۹- اگر تابع f در $x = 3$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 5$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را بدست آورید.

۳۰- حدهای زیر را بدست آورید.

الف) متوسط - منّا - ۱۳۹۷ $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + [x])$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] + 1}{3x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (3[x] - x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - [x]}{2[x]}$

سخت - گل واژه - ۱۳۹۸

۳۱- هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] + |x|}{x + 1}$$

سخت - گل واژه - ۱۳۹۸

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3}{|[x] + [-x]|}$$

سخت - گل واژه - ۱۳۹۸

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

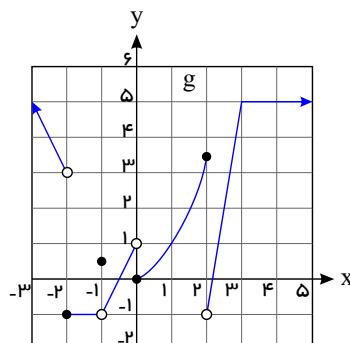
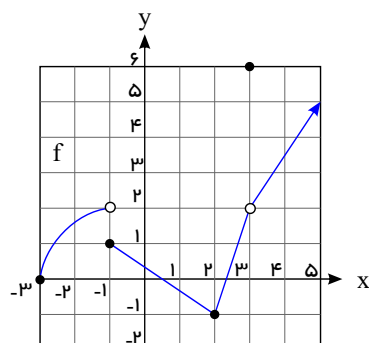
۳۲- اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x]$

ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x]$

پ) $\lim_{x \rightarrow m} [x]$

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۳۳- با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x))$ ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x))$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x))$

چ) $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^4$ ح) $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x))^2$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ د) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x))$

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۳۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x))$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - 5h(x)}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^5$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{h(x)}$

متوسط - منتهی - ۱۳۹۷
الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 1}{3 - \sin x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2} (\sin x + \cos x)^3$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \cos x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x) \times \tan^2 x$

۳۵- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۳۶- اگر $\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = 4$ ، $\lim_{x \rightarrow (-1)} g(x) = 2$ باشند، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2f(x) - 3g(x)}{(g(x))^2 + 6x^3}$ را بدست آورید.

۳۷- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) متوسط - منتهای ۱۳۹۷ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos^3 x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (3 \sin x - 1)$

ج) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x - 2}{3 + 5 \cos x}$

چ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 4 \sin x \cdot \cos x$

۳۸- حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 4}$ متوسط - منتهای ۱۳۹۷

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)} (2x^2 + 5x)(6x - 1)$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - |x|}{|x| + 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|x^2 - 1|}{|x| + 4}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-6}}{x+3}$

چ) $\lim_{x \rightarrow 5} (2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+4}-1)$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 + 5x + 8}{x^2 + 2}$

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۳۹- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$ باشد، حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + h(x))$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) - h(x) + 3g(x))$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5f(x)}{2g(x) - 4h(x)} \right)$

رفع ابهام از صفر صفرم

۴۰- حاصل حدهای زیر را بیابید.

سخت - منتهای ۱۳۹۷
 الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x - 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

۴۱- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

سخت- منتهای ۱۳۹۷

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$

۴۲- حاصل حدهای زیر را بیابید.

سخت- منما- ۱۳۹۷

الف) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 8x + 7}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8}$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x}$

۴۳- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

سخت- منما- ۱۳۹۷

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1}$

۴۴- نمودار دو تابع $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ و $g(x) = 1$ را رسم کنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

متوسط- تمرین های کتاب- ۱۴۰۲

درس سوم : پیوستگی پیوستگی در نقطه

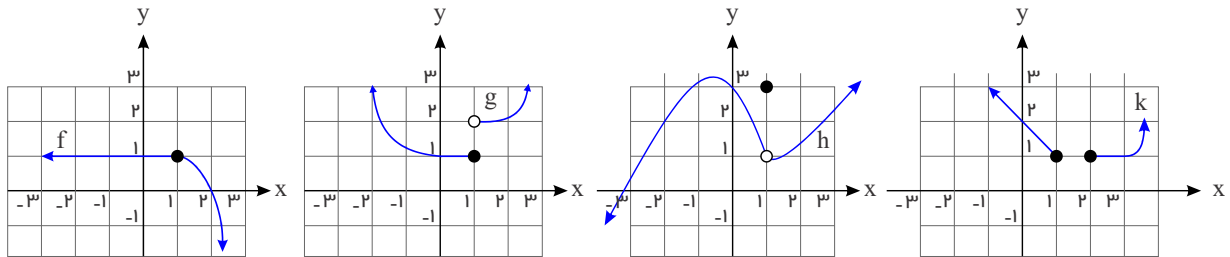
۴۵- تابعی مثال بنویسید که حد آن در نقطه $x = 1$ مساوی ۱- باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید. متوسط- تمرین های کتاب- ۱۴۰۲

سخت- منتا- ۱۳۹۷

۴۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}, & x > 0 \\ a \sin(x + \frac{\pi}{6}), & x \leq 0 \end{cases}$ به ازای چه مقداری از a در $x = 0$ پیوسته است؟

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۴۷ - کدام یک از توابع زیر در $x = 1$ پیوسته است؟



۴۸ - پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

متوسط - منته - ۱۳۹۷

۴۹ - مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2[x], & x > 1 \\ a + 3, & x = 1 \\ bx + 6, & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

سخت - منته - ۱۳۹۷

۵۰ - مقدار a را طوری بدست آورید که تابع زیر در نقطه $x = 3$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

سخت - منته - ۱۳۹۷

۵۱ - اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

سخت - منتهای ۱۳۹۷

۵۲- اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+|x-2|}{x-1} & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد، a را بدست آورید.

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۵۳- با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$ ، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۵۴- توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ را در نظر می گیریم. پیوستگی این تابع ها را در $x = 3$ بررسی کنید.

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۵۵- به ازای چه مقداری از a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & , 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & , 6 < x \end{cases}$ در نقطه $x = 6$ پیوسته است؟

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۵۶- مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع $f(x) = \begin{cases} 2 \cos x + a & , x < 0 \\ -2 & , x = 0 \\ 3x + 2b & , x > 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۵۷- مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & , x < 2 \\ 7 & , x = 2 \\ 2x + 3b & , x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۵۸- در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3, & x > 1 \\ 5, & x = 1 \\ -2x + b, & x < 1 \end{cases}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۵۹- اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x], & x < 2 \\ a, & x = 2 \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۶۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin x + 2 \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ چه نوع پیوستگی دارد؟

۶۱- با توجه به نمودار زیر، پیوستگی تابع را در نقاط خواسته شده بررسی کنید.

الف) $x = -2$

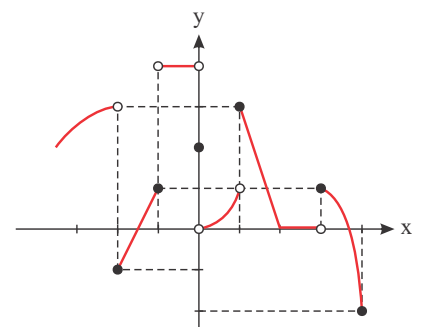
ب) $x = -1$

پ) $x = 0$

ت) $x = 1$

ث) $x = 2$

ج) $x = 3$



متوسط - منتهای ۱۳۹۷

۶۲- پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} & x > 3 \\ 2 & x = 3 \\ 5x - 13 & x < 3 \end{cases}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 3$ بررسی کنید. در مورد پیوستگی تابع f در سایر نقاط چه می‌توان گفت؟

سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

پیوستگی در بازه

متوسط- منّا- ۱۳۹۷

۶۳- با رسم نمودار تابع $f(x) = [x - 1]$ مشخص کنید که این تابع در چه بازه یا نقاطی پیوسته یا ناپیوسته است؟

متوسط- منّا- ۱۳۹۷

۶۴- هر یک از توابع زیر در چه بازه‌ای پیوسته هستند؟

الف) $f(x) = x^3 - 5x$

ب) $g(x) = \sin x$

پ) $h(x) = \log x$

ت) $k(x) = \sqrt{x - 6}$

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۶۵- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x+2 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

متوسط - منته - ۱۳۹۷

۶۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2ax+b, & x > 2 \\ 5, & x = 2 \\ x^2+bx-a, & x < 2 \end{cases}$ پیوسته باشد، a و b را بدست آورید.

متوسط - منته - ۱۳۹۷

۶۷- مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x < 4 \\ 9, & x = 4 \\ 3x+b, & x > 4 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

۶۸- در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می گیرد. روش های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی تواند اندازه گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش ها استفاده از تابع $f(t) = \begin{cases} 6t+4 & 0 \leq t < 1 \\ 2t+10 & 1 \leq t \leq 10 \end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می شود:

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

$$\text{سال} \quad \frac{1}{2} = \frac{6}{12} \rightarrow 6 \text{ ماه} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 7$$

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید.

ب) آیا f در بازه $[0, 10]$ پیوسته است؟

متوسط - تمرین های کتاب - ۱۴۰۲

۶۹- با توجه به توابع f و g و h با ضابطه های داده شده، به سوالات پاسخ دهید.

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 2x + 1 \quad x \neq 2, \quad h(x) = \begin{cases} 2 + x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$$f(2) = \quad, \quad g(2) = \quad, \quad h(2) =$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) =$$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید:

پ) کدام تابع در $x = 2$ پیوسته است؟

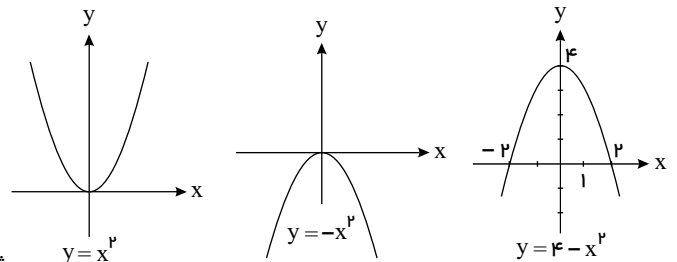
متوسط - گل واژه - ۱۳۹۸

۷۰- تابع $y = [x]$ بر بازه $[1, k]$ پیوسته است. حداکثر مقدار k را تعیین کنید.

پاسخنامه تشریحی

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2, f(3) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(3) = 1 + (-2) + 2 = 1$$

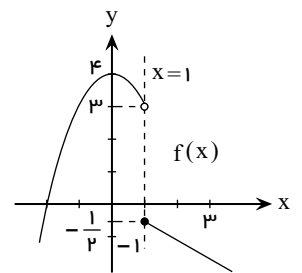
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 4 - x^2 & x < 1 \end{cases}$$



شرط وجود حد در نقطه $x = 1$ آن است که: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

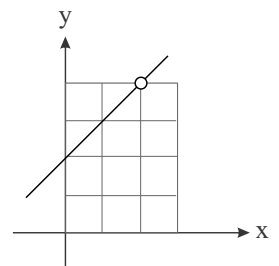
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{1}$$

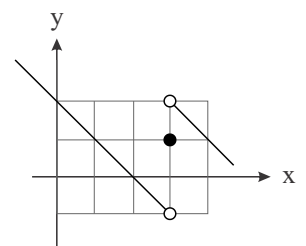


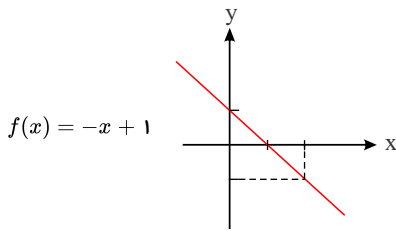
چون حد چپ و راست برابر نیستند، تابع در نقطه $x = 1$ حد ندارد.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$



$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x < 3 \\ 1 & x = 3 \\ -x + 5 & x > 3 \end{cases}$$





- ۶

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ (نادرست است زیرا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$)

پ) $f(2) = 1$ (نادرست است زیرا این حد وجود ندارد)

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ نادرست

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد درست

ب) $f(1) = 2$ درست

ت) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ درست

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ درست

ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد درست

۷ - نمودار تابع f بصورت زیر رسم شده است، حدهای خواسته شده را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$

ث) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -1$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -1$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ وجود ندارد

خ) $f(-3) = -1$

د) $f(2) = 1$

ذ) $f(3) = 2$

ر) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

ز) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = -1$

- ۸

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3, f(1) = 2$

$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + 2f(1) = 4 - 4(3) + 2(2) = -4$

- ۹

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1, f(2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2) = 2 + (-1) + 3 = 4$

- ۱۰

درست

الف

درست

ب

پ

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ حد ندارد

نادرست؛ چون مقادیر حد چپ و حد راست در نقطه با هم برابر نیستند، لذا تابع در این نقطه حد ندارد، یعنی:

ت

نادرست؛ چون تابع به ازای مقادیر بزرگتر از $2 - (-2)^+$ تعریف نشده است، پس تابع در این نقطه حد ندارد.

- ۱۱

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = a(2) + b = 2a + b = 5$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 3bx + 1) = a(2)^2 + 3b(2) + 1 = 4a + 6b + 1 = 7$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 4a + 6b = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a - b = -5 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases}$$

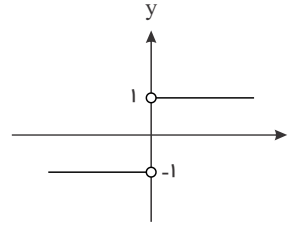
$$2b = -2 \rightarrow b = -1$$

$$\rightarrow 2a - 1 = 5 \rightarrow 2a = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow a + b = 2$$

- ۱۲

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$



- ۱۳

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)} (a-1)x + 5 = (a-1)(-1) + 5 = -a + 6 \rightarrow -a + 6 = 2 \rightarrow a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow (-4)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-4)} x^2 + 2b = (-4)^2 + 2b = 16 + 2b \rightarrow 16 + 2b = 8 \rightarrow 2b = -8 \rightarrow b = -4$$

- ۱۴

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2a = (1)^2 + 2a = 1 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax - 1 = a(1) - 1 = a - 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1 \rightarrow 2 + a = -1 \rightarrow a = -3$$

- ۱۵

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - a) = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2a) = (1)^2 + 2a = 1 + 2a$$

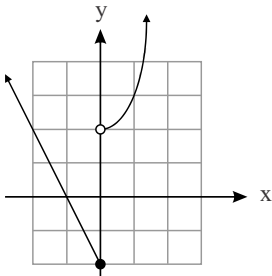
$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow 1 - a = \frac{1}{2}(1 + 2a) \rightarrow 2 - 2a = 1 + 2a \rightarrow 1 = 4a \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

- ۱۶

$$\text{الف) } f(2) = 5, \quad h(2) = 3, \quad g(2) = \text{وجود ندارد}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$$

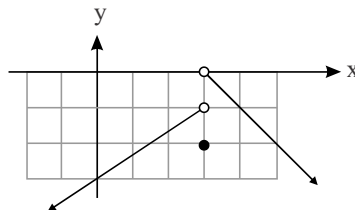
- ۱۷



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

- ۱۸

ابتدا نمودار تابع را رسم می کنیم و داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

- ۱۹

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3 - x) = 3 - 0 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = (0)^2 - 1 = -1$$

$$| \text{حد چپ} - \text{حد راست} | = | 3 - (-1) | = 4$$

- ۲۰

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (a + 2)x - 3 = (a + 2)(2) - 3 = 2a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 1) = -(2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \rightarrow 2a + 1 = -3 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow \boxed{a = -2}$$

- ۲۱

$$1 + 2x \geq 0 \rightarrow 2x \geq -1 \rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \rightarrow D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \sqrt{1 + 2x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \sqrt{1 + 2x} = \text{وجود ندارد}$$

- ۲۲

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (1 - 2x) = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

- ۲۳

$$x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \rightarrow D_f = [5, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x - 5} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{x - 5} = \text{وجود ندارد}$$

- ۲۴

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} [3^+] = 3, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = [3^-] = 2$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \rightarrow \text{تابع } f(x) \text{ در } x = 3 \text{ حد ندارد}$$

- ۲۵

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = -1 + (-1) = -2$$

- ۲۶

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 5} + \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{xf(x)}{x + f(x)}$$

$$A = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 5)} + \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} xf(x)}{\lim_{x \rightarrow 3^-} (x + f(x))}$$

$$A = \sqrt{3^2 - 5} + \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} x \times \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3^-} x + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)}$$

$$A = 2 + \frac{3 \times 1}{3 + 1} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

۲۷ - الف - دقیقاً نمی‌توان گفت که $f + g$ در $x = a$ حد دارد یا ندارد.ب - حد تابع $f + g$ در $x = a$ وجود ندارد.

- ۲۸

$$f(x) = x + 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$

$$g(x) = 5x - 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4$$

- ۲۹

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (2f(x) - 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + 1)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 1}{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) + 1} = 5$$

$$\rightarrow 2 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - 1 = 5 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) + 5 \rightarrow -6 = 3 \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$$

- ۳۰

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 2 + [2^-] = 2 + 1 = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] + 1}{3x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] + 1}{\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x} = \frac{[2^+] + 1}{3(2)} = \frac{2 + 1}{6} = \frac{1}{2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (3[x] - x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3[x] - \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 3[1^-] - 1 = 3(0) - 1 = -1$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - [x]}{2[x]} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} x - [x]}{\lim_{x \rightarrow 3^-} 2[x]} = \frac{3 - [3^-]}{2[3^-]} = \frac{3 - 2}{2(2)} = \frac{1}{4}$

- ۳۱

الف

$$x \rightarrow \circ^+ : x > \circ \rightarrow [x] = \circ, x \rightarrow \circ^- : x < \circ \rightarrow [x] = -1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{[x] + |x|}{x + 1} &= \frac{\circ + \circ}{\circ + 1} = \circ \\ \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{[x] + |x|}{x + 1} &= \frac{-1 + \circ}{\circ + 1} = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{حد ندارد.}$$

ب

$$x \rightarrow \circ^- : x < \circ \rightarrow [x] = -1$$

$$x \rightarrow \circ^- : x < \circ \xrightarrow{\times -1} -x > \circ \rightarrow [-x] = \circ$$

$$\lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{-3}{|[x] + [-x]|} = \frac{-3}{|-1 + \circ|} = -3$$

- ۳۲

الف) $\lim_{x \rightarrow m^+} [x] = m$

ب) $\lim_{x \rightarrow m^-} [x] = m - 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow m} [x] = \text{وجود ندارد}$

- ۳۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{وجود ندارد}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$ ت) $\lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + g(x)) = 2 + 5 = 7$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} (f(x) + g(x)) = \text{وجود ندارد}$ $+(-1) = \text{وجود ندارد}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) + 5g(x)) = 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 5 \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2(-1) + 5(\text{وجود ندارد}) = \text{وجود ندارد}$

چ) $\lim_{x \rightarrow \circ} (f(x))^f = \left(\frac{1}{3}\right)^f = \frac{1}{81}$

ح) $\lim_{x \rightarrow \circ} (g(x))^2 = \text{وجود ندارد}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-1}{\text{وجود ندارد}} = \text{وجود ندارد}$

د) $\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) \cdot g(x)) = 5 \times 5 = 25$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3 + (-1) = 2$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} (h(x))^5 = (\lim_{x \rightarrow 2} h(x))^5 = (-1)^5 = -1$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{3}{0} = \text{وجود ندارد}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x) - 5h(x)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) - 5 \lim_{x \rightarrow 2} h(x)} = \frac{3 \times 3}{0 - 5 \times (-1)} = \frac{9}{0 + 5} = \frac{9}{5}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} h(x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + 1}{3 - \sin x} = \frac{2(1) + 1}{3 - 0} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} = \frac{2 \times 1 \times 0}{1 + (0)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2}(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \sqrt{2} (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \times 2 \sqrt{2} = 4$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + 2 \cos x}{2 \sin^2 x - \cos x} = \frac{(1)^2 + 2(0)}{2(1)^2 - (0)} = \frac{1 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (1 - \sin^2 x) \times \tan^2 x = \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{4} \right) \times \frac{3}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{2f(x) - 3g(x)}{(g(x))^2 + 6x^2} = \frac{2f(-1) - 3g(-1)}{(g(-1))^2 + 6(-1)^2} = \frac{8 - 6}{4 - 6} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - (1)^2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 - (-1)^2}{1 + (-1)} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})} (1 - \sin x) = 1 - (-1) = 2$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 - (1)^2}{1 - (1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \cos^2 x} = \frac{1 + 1}{1 + 1 + (1)^2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (3 \sin x - 1) = 3 \left(\frac{1}{2} \right) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x - 2}{3 + 5 \cos x} = \frac{2(0) - 2}{3 + 5(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \sin x \cdot \cos x = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

- ۳۸

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2 - 2x + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 4)} = \frac{3(1) - 1}{(1)^2 - 2(1) + 4} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-1)} (2x^2 + 5x)(6x - 1) &= \lim_{x \rightarrow (-1)} (2x^2 + 5x) \times \lim_{x \rightarrow (-1)} (6x - 1) \\ &= (2(-1)^2 + 5(-1)) \times (6(-1) - 1) = (2 - 5) \times (-7) = (-3) \times (-7) = 21 \end{aligned}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - |x|}{|x| + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow (-3)} x^2 - |x|}{\lim_{x \rightarrow (-3)} |x| + 1} = \frac{(-3)^2 - |-3|}{|-3| + 1} = \frac{9 - 3}{3 + 1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{|x^2 - 1|}{|x| + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow (-2)} |x^2 - 1|}{\lim_{x \rightarrow (-2)} |x| + 4} = \frac{|(-2)^2 - 1|}{|-2| + 4} = \frac{3}{2 + 4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x+2}}{\lim_{x \rightarrow 7} (x-4)} = \frac{\sqrt{7+2}}{7-4} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-6}}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x-6}}{\lim_{x \rightarrow 1} x+3} = \frac{\sqrt{2(1)-6}}{1+3} = \frac{\sqrt{-4}}{4} = \text{حد وجود ندارد}$$

$$\begin{aligned} \text{چ) } \lim_{x \rightarrow 5} (2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+4}-1) &= \lim_{x \rightarrow 5} (2\sqrt{x+1}) \times \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x+4}-1) \\ &= (2\sqrt{5+1})(\sqrt{9}-1) = (2\sqrt{6}+1)(2) = 4\sqrt{6}+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ح) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 + 5x + 8}{x^2 + 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow (-2)} (2x^2 + 5x + 8)}{\lim_{x \rightarrow (-2)} (x^2 + 2)} = \frac{2(-2)^2 + 5(-2) + 8}{(-2)^2 + 2} \\ &= \frac{8 - 10 + 8}{4 + 2} = \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

- ۳۹

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 - (-2) = 5$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + h(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -2 + 0 = -2$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } \lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) - h(x) + 3g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 1} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} h(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 3g(x) \\ &= 2(3) - 0 + 3(-2) = 6 - 0 - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5f(x)}{2g(x) - 4h(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 5f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} 2g(x) - \lim_{x \rightarrow 1} 4h(x)} = \frac{5 \times 3}{2(-2) - 4(0)} = \frac{15}{-4} = -\frac{15}{4}$$

- ۴۰

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2} &= \frac{(1)^2 - 3(1) + 2}{2(1) - 2} = \frac{0}{0} \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{2(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^2} &= \frac{4(0)^2}{2(0)^2 - (0)^2} = \frac{0}{0} \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(2-x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{2-x} = \frac{4}{2-0} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x - 1} = \frac{3(-1)^2 + 5(-1) + 2}{2(-1)^2 + (-1) - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(3x+2)}{(x+1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x+2}{2x-1} = \frac{3(-1)+2}{2(-1)-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 27}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(3)^2 - 27}{3^2 - 2(3) - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2+3x+9)}{(x+1)} = \frac{3^2+3(3)+9}{3+1} = \frac{27}{4}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{3(1)^2 + 4(1) - 3(1)^2 - 4}{(1)^2 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2(x-1) + 4(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x^2+4)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2+4}{x+2} = \frac{3(1)^2+4}{1+2} = \frac{7}{3}$$

- ۴۱

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{0}{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{-\sqrt{2}(\cos x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \frac{1-1}{(0)^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos) \cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{(1)^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{(0)^2}{1-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x} = \frac{2(\frac{1}{2})^2 - 1}{1 - 2(\frac{1}{2})} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{-(2 \sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x + 1}{-1} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

۷۰ سوال تشریحی ریاضی و حسابان یازدهم حد و پیوستگی

- ۴۲

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(-3)^2 - 9}{-3 + 3} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} = \lim_{x \rightarrow (-3)} (x-3) = -3-3 = -6$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5} = \frac{(1)^2 - 4(1) + 3}{(1)^2 + 4(1) - 5} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x+5} = \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 8x + 7} = \frac{(-1)^2 - 5(-1) - 6}{(-1)^2 + 8(-1) + 7} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x+7)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x-6}{x+7} = \frac{-1-6}{-1+7} = \frac{-7}{6}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 8} = \frac{(2)^2 - 2 - 2}{(2)^2 - 8} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+2x+4} = \frac{2+1}{2^2+2(2)+4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2+5x+6}{x^2+2x} = \frac{(-2)^2+5(-2)+6}{(-2)^2+2(-2)} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x+3}{x} = \frac{-2+3}{-2} = -\frac{1}{2}$$

- ۴۳

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2-8}{x^2-x-6} = \frac{2(-2)^2-8}{(-2)^2-(-2)-6} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x^2-4)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x-2)}{(x-3)} = \frac{2(-2-2)}{-2-3} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x^2-4x+3} = \frac{(1)^2-1}{(1)^2-4(1)+3} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-3} = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(-2)^2+(-2)-2}{(-2)^2+3(-2)+2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2-1}{-2+1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2+3x^2}{x^2-9} = \frac{(-3)^2+3(-3)^2}{(-3)^2-9} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2}{x-3} = \frac{(-3)^2}{-3-3} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{8x^2-2x-1} = \frac{4(\frac{1}{2})^2-1}{8(\frac{1}{2})^2-2(\frac{1}{2})-1} = \frac{0}{0}$$

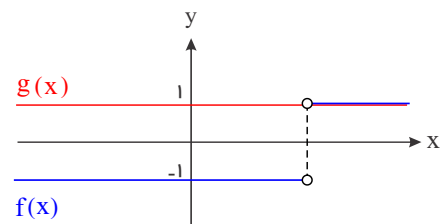
$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(4x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{2(\frac{1}{2})+1}{4(\frac{1}{2})+1} = \frac{2}{3}$$

- ۴۴

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}, \quad g(x) = 1$$

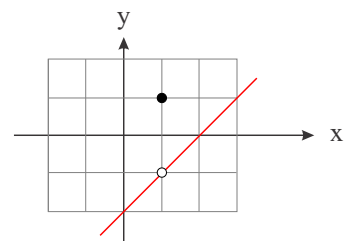
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 1$$

در نقاط $x > 3$ حد دو تابع با هم برابرند.

- ۴۵

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

همان طور که در شکل می بینیم وقتی $x \rightarrow 1$ حد تابع برابر ۱- خواهد بود.

- ۴۶

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^x x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^x x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^x x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a \sin\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{2}, \quad f(0) = \frac{a}{2}$$

$$\rightarrow \frac{a}{2} = 2 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

- ۴۷

تابع f در $x = 1$ پیوسته است.توابع g, h, k در $x = 1$ پیوسته نیستند.

- ۴۸

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 2) = -2(0^-) + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$f(0) = -2(0) + 2 = 0 - 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = (0^+)^2 + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \rightarrow \text{تابع } f \text{ در نقطه } x = 0 \text{ پیوسته است.}$$

تابع f در نقاط دیگر به جز $x = 0$ هم پیوسته است.

- ۴۹

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2[x] = (1)^2 + 2[1^+] = 1 + 2(1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} bx + 6 = b(1) + 6 = b + 6, \quad f(1) = a + 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + 3 = 3 \rightarrow a = 0 \\ b + 6 = a + 3 \rightarrow b + 6 = 3 \rightarrow \boxed{b = -3} \end{cases}$$

- ۵۰

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - ax = (3)^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$f(3) = 3^2 - a(3) = 9 - 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{-1} = -6$$

$$\rightarrow 9 - 3a = -6 \rightarrow 15 = 3a \rightarrow \boxed{a = 5}$$

- ۵۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1 + 1}{1 - 2} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$, \quad f(1) = a \rightarrow \boxed{a = -2}$$

- ۵۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + (-x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)}{(x - 1)} = -2$$

$$, \quad f(1) = a \rightarrow \boxed{a = -2}$$

۵۳ - تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح پیوسته نیست و در سایر نقاط پیوسته است.

- ۵۴

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6, \quad f(3) = 6$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ بنابراین تابع f در $x = 3$ پیوسته است.

$$g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6$$

وجود ندارد $g(3) = 6$ بنابراین تابع g در $x = 3$ پیوسته نیست.

- ۵۵

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} = a + \cos^2 \frac{\pi}{36} = a + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a + \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{4}}$$

- ۵۶

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 2b = 3(0) + 2b = 2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \cos x + a = 2(1) + a = 2 + a, \quad f(0) = -2$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2b = -2 \rightarrow \boxed{b = -1} \\ 2 + a = -2 \rightarrow \boxed{a = -4} \end{cases}$$

- ۵۷

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 3b = 2(2) + 3b = 4 + 3b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 1 = a(2) - 1 = 2a - 1, \quad f(2) = 7$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4 + 3b = 7 \rightarrow 3b = 3 \rightarrow \boxed{b = 1} \\ 2a - 1 = 7 \rightarrow 2a = 8 \rightarrow \boxed{a = 4} \end{cases}$$

- ۵۸

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + 3 = a(1)^2 + 3 = a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x + b = -2(1) + b = -2 + b, \quad f(1) = 5$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + 3 = 5 \rightarrow \boxed{a = 2} \\ -2 + b = 5 \rightarrow \boxed{b = 7} \end{cases}$$

- ۵۹

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x - [x] = 3(2) - [2^-] = 6 - 1 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 2 + 3 = 5, \quad f(2) = a$$

تابع f در $x = 2$ پیوسته است پس داریم: $\boxed{a = 5}$

- ۶۰

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x + 2 \cos x = 1 + 2(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} -\cos x = -(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

تابع f در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوستگی چپ دارد

- ۶۱

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -1, \quad f(-2) = -1$$

الف) $x = -2$

تابع f در $x = -2$ پیوستگی راست دارد

ب) $x = -1$ $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 4$, $f(-1) = 1$

تابع f در $x = -1$ پیوستگی چپ دارد

پ) $x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $f(0) = 2$

تابع f در $x = 0$ ناپیوسته است

ت) $x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$, $f(1) = 3$

تابع f در $x = 1$ پیوستگی راست دارد

ث) $x = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$, $f(2) = 0$

تابع f در $x = 2$ پیوسته است

ج) $x = 3$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$, $f(3) = 1$

تابع f در $x = 3$ پیوستگی راست دارد

۶۲- شرط پیوستگی در نقطه $x = 3$ آن است که:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2\sqrt{(x - 3)^2}}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x - 3)}{x - 3} = 2$$

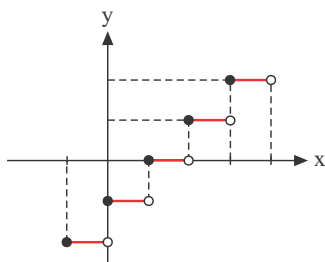
$x \rightarrow 3^+$ ، پس عبارت درون قدر مطلق و خود عبارت بدون قدر مطلق بیرون می آید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (5x - 13) = 2, f(3) = 2$$

بنابراین تابع در نقطه $x = 3$ پیوسته است. تابع f در سایر نقاط نیز پیوسته است. تابع در سایر نقاط نیز پیوسته است. چرا که نمودار تابع در هر یک از ضابطه‌ها پیوسته و بدون بریدگی یا قطع شدگی است.

- ۶۳

$$f(x) = [x - 1] \rightarrow f(x) = [x] - 1$$



تابع f در تمام نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است و فقط پیوستگی راست دارد.

تابع f در تمام نقاط $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ پیوسته است.

تابع f در تمام بازه‌های بصورت $(a, a + 1)$ به طوری که $a \in \mathbb{Z}$ باشد، پیوسته است.

تابع f در تمام بازه‌های بصورت $[a, a + 1)$ به طوری که $a \in \mathbb{Z}$ باشد، پیوسته است.

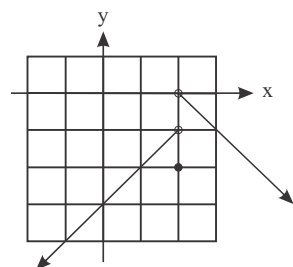
۶۴- الف) $f(x) = x^3 - 5x$ چون تابع چند جمله‌ای است و دامنه آن هم $\mathbb{R}$ می باشد پس تابع f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته می باشد.

ب) $g(x) = \sin x$ تابع مثلثاتی $\sin x$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}$ می باشد و تمام بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته می باشد.

پ) $h(x) = \log x$ تابع $\log x$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}^+$ می باشد و در تمام بازه $(0, +\infty)$ پیوسته می باشد.

ت) $k(x) = \sqrt{x - 6}$ تابع $\sqrt{x - 6}$ دارای دامنه‌ای بصورت $\mathbb{R}^{\geq 6}$ می باشد و در تمام بازه $[6, +\infty)$ پیوسته می باشد.

۶۵- تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است و در سایر نقاط پیوسته است.



- ۶۶

دو تابع چند جمله‌ای $2ax + b$ و $x^2 + bx - a$ در دامنه شان پیوسته هستند، برای پیوستگی تابع در $\mathbb{R}$ کافی است که تابع در $x = 2$ پیوسته باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2ax + b = 2a(2) + b = 4a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + bx - a = (2)^2 + b(2) - a = 2b - a + 4$$

$$f(2) = 5$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \\ 2b - a + 4 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \\ -a + 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \\ -4a + 8b = 4 \end{cases} +$$

$$9b = 9 \rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$\rightarrow 4a + 1 = 5 \rightarrow 4a = 4 \rightarrow \boxed{a = 1}$$

۶۷ - دو تابع چند جمله‌ای $ax + 1$ و $3x + b$ در دامنه‌شان پیوسته هستند، پس کافی است که تابع در $x = 4$ پیوسته باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 3x + b = 3(4) + b = 12 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} ax + 1 = a(4) + 1 = 4a + 1, f(4) = 9$$

$$\rightarrow \begin{cases} 12 + b = 9 \rightarrow \boxed{b = -3} \\ 4a + 1 = 9 \rightarrow 4a = 8 \rightarrow \boxed{a = 2} \end{cases}$$

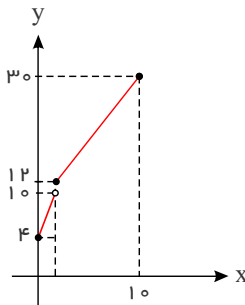
- ۶۸

$$f(t) = \begin{cases} 2t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 2t + 10 & 1 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

$$\text{الف) } f(2) = 2(2) + 10 = 14$$

$$f(5) = 2(5) + 10 = 20$$

ب) با توجه به نمودار رسم شده مشاهده می‌شود که تابع f در بازه $[0, 10]$ پیوسته نیست.



- ۶۹

$$\text{الف) } f(2) = 2(2) + 1 \rightarrow f(2) = 5$$

$$g(2) = \text{وجود ندارد.}$$

$$h(2) = 3$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2 + x) = 4$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \rightarrow \text{تابع } f \text{ در } x = 2 \text{ پیوسته است.}$$

$$\text{تابع } g \text{ در } x = 2 \text{ پیوسته نیست.} \rightarrow \text{وجود ندارد. } g(2)$$

$$\text{تابع } h \text{ در } x = 2 \text{ پیوسته نیست.} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \neq h(2)$$

۷۰ - می‌دانیم تابع $y = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، پس k باید طوری انتخاب شود تا در بازه موردنظر عدد صحیحی واقع نشود. بنابراین حداکثر مقدار k می‌تواند ۲ باشد.