

## ریاضی و آمار 2

### فصل دوم: تابع | توابع ثابت و همانی

۱- اگر  $f = \{(3, n^2 - 2n), (m, 8), (2n - 5, t), (4, 3m + 2)\}$  یک تابع ثابت سه عضوی باشد،  $m + n + t$  کدام است؟

سخت مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

- ① ۱۰      ② ۱۱      ③ ۱۲      ④ ۱۴

۲- اگر هر سه زوج مرتب  $(n^2 - 3n, 4)$  و  $(20, n^2 + n)$  و  $(1, m + n)$  بر روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند،  $m$  کدام است؟

سخت مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ① -۳      ② -۲      ③ ۲      ④ ۶

۳- اگر  $f = \{(m, 3m - 1), (-1, k^2 - k), (k^2 - k, 2)\}$  یک تابع ثابت باشد، حاصل ضرب اعضای دامنه  $f$  کدام است؟

متوسط مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

- ① ۲      ② -۲      ③ ۸      ④ -۸

۴- اگر  $f$  تابع ثابت و برای  $m, n, k \in \mathbb{N}$ ،  $f(kx) = (k^2 - 3)f(x)$  و تابع  $g$  به صورت زیر یک تابع همانی باشد، مقدار  $f(m)$  کدام است؟

سخت مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲  $g = \{(k, n^2 - 3n + 4), (2n, m^2 - 4m + 4), (f(n), n - 4)\}$

- ① -۴      ② -۳      ③ -۲      ④ صفر

۵- تابع  $f$ ، تابع ثابت و برای  $m, n \in \mathbb{N}$  داریم  $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$ . اگر دو زوج مرتب  $(2n^2 - 7n + 1, -f(m))$  و  $(mf(n), n^2 - 4m + 6)$  روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار  $\left[\frac{mn}{5}\right]$  کدام است؟

متوسط مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ① ۴      ② ۳      ③ ۲      ④ ۱

۶- برای برخی مقادیر  $x$  زوج مرتب  $3x^2 - 17x + 10$  و  $f(x) + f(-x)$ ، روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم قرار دارد. اگر تابع  $f$  همانی با دامنه  $\mathbb{R}$  باشد، اختلاف مقادیر  $x$  کدام است؟

متوسط مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ①  $\frac{7}{3}$       ②  $\frac{10}{3}$       ③  $\frac{13}{3}$       ④  $\frac{17}{3}$



۷- اگر  $f(x) = (|a| - |b|)x$  تابع همانی،  $g(x) = (b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c$  تابعی ثابت و  $(f - g)(x) = x + 5$  باشند، چند مقدار برای  $ac$  وجود دارد؟  
 سخت‌مرجع: سراسری-۱۴۰۱

- ① ۱      ② ۲      ③ ۳      ④ ۴

۸- رابطه  $f = \{(m + 3n, 2t^2), (-2, n^2 + 2n), (1 - 3m, 8)\}$  یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی است. اگر  $m$  و  $n$  عضوی از اعداد طبیعی باشند، مجموع دو عضو دامنه چقدر است؟  
 سخت‌مرجع: خارج از کشور-۱۴۰۱

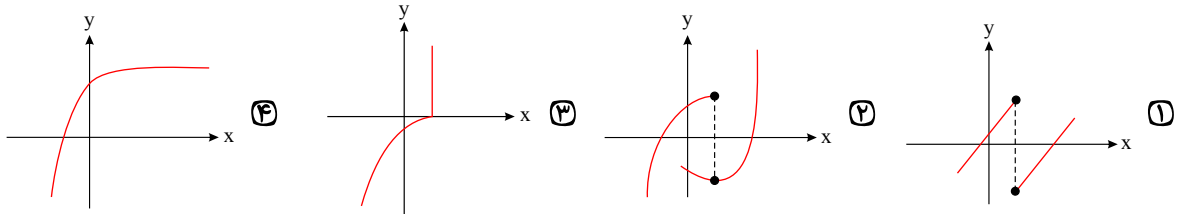
- ① ۲۳      ② ۲۱      ③ ۵      ④ ۳

## ریاضی و آمار ۱

### فصل دوم: تابع مفهوم تابع و انواع نمایش آن

۹- کدام نمودار، نمایش یک تابع  $y = f(x)$  است؟

آسان‌مرجع: خارج از کشور-۱۳۹۸



۱۰- اگر رابطه  $\{(3, a + 2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a - b)\}$  یک تابع باشد،  $a^2 - b^2$  کدام است؟ متوسط‌مرجع: سراسری-۱۳۹۸

- ① ۳      ② ۴      ③ ۵      ④ ۶

۱۱- فرض کنید رابطه  $f$  به صورت  $f = \{(a, a^2); a = 0, 1, 2\} \cup \{(a, a + b) | a, b \in \{0, 1, 2\}\}$  توصیف شده باشد. تعداد عناصر  $f$  کدام است؟ آسان‌مرجع: سراسری-۱۴۰۰

- ① ۸      ② ۹      ③ ۱۰      ④ ۱۲

۱۲- رابطه  $f = \{(a, x + y), (b, m^2), (a, m^2 - 1), (b, x - y), (a, 4)\}$  یک تابع است. مقدار  $x^2 + y^2$  کدام است؟ متوسط‌مرجع: سراسری-۱۴۰۲

- ① ۲٫۵      ② ۲۰٫۵      ③ ۲۴      ④ ۴۲

۱۳- اگر  $f = \{(1, x - 2y), (2, 3), (9, 5), (1, -7), (9, x + y)\}$  یک تابع باشد، مقدار  $x^2 + y^2$  چند برابر  $x - 4y$  است؟ متوسط‌مرجع: سراسری-۱۴۰۱

- ① ۲      ② ۱      ③ -۱      ④ -۲



ضابطه جبری تابع

آسان مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۵

۱۴- اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 7}$  باشد،  $f(4) - f(2\sqrt{2})$  کدام است؟

- ① ۱      ②  $\sqrt{2}$       ③ ۲      ④ ۳

سخت مرجع: سراسری- ۱۳۹۰

۱۵- اگر  $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 3}$  باشد، مقدار  $f(2 - \sqrt{3})$  کدام است؟

- ①  $1 - \sqrt{3}$       ②  $-2 + \sqrt{3}$       ③  $\sqrt{3}$       ④  $1 + \sqrt{3}$

متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۹۲

۱۶- در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 8x + 7}$ ، مقدار  $f(2 - \sqrt{3})$  کدام است؟

- ① ۱      ② ۲      ③ ۳      ④ ۶

سخت مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۰

۱۷- اگر  $f(x) = x + \frac{2}{x}$  باشد، مقدار  $f(1 + \sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

- ① -۲      ② -۱      ③ ۱      ④ ۲

متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۹۱

۱۸- در تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  حاصل  $f(1 + \sqrt{2}) - f(2)$  کدام است؟

- ① ۱      ② ۲      ③ ۳      ④ ۴

متوسط مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱۹- اگر  $f(x) = (2 - x)|x| + x + \sqrt{2}$ ، مقدار  $f(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

- ① ۱      ② ۲      ③  $1 + \sqrt{2}$       ④  $2\sqrt{2}$

متوسط مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۴

۲۰- اگر  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + |x|$  باشد،  $f(2 - \sqrt{5})$  کدام است؟

- ① ۰٫۲۵      ② ۰٫۵      ③ ۰٫۷۵      ④ ۱٫۲۵

متوسط مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۳

۲۱- اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$  باشد،  $f(3 + 2\sqrt{6})$  کدام است؟

- ① ۴      ② ۵      ③  $2 + \sqrt{6}$       ④ ۶

سخت مرجع: خارج از کشور- ۱۳۸۹

۲۲- اگر  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ، آن گاه  $f(x + 2) - f(x - 2)$  کدام است؟

- ①  $4(x - 3)$       ②  $4(x - 2)$       ③  $4(2x - 1)$       ④  $4(2x - 3)$

آسان مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۱

۲۳- اگر  $f(x) = |3x - 5|$  و  $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 2}$ ، مقدار  $f(\frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2})$  چه قدر است؟

- ① ۲      ② ۳      ③ ۴      ④ ۵

متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۹۴

۲۴- اگر  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + |2x|$  باشد،  $f(2\sqrt{2} - 3)$  کدام است؟

- ①  $-\frac{1}{3}$       ②  $-\frac{2}{3}$       ③  $\frac{1}{3}$       ④  $\frac{2}{3}$

متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۸۹

۲۵- اگر  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$ ، آن گاه  $f(2x + 1) + \frac{1}{3}f(0)$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{x^2 + x}$       ②  $\frac{1}{x^2 - x}$       ③  $\frac{2}{x^2 + x}$       ④  $\frac{2}{x^2 - x}$



۲۶- سه نفر می‌خواهند زمین مستطیل‌شکلی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و حصارکشی کنند. به طوری که یک حصار مشترک بین دو قسمت کشیده شود. اگر کمترین حصارکشی ۱۹۰ متر باشد، ضابطه جبری مساحت زمین کدام است؟

متوسط مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

$$S(x) = 190x - x^2 \text{ و } 0 < x < 95 \quad (2) \quad S(x) = 95x - 2x^2 \text{ و } 0 < x < 47,5 \quad (1)$$

$$S(x) = 190x - x^2 \text{ و } 0 < x < 47,5 \quad (4) \quad S(x) = 95x - 2x^2 \text{ و } 0 < x < 95 \quad (3)$$

متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۹۵

۲۷- اگر  $f(x) = |2x - 5|$  باشد، مقدار  $f(2 + \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2})$  کدام است؟

$$2\sqrt{2} + 2 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 4\sqrt{2} - 4 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۹۳

۲۸- اگر  $f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x - 2}$  باشد،  $f(1 - \sqrt{2})$  کدام است؟

$$1 + \sqrt{2} \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad \sqrt{2} \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۲۹- تابع خطی  $f(x) = mx + h$  در هیچ نقطه‌ای با خط  $3x - 2y = b$  برخورد ندارد. اگر  $f(2) = 2a - 1$  و  $f(1 - a) = 2$  باشد، مقدار  $f(-6)$  کدام است؟

سخت مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

$$8 \quad (4) \quad 11 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 5 \quad (1)$$

## ریاضی و آمار 2

### فصل دوم: تابع | توابع پلکانی

متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۳۰- در تابع  $f(x) = [x + \frac{3}{2}] - [-x]$  مقدار  $f(\frac{9}{4}) + f(-\frac{1}{2})$  کدام است؟ ( [ ]، [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$7 \quad (4) \quad 6 \quad (3) \quad 5 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

متوسط مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۳۱- در تابع  $f(x) = 2[x] + [-x]$  مقدار  $f(\frac{3}{2}) + f(-\frac{1}{2})$  کدام است؟ ( [ ]، [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$1 \quad (4) \quad \text{صفر} \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad -2 \quad (1)$$

سخت مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۳۲- ضابطه تابع  $y = [-2x + |x|] + x$  در دامنه  $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$2x + \frac{1}{3} \quad (4) \quad x - 2 \quad (3) \quad x + 1 \quad (2) \quad -2x \quad (1)$$

آسان مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۳۳- اگر  $f(x) = [1 - \frac{x}{3}]$  باشد، مقدار  $f(\pi) + 2f(\pi) + f(0,7)$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

$$2 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad -2 \quad (1)$$

۳۴- فرض کنید  $f(x) = \frac{2x - 1}{[x] - \text{sign}(x)}$  بر مجموعه  $\{-2,5, 2,1, 0,8,4\}$  تعریف شده باشد. ماکزیمم عضو مجموعه برد تابع  $f$ ، کدام است؟

متوسط مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

$$4 \quad (4) \quad 3,2 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad \frac{7}{4} \quad (1)$$





متوسط مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۳۵- اگر  $f(x) = \begin{cases} |x| \operatorname{sign}(-x) & [x] \geq 0 \\ 2 - \operatorname{sign}(-x) & [x] < 0 \end{cases}$  باشد، حاصل  $f(\frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{3})$  کدام است؟

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $-\frac{1}{4}$       ③  $-\frac{5}{6}$       ④  $\frac{10}{3}$

۳۶- تابع  $f(x) = [x] + [-x]$  با دامنه  $-3 \leq x \leq 3$  و  $g$  تابع ثابت است. مقدار تابع  $\frac{g}{f}$  در چند نقطه صحیح در دامنه برابر ۳ است؟

آسان مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ① ۶      ② ۴      ③ ۲      ④ صفر

متوسط مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۳۷- اگر  $f(x) = [1 - 3x]$  باشد، مقدار  $f(-0.7) - f(-0.07)$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- ① صفر      ② ۶      ③ ۲      ④ ۱

متوسط مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۳۸- اگر  $f(x) = [1 - \frac{x}{2}]$  باشد، مقدار  $f(\sqrt{2}) + f(-\frac{3}{2})$  کدام است؟

- ① صفر      ② ۲      ③ -۱      ④ ۱

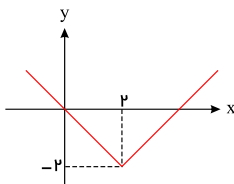
متوسط مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۳۹- اگر  $f(x) = [2x - 1]$  باشد، مقدار  $f(-\frac{3}{4}) + f(\frac{\sqrt{5}}{2})$  کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

- ① صفر      ② ۱      ③ -۱      ④ -۲

تابع قدر مطلق

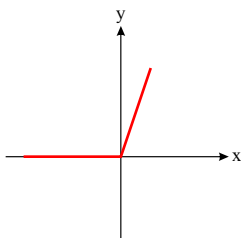
۴۰- شکل زیر، نمودار کدام تابع است؟



متوسط مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ①  $y = -|x - 2| + 2$       ②  $y = x + 2|x|$       ③  $y = 2x - |x|$       ④  $y = |x - 2| - 2$

۴۱- شکل روبه‌رو، نمودار کدام تابع است؟



سخت مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

- ①  $y = x - |x|$       ②  $y = x + |x|$       ③  $y = |x - 1| - 1$       ④  $y = 1 - |x - 1|$

سخت مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۴۲- دو تابع با ضابطه‌های  $f(x) = x^2 - 2x - 2$  و  $g(x) = \frac{|x|}{x}$  در نقطه‌ای با کدام طول، مشترک‌اند؟

- ①  $3 + \sqrt{2}$       ②  $-1 + \sqrt{2}$       ③  $3 + \sqrt{2}$       ④  $-1 + \sqrt{2}$

سخت مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۴۳- نمودار  $y = \frac{|2x|}{x}$  و خط  $y = 2x - 1$  در دو نقطه  $A$  و  $B$ ، مشترک‌اند. میانگین طول نقاط  $A$  و  $B$  کدام است؟

- ①  $-\frac{1}{2}$       ② صفر      ③  $\frac{1}{2}$       ④ ۱



۴۴- برای رسم نمودار تابع  $y = -\frac{1}{2}|2x + 1|$  به کمک نمودار  $y = |x|$  کدام مورد برای کامل کردن جمله زیر، مناسب است؟

متوسط مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

ابتدا نمودار تابع قدر مطلق را  $\frac{1}{2}$  واحد به سمت ..... جابه‌جا کرده و سپس قرینه آن را نسبت به محور ..... رسم می‌کنیم.

- ① چپ -  $x$  ها      ② راست -  $x$  ها      ③ بالا -  $y$  ها      ④ پایین -  $y$  ها

۴۵- نمودار  $y = x^2 + 6x + 5$  را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطه مشترک آن با نمودار  $y = |x|$  نامنفی باشد؟

سخت مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

- ① ۲      ② ۳      ③ ۴      ④ ۵

آسان مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۷

۴۶- اگر  $f(x) = x\sqrt{2+|x|}$  باشد، مقدار  $f(2) + 4f(-\frac{1}{4})$ ، کدام است؟

- ① ۲      ② ۲٫۵      ③ ۳      ④ ۳٫۵

متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۹۷

۴۷- اگر  $f(x) = \sqrt{|2x-5|}$  باشد، مقدار  $f(-2) + 2f(\frac{1}{4})$ ، کدام است؟

- ① ۴      ② ۵      ③ ۶      ④ ۷

## ریاضی و آمار 1

فصل دوم: تابع دامنه و برد توابع

۴۸- تابع  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$  را در دامنه  $\{-99, -98, \dots, 0, 1, \dots, 99, 100\}$  در نظر بگیرید. میانگین مقادیر برد تابع  $f$ ، کدام است؟

سخت مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

- ① ۳٫۵      ② ۳٫۷۵      ③ ۴      ④ ۴٫۲۵

۴۹- در یک تابع خطی  $f(1) = 5$  و  $f(3) = -9$  است. اگر  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$  دامنه تابع  $f$  باشد، برد این تابع کدام است؟

سخت مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

- ①  $\{x \in \mathbb{R} \mid -47 \leq y \leq 7\}$       ②  $\{x \in \mathbb{R} \mid -23 \leq y \leq 7\}$       ③  $\{x \in \mathbb{R} \mid -47 \leq y \leq -12\}$       ④  $\{x \in \mathbb{R} \mid -23 \leq y \leq 12\}$

تابع خطی و نمودار آن

۵۰- نمودار دو تابع خطی  $f(x) = -mx - h$  و  $g(x) = ax + h$  از نقطه  $(-2, 3)$  می‌گذرند. اگر  $f(-\frac{5}{4}) = g(-5)$  باشد، مقدار  $\frac{m}{a}$  کدام است؟

سخت مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

- ① ۲      ② ۳      ③ ۴      ④ ۵



۵۱- خط  $d$  از نقطه  $A(2, -3)$  موازی خط گذرا بر دو نقطه  $(0, 5)$  و  $(2, 1)$  رسم شده است. خط  $d$  محور  $y$ ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۷

- ① -۲      ② -۱      ③ ۱      ④ ۳

۵۲- خط  $d$  از نقطه  $A(-2, 4)$  و نقطه تلاقی دو خط به معادلات  $2x + y = 5$  و  $3y - x + 6 = 0$  گذشته است. شیب خط  $d$  کدام است؟

سخت‌مرجع: سراسری- ۱۳۹۷

- ① -۲      ② -۱      ③ ۱      ④ ۲

۵۳- دو نفر می‌خواهند زمینی به شکل مستطیل را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده و حصارکشی کنند، به طوری که یک حصار بین دو قسمت مشترک باشد.

متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

اگر کمترین طول حصارکشی ۲۱۰ متر باشد، ضابطهٔ جبری مساحت زمین کدام است؟

①  $S(x) = 210x - \frac{1}{2}x^2$  و  $0 < x < 70$       ②  $S(x) = 210x - \frac{1}{2}x^2$  و  $0 < x < 105$

③  $S(x) = 105x - \frac{3}{2}x^2$  و  $0 < x < 70$       ④  $S(x) = 105x - \frac{3}{2}x^2$  و  $0 < x < 105$

۵۴- اگر تابع خطی  $f(x) = \left(\frac{1-m}{2}\right)x - m + \frac{1}{2}$  به ازای همهٔ مقادیر  $m$  از نقطهٔ  $(a, b)$  بگذرد، مقدار  $\frac{a}{b}$  کدام است؟

متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $-\frac{1}{4}$       ③ ۴      ④ -۴

متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

۵۵- اگر ضابطهٔ تابع خطی  $f(x) = \frac{-4}{a+2}x + b$ ،  $f(1) = 2a - 1$  و  $f\left(-\frac{a}{2}\right) = 2$  باشد، مقدار  $\frac{b}{a}$  کدام است؟

- ① ۳٫۲      ② ۱٫۶      ③ ۲      ④ ۱

۵۶- اگر تابع خطی  $f(x) = (1 - 2m)x - \frac{2m + 3}{2}$ ، به ازای همهٔ مقادیر  $m$  از نقطهٔ  $(\alpha, \beta)$  بگذرد، مقدار  $\beta - \alpha$  کدام است؟

سخت‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

- ①  $\frac{3}{2}$       ②  $-\frac{3}{2}$       ③  $\frac{5}{2}$       ④  $-\frac{5}{2}$

آسان‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۵۷- نمودار یک تابع خطی از نقاط  $(-2, a)$ ،  $(-1, 3)$  و  $(1, -4)$  می‌گذرد. مقدار  $a$  کدام است؟

- ① ۶      ② ۶٫۵      ③ ۷      ④ ۷٫۵



## ریاضی و آمار 2

### فصل دوم : تابع | اعمال جبری بر روی توابع

۵۸- اگر  $f = \{(1, 2), (2, 4), (4, 5), (3, 3)\}$  و  $g = \{(3, 2), (2, 3), (6, 1), (1, 8)\}$  باشند، برد تابع  $g \times f$  کدام است؟

متوسط مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

(۱)  $\{3, 6, 12, 16\}$

(۲)  $\{6, 8, 12\}$

(۳)  $\{6, 8, 12, 16\}$

(۴)  $\{6, 12, 16\}$

۵۹- اگر  $f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 6), (1, 7)\}$  و  $g = \{(1, 3), (2, 6), (5, 2), (4, 9)\}$  باشند، برد تابع  $g - f$  کدام است؟

متوسط مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

(۱)  $\{-4, 1, 3\}$

(۲)  $\{-4, 2, 3\}$

(۳)  $\{-4, 1, 2, 3\}$

(۴)  $\{1, 2, 3, 4\}$

۶۰- دو تابع  $f(x) = a + 3(b^2 - 1)x^2$  و  $g(x) = bx^2 - 2a + x^2$  ثابت هستند. اگر  $f \times g = -8$  باشد، حاصل  $|ab|$  کدام است؟

سخت مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر

آسان مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۶۱- اگر توابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر باشد، مجموعه بُرد تابع  $\frac{f}{f \times g}$  کدام است؟

$$f = \{(1, -1), (\sqrt{2}, -2), (\sqrt{3}, -3), (2, 2), (\sqrt{5}, 1)\}$$

$$g = \{(3, -1), (\sqrt{2}, -1), (-3, 4), (\sqrt{5}, -3), (\sqrt{3}, 2)\}$$

(۱)  $\{2, -3, -1\}$

(۲)  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\}$

(۳)  $\{-3, 1, -2\}$

(۴)  $\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -1\}$

۶۲- تابع  $f$  همانی و  $g(x) = [x] + [-x]$  با دامنه  $-1 \leq x \leq 1$  است. به ازای چند مقدار صحیح  $x$ ، اعضای مجموعه بُرد تابع  $\frac{f}{g}$  مقداری صحیح است؟

متوسط مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۶۳- تابع  $f(x) = |2x - 2|$  و  $g(x) = |x|$  با دامنه  $-1 \leq x \leq 1$  است. اگر مجموعه  $A$  برد تابع  $f \cdot g$  باشد، کدام عدد عضو  $A$  است؟

سخت مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) -۲

(۴) -۳

۶۴- فرض کنید  $f = \{(x, x^2) | x = \pm 5, \pm 4, \dots, \pm 1, 0\}$  و  $g = \{(x, x^3) | x = \pm 5, \pm 4, \dots, \pm 1, 0\}$  دو تابع در صفحه مختصات باشند.

سخت مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

تعداد عناصر برد تابع  $y = (\frac{g}{f})(x)$ ، کدام است؟

(۱) ۱۱

(۲) ۱۰

(۳) ۶

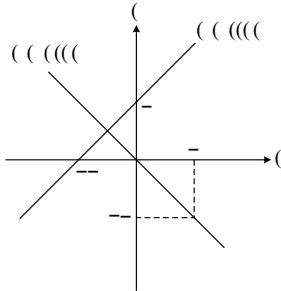
(۴) ۵





۶۵- فرض کنید نمودار تابع‌های خط راست  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  در صفحه مختصات مطابق شکل زیر داده شده باشند. قدرمطلق اختلاف جواب‌های

سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰



معادله  $\frac{f^2(x)}{g(x)} = 2$  کدام است؟

- ①  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ②  $\sqrt{3}$
- ③  $2\sqrt{3}$
- ④  $3\sqrt{3}$

۶۶- فرض کنید  $f(x) = |x - 1|$ ،  $g(x) = [2x]$  و  $h(x) = \text{sign}(-x)$  باشد. ضابطه تابع  $y = 2f(x) - h(x)g(x)$  در بازه

سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

$-\frac{3}{2} < x < -1$  کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

- ①  $3x - 2$
- ②  $5 - 2x$
- ③  $-2x + 2$
- ④  $-8x - 4$

۶۷- اگر  $f = \{(5, 3), (1, 5), (3, 4), (6, 2)\}$  و  $g = \{(3, 2), (5, 6), (1, 2), (2, 1)\}$  باشند، برد تابع  $\frac{f+g}{f}$  کدام است؟

سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

- ①  $\{1, 4, 1, 5, 3\}$
- ②  $\{1, 5, 1, 8, 3\}$
- ③  $\{1, 1, 4, 4\}$
- ④  $\{1, 2, 5, 4\}$

۶۸- اگر  $f = \{(3, 4), (2, 6), (5, 3), (1, 5)\}$  و  $g = \{(5, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 1)\}$  باشند، برد تابع  $\frac{f+g}{f-g}$  کدام است؟

سخت‌مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

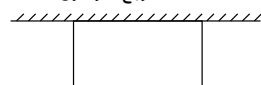
- ①  $\{\frac{5}{3}, 2, -3\}$
- ②  $\{\frac{5}{3}, 3, -3\}$
- ③  $\{\frac{5}{3}, 4, -2\}$
- ④  $\{\frac{5}{3}, 3, -2\}$

## ریاضی و آمار 1

فصل دوم: تابع تابع درجه ۲ و سهمی مسائل Max و Min

۶۹- می‌خواهیم با یک قطعه سیم به طول ۵۶ متر، زمینی به شکل مستطیل، که یک طرف آن دیوار است محصور شود. بیشترین مساحت زمین محصور شده،

سخت‌مرجع: سراسری- ۱۳۹۸



- ① ۳۶۴
- ② ۳۷۸
- ③ ۳۹۲
- ④ ۴۰۶



۷۰- یک کارگاه نوعی کالا تولید می‌کند و هر واحد آن را ۲۴۰ ریال می‌فروشد. اگر صاحب کارگاه در هر روز،  $x$  واحد کالا تولید کرده و تابع هزینه آن  $C(x) = x^2 + 60x + 200$  باشد، بیشترین سود روزانه آن کدام است؟  
سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

- ① ۵۶۰۰      ② ۶۱۰۰      ③ ۷۹۰۰      ④ ۸۱۰۰

۷۱- اگر تابع درآمد به صورت  $y = -\frac{1}{3}x^2 + 28x$  و تابع هزینه  $y = 16x + 55$  باشد، ماکسیمم مقدار سود، کدام است؟  
متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

- ① ۴۵      ② ۴۸      ③ ۵۳      ④ ۵۷

۷۲- مجموع ریشه‌های معادله  $ax^2 + (a + \frac{4}{3})x + 2 = 0$  با حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله  $3x^2 - 4x - a = 0$  برابر است. محور تقارن سهمی  $y = -ax^2 - (1 + \frac{5}{2}a)x - 1$  کدام است؟  
سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

- ①  $x = \frac{3}{4}$       ②  $x = -\frac{3}{4}$       ③  $x = \frac{11}{8}$       ④  $x = -\frac{11}{8}$

۷۳- تابع هزینه برای تولید تعداد  $x$  کالا از یک محصول به صورت خطی است. به‌ازای هزینه‌های ۸۵۰ و ۱۰۰۰ تومانی به ترتیب ۲۰ و ۲۵ کالا تولید می‌شود. اگر شرکت هر کالا را ۵۵ تومان بفروشد، این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟ متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

- ① ۹      ② ۱۰      ③ ۱۱      ④ ۱۲

۷۴- شیب خط  $y = ax + b$ ،  $1,5$  برابر شیب خط  $y = cx + d$  است. اگر دو خط در  $x = -2$  روی محور  $x$ ها یکدیگر را قطع کنند، محور تقارن  $f(x) = (\frac{c}{p}x + d)^2 - (ax + b)^2$  کدام است؟  
سخت‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

- ①  $x = -2$       ②  $x = -3$       ③  $x = -\frac{3}{2}$       ④  $x = -\frac{7}{4}$

۷۵- محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکسیمم مساحت این مستطیل، چقدر است؟  
متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

- ① ۲۲۵      ② ۲۰۹      ③ ۵۶,۲۵      ④ ۱۱,۲۵

۷۶- یک شرکت روزانه ۷۲۰,۰۰۰ ریال برای تولید یک نوع کالا هزینه می‌کند. اگر  $R(x) = 2200x + 10x^2$ ، تابع درآمد روزانه شرکت حاصل از فروش  $x$  واحد از همین کالا باشد، نقطه سربه‌سر کدام است؟  
متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

- ① ۹۰۰      ② ۲۰۰      ③ ۱۸۰      ④ ۸۰



۷۷- به ازای چند مقدار  $m$ ، تابع  $y = (1 - 18m)x^2 + 8(m^2 + 1)x + 11$  در نقطه‌ای به طول  $\frac{1}{4}$  دارای ماکسیمم است؟

سخت‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

- ① ۱      ② ۲      ③ هیچ مقدار  $m$       ④ تمام مقادیر  $m$

۷۸- فرض کنید تابع درآمد شرکتی به ازای تولید  $x$  محصول از یک کالا به صورت  $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$  و تابع هزینه

به صورت  $C(x) = ax + 18$  باشد. اگر بیشترین سود این شرکت به ازای تولید ۹ واحد کالا باشد. مقدار  $a$  کدام است؟ متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

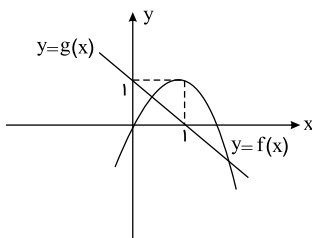
- ① ۲۱      ② ۱۸      ③ -۲۱      ④ -۳۹

منحنی درجه ۲

۷۹- نمودار سهمی  $y = f(x)$  و خط راست  $y = g(x)$  در صفحهٔ محورهای مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادلهٔ

سخت‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

$f(x) = g^2(x)$  کدام است؟



- ① -۲      ②  $-\frac{1}{2}$       ③  $\frac{1}{2}$       ④ ۲

متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۷

۸۰- فاصله نقطهٔ  $A(-1, 6)$  از محور تقارن سهمی به معادلهٔ  $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 16$  کدام است؟

- ① ۲      ② ۳      ③ ۴      ④ ۵

۸۱- مجموع ریشه‌های معادله  $x^2 - ax - 1 = 0$  با حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله  $ax^2 - 4x + a + 2 = 0$  برابر است. طول رأس سهمی

متوسط‌مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

$y = x^2 + (1 - 2a)x - 3$  کدام است؟

- ① -۱٫۵      ② -۳      ③ ۱٫۵      ④ ۳

۸۲- خط  $x = 1$  محور تقارن سهمی  $y = ax^2 + 3x + c$  است. اگر رأس سهمی روی خط  $y = 1$  قرار داشته باشد، مقدار  $ac$  کدام است؟

متوسط‌مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

- ① ۵٫۷۵      ② ۳٫۷۵      ③ -۳٫۲۵      ④ -۵٫۲۵

۸۳- سهمی  $y = -\frac{1}{4}x^2 + ax + b$  با  $y = 13 - x$  در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۸، متقاطع‌اند. مختصات رأس این سهمی، کدام است؟

سخت‌مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

- ① (۱, ۹)      ② (۳, ۹)      ③ (۳, ۱۲)      ④ (۴, ۱۳)



## پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

با توجه به تعریف تابع ثابت داریم:

$$f = \{(3, n^2 - 2n), (m, 8), (2n - 5, t), (4, 3m + 2)\}$$

$$\begin{cases} n^2 - 2n = 8 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Rightarrow (n - 4)(n + 2) = 0 \Rightarrow n = 4 \text{ یا } n = -2 \\ 3m + 2 = 8 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2 \\ t = 8 \end{cases}$$

تابع را با داشتن مقادیر  $m$  و  $t$  و برد ثابت ۸ می نویسیم:

$$\{(3, 8), (2, 8), (2n - 5, 8), (4, 8)\}$$

تابع باید سه عضوی باشد. دو مقدار به دست آمده برای  $n$  را بررسی می کنیم. در نتیجه:

$$n = -2 \Rightarrow 2n - 5 = -9 \quad (\text{غ ق ق}) \Rightarrow \text{زیرا تابع ۴ عضوی می شود}$$

$$n = 4 \Rightarrow 2n - 5 = 3 \quad (\text{ق ق})$$

پس  $n = 4$  قابل قبول است و داریم:

$$m + n + t = 2 + 4 + 8 = 14$$

۲ - گزینه ۱ یادآوری می کنیم  $x = y$  که نیمساز ناحیه اول و سوم همان تابع همانی است.

$$m + n = 1 \quad (1)$$

$$n^2 + n = 20 \Rightarrow n^2 + n - 20 = 0 \Rightarrow (n + 5)(n - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -5 \\ n = 4 \end{cases} \quad (2)$$

$$n^2 - 3n = 4 \Rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = 4 \end{cases} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (۲),(۳)}} n = 4$$

$$\xrightarrow{(1)} m + 4 = 1 \Rightarrow m = -3$$

۳ - گزینه ۲

$$\{(m, 3m - 1), (-1, k^2 - k), (k^2 - k - 2)\}$$

$$k^2 - k = 2 \Rightarrow (k + 1)(k - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$$

$$3m - 1 = 2 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = 1$$

$$\text{برد حاصل ضرب اعضای برد} = (m)(-1)(k^2 - k) = 1 \times (-1) \times (2) = -2$$

۴ - گزینه ۳  $f$  تابع ثابت است، پس

$$f(x) = c \Rightarrow f(kx) = f(a) = c$$

$$\Rightarrow (k^2 - 3)c = c \Rightarrow c(k^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k^2 = 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 2 \\ \text{یا} \\ c = 0 \end{cases}$$





$g$  تابع همانی است، پس:

$$\begin{aligned} k=2 &\rightarrow 2 = n^2 - 3n + 4 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 2 \end{cases} \\ &\xrightarrow{n=1} 2 = m^2 - 4m + 4 \rightarrow m^2 - 4m + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=8} \sqrt{\Delta} = \sqrt{8} \end{aligned}$$

ریشه‌ها گنگ می‌شوند و عضو  $N$  نیستند.

$$n=2 \rightarrow 4 = m^2 - 4m + 4 \Rightarrow M^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ غ ق ق} \\ m = 4 \text{ ق ق} \end{cases} \xrightarrow{n=2} f(2) = 2 - 4 \Rightarrow f(2) = -2 \Rightarrow f(m) = -2$$

در نتیجه به ازای  $c = 0$  داریم  $f(n) = 0$  و  $n = 4$  می‌شود. بنابراین:

$$m^2 - 4m + 4 = 8 \Rightarrow m^2 - 4m - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=32} \sqrt{\Delta} = \sqrt{32}$$

ریشه‌ها گنگ می‌شوند و عضو  $N$  نیستند.

پس تنها  $f(m) = -2$  قابل قبول است.

۵ - گزینه ۳

$$f(x) = k \Rightarrow k + k = k \times k \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 0 \end{cases}$$

$$2n^2 - 7n + 1 = -k \xrightarrow{k=0} 2n^2 - 7n + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 8 = 41$$

مقدار  $n$  طبیعی نمی‌شود پس  $k = 0$  قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow 2n^2 - 7n + 1 = -2 \Rightarrow 2n^2 - 7n + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 24 = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = \frac{7+5}{4} = 3 \checkmark \\ n = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \times \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$m^2 - 4m + 6 = 3 \times 2 \Rightarrow m^2 - 4m + 6 = 6 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ غ ق ق} \\ m = 4 \checkmark \end{cases} \Rightarrow \left[ \frac{mn}{5} \right] = \left[ \frac{12}{5} \right] = 2$$

۶ - گزینه ۳ چون  $f(x)$  همانی است، پس:  $f(x) + f(-x) = x + (-x) = 0$

طول و عرض هر نقطه رو نیمساز ربع دوم و چهارم قرینه یکدیگرند، پس:

$$3x^2 - 17x + 10 = -0 \Rightarrow 3x^2 - 17x + 10 = 0$$

$$\Delta = 289 - 4(3)(10) = 289 - 120 = 169 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{169} = 13$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{17+13}{6} = 5, \quad x_2 = \frac{17-13}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{2}{3} = \frac{15-2}{3} = \frac{13}{3}$$

۷ - گزینه ۲ ضابطه تابع همانی  $f(x) = x$  باید باشد، پس ضریب  $x$  در ضابطه  $f$  را برابر یک قرار می‌دهیم.

$$|a| - |b| = 1 \Rightarrow |a| = |b| + 1$$

در ضابطه تابع ثابت چون  $x$  نداریم، پس ضریب  $x$  برابر صفر است، یعنی:

$$b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow |a| = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$(f-g)(x) = x + 5 \Rightarrow f(x) - g(x) = x + 5 \Rightarrow x - g(x) = x + 5 \Rightarrow g(x) = -5 \Rightarrow (a^x + 1)c = -5 \xrightarrow{a^x=4} 5c = -5 \Rightarrow c = -1$$

$$\xrightarrow{a=2, c=-1} ac = -2$$

$$\xrightarrow{a=-2, c=-1} ac = 2$$

بنابراین دو مقدار برای  $ac$  وجود دارد.

۸ - گزینه ۳

$$f = \{(m + 3, 2t^2), (-2, n^2 + 2n), (1 - 3m, 8)\}$$



چون تابع  $f$  ثابت است، پس:

$$n^2 + 2n = 8 \Rightarrow n^2 + 2n - 8 = 0 \Rightarrow (n + 4)(n - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -4 & \text{غلق} \\ n = 2 & \text{قق} \end{cases}$$

چون  $n$  عددی طبیعی است، پس فقط  $n = 2$  قابل قبول است.

$$2t^2 = 8 \Rightarrow f = \{(m + 6, 8), (-2, 8), (1 - 3m, 8)\}$$

دو تا زوج مرتب‌های بالا با هم برابرند.

$$m + 6 = 1 - 3m \Rightarrow m = -\frac{5}{4} \text{ غلق (باید طبیعی باشد)}$$

$$m + 6 = -2 \Rightarrow m = -8 \text{ غلق (باید طبیعی باشد)}$$

$$1 - 3m = -2 \Rightarrow 3 = 3m \Rightarrow m = 1 \text{ قق}$$

$$\Rightarrow f = \{(7, 8), (-2, 8)\} \Rightarrow \text{مجموع اعضای دامنه} = 7 - 2 = 5$$

۹ - گزینه ۴ گزینه ۴ صحیح است، زیرا در گزینه‌های ۱، ۲، و ۳، خطی موازی محور لایها می‌توان رسم کرد که نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع می‌کنند.

۱۰ - گزینه ۳ در نمایش تابع با زوج مرتب مؤلفه‌های اول هر دو زوج مرتب متمایز باید متفاوت باشند، بنابراین در صورت برابری مؤلفه‌های اول، مؤلفه‌های دوم باید برابر باشند تا به دو زوج تکراری برسیم و یکی را بتوانیم حذف کنیم و تابع بودن رابطه برقرار بماند.

$$f = \{(3, a + 2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a - b)\}$$

$$\begin{cases} (3, a + 2b) \in f & \xrightarrow{\text{تابع است}} a + 2b = 7 \\ (3, 7) \in f & \\ (5, 4) \in f & \xrightarrow{\text{تابع است}} 2a - b = 4 \\ (5, 2a - b) \in f & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 7 \\ 2a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 7 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{a+2b=7} b = 2$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

۱۱ - گزینه ۲ برای به دست آوردن عناصر  $f$  کافیست زوج مرتب‌های مجموعه اول و زوج مرتب‌های مجموعه دوم را به صورت مجزا از هم بدست آورد و اجتماع بگیریم.

$$\{(a, a^2); a = 0, 1, 2\} = \{(0, 0^2), (1, 1^2), (2, 2^2)\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

$$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \cup \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\} =$$

$$\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

پس رابطه  $f$  دارای ۹ عضو متمایز است.

۱۲ - گزینه ۲ در زوج مرتب‌ها با مؤلفه‌های اول یکسان مؤلفه‌های دوم را برابر قرار می‌دهیم:

$$(a, m^2 - 1) = (a, 4) \Rightarrow m^2 - 1 = 4 \Rightarrow m^2 = 5$$

$$(a, x + y) = (a, 4) \Rightarrow x + y = 4$$

$$(b, x - y) = (b, m^2) \Rightarrow x - y = m^2 = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}, y = 4 - \frac{9}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{81}{4} + \frac{1}{4} = \frac{82}{4} = 20\frac{1}{2}$$

۱۳ - گزینه ۳ چون  $f$  تابع است، پس هر دو زوج مرتبی که دارای مؤلفه اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌های دوم آنها نیز برابر باشد:



$$\begin{cases} (1, x - 2y) \\ (1, -7) \end{cases} \Rightarrow x - 2y = -7$$

$$\begin{cases} (9, 5) \\ (9, x + y) \end{cases} \Rightarrow x + y = 5 \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + 16 = 17 \\ -x - 2y = -1 - 8 = -9 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{-x - 2y} = \frac{17}{-9} = -1$$

۱۴ - گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 7} \Rightarrow \begin{cases} f(4) = \sqrt{4^2 - 7} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3 \\ f(2\sqrt{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 7} = \sqrt{8 - 7} = \sqrt{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(4) - f(2\sqrt{2}) = 3 - 1 = 2$$

گزینه ۱

به جای تمام  $x$  ها،  $2 - \sqrt{3}$  را جایگزین می کنیم.

$$f(2 - \sqrt{3}) = \frac{2(2 - \sqrt{3})^2 + 2}{(2 - \sqrt{3})^2 - 3} \quad \text{اتحاد مربع دو جمله ای} \quad \frac{2(4 - 4\sqrt{3} + 3) + 2}{(4 - 4\sqrt{3} + 3) - 3}$$

$$= \frac{2(7 - 4\sqrt{3}) + 2}{7 - 4\sqrt{3} - 3} = \frac{14 - 8\sqrt{3} + 2}{4 - 4\sqrt{3}} = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{4 - 4\sqrt{3}} \quad \text{فاکتور از ۴ در صورت و مخرج} \quad \frac{4(4 - 2\sqrt{3})}{4(1 - \sqrt{3})} \quad \text{ساده کردن ۴} \quad \frac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$\frac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{4 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6}{1 - 3} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{-2(1 - \sqrt{3})}{-2} = 1 - \sqrt{3}$$

۱۶ - گزینه ۳

$$f(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{-2(2 - \sqrt{3})^2 + 8(2 - \sqrt{3}) + 7} = \sqrt{-2(4 + 3 - 4\sqrt{3}) + 16 - 8\sqrt{3} + 7}$$

$$= \sqrt{-2(7 - 4\sqrt{3}) + 23 - 8\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow f(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{-14 + 8\sqrt{3} + 23 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{23 - 14} = \sqrt{9} = 3$$

۱۷ - گزینه ۱

$$f(x) = x + \frac{2}{x} \Rightarrow f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \frac{2}{1 + \sqrt{2}}, \quad f(1 - \sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} + \frac{2}{1 - \sqrt{2}}$$

کسرهای  $\frac{2}{1 - \sqrt{2}}$ ،  $\frac{2}{1 + \sqrt{2}}$  را گویا می کنیم (صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم).

$$\frac{2}{1 + \sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{(1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{-1} = -2 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 1$$

$$\frac{2}{1 - \sqrt{2}} \times \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{(1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{-1} = -2 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} = -3\sqrt{2} - 1$$

$$\text{پس: } f(1 + \sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 1 - 3\sqrt{2} - 1 = -2$$

۱۸ - گزینه ۱

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} f(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^2 - 2(1 + \sqrt{2}) + 3 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2 - 2\sqrt{2} + 3 = 4 \\ f(2) = 2^2 - 2(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1 + \sqrt{2}) - f(2) = 4 - 3 = 1$$

۱۹ - گزینه ۲ کافی است در ضابطه  $f$ ، به جای تمام  $x$  ها، مقدار  $(1 - \sqrt{2})$  را جایگزین کنیم:

$$f(x) = (2 - x)|x| + x + \sqrt{2}$$



$$\Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = (2 - (1 - \sqrt{2})) \overbrace{|1 - \sqrt{2}|}^{+} + (1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$$

$$= (2 - 1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = \underbrace{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} + 1 = (2 - 1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

۲۰ - گزینه ۱

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + |x| \Rightarrow f(2 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{5})^2 + \overbrace{|2 - \sqrt{5}|}^{\text{منفی}}$$

$$\Rightarrow f(2 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(\underbrace{4 + 5 - 4\sqrt{5}}_9) + (-2 + \sqrt{5}) = \frac{9}{4} - \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow f(2 - \sqrt{5}) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{9 - 8}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

۲۱ - گزینه ۲

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10} \Rightarrow f(3 + 2\sqrt{6}) = \sqrt{(3 + 2\sqrt{6})^2 - 6(3 + 2\sqrt{6}) + 10}$$

$$= \sqrt{9 + 12\sqrt{6} + 24 - 18 - 12\sqrt{6} + 10} = \sqrt{25} = 5$$

گزینه ۴ - ۲۲

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x+2) = (x+2)^2 - 3(x+2) + 2 = x^2 + 4x + 4 - 3x - 6 + 2 = x^2 + x \\ f(x-2) = (x-2)^2 - 3(x-2) + 2 = x^2 - 4x + 4 - 3x + 6 + 2 = x^2 - 7x + 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x+2) - f(x-2) = x^2 + x - (x^2 - 7x + 12) = x^2 + x - x^2 + 7x - 12 = 8x - 12 = 4(2x - 3)$$

۲۳ - گزینه ۴

$$f(x) = |3x - 5| \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|3\left(\frac{1}{2}\right) - 5\right| = \left|\frac{3}{2} - 5\right| = \left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

۲۴ - گزینه ۳

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + |2x| \Rightarrow f(2\sqrt{2} - 3) = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 3)^2 + \overbrace{|2(2\sqrt{2} - 3)|}^{\text{منفی}}$$

$$\Rightarrow f(2\sqrt{2} - 3) = -\frac{1}{3}(8 + 9 - 12\sqrt{2}) - 2(2\sqrt{2} - 3) = -\frac{1}{3}(17 - 12\sqrt{2}) - 4\sqrt{2} + 6 = -\frac{17}{3} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 6$$

$$\Rightarrow f(2\sqrt{2} - 3) = 6 - \frac{17}{3} = \frac{18 - 17}{3} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱ - ۲۵

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow f(2x+1) = \frac{(2x+1)^2 + 3}{(2x+1)^2 - 1} = \frac{4x^2 + 4x + 1 + 3}{4x^2 + 4x + 1 - 1} = \frac{4x^2 + 4x + 4}{4x^2 + 4x} = \frac{4(x^2 + x + 1)}{4(x^2 + x)} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}$$

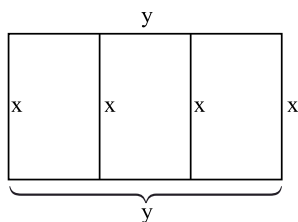
$$f(0) = \frac{(0)^2 + 3}{(0)^2 - 1} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow \frac{1}{3}f(0) = \frac{1}{3}(-3) = -1$$

$$\Rightarrow f(2x+1) + \frac{1}{3}f(0) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} - 1 = \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{1}{x^2 + x}$$

۲۶ - گزینه ۱







$$\Rightarrow 4x + 2y = 190 \Rightarrow 2y = 190 - 4x$$

$$\Rightarrow y = 95 - 2x$$

$$95 - 2x > 0 \Rightarrow x < 47,5$$

مثبت است

$$\Rightarrow 0 < x < 47,5$$

$$S = xy \Rightarrow S(x) = x(95 - 2x) = 95x - 2x^2$$

۲۷ - گزینه ۱

$$f(x) = |2x - 5|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2 + \sqrt{2}) = |2(2 + \sqrt{2}) - 5| = |4 + 2\sqrt{2} - 5| = |2\sqrt{2} - 1| = 2\sqrt{2} - 1 \\ f(1 + \sqrt{2}) = |2(1 + \sqrt{2}) - 5| = |2 + 2\sqrt{2} - 5| = |2\sqrt{2} - 3| = -2\sqrt{2} + 3 \end{cases}$$

توجه کنید که  $2\sqrt{2} \approx 2(1,4) = 2,8$  است و با توجه به آن، علامت عبارات داخل قدر مطلقها را می توان تعیین کرد و در نهایت داریم:

$$f(2 + \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} + 3 = 2$$

۲۸ - گزینه ۱

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 5x}{x - 2} \Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = \frac{-2(1 - \sqrt{2})^2 + 5(1 - \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2}) - 2}$$

$$= \frac{-2(1 + 2 - 2\sqrt{2}) + 5 - 5\sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2}} = \frac{-2(3 - 2\sqrt{2}) + 5 - 5\sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = \frac{-6 + 4\sqrt{2} + 5 - 5\sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2}} = \frac{-1 - \sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2}} = 1$$

۲۹ - گزینه ۱ چون تابع  $f$  با خط  $b - 2y = 3x$  برخورد ندارد پس موازی اند. در نتیجه:

$$2y = 3x - b \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x + h$$

$$f(2) = 2a - 1 \Rightarrow 2a - 1 = \frac{3}{2} \times 2 + h \Rightarrow 2a = 4 + h \Rightarrow h = 2a - 4 (*)$$

$$f(1 - a) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{3}{2}(1 - a) + h \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a + h = 2$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a = 2a - 4 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow h = 14$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x + 14 \Rightarrow f(-6) = \frac{3}{2}(-6) + 14 = 8$$



۳۰ - گزینه ۴

$$f(x) = \left[x + \frac{3}{x}\right] - [-x] \Rightarrow f\left(\frac{9}{4}\right) = \left[\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right] - \left[-\frac{9}{4}\right] = \left[\frac{12}{4}\right] - \left[-\frac{9}{4}\right]$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{9}{4}\right) = 3 - (-3) = 6$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right] - \left[-\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) = [1] - \left[\frac{1}{4}\right] = 1 - 0 = 1$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right) = 6 + 1 = 7$$

در نتیجه داریم:

۳۱ - گزینه ۱

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left[-\frac{1}{2}\right] + \left[-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 2(-1) + 0 = -2$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left[\frac{3}{2}\right] + \left[-\frac{3}{2}\right] = 2(1) + (-2) = 0$$

در نتیجه داریم:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 + 0 = -2$$

۳۲ - گزینه ۲

با توجه به محدوده  $x$  داریم:

$$-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = [-2x - x] + x = [-3x] + x$$

$$-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \Rightarrow 2 > -3x > 1 \Rightarrow [-3x] = 1 \Rightarrow y = 1 + x$$

۳۳ - گزینه ۱ با توجه به تعریف جزء صحیح داریم:

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{\pi}\right] = 1 + \left[-\frac{x}{\pi}\right] \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) + 2f(\pi) = 1 + \left[-\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right] + 2\left(1 + \left[-\frac{\pi}{\pi}\right]\right) = 1 + (-1) + 2(1 + (-2)) = 0 - 2 = -2$$

۳۴ - گزینه ۳ ابتدا مقادیر برد تابع را به دست می آوریم:

$$f(-2,5) = \frac{2 \times (-2,5) - 1}{[-2,5] - \text{sign}(-2,5)} = \frac{-6}{-3 + 1} = 3$$

$$f(2,1) = \frac{2 \times (2,1) - 1}{[2,1] - \text{sign}(2,1)} = \frac{3,2}{2 - 1} = 3,2$$

$$f(0,8) = \frac{2 \times (0,8) - 1}{[0,8] - \text{sign}(0,8)} = \frac{1,6 - 1}{0 - 1} = -0,6$$

$$f(4) = \frac{2 \times 4 - 1}{[4] - \text{sign}(4)} = \frac{8 - 1}{4 - 1} = \frac{7}{3}$$

بنابراین ماکزیمم عضو برد برابر  $3,2$  است.

۳۵ - گزینه ۱

ضابطه بالا  $\rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}\right| \text{sign}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

ضابطه پایین  $\rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \text{sign}\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$



۳۶ - گزینه ۴

$$f(x) = [x] + [-x]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس به ازای تمام مقادیر صحیح تابع  $\frac{g}{f}$  تعریف نمی شود. پس در هیچ نقطه صحیحی مقدار  $\frac{g}{f}$  ۳ نمی شود.

۳۷ - گزینه ۳ با توجه به تعریف جزء صحیح اعداد حقیقی داریم:

$$k \leq x < k + 1 \Rightarrow [x] = k, (k \in \mathbb{Z})$$

$$f(-0,7) - f(-0,07) = [1 - 3(-0,7)] - [1 - 3 \times (-0,07)] = [1 + 2,1] - [1 + 0,21] = [3,1] - [1,21] = 3 - 1 = 2$$

۳۸ - گزینه ۴

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{2}\right] \xrightarrow{x=-\frac{3}{2}} f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[1 - \frac{-\frac{3}{2}}{2}\right] = \left[1 + \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{7}{4}\right] = [1,75] = 1 \quad (1)$$

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{2}\right] \xrightarrow{x=\sqrt{2}} f(\sqrt{2}) = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

می دانیم:  $\sqrt{2} \approx 1,4$  پس:

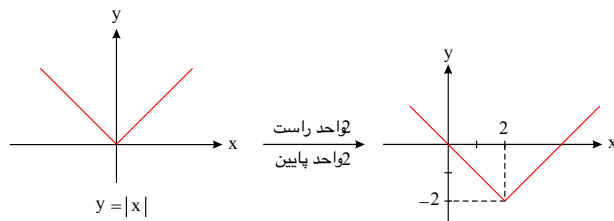
$$f(\sqrt{2}) = \left[1 - \frac{1,4}{2}\right] = [1 - 0,7] = [0,3] = 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} f(\sqrt{2}) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 + 1 = 1$$

۳۹ - گزینه ۴

$$f(x) = [2x - 1] \Rightarrow f\left(-\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \left[2\left(-\frac{3}{4}\right) - 1\right] + \left[2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) - 1\right] = [-2,5] + [\sqrt{5} - 1] = -3 + 1 = -2$$

۴۰ - گزینه ۴ نمودار تابع داده شده از انتقال  $y = |x|$  به صورت ۲ واحد به راست و ۲ واحد به پایین به دست آمده است. بنابراین:



بنابراین ضابطه تابع

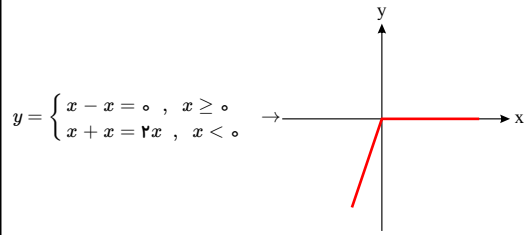
$$\rightarrow y = |x - 2| - 2$$

به صورت ذیل است

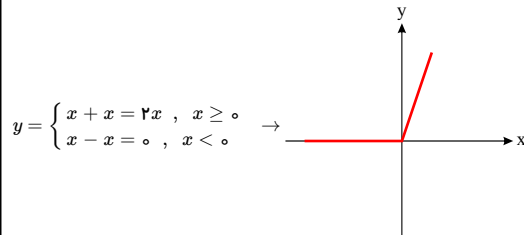
۴۱ - گزینه ۲ نمودار توابع گزینه های ۳، ۴ و ۴۰ به شکل و هستند.

در مورد گزینه ۱، داریم:





در مورد گزینه ۲، داریم:



۴۲ - گزینه ۱

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 \\ g(x) = \frac{|x|}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 1 \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \text{ (غ ق ق)} \end{cases} \text{ (چون } x > 0 \text{ فرض شده)} \\ x < 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -1 \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} \\ x = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} \end{cases} \text{ (غ ق ق)} \text{ (چون } x < 0 \text{ فرض شده)} \end{cases}$$

۴۳ - گزینه ۳

$$y = \frac{|2x|}{x} = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

حال خط  $y = 2x - 1$  را یک بار با خط  $y = 2$  و بار دیگر با خط  $y = -2$  قطع می‌دهیم؛ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.(۱) با شرط  $x > 0$  داریم:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 = 2x - 1 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (ق ق)}$$

(۲) با شرط  $x < 0$  داریم:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow -2 = 2x - 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (ق ق)}$$

حال میانگین آنها را به دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2}$$

۴۴ - گزینه ۱ ابتدا تابع را ساده‌تر می‌کنیم تا ضریب  $x$  در داخل قدرمطلق برابر ۱ شود:

$$y = -\frac{1}{2} |2(x + \frac{1}{2})| = -\frac{1}{2} \times 2|x + \frac{1}{2}| = -|x + \frac{1}{2}|$$

پس تابع  $|x|$  را به اندازه  $\frac{1}{2}$  به چپ انتقال می‌دهیم، چون پشت قدرمطلق علامت منفی داریم؛ سپس نسبت به محور  $x$

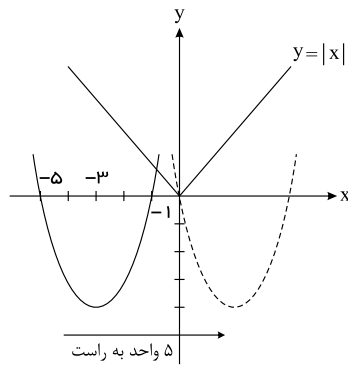




ها قرینه می کنیم.

۴۵ - گزینه ۴

نمودار دو تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می کنیم:



$x$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$
$y = x^2 + 6x + 5$	$-3$	$-4$	$-3$	$0$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$$

باید نمودار سهمی را حداقل ۵ واحد به سمت راست انتقال دهیم تا دو نمودار در دو نقطه با طولهای نامنفی یکدیگر را قطع کنند.

۴۶ - گزینه ۲ برای به دست آوردن  $f(2)$  و  $f(-\frac{1}{4})$  در ضابطه تابع اعداد ۲ و  $\frac{-1}{4}$  را قرار می دهیم:

$$f(x) = x\sqrt{2+|x|} \xrightarrow{x=2} f(2) = 2\sqrt{2+|2|} = 2\sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$$

$$\xrightarrow{x=-\frac{1}{4}} f(-\frac{1}{4}) = \frac{-1}{4}\sqrt{2+|\frac{-1}{4}|} = \frac{-1}{4}\sqrt{2+\frac{1}{4}} = \frac{-1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{-1}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{-3}{8}$$

حال حاصل عبارت خواسته شده را به دست می آوریم:

$$f(2) + 4f(-\frac{1}{4}) = 4 + 4(\frac{-3}{8}) = 4 + \frac{-3}{2} = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

۴۷ - گزینه ۴

$$f(x) = \sqrt{|2x-5|}$$

$$f(-2) = \sqrt{|2(-2)-5|} = \sqrt{|-9|} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(\frac{1}{2}) = \sqrt{|2(\frac{1}{2})-5|} = \sqrt{|-4|} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow f(-2) + 2f(\frac{1}{2}) = 3 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$$

۴۸ - گزینه ۲ برای حل سؤال کفایت به ازای مقادیر دامنه برد تابع را به دست آورد و میانگین مقادیر برد را محاسبه کنیم ولی نکته قابل توجه این است که اعداد دامنه به جز صفر و ۱۰۰ قرینه بوده و به صورت زیر قابل ساده شدن هستند.

$$f(-99) = -\frac{1}{2}(-99) + 4, f(99) = -\frac{1}{2}(99) + 4 \Rightarrow f(99) + f(-99) = \frac{99}{2} + 4 - \frac{99}{2} + 4 = 8$$

به همین ترتیب دو به دو حاصل جمع تمام  $f(x)$ هایی که  $x$ های قرینه دارند برابر با ۸ می شود.



$$\left. \begin{aligned} f(99) + f(-99) &= 8 \\ f(98) + f(-98) &= 8 \\ \vdots \\ f(1) + f(-1) &= 8 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{مجموع کل برابر است با} \\ \rightarrow 99 \times 8 = 792 \end{array}$$

محاسبه دو مقدار  $f(0)$  و  $f(100)$  را نیز انجام می‌دهیم:

$$f(0) = 0 + 4 = 4$$

$$f(100) = -\frac{1}{2}(100) + 4 = -46$$

$$\text{میانگین اعضای برد تابع} = \frac{f(0) + f(100) + \text{مجموع } f(x) \text{ هایی که } x \text{ های قرینه دارند}}{200} = \frac{792 + 4 - 46}{200} = 3,75$$

۴۹ - گزینه ۴ ضابطه تابع خطی  $f$  را به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیریم. با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 5 \Rightarrow a + b = 5 \\ f(3) = -9 \Rightarrow 3a + b = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = -5 \\ 3a + b = -9 \end{cases} \Rightarrow 2a = -14 \Rightarrow a = -7 \xrightarrow[a=-7]{a+b=5} b = 12 \Rightarrow f(x) = -7x + 12 \xrightarrow{A=\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 5\}}$$

$$f(0) = 12, f(5) = -35 + 12 = -23 \Rightarrow \text{برد} = \{y \in \mathbb{R} | -23 \leq y \leq 12\}$$

۵۰ - گزینه ۳

$$f(x) = -mx - h \xrightarrow{(-2,3)} 2m - h = 3 \Rightarrow h = 2m - 3$$

$$g(x) = ax + h \xrightarrow{(-2,3)} -2a + h = 3$$

$$-2a + 2m = 6 \Rightarrow -a + m = 3 \Rightarrow m = 3 + a$$

$$f\left(-\frac{5}{4}\right) = g(-5) \Rightarrow \frac{5m}{4} - h = -5a + h$$

$$\Rightarrow 5m + 20a - 8h = 0 \Rightarrow 5m + 20a - 8(2m - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 5(a + 3) + 20a - 16(a + 3) + 24 = 0$$

$$\Rightarrow 5a + 15 = 20a - 48 + 24 = 0$$

$$\Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow m = 1 + 3 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

۵۱ - گزینه ۳ ابتدا شیب خط گذرا از دو نقطه  $(0, 5)$  و  $(2, 1)$  را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$$

چون خط  $d$  موازی با این خط است، بنابراین شیب خط  $d$  نیز  $m = -2$  است.

حال با داشتن شیب  $(m = -2)$  و یک نقطه  $A(2, -3)$  از خط  $d$  معادله این خط را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-3) = -2(x - 2) \Rightarrow y + 3 = -2x + 4 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 1}$$

می‌دانیم در برخورد خط با محور  $y$ ها،  $x = 0$  است:

$$y = -2x + 1 \xrightarrow{x=0} \boxed{y = 1}$$

۵۲ - گزینه ۲ ابتدا محل تلاقی دو خط را بدست می‌آوریم:

$$2 \times \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ -x + 3y = -6 \end{cases}$$

$$\frac{4x + 2y = 10}{-x + 3y = -6} \Rightarrow \frac{5y = -1}{y = -\frac{1}{5}} = \boxed{-1}$$

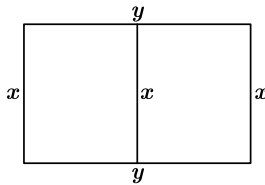


$$-x + 3y^{-1} = -6 \Rightarrow -x - 3 = -6 \Rightarrow -x = -6 + 3$$

$$\Rightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3$$

محل تلاقی  $B(3, -1)$  و  $A(-2, 4)$  شیب  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-1)}{-2 - 3} = \frac{5}{-5} = \boxed{-1}$

۵۳ - گزینه ۳ با توجه به اطلاعات مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم:



$$2y + 3x = 210 \Rightarrow 2y = 210 - 3x \Rightarrow y = 105 - \frac{3}{2}x$$

$$y > 0 \Rightarrow 105 - \frac{3}{2}x > 0 \Rightarrow x < 70 \xrightarrow{x > 0} 0 < x < 70$$

$$\text{مساحت } S = xy \Rightarrow S(x) = x(105 - \frac{3}{2}x) = 105x - \frac{3}{2}x^2$$

۵۴ - گزینه ۳ چون تابع خطی  $f$  به ازای هر مقدار  $m$  از نقطه  $(a, b)$  می‌گذرد می‌توان دو مقدار  $m = 0$  و  $m = 1$  را قرار داد. در نتیجه:

$$m=0 \rightarrow b = \frac{1}{2}a - 0 + \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$m=1 \rightarrow b = (\frac{1-1}{2})a - 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

مقدار  $b = -\frac{1}{2}$  را در رابطه (۱) قرار می‌دهیم و  $a$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}a = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{-2}{-\frac{1}{2}} = 4$$

۵۵ - گزینه ۱ با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

$$f(1) = 2a - 1 \Rightarrow \frac{-4}{a+2} + b = 2a - 1 \quad (1)$$

$$f(-\frac{a}{2}) = 2 \Rightarrow \frac{-4}{a+2}(-\frac{a}{2}) + b = 2 \Rightarrow b = 2 - \frac{2a}{a+2} \quad (2)$$

مقدار  $b$  را از رابطه (۲) جایگزین در رابطه (۱) می‌کنیم:

$$\frac{-4}{a+2} + (2 - \frac{2a}{a+2}) = 2a - 1 \Rightarrow \frac{4}{a+2} - \frac{2a}{a+2} - \frac{2a^2 + 4a}{a+2} = -3$$

$$\Rightarrow \frac{-2a^2 - 6a - 4}{a+2} = -3 \Rightarrow -2a^2 - 6a - 4 = -3a - 6 \Rightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{16}{5} = 3,2 \\ a_2 = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ غ ق ق ق} \end{cases}$$

۵۶ - گزینه ۲ چون تابع خطی به ازای هر مقدار  $m$  از نقطه  $(\alpha, \beta)$  می‌گذرد. پس:

$$m = 0 \xrightarrow{(\alpha, \beta)} \beta = (1 - 2 \times 0)\alpha - \frac{2 \times 0 + 3}{2}$$

$$\Rightarrow \beta - \alpha = -\frac{3}{2}$$

۵۷ - گزینه ۲ چون سه نقطه روی یک خط قرار دارند، شیب خط گذرنده از نقاط  $(-1, 3)$  و  $(1, -4)$  با شیب خط گذرنده از



نقاط  $(-2, a)$  و  $(-1, 3)$  برابر است. در نتیجه:

$$\frac{3 - (-4)}{-1 - 1} = \frac{a - 3}{-2 - (-1)} \Rightarrow \frac{7}{-2} = \frac{a - 3}{-1} \Rightarrow -2a + 6 = -7 \Rightarrow -2a = -13 \Rightarrow a = 6,5$$

۵۸ - گزینه ۳ ابتدا اشتراک دامنه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{3, 2, 1\}$$

$$g \times f = \{(3, 2 \times 3), (2, 3 \times 4), (1, 4 \times 2)\} = \{(3, 6), (2, 12), (1, 16)\}$$

$$\Rightarrow R_{g \times f} = \{6, 12, 16\}$$

۵۹ - گزینه ۱

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 6), (1, 7)\}$$

$$g = \{(1, 3), (2, 6), (5, 2), (4, 9)\}$$

$$D_{g-f} = D_f \cap D_g = \{2, 4, 1\}$$

$$g - f = \{(2, 1), (4, 3), (1, -4)\}$$

برد  $g - f$  به صورت  $\{-4, 1, 3\}$  است.

۶۰ - گزینه ۲ چون تابع  $f$  ثابت است، ضریب  $x^2$  را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = a + 3(b^2 - 1)x^2 \Rightarrow 3(b^2 - 1) = 0 \Rightarrow b = \pm 1 \quad (1)$$

چون تابع  $g$  ثابت است، ضریب  $x^2$  را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$g(x) = bx^2 - 2a + x^2 = (b + 1)x^2 - 2a \Rightarrow b = -1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} b = -1$$

$$(f \times g)(x) = -8 \Rightarrow f(x) \times g(x) = -8 \Rightarrow a \times (-2a) = -8 \Rightarrow 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \Rightarrow |ab| = |a| \times |b| = 2 \times 1 = 2$$

۶۱ - گزینه ۲

$$f \times g = \{(\sqrt{2} \times 2), (\sqrt{3}, -6), (\sqrt{5}, -3)\}$$

$$\frac{f}{f \times g} = \{(\sqrt{2}, -1), (\sqrt{3}, \frac{1}{6}), (\sqrt{5}, -\frac{1}{3})\}$$

۶۲ - گزینه ۱ برای تابع  $g$  داریم:

$$g(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

چون تابع  $g$  به ازای همه مقادیر صحیح  $x$  برابر صفر است، پس تابع  $\frac{f}{g}$  در هیچ نقطه صحیحی تعریف نمی‌شود.

۶۳ - گزینه ۴ ضابطه تابع  $f$  و  $g$  را در محدوده‌های زیر می‌نویسیم تا بتوانیم در محدوده‌های مشترک حاصل ضرب  $f \cdot g$  را حساب کنیم.

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = -(2x - 2), \quad g(x) = -1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = -(2x - 2), \quad g(x) = 0$$

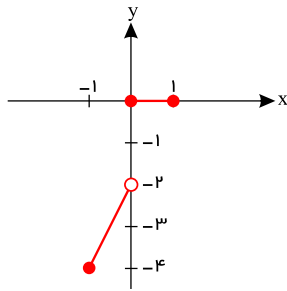
$$x = 1 \Rightarrow f(x) = 0, \quad g(x) = 1$$

$$\Rightarrow (f \times g)(x) = \begin{cases} 2x - 2 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

حال شکل تابع را رسم و برد تابع را مشخص می‌کنیم:







$$\Rightarrow R = (-4 \leq y < -2) \cup \{0\}$$

پس ۳- عضو برد است.

۶۴- گزینه ۲

$$f = \{(-5, 25), (5, 25), (-4, 16), (4, 16), \dots, (-1, 1), (1, 1), (0, 0)\}$$

$$g = \{(-5, -125), (5, 125), \dots, (-1, -1), (1, 1), (0, 0)\}$$

$$D_g = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \{(-5, -5), (5, 5), (-4, -4), (4, 4), \dots, (-1, -1), (1, 1)\}$$

بنابراین تعداد عناصر برد تابع  $g$  برابر ۰ اتاست.

۶۵- گزینه ۳ تابع  $f$  از نقاط  $(0, 1)$  و  $(-1, 0)$  می گذرد. در نتیجه:

$$m = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$$

تابع  $g$  از نقاط  $(0, 0)$  و  $(1, -1)$  می گذرد. در نتیجه:

$$m = \frac{-1 - 0}{1 - 0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{g(x)} = 2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{-x} = 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{-x} = 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2x \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \times 1 \times 1 = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3} \\ x_2 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow |x_1 - x_2| = |-2 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

۶۶- گزینه ۲

$$-\frac{3}{2} < x < -1 \Rightarrow -3 < 2x < -2 \Rightarrow [2x] = -3 \text{ و } \text{sign}(-x) = 1 \text{ و } |x-1| = -(x-1)$$

$$\Rightarrow y = 2f(x) - h(x)g(x) = -2(x-1) - 1 \times (-3) = -2x + 2 + 3 = -2x + 5 = 5 - 2x$$

۶۷- گزینه ۱ دامنه  $f + g$  برابر است با:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1, 3, 5\}$$

در نتیجه:

$$f + g = \{(1, 5+2), (3, 4+2), (5, 3+6)\} = \{(1, 7), (3, 6), (5, 9)\}$$

از طرفی:

$$\frac{f+g}{f} = \{(1, \frac{7}{5}), (3, \frac{6}{3}), (5, \frac{9}{5})\} = \{(1, 1.4), (3, 1.5), (5, 1.8)\}$$

در نتیجه برد تابع  $\frac{f+g}{f}$  برابر است با:

$$\{1.4, 1.5, 1.8\}$$



$$f = \{(3, 4), (2, 6), (5, 3), (1, 5)\}$$

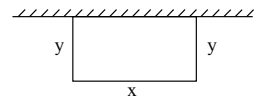
$$g = \{(5, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$\Rightarrow D_f \cap D_g = \{3, 5, 1\}$$

$$\left. \begin{aligned} f+g &= \{(3, 6), (5, 9), (1, 7)\} \\ f-g &= \{(3, 2), (5, -3), (1, 3)\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f+g}{f-g} = \{(3, 3), (5, -3), (1, \frac{7}{3})\} \Rightarrow \text{برد} = \{3, -3, \frac{7}{3}\}$$

تذکر: در مخرج  $(f-g)(x) \neq 0$  است.

۶۹ - گزینه ۳ طول مستطیل را  $x$  و عرض آن را  $y$  در نظر می گیریم:



$$2y + x = 56$$

$$\Rightarrow x = 56 - 2y \quad (1)$$

$$\text{مساحت} = S = xy$$

$$\xrightarrow{(1)} S = (56 - 2y)y \Rightarrow S = 56y - 2y^2 \Rightarrow S_{\max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(56^2 - 0)}{4 \times (-2)} = 392$$

۷۰ - گزینه ۳

$x =$  تعداد کالا, (ریال)  $240 =$  قیمت فروش

$$R(x) = (x)(240) = 240x = \text{درآمد} \times \text{تعداد} = \text{قیمت فروش}$$

تابع سود برابر است با:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 240x - (x^2 + 60x + 200) = -x^2 + 180x - 200$$

برای محاسبه ماکزیم سود رأس سهمی را به دست می آوریم: داریم:

$$\text{طول رأس سهمی: } x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{-180}{-2} = 90$$

سود ماکزیم برابر است با:

$$P(90) = -(90)^2 + 180 \times 90 - 200 = -8100 + 16200 - 200 = 7900$$

۷۱ - گزینه ۳

هزینه - درآمد = سود

$$\text{سود} = -\frac{1}{3}x^2 + 28x - 16x - 55 = -\frac{1}{3}x^2 + 12x - 55 \Rightarrow x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-\frac{1}{3})} = \frac{12 \times 3}{2} = 18$$

$$x_{\max} = 18 \xrightarrow{\text{جایگذاری در تابع سود}} \text{ماکزیم مقدار سود} = -\frac{1}{3}(18)^2 + 12(18) - 55 = 53$$

۷۲ - گزینه ۲ حاصل جمع ریشه های  $(s)$  معادله اول و حاصل ضرب ریشه های  $(P)$  معادله دوم را به دست می آوریم:

$$S = \frac{-(a + \frac{4}{3})}{a}, \quad P = -\frac{a}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} -\frac{(a + \frac{4}{3})}{a} = -\frac{a}{3} \Rightarrow -3a - 4 = -a^2 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{1+(-4)=-3} \Rightarrow \text{طبق نکته} \begin{cases} a = -1 \\ a = -\frac{-4}{1} = 4 \end{cases}$$

به ازای  $a = 4$  معادله  $ax^2 + (a + \frac{4}{3})x + 2 = 0$  به شکل  $4x^2 + \frac{16}{3}x + 2 = 0$  می شود و  $A < 0$  پس ریشه ندارد. در نتیجه فقط  $a = -1$



قابل قبول است.

۷۳ - گزینه ۳ ابتدا تابع هزینه را که خطی است، با توجه به دو نقطه داده شده می نویسیم:

$$A(20, 850) \Rightarrow m = \frac{1000 - 850}{25 - 20} = \frac{150}{5} = 30$$

$$B(25, 1000) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow y = mx + n \xrightarrow{x=25, y=1000} 1000 = 30 \times 25 + n \Rightarrow n = 250$$

$$y = 30x + 250 \Rightarrow c(x) = 30x + 250, R(x) = 55x$$

$$p(x) = 55x - 30x - 250 \Rightarrow p(x) = 25x - 250 \xrightarrow{p(x)=0} 25x - 250 = 0 \Rightarrow 25x = 250 \Rightarrow x = 10$$

پس با فروش ۱۱ آمین کالا سوددهی آغاز می شود.

۷۴ - گزینه ۴ ابتدا با توجه به اطلاعات همه پارامترها را بر حسب  $a$  به دست می آوریم:

$$a = -1,5c \Rightarrow a = -\frac{3}{2}c \Rightarrow c = -\frac{2}{3}a$$

$$\xrightarrow{x=-2} 0 = -2a + b \Rightarrow b = 2a$$

$$\xrightarrow{\substack{y=0 \\ x=-2 \\ y=0}} 0 = -2c + d \Rightarrow d = 2c \Rightarrow d = -\frac{4}{3}a$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(-\frac{1}{3}ax - \frac{4}{3}a\right)^2 - (ax + 2a)^2$$

در سهمی  $y = a'x^2 + b'x + c'$  محور تقارن  $x = -\frac{b'}{2a'}$  است، پس در ضابطه  $f(x)$  کافی است ضرایب  $a'$  و  $b'$  را به دست آوریم:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a^2}{9}x^2 - a^2x^2 + \frac{8}{9}a^2x - 4a^2x + c'$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{a^2}{9} - a^2\right)x^2 + \left(\frac{8}{9}a^2 - 4a^2\right)x + c'$$

$$\text{محور تقارن سهمی: } x = \frac{-\left(\frac{8}{9} - 4\right)a^2}{2\left(\frac{1}{9} - 1\right)a^2} = \frac{\frac{28}{9}}{2 \times \frac{-8}{9}} = -\frac{28}{16} = -\frac{7}{4}$$

۷۵ - گزینه ۳ طول و عرض مستطیل را به ترتیب  $X$  و  $Y$  در نظر می گیریم و با توجه به فرض مسئله داریم:

$$2(x + y) = 30 \Rightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$$

$$S = xy = x(15 - x) = -x^2 + 15x$$

$$x_{max} = \frac{-15}{-2} = 7,5 \Rightarrow y_{max} = 7,5 \Rightarrow S = 7,5 \times 7,5 = 56,25$$

۷۶ - گزینه ۳ ابتدا تابع سود را می نویسیم دقت کنید که هزینه روزانه برابر ۷۲۰۰۰۰ ریال است.

$$\text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} \Rightarrow \text{سود} = 10x^2 + 2200x - 720000$$

در نقطه سربه سر، سود برابر صفر است.

$$10x^2 + 2200x - 720000 = 0 \Rightarrow x^2 + 220x - 72000 = 0 \Rightarrow (x + 400)(x - 180) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غقیق } x = -400 \\ \text{قیق } x = 180 \end{cases}$$

۷۷ - گزینه ۲

$$y = (1 - 18m)x^2 + 18(m^2 + 1)x + 11$$

تابع درجه دوم وقتی ماکسیمم دارد که ضریب  $x^2$  منفی باشد. بنابراین:

$$1 - 18m < 0 \Rightarrow 1 < 18m \Rightarrow m > \frac{1}{18}$$

طول نقطه ماکسیمم همان طول رأس سهمی  $x_s = -\frac{b}{2a}$  است. بنابراین:

$$\frac{1}{2} = \frac{-18(m^2 + 1)}{2(1 - 18m)} \Rightarrow -18m^2 - 18 = 1 - 18m \Rightarrow -18m^2 + 18m - 19 = 0 \Rightarrow 18m^2 - 18m + 19 = 0$$



$$\Delta = (-18)^2 - 4(\lambda)(9) = 324 - 36\lambda = 36 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{18+6}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \\ m_2 = \frac{18-6}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

هر دو جواب به دست آمده برای  $m$  بزرگتر از  $\frac{1}{18}$  هستند، پس هر دو قابل قبول اند.

۷۸ - گزینه ۱

درآمد:  $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$

هزینه:  $C(x) = ax + 18$

$\Rightarrow$  سود  $\Rightarrow P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 30x - ax - 18 \Rightarrow P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (30 - a)x - 18$

$x_{max} = \frac{-(30 - a)}{2 \times (-\frac{1}{2})} = 30 - a \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 30 - a = 9 \Rightarrow a = 21$

۷۹ - گزینه ۴ خط  $y = g(x)$  از دو نقطه  $(0, 1)$  و  $(1, 0)$  می گذرد، بنابراین معادله خط گذرنده از دو نقطه  $(0, 1)$  و  $(1, 0)$  برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1 \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\text{نقطه } (1, 0)} y - 0 = -1(x - 1)$$

$y = -x + 1 \Rightarrow g(x) = -x + 1 \Rightarrow g^v(x) = (-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

برای نوشتن معادله  $f(x)$  در حالت کلی برای معادله سهمی داریم:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

از آنجایی که عرض از مبدأ این تابع صفر است:

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx$

$(1, 1)$  مختصات رأس سهمی است، بنابراین برای  $x$  و  $y$  رأس سهمی داریم:

$f(x) = ax^2 + bx$

طول رأس سهمی:  $1 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -b = 2a \Rightarrow b = -2a$

عرض رأس سهمی:  $f(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1 \xrightarrow{\text{جایگذاری } b = -2a} a - 2a = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = (-2) \times (-1) = 2$

بنابراین ضابطه تابع  $f(x)$  برابر است با:

$f(x) = ax^2 + bx = -x^2 + 2x$

برای به دست آوردن مجموع جواب های معادله  $f(x) = g^v(x)$  تساوی زیر را داریم:

$-x^2 + 2x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 2x + x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$

به کمک روش کلی (دلتا) داریم:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{16 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{4 + \sqrt{8}}{4} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{4 - \sqrt{8}}{4} \end{cases}$$

مجموع جواب های معادله برابر:

$x_1 + x_2 = \frac{4 + \sqrt{8}}{4} + \frac{4 - \sqrt{8}}{4} = \frac{4 + \cancel{\sqrt{8}} + 4 - \cancel{\sqrt{8}}}{4} = \frac{8}{4} = 2$

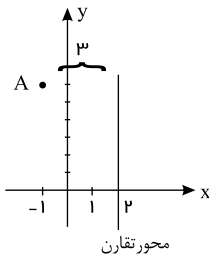
۸۰ - گزینه ۲ می دانیم در سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  محور تقارن  $x = \frac{-b}{2a}$  می باشد، بنابراین داریم:

محور تقارن  $x = 2 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(\frac{1}{2})} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = 2$





فاصله نقطه  $A(-1, 6)$  تا خط  $x = 2$  با توجه به شکل برابر ۳ است.



۸۱ - گزینه ۱

$$x^2 - ax - 1 = 0 \Rightarrow S = a$$

$$ax^2 - 4x + a + 2 = 0 \Rightarrow P = \frac{a+2}{a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{a+2}{a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

به ازای  $a = 2$  معادله  $ax^2 - 4x + a + 2 = 0$  به صورت  $ax^2 - 4x + 4 = 0$  می شود که ریشه ندارد. پس فقط  $a = -1$  قابل قبول است.

$$\Rightarrow \text{طول راس سهمی} = \frac{-(1-2a)}{2 \times 1} = \frac{-(1+2)}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

۸۲ - گزینه ۲ محور تقارن سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  برابر  $x = -\frac{b}{2a}$  است. در نتیجه:

$$y = ax^2 + 3x + c$$

$$\text{محور تقارن سهمی} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3}{2a} = -1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

راس سهمی روی خط  $y = 1$  است پس:

$$y_s = 1, x_s = -1 \Rightarrow \frac{3}{2}(-1)^2 + 3(-1) + c = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} - 3 + c = 1 \Rightarrow c = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow ac = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3,75$$

۸۳ - گزینه ۴ با توجه به معادله خط نقطه های  $\begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}$  و  $\begin{vmatrix} 2 \\ 11 \end{vmatrix}$  که در معادله خط  $y = 13 - x$  صدق می کند، نقاط برخوردند پس این نقاط در سهمی  $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax + b$  صدق می کنند:

داریم:

$$\begin{cases} 11 = -\frac{1}{2}(2)^2 + a(2) + b \\ 5 = -\frac{1}{2}(8)^2 + a(8) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 13 \\ 8a + b = 37 \end{cases}$$

$$\text{راس سهمی} : \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-\frac{1}{2})} = 4 \Rightarrow y = 13$$

$$\text{راس سهمی} \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 \text{ برابر است با:}$$



## پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۱۳ - ۳	۲۵ - ۱	۳۷ - ۳	۴۹ - ۴	۶۱ - ۲	۷۳ - ۳
۲ - ۱	۱۴ - ۳	۲۶ - ۱	۳۸ - ۴	۵۰ - ۳	۶۲ - ۱	۷۴ - ۴
۳ - ۲	۱۵ - ۱	۲۷ - ۱	۳۹ - ۴	۵۱ - ۳	۶۳ - ۴	۷۵ - ۳
۴ - ۳	۱۶ - ۳	۲۸ - ۱	۴۰ - ۴	۵۲ - ۲	۶۴ - ۲	۷۶ - ۳
۵ - ۳	۱۷ - ۱	۲۹ - ۱	۴۱ - ۲	۵۳ - ۳	۶۵ - ۳	۷۷ - ۲
۶ - ۳	۱۸ - ۱	۳۰ - ۴	۴۲ - ۱	۵۴ - ۳	۶۶ - ۲	۷۸ - ۱
۷ - ۲	۱۹ - ۲	۳۱ - ۱	۴۳ - ۳	۵۵ - ۱	۶۷ - ۱	۷۹ - ۴
۸ - ۳	۲۰ - ۱	۳۲ - ۲	۴۴ - ۱	۵۶ - ۲	۶۸ - ۲	۸۰ - ۲
۹ - ۴	۲۱ - ۲	۳۳ - ۱	۴۵ - ۴	۵۷ - ۲	۶۹ - ۳	۸۱ - ۱
۱۰ - ۳	۲۲ - ۴	۳۴ - ۳	۴۶ - ۲	۵۸ - ۳	۷۰ - ۳	۸۲ - ۲
۱۱ - ۲	۲۳ - ۴	۳۵ - ۱	۴۷ - ۴	۵۹ - ۱	۷۱ - ۳	۸۳ - ۴
۱۲ - ۲	۲۴ - ۳	۳۶ - ۴	۴۸ - ۲	۶۰ - ۲	۷۲ - ۲	

