# بانک تست اختصاصی

تابع ( فصل اول پایه
دوازدهم )

# به نام خالق زیبایی‌ها

## دوازدهم فصل اول ( تابع )

## رشته تجربی ( مشترک با ریاضی )

۱) در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2[x]$، مقدار $f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right)$، کدام است؟

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

۲) اگر $f(x) = [x]$، مجموعه‌ی مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟

۱) $\{0\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{0, 1\}$ ۴) $\{-1, 0, 1\}$

۳) تابع با ضابطه‌ی $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟



۱) ۴ و $\frac{1}{9}$ ۲) ۹ و $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ و $\frac{1}{4}$ ۴) ۹ و ۴

۴) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^3|$ با دامنه‌ی R ، چگونه است؟

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون‌ناپذیر ۴) یک‌به‌یک

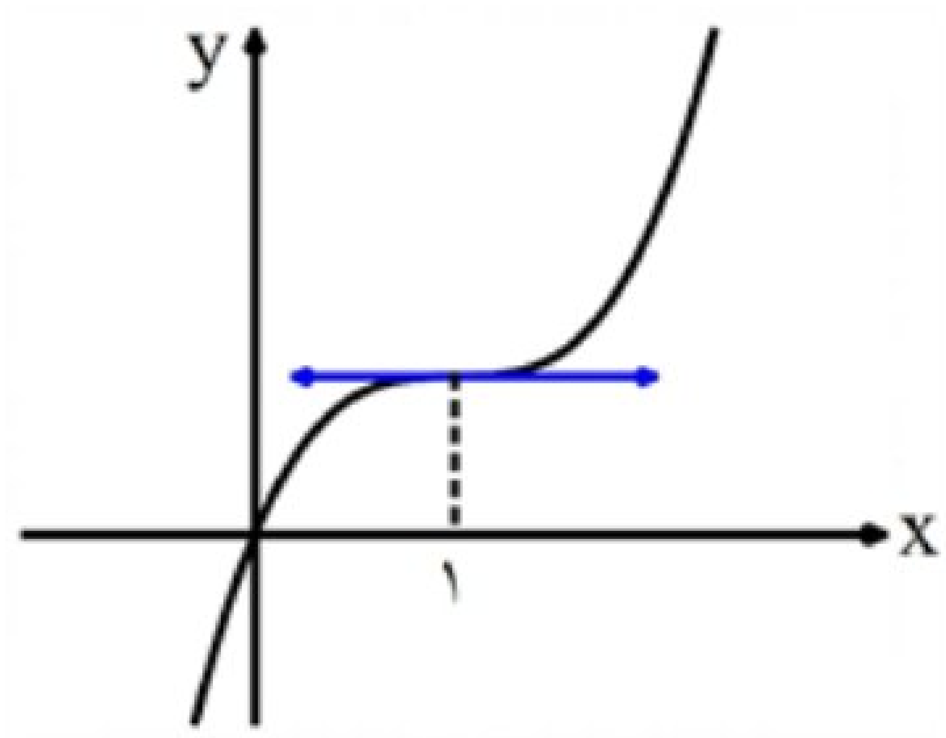
۵) تابع $f(x) = |x-1| - |x+4|$، در چه فاصله‌ای صعودی اکید است؟

۱) $[-4, 1]$ ۲) $[1, +\infty)$ ۳) $(-\infty, -4]$ ۴) هیچ بازه‌ای

۶) اگر $f(x) = \sqrt{x} + x + 3$ باشد، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(3) + f^{-1}(5)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷) نمودار زیر برای تابع f، با ضابطهٔ $f(x) = 2(x-a)^3 + b$ است. $a + b$ کدام است؟






۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸) اگر $x \geq 1$ ، $f(x) = x^2 - 2x$ باشد، حاصل $f(f^{-1}(8) - 2)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) صفر

۹) اگر $g(x)=\dfrac{x+۳}{۱-x}$ و $(\operatorname{gof})(x)=\dfrac{x+۱}{۳-x}$ باشد، مقدار $f(۱)$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) -۲　　۴) -۱

۱۰) اگر $f(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+۱}$ باشد، معادله‌ی $(\operatorname{fog}(x))(\operatorname{gof}(x))=-۱$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر　　۲) یک　　۳) دو　　۴) بی‌شمار

۱۱) در صورتی‌که $f(x)=\sqrt[۲]{۱-x}$ و $\operatorname{fog}(x)=۲x$ باشد، حاصل $\operatorname{gof}(-۷)$ چقدر است؟

۱) ۶۵　　۲) -۶۴　　۳) ۶۳　　۴) -۶۳

۱۲) وارون تابع $f(x)=۵x-۱$ کدام گزینه است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\dfrac{x+۱}{۵}$　　۲) $f^{-۱}(x)=\dfrac{x-۱}{۵}$　　۳) $f^{-۱}(x)=\dfrac{x-۵}{۳}$　　۴) $f^{-۱}(x)=x+۵$



۱۳) وارون تابع $g(x)=\dfrac{۷x+۱۱}{۵}$ کدام گزینه است؟

۱) $g^{-۱}(x)=\dfrac{۵x+۱۱}{۷}$　　۲) $g^{-۱}(x)=\dfrac{۷x-۱۱}{۵}$

۳) $g^{-۱}(x)=\dfrac{۵x-۱۱}{۷}$　　۴) $g^{-۱}(x)=\dfrac{۷x+۱۱}{۵}$

۱۴) اگر f یک تابع خطی باشد و $f(۲)=۴$ و $f(۵)=۱۳$ باشد، $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x-۲}{۳}$　　۲) $۳x-۲$　　۳) $\dfrac{x+۲}{۳}$　　۴) $۳x+۲$

۱۵) اگر f یک تابع خطی و از نقاط $A(۲,۱۱)$ و $B(۷,۳۶)$ بگذرد ضابطه $f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x-۱}{۵}$　　۲) $\dfrac{x+۱}{۵}$　　۳) $x+۵$　　۴) $x-۵$

۱۶) وارون تابع $f(x)=۵x-۱۱$ کدام است؟



۱) $\dfrac{x+۵}{۱۱}$　　۲) $\dfrac{x-۵}{۱۱}$　　۳) $\dfrac{x+۱۱}{۵}$　　۴) $\dfrac{x-۱۱}{۵}$

۱۷ تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\leq x<۲\\ ۳x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$ در بازه‌ی $[۱,۷]$ چه وضعیتی از نظر یکنوایی دارد؟

۱ صعودی است.
۲ نزولی است.
۳ صعودی اکید است.
۴ نزولی اکید است.

۱۸ کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=x^۲\,|x|$ صحیح است؟

۱ تابع در R صعودی است.
۲ تابع در بازه‌ی $(-\infty,۰]$ نزولی است.
۳ تابع در بازه‌ی $[۰,+\infty)$ نزولی است.
۴ تابع در R نزولی است.

۱۹ کدام‌یک از توابع زیر وارون‌پذیرند؟

۱ $f(x)=x^۲-۴x+۵$
۲ $f(x)=-x^۲$
۳ $f(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$
۴ $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۷),(-۱,۶),(۰,۲),(-۲,-۳)\}$



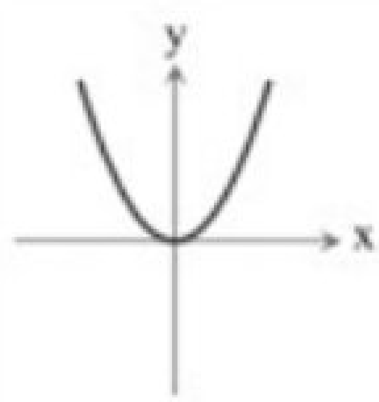
۲۰ نمودار تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x+۱$ از کدام ناحیه مختصات عبور نمی‌کند؟

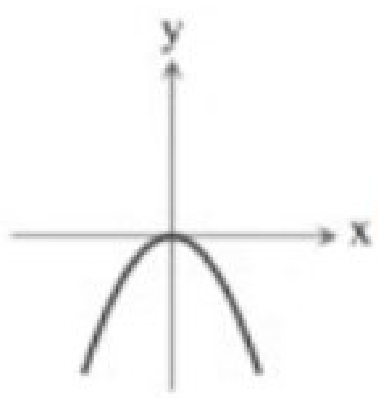
۱ دوم
۲ چهارم
۳ سوم
۴ از هر ۴ ناحیه عبور می‌کند.

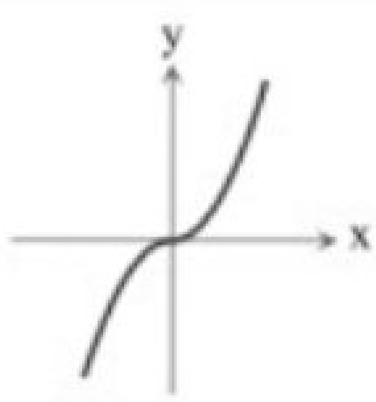
۲۱ نقطه‌ی $A=(۱,۲)$ یک نقطه از نمودار تابع معکوس‌پذیر f است. نقطه‌ی متناظر $A'$ روی نمودار معکوس تابع $y=۱-۲f\left(\frac{x}{۳}\right)$ کدام است؟

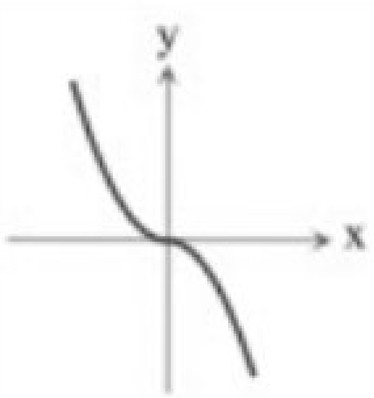
۱ $A'=\left(-۳,\frac{۱}{۳}\right)$
۲ $A'=(-۳,۳)$
۳ $A'=\left(-\frac{۱}{۲},۳\right)$
۴ $A'=\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳}\right)$

۲۲ دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{xf(-x)}$ برابر $R$ است. نمودار تابع $f$ کدام می‌تواند باشد؟

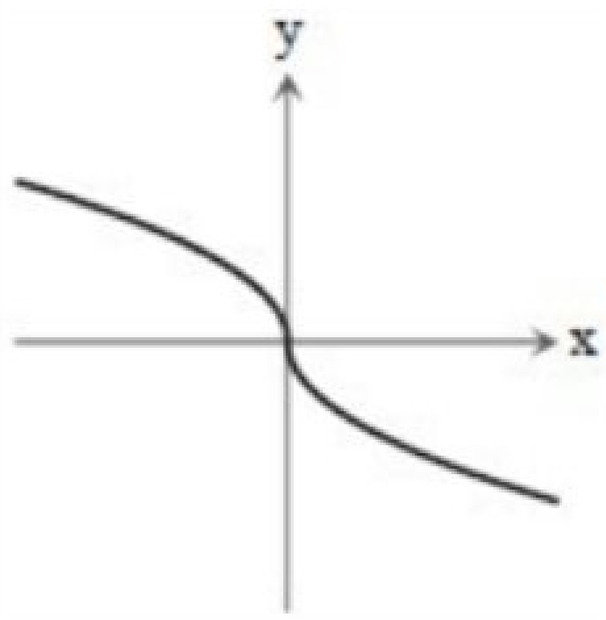
۱ 

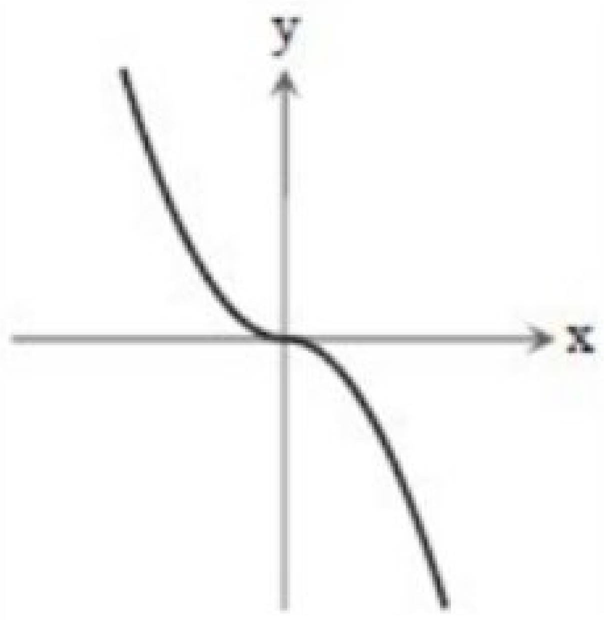

۲ 

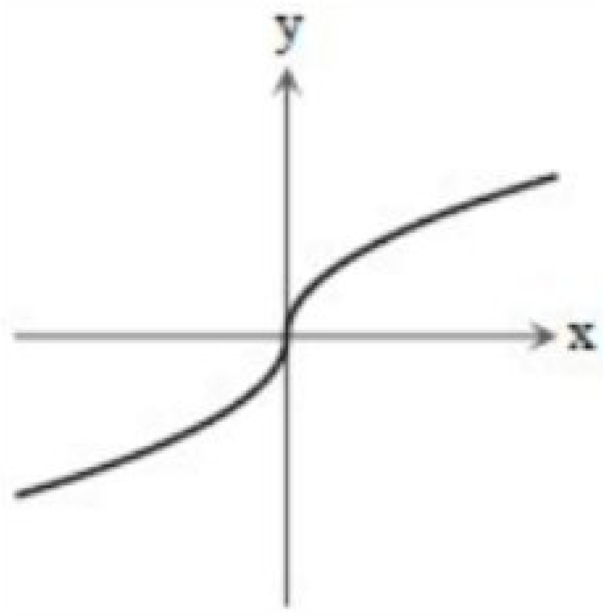

۳ 

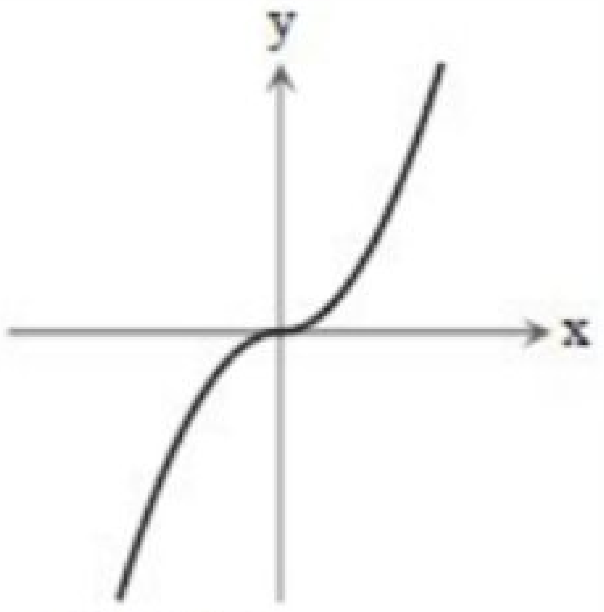

۴ 

۲۳ اگر $f(x) = x\,|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱ 


۲ 


۳ 


۴ 




۲۴ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ فقط از ناحیه‌ی اول نگذرد، نمودار تابع $y = -f(-x)$ از کدام ناحیه <u>نمی‌گذرد</u>؟

۱ دوم　　۲ اول　　۳ چهارم　　۴ سوم

۲۵ با کدام انتقال، نمودار تابع $y = x^{۲} + ۱$ روی نمودار تابع $y = x^{۲} - ۴x - ۱$ منطبق می‌گردد؟

۱ ۲ واحد به راست، ۶ واحد به بالا　　۲ ۲ واحد به راست، ۶ واحد به پایین

۳ ۲ واحد به چپ، ۶ واحد به بالا　　۴ ۲ واحد به چپ، ۶ واحد به پایین

۲۶ برای رسم نمودار تابع $g(x) = -(x-۱)^{۲} - ۱$ با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^{۲}$، به ترتیب چه مراحلی را باید طی کنیم؟

۱ یک واحد به چپ - قرینه نسبت به محور $x$ها - یک واحد به پایین

۲ یک واحد به چپ - یک واحد به پایین - قرینه نسبت به محور $x$ها

۳ یک واحد به راست - قرینه نسبت به محور $y$ها - یک واحد به پایین

۴ یک واحد به راست - قرینه نسبت به محور $x$ها - یک واحد به پایین

۲۷ اگر $f(x) = x^{۳} + ۱$ و $g(x) = ۱ - x$ باشد، نمودار توابع $\mathrm{fog}\,(x)$ و $\mathrm{gof}\,(x)$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱ صفر　　۲ ۱　　۳ ۲　　۴ ۳



۲۸ تابع $f(x) = ۱ + \mathrm{Log}_{۲}\, x$ وارون خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱ صفر　　۲ ۱　　۳ ۲　　۴ ۳

۲۹ اگر $f$ تابعی خطی و $f^{-۱}(۱) = ۲$ باشد، به شرطی که $f$ و $f^{-۱}$ متقاطع نباشند، $f(۳)$ کدام است؟

۱ ۱　　۲ -۱　　۳ ۲　　۴ ۳

۳۰) کدام تابع از ناحیه‌ی اول عبور نمی‌کند؟

۱) $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x + ۱$
۲) $g(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۲x - ۶$
۳) $h(x) = -x^{۳} - ۲$
۴) $m(x) = (x-۱)^{۳} - ۱$

۳۱) کدام تابع زیر صعودی اکید است؟

۱) $\text{Sin}\, x$
۲) $-\sqrt{x} + ۱$
۳) $\text{Log}\,(x+۱)$
۴) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$

۳۲) تابع $f(x) = x^{۲}\sqrt{x^{۲}}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\sqrt{x^{۳}}, x \leq ۰$
۲) $-\sqrt[۳]{x}, x \leq ۰$
۳) $-\sqrt{x^{۳}}, x \geq ۰$
۴) $-\sqrt[۳]{x}, x \geq ۰$

۳۳) در تابع خطی $f$، $f(۳) = -۲$ و $f^{-۱}(۰) = -۱$ است. حاصل $f^{-۱}(۲ + f(-۳))$ کدام است؟

۱) ۵
۲) -۵
۳) ۷
۴) -۷

۳۴) توابع $f = \{(۱,-۱),(۲,۳),(۴,۱),(۰,۲)\}$ و $g = \{(۰,۳),(۱,-۳),(۲,-۲),(۳,۱)\}$ مفروض‌اند. آن‌گاه تابع $(f-g)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{(-۱,۰),(۲,۱),(۵,۲)\}$
۲) $\{(-۱,۰),(۴,۱),(۵,۲)\}$
۳) $\{(-۱,-۱),(۲,۱),(۵,۲)\}$
۴) $\{(۱,۰),(۴,۱),(۵,۲)\}$

۳۵) تابع $f(x) = a^{۲}x - ۳ax + ۳ + ۲x$ یک به یک نیست، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) -۲
۴) صفر

۳۶) اگر $f = \{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$، تابعی یک به یک باشد، مقدار a + m برابر کدام است؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) ۳
۴) -۲

۳۷) نمودار تابع خطی f محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $(-۱)$ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. حاصل $f^{-۱}(۳)$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۳۸) با فرض $f(x) = \sqrt{x + ۱ + \sqrt{x - ۳}}$، حاصل $f^{-۱}(۲)$ چقدر است؟

۱) تعریف نمی‌شود
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۳

۳۹) به ازای کدام مقدار $a$، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^{۳} + ۶x^{۲} + ax + ۱$ خط $۱۰y - x = -۱۰$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۱) ۱۵
۲) ۱۲
۳) ۹
۴) ۵

۴۰) اگر $x \geq ۰ , y = \frac{x+۲}{۴} - \frac{\sqrt{x+۱}}{۲}$ ضابطه تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۹

۴۱)

۱) ۲) ۳) ۲ ۴) ۳

۴۲) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |۲x - ۶| - |x + ۱|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

۱) $-x + ۷ ; x > ۸$ ۲) $\frac{۱}{۳}x + ۲ ; x > ۳$ ۳) $x + ۷ ; x > -۴$

۴) $\frac{۱}{۲}x - ۱ ; -۴ < x < ۸$

۴۳) به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (۱-a)x^{۲} + ۲\sqrt{۶}x - a$، همواره بالای محور x ها است؟

۱) $a < ۱$ ۲) $a < -۲$ ۳) $a > ۳$ ۴) $-۲ < a < ۱$

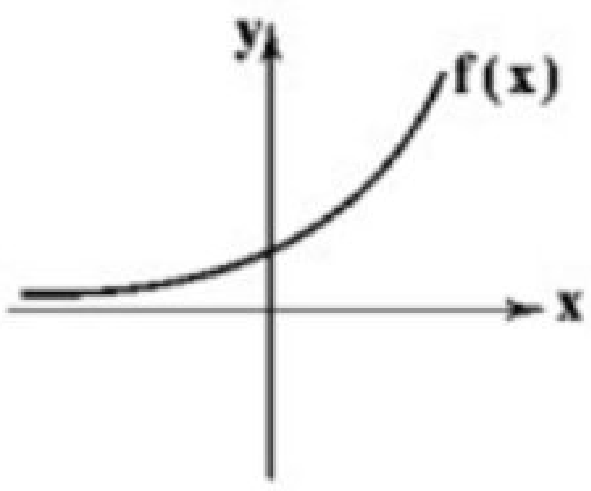
۴۴) کدام تابع زیر روی دامنه‌ی خود نزولی اکید است؟

۱) $y = \sqrt{x-۱} - ۲$ ۲) $y = \operatorname{Log} x - ۱$ ۳) $y = -x^{۳} - ۴$ ۴) $y = |x + ۲|$

۴۵) حدود $k$ کدام باشد تا تابع $y = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۲x - ۸ + k$ از ناحیه‌ی دوم عبور نکند؟

۱) $k \geq -۸$ ۲) $k \geq ۸$ ۳) $k \leq ۸$ ۴) $k \leq ۱۰$

۴۶) اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، جواب نامعادله‌ی $\left(\frac{۲}{f(x)}\right)^{۴-x} \leq \left(\frac{۲}{f(x)}\right)^{x-۲}$ کدام است؟




۱) $x \geq ۱$ ۲) $x \geq ۲$ ۳) $x \geq ۳$ ۴) $x \leq ۳$



۴۷) اگر $g(x) = \frac{۱}{x-۲}$ و $D_f = [۱, ۳]$ باشد، دامنه‌ی تابع $\operatorname{fog}(x)$ کدام است؟

۱) $\left[\frac{۷}{۳}, ۳\right]$ ۲) $[۲, ۳)$ ۳) $\left(۲, \frac{۷}{۳}\right]$ ۴) $(۲, ۳]$

۴۸) در بازه‌ی $(a,b)$، نمودار تابع $y=(x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار تابع $y=۴x^۴$ است. بیش‌ترین مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

۴۹) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{۲^x-\left(\frac{۱}{۲}\right)^x}{۲}$ را درنظر بگیرید. $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟

۱) $\text{Log}_۲(-۱+\sqrt{۵})$
۲) $\text{Log}_۲(۱+\sqrt{۵})$
۳) $\text{Log}_۲(۲+\sqrt{۵})$
۴) $\text{Log}_۲(۳+\sqrt{۵})$

۵۰) با فرض $f(x)=x^۲-۴x+۹\,;x\geq ۲$ و $g(x)=\dfrac{۳-x}{۲}$، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(-۹)$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۵۱) اگر برای توابع وارون‌پذیر $f$ و $g$ داشته باشیم: $f(x)=۲-۳g(x+۴)$ و $g^{-۱}(۳)=۵$، آنگاه $f^{-۱}(-۷)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۲

۵۲) تابع وارون تابع $f(x)=۳-\sqrt[۳]{x^۲+۸}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۶x+۱}\;;x\in\mathrm{R}$
۲) $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۶x+۱}\;;x\in\left(-\infty,۳\right]$
۳) $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۶x+۱}\;;x\in\mathrm{R}$
۴) $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۶x+۱}\;;x\in\left(-\infty,۳\right]$

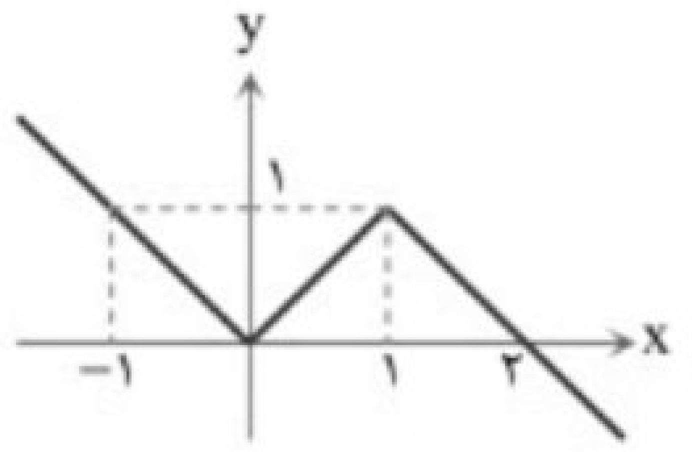
۵۳) اگر طول نقاط روی نمودار تابع f را نصف کرده و عرض آن‌ها را سه برابر کنیم، سپس نمودار را دو واحد به سمت چپ منتقل کرده و در نهایت نمودار را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، در این صورت ضابطه‌ی تابعی که نمودار آن رسم شده است، کدام است؟

۱) $y=۳f(-۲x+۲)$
۲) $y=۳f\left(\dfrac{-x}{۲}-۴\right)$
۳) $y=۳f(-۲x+۴)$
۴) $y=۳f\left(-\dfrac{x}{۲}-۲\right)$

۵۴) تابع وارون تابع $f(x)=x^۲-۴x+۲$ با دامنه‌ی $x\leq ۲$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x+۲}$
۲) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۲}$
۳) $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x-۲}$
۴) $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x-۲}$

۵۵) نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار کدام تابع زیر در بازه‌ی $[0,2]$ بر نمودار $f$ منطبق است؟




۱) $f(-x-2)$
۲) $f(2-x)$
۳) $-f(x-2)$
۴) $-f(x+2)$

۵۶) نمودار تابع $f(x)=-x^3$ در چند نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۵۷) نقطه‌ی $A(-2,a)$ روی منحنی تابع $y=f(x)$ قرار دارد. متناظر با این نقطه، نقطه‌ی $A'(5,4)$ روی منحنی تابع $y=1-f(3+bx)$ قرار دارد. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) -۲
۴) -۴



۵۸) اگر $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $x-1$
۲) $x+1$
۳) $x$
۴) $2x$

۵۹) نمودار تابع $f(x)=|x|$ را یک واحد به سمت $x$های مثبت انتقال داده و سپس نسبت به محور $x$ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را $a$ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $f$ را در ناحیه اول و دوم قطع کند. حدود $a$ کدام است؟

۱) $a>1$
۲) $a>2$
۳) $1<a<2$
۴) $2<a<3$

۶۰) نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$، با دامنه‌ی $R-\{2\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۴ و -۱
۲) ۴ و -۱
۳) -۴ و ۱
۴) ۴ و ۱

۶۱) قرینه‌ی نمودار تابع $y=2+\sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور $x$ها و ۳ واحد در جهت منفی محور $y$ها انتقال می‌دهیم و آن‌را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) -۲
۴) -۴

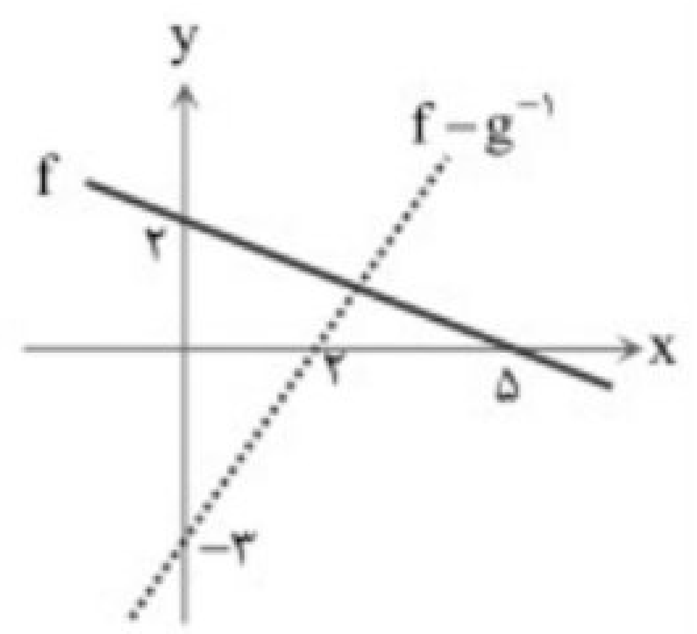
۶۲) تابع $y=2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور $x$ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور $y$ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور $x$ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-\dfrac{5}{2}$
۲) $-\dfrac{3}{2}$
۳) $\dfrac{5}{2}$
۴) $\dfrac{7}{2}$

۶۳) فرض کنید $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ و $g(x)=\dfrac{ax}{x+2}$. به‌ازای کدام مقدار $a$ تابع $gof^{-1}$ یک تابع خطی است؟

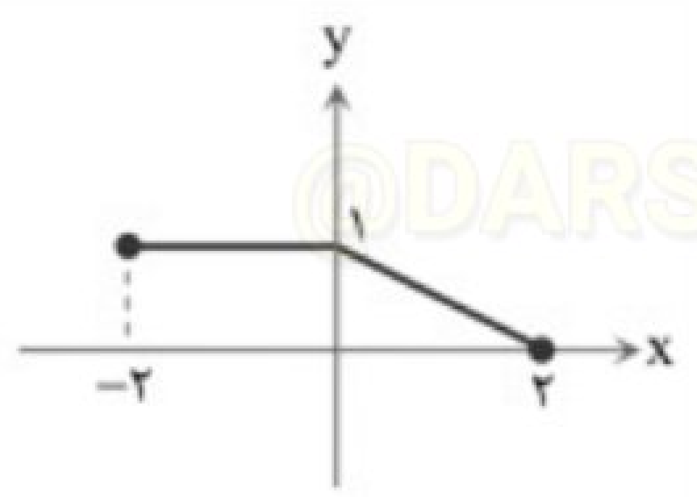
۱) ۱
۲) ۲
۳) -۲
۴) -۱

**۶۴** نمودار توابع $f$ و $f-g^{-۱}$ به‌صورت مقابل است. مقدار $g(۲)$ کدام است؟




۱) $\frac{۲۰}{۱۷}$ ۲) $\frac{۲۰}{۱۹}$ ۳) $\frac{۳۰}{۱۷}$ ۴) $\frac{۳۰}{۱۹}$

**۶۵** نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار توابع $f(x)$ و $y=۱-f(-x)$ چقدر است؟




۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**۶۶** تابع f تابعی وارون‌پذیر است. به طوری که $۲g(۲-۳x)=f(۲x)$ است. هرگاه $f^{-۱}(-۲)=۶$ باشد، مقدار $g^{-۱}(-۱)$ چه عددی است؟

۱) $-۵$ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) -۷

**۶۷** معادله‌ی $x^۴-۳x^۳+۳x^۲-x=۱$، چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

**۶۸** اگر ضرایب $x^۲$ در هر دو چندجمله‌ای $f(x)=a(x-۱)^۳+۲(x+۱)^۲$ و $g(x)=۳(x+۱)^۳+x^۲$ یکسان باشد. نمودار تابع $f(x)$ محور $y$ها را به چه عرضی قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۸}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۱۴}{۳}$

**۶۹** تابع $f(x)=(-۱)^{[x]}$ در بازه‌های $[۰,۱]$ و $\left[۱,۲\right)$ به ترتیب چگونه هستند؟

۱) صعودی - ثابت ۲) نزولی - ثابت ۳) ثابت - ثابت ۴) نزولی - نزولی

**۷۰** نمودار تابع $f(x)=\mathrm{Cos}\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)$، در کدام بازه‌ی زیر اکیداً نزولی است؟

۱) $\left(۰,\frac{۵\pi}{۶}\right)$ ۲) $\left(\frac{۲\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۳}\right)$ ۳) $(۰,\pi)$ ۴) $\left(-\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}\right)$

۷۱ اگر $D_{f(x)} = [a, ۳]$ و $D_{۲f(x-۱)} = [-۱, b+۳]$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۲-   ۲) ۱   ۳) ۱-   ۴) صفر

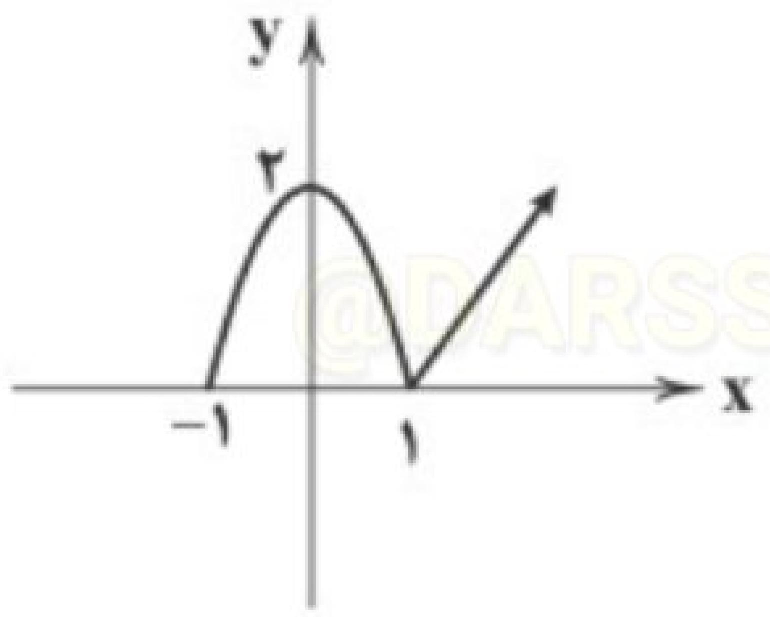
۷۲ اگر $f$ تابعی نزولی اکید با دامنه‌ی $R$ باشد، در این صورت جواب نامعادله‌ی $f(x+۱) > f\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)$ کدام است؟

۱) $(-۱, +\infty)$   ۲) $(۱, ۲)$   ۳) $(-\infty, -۱) \cup (۱, ۲)$   ۴) $(-۱, ۱) \cup (۲, +\infty)$

۷۳ به ازای چند مقدار صحیح $m$ تابع $f(x) = (۱۶ - m^۲)\,\mathrm{Log}_{۲}\, x$ صعودی اکید است؟

۱) ۵   ۲) ۷   ۳) ۶   ۴) ۸

۷۴ اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، برد کدام تابع زیر با برد $f(x)$ متفاوت است؟




۱) $f(۳x-۱)$   ۲) $f\left(۱-\frac{x}{۲}\right)$   ۳) $۱-f\left(\frac{x}{۲}\right)$   ۴) $f(x-۲)$

۷۵ اگر تابع $f(x) = -(۱-x)^۳ + m$ صعودی اکید باشد، حدود کامل $m$ کدام است؟

۱) $m \geq ۱$   ۲) $m \leq ۰$   ۳) $m \geq ۰$   ۴) $m \in R$

۷۶ تابع $y = |x|\,(x-۱)$ در فاصله‌ی $[۰, a]$ نزولی اکید است. حداکثر مقدار $a$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$   ۲) $\frac{۱}{۴}$   ۳) $\frac{۱}{۳}$   ۴) $\frac{۱}{۲}$

۷۷ تابع $f(x) = -۲x + \left|\frac{۴x-۱}{a}\right|$ اکیداً نزولی است، حدود $a$ کدام است؟

۱) $|a| > ۲$   ۲) $|a| > ۱$   ۳) $|a| < ۱$   ۴) $|a| < ۲$

۷۸ تابع وارون $x \leq ۲$ و $f(x) = -x^۲ + ۴x + ۱$ نمودار تابع $g(x) = \frac{۲x+۵}{۳}$ را با طول $\alpha$ قطع می‌کند. $g\left(\frac{۵\alpha}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۵-   ۳) $\frac{۱۳}{۳}$   ۴) $-\frac{۱۳}{۳}$

۷۹) با توجه به ماشین مقابل اگر $f(x-۱) = x+۲$ باشد، $g\left(\frac{۱}{۴}\right)$ چقدر است؟

$(x+۱) \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \frac{۱}{x}$

۱) $-\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

۸۰) کدام تابع وارون‌پذیر نیست؟

۱) $f(x) = x^۳ + ۶x^۲ + ۱۲x$ ۲) $g(x) = ۱ - \sqrt[۳]{۱-x}$

۳) $h(x) = x^۲\,|x|$ ۴) $m(x) = x\,|x|$

۸۱) ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = |x|\,\sqrt{-x} + ۲$ کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{۴x + x^۲ - ۱۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{۴x + x^۲ - ۲۲}$

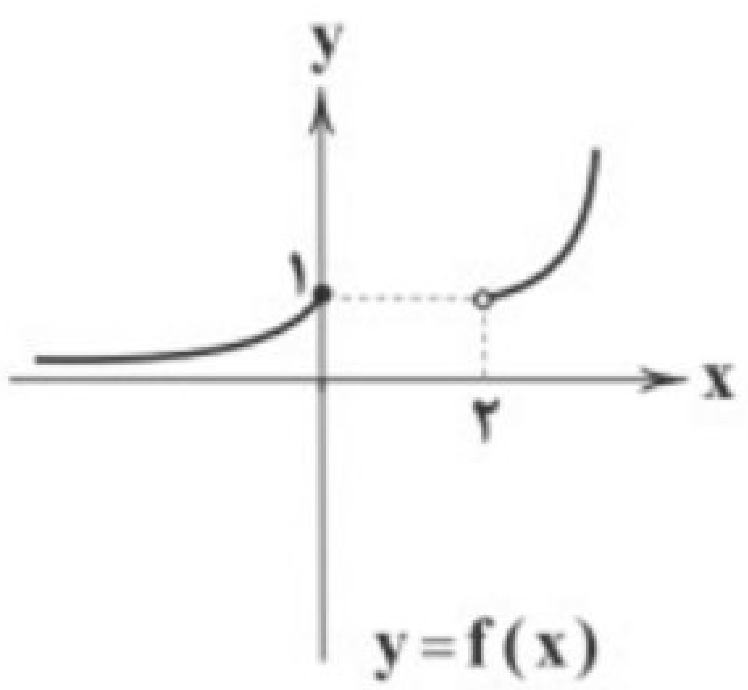
۳) $\sqrt[۳]{۴x - x^۲ - ۴}$ ۴) $\sqrt[۳]{x^۲ - ۴x - ۴}$

۸۲) اگر ورودی و خروجی دستگاه زیر با هم برابر باشند آن‌گاه $g\left(\frac{۱}{۲}\right)$ چقدر است؟

ورودی $\rightarrow \boxed{\frac{۱}{۱+\sqrt{x}}} \rightarrow \boxed{g(x)} \rightarrow$ خروجی

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

۸۳) نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{(x^۲+۱)f^{-۱}(x)}$ کدام است؟

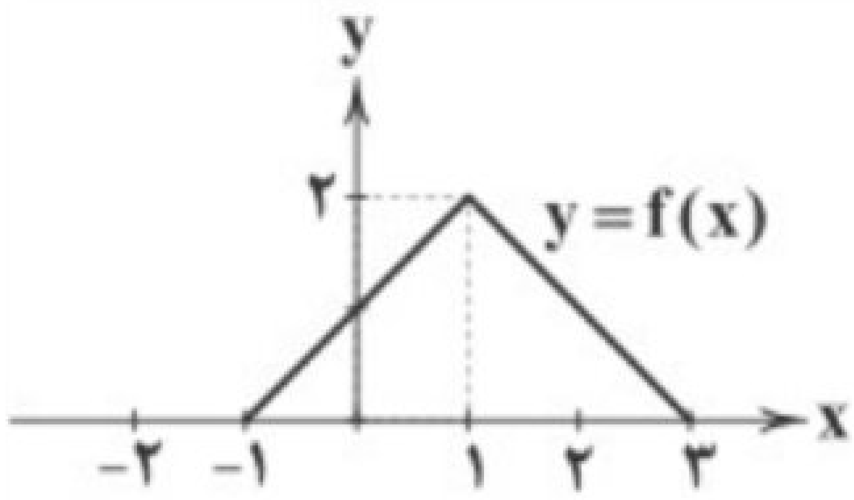


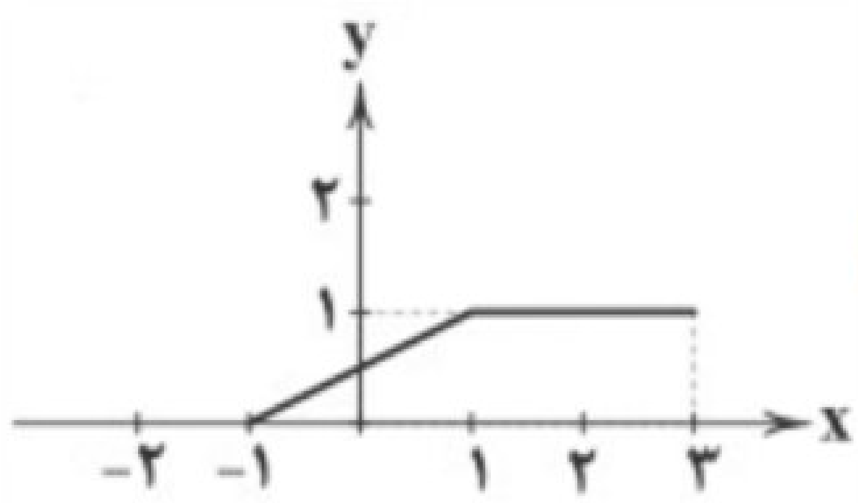

۱) $(۰, +\infty)$ ۲) $(-\infty, ۰) \cup (۲, +\infty)$ ۳) $(۲, +\infty) \cup \{۰\}$ ۴) $[۱, +۵)$

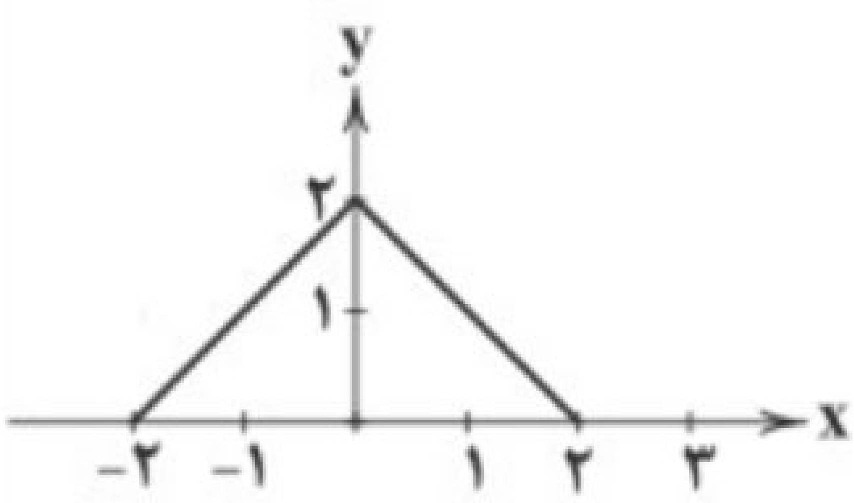
۸۴) به ازای یک مقدار صحیح $a$ تابع $f(x) = |(a+۱)x+۱| - \frac{x}{۲}$ اکیداً نزولی است. $f(۳)$ کدام است؟

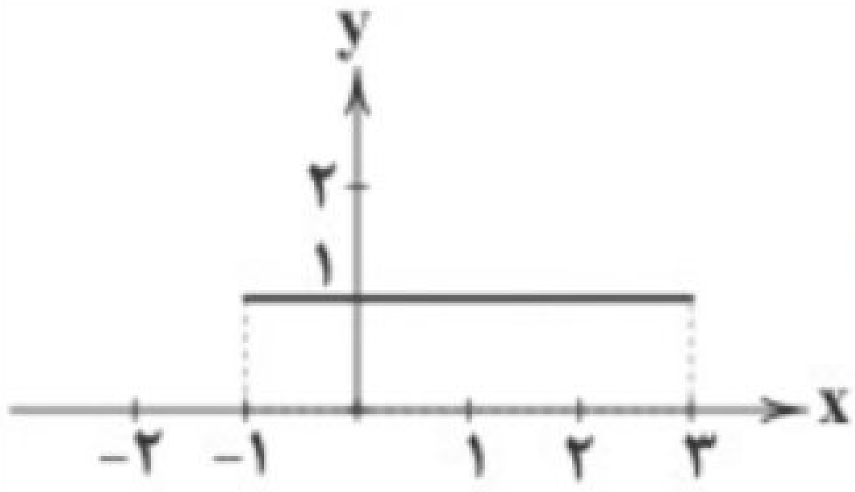
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۱-

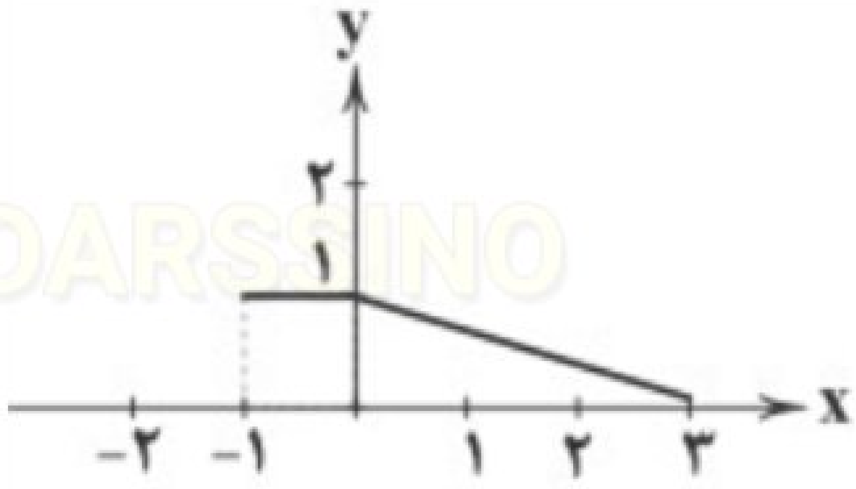
**۸۵** اگر $f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $g(x)=f(x)-f(۲-x)+۱$ چگونه است؟




۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

**۸۶** اگر $f(x)=۲x-|x-۱|$ و $g(x)=|x+۲|-۲x$ باشد، تابع $h(x)=f(x)+g(x)$ در کدام فاصله اکیداً صعودی است؟

۱) $R$ ۲) $[-۲,۱]$ ۳) $[-۲,۲]$ ۴) $[۰,۲]$

**۸۷** ضابطه وارون تابع $f(x)=\sqrt{۲\sqrt{x}+x}$ با شرط $x\geq ۴$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=x^۲+۲-۲\sqrt{x^۲+۱}\;;x\geq ۲\sqrt{۲}$

۲) $f^{-۱}(x)=x^۲+۲+۲\sqrt{x^۲+۱}\;;x\geq ۲\sqrt{۲}$

۳) $f^{-۱}(x)=x^۲+\sqrt{x^۲+۱}-۷\;;x\geq ۲\sqrt{۲}$

۴) $f^{-۱}(x)=x^۲+۲\sqrt{x^۲+۱}\;;x\geq ۲\sqrt{۲}$

**۸۸** به ازای چه مقادیری از $a$، $f(x)=\begin{cases} x^۲-ax+۲ & x\leq -۲ \\ -\sqrt{x+۶} & x>-۲ \end{cases}$ یک‌به‌یک است؟

۱) $a\geq -۴$ ۲) $a\leq ۴$ ۳) $-۴\leq a\leq ۴$ ۴) $-۴<a<۴$

**۸۹** $f$ تابعی خطی است و رابطه‌ی $۳f(-۵x)=f(۲-۱۵x)-۷$ برقرار است. اگر $f^{-۱}(-۹)=-۲$ باشد، آن‌گاه به ازای کدام مقدار $k$ رابطه‌ی $f^{-۱}(k)=-\frac{۲}{۵}$ برقرار است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) ۱۱ ۴) -۱۱

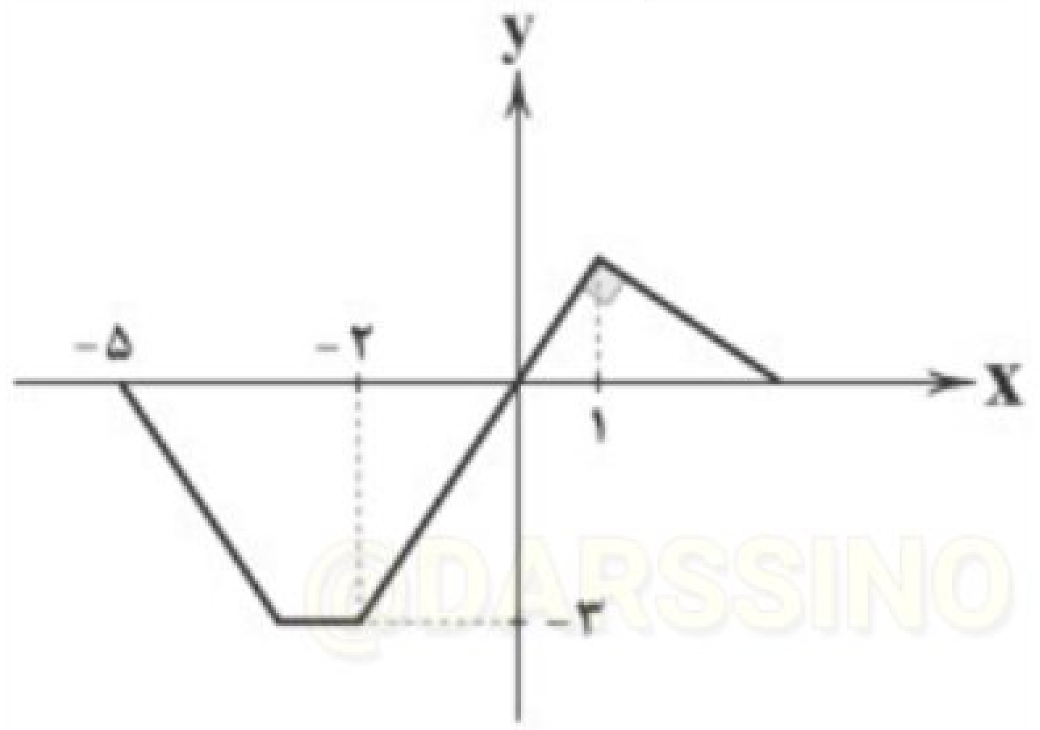
۹۰) اگر تابع $f$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}۳x-k & x<۳\\ ۴x-۱ & x\geq ۳\end{cases}$ وارون‌پذیر باشد، حداقل مقدار $k$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) -۲　　۳) ۳　　۴) -۳

۹۱) برد تابع f بازه‌ی $(-۳,۱]$ است. برد تابع $y=-۲f(۳x-۱)+۳$ کدام‌یک از موارد زیر است؟

۱) $(-۸,۰]$　　۲) $(-۱۲,۰]$　　۳) $[۱,۹)$　　۴) $[-۱۰,۲)$

۹۲) شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را نمایش می‌دهد. دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{(x+۳)f(x+۲)}$ کدام است؟




۱) $[-۹,-۴]\cup\left[-۳,-\frac{۳}{۴}\right]$　　۲) $[-۹,-۴]\cup\left[۱,\frac{۱۳}{۴}\right]$　　۳) $\left[-۳,\frac{۱۳}{۴}\right]$　　۴) $\left[-۱,\frac{۱۳}{۴}\right]$

۹۳) اگر درجه تابع $y=(۳x^۳-۱)^۳-mx(x^۴-۱)^۲+۳$، نسبت به $x$، ۹ نباشد، درجه آن چند است؟

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۸

۹۴) اگر تابع $y=|x-۲|+k|x-۱|+x$ صعودی اکید باشد، حدود $k$ کدام است؟

۱) $k>۰$　　۲) $k<۰$　　۳) $k>-۲$　　۴) نشدنی

۹۵) تابع $f(x)=mx^۲-nx-k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟
$\{(m,n-۱),(۰,k),(n-۱,m^۲+۲m-۱),(۳k+۲,۲k+۱)\}$

۱) -۱　　۲) $-\sqrt{۵}$　　۳) ۱　　۴) $\sqrt{۵}$

۹۶) اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}, x\geq ۱$ باشد، $(gog)(۱)$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۴　　۳) ۹　　۴) صفر

۹۷) اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $gof\left(-\frac{۵}{۳}\right)$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) -۴　　۳) -۶　　۴) ۶

۹۸) وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{\mathrm{mx}-۱}$ در دامنه محدود، خط $۵y-۱۰x=۱۲$ را در نقطه‌ای به عرض ۷/۲ قطع می‌کند. مقدار $f\left(\frac{۴}{m}\right)$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ‏ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ‏ ۳) $۴\sqrt{۱۵}$ ‏ ۴) $۲\sqrt{۱۵}$

۹۹) تابع $f(x)=|۲x-۱|+\mathrm{bx}$ بازه هم صعودی، هم نزولی دارد. مقدار b و بازه موردنظر کدام می‌تواند باشد؟

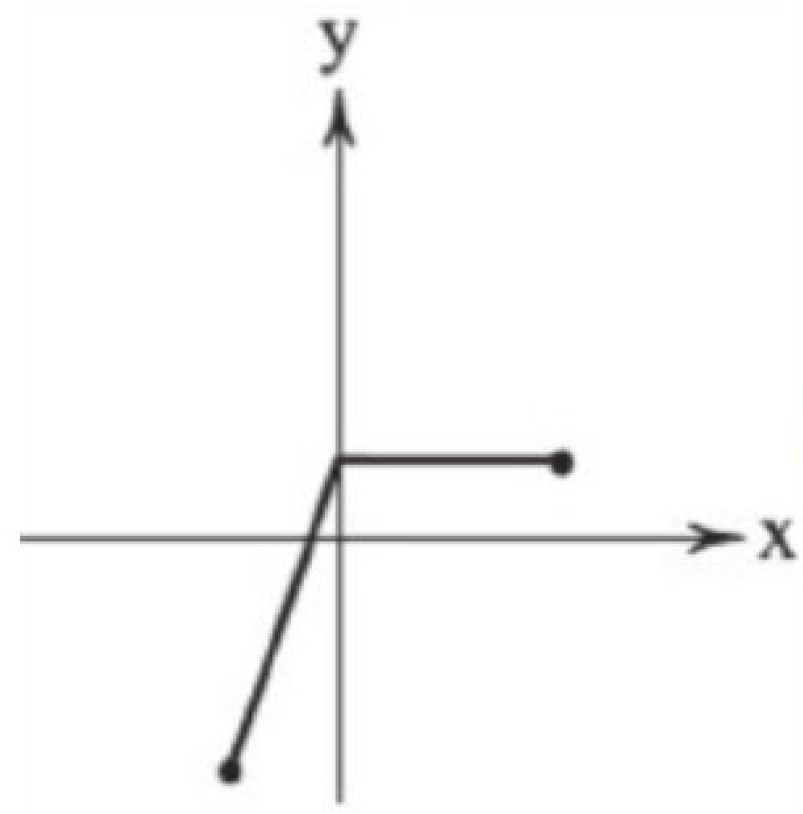
۱) $\left[\frac{۱}{۲},+\infty\right), b=۲$ ‏ ۲) $[۰,+\infty), b=۲$

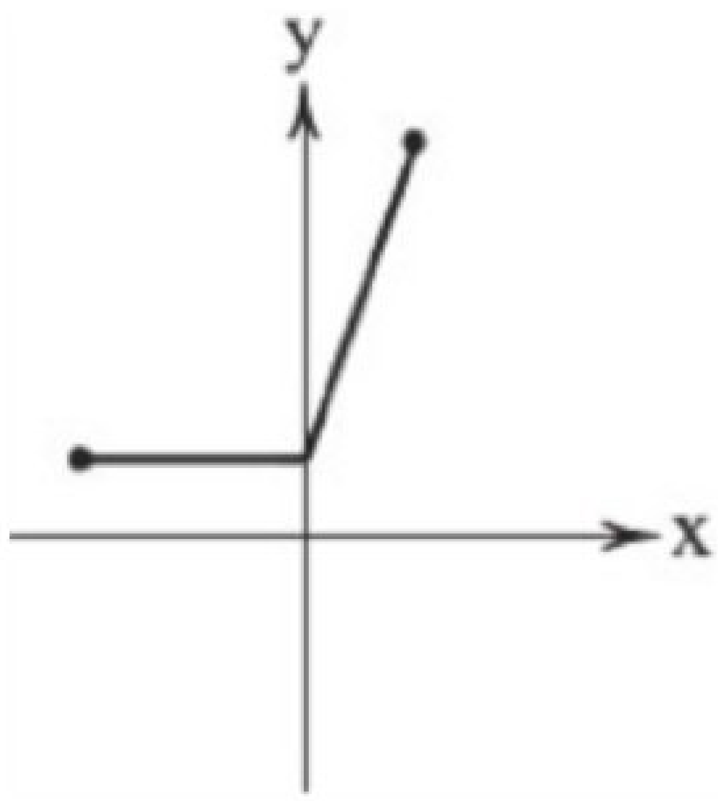
۳) $\left(-\infty,\frac{۱}{۲}\right], b=-۲$ ‏ ۴) $\left[\frac{۱}{۲},+\infty\right), b=-۲$

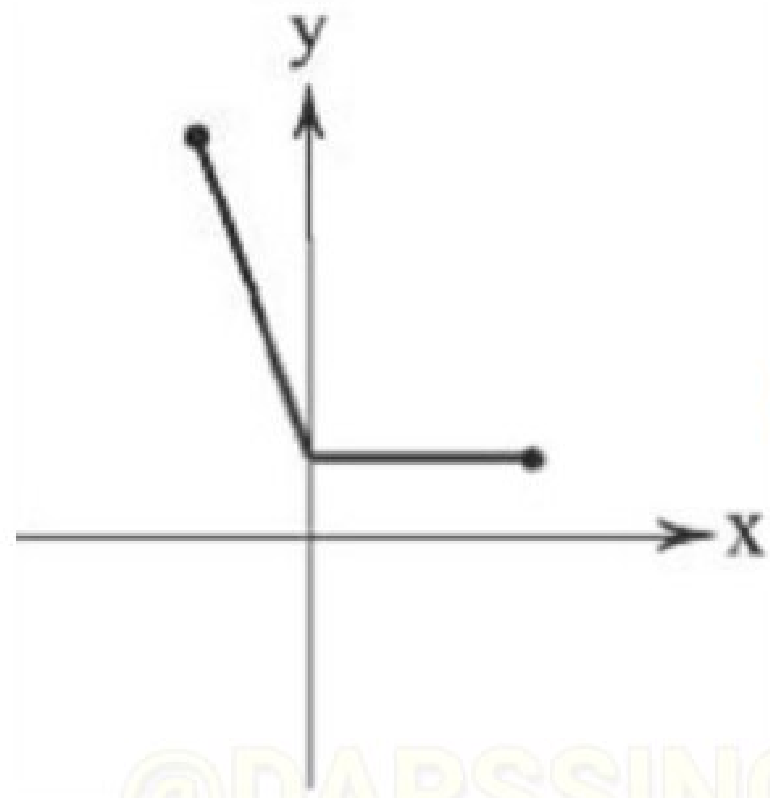
۱۰۰) اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۴x & , x\geq -۲ \\ -\sqrt{-۲-x}+k & , x<-۲ \end{cases}$ اکیداً صعودی باشد، حداکثر مقدار k کدام است؟

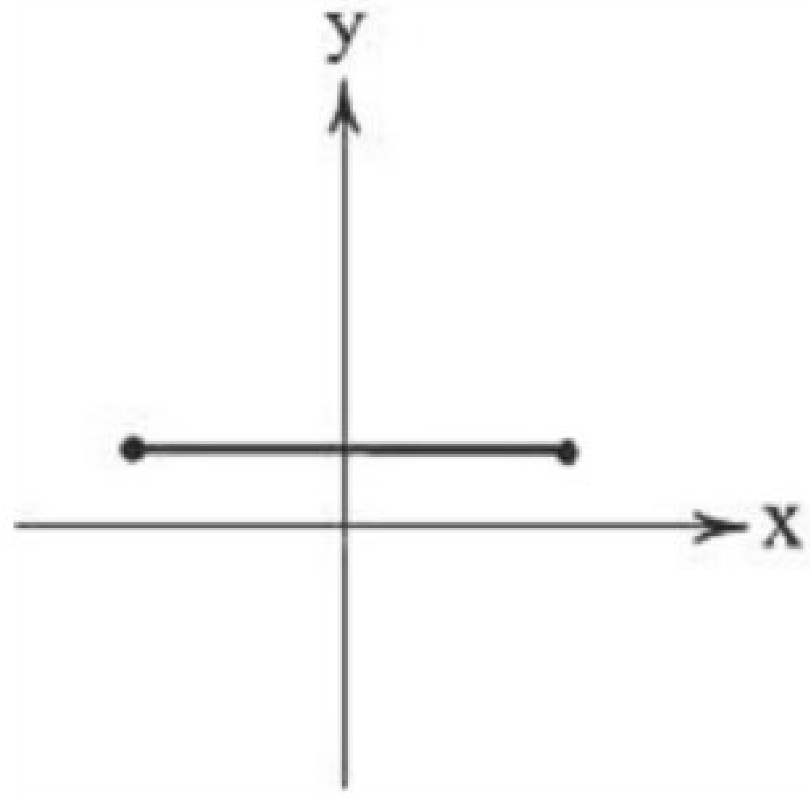
۱) ۴- ‏ ۲) ۴ ‏ ۳) ۳- ‏ ۴) ۳

۱۰۱) در صورتی که $g(x)=x-|x|$ و $f(x)=۱-۲x$ باشد، نمودار تابع $(\mathrm{fog})(x)$ در بازه $[-۱,۲]$ کدام است؟

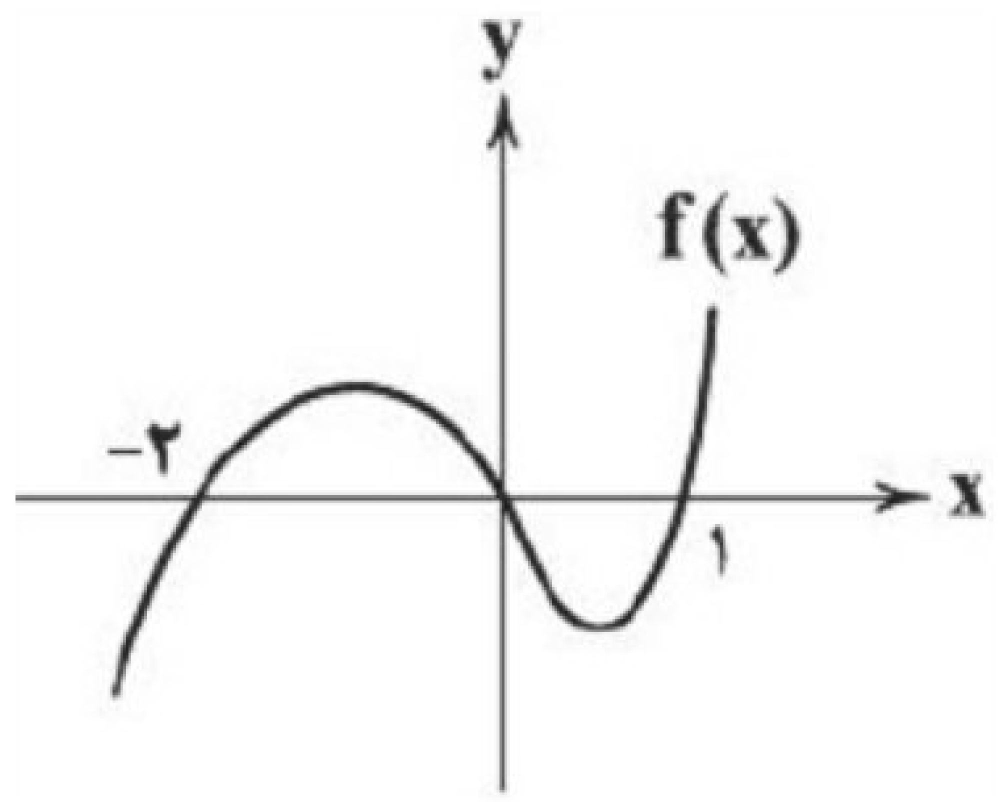
۱)



۲)



۳)



۴)


۱۰۲) نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنهٔ تابع $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)f(x+۱)}}{\sqrt{-x-۱}}$ کدام است؟




۱) $[-۴,-۱]$ ۲) $(-\infty,-۱)$

۳) $[-۳,-۱]$ ۴) $(-\infty,-۳]\cup[-۲,-۱)$



۱۰۳) قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۴x-۱}{x+۱}$ نسبت به خط $y=x$ را دو واحد به سمت $y$های مثبت انتقال می‌دهیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. $g(x+۴)$ کدام است؟

۱) $۱+\dfrac{۵}{x}$ ۲) $۱+\dfrac{۴}{x}$ ۳) $۱-\dfrac{۵}{x}$ ۴) $۱-\dfrac{۴}{x}$

۱۰۴) اگر $f(x)=\dfrac{۲x-۱}{۳x+۱}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x}$، جواب نامعادلهٔ $(\text{fog})(x)<۰$ کدام است؟

۱) $\left(\dfrac{۱}{۲۷},\dfrac{۱}{۸}\right)$ ۲) $\left(-\dfrac{۱}{۲۷},\dfrac{۱}{۸}\right)$ ۳) $\left(-\dfrac{۱}{۸},\dfrac{۱}{۲۷}\right)$ ۴) $\left(-\dfrac{۱}{۸},+\infty\right)$

۱۰۵) تابع $f(x)=\dfrac{x^۲}{۳}-\dfrac{x}{a}+۱$ در بازه $(۱,۲)$ وارون‌پذیر نیست. حدود a کدام است؟

۱) $\left(\dfrac{۲}{۳},\dfrac{۴}{۳}\right)$ ۲) $\left(\dfrac{۴}{۳},\dfrac{۵}{۳}\right)$ ۳) $\left(\dfrac{۳}{۴},\dfrac{۳}{۲}\right)$ ۴) $\left(\dfrac{۱}{۳},\dfrac{۲}{۳}\right)$

۱۰۶) اگر $f(x)=x^۲+x-۲,\ g(x)=\dfrac{۱}{۲}(x-۳)$ ، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار گیرند، برابر کدام بازه است؟

۱) (-۵ و ۱) ۲) (-۱ و ۵) ۳) (-۲ و ۱) ۴) (۱ و ۵)

۱۰۷) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{|x|}{x}\sqrt{۱-x^۲}\ ;x^۲\neq ۱$ و $f(۰)=۰$ ، ضابطه‌ی تابع وارون آن برابر کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $-f(x)$ ۳) $\text{x}f(x)$ ۴) $-\text{x}f(x)$

۱۰۸) اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$، دامنه‌ی تابع gof کدام است؟

۱) $(0,8)\cup(8,+\infty)$
۲) $R-\{0,8\}$
۳) $R-\{0\}$
۴) $(0,+\infty)$

۱۰۹) اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ باشند. دامنه‌ی تابع fog ، کدام است؟

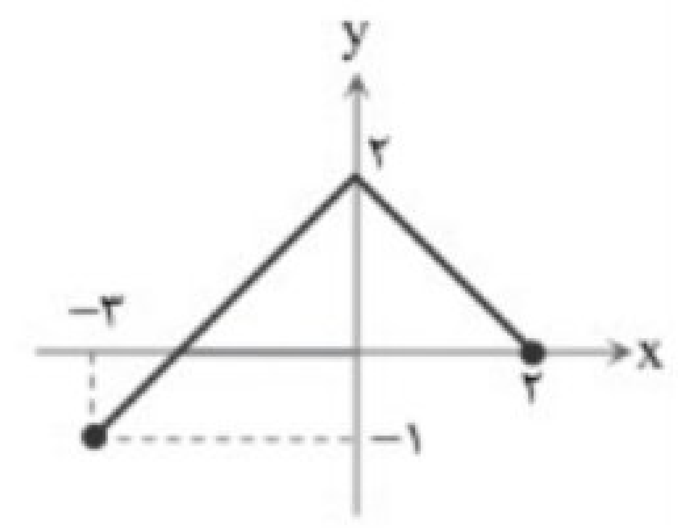
۱) $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$
۲) $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$
۳) $(-2,0)$
۴) $\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$

۱۱۰) به ازای کدام مقدار m تابع $f(x)=\dfrac{mx-3}{x+2m-6}$ با تابع وارونش مساوی است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) ۳
۴) -۳

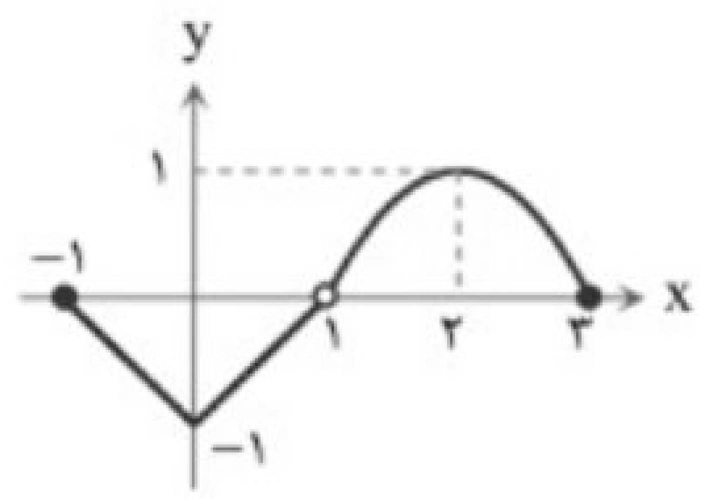
۱۱۱) اگر نمودار $y=f(x)$ مطابق شکل مقابل باشد، اشتراک دامنه و برد $y=3f\left(-\dfrac{x}{2}\right)$ کدام است؟






۱) $[-4,6]$
۲) $[-3,6]$
۳) $[-2,4]$
۴) $[-2,3]$

۱۱۲) اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت شکل مقابل باشد، در این صورت معادله‌ی $f(2-|x|)=|x|-1$ چند ریشه دارد؟




۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۱۳) فرض کنید $Q(x)$ خارج‌قسمت تقسیم عبارت $P(x)=x^3-5x^2+8x-2$ بر $x-a$ باشد، اگر $Q(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار $a$ کدام است؟ $(a\neq 1)$



۱) -۲
۲) ۲
۳) ۳
۴) -۳

۱۱۴) اگر $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ و $g(x)=x+4$ باشند، مجموع جواب‌های معادله‌ی $(f^{-1}og)(x)=(gof^{-1})(x)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) -۸
۳) -۶
۴) صفر

۱۱۵) اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x)=x+4$ باشند، جواب معادله‌ی $(\text{gof})(x)=(\text{fog})(x)$، کدام است؟

۱) ۷- و ۱-
۲) ۷- و ۱
۳) ۷ و ۱-
۴) ۷ و ۱

۱۱۶) نمودار تابع $y=2^{|\text{Sin}\, x|}$ را ابتدا به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور $x$ها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور $y$ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور $x$ها در فاصله‌ی $[0,\pi]$، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۱۷) فرض کنید $g(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ و $f(x)=1-x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۱۸) نمودار منحنی $y=\sqrt{\sqrt{x}+3}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور $x$ها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام‌یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به دست آمده، قرار دارد؟

۱) $(1-\sqrt{5},0)$
۲) $(-\sqrt{5},0)$
۳) $(0,1-\sqrt{5})$
۴) $(0,-\sqrt{5})$

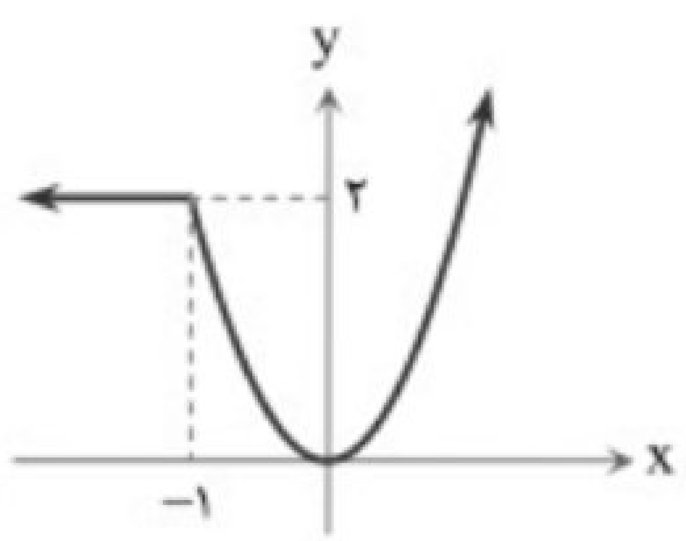
۱۱۹) فرض کنید $f(x)=\begin{cases} -1 & x<-1 \\ x & -1\leq x\leq 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$. ماکزیمم مقدار تابع $\text{gof}-\text{fog}$، کدام است؟

۱) ۱-
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۱

۱۲۰) فرض کنید $f(x)=x(1-x^2)$ و $g(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(\text{fof})\text{og}$، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۲۱) نمودار تابع $f$ به‌صورت مقابل است. اگر تابع $y=1-2\text{f}(-3\text{x})$ در بازه‌ی $[a,b]$ نزولی اکید باشد، حداکثر $b-a$ کدام است؟




۱) $\frac{1}{6}$
۲) ۶
۳) $\frac{1}{3}$
۴) ۳

۱۲۲) اگر $f(x)=f^{-1}(3)-2x+1$ آن‌گاه مقدار $f^{-1}(-3)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۱۲۳) $f$ تابعی خطی با شیب منفی است به‌طوری که $(fog)(x)=6x+5$ و $(f-g)(x)=5-5x$. مقدار $f(2)$ چقدر است؟

۱) ۳- ۲) ۵- ۳) ۷- ۴) ۹-

۱۲۴) اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ در این‌صورت دامنه‌ی توابع fog و gof به‌ترتیب کدام است؟

۱) $D_{fog}=[1,+\infty)$ و $D_{gof}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

۲) $D_{fog}=[1,+\infty)$ و $D_{gof}=R$

۳) $D_{fog}=R$ و $D_{gof}=[1,+\infty)$

۴) $D_{fog}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ و $D_{gof}=[1,+\infty)$



۱۲۵) اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ آنگاه حاصل $g^{-1}of^{-1}(5)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۱۲۶) مجموع جواب‌های تساوی مقابل کدام است؟ $\frac{x^2-x+1}{x^2-3x}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x+1}{x}$

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۵-

۱۲۷) اگر $f(x)=x^3+2x+1$ و $g(x)=x-1$ باشد، ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $fog(x)=1-3x^2$ در کدام فاصله قرار دارد؟

۱) $\left(\frac{3}{5},1\right)$ ۲) $\left(0,\frac{3}{5}\right)$ ۳) $(-3,0)$ ۴) $(-5,-3)$

۱۲۸) معادله‌ی $x^4-3x^3+3x^2-x=1-(x-1)^3$ با شرط $x>0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۱۲۹) اگر در تابع $y=f(x)$ با افزایش $x$، مقادیر $f(x)$ افزایش یابد، در این صورت جواب نامعادله‌ی $f(2-|x|)>f\left(\frac{2}{|x|}\right)$ کدام است؟



۱) $2<|x|<3$ ۲) $1<|x|<2$ ۳) $3<|x|<4$ ۴) $0<|x|<1$

۱۳۰) اگر $f$ تابعی یک‌به‌یک باشد، معادله‌ی $f\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)-f\left(\frac{x-2}{2x+2}\right)=0$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۳۱) فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y = x^۳ + ۳x - ۱۲$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$  ۲) $\sqrt{۳}$  ۳) $۲\sqrt{۲}$  ۴) $\sqrt{۲}$

۱۳۲) اگر درجه تابع $y = (۳x^۲ - ۱)^۳ - mx(x^۴ - ۱)^۲ + ۳$، نسبت به $x$، ۹ نباشد، درجه آن چند است؟

۱) ۵  ۲) ۶  ۳) ۷  ۴) ۸

۱۳۳) اگر تابع $y = |x - ۲| + k|x - ۱| + x$ صعودی اکید باشد، حدود $k$ کدام است؟

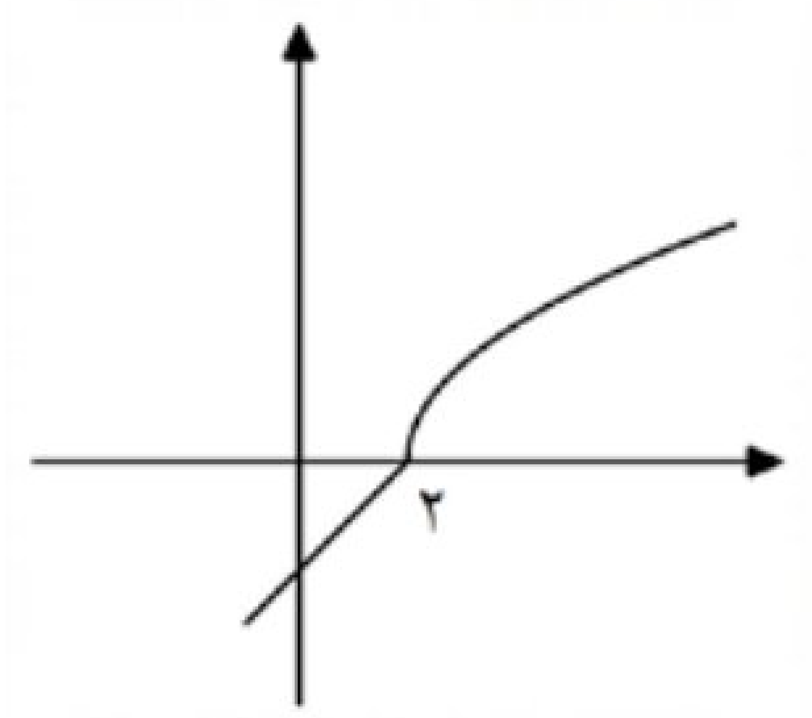
۱) $k > ۰$  ۲) $k < ۰$  ۳) $k > -۲$  ۴) نشدنی

۱۳۴) توابع $f(x) = \text{Log}(۲x - ۵)$ و $g(x) = x + \sqrt{۲x - ۴}$ را درنظر بگیرید. اگر نمودار $y = g^{-۱}of^{-۱}(x)$ محور $y$ها را در $\alpha$ قطع کند، مقدار $\alpha$ کدام است؟

۱) $۴ - \sqrt{۲}$  ۲) $۴ - \sqrt{۳}$  ۳) $۴ + \sqrt{۲}$  ۴) $۴ + \sqrt{۳}$

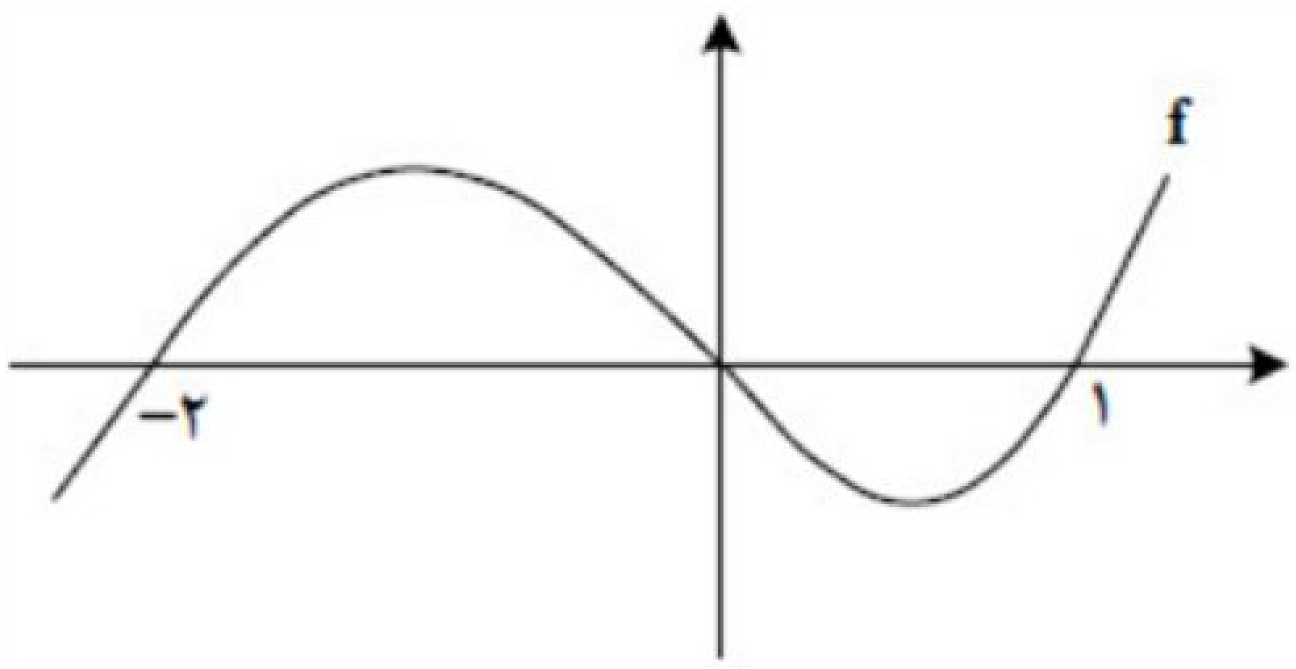


۱۳۵) اگر $f(x) = \left|\frac{۱}{۲}x - ۱\right|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x + ۲))) = ۰$ چند ریشه دارد؟




۱) ۱  ۲) ۲  ۳) ۳  ۴) ۴

۱۳۶) نمودار مقابل، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲ + x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟






۱) ۳  ۲) ۶  ۳) ۴  ۴) ۵

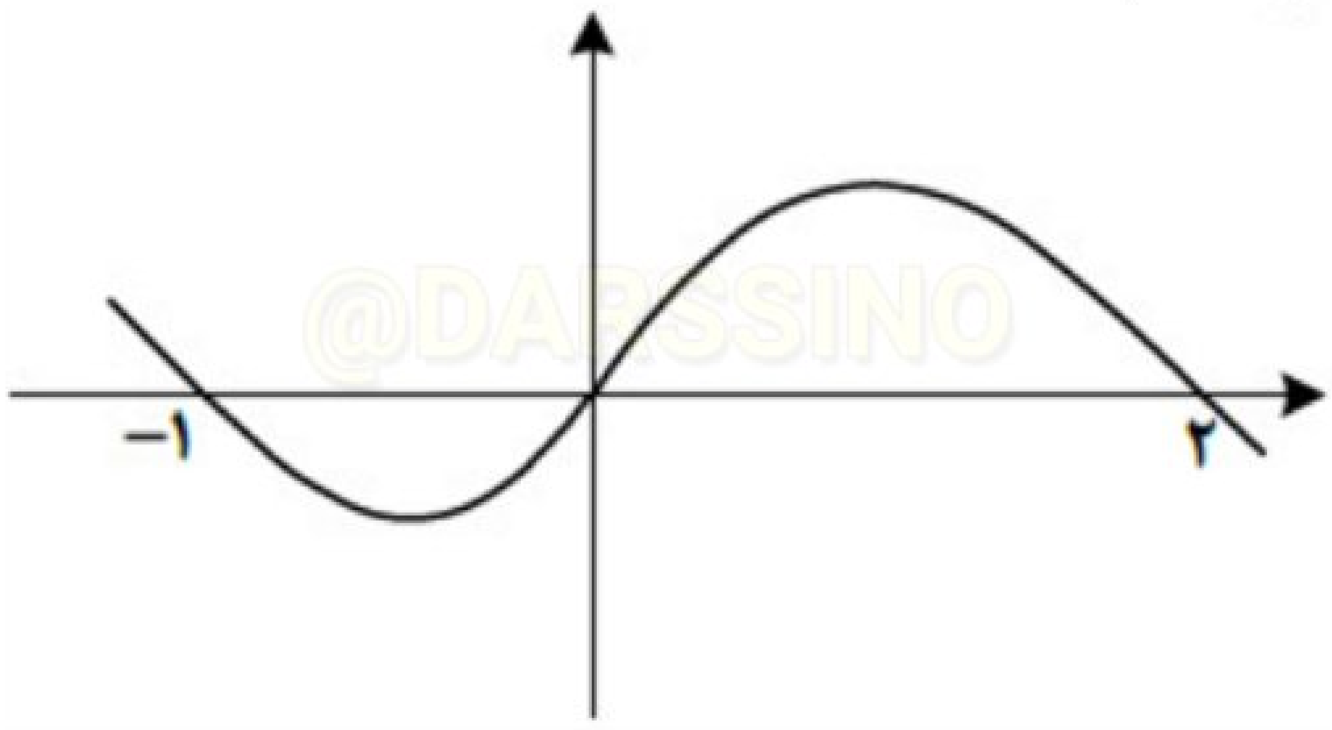
۱۳۷) تابع $f(x) = \begin{cases} ۲ - ۳x & ۲x + ۳ \leq ۰ \\ ۲ + ۲mx - x^۲ & ۲x + ۳ > ۰ \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱۹)$ کدام است؟

۱) ۳ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) صفر

۱۳۸) تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(۲m^۲ - ۹m - ۲) < f(m^۲ - ۴m + ۴)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۵ ‏ ۴) ۶

۱۳۹) شکل مقابل، نمودار $f(x-۲)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\dfrac{f(۱-x)}{f(x+۱)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟




۱) ۴ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) صفر ‏ ۴) بیش از ۴

۱۴۰) تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} & ۲x - ۵ \geq ۰ \\ -۲x^۲ + ax - ۲۱ & ۲x - ۵ < ۰ \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به ازای بزرگ‌ترین مقدار صحیح a باشد، مقدار $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟

۱) ۲ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۴ ‏ ۴) ۱

۱۴۱) اگر مجموع جواب‌های معادله $۲f(۲x-۱) = ۳g(-x+۲)$ برابر عدد ۱۰ باشد در صورتی‌که این معادله دارای ۵ جواب باشد، مجموع جواب‌های معادله $f(۳x-۲) = \frac{۳}{۲}g\left(\frac{-۳x+۵}{۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۳}$ ‏ ۲) $\frac{۱۰}{۳}$ ‏ ۳) $\frac{۲۵}{۳}$ ‏ ۴) ۵

۱۴۲) اگر تابع $f(x)$ اکیداً نزولی با دامنه‌ی $R$ و $f(-۱) = ۰$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\dfrac{(x^۴ - x)(-x+۲)}{f(x+۲)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۴ ‏ ۳) ۶ ‏ ۴) بی‌شمار

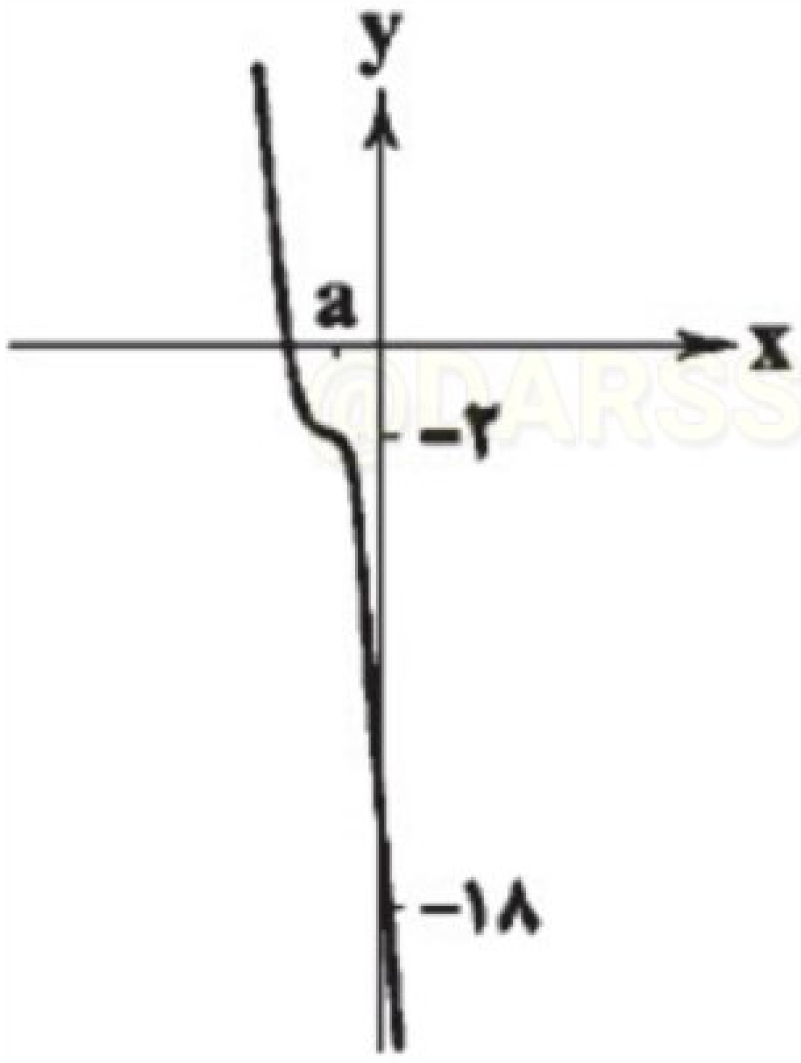
۱۴۳ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}(۲a-۴)x^۳-۲ & x\leq ۱\\ ax^۲-۲x+۳ & x>۱\end{cases}$ اکیداً صعودی باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد صحیح قابل قبول برای $a$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۴ اگر $f(x)$ اکیداً صعودی و $g(x)=f(-x)-f(x)$ باشد و دامنهٔ تابع $h(x)=\sqrt{g^{-۱}(|۲x-۱|)-g^{-۱}(|x+۱|)}$ به صورت $D_h=[a,b]$ باشد، حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۵ اگر نمودار تابع $f(x)=-۲x^۳-۳mx^۲+۴nx-۲k$ به صورت زیر باشد، مقدار $m+n+k$ کدام است؟




۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۴۶ اگر $f(x)=-۲|-x+۱|+۲$ و $g(x)=۲\operatorname{Sin}x$، تابع $(fog)(x)$ در کدام بازه نزولی اکید است؟

۱) $\left[۰,\frac{\pi}{۶}\right]$ ۲) $\left[\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\right]$ ۳) $\left[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲}\right]$ ۴) $\left[\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۶}\right]$

۱۴۷ تابع $f(x)=|x|\left|\frac{۱}{۳}x^۲+x+۱\right|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) صفر ۴) ۱

# پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=x^{۲}-۲[x]\Rightarrow f(\sqrt{۳})=۳-۲\left[\sqrt{۳}\right]=۳-۲=۱$$

$$-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f\left(-\frac{۱}{۲}f(\sqrt{۳})\right)=f\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}-۲\left[-\frac{۱}{۲}\right]=\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$$

۲ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x)=[x]$ است. برای تعیین مقادیر تابع $f(x-f(x))$ یا همان $f(x-[x])$، کافی است به این نکته توجه کنیم که تابع داخلی، یعنی $x-[x]$ همواره در فاصله‌ی $[۰,۱)$ تغییر می‌کند، پس داریم:

$$f(x)=[x]\Rightarrow f(x-f(x))=f(x-[x])=[x-[x]]=۰$$

۳ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(x)=x-\sqrt{x}\,,\,f(۶)=۰\,,\,f\left(-\frac{۱}{۴}\right)=۰$$

$$\text{fog}\,(x)=۰\Rightarrow f(g(x))=۰\Rightarrow\begin{cases}g(x)=۶\\ g(x)=-\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

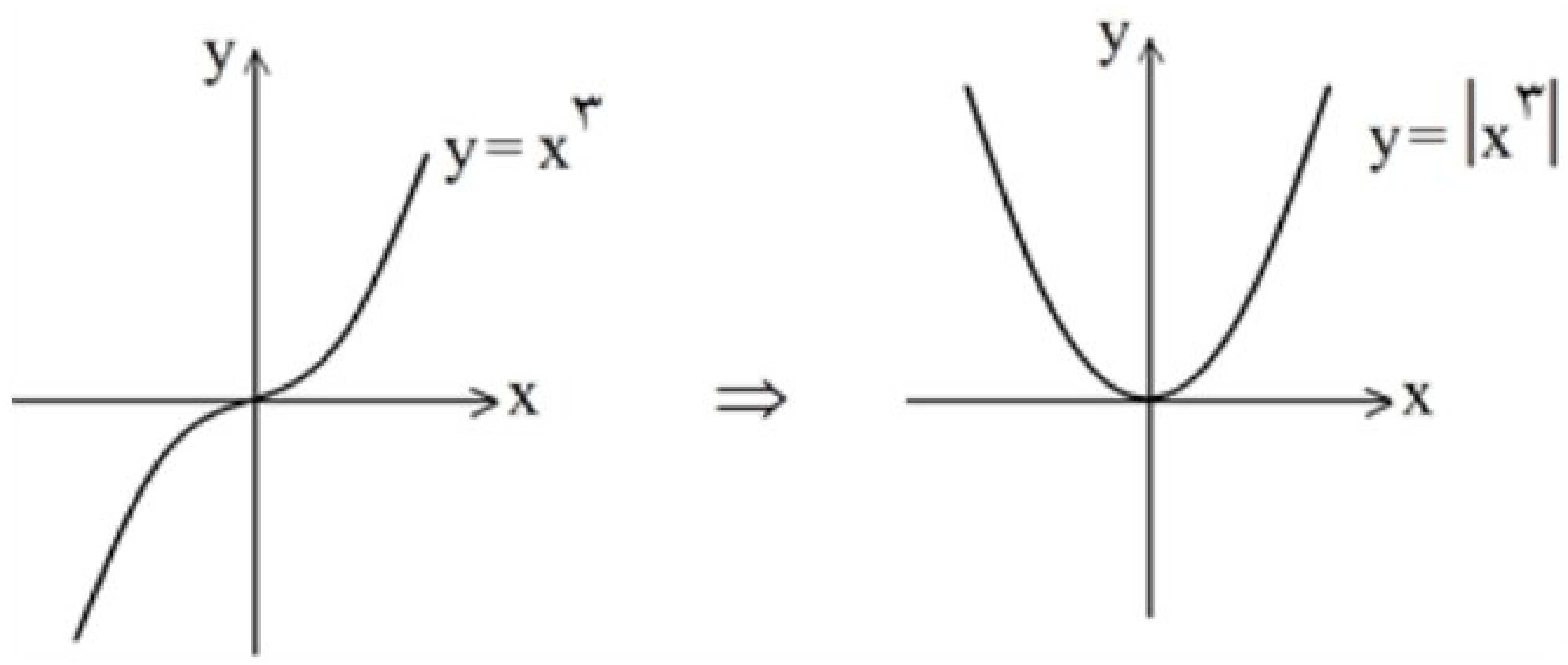
$$g(x)=۶\Rightarrow x-\sqrt{x}=۶\Rightarrow x-\sqrt{x}-۶=۰\Rightarrow(\sqrt{x}-۳)(\sqrt{x}+۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=۳\Rightarrow x=۹\\ \sqrt{x}=-۲\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$g(x)=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow x-\sqrt{x}=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow x-\sqrt{x}+\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}=۰\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

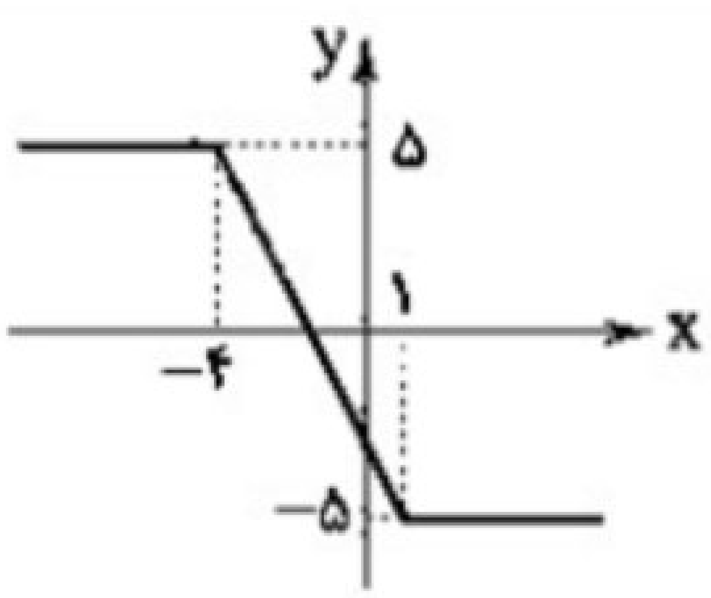
بنابراین ریشه‌ها ۹ و $\frac{۱}{۴}$ می‌باشند.

۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.




۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار این تابع به صورت سرسره‌ای است.

| x | $-۴$ | ۱ |
|---|---|---|
| y | ۵ | $-۵$ |




با توجه به نمودار، این تابع در هیچ بازه‌ای صعودی اکید نیست.

۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در تابع وارون جای مولفه اول و دوم تغییر می‌کند بنابراین داریم:

$$f^{-۱}(۳) = a \Rightarrow f(a) = ۳ \Rightarrow \sqrt{a} + a + ۳ = ۳ \Rightarrow \sqrt{a} + a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$
$$f^{-۱}(۵) = b \Rightarrow f(b) = ۵ \Rightarrow \sqrt{b} + b + ۳ = ۵ \Rightarrow \sqrt{b} + b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(۳) + f^{-۱}(۵) = ۰ + ۱ = ۱$$

۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به تغییرات تابع $f(x) = x^۳$، نمودار به‌صورت $y = ۲(x-a)^۳ + b$ تبدیل شده است، پس $x = ۱$ ریشهٔ $x - a = ۰$ است:

$$۱ - a = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

از طرفی تابع از مبدأ عبور کرده است:

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow ۲(۰-۱)^۳ + b = ۰ \Rightarrow b = ۲$$

در نتیجه $a + b = ۳$ است.

۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۸)$ کافی است تابع را برابر ۸ قرار دهیم:

$$x^۲ - ۲x = ۸ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲) = ۰ \xrightarrow{x \geq ۱}$$
$$x = ۴$$

پس $f^{-۱}(۸) = ۴$ است.

$$f(f^{-۱}(۸) - ۲) = f(۴-۲) = f(۲) = ۴ - ۴ = ۰$$

۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(f(x)) = \frac{۱+۱}{۳-۱} \Rightarrow \frac{f(x)+۳}{۱-f(x)} = \frac{x+۱}{۳-x} \xrightarrow[f(۱)=t]{x=۱}$$
$$\frac{t+۳}{۱-t} = \frac{۱+۱}{۳-۱} \Rightarrow t + ۳ = ۱ - t \Rightarrow ۲t = -۲ \Rightarrow t = -۱$$

۱۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(\text{fog})(x) \times (\text{gof})(x) = -۱$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{x}{x+۱}}{\frac{x}{x+۱} - ۱} \times \frac{\frac{x}{x-۱}}{\frac{x}{x-۱} + ۱} = \frac{x}{-۱} \times \frac{x}{۲x-۱} = -x\left(\frac{x}{۲x-۱}\right) = -۱$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۲x - ۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

ریشه‌ی به دست آمده قابل قبول نیست. زیرا $f(۱)$ تعریف نمی‌شود.

۱۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = ۲x \Rightarrow \sqrt[۳]{۱ - g(x)} = ۲x$$
$$\Rightarrow ۱ - g(x) = ۸x^۳ \Rightarrow g(x) = ۱ - ۸x^۳$$
$$\text{gof}(-۷) = g(f(-۷)) = g(۲) = ۱ - ۶۴ = -۶۳$$

۱۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ۵x - ۱ \Rightarrow y = ۵x - ۱ \Rightarrow ۵x = y + ۱ \Rightarrow x = \frac{y+۱}{۵} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x+۱}{۵}$$

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x)=\frac{۷x+۱۱}{۵}\Rightarrow y=\frac{۷x+۱۱}{۵}\Rightarrow ۷x+۱۱=۵y\Rightarrow ۷x=۵y-۱۱\Rightarrow x=\frac{۵y-۱۱}{۷}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۵x-۱۱}{۷}$$

۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون f یک تابع خطی است بنابراین $f(x)=\mathrm{ax}+b$:

$$\left.\begin{array}{l} f(۲)=۴\Rightarrow ۲a+b=۴ \\ f(۵)=۱۳\Rightarrow ۵a+b=۱۳ \end{array}\right\}\Rightarrow ۳a=۹\Rightarrow a=۳, b=-۲\Rightarrow f(x)=۳x-۲$$

$$\Rightarrow y=۳x-۲\Rightarrow ۳x=y+۲\Rightarrow x=\frac{y+۲}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۲}{۳}$$

۱۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون f یک تابع خطی است بنابراین ضابطه آن $f(x)=\mathrm{ax}+b$ است.

$$\left.\begin{array}{l} A(۲,۱۱)\Rightarrow ۲a+b=۱۱ \\ B(۷,۳۶)=۷a+b=۳۶ \end{array}\right\}\Rightarrow ۵a=۲۵\Rightarrow a=۵, b=۱$$

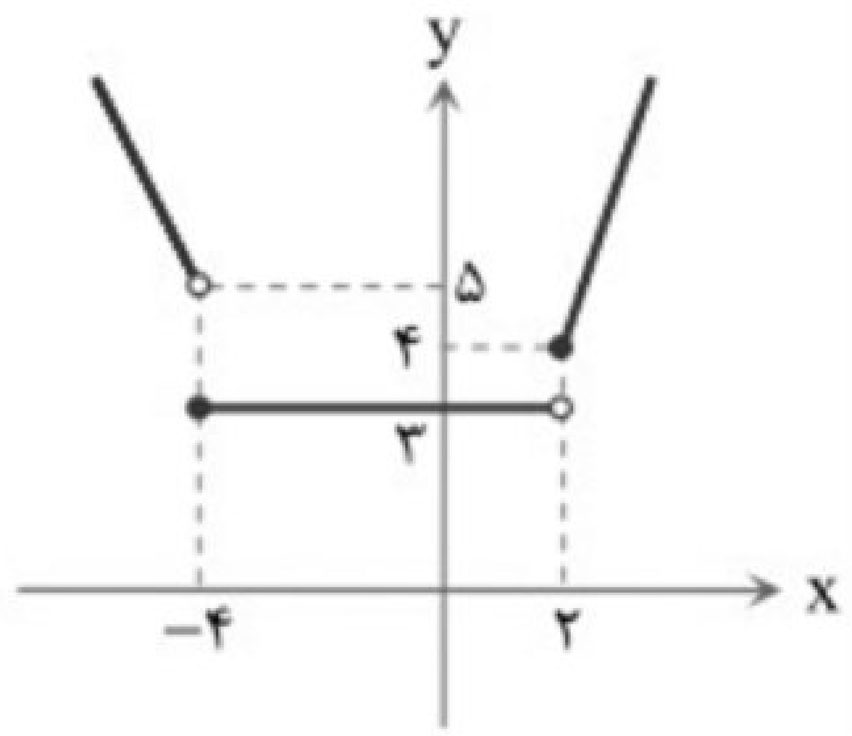
$$\Rightarrow f(x)=۵x+۱\Rightarrow y=۵x+۱\Rightarrow ۵x=y-۱\Rightarrow x=\frac{y-۱}{۵}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۵}$$

۱۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=۵x-۱۱\Rightarrow y=۵x-۱۱\Rightarrow ۵x=y+۱۱\Rightarrow x=\frac{y+۱۱}{۵}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱۱}{۵}$$

۱۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. از روی نمودار مشخص می‌شود که تابع در بازه‌ی $[۱,۷]$ وضعیت صعودی دارد ولی اکیداً صعودی نیست زیرا در بازه‌ی $[۱,۲)$ ثابت است.




۱۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع f را به صورت $f(x)=\begin{cases} x^۳ & x\geq ۰ \\ -x^۳ & x<۰ \end{cases}$ می‌نویسیم، سپس با رسم نمودار تابع مشخص می‌شود که تابع در R غیریکنواست.

اما در بازه‌ی $(-\infty,۰]$ نزولی و در بازه‌ی $[۰,+\infty)$ صعودی است.

۱۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: شرط وارون‌پذیری تابع f این است که تابع f یک به یک باشد. یعنی اگر تابع f یک به یک باشد، آن‌گاه وارون‌پذیر است و اگر یک به یک نباشد، وارون‌پذیر نخواهد بود. هم‌چنین شرط یک به یک بودن تابع f این است که هر عضو از دامنه به عضو منحصر به فردی از برد نسبت داده می‌شود و بالعکس. به عبارت دیگر اگر تابع f یک به یک باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\forall (x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲) \in f\,;\, f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

شرط وارون‌پذیری تابع f یک به یک بودن آن است. با دقت در ضابطه‌ی توابع داده شده مشخص می‌شود که گزینه‌ی ۳ جواب است. زیرا: $f(x) = -۵ - \sqrt{۳x + ۱}$

$$f(x_۱) = f(x_۲) \overset{?}{\rightarrow} x_۱ = x_۲$$

$$-۵ - \sqrt{۳x_۱ + ۱} = -۵ - \sqrt{۳x_۲ + ۱} \Rightarrow -\sqrt{۳x_۱ + ۱} = -\sqrt{۳x_۲ + ۱} \Rightarrow ۳x_۱ + ۱ = ۳x_۲ + ۱$$

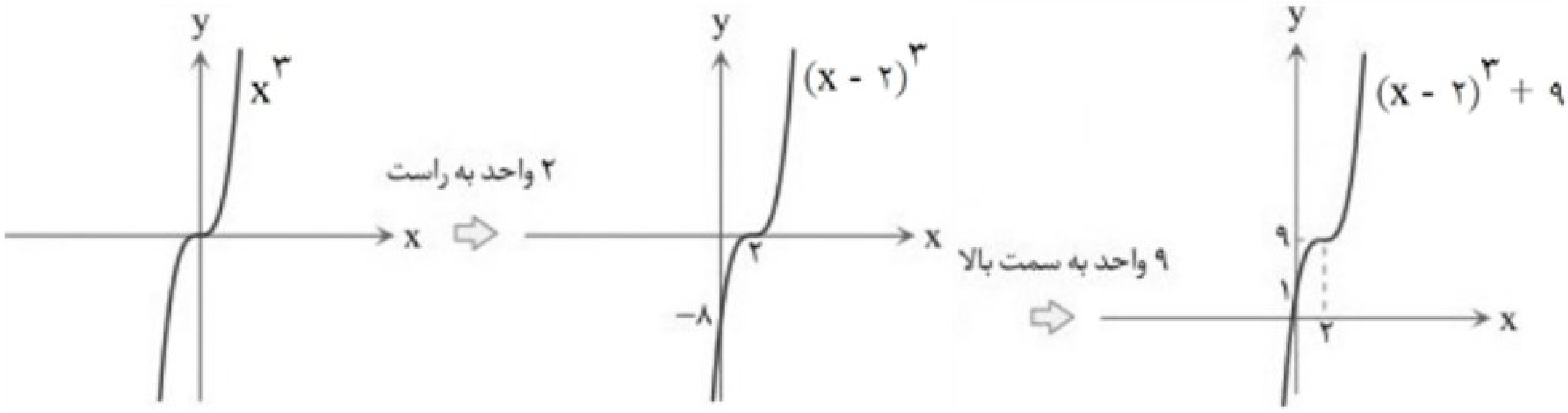
$\Rightarrow ۳x_۱ = ۳x_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲ \Rightarrow$ تابع f یک به یک است

گزینه‌ی ۱ را می‌توان به صورت $f(x) = (x - ۲)^۲ + ۱$ نوشت که چون $f(۱) = ۲$ و $f(۳) = ۲$ پس f یک به یک نیست.

گزینه‌ی ۲ نیز یک به یک نیست زیرا $f(۱) = -۱$ و $f(-۱) = -۱$.

گزینه‌ی ۴ نیز تابعی یک به یک نیست زیرا زوج مرتب‌های $(۱, ۲)$ و $(۰, ۲)$ در تابع f حضور دارند.

۲۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع را به شکل $f(x) = (x - ۲)^۳ + ۹$ می‌نویسیم سپس با انتقال، آن را رسم می‌کنیم.




۲۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی $(۱, ۲)$ روی نمودار $y = f(x)$ است؛ پس $f(۱) = ۲$، با جای‌گذاری $x = ۳$ در تابع داده شده داریم:

$$y(۳) = ۱ - ۲f\left(\frac{۳}{۳}\right) = ۱ - ۲(۲) = -۳$$

پس نقطه‌ی $(۳, -۳)$ روی این تابع و نقطه‌ی $(-۳, ۳)$ روی وارون آن است.

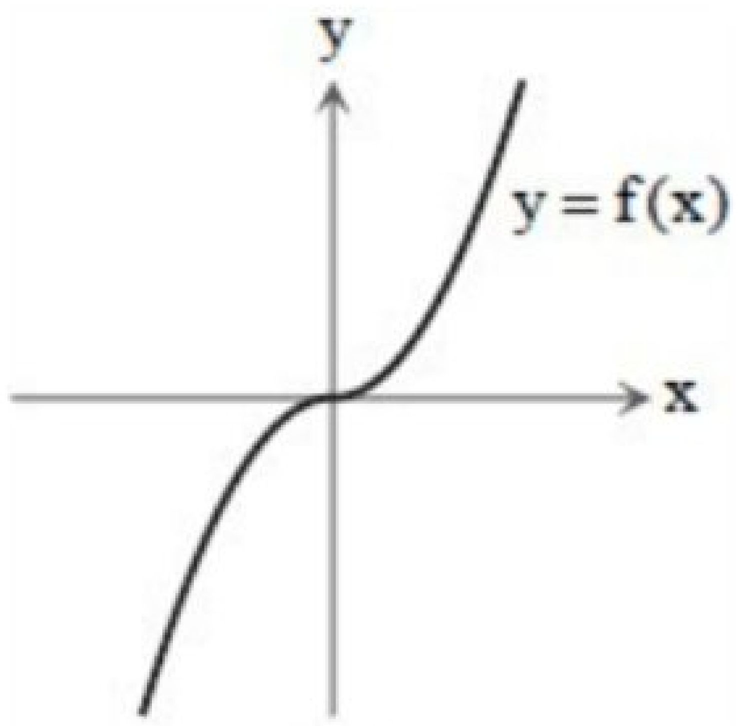
۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

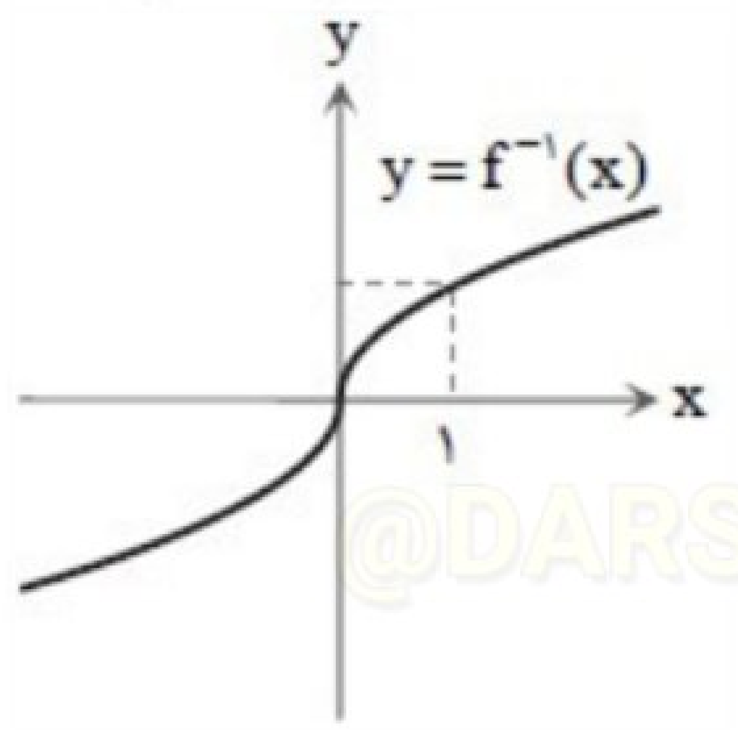
$$xf(-x) \geq ۰ \Rightarrow -xf(-x) \leq ۰$$

با تغییر متغیر $-x = t$ باید رابطه‌ی $tf(t) \leq ۰$ همواره برقرار باشد، پس باید تابعی را انتخاب کنیم که نقاط آن در رابطه‌ی $xy \leq ۰$ صدق کنند، یعنی نقاط در ربع دوم یا چهارم واقع باشند که نمودار گزینه‌ی «۴» چنین است.

**۲۳** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کافی است نمودار تابع f را رسم کرده، سپس آن‌را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرینه کنیم، تا نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ به دست آید.

$$f(x)=x\,|x|=\begin{cases} x^{۲} & x\geq ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$




**۲۴** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $y=f(x)$ از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد، بنابراین نمودار $y=f(-x)$ که قرینه‌ی $y=f(x)$ نسبت به محور $y$هاست از ناحیه‌ی دوم نمی‌گذرد. سپس نمودار $y=f(-x)$ را نسبت به محور طول قرینه کنیم که $y=-f(-x)$ به دست آید. بنابراین نمودار $y=-f(-x)$ از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد.

**۲۵** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اولاً داریم:

$$y=x^{۲}-۴x+۴-۵=(x-۲)^{۲}-۵$$

در نتیجه:
$$y=x^{۲}+۱\xrightarrow{\text{واحد به راست۲}}y=(x-۲)^{۲}+۱$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به پایین۶}}y=(x-۲)^{۲}-۵$$

**۲۶** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار تابع $g(x)=-(x-۱)^{۲}-۱$ با توجه به نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ باید به ترتیب مراحل زیر را طی کنیم:

$$x^{۲}\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}}(x-۱)^{۲}\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}}-(x-۱)^{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}}-(x-۱)^{۲}-۱$$

۲۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{fog}(x) = f(g(x)) = f(۱-x) = (۱-x)^{۳} + ۱ = ۲ - ۳\text{x} + ۳\text{x}^{۲} - x^{۳}$$
$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(x^{۳}+۱) = ۱-(x^{۳}+۱) = -x^{۳}$$

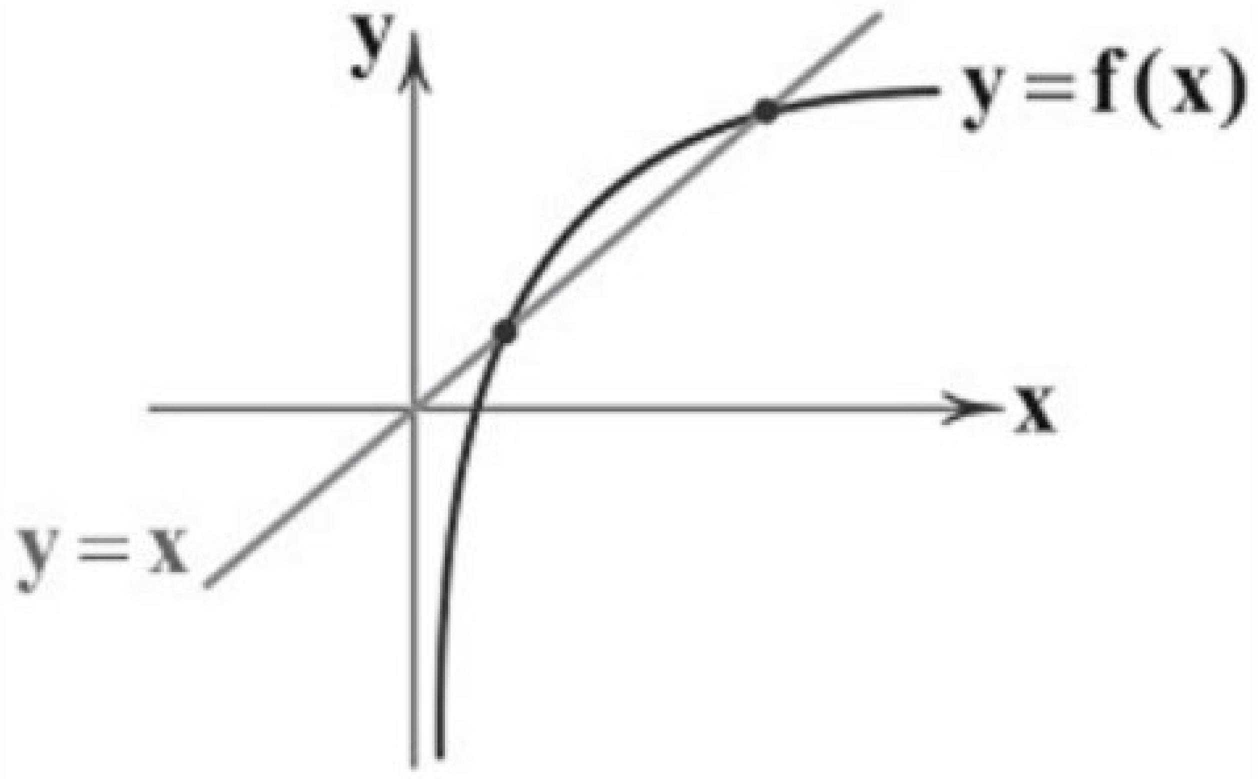
برای یافتن طول نقاط برخورد باید معادله‌ی $\text{fog}(x) = \text{gof}(x)$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow ۲ - ۳\text{x} + ۳\text{x}^{۲} - x^{۳} = -x^{۳} \Rightarrow ۳\text{x}^{۲} - ۳\text{x} + ۲ = ۰$$
$$\Delta = (-۳)^{۲} - ۴(۳)(۲) = ۹ - ۲۴ = -۱۵ < ۰$$

پس معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد و در نتیجه نمودار دو تابع fog و gof متقاطع نمی‌باشند.

۲۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع $\text{Log}_{۲}\,x$ صعودی‌اکید است، پس $f(x) = ۱ + \text{Log}_{۲}\,x$ نیز صعودی‌اکید خواهد بود.

اگر این تابع را با خط $y = x$ قطع دهیم، نقاط برخورد $f$ و $f^{-۱}$ به دست می‌آید.




پیدا کردن نقاط برخوردار دشوار است، اما در این سؤال با امتحان کردن اعداد $x = ۱$ و $x = ۲$ نقاط برخورد دو تابع $f(x)$ و $x$ به دست می‌آیند که همان نقاط برخورد $f$ و $f^{-۱}$ است.

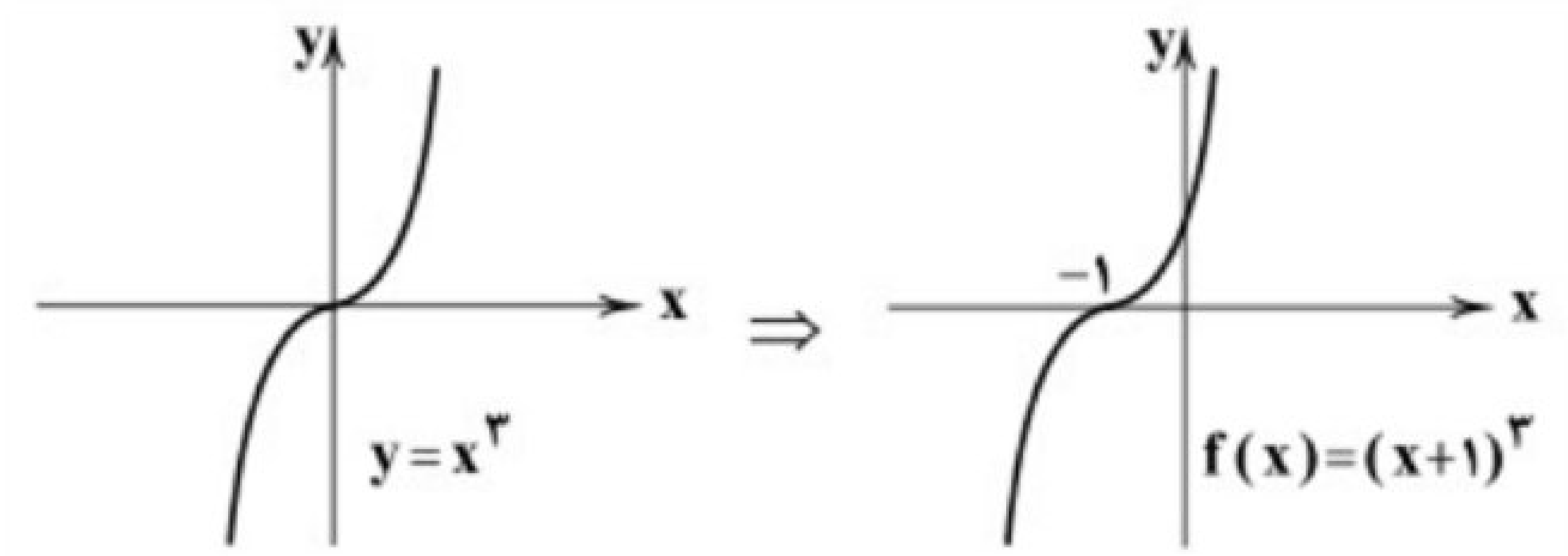
۲۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر تابع خطی $f$ و $f^{-۱}$ متقاطع نباشند، باید شیب تابع خطی برابر یک و عرض از مبدأ مخالف صفر باشد.

$$f^{-۱}(۱) = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۱ \Rightarrow A(۲,۱) \in \text{f}$$

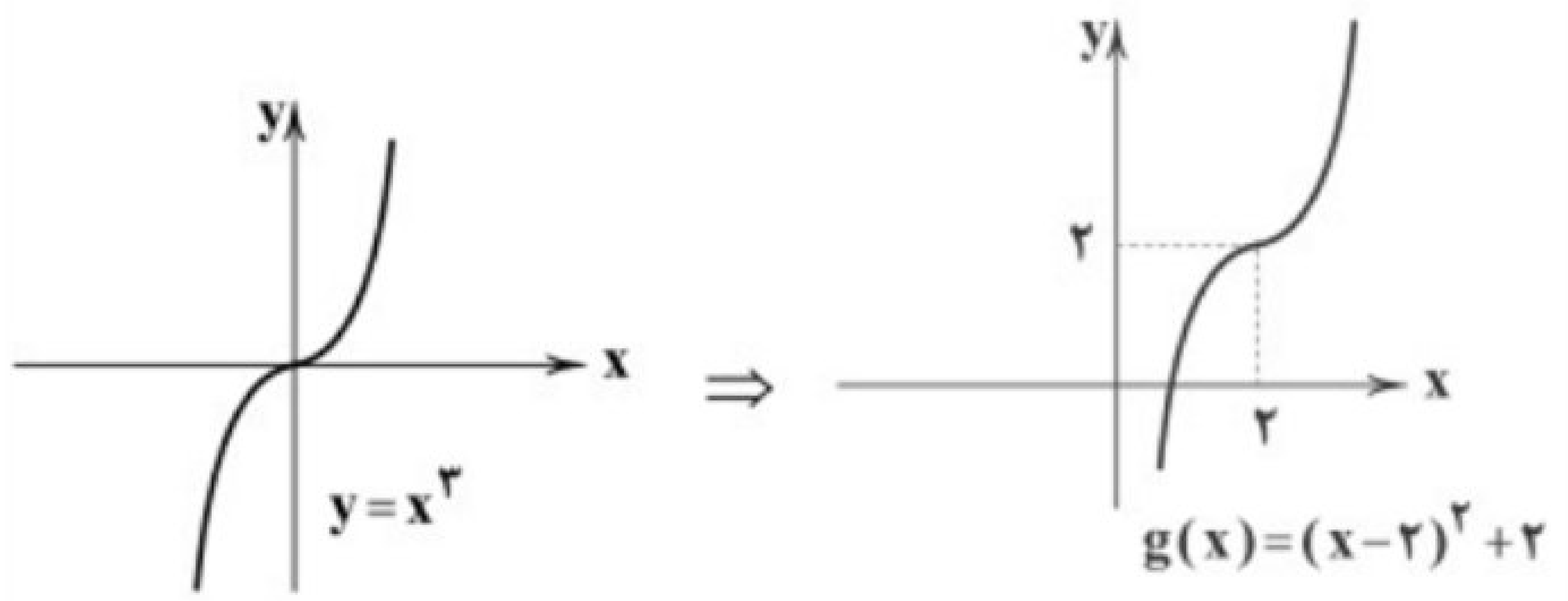
معادله‌ی خط : $y - ۱ = ۱(x-۲) \Rightarrow y = x - ۱ \Rightarrow f(x) = x - ۱ \Rightarrow f(۳) = ۲$

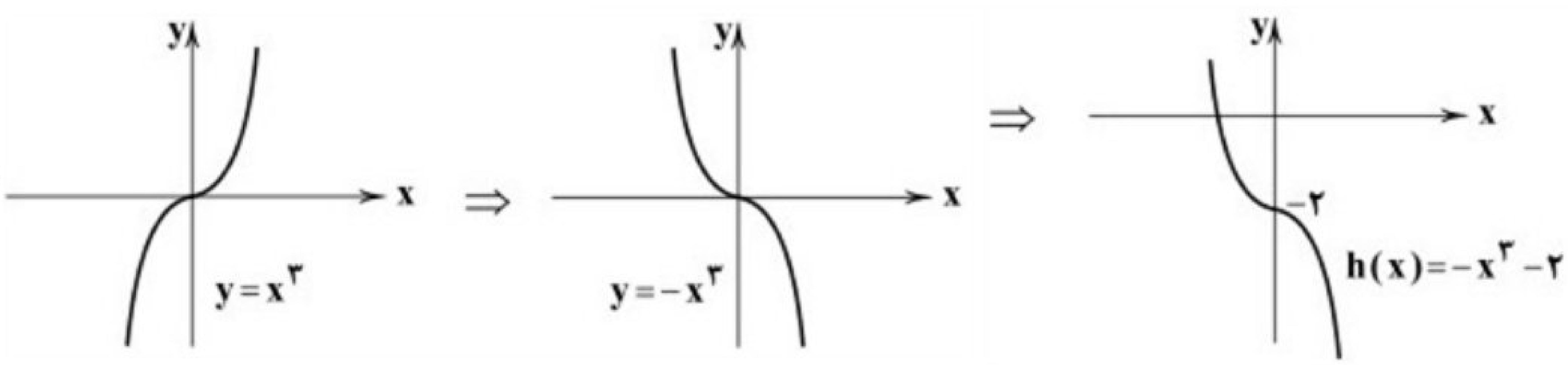
۳۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

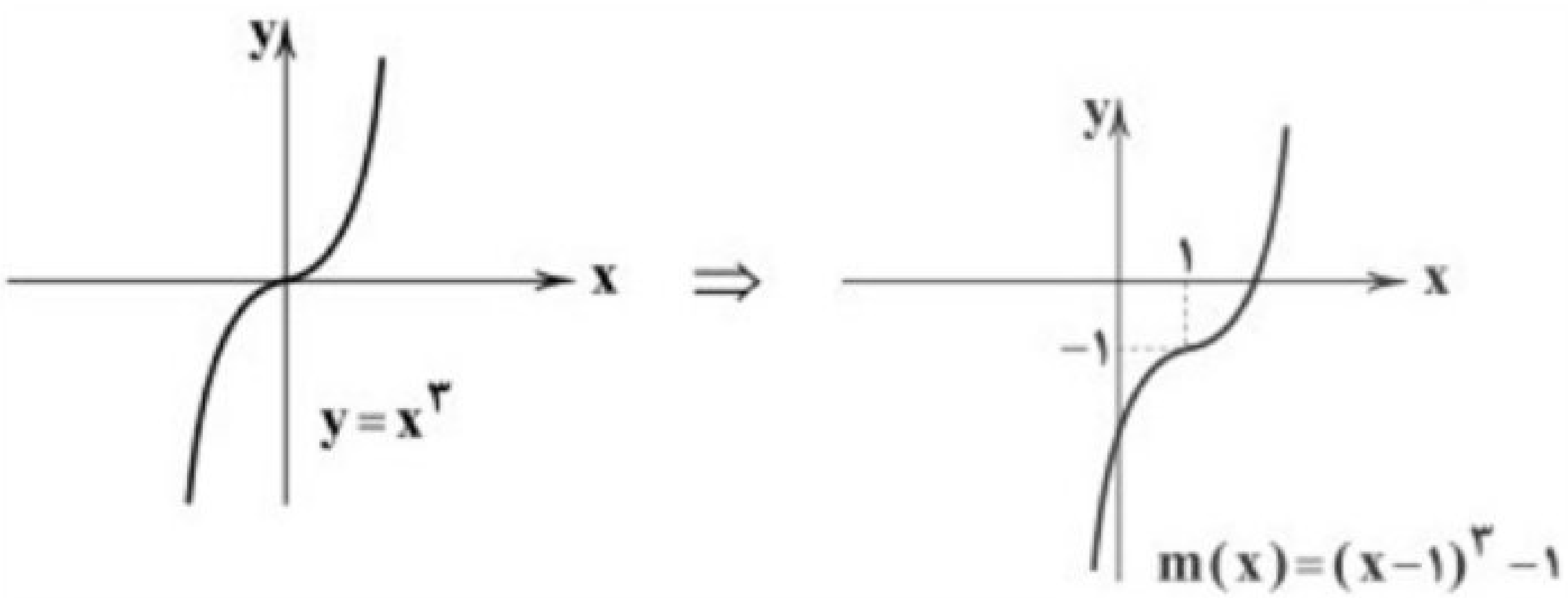
۱) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$




۲) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6 = (x-2)^3 + 2$



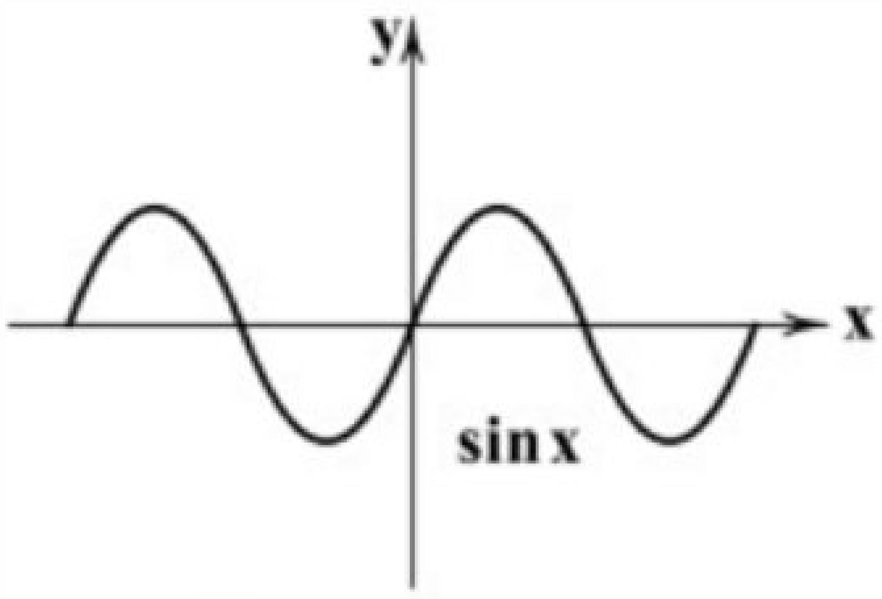

۳)



۴)


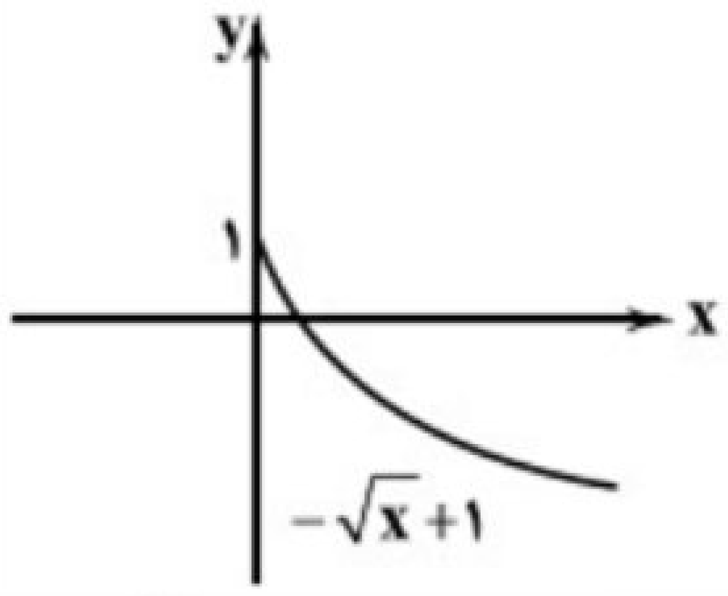

ملاحظه می‌کنید که تابع $h(x)$ از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد.

۳۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

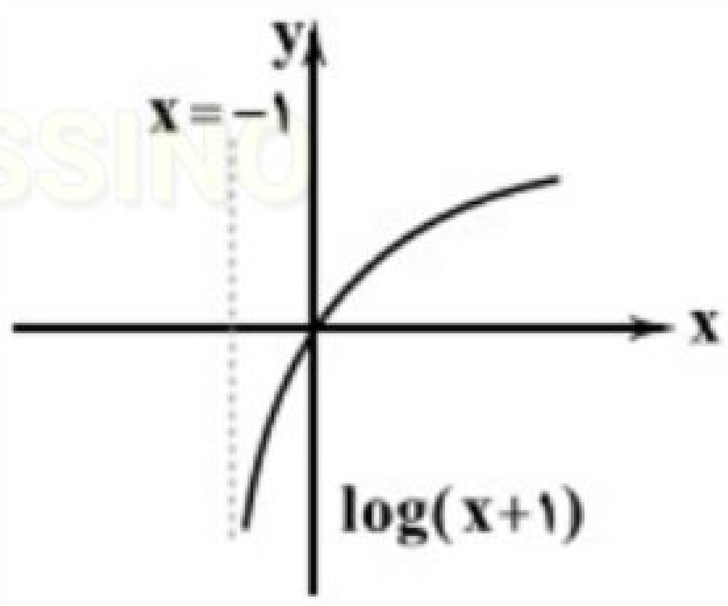
۱) تابع $\text{Sin}\,x$ غیریکنوا است.



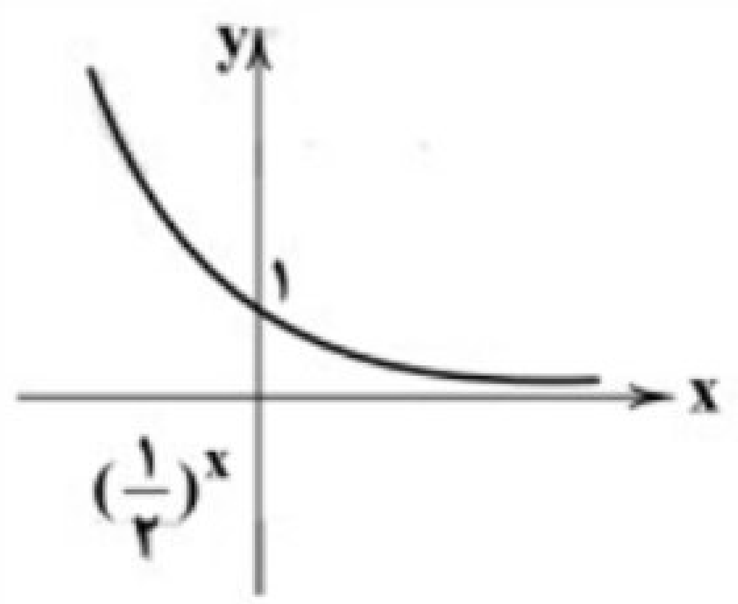

۲) تابع $-\sqrt{x}+۱$ نزولی اکید است.




۳) تابع $\text{Log}\,(x+۱)$ صعودی اکید است.




۴) تابع $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ نزولی اکید است.




۳۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=x^۲\sqrt{x^۲}=\begin{cases} x^۳ & x\geq ۰ \\ -x^۳ & x\leq ۰ \end{cases}$$

تابع پایینی نزولی است پس باید وارون این قسمت را بیابید. چون دامنه این قسمت $x\leq ۰$ است پس برد $y\geq ۰$ است.

در تابع وارون جای دامنه و برد باید عوض شود.

$$y=-x^۳ \Rightarrow -y=x^۳ \Rightarrow -\sqrt[۳]{y}=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x} \text{ و } x\geq ۰$$

۳۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $f$ تابعی خطی است، پس:

$$f(x)=\mathrm{ax}+b\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-b}{a}$$

$$\begin{cases} f(۳)=۳\mathrm{a}+b=-۲ \\ f^{-۱}(۰)=\frac{۰-b}{a}=-۱\Rightarrow b=a\Rightarrow \begin{cases} ۳\mathrm{a}+a=-۲\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \\ b=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(-۳)=\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۲+f(-۳))=f^{-۱}(۳)=\frac{۳-\left(-\frac{۱}{۲}\right)}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۷}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=-۷$$

۳۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$D_{(f-g)}=D_f\cap D_g=\{۱,۰,۲\}$$
$$\Rightarrow (f-g)=\{(۰,۲-۳),(۱,-۱-(-۳)),(۲,۳-(-۲))\}$$
$$\Rightarrow (f-g)=\{(۰,-۱),(۱,۲),(۲,۵)\}$$
$$\Rightarrow (f-g)^{-۱}=\{(-۱,۰),(۲,۱),(۵,۲)\}$$

۳۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f(x)=(a^۲-۳a+۲)x+۳$

برای اینکه تابع خطی فوق یک به یک نباشد، باید ضابطه آن به‌صورت، $f(x)=k$ باشد، که k عددی ثابت است، به عبارت دیگر،ضریب x در معادله‌ی آن باید صفر باشد، پس:

$$a^۲-۳a+۲=۰\Rightarrow a=۱,a=۲$$

۳۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. یک تابع به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب، هنگامی یک‌به‌یک است که در آن زوج‌های مرتب متمایز، مؤلفه‌های دوم مساوی نداشته باشند، یا به عبارتی اگر زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های دوم مساوی داشته باشند، مؤلفه‌های اول آن‌ها نیز با هم برابر باشند، بنابراین:

$$(m,۳)=(-۱,۳)\Rightarrow m=-۱\Rightarrow f=\{(-۲,۲),(-۱,۳),(-۲,a)\}$$

چون f یک تابع است، باید زوج‌های مرتب $(-۰,۲)$و $(-۲,a)$ نیز با یکدیگر برابر باشند، بنابراین:

$$(-۲,a)=(-۲,۲)\Rightarrow a=۲\Rightarrow a+m=۲+(-۱)=۱$$

۳۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر نمایش جبری تابع خطی F را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر بگیریم آن‌گاه چون نمودار آن محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $(-۱)$ قطع می‌کند داریم: $a(-۱)+b=۰$ و چون محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند داریم:$a(۰)+b=۱$ بنابراین $a=b=۱$، پس $f(x)=x+۱$.

حال فرض می‌کنیم $f^{-۱}(۳)=\alpha$ باشد، داریم:

$$f^{-۱}(۳)=\alpha\Rightarrow (۳,\alpha)\in\mathrm{f}^{-۱}\Rightarrow (\alpha,۳)\in\mathrm{f}\Rightarrow f(\alpha)=۳$$
$$f(x)=x+۱\xrightarrow{f(\alpha)=۳}۳=\alpha+۱\Rightarrow \alpha=۲\Rightarrow f^{-۱}(۳)=۲$$

**۳۸** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $(a,b)\in f$ باشد، آن‌گاه $(a,b)\in f^{-1}$ است، بنابراین:

$$(۲,a)\in f^{-۱} \Rightarrow (a,۲)\in f \Rightarrow \sqrt{a+۱+\sqrt{a-۳}}=\sqrt{۴}$$

$$\Rightarrow a+۱+\sqrt{a-۳}=۴ \Rightarrow (a-۳)+\sqrt{a-۳}=۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-۳)^۲}+\sqrt{a-۳}=۰ \Rightarrow \sqrt{a-۳}(\sqrt{a-۳}+۱)=۰$$

$$\begin{cases} \sqrt{a-۳}=۰ \Rightarrow a=۳ \\ \sqrt{a-۳}=-۱ \text{ غ ق ق..} \end{cases} \Rightarrow a=۳$$

**۳۹** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط از نقطه $(۲۰,۱)$ می‌گذرد، پس وارون تابع هم از این نقطه می‌گذرد، در نتیجه تابع f از نقطه $(۱,۲۰)$ عبور می‌کند.

$$\Rightarrow f(۱)=a+۸=۲۰ \Rightarrow a=۱۲$$

**۴۰** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{x+۲}{۴}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۲} \xrightarrow{x=۳} f(۳)=\frac{۵}{۴}-۱=\frac{۱}{۴} \Rightarrow f^{-۱}\left(\frac{۱}{۴}\right)=۳ \Rightarrow \frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}=۳$$

$$\Rightarrow \frac{۳a}{۴}=۳ \Rightarrow a=۴$$



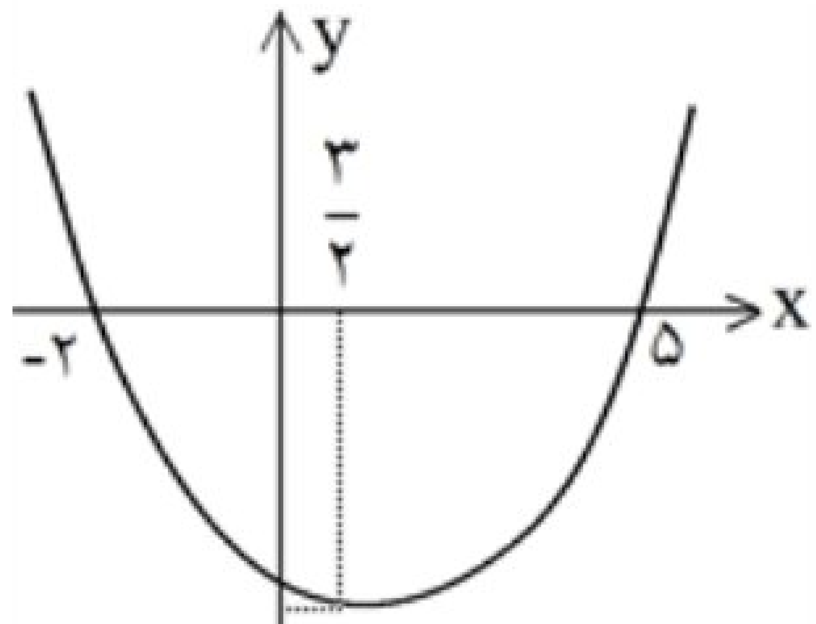
تذکر: در اصل سؤال، شرط $x\geq ۰$ نبود که در این صورت تابع وارون‌پذیر نمی‌باشد و منظور طراح، بخشی از تابع است که وارون‌پذیر است. در کل داریم:

$$f(x)=\frac{x+۲}{۴}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۲}\,, x\geq ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x)=۴x+۴\sqrt{x}$$

$$f(x)=\frac{x+۲}{۴}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۲}\,, -۱\leq x\leq ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x)=۴x-۴\sqrt{x}$$

**۴۱** گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y=x^۲-۳x-۱۰$ یک سهمی قائم است که محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

$y=۰ \Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۵, x=-۲$ با توجه به آن‌که سهمی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کرده است. اگر سهمی را ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، سهمی از مبدأ خواهد گذشت و دیگر طول تلاقی‌اش با محور xها منفی نیست. به نمودار روبه‌رودقت کنید.



**۴۲** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|=\begin{cases}(۲x-۶)-(x+۱) & x\geqslant ۳\\ -۲x+۶-(x+۱) & -۱\leqslant x<۳\\ -۲x+۶-(-x-۱) & x<-۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x-۷ & x\geqslant ۳\\ -۳x+۵ & -۱\leqslant x<۳\\ -x+۷ & x<-۱\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ها مشخص است که ضابطه‌ی $y=x-۷$ برای $x\geqslant ۳$ صعودی است.

$$x\geqslant ۳\xrightarrow{-۷}x-۷\geqslant -۴\Rightarrow y\geqslant -۴$$

$$y=x-۷\Rightarrow y+۷=x\xrightarrow{x\longleftrightarrow y}y=x+۷$$

نکته: در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود. بنابراین $y\geqslant -۴$ برای تابع معکوس محدوده‌ی دامنه می‌شود.

**۴۳** گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{همواره بالای محور x ها}\Rightarrow\begin{cases}x^۲\ \text{ضریب}>\cdot\Rightarrow ۱-a>\cdot\Rightarrow a<۱\ (۱)\\ \Delta<\cdot\Rightarrow(۲\sqrt{۶})^۲+۴a(۱-a)<\cdot\Rightarrow ۲۴+۴a-۴a^۲<\cdot\end{cases}$$

$$\Rightarrow a^۲-a-۶>\cdot\Rightarrow(a+۲)(a-۳)>\cdot\Rightarrow a<-۲\ \text{یا}\ a>۳\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}a<-۲$$



**۴۴** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع $-x^۳$ نزولی اکید است پس تابع $-x^۳-۴$ نیز نزولی اکید خواهد بود. تابع $\sqrt{x-۱}-۲$ صعودی اکید، تابع $\operatorname{Log}x-۱$ صعودی اکید و تابع $|x+۲|$ غیریکنواست.

**۴۵** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

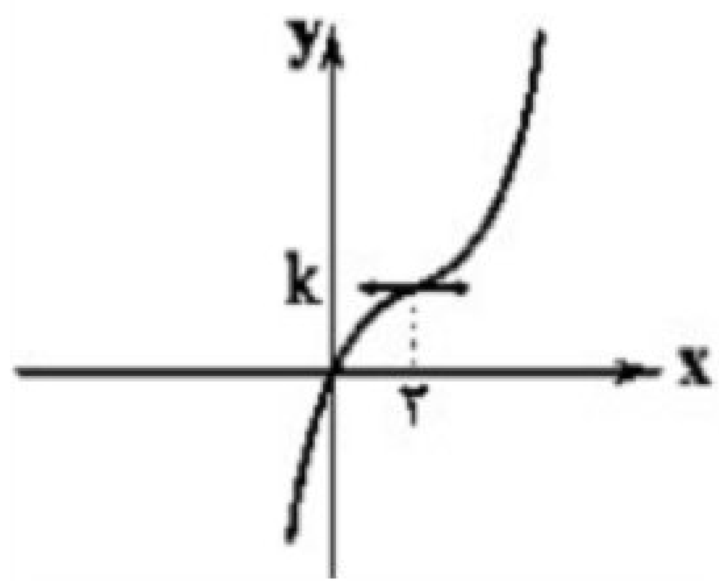
تابع موردنظر به صورت $y=(x-۲)^۳$ است که از انتقال تابع $f(x)=x^۳$ به دست آمده است و مراحل تشکیل تابع به صورت مقابل است:

$$x^۳\rightarrow(x-۲)^۳\rightarrow(x-۲)^۳+k$$

ابتدا $x^۳$ را دو واحد به سمت راست و سپس $k$ واحد به صورت عرضی منتقل کرده‌ایم. حداکثر مقداری که می‌توان تابع را به بالا منتقل کرد تا از ناحیه‌ی دوم عبور نکند، به صورت مقابل است:

پس باید $f(\cdot)\leq\cdot$ باشد

$$f(\cdot)=k-۸\leq\cdot\Rightarrow k\leq ۸$$




**۴۶** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون تابع $f(x)$ صعودی اکید و به‌ازای هر $x$ از دامنه مثبت است، پس تابع $\frac{۲}{f(x)}$ نزولی اکید است.

$$\left(\frac{۲}{f(x)}\right)^{x-۲}\leq\left(\frac{۲}{f(x)}\right)^{۴-x}\xrightarrow{\frac{۲}{f(x)}\ \text{نزولی اکید}}x-۲\geq ۴-x$$

$$\Rightarrow ۲x\geq ۶\Rightarrow x\geq ۳$$

**۴۷** گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

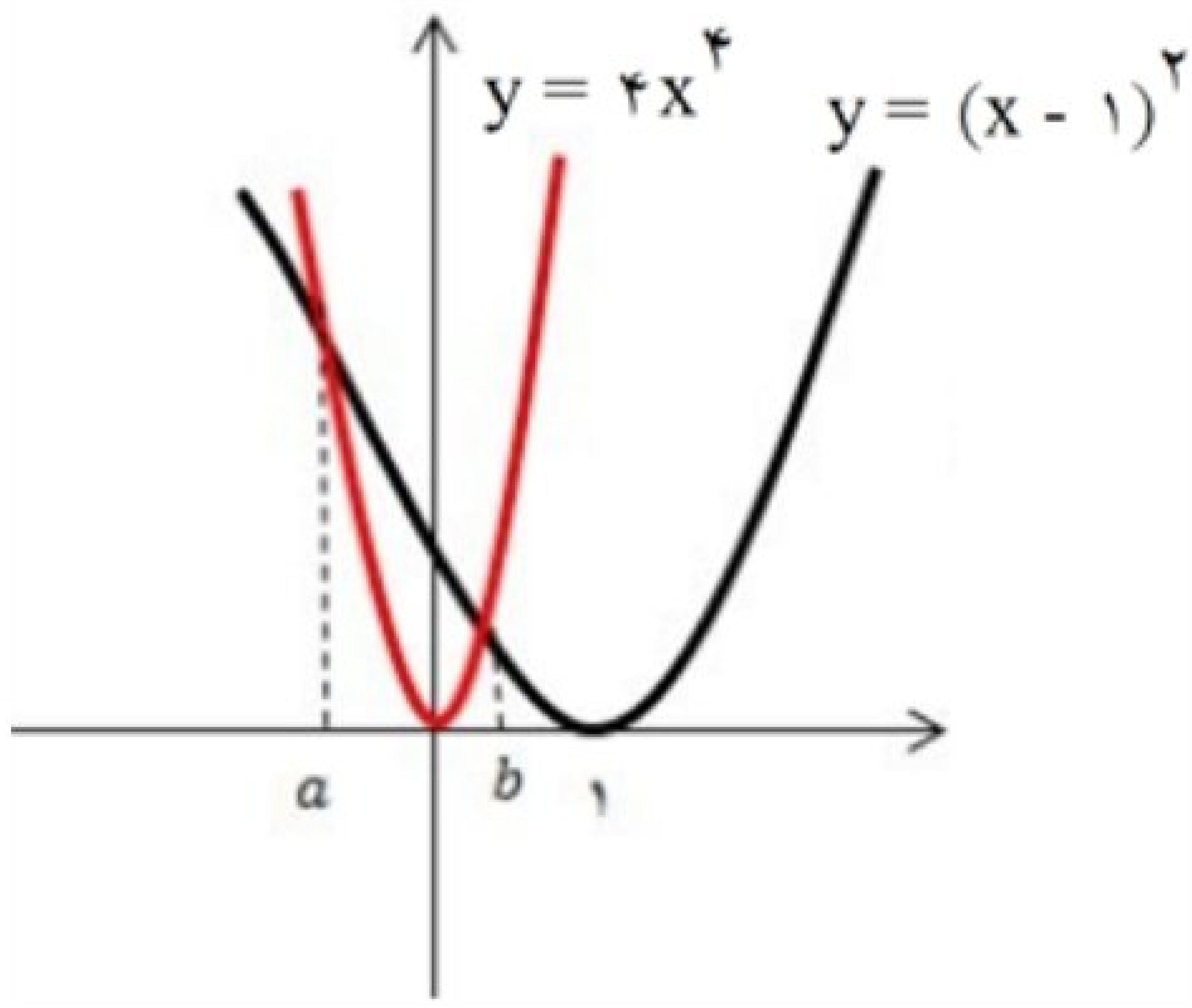
$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \notin D_f\} = \left\{x \neq ۲ \mid \frac{۱}{x-۲} \in [۱,۳]\right\}$$

$$\begin{cases} \frac{۱}{x-۲} \le ۳ \Rightarrow \frac{-۳x+۷}{x-۲} \le ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, ۲) \cup \left[\frac{۷}{۳}, +\infty\right) & (۱) \\ \frac{۱}{x-۲} \ge ۱ \Rightarrow \frac{۳-x}{x-۲} \ge ۰ \Rightarrow x \in \left(۲, ۳\right] & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow x \in \left[\frac{۷}{۳}, ۳\right]$$

$$D_{\text{fog}} = \left\{x \neq ۲ \mid \frac{۷}{۳} \le x \le ۳\right\} = \left[\frac{۷}{۳}, ۳\right]$$

**۴۸** گزینه ۲ پاسخ صحیح است.




$$(x-۱)^۲ > ۴x^۴ \Rightarrow |x-۱| > ۲x^۲$$

$$x \ge ۱ \Rightarrow ۲x^۲ < x-۱ \Rightarrow ۲x^۲ - x + ۱ < ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ > ۰ \Rightarrow \text{عبارت همواره مثبت است و نمی تواند منفی باشد.} \\ \Delta = ۱ - ۸ = -۷ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$x \le ۱ \Rightarrow ۲x^۲ < -x + ۱ \Rightarrow ۲x^۲ + x - ۱ < ۰ \Rightarrow -۱ < x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{۱}{۲} - (-۱) = \frac{۳}{۲}$$

**۴۹** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-۱}(۲) = x \Rightarrow f(x) = ۲ \Rightarrow ۲^x - \left(\frac{۱}{۲}\right)^x = ۴ \xrightarrow{۲^x = A} \frac{A - \frac{۱}{A}}{۲} = ۲ \Rightarrow \frac{A^۲ - ۱}{A} = ۴$$

$$\Rightarrow A^۲ - ۴A - ۱ = ۰$$

$$A = ۲ + \sqrt{۵} \text{ ق ق } \Rightarrow ۲^x = ۲ + \sqrt{۵} \Rightarrow x = \text{Log}_{۲}^{(۲+\sqrt{۵})} \Rightarrow f^{-۱}(۲) = \text{Log}_{۲}^{(۲+\sqrt{۵})}$$

$$A = ۲ - \sqrt{۵} \text{ غ ق ق}$$

**۵۰** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به ترکیب توابع و مفهوم وارون یک تابع داریم:

$$(f^{-۱} o g^{-۱})(-۹) = f^{-۱}(g^{-۱}(-۹))$$

$$g^{-۱}(-۹) = b \Rightarrow g(b) = -۹ \Rightarrow \frac{۳-b}{۲} = -۹ \Rightarrow b = ۲۱$$

$$f^{-۱}(۲۱) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = ۲۱ \Rightarrow \alpha^۲ - ۴\alpha + ۹ = ۲۱ \xrightarrow{x \geq ۲} \alpha = ۶$$

**۵۱** گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f^{-۱}(-۷) = k$ می‌نامیم، پس:

$$f^{-۱}(-۷) = k \Rightarrow f(k) = -۷ \Rightarrow f(k) = ۲ - ۳g(k+۴) = -۷$$

$$\Rightarrow ۳g(k+۴) = ۹ \Rightarrow g(k+۴) = ۳ \Rightarrow k + ۴ = g^{-۱}(۳) = ۵$$

$$\Rightarrow k = ۱$$

**۵۲** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = ۳ - \sqrt{x^۳+۸} \Rightarrow y = ۳ - \sqrt{x^۳+۸} \Rightarrow y - ۳ = -\sqrt{x^۳+۸} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$(y-۳)^۲ = x^۳ + ۸ \Rightarrow (y-۳)^۲ - ۸ = x^۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{(y-۳)^۲ - ۸} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y^۲ - ۶y + ۱}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x^۲ - ۶x + ۱}$$

برای تعیین دامنه‌ی تابع $f^{-۱}$ کافی است برد تابع f را تعیین کنیم:

بدیهی است که: $\sqrt{x^۳+۸} \geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x^۳+۸} \leq ۰ \Rightarrow ۳ - \sqrt{x^۳+۸} \leq ۳$

$$\Rightarrow f(x) \leq ۳ \Rightarrow R_f = \left(-\infty, ۳\right] \Rightarrow D_{f^{-۱}} = \left(-\infty, ۳\right]$$

**۵۳** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر طول نقاط روی نمودار تابع $y = f(x)$ را نصف کنیم، ضابطه‌ی تابع جدید $y = f(۲x)$ خواهد بود حال اگر عرض آن‌ها را سه برابر کنیم، ضابطه‌ی تابع $y = ۳f(۲x)$ خواهد بود. اگر نمودار را دو واحد به سمت چپ منتقل کنیم، ضابطه‌ی تابع $y = ۳f(۲(x+۲))$ یا $y = ۳f(۲x+۴)$ خواهد بود و اگر نمودارا را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم، ضابطه‌ی تابع جدید به صورت $y = ۳f(-۲x+۴)$ خواهد بود.

**۵۴** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $x$ را تنها می‌کنیم و بعد از آن جای $x$ و $y$ را عوض می‌کنیم:

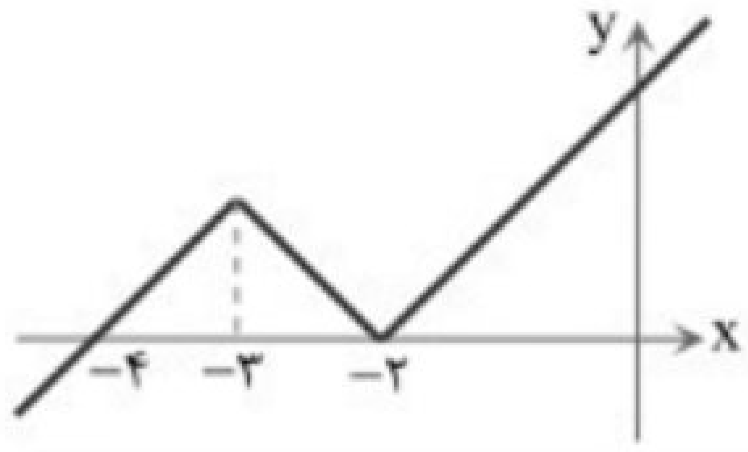
$$y = x^۲ - ۴x + ۲ \Rightarrow y = (x-۲)^۲ - ۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ = y + ۲$$

$$\Rightarrow x - ۲ = \pm\sqrt{y+۲} \xrightarrow{x \leq ۲ \to x-۲<۰} x - ۲ = -\sqrt{y+۲} \Rightarrow x = ۲ - \sqrt{y+۲}$$

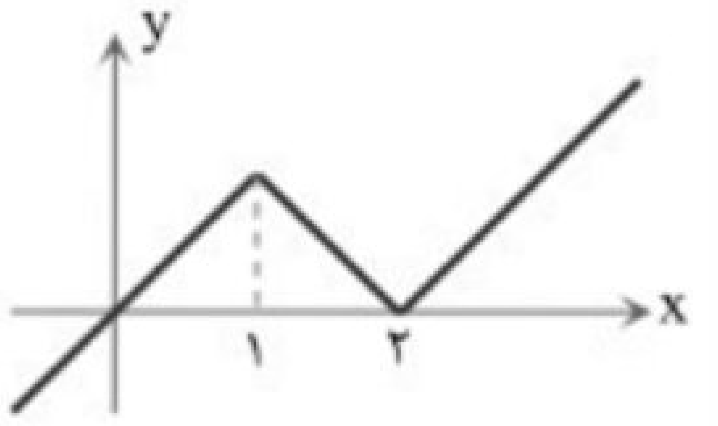
جای $x$ و $y$ را عوض می‌کنیم: $y = ۲ - \sqrt{x+۲}$

**۵۵** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار هر یک از گزینه‌ها به‌صورت زیر است:

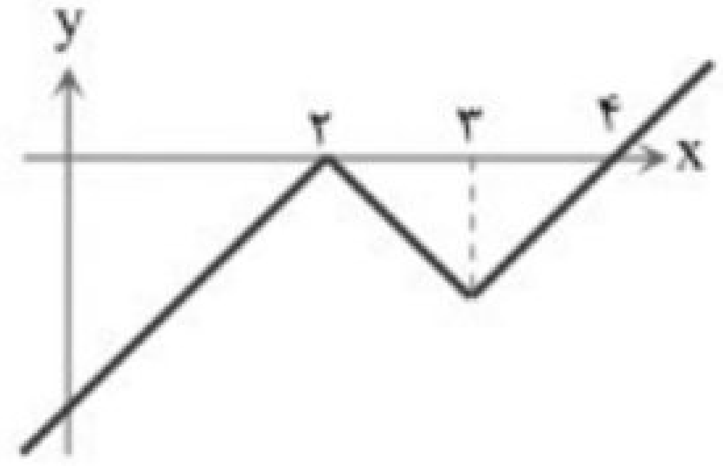
گزینه‌ی «۱»:



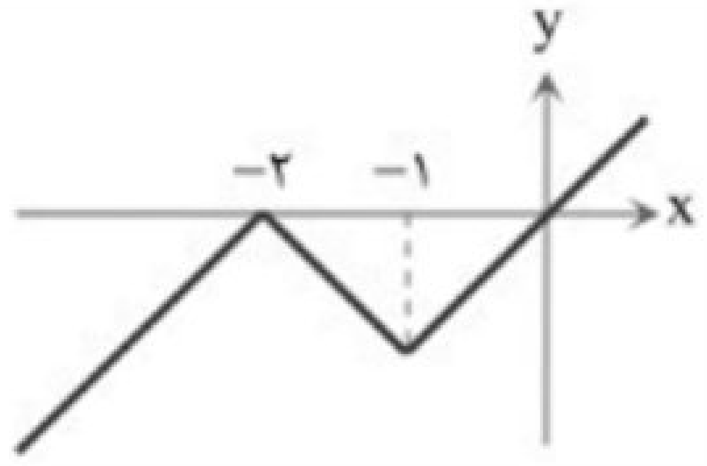

گزینه‌ی «۲»:




گزینه‌ی «۳»:




گزینه‌ی «۴»:




نمودار تابع $f(۲-x)$ در بازه‌ی $[۰,۲]$ بر نمودار $f(x)$ منطبق است.

**۵۶** گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

راه حل اول: ابتدا ضابطه‌ی تابع وارون $f$ را به‌دست می‌آوریم، سپس آن را با نمودار تابع $f$ قطع می‌دهیم:

$$y=-x^۳ \Rightarrow x^۳=-y \Rightarrow x=\sqrt[۳]{-y} \Rightarrow x=-\sqrt[۳]{y} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x}$$

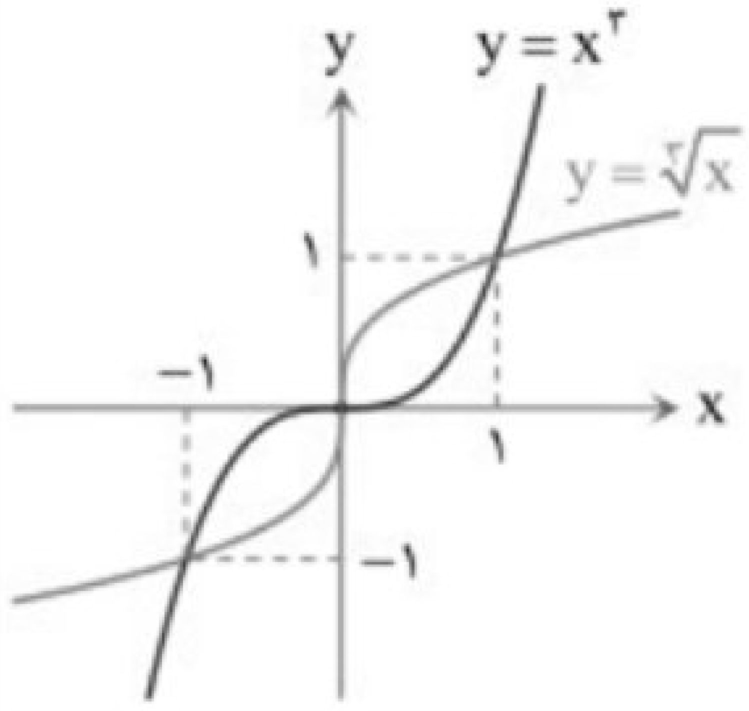
$$\begin{cases} f(x)=-x^۳ \\ f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x} \end{cases} \Rightarrow -x^۳=-\sqrt[۳]{x} \Rightarrow x^۳=\sqrt[۳]{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۳}} x^۹=x \Rightarrow x^۹-x=۰ \Rightarrow x(x^۸-۱)=۰ \Rightarrow x=۰, \mathrm{x}۲۸-۱=۰$$

$$\Rightarrow x^۸=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

پس نمودارهای $f^{-۱}$ و $f$ در سه نقطه با طول‌های $x=۰$ و $x=۱$ و $x=-۱$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

راه حل دوم: نمودار تابع وارون $f$ را که از قرینه کردن نمودار $f$ نسبت به خط $y=x$ به‌دست می‌آید، به همراه نمودار تابع $f$ در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم تا تعداد نقاط تلاقی آن‌ها به‌دست آید. طبق شکل دو نمودار، در سه نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.




**۵۷** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $A(-۲,a)$ روی $y=f(x)$ است پس $f(-۲)=a$ است. نقطه‌ی $A'(۵,۴)$ روی منحنی $y=۱-f(۳+\mathrm{bx})$ قرار دارد پس $۴=۱-f(۳+۵b)$ یا $f(۳+۵b)=-۳$

$$\begin{cases} f(-۲)=a \\ f(۳+۵b)=-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳+۵b=-۲ \\ -۳=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-۱ \\ a=-۳ \end{cases} \Rightarrow a+b=-۴$$

**۵۸** گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}\ ,g(x)=\frac{۲x+۲}{۲-x}$$

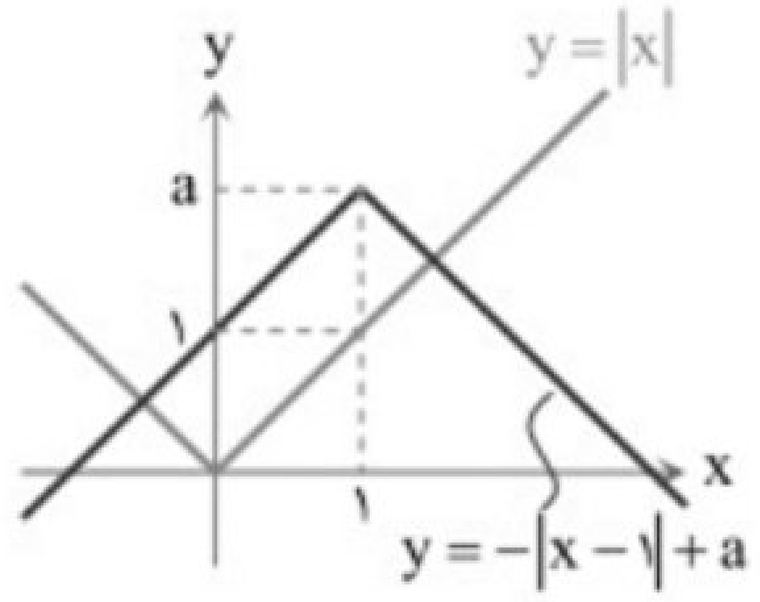
$$g(f(x))=\frac{۲\left(\frac{۲x-۱}{x+۱}\right)+۲}{۲-\frac{۲x-۱}{x+۱}}$$

$$\Rightarrow g(f(x))=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{x+۱}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{x+۱}}=\frac{۶x}{۳}=۲x$$

**۵۹** گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اعمال گفته‌شده را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

$$|x|\rightarrow|x-۱|\rightarrow-|x-۱|\rightarrow-|x-۱|+a$$

با توجه به شکل لازم است $a>۱$ باشد، تا دو نمودار در ربع اول و دوم یکدیگر را قطع کنند.






**۶۰** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وارون تابع را می‌یابیم:

$$y=\frac{x+۴}{x-۲}\Rightarrow xy-۲y=x+۴\Rightarrow xy-x=۲y+۴\Rightarrow x(y-۱)=۲y+۴$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲y+۴}{y-۱}\xrightarrow[\text{عوض می کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را}}y=\frac{۲x+۴}{x-۱}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۴}{x-۱}$$

حال $f(x)=f^{-۱}(x)$ را حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x+۴}{x-۱}=\frac{x+۴}{x-۲}\Rightarrow ۲x^۲-۴x+۴x-۸=x^۲+۴x-x-۴\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰$$

$$\Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۴ \text{ یا } x=-۱$$

**۶۱** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قرینه $y=۲+\sqrt{x-۱}$ نسبت به خط $y=x$ تابع وارون آن است.

$$y=۲+\sqrt{x-۱}\Rightarrow y-۲=\sqrt{x-۱}\xrightarrow{\text{به توان میرسانیم۲}}y^۲-۴y+۴=x-۱$$

$$\Rightarrow x=y^۲-۴y+۵\Rightarrow f(x)=x^۲-۴x+۵$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-۲)^۲+۱$$

$$\xrightarrow{\text{واحد در جهت۲ } x \text{ مثبت}}y=(x-۲-۲)^۲+۱\xrightarrow{\text{واحد در جهت۳ } y \text{ منفی}}g(x)=(x-۴)^۲+۱-۳$$



$$\Rightarrow g(x)=(x-۴)^۲-۲\Rightarrow g(۴)=(۴-۴)^۲-۲=-۲$$

۶۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y=2^{x+|x|}\xrightarrow{\text{واحد در جهت منفی محور} x \text{ ۳}} y=2^{(x+3)+|x+3|}\xrightarrow{\text{واحد در جهت منفی} y \text{ ها ۲}}$$

$$y=2^{x+3+|x+3|}-2\Rightarrow y=0\Rightarrow 2^{x+3+|x+3|}=2^1\Rightarrow x+3+|x+3|=1$$

$$\begin{cases} x\geq -3\Rightarrow 2(x+3)=1\Rightarrow x=-2/5 \\ x<-3\Rightarrow (x+3)-(x+3)=1\Rightarrow 0=1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۶۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. معکوس $f$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{x}{x-1}\Rightarrow \text{yx}-y=x\Rightarrow x=\frac{y}{y-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}$$

$$(f^{-1}\text{og})(x)=\frac{\frac{\text{ax}}{x+2}}{\frac{\text{ax}}{x+2}-1}=\frac{\text{ax}}{(a-1)x-2}$$

به شرطی این تابع خطی است که ضریب $x$ در مخرج صفر باشد پس $a=1$ است.

۶۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توابع $f$ و $f-g^{-1}$ خطی‌اند. ضابطه‌ی آنها را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=-\frac{2}{5}x+2 \\ f(x)-g^{-1}(x)=\frac{3}{2}x-3 \end{cases}$$

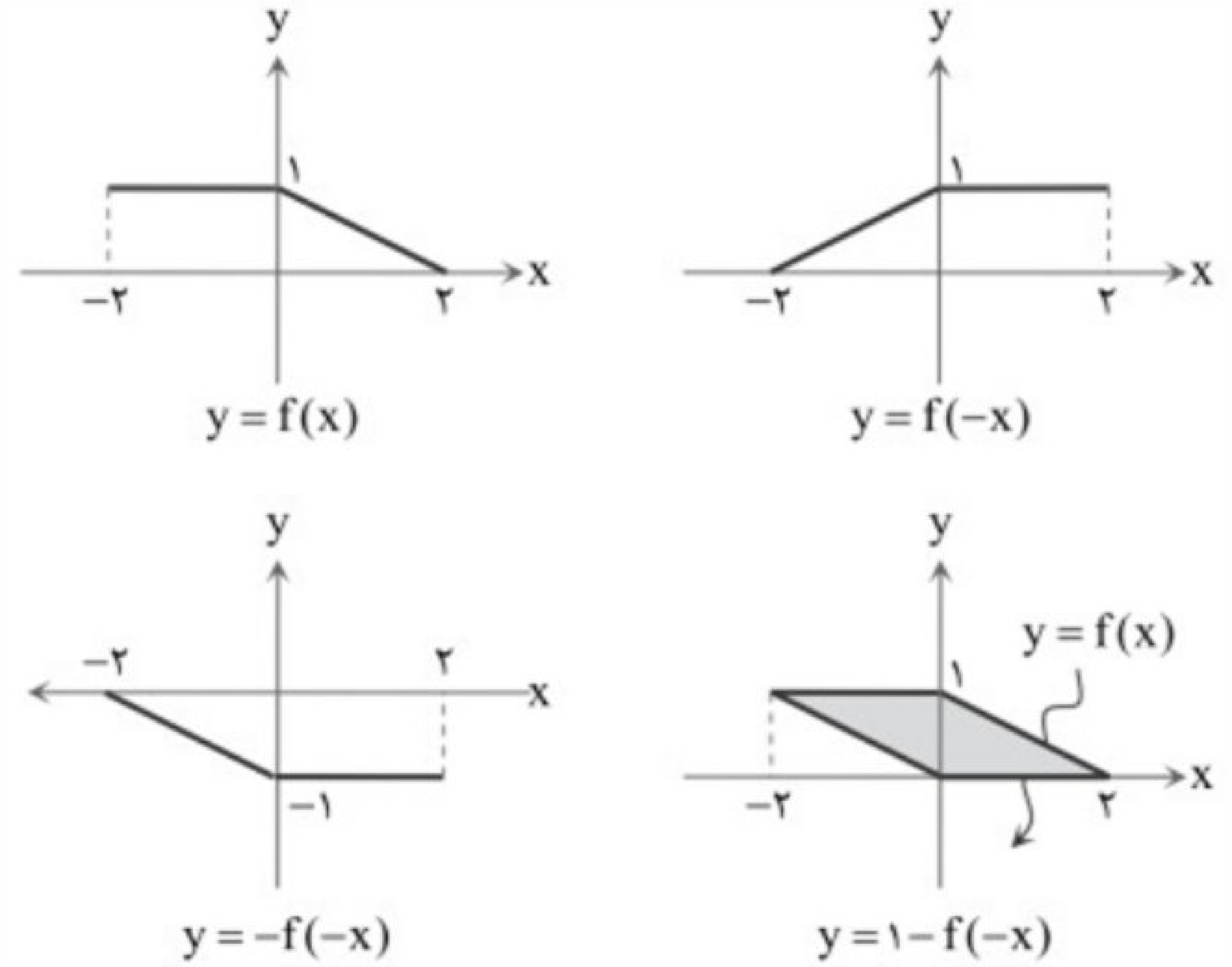
$$\xrightarrow{\text{کم}} g^{-1}(x)=-\frac{2}{5}x+2-\frac{3}{2}x+3=\frac{-19}{10}x+5$$

حال ضابطه‌ی $g(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=-\frac{19}{10}x+5\Rightarrow y-5=-\frac{19}{10}x\Rightarrow x=-\frac{10}{19(y-5)}$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{10}{19}(5-x)\Rightarrow g(2)=\frac{30}{19}$$

۶۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار $f(x)$ را نسبت به محور $y$ ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $f(-x)$ حاصل شود، سپس آن را نسبت به محور $x$ها قرینه می‌کنیم تا $-f(-x)$ به‌دست آید. در نهایت آن را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا به نمودار $۱ - f(-x)$ برسیم:




با توجه به شکل مساحت ناحیه‌ی حاصل، برابر مساحت یک متوازی‌الاضلاع به قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۱ است: $S = ۲$.

۶۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض $y = ۲g(۲ - ۳x)$ داریم:

$$\frac{y}{۲} = g(۲ - ۳x) \Rightarrow ۲ - ۳x = g^{-۱}\left(\frac{y}{۲}\right) \Rightarrow ۳x = ۲ - g^{-۱}\left(\frac{y}{۲}\right) \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳}g^{-۱}\left(\frac{y}{۲}\right)$$

و با فرض $y = f(۲x)$ داریم:

$$۲x = f^{-۱}(y) \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}f^{-۱}(y)$$

پس:

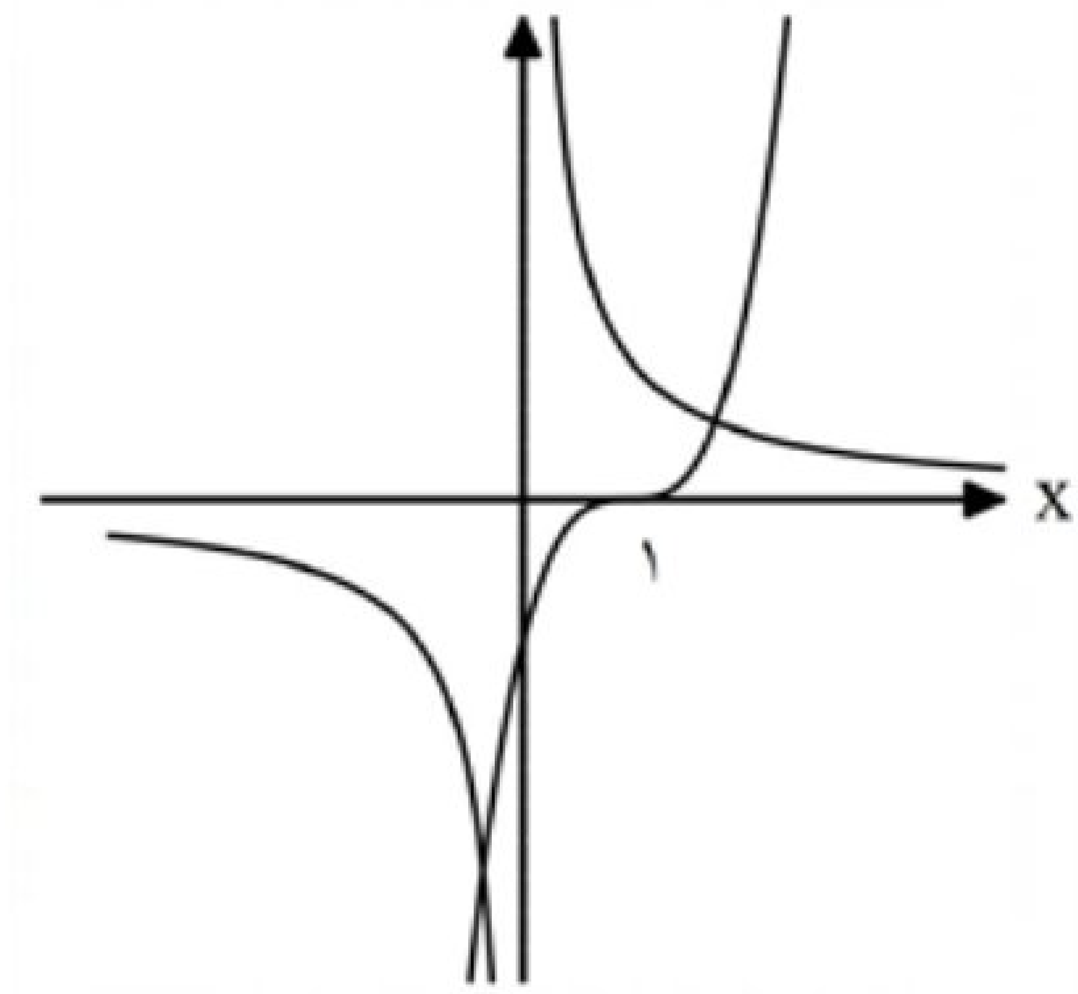
$$\frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳}g^{-۱}\left(\frac{y}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}f^{-۱}(y) \xrightarrow{y=-۲} \frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۳}g^{-۱}(-۱) = \frac{۱}{۲}f^{-۱}(-۲) = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}g^{-۱}(-۱) = -\frac{۷}{۳} \Rightarrow g^{-۱}(-۱) = -۷$$

**۶۷** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x(x^3-3x^2+3x-1)=1 \Rightarrow x(x-1)^3=1 \Rightarrow (x-1)^3=\frac{1}{x}$$

اگر نمودار دو تابع $\begin{cases} y=(x-1)^3 \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}$ را رسم کنیم، تعداد نقاط برخورد دو تابع، برابر تعداد ریشه‌های معادله‌ی مذکور است.



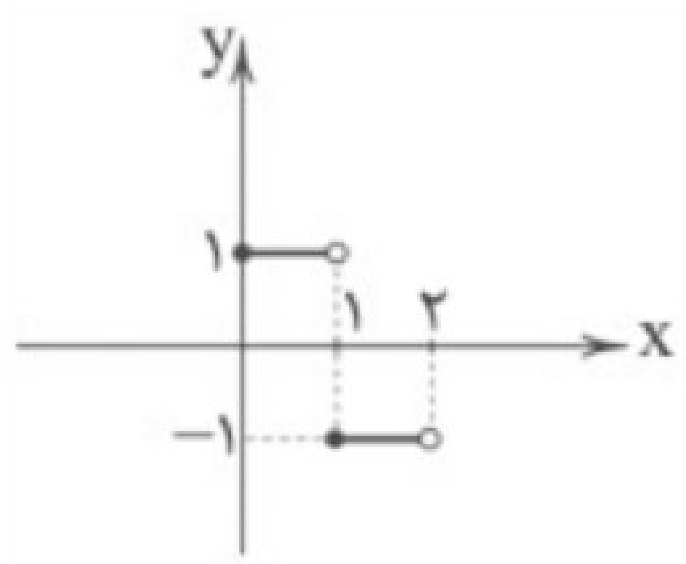



با توجه به شکل بالا، دو تابع در دو نقطه متقاطع‌اند، پس معادله دو ریشه دارد.

**۶۸** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=a(x^3-3x^2+3x-1)+2(x^2+2x+1)$$
$$=ax^3+\underline{\underline{(2-3a)}}x^2+(4+3a)x-a+2$$
$$g(x)=3(x^3+3x^2+3x+1)+x^2=3x^3+\underline{\underline{10x^2}}+9x+3$$
$$2-3a=10 \Rightarrow a=-\frac{8}{3} \Rightarrow f(0)=0+0+0+\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}$$

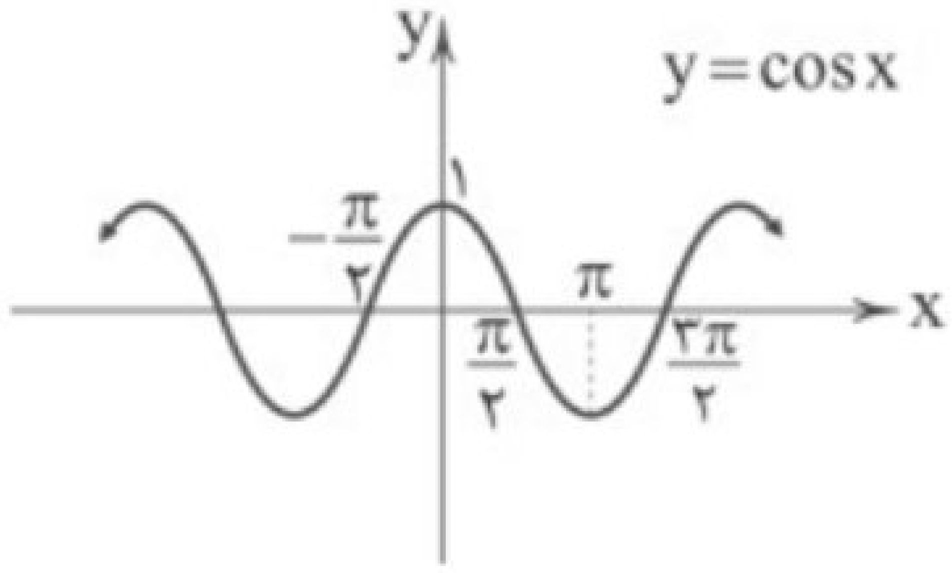
**۶۹** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار این تابع در فاصله‌ی $[0,2)$ به صورت زیر است:

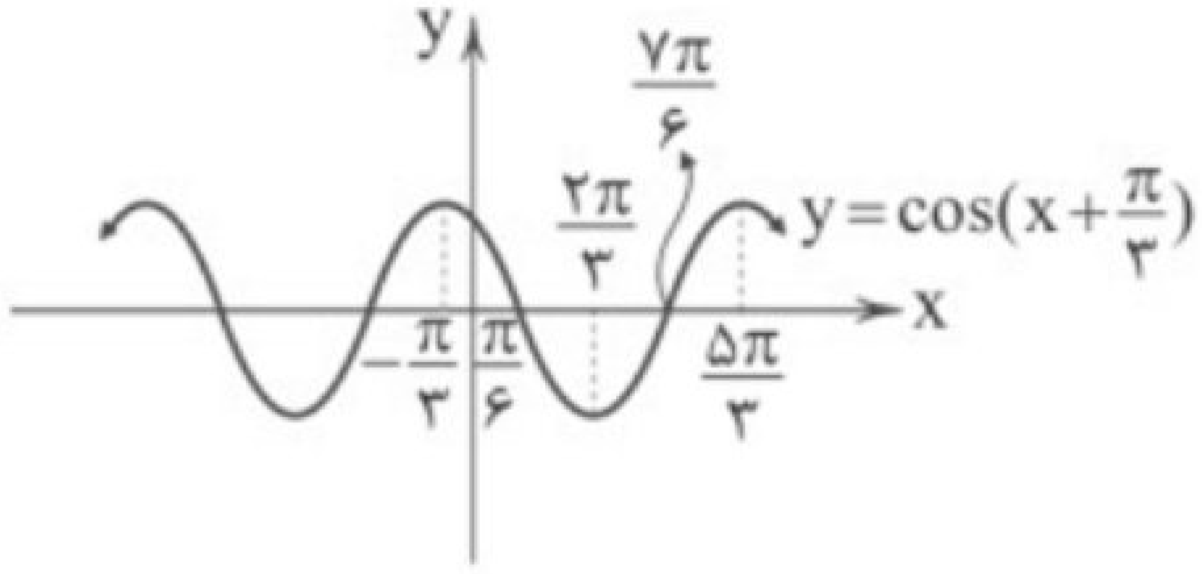



$$0 \le x < 1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=(-1)^0=1$$
$$1 \le x < 2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=(-1)^1=-1$$

تابع $f$ در بازه‌ی $[0,1)$ نزولی و در بازه‌ی $[1,2)$ ثابت است.

۷۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار $f$ را به کمک انتقال تابع $\operatorname{Cos} x$ رسم می‌کنیم.




با توجه به نمودار و گزینه‌های سؤال، تابع $f$ در فاصله‌ی $\left(-\frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}\right)$ اکیداً نزولی است.



۷۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$D_{f(x)} = [a, ۳] \Rightarrow D_{۲f(x)} = [a, ۳] \Rightarrow D_{۲f(x-۱)} = [a+۱, ۴] \Rightarrow [a+۱, ۴] = [-۱, b+۳]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+۱ = -۱ \\ b+۳ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a+b = -۱$$

۷۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $f$ نزولی اکید باشد و داشته باشیم $f(x) < f(y)$ آن‌گاه $x > y$ خواهد بود، یعنی در حال نزولی اکید جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$f\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right) > f(x+۱) \xrightarrow{\text{نزولی اکید } f} \frac{x+۱}{x-۱} < x+۱$$

$$\Rightarrow \frac{x+۱}{x-۱} - (x+۱) < ۰ \Rightarrow \frac{(x+۱)(۱-x+۱)}{x-۱} < ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{(x+۱)(۲-x)}{x-۱}}_{P(x)} < ۰$$

| x | +∞ | | −۱ | | ۱ | | ۲ | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(x) | | + | ۰ | − | ت ن | + | ۰ | − | |

$$P < ۰ \Rightarrow x \in (-۱, ۱) \cup (۲, +\infty)$$

۷۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون تابع $\operatorname{Log}_{۲} x$ صعودی اکید است پس برای آن‌که تابع $f(x)$ صعودی اکید باشد بایستی:



$$۱۶ - m^۲ > ۰ \Rightarrow m^۲ < ۱۶ \Rightarrow -۴ < m < ۴$$

در این فاصله هفت مقدار صحیح $m$ یعنی $\{-۳, -۲, \cdots, ۳\}$ وجود دارد.

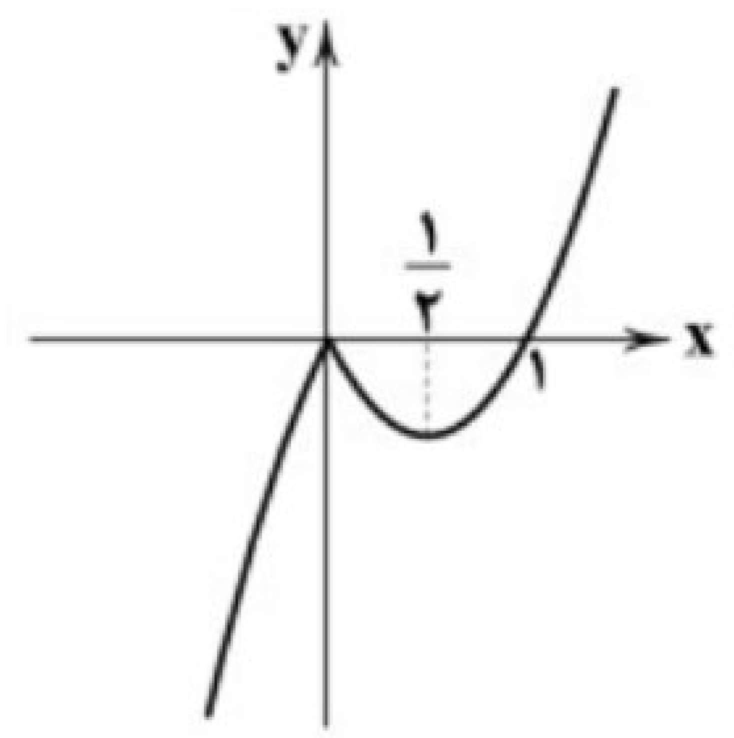
۷۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در توابع گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) تغییرات بر روی دامنه بوده و در تابع $۱ - f\left(\frac{x}{۲}\right)$ تغییرات بر روی دامنه و برد $f(x)$ می‌باشد.

**۷۵** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تابع $x^{۳}$ صعودی اکید است. پس تابع $(-x+۱)^{۳}$ نزولی اکید و تابع $-(۱-x)^{۳}$ صعودی اکید خواهد بود و در نتیجه عدد $m$ در یکنوایی تابع بی‌تأثیر است و برای هر $m \in \mathrm{R}$ تابع $f$ صعودی اکید خواهد بود.

**۷۶** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را در دو حالت رسم می‌کنیم:

$۱)\ x \geq ۰ \Rightarrow y = x(x-۱)$

$۲)\ x < ۰ \Rightarrow y = -x(x-۱)$




با توجه به شکل تابع در بازه‌ی $\left[۰, \frac{۱}{۲}\right]$ نزولی اکید است. پس حداکثر مقدار $a$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

**۷۷** گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شرط این‌که تابع $y = \mathrm{ax} + b + |\mathrm{cx} + d|$ روی $R$ اکیداً نزولی باشد این است که اولاً $a < ۰$ و ثانیاً $|a| > |c|$ باشد. پس برای آن‌که $f(x)$ اکیداً نزولی باشد:

$$|-۲| > \left|\frac{۴}{a}\right| \Rightarrow \frac{۴}{|a|} < ۲ \xrightarrow{a \neq ۰} |a| > ۲$$

**۷۸** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا وارون تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = -x^{۲} + ۴\mathrm{x} + ۱ \Rightarrow y = -x^{۲} + ۴\mathrm{x} - ۴ + ۵ \Rightarrow y = -(x-۲)^{۲} + ۵$$

$$\Rightarrow (x-۲)^{۲} = ۵ - y \Rightarrow |x-۲| = \sqrt{۵-y} \xrightarrow{x \leq ۲} -x + ۲ = \sqrt{۵-y}$$

$$\Rightarrow x = ۲ - \sqrt{۵-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۲ - \sqrt{۵-x}$$

حال تابع $f^{-۱}(x)$ را با تابع $g(x)$ قطع می‌دهیم:

$$۲ - \sqrt{۵-x} = \frac{۲\mathrm{x}+۵}{۳} \Rightarrow ۶ - ۳\sqrt{۵-x} = ۲\mathrm{x} + ۵ \Rightarrow ۳\sqrt{۵-x} = -۲\mathrm{x} + ۱$$

$$\Rightarrow ۴۵ - ۹\mathrm{x} = ۴\mathrm{x}^{۲} - ۴\mathrm{x} + ۱ \Rightarrow ۴\mathrm{x}^{۲} + ۵\mathrm{x} - ۴۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۴)(۴\mathrm{x}-۱۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱۱}{۴} \ \text{غ ق ق} \\ x = -۴ \Rightarrow \alpha = -۴ \end{cases}$$

$$g\left(\frac{۵\alpha}{۲}\right) = g(-۱۰) = -۵$$

۷۹) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به ماشین داده‌شده می‌توان نتیجه گرفت که:

$$g(f(x+۱)) = \frac{۱}{x} \quad (۱)$$

برای محاسبه‌ی $g\left(\frac{۱}{۴}\right)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم: $f(x+۱) = \frac{۱}{۴}$

$$f(x-۱) = x+۲ \xrightarrow[\text{تبدیل می کنیم}]{x \text{ را به } x+۲} f(x+۱) = x+۴ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = -\frac{۱۵}{۴}$$

در رابطه (۱) به جای $x$ عدد $-\frac{۱۵}{۴}$ را قرار می‌دهیم:

$$g\left(f\left(-\frac{۱۱}{۴}\right)\right) = \frac{-۴}{۱۵} \Rightarrow g\left(\frac{۱}{۴}\right) = \frac{-۴}{۱۵}$$

۸۰) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

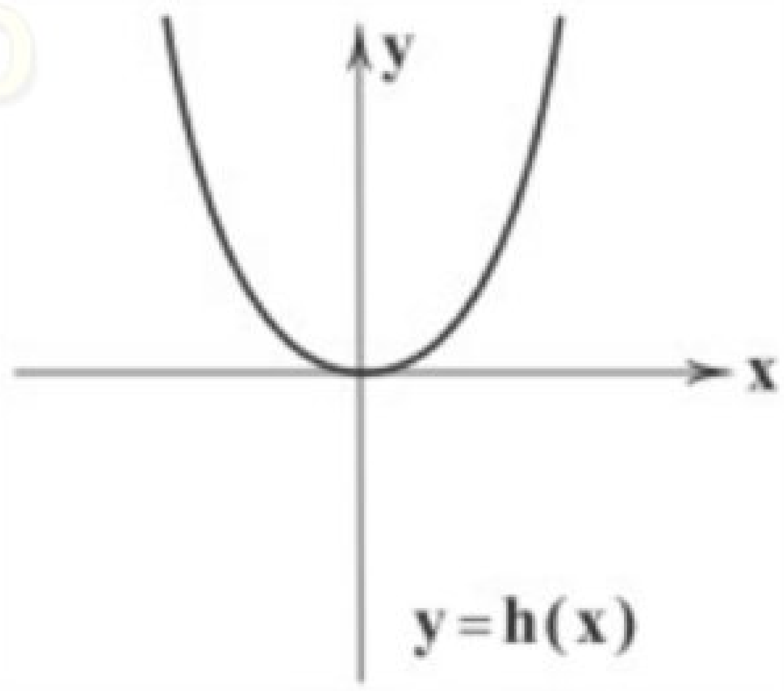
۱) $f(x) = x^۳ + ۶x^۲ + ۱۲x + ۸ - ۸ = (x+۲)^۳ - ۸$

تابع $x^۳$ یک‌به‌یک است پس تابع $f$ نیز یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر خواهد بود.

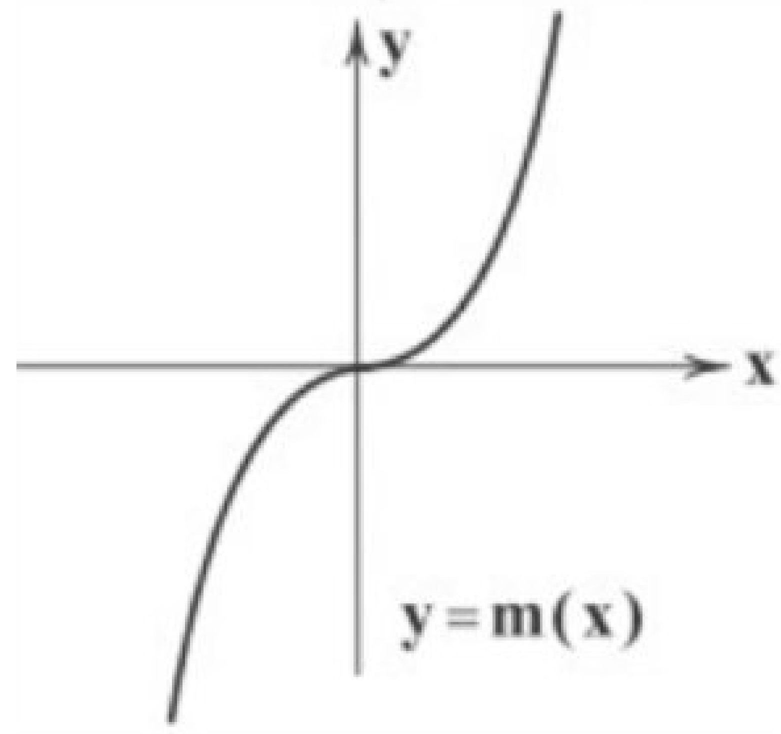
۲) تابع $\sqrt[۳]{x}$ یک‌به‌یک است پس در نتیجه تابع $g$ هم یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.



۳) $h(x) = x^۲|x| = \begin{cases} x^۳ & x \geq ۰ \\ -x^۳ & x < ۰ \end{cases}$




۴) $m(x) = x|x| = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$




تابع $h(x)$ وارون‌پذیر نخواهد بود.

۸۱) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع $x \leq ۰$ است:

$$x \leq ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = -x\sqrt{-x} + ۲$$

$$y = -x\sqrt{-x} + ۲ \Rightarrow x\sqrt{-x} = ۲ - y \Rightarrow x^۲(-x) = ۴ - ۴y + y^۲$$

$$\Rightarrow x^۳ = ۴y - y^۲ - ۴ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۴y - y^۲ - ۴} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{۴x - x^۲ - ۴}$$

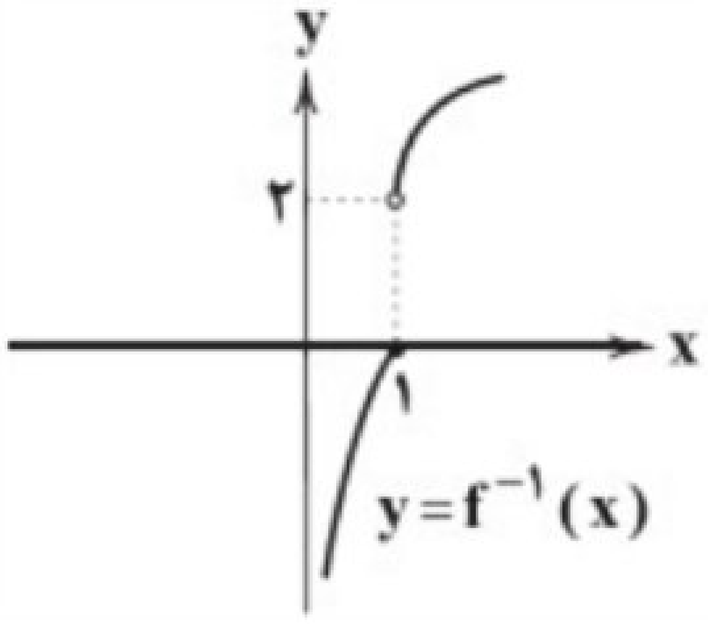


۸۲) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مفهوم سؤال این است که دو تابع وارون یک‌دیگرند.

$$y = \frac{۱}{۱+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{۱}{y} = ۱ + \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{۱}{y} - ۱ = \frac{۱-y}{y} \Rightarrow x = \left(\frac{۱-y}{y}\right)^۲$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(\frac{۱-x}{x}\right)^۲ \Rightarrow g\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱$$

۸۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار $f^{-۱}(x)$ را ببینید.




$$\underbrace{\left(x^{۲}+۱\right)}_{\text{همواره } +}f^{-۱}(x) \geq ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x) \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱$$

۸۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: تابع $f(x) = |ax + b| + cx + d$ با شرط $|a| < |c|$ اکیداً یکنواست. اگر $c < ۰$ باشد اکیداً نزولی و اگر $c > ۰$ باشد اکیداً صعودی است.

$$|a+۱| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < a+۱ < \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} < a < -\frac{۱}{۲}$$

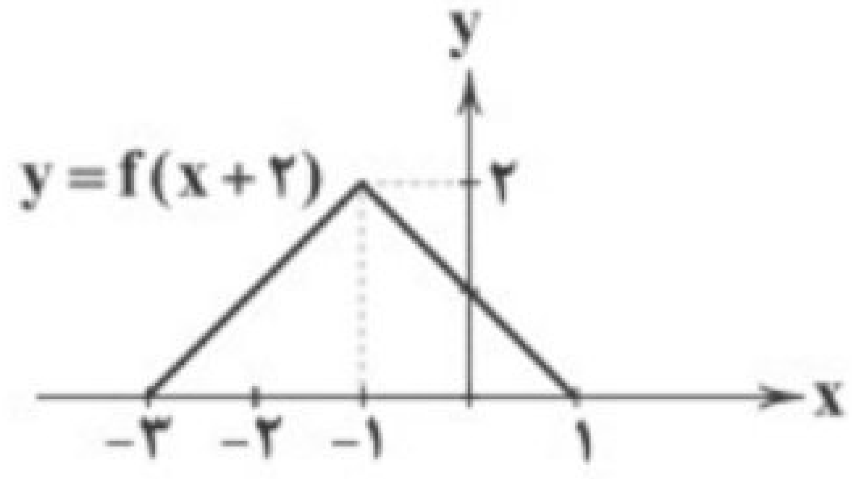
عدد صحیح موردنظر در این بازه $a = -۱$ است، پس:

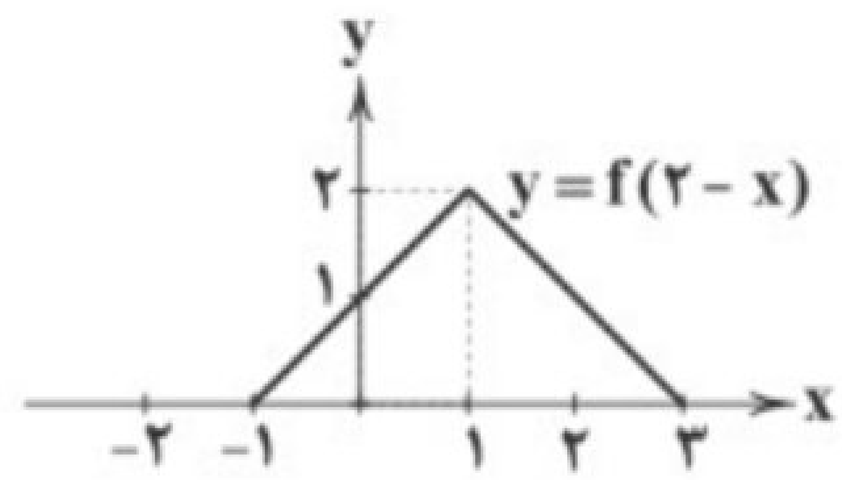
$$f(x) = ۱ - \frac{x}{۲} \Rightarrow f(۳) = ۱ - \frac{۳}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

**۸۵** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرایند ساخته شدن $f(۲-x)$ را ببینید:

$$f(x) \overset{(۱)}{\rightarrow} f(x+۲) \overset{(۲)}{\rightarrow} f(۲-x)$$

در مرحله‌ی اول انتقال دو واحدی به سمت چپ و در مرحله‌ی دوم قرینه‌ی تابع نسبت به محور $y$ها خواهد بود.



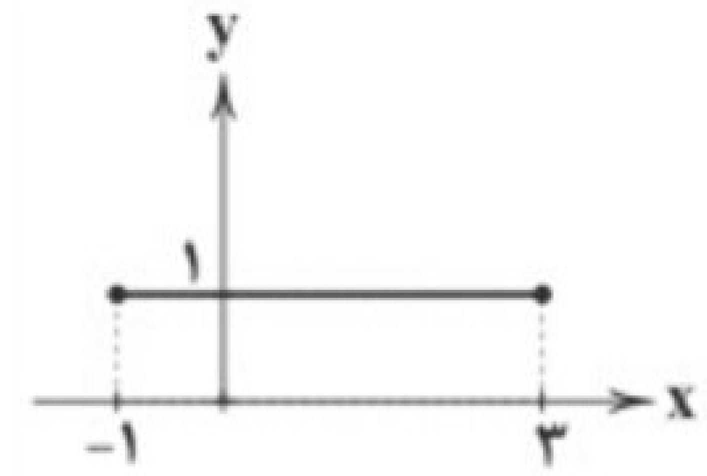

ملاحظه می‌کنید که $f(x)=f(۲-x)$ است. پس:

$$g(x)=f(x)-f(۲-x)+۱=۱$$

و اما حواسمان به دامنه‌ی تابع باشد.

$$D_g = D_{f(x)} \cap D_{f(۲-x)} = [-۱,۳]$$

پس $y$ را در دامنه‌ی $[-۱,۳]$ رسم می‌کنیم.

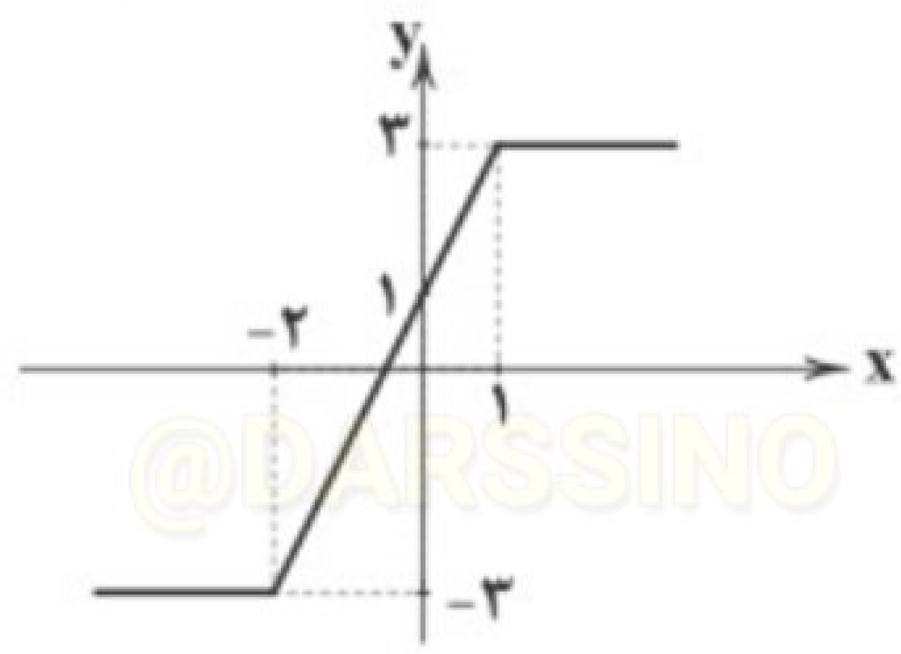



**۸۶** گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$h(x)=f(x)+g(x)=۲x-|x-۱|+|x+۲|-۲x=|x+۲|-|x-۱|$$

تابع $h(x)$ یک تابع سرسره‌ای است.

| x | $-۲$ | ۱ |
|---|---|---|
| y | $-۳$ | ۳ |




با توجه به نمودار، تابع $(f+g)(x)$ در فاصله‌ی $[-۲,۱]$ صعودی اکید است.

۸۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y=\sqrt{x+۲\sqrt{x}+۱-۱}\Rightarrow y=\sqrt{(\sqrt{x}+۱)^{۲}-۱}\Rightarrow y^{۲}=(\sqrt{x}+۱)^{۲}-۱$$
$$\Rightarrow y^{۲}+۱=(\sqrt{x}+۱)^{۲}\Rightarrow \sqrt{y^{۲}+۱}=|\sqrt{x}+۱|=\sqrt{x}+۱\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y^{۲}+۱}-۱$$
$$\Rightarrow x=y^{۲}+۱-۲\sqrt{y^{۲}+۱}+۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^{۲}-۲\sqrt{x^{۲}+۱}+۲$$

حال محاسبه‌ی برد:

$$x\geq ۴\Rightarrow \sqrt{x}\geq ۲\Rightarrow \sqrt{x}+۱\geq ۳\Rightarrow (\sqrt{x}+۱)^{۲}\geq ۹$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x}+۱)^{۲}-۱\geq ۸\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x}+۱)^{۲}-۱}\geq ۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow D_{f^{-۱}}=R_f=\left[۲\sqrt{۲},+\infty\right)$$

۸۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که توابع درجه ی دو در بازه‌هایی که شامل رأس سهمی نباشد، یک‌به‌یک است، لذا داریم:

$$y_{۱}=x^{۲}-\mathrm{ax}+۲\Rightarrow x_s=\frac{-(-a)}{۲\times ۱}=\frac{a}{۲},x\leq -۲$$

$\frac{a}{۲}$ در بازه $x\leq -۲$ نیست، پس: $\Rightarrow \frac{a}{۲}\geq -۲\Rightarrow a\geq -۴\quad (۱)$

از طرفی توابع دو ضابطه‌ای موقعی یک‌به‌یک هستند که اشتراک برد دو ضابطه تهی باشد، بنابراین:

$$y_{۱}=x^{۲}-\mathrm{ax}+۲\xrightarrow[\text{تابع min دارد.}]{\text{ضریب } x^{۲} \text{ مثبت است.}}y_{۱}\geq -\frac{\Delta}{۴\mathrm{a}}$$
$$\Rightarrow y_{۱}\geq -\frac{a^{۲}-۸}{۴\times ۱}\Rightarrow y_{۱}\geq \frac{۸-a^{۲}}{۴}\ (*)$$

برای ضابطه‌ی دوم داریم:

$$x>-۲\xrightarrow{+۶}x+۶>۴\Rightarrow \sqrt{x+۶}>۲\Rightarrow -\sqrt{x+۶}<-۲\Rightarrow y_{۲}<-۲\ (**)$$

لذا برای این‌که اشتراک برد دو ضابطه تهی باشد، با توجه به (*) و (**) داریم:

$$\frac{۸-a^{۲}}{۴}\geq -۲\Rightarrow ۸-a^{۲}\geq -۸\Rightarrow a^{۲}\leq ۱۶\Rightarrow -۴\leq a\leq ۴\ (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}-۴\leq a\leq ۴$$

۸۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق فرض، $f$ تابعی خطی است، یعنی:

$$f(x) = \text{ax} + b$$

طبق رابطه‌ی داده‌شده داریم:

$$۳\text{f}(-۵\text{x}) = f(۲ - ۱۵\text{x}) - ۷$$

$$\xrightarrow{f(x)=\text{ax}+b} ۳(-۵\text{ax} + b) = a(۲ - ۱۵\text{x}) + b - ۷$$

$$\Rightarrow \cancel{-۱۵\text{ax}} + ۳\text{b} = ۲\text{a} \cancel{-۱۵\text{ax}} + b - ۷ \Rightarrow ۲\text{b} - ۲\text{a} = -۷ \ (۱)$$

$$f^{-۱}(-۹) = -۲ \xrightarrow{\text{ویژگی وارون}} f(-۲) = -۹ \Rightarrow -۲\text{a} + b = -۹ \ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\ ;(۱)} \begin{cases} -۲\text{a} + ۲\text{b} = -۷ \\ ۲\text{a} - b = ۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱۱}{۲} \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{۱۱}{۲}x + ۲$$

$$f^{-۱}(k) = -\frac{۲}{۵} \Rightarrow f\left(-\frac{۲}{۵}\right) = k \Rightarrow \left(\frac{۱۱}{۲}\right)\left(-\frac{۲}{۵}\right) + ۲ = k \Rightarrow k = -\frac{۱}{۵}$$

۹۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که شرط وارون‌پذیری هر تابع، یک‌به‌یک بودن آن است. در توابع دو ضابطه‌ای، هر ضابطه باید یک‌به‌یک باشد و اشتراک برد هر دو تابع تهی باشد، پس:

$$\begin{cases} x < ۳ \Rightarrow ۳\text{x} < ۹ \Rightarrow ۳\text{x} - k < ۹ - k \Rightarrow y_۱ < ۹ - k \\ x \geq k \leq ۱۱ \Rightarrow k \geq -۲ \end{cases}$$

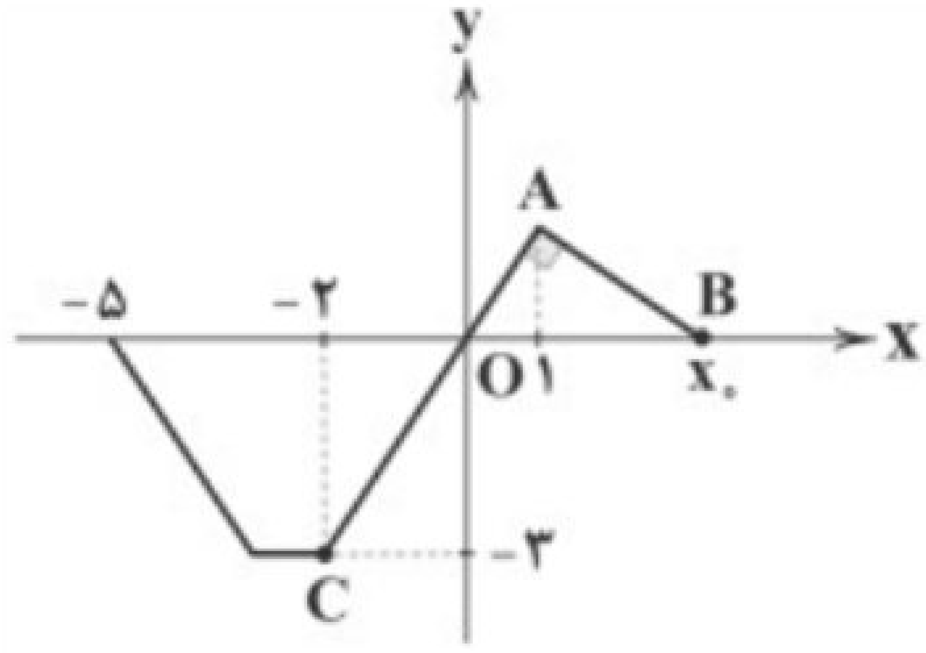
بنابراین: $۹ - k \leq ۱۱ \Rightarrow k \geq -۲$

پس حداقل مقدار $k$ برابر ۲- است.

۹۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-۳ < f(۳x - ۱) \leq ۱ \xrightarrow{\times(-۲)} -۲ \leq -۲f(۳x - ۱) < ۶ \xrightarrow{+۳} ۱ \leq y < ۹$$

**۹۲** گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شکل زیر را در نظر می‌گیریم:




$$\begin{cases} C(-۲,-۳) \\ O(\cdot,\cdot) \end{cases} \Rightarrow m_{\mathrm{OC}} = m_{\mathrm{AC}} = \frac{۳}{۲}$$

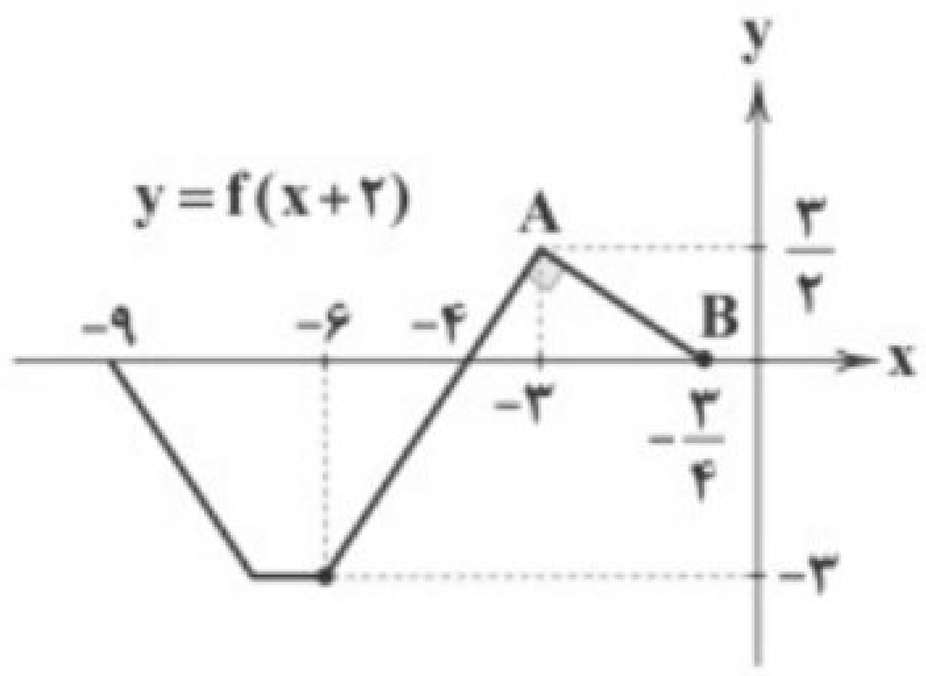
$$\xrightarrow{\text{معادله ی خط AC}} y-\cdot = \frac{۳}{۲}(x-\cdot) \xrightarrow{x_A=۱} A\left(۱,\frac{۳}{۲}\right)$$

$$\mathrm{AB} \perp \mathrm{AC} \Rightarrow m_{\mathrm{AB}} = -\frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی خط AB}} y-\frac{۳}{۲} = -\frac{۲}{۳}(x-۱)$$

$$\xrightarrow{y_B=\cdot} \cdot-\frac{۳}{۲} = -\frac{۲}{۳}(x_\cdot-۱) \Rightarrow x_\cdot = \frac{۱۳}{۴} \Rightarrow B\left(\frac{۱۳}{۴},\cdot\right)$$

برای رسم نمودار $f(x+۲)$ از روی نمودار $f(x-۲)$، کافی است ۴ واحد نمودار را به سمت چپ منتقل کنیم.




$$y=\sqrt{(x+۳)f(x+۲)} \xrightarrow{\text{دامنه ی تابع}} (x+۳)f(x+۲) \geq \cdot$$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

| x | −۹ | | −۴ | | −۳ | | −۳/۴ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x+۳ | | − | | − | | + | |
| f(x+۲) | | − | | + | | + | |
| (x+۳)f(x+۲) | | + | | − | | + | |

$$\Rightarrow D = [-۹,-۴] \cup \left[-۳,-\frac{۳}{۴}\right]$$

**۹۳** گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = ۲۷x^۹ - ۲۷x^۶ + ۹x^۳ - ۱\, mx\,(x^۸ - ۲x^۴ + ۱) + ۳$$

$$y = (۲۷-m)x^۹ - ۲۷x^۶ + ۲mx^۵ + ۹x^۳ - mx + ۲$$

اگر این تابع درجه ۹ نباشد باید $m = ۲۷$ باشد. در این صورت تابع درجه ۶ خواهد بود.

۹۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ریشه‌های داخل قدرمطلق ۲ و ۱ هستند، سه ناحیه برای تابع ایجاد می‌شود.

$$x \leq ۱ \Rightarrow y = -x + ۲ + k(-x + ۱) + x = -\mathrm{kx} + k + ۲$$
$$۱ < x \leq ۲ \Rightarrow y = -x + ۲ + k(x - ۱) + x = \mathrm{kx} + ۲ - k$$
$$x > ۲ \Rightarrow y = x - ۲ + k(x - ۱) + x = (k + ۲)x - ۲ - k$$

اگر تابعه صعودی اکید باشد باید شیب هر سه خط به دست آمده مثبت باشد.

$$\begin{cases} -k > ۰ \Rightarrow k < ۰ \\ k > ۰ \\ k + ۲ > ۰ \Rightarrow k > -۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in \emptyset$$

۹۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} \text{تابع ثابت } f \Rightarrow m = n = ۰ \Rightarrow f(x) = -k \\ (m, n - ۱) = (۰, k) \Rightarrow k = n - ۱ = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = ۱$$

۹۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = (\sqrt{x} - ۱)^{۲} \xrightarrow{x \geq ۱} \sqrt{y} = \sqrt{x} - ۱ \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + ۱$$
$$g(x) = f^{-۱}(x) = (\sqrt{x} + ۱)^{۲}$$
$$g(g(۱)) = g(۴) = ۹$$

۹۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f\left(-\frac{۵}{۳}\right) = ۲\left[-\frac{۵}{۳}\right] - \left(-\frac{۵}{۳}\right) = -۴ + \frac{۵}{۳} = -\frac{۷}{۳}$$
$$f\left(-\frac{۷}{۳}\right) = ۲\left[-\frac{۷}{۳}\right] - \left(-\frac{۷}{۳}\right) = -۶ + \frac{۷}{۳}$$
$$\mathrm{gof}\left(-\frac{۵}{۳}\right) = g\left(f\left(-\frac{۵}{۳}\right)\right) = g\left(-\frac{۷}{۳}\right) = f\left(\left[-\frac{۷}{۳} + f\left(-\frac{۷}{۳}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{۷}{۳} - ۶ + \frac{۷}{۳}\right]\right) = f(-۶) = -۶$$

۹۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{\mathrm{mx} - ۱}$

$$۵y - ۱۰x = ۱۲ \xrightarrow{y = ۷/۲} x = ۲/۴ \Rightarrow \begin{array}{l} (۲/۴, ۷/۲) \in f^{-۱} \\ (۷/۲, ۲/۴) \in f \end{array}$$
$$\Rightarrow ۲/۴ = \sqrt{۷/۲}\sqrt{۷/۲m - ۱}$$
$$۲/۴ \times ۲/۴ = ۷/۲(۷/۲m - ۱)$$
$$۰/۸ = ۷/۲m - ۱ \Rightarrow m = \frac{۱}{۴} \Rightarrow f(۱۶) = ۴\sqrt{۳}$$

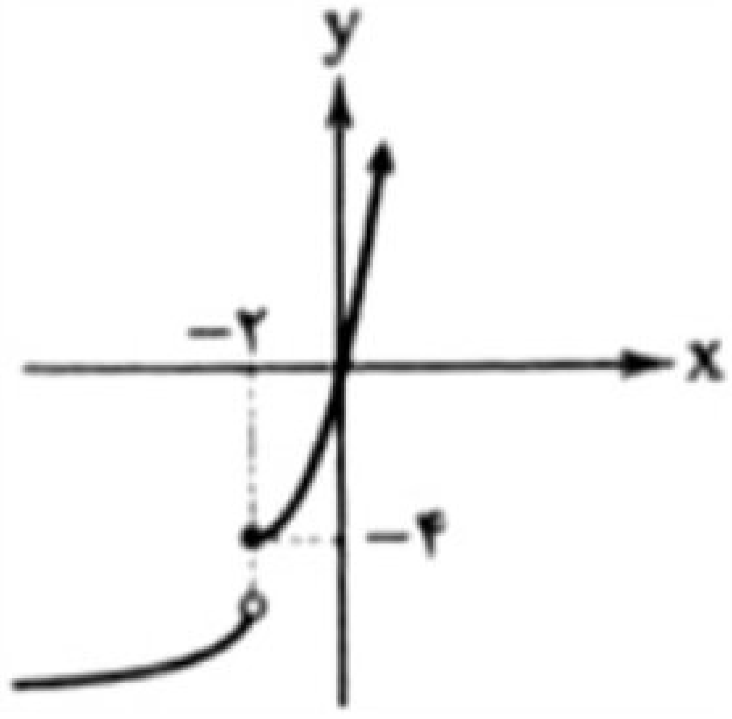
۹۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن‌که f بازه هم صعودی، هم نزولی داشته باشد، باید در آن بازه تابع f ثابت باشد، در نتیجه: $|b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$

$$b = ۲ \Rightarrow f(x) = |۲x - ۱| + ۲x \xrightarrow{x \leq \frac{۱}{۲}} f(x) = ۱ - ۲x + ۲x = ۱$$

$$b = -۲ \Rightarrow f(x) = |۲x - ۱| - ۲x \xrightarrow{x \geq \frac{۱}{۲}} f(x) = ۲x - ۱ - ۲x = -۱$$

**۱۰۰** گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اگر ضابطه اول را در بازه داده شده رسم کنیم خواهید دید که اکیداً صعودی است. ضابطه $x - \sqrt{-۲-x}-$ اکیداً صعودی است و فقط k واحد به صورت عمودی منتقل می‌شود. بنابراین برای آن‌که f اکیداً صعودی باشد، باید$k \leq -۴$ باشد. پس حداکثر مقدار k برابر ۴- است.

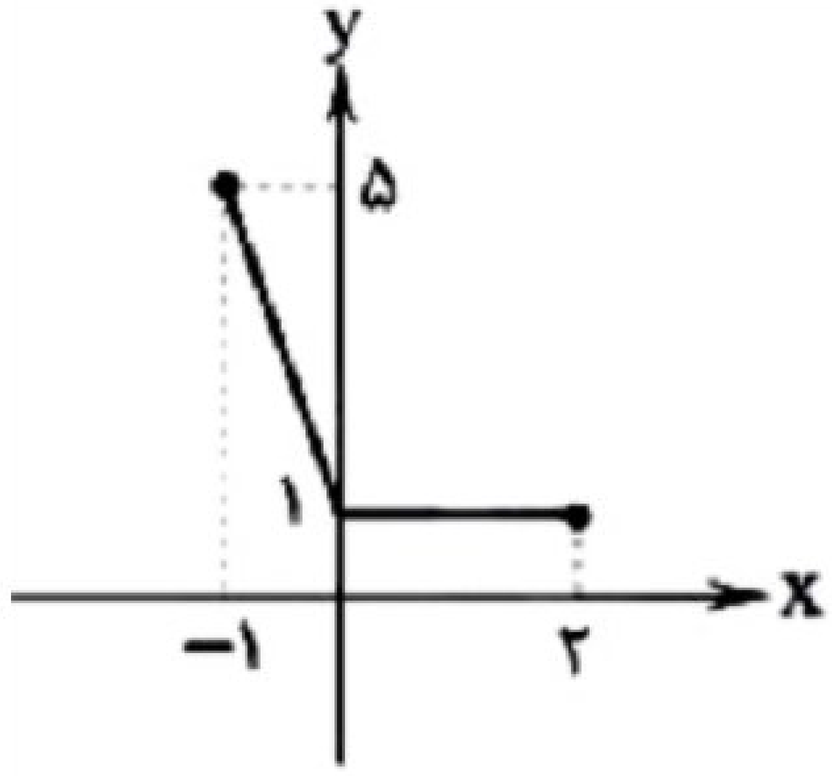



**۱۰۱** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

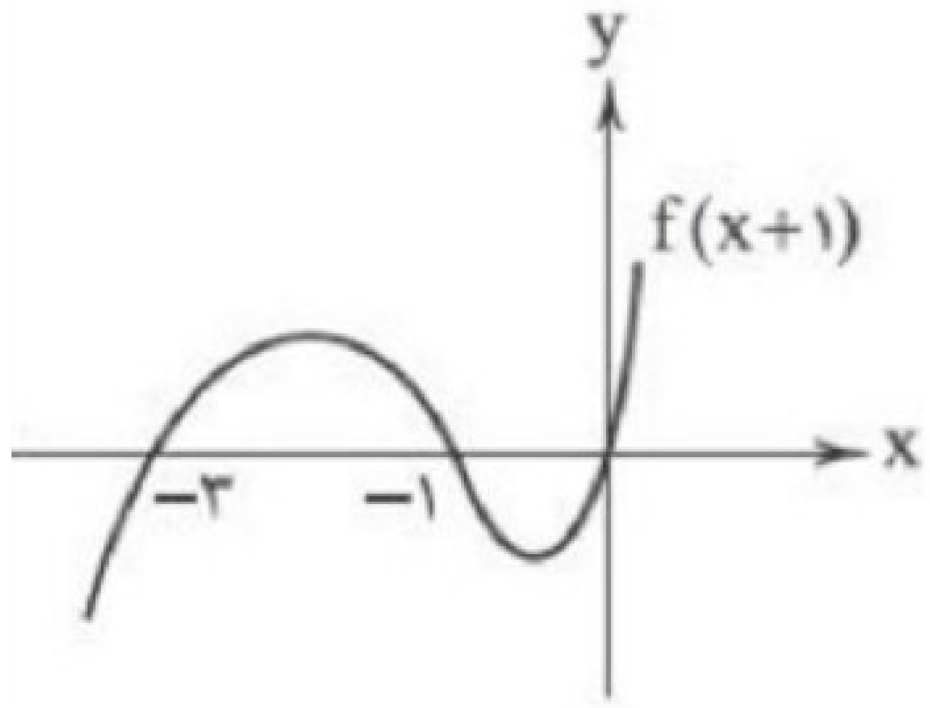
$$۰ \leq x \leq ۲ \Rightarrow g(x) = x - x = ۰ \Rightarrow f(g(x)) = f(۰) = ۱$$

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow g(x) = x + x = ۲x \Rightarrow f(g(x)) = f(۲x) = ۱ - ۴x$$

اکنون $(\text{fog})(x)$ را رسم می‌کنیم:




**۱۰۲** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $f(x+۱)$ را رسم می‌کنیم.




اکنون دامنه‌ها را حساب می‌کنیم. $f(x)f(x+۱) \geq ۰$

| x | -∞ | | -۳ | | -۲ | | -۱ | | ۰ | | ۱ | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x)f(x+۱) | | + | ۰ | - | ۰ | + | ۰ | - | ۰ | - | ۰ | + | |

دامنهٔ تابع $\sqrt{f(x)f(x+۱)}$ برابر است با: $(-\infty, -۳] \cup [-۲, -۱] \cup [۱, +\infty) \cup \{۰\}$

حال دامنهٔ $\sqrt{-x-۱}$ را حساب می‌کنیم: $-x - ۱ > ۰ \Rightarrow x < -۱$

اشتراک جواب‌های به دست آمده $(-\infty, -۳] \cup [-۲, -۱)$ است.

۱۰۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وارون f را حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{۴x-۱}{x+۱}\Rightarrow \mathrm{yx}+y=۴x-۱\Rightarrow x(۴-y)=y+۱\Rightarrow x=\frac{y+۱}{۴-y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۴-x}$$

$$g(x)=f^{-۱}(x)+۲=\frac{x+۱}{۴-x}+۲=\frac{۹-x}{۴-x}$$

$$g(x+۴)=\frac{۹-(x+۴)}{۴-(x+۴)}=\frac{۵-x}{-x}=۱-\frac{۵}{x}$$

۱۰۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x))<۰\Rightarrow\frac{۲g(x)-۱}{۳g(x)+۱}<۰\Rightarrow-\frac{۱}{۳}<g(x)<\frac{۱}{۲}\Rightarrow-\frac{۱}{۳}<\sqrt[۳]{x}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow-\frac{۱}{۲۷}<x<\frac{۱}{۸}$$

۱۰۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید رأس سهمی در بازه $(۱,۲)$ قرار گیرد.

$$۱<\frac{\frac{۱}{a}}{\frac{۲}{۳}}<۲\Rightarrow۱<\frac{۳}{۲a}<۲\xrightarrow{\times\frac{۲}{۳}}\frac{۲}{۳}<\frac{۱}{a}<\frac{۴}{۳}\Rightarrow\frac{۳}{۴}<a<\frac{۳}{۲}$$



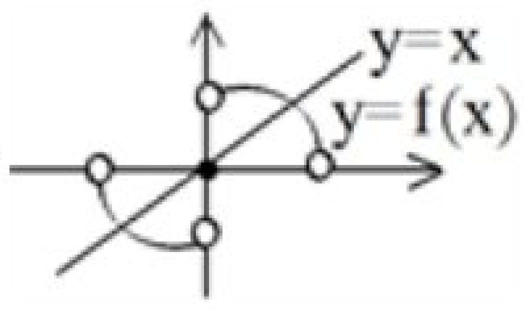
۱۰۶ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)\leqslant۰\Rightarrow x^{۲}+x-۲\leqslant۰\Rightarrow-۲\leqslant x\leqslant۱\Rightarrow-۲\leqslant g(x)\leqslant۱\Rightarrow-۲\leqslant\frac{۱}{۲}(x-۳)\leqslant۱$$

$$\Rightarrow-۴\leqslant x-۳\leqslant۲\Rightarrow-۱\leqslant x\leqslant۵$$

۱۰۷ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x^{۲}} & ۰<x<۱\\ ۰ & x=۰\\ -\sqrt{۱-x^{۲}} & -۱<x<۰\end{cases}\Rightarrow$$




$\Rightarrow$ .متقارن است $y=x$ نسبت به f $\Rightarrow f^{-۱}(x)=f(x)$

۱۰۸ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین دامنه‌ی تابع gof ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=\sqrt{x+|x|}\xrightarrow{D_f} x+|x|\geqslant ۰ \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant ۰ : ۲x\geqslant ۰ \Rightarrow x\geqslant ۰ \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geqslant ۰ \\ x<۰ : x-x\geqslant ۰ \Rightarrow ۰\geqslant ۰ \text{ همواره برقرار } \xrightarrow{\text{اشتراک}} x<۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} x\in R\Rightarrow D_f=R$$

$$g(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۴x}\Rightarrow D_g=R-\{۰,۴\}$$

حال با توجه به دامنه‌ی تعریف تابع مرکب، می‌نویسیم:

$$D_{\text{gof}}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\left\{x\in R \mid \sqrt{x+|x|}\in (R-\{۰,۴\})\right\}$$

باید مقادیری از x که به ازای آن‌ها $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ برابر ۰ یا ۴ می‌شوند را از R کنار بگذاریم. داریم:

$$\sqrt{x+|x|}=۰\Rightarrow x+|x|=۰\cdot|x|=-x\Rightarrow x\leqslant ۰$$

$$\sqrt{x+|x|}=۴\Rightarrow x+|x|=۱۶\Rightarrow \begin{cases} x\geqslant ۰ : ۲x=۱۶\Rightarrow x=۸ \\ x<۰ : x-x=۱۶\Rightarrow ۰=۱۶ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین اگر از R، $x\leqslant ۰$ و $x=۸$ را کنار بگذاریم، دامنه‌ی gof به‌دست می‌آید:

$$D_{\text{gof}}=\{x\in R \mid x\not\leqslant ۰, x\neq ۸\}=R>۰-\{۸\}=(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$$

۱۰۹ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$-x^{۲}+x+۲>۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۲ \end{cases}$$

| x | -∞ | -۱ | | ۲ | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x^{۲}+x+۲$ | − | • | + | • | − |
| $-x^{۲}+x+۲>۰$ | | | ج | | |

$$D_f=(-۱,۲)$$
$$D_g=R$$

$$D_{\text{fog}}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\in R \mid -۱<\left(\frac{۱}{۴}\right)^x<۲\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{مثبت است}\left(\frac{۱}{۲}\right)^x}\left\{x\in R \mid \left(\frac{۱}{۴}\right)^x<۲\right\}=\left\{x\in R \mid ۲^{-۲x}<۲^{۱}\right\}$$

$$\{x\in R \mid -۲x<۱\}=\left\{x\in R \mid x>-\frac{۱}{۲}\right\}=\left(-\frac{۱}{۲},+\infty\right)$$

۱۱۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در توابعی به شکل کلی $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$، تابع با شرط $ad-bc\neq ۰$ وارون‌پذیر است و شرط این‌که $f^{-۱}(x)=f(x)$ باشد این است که $a+d=۰$ باشد.

می‌توان با توجه به نکته‌ی فوق، حل سؤال را به صورت زیر نوشت:

$$m+۲m-۶=۰\Rightarrow ۳m=۶\Rightarrow m=۲$$

**۱۱۱** گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل دامنه‌ی تابع $f(x)$ برابر $[-۳,۲]$ است. برای آنکه تابع $۳f\left(-\frac{x}{۲}\right)$ تعریف شده باشد، باید:

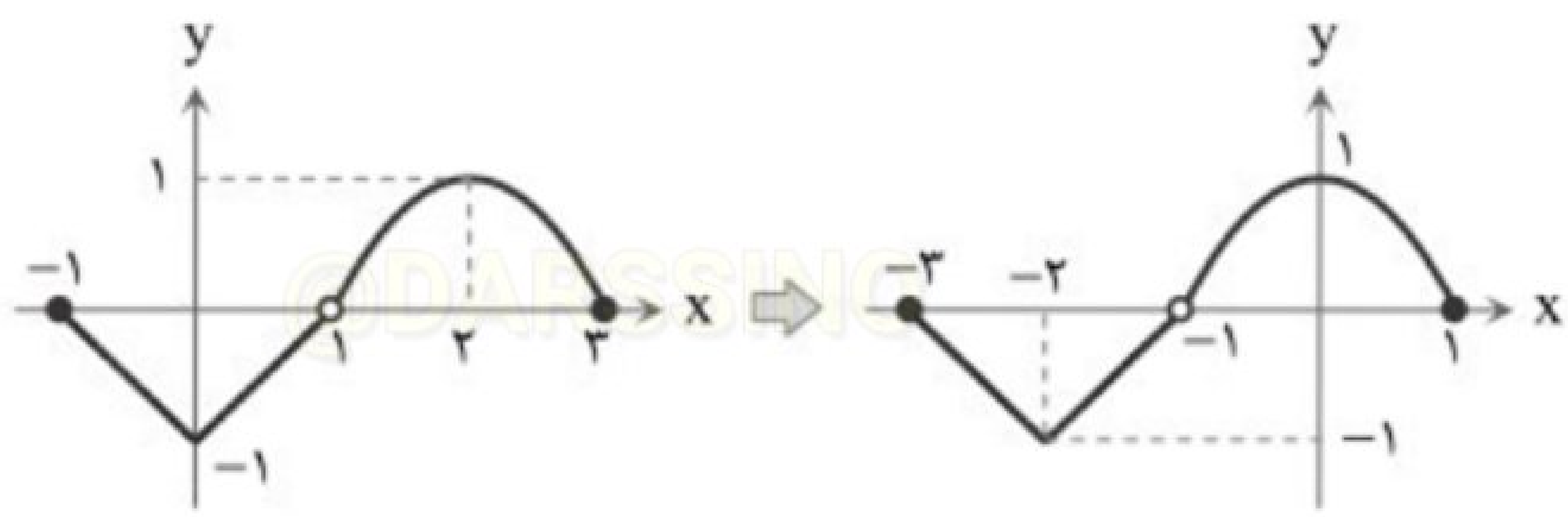
$$-۳ \le -\frac{x}{۲} \le ۲ \Rightarrow ۶ \ge x \ge -۴ \Rightarrow D = [-۴,۶]$$

ضمناً $-۱ \le f(x) \le ۲$ تابع $f\left(-\frac{x}{۲}\right)$ از انبساط افقی و قرینه کردن نسبت به محور $y$ها از روی $f(x)$ حاصل شده است، پس برد تغییر نمی‌کند، بنابراین:

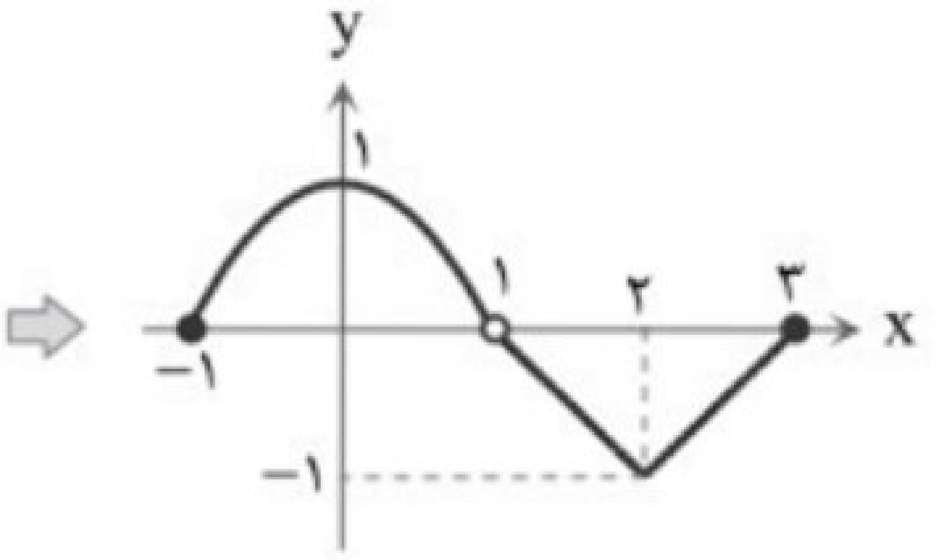
$$-۱ \le f\left(-\frac{x}{۲}\right) \le ۲ \Rightarrow -۳ \le ۳f\left(-\frac{x}{۲}\right) \le ۶ \Rightarrow R = [-۳,۶]$$

بنابراین: $D \cap R = [-۳,۶]$

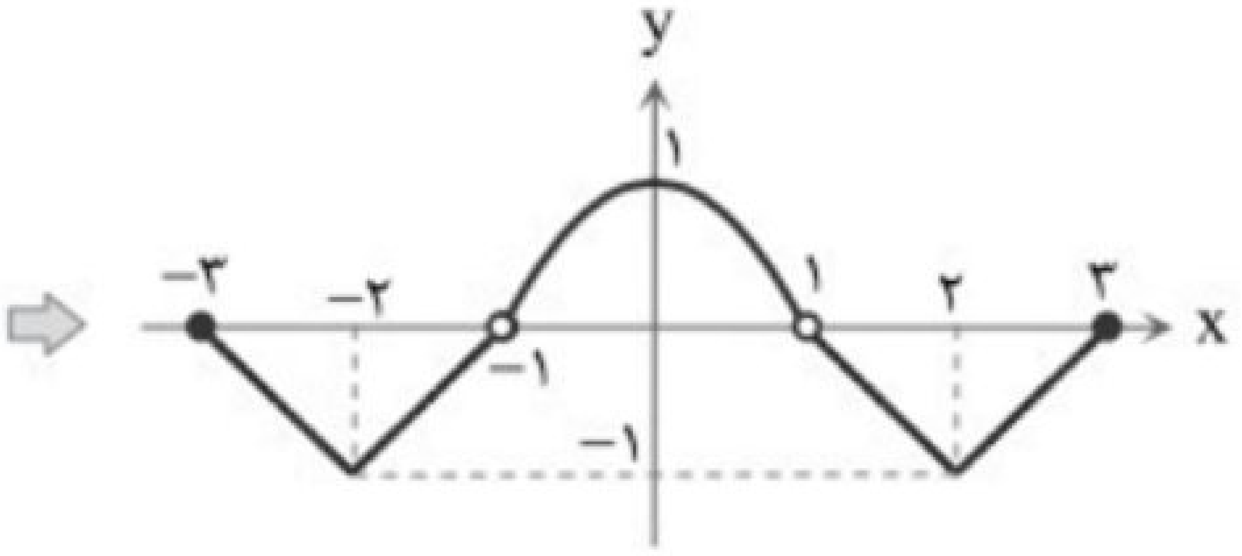
**۱۱۲** گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$y = f(x)$ $\qquad$ $y = f(۲+x)$

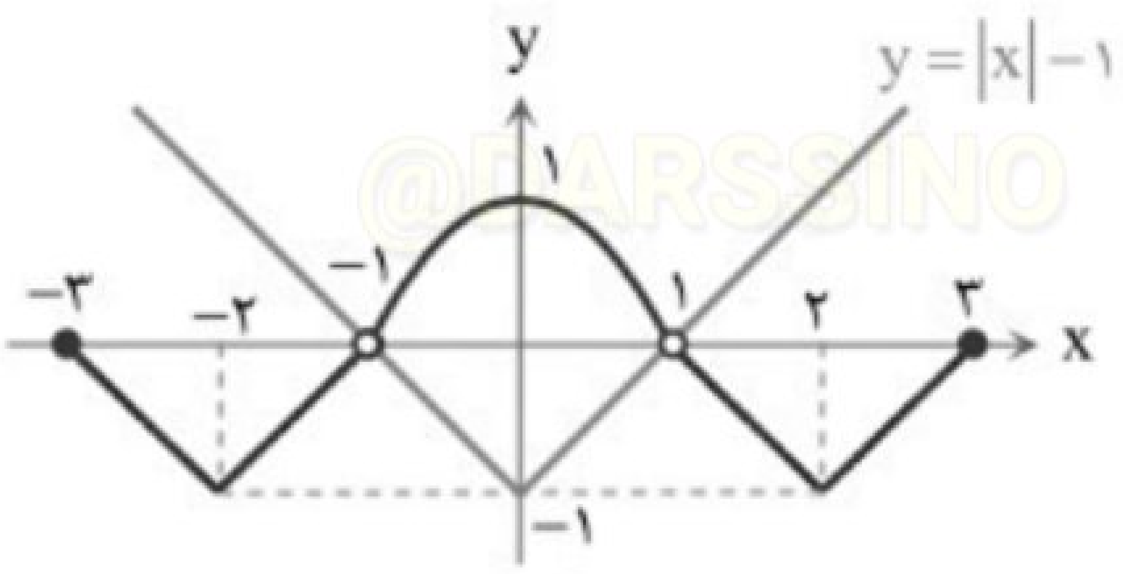


$y = f(۲-x)$



$y = f(۲-|x|)$

همان‌طور که در شکل دیده می‌شود نمودارهای توابع $y = f(۲-|x|)$ و $y = |x| - ۱$ هیچ نقطه‌ی تلاقی با یکدیگر ندارند. پس معادله فاقد ریشه‌ی حقیقی است.



(۱۱۳) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با:

$$R(a)=P(a)=a^۳-۵a^۲+۸a-۲\ (*)$$

پس:

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R(x)$$

از طرفی $Q(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، پس $Q(۱)=۰$. در این صورت:

$$P(۱)=(۱-a)Q(۱)+R(۱)\overset{(*)}{\rightarrow}۲=۰+a^۳-۵a^۲+۸a-۲$$

$$\Rightarrow a^۳-۵a^۲+۸a-۴=۰\Rightarrow(a-۱)(a^۲-۴a+۴)=۰$$

$$\Rightarrow(a-۱)(a-۲)^۲=۰\Rightarrow a=۱,۲\xrightarrow{a\neq۱}a=۲$$

(۱۱۴) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع $f^{-۱}(x)$ را می‌یابیم. برای این کار باید در ضابطه‌ی $f(x)$، ابتدا $y$ را برحسب $x$ پیدا کنیم و سپس جای آن دو را عوض کنیم:

$$f(x)=y=\frac{۲x-۱}{x+۲}\Rightarrow yx+۲y=۲x-۱\Rightarrow۲y+۱=x(-y+۲)\Rightarrow x=\frac{۲y+۱}{-y+۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۱}{-x+۲}$$

بنابراین:

$$f^{-۱}og(x)=\frac{۲(x+۴)+۱}{-(x+۴)+۲}=\frac{۲x+۹}{-x-۲}$$

$$gof^{-۱}(x)=\frac{(۲x+۱)}{-x+۲}+۴=\frac{-۲x+۹}{-x+۲}$$

سپس دو معادله را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{۲x+۹}{-x-۲}=\frac{-۲x+۹}{-x+۲}$$

$$\Rightarrow-۲x^۲+۴x-۹x+۱۸=۲x^۲+۴x-۹x-۱۸\Rightarrow۴x^۲=۳۶\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm۳$$

مجموع جواب‌های معادله صفر است.

(۱۱۵) گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر دو تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲},g(x)=x+۴\Rightarrow fog(x)=f(g(x))=\frac{۲(x+۴)-۱}{x+۴+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}$$

$$\Rightarrow gof(x)=g(f(x))=\frac{۲x-۱}{x+۲}+۴=\frac{۲x-۱+۴x+۸}{x+۲}=\frac{۶x+۷}{x+۲}$$

حل معادله‌ی $fog(x)=gof(x)$:

$$\frac{۶x+۷}{x+۲}=\frac{۲x+۷}{x+۶}\Rightarrow(۶x+۷)(x+۶)=(۲x+۷)(x+۲)\Rightarrow۶x^۲+۳۶x+۷x+۴۲$$

$$=۲x^۲+۴x+۷x+۱۴\Rightarrow۴x^۲+۳۲x+۲۸=۰\Rightarrow x^۲+۸x+۷=۰$$

$$\Rightarrow(x+۱)(x+۷)=۰\Rightarrow x=-۱\ \text{یا}\ x=-۷$$

۱۱۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $f(x) = ۲^{|\mathrm{Sin}\, x|}$ را $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم:

$$y = ۲^{\left|\mathrm{Sin}\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)\right|} \Rightarrow y = ۲^{|-\mathrm{Cos}\, x|} \Rightarrow y = ۲^{|\mathrm{Cos}\, x|}$$

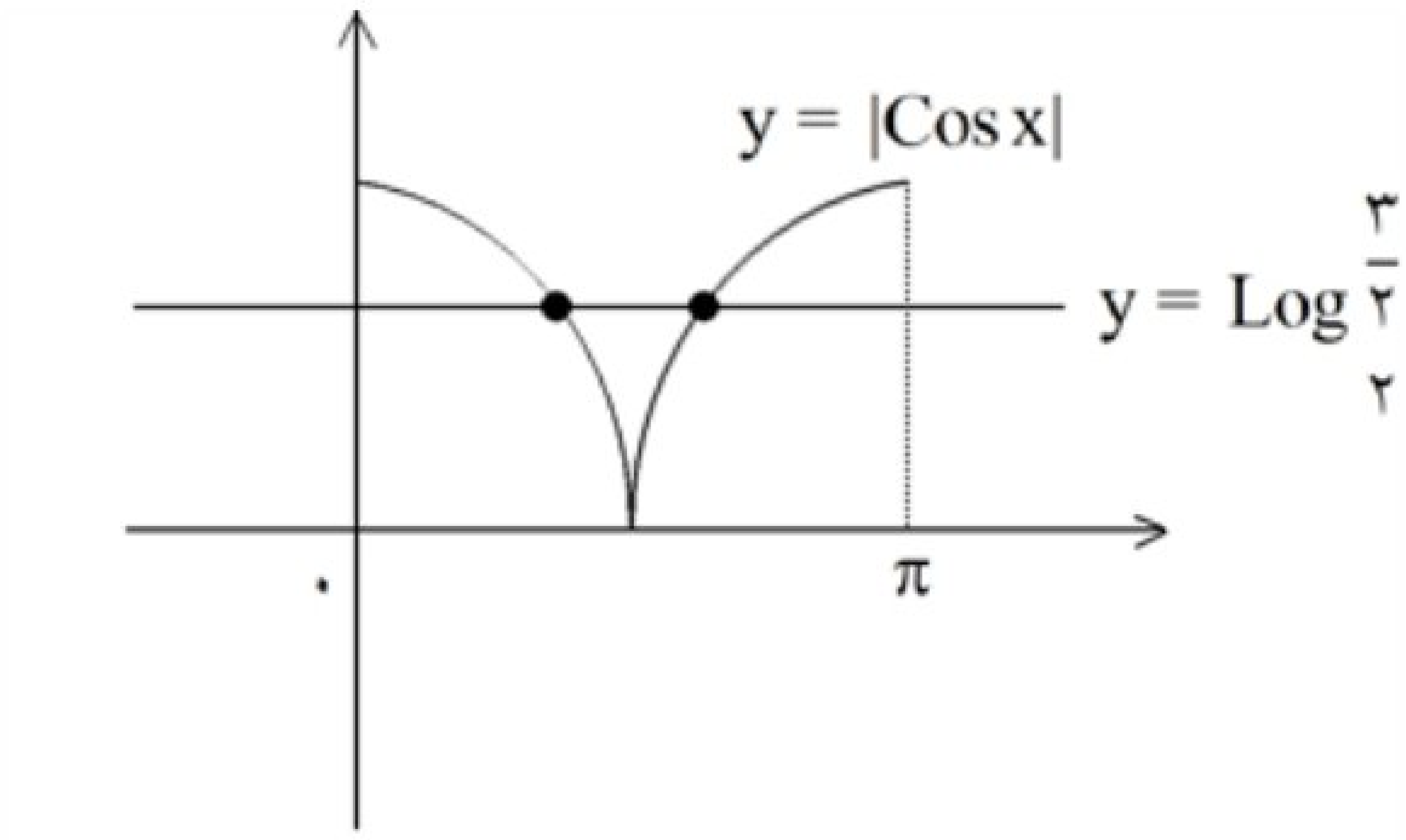
سپس $\frac{۳}{۲}$ در جهت محور y های منفی منتقل می‌کنیم.

$$y = ۲^{|\mathrm{Cos}\, x|} - \frac{۳}{۲}$$

برای یافتن محل تلاقی با محور طول‌ها برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$۲^{|\mathrm{Cos}\, x|} - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲^{|\mathrm{Cos}\, x|} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |\mathrm{Cos}\, x| = \mathrm{Log}_{۲} \frac{۳}{۲}$$

چون $۲ < \frac{۳}{۲}$ است و $\mathrm{Log}_{۲} ۲ = ۱$ بنابراین $۰ < \mathrm{Log}_{۲} \frac{۳}{۲} < ۱$ است.




دو نمودار در بازه $[۰, \pi]$ دو نقطه تلاقی دارند بنابراین معادله دو جواب دارد.

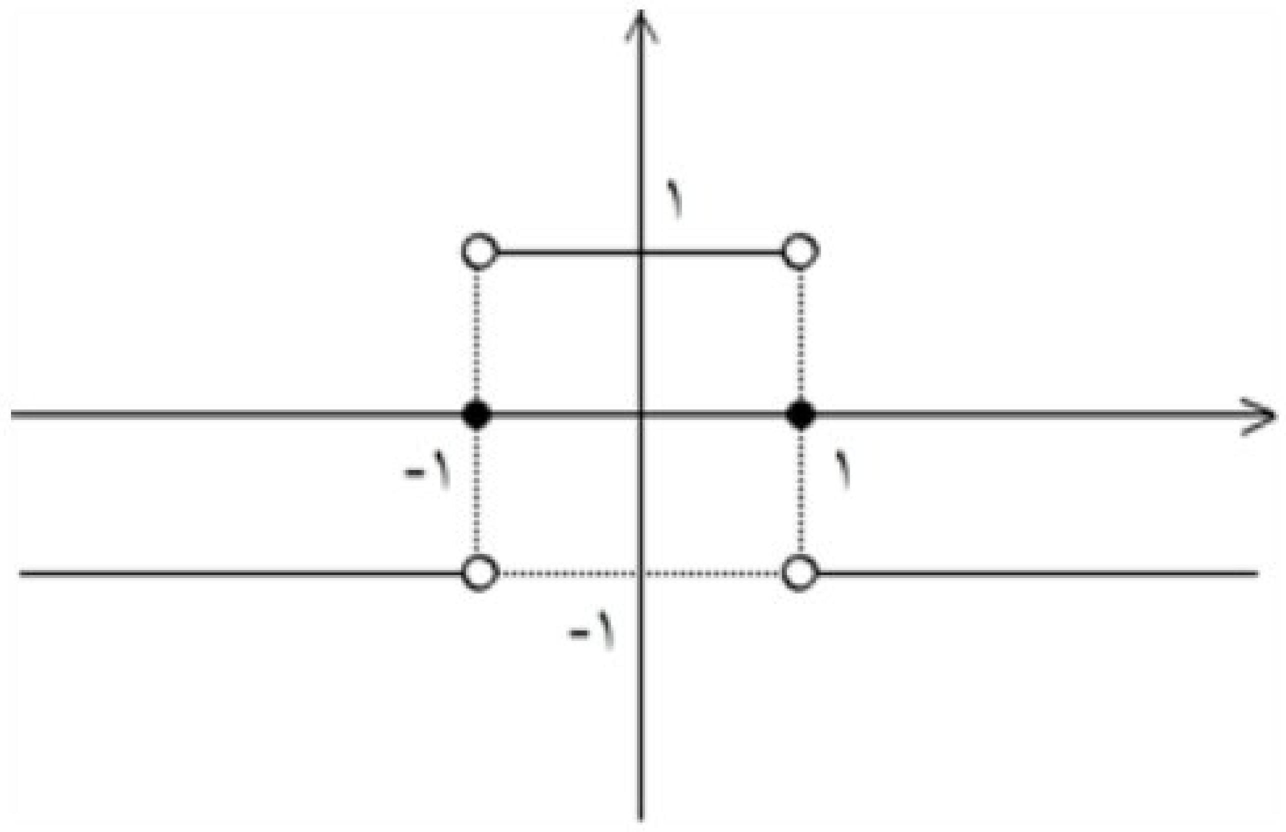
**۱۱۷** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید ضابطه تابع $(\mathrm{gof})(x)$ را حساب کنیم. بنابراین ضابطه g به شرط $۱-x^۲$ مثبت باشد برابر ۱ و اگر $۱-x^۲$ منفی باشد، حاصل y برابر ۱- و اگر $۱-x^۲$ برابر صفر باشد، حاصل y برابر صفر است.

$$\begin{cases} ۱-x^۲>۰ \Rightarrow x^۲<۱ \Rightarrow -۱<x<۱ \Rightarrow g(f(x))=۱ \\ ۱-x^۲=۰ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱ \Rightarrow g(f(x))=۰ \\ ۱-x^۲<۰ \Rightarrow x^۲>۱ \Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱ \Rightarrow g(f(x))=-۱ \end{cases}$$

با توجه به حاصل $g(f(x))$ و حدود x ضابطه و $(\mathrm{gof})(x)$ برابر است با:

$$(\mathrm{gof})(x)=\begin{cases} ۱ & ; -۱<x<۱ \\ ۰ & ; x=\pm ۱ \\ -۱ & ; x<-۱ \text{ یا } x>۱ \end{cases}$$

با رسم نمودار تابع تعداد نقاط ناپیوسته را حساب می‌کنیم.






در شکل مشخص است که تابع در $x=۱$ و $x=-۱$ ناپیوسته است.

**۱۱۸** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. منحنی اولیه را k واحد در راستای قائم جابه‌جا می‌کنیم و نمودار تابع $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}+k$ حاصل می‌شود. اگر این نمودار، نمودار وارون خود را درنقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند، یعنی خط $y=x$ را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کرده است، پس نقطه‌ی تقاطع به صورت $(۱,۱)$ است که مختصات این نقطه در ضابطه‌ی جدید صدق می‌کند:

$$\xrightarrow[y=۱]{x=۱} ۱=\sqrt{\sqrt{۱}+۳}+k=۲+k \Rightarrow k=-۱$$

پس ضابطه‌ی تابع جدید $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}-۱$ است. حال داریم:

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y=-\sqrt{\sqrt{x}+۳}+۱ \xrightarrow{\text{۴ واحد به سمت چپ}} y=۱-\sqrt{\sqrt{x+۴}+۳}$$

مختصات نقطه‌ی $(۰,۱-\sqrt{۵})$ در ضابطه‌ی این تابع صدق می‌کند.

**۱۱۹** گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌های fog و gof را به دست می‌آوریم:

$$\mathrm{fog}=\begin{cases} -۱ & ; x<-\sqrt{۲} \text{ یا } x>\sqrt{۲} \\ ۱-x^۲ & ; -\sqrt{۲}\leq x\leq \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\mathrm{gof}=\begin{cases} ۰ & ; x<-۱ \\ ۱-x^۲ & ; -۱\leq x\leq ۱ \\ ۰ & ; x>۱ \end{cases}$$

پس داریم:

$$(\mathrm{gof}-\mathrm{fog})(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & ; -\sqrt{۲}\leq x\leq -۱ \text{ یا } ۱\leq x\leq \sqrt{۲} \\ ۰ & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بیش‌ترین مقدار این تابع به ازای $x=\pm\sqrt{۲}$ و برابر ۱ به دست می‌آید.

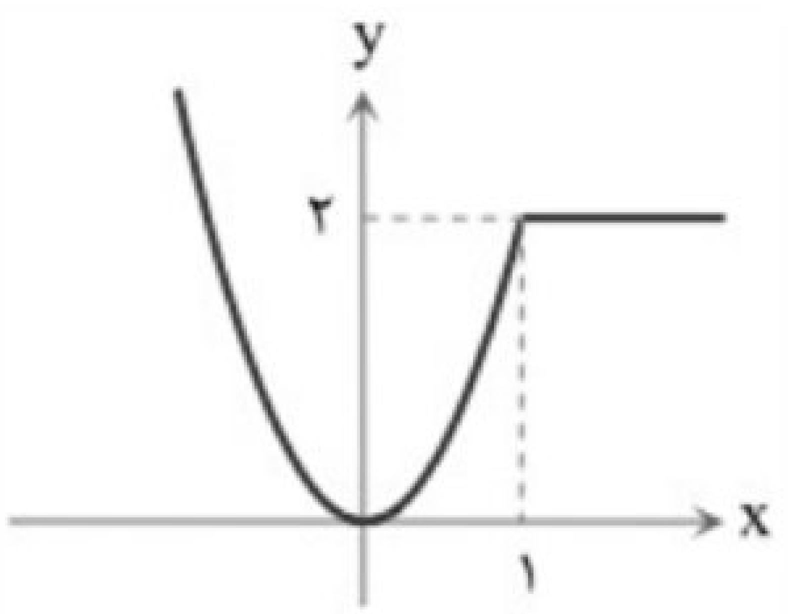
۱۲۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(fof)og(x)=\begin{cases} fof(۱)=f(۰)=۰ & x>۰ \\ fof(۰)=۰ & x=۰ \\ fof(-۱)=f(۰)=۰ & x<۰ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ ۰ & x<۰ \end{cases}$$

همواره پیوسته

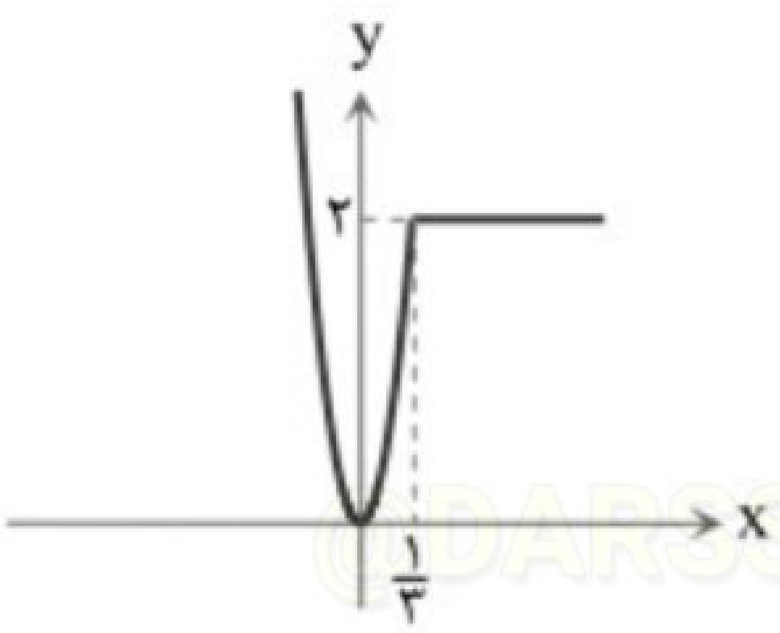
۱۲۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار $y = ۱ - ۲f(-۳x)$، نمودار $y = f(x)$ را:

۱- ابتدا نسبت به محور $y$ها قرینه می‌کنیم:



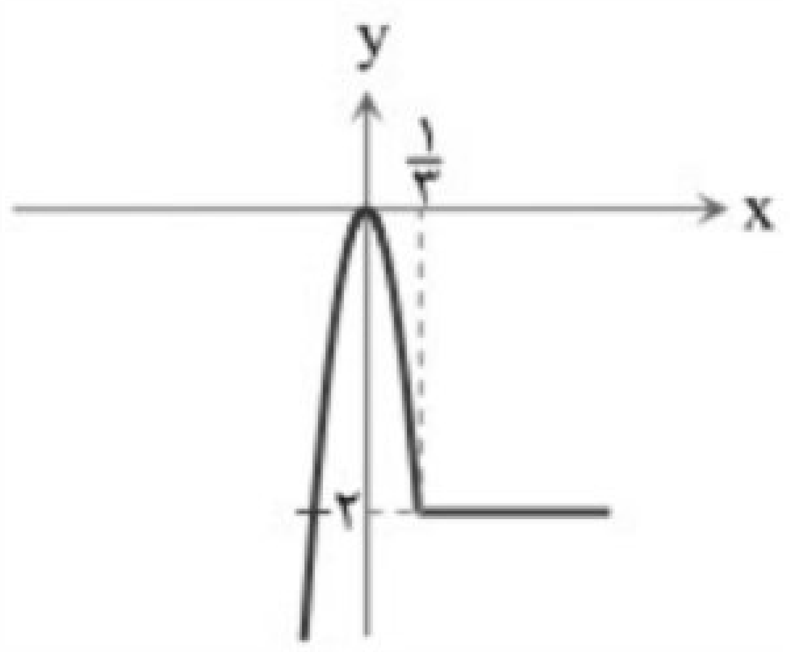

$$y = f(-x)$$

۲- سپس در راستای محور $x$ها سه برابر فشرده می‌کنیم:



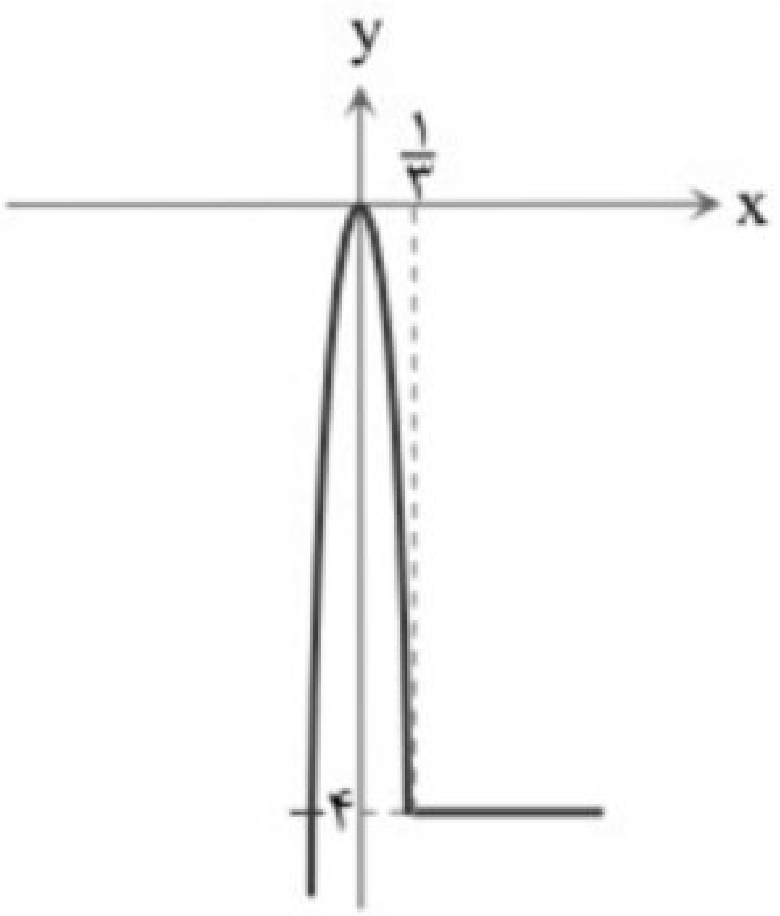

$$y = f(-۳x)$$

۳- سپس نسبت به محور $x$ها قرینه می‌کنیم:



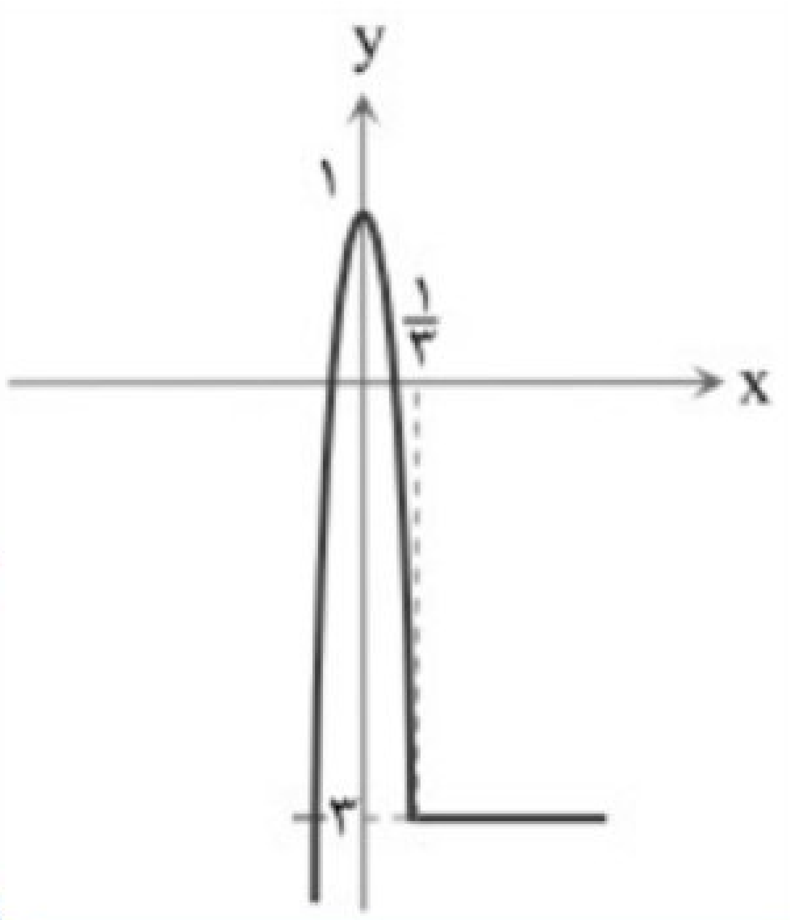

$$y = -۲f(-۳x)$$

۴- سپس در راستای محور $y$ها دو برابر منبسط می‌کنیم:




$$y = -۲f(-۳x)$$

۵- و در نهایت ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم:




$$y = -۲f(-۳x) + ۱$$

ملاحظه می‌شود که تابع بر بازه $\left[۰, \frac{۱}{۳}\right]$ اکیداً نز... بیشترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{۱}{}$ است.

۱۲۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که $\text{fof}^{-1}(a) = a$ است، لذا در دو طرف تساوی به جای $x$، $f^{-1}(۳)$ را جایگزین می‌کنیم.

$$f(x) = f^{-1}(۳) - ۲x + ۱ \Rightarrow \text{fof}^{-1}(۳) = f^{-1}(۳) - ۲f^{-1}(۳) + ۱ \Rightarrow ۳ = -f^{-1}(۳) + ۱$$
$$\Rightarrow f^{-1}(۳) = -۲$$

$f^{-1}(۳) = -۲$ را در فرض سؤال جایگزین می‌کنیم: $f(x) = -۲ - ۲x + ۱ = -۲x - ۱$

$$f^{-1}(-۳) = a \Rightarrow f(a) = -۳ \Rightarrow -۲a - ۱ = -۳ \Rightarrow a = ۱$$

۱۲۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید $f(x) = \text{ax} + b$ به‌طوری که $a < ۰$:

$$\text{fog}(x) = ۶\text{x} + ۵ \Rightarrow \text{ag}(x) + b = ۶\text{x} + ۵ \Rightarrow g(x) = \frac{۶\text{x} + ۵ - b}{a}$$
$$f(x) - g(x) = ۵ - ۵\text{x} \Rightarrow g(x) = \text{ax} + b - ۵ + ۵\text{x}$$

دو ضابطه‌ی $g$ را معادل هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{۶\text{x} + ۵ - b}{a} = \text{ax} + b - ۵ + ۵\text{x}$$
$$\Rightarrow \underline{\frac{۶}{a}}\text{x} + \underline{\underline{\frac{۵-b}{a}}} = \underline{(a+۵)\text{x}} + \underline{\underline{b-۵}}$$

$$\begin{cases} \frac{۶}{a} = a + ۵ \Rightarrow a^۲ + ۵a - ۶ = ۰ \xrightarrow{a<۰} a = -۶ \\ \frac{۵-b}{a} = b - ۵ \xrightarrow{a=-۶} ۵ - b = -۶b + ۳۰ \Rightarrow b = ۵ \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x) = -۶\text{x} + ۵ \Rightarrow f(۲) = -۷$$

۱۲۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D_f = [۱, +\infty) \quad , D_g = R$$
$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \left[۱, +\infty\right) \mid \sqrt{x-۱} \in R\right\}$$
$$\sqrt{x-۱} \in R \Rightarrow x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \xrightarrow[\text{با محدوده}]{\text{اشتراک}} x \geq ۱ \Rightarrow D_{\text{gof}} = \Big[۱, +\infty\Big)$$
$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in R \mid (۲\text{x}^۲ - ۱) \in \left[۱, +\infty\right)\right\}$$
$$۲\text{x}^۲ - ۱ \geq ۱ \Rightarrow x^۲ \geq ۱ \Rightarrow x \leq -۱ \text{ یا } x \geq ۱ \xrightarrow[\text{با محدوده}]{\text{اشتراک}} x \leq -۱ \text{ یا } x \geq ۱$$
$$\Rightarrow D_{\text{fog}} = (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$$

نکته: دامنه‌ی توابع مرکب fog و gof از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$
$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

۱۲۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

راه حل اول:

$$f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳\Rightarrow y=\frac{۱}{۸}x-۳\Rightarrow y+۳=\frac{۱}{۸}x\Rightarrow x=۸y+۲۴$$

$$f^{-۱}(x)=۸x+۲۴\quad ,g(x)=x^{۳}$$

$$\Rightarrow y=x^{۳}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}of^{-۱}(۵)=g^{-۱}(f^{-۱}(۵))=g^{-۱}(۸(۵)+۲۴)=g^{-۱}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

راه حل دوم: چون همواره $(fog)^{-۱}(x)=g^{-۱}of^{-۱}(x)$ پس خواهیم داشت:

$$g^{-۱}of^{-۱}(۵)=(fog)^{-۱}(۵)$$

$$\Rightarrow fog(x)=f(g(x))=\frac{۱}{۸}g(x)-۳=\frac{۱}{۸}x^{۳}-۳$$

$$\Rightarrow (fog)^{-۱}(۵)=\alpha\Rightarrow (fog)(\alpha)=۵\Rightarrow \frac{۱}{۸}\alpha^{۳}-۳=۵\Rightarrow \frac{۱}{۸}\alpha^{۳}=۸\Rightarrow \alpha^{۳}=۶۴\Rightarrow \alpha=۴$$

۱۲۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x^{۲}-x+۱}{x^{۲}-۳x}-\frac{x-۲}{x-۳}=\frac{x+۱}{x}\Rightarrow \frac{x^{۲}-x+۱}{x(x-۳)}-\frac{x-۲}{x-۳}-\frac{x+۱}{x}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{x^{۲}-x+۱-x(x-۲)-(x+۱)(x-۳)}{x(x-۳)}=۰$$

$$\Rightarrow \cancel{x^{۲}}-x+۱-\cancel{x^{۲}}+۲x-x^{۲}+۲x+۳=۰$$

$$\Rightarrow -x^{۲}+۳x+۴=۰\Rightarrow x^{۲}-۳x-۴=۰\Rightarrow (x+۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x_{۱}=-۱,x_{۲}=۴$$

هر دو جواب قابل قبول است و داریم: $\text{مجموع جواب‌ها}=-۱+۴=۳$

۱۲۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $fog(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

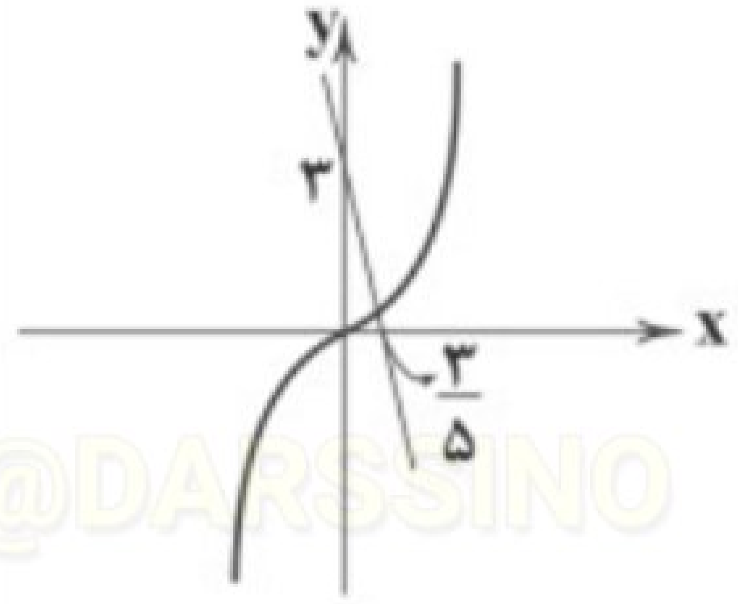
$$fog(x)=f(g(x))=f(x-۱)=(x-۱)^{۳}+۲(x-۱)+۱$$

$$=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱+۲x-۲+۱=x^{۳}-۳x^{۲}+۵x-۲$$

حال معادله‌ی $fog(x)=۱-۳x^{۲}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$x^{۳}-۳x^{۲}+۵x-۲=۱-۳x^{۲}\Rightarrow x^{۳}=۳-۵x$$

جواب معادله‌ی بالا محل برخورد دو تابع $x^{۳}$ و $۳-۵x$ را نشان می‌دهد.

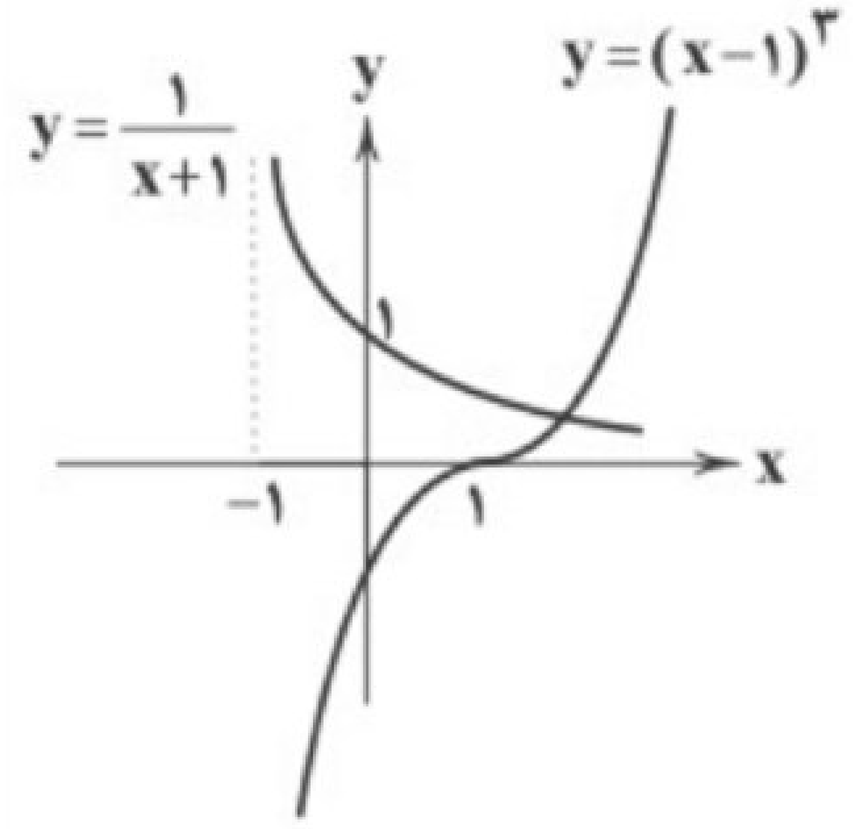



دو تابع در یک نقطه با طول $x_۰$ که $۰<x_۰<\frac{۳}{۵}$ است، یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱۲۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x(x^3-3x^2+3x-1)+(x-1)^3=1$$
$$\Rightarrow x(x-1)^3+(x-1)^3=1 \Rightarrow (x-1)^3(x+1)=1$$
$$\xrightarrow{x\neq -1} (x-1)^3=\frac{1}{x+1}$$

دو تابع $(x-1)^3$ و $\frac{1}{x+1}$ را رسم می‌کنیم:




برای $x$های مثبت فقط یک نقطه‌ی برخورد دارند.

۱۲۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

طبق توضیحات سؤال تابع $F$، صعودی اکید است.

$$f(3-|x|)>f\left(\frac{2}{|x|}\right) \Rightarrow 3-|x|>\frac{2}{|x|} \xrightarrow[\times|x|]{x\neq 0} 3|x|-|x|^2>2$$
$$\Rightarrow |x|^2-3|x|+2<0 \Rightarrow (|x|-1)(|x|-2)<0 \Rightarrow 1<|x|<2$$

۱۳۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق تعریف تابع یک‌به‌یک، تابع $f$ موقعی یک‌به‌یک است که:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

پس داریم:

$$f\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)=f\left(\frac{x-2}{2x+2}\right) \xrightarrow{\text{یک‌به‌یک است } f} \frac{2x+1}{\cancel{x+1}}=\frac{x-2}{\underbrace{2x+2}_{2(\cancel{x+1})}}$$

$$\xrightarrow{x\neq -1} 2x+1=\frac{x-2}{2} \Rightarrow 4x+2=x-2 \Rightarrow 3x=-4 \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

پس معادله دارای یک ریشه است.

۱۳۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع داده شده اکیداً صعودی است، پس وارون خود را روی خط $y=x$ قطع می‌کند.

داریم: $x^3+3x-12=x \Rightarrow x^3+2x-12=0$

$x=2$ جواب معادلهٔ بالا است:

$$x^3+2x-12=(x-2)\underbrace{(x^2+2x+6)}_{\Delta<0}=0$$

پس $x=2$ تنها جواب حقیقی معادله مذکور است. یعنی نقطه تقاطع تابع داده شده با وارونش $(2,2)$ است. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات $2\sqrt{2}$ است.

۱۳۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = ۲۷x^۹ - ۲۷x^۶ + ۹x^۳ - ۱ - mx\,(x^۸ - ۲x^۴ + ۱) + ۳$$

$$y = (۲۷ - m)x^۹ - ۲۷x^۶ + ۲mx^۵ + ۹x^۳ - mx + ۲$$

اگر این تابع درجه ۹ نباشد باید $m = ۲۷$ باشد. در این صورت تابع درجه ۶ خواهد بود.

۱۳۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ریشه‌های داخل قدرمطلق ۲ و ۱ هستند، سه ناحیه برای تابع ایجاد می‌شود.

$$x \le ۱ \Rightarrow y = -x + ۲ + k(-x + ۱) + x = -kx + k + ۲$$

$$۱ < x \le ۲ \Rightarrow y = -x + ۲ + k(x - ۱) + x = kx + ۲ - k$$

$$x > ۲ \Rightarrow y = x - ۲ + k(x - ۱) + x = (k + ۲)\,x - ۲ - k$$

اگر تابع صعودی اکید باشد باید شیب هر سه خط به دست آمده مثبت باشد.

$$\begin{cases} -k > ۰ \Rightarrow k < ۰ \\ k > ۰ \\ k + ۲ > ۰ \Rightarrow k > -۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in \emptyset$$

۱۳۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۰)) = \alpha \Rightarrow f^{-۱}(۰) = g(\alpha) \Rightarrow ۰ = f(g(\alpha))$$

در تابع $f$، $f(۳) = ۰$ است زیرا: $۲x - ۵ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \ (\text{Log}\,۱ = ۰)$

$$\Rightarrow g(\alpha) = ۳ = \alpha + \sqrt{۲\alpha - ۴} \Rightarrow ۳ - \alpha = \sqrt{۲\alpha - ۴} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\alpha < ۳} \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ = ۲\alpha - ۴$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۸\alpha = -۱۳ \Rightarrow \alpha^۲ - ۸\alpha + ۱۶ = (\alpha - ۴)^۲ = ۳ \Rightarrow \alpha = ۴ - \sqrt{۳}$$

۱۳۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(f(g(x + ۲))) = ۰ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(g(x + ۲)) = ۲$$

$$\Rightarrow \left|\frac{۱}{۲}g(x + ۲) - ۱\right| = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}g(x + ۲) - ۱ = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} g(x + ۲) = -۲ \\ \text{یا} \\ g(x + ۲) = ۶ \end{cases}$$

انتقال افقی، تعداد ریشه‌ها را تغییر نمی‌دهد و با توجه به نمودار که تابع g با دامنه R اکیداً صعودی است. هر کدام از معادلات بالا یک جواب دارد.

۱۳۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-\frac{f(x)}{f(۲ + x)} \ge ۰ \Rightarrow \frac{f(x)}{f(۲ + x)} \le ۰$$

$$f(x) = ۰ \Rightarrow x = -۲, ۰, ۱$$

$$f(x + ۲) = ۰ \Rightarrow x + ۲ = -۲, ۰, ۱ \Rightarrow x = -۴, -۲, -۱$$

| X | | -۴ | | -۲ | | -۱ | | ۰ | | ۱ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | + | ن | - | ن | - | ن | + | ○ | - | ○ | + |

$$\xrightarrow{\in Z} = ۰, ۱, -۳$$

۱۳۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ضابطه اول : $R_1 = \left[\frac{۱۳}{۲}, +\infty\right)$

ضابطه دوم : $-x^۲ + ۲mx + ۲ = -(x-m)^۲ + m^۲ + ۲$

باید رأس سهمی $(x = m)$ داخل بازه $x > -\frac{۳}{۲}$ نباشد، پس:

$$m \le -\frac{۳}{۲} \xrightarrow{m^۲+۲ \le \frac{۱۳}{۲}} m = -۲ \Rightarrow y_۲ = -(x+۲)^۲ + ۶$$

$$f^{-۱}(-۱۹) \Rightarrow -(x+۲)^۲ + ۶ = -۱۹ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۲۵ \xrightarrow{x > -\frac{۳}{۲}} x = ۳$$

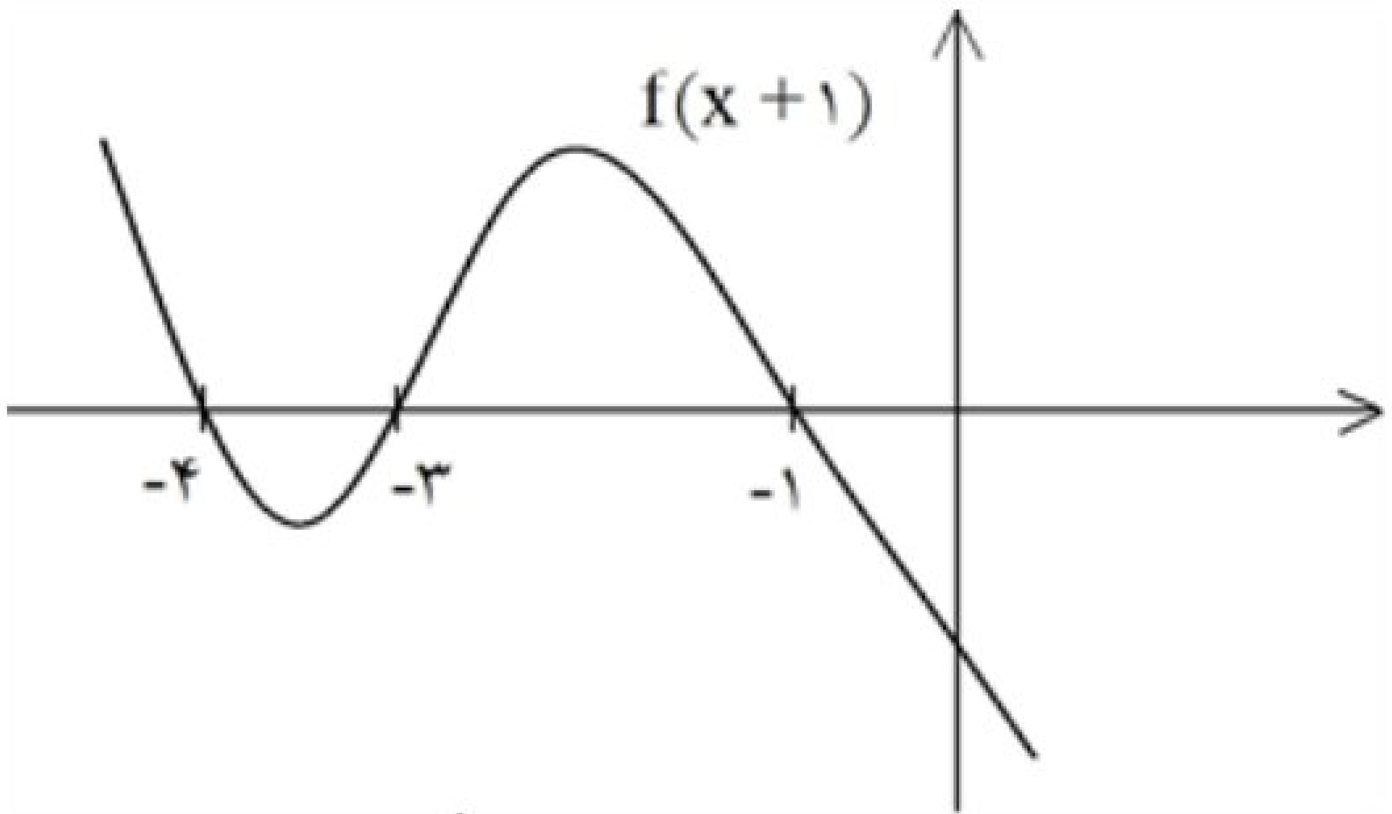
۱۳۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

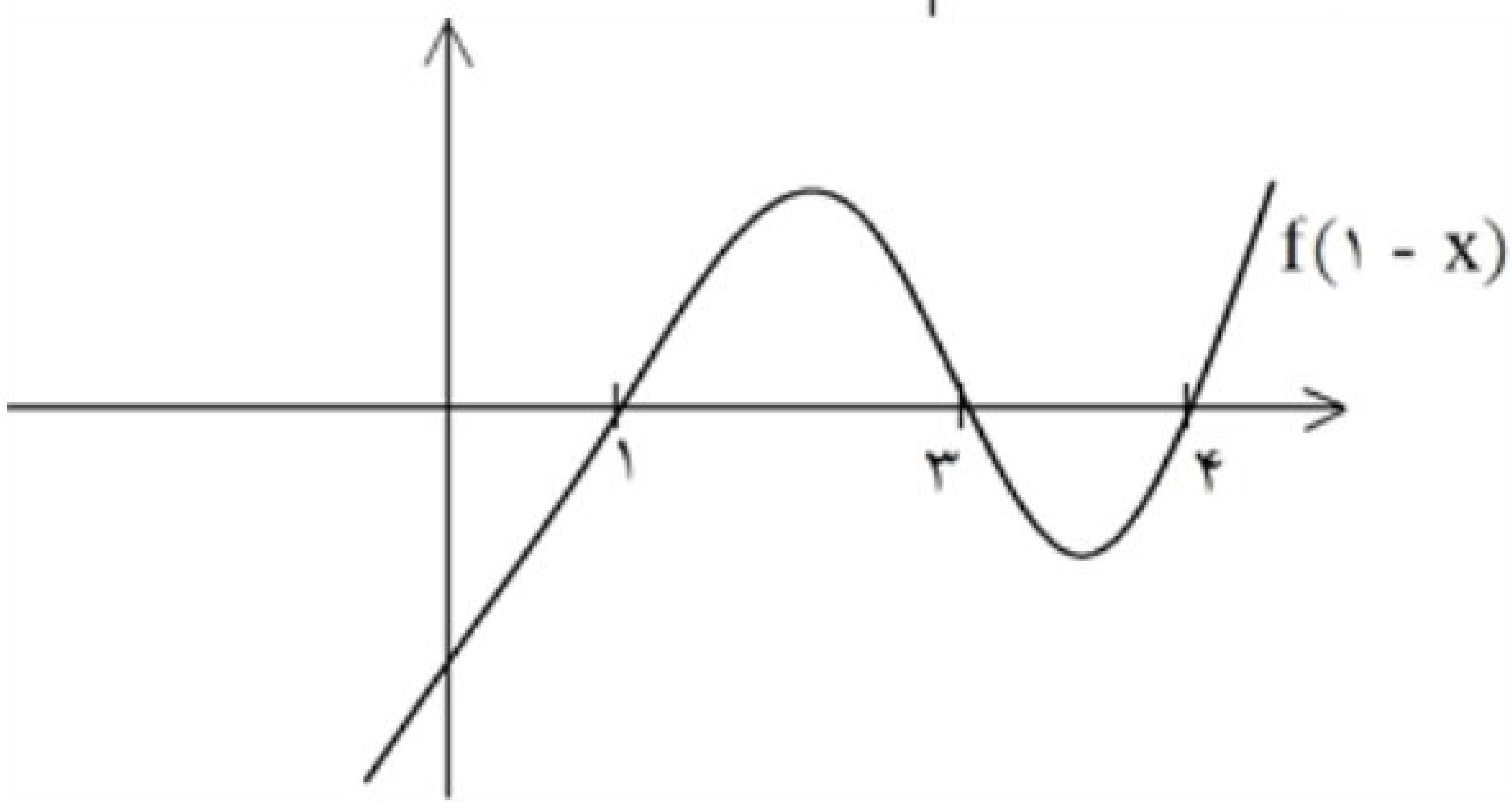
$$f(۲m^۲ - ۹m - ۲) < f(m^۲ - ۴m + ۴) \xrightarrow{\text{صعودی}} ۲m^۲ - ۹m - ۲ < m^۲ - ۴m + ۴$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۵m - ۶ < ۰ \Rightarrow (m-۶)(m+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۶$$

$$\left.\begin{array}{l} -۱ < m < ۶ \\ m^۲ - ۴m + ۴ > ۰ \Rightarrow (m-۲)^۲ > ۰ \Rightarrow m \neq ۲ \\ ۲m^۲ - ۹m - ۲ > ۰ \Rightarrow m < \frac{۹-\sqrt{۹۷}}{۴}, m > \frac{۹+\sqrt{۹۷}}{۴} \end{array}\right\} \xrightarrow{m \in Z} m = ۵$$

۱۳۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f(x-۲)$ را ۳ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا $f(x+۱)$ به دست آید پس نسبت به محور $y$ها قرینه می‌کنیم تا $f(۱-x)$ شود.




$$\left.\begin{array}{l} \frac{f(۱+x)}{f(۱+x)} \ge ۰ \\ x \in Z \end{array}\right\}$$

$$x \in \{۰, ۱, ۳, ۴\}$$

**۱۴۰** گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} \\ \underbrace{-۲x^۲ + ax - ۲۱}_{g(x)} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \geq \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} \geq -\frac{۱}{۴} \Rightarrow y \geq -\frac{۱}{۴} \\ x < \frac{۵}{۲} \Rightarrow y < g\left(\frac{۵}{۲}\right) \Rightarrow y < \frac{۵}{۲}a - \frac{۶۷}{۲} \end{array}$$

ابتدا خود سهمی در فاصلهٔ $\left(-\infty, \frac{۵}{۲}\right)$ باید وارون‌پذیر باشد پس:

$$\frac{۵}{۲} \leq x_S \Rightarrow \frac{۵}{۲} \leq \frac{-a}{-۴} \Rightarrow a \geq ۱۰$$

از طرفی برد هر دو ضابطه نباید اشتراکی داشته باشند. بنابراین:

$$\frac{۵}{۲}a - \frac{۶۷}{۲} \leq -\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۱۰a - ۱۳۴ \leq -۱$$

$$۱۰a \leq ۱۳۳ \Rightarrow a \leq ۱۳/۳$$

شرط وارون‌پذیر تابع f: $۱۰ \leq a \leq ۱۳/۳$

پس بزرگترین مقدار صحیح $a = ۱۳$

$$f^{-۱}(-۳) : -۲x^۲ + ۱۳x - ۲۱ = -۳ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۳x + ۱۸ = ۰$$

$$\begin{cases} x = ۲ \checkmark \\ \text{یا} \\ x = \frac{۹}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

چون $x < \frac{۵}{۲}$

**۱۴۱** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آن‌که ورودی $\text{۲x} - ۱$ به ورودی $\text{۳x} - ۲$ و ورودی $-x + ۲$ به ورودی $\dfrac{-\text{۳x} + ۵}{۲}$ تبدیل شوند داریم:

$$\begin{cases} \text{۲x} - ۱ = \text{۳t} - ۲ \Rightarrow x = \frac{\text{۳t}-۱}{۲} \\ -x + ۲ = \frac{-\text{۳t}+۵}{۲} \Rightarrow -x = \frac{-\text{۳t}+۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{\text{۳t}-۱}{۲} \end{cases}$$

یعنی برای آن‌که معادله $\text{۳g}(\text{۰x} + ۲)$ = $\text{۲f}\,(\text{۲x} - ۱)$ به معادله $f(\text{۳x} - ۲) = \dfrac{۳}{۲}\, g\left(\dfrac{-\text{۳x} + ۵}{۲}\right)$ تبدیل شود باید از تبدیل $x \to \dfrac{\text{۳x} - ۱}{۲}$ استفاده کنیم یعنی هر یک از ریشه‌های معادله داده شده به ترتیب در ۲ ضرب می‌شوند، سپس به‌علاوه یک می‌شوند و در آخر بر ۳ تقسیم می‌شوند تا تبدیل به ریشه معادله جدید شوند.

اگر $x_۱, x_۲, \cdots, x_۵$ ریشه‌های معادله داده شده باشند داریم: $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۰$

اگر $x'_۱, x'_۲, \cdots, x'_۵$ ریشه‌های معادله جدید باشند داریم:

$$\begin{cases} x'_۱ = \frac{\text{۲x}_۱+۱}{۳} \\ x'_۲ = \frac{\text{۲x}_۲+۱}{۳} \\ \vdots \\ x'_۵ = \frac{\text{۲x}_۵+۱}{۳} \end{cases}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$x'_۱ + x'_۲ + \cdots + x'_۵ = \frac{\text{۲x}_۱ + ۱}{۲} + \frac{\text{۲x}_۲ + ۱}{۳} + \cdots + \frac{\text{۲x}_۵ + ۱}{۳}$$
$$= \frac{۲}{۳}(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵) + ۵\left(\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۲}{۳}(۱۰) + \frac{۵}{۳} = \frac{۲۵}{۳}$$

**۱۴۲** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع $f(-x + ۲)$ اکیداً صعودی خواهد بود و از نقطه‌ی $(۳, ۰)$ می‌گذرد.

تابع $f(x + ۲)$ اکیداً نزولی خواهد بود و از نقطه‌ی $(-۳, ۰)$ می‌گذرد.

برای تعیین دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\dfrac{x(x^۳ - ۱)\, f(-x + ۲)}{f(x + ۲)}}$ جدول تعیین علامت را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

| | $-\infty$ | | $-۳$ | | ۰ | | ۱ | | ۳ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | | $-$ | | $-$ | ۰ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^۳ - ۱$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | ۰ | $+$ | | $+$ | |
| $f(-x+۲)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | ۰ | $+$ | |
| $f(x+۲)$ | | $+$ | ۰ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| عبارت زیر رادیکال | | $-$ | ت ن | $+$ | ۰ | $-$ | ۰ | $+$ | ۰ | $-$ | |

بنابراین دامنه‌ی تابع $g(x)$ به صورت زیر خواهد بود: $D_g = (-۳, ۰] \cup [۱, ۳]$

و در این بازه اعداد صحیح $-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳$ یعنی ۶ عدد صحیح قرار دارند.

۱۴۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع دو ضابطه‌ای که دارای پرش در نقطه‌ی مرزی است برای آن‌که اکیداً صعودی باشد، باید ۳ شرط زیر برقرار باشد:

۱) قبل پرش اکیداً صعودی باشد، برای این‌کار باید تابع $y = (۲a - ۴)x^۳ - ۲$ در بازه $x \leq ۱$ اکیداً صعودی باشد:

یعنی باید داشته باشیم: $۲a - ۴ > ۰ \Rightarrow a > ۲$

۲) بعد پرش اکیداً صعودی باشد: یعنی سهمی $y = ax^۲ - ۲x + ۳$ در بازه $x > ۱$ اکیداً صعودی باشد. برای این‌کار دو شرط لازم است:

الف) $a > ۰$ باشد تا شاخه‌ی سهمی در $x > ۱$ اکیداً صعودی باشد.

ب) طول رأس یعنی $\frac{۱}{a}$ (همان $(x = -\frac{b}{۲a})$) از عدد یک بزرگ‌تر نباشد یعنی:

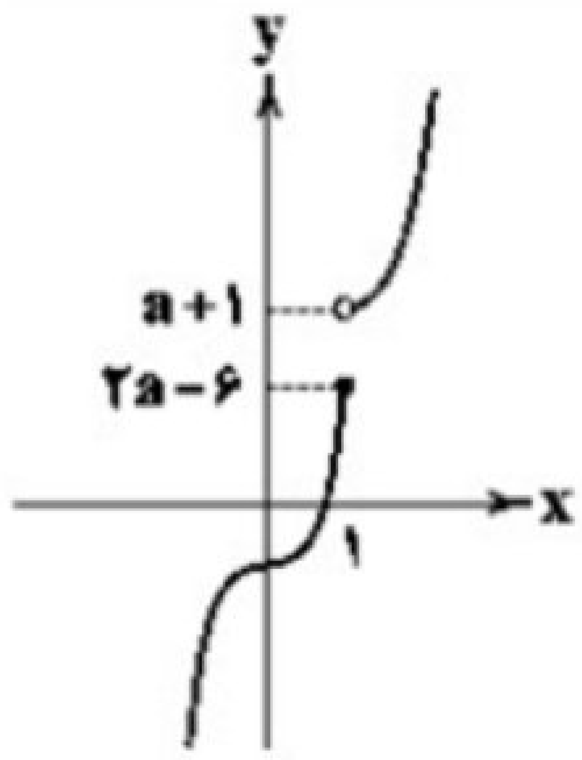
$$\frac{۱}{a} \leq ۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} - ۱ \leq ۰ \Rightarrow \frac{۱ - a}{a} \leq ۰ \Rightarrow a < ۰ \text{ یا } a \geq ۱$$

اشتراک شرطهای (الف) و (ب) به صورت $a \geq ۱$ خواهد بود.

۳) پرش اکیداً صعودی باشد.

به شکل تقریبی زیر دقت کنید. برای آن‌که در نقطه پرش تابع رفتار نزولی نداشته باشد باید داشته باشیم:






$$a + ۱ \geq ۲a - ۶ \Rightarrow a \leq ۷$$

از اشتراک شرطهای (۱)، (۲) و (۳) داریم: $(۱) \cap (۲) \cap (۳) \Rightarrow ۲ < a \leq ۷$

بزرگ‌ترین عدد صحیح برای $a$ عدد ۷ و کوچک‌ترین عدد ۳ می‌باشد و اختلاف این دو عدد برابر $۷ - ۳ = ۴$ خواهد بود.

۱۴۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است، بنابراین:

الف) $f(-x)$ و $-f(x)$ اکیداً نزولی هستند، بنابراین $g(x)$ اکیداً نزولی است.

ب) $g(x)$ اکیداً نزولی است، بنابراین $g^{-۱}(x)$ نیز اکیداً نزولی است. برای تعیین دامنهٔ $h(x)$ داریم:

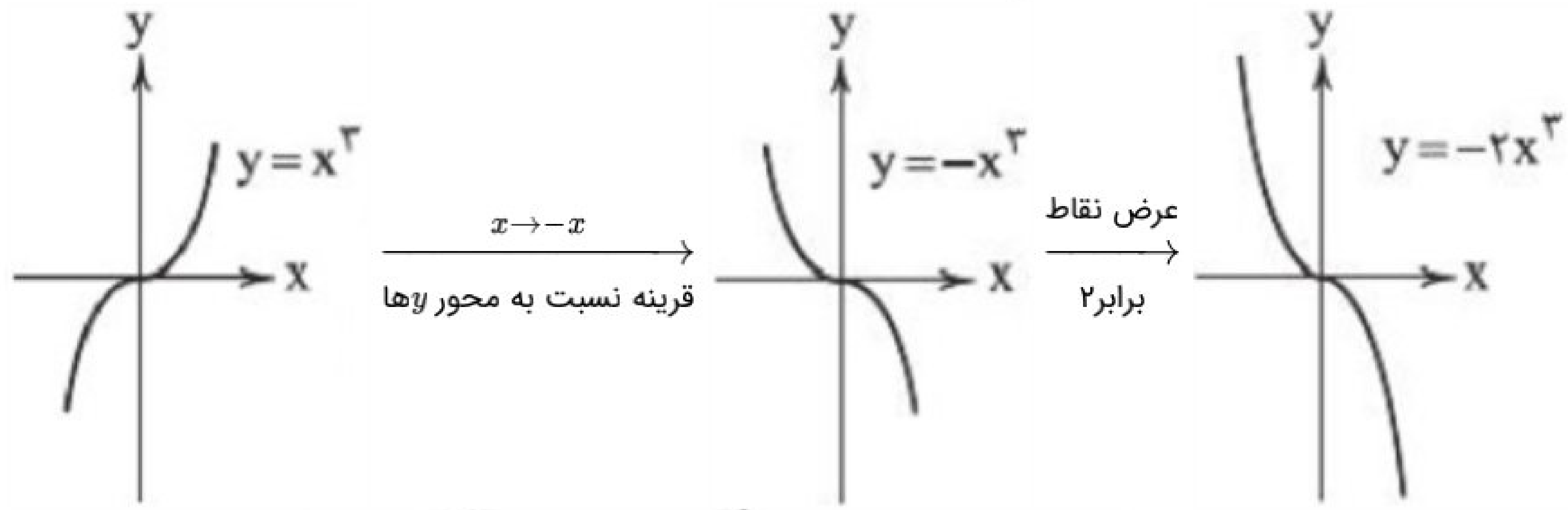
$$g^{-۱}(|۲x - ۱|) - g^{-۱}(|x + ۱|) \geq ۰ \Rightarrow g^{-۱}(|۲x - ۱|) \geq g^{-۱}(|x + ۱|) \xrightarrow{g^{-۱} \text{ اکیدا نزولی}}$$

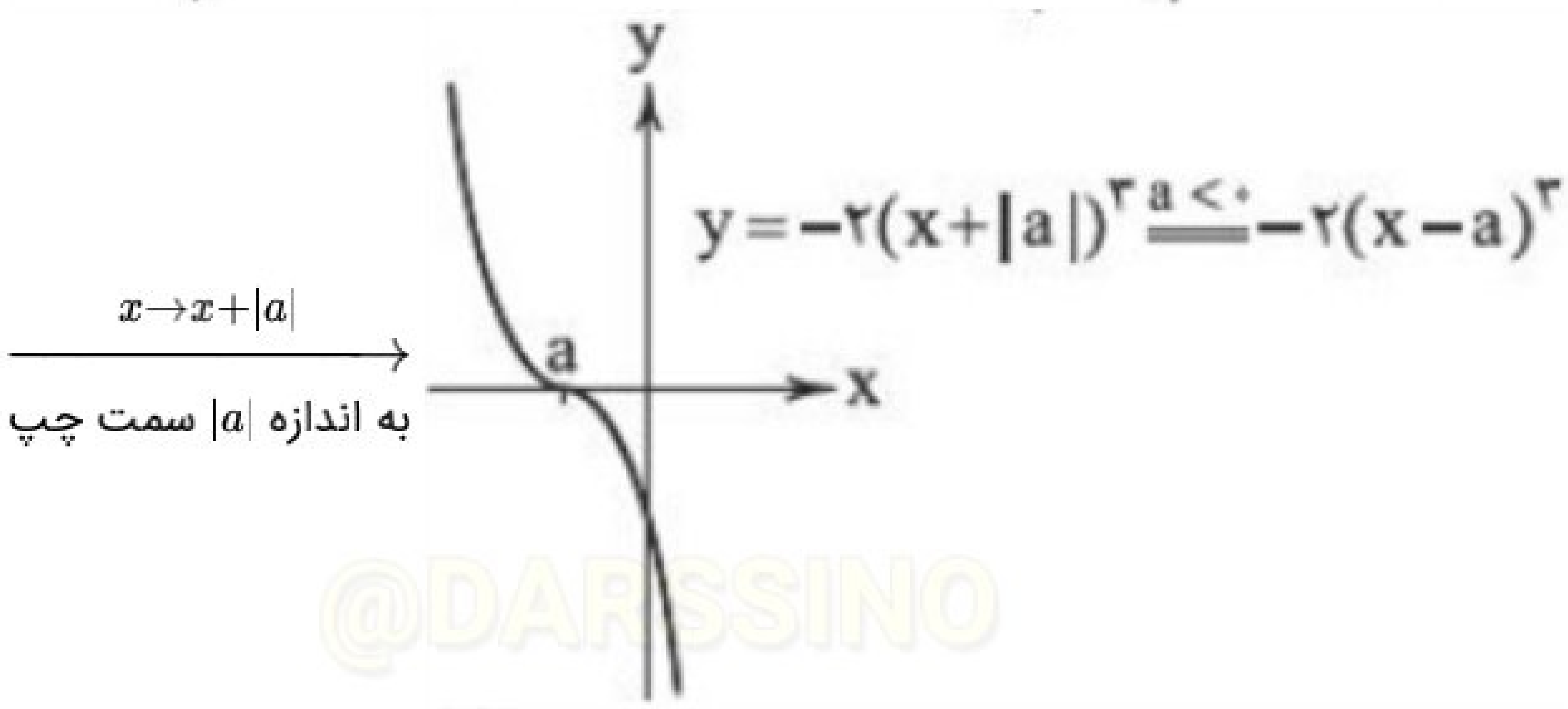
$$|۲x - ۱| \leq |x + ۱| \Rightarrow (۲x - ۱ + x + ۱)(۲x - ۱ - x - ۱) \leq ۰ \Rightarrow (۳x)(x - ۲) \leq ۰$$

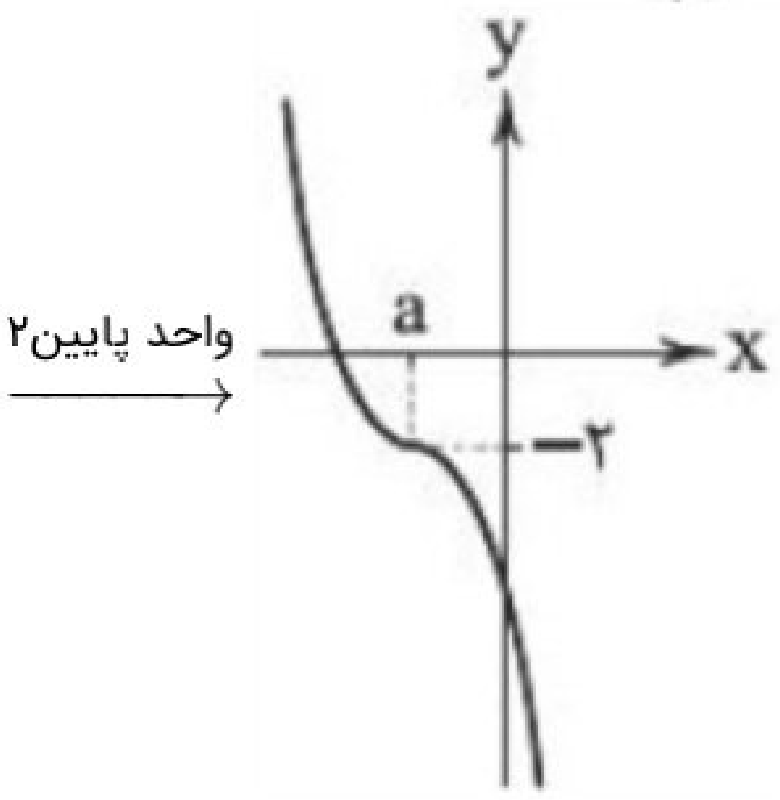
$$\Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_{h(x)} = [۰, ۲]$$

$$\max(b - a) = ۲ - ۰ = ۲$$

**۱۴۵** گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = x^۳$ با مراحل زیر داریم:




$$y = -۲(x-a)^۳ - ۲$$

از طرفی می‌دانیم $f(۰) = -۱۸$ و داریم:

$$-۱۸ = -۲(-a)^۳ - ۲ \Rightarrow (-a)^۳ = ۸ \Rightarrow a = -۲ \Rightarrow f(x) = -۲(x+۲)^۳ - ۲ = -۲x^۳ - ۱۲x^۲ - ۲۴x - ۱۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳m = -۱۲ \Rightarrow m = ۴ \\ ۴n = -۲۴ \Rightarrow n = -۶ \Rightarrow m+n+k = ۷ \\ -۲k = -۱۸ \Rightarrow k = ۹ \end{cases}$$

**۱۴۶** گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر f و g هر دو صعودی اکید یا هر دو نزولی اکید باشند، fog صعودی اکید است.

اگر f و g یکی صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشد، fog نزولی اکید است. تابع $f(x)$ در $(-\infty, ۱]$ اکیداً صعودی و در $[۱, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

با توجه به نمودار تابع $g(x) = ۲\operatorname{Sin} x$ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

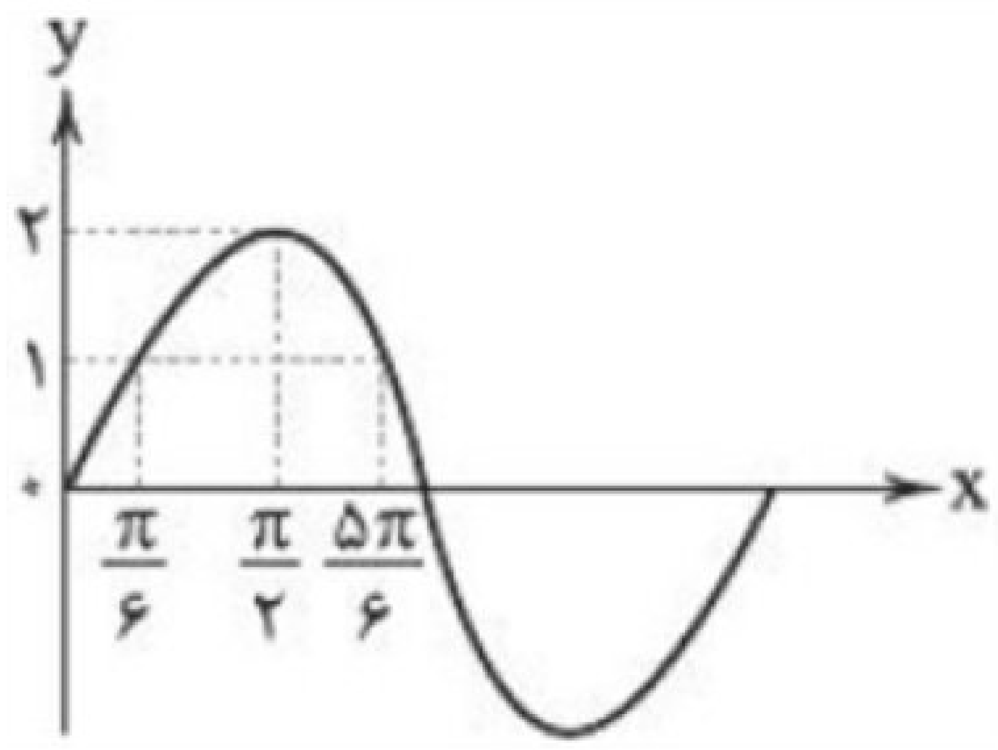
۱) در $\left[۰, \frac{\pi}{۶}\right]$ تابع g اکیداً صعودی است و $R_g = [۰, ۱]$ و در این بازه f اکیداً صعودی است. پس fog اکیداً صعودی است.

۲) در $\left[\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\right]$ تابع g ابتدا اکیداً صعودی و سپس اکیداً نزولی است و $R_g = [۱, ۲]$ و در این بازه f اکیداً نزولی است. پس fog ابتدا اکیداً نزولی، سپس اکیداً صعودی است، یعنی غیریکنوا است.

۳) در $\left[\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}\right]$ تابع g اکیداً صعودی است و $R_g = [۱, ۲]$ و در این بازه تابع f اکیداً نزولی است، یعنی fog اکیداً نزولی است.

۴) در $\left[\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶}\right]$ تابع $g$، اکیداً نزولی است و $R_g = [۱, ۲]$ و در این بازه تابع f اکیداً نزولی است، پس fog اکیداً صعودی است.

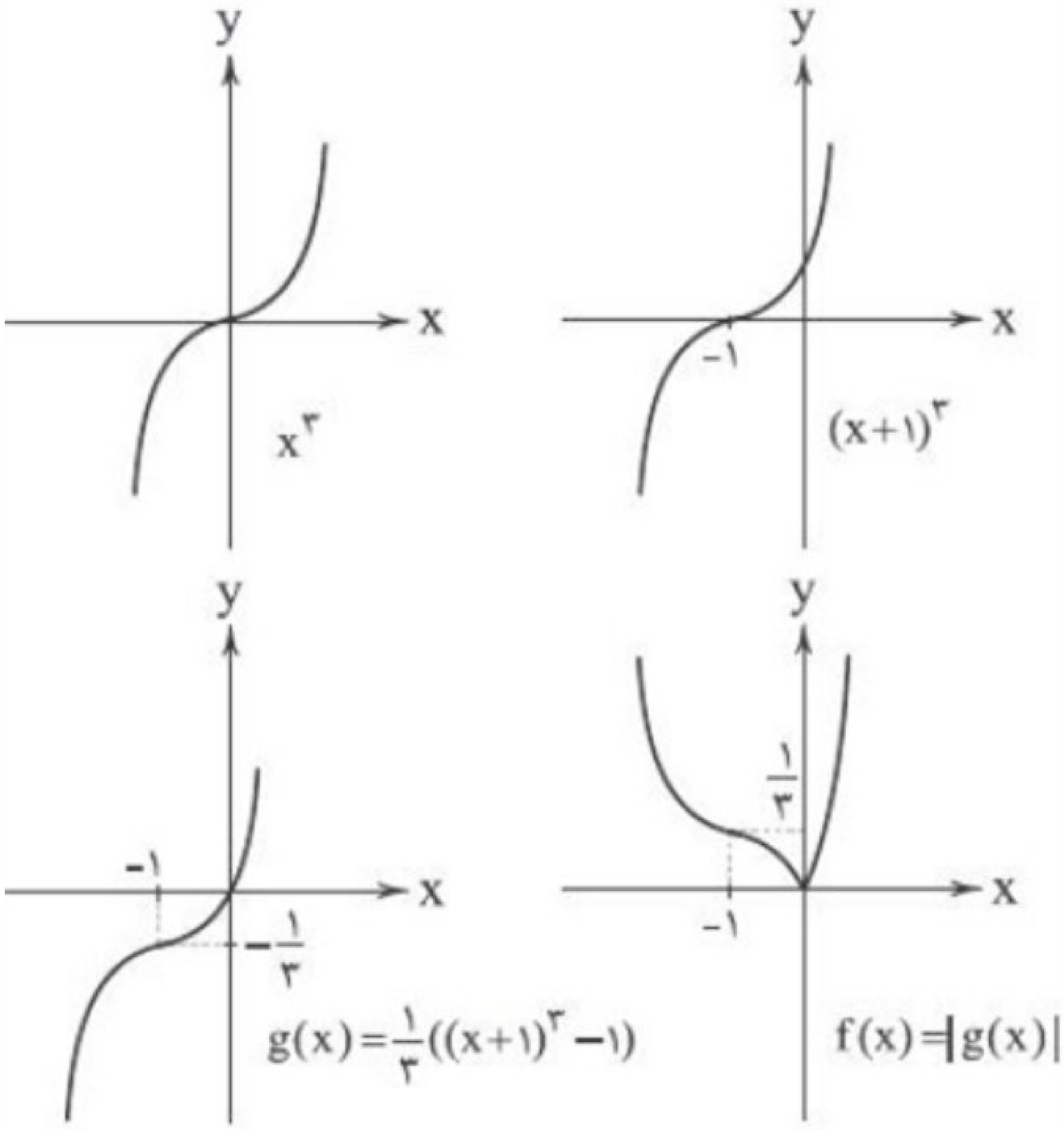




۱۴۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = x\left(\frac{۱}{۳}x^۲ + x + ۱\right) = \frac{۱}{۳}x^۳ + x^۲ + x = \frac{۱}{۳}(x^۳ + ۳x^۲ + ۳x)$$

$$g(x) = \frac{۱}{۳}((x+۱)^۳ - ۱)$$




نمودار $f(x)$ در بازهٔ $(-\infty, ۰]$ اکیداً نزولی است، پس حداکثر مقدار a برابر صفر است.

# پاسخنامه کلیدی

| سؤال | پاسخ | سؤال | پاسخ | سؤال | پاسخ | سؤال | پاسخ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳۳ | ۴ | ۶۵ | ۲ | ۹۷ | ۳ |
| ۲ | ۱ | ۳۴ | ۱ | ۶۶ | ۴ | ۹۸ | ۲ |
| ۳ | ۲ | ۳۵ | ۱ | ۶۷ | ۳ | ۹۹ | ۴ |
| ۴ | ۳ | ۳۶ | ۱ | ۶۸ | ۳ | ۱۰۰ | ۱ |
| ۵ | ۴ | ۳۷ | ۱ | ۶۹ | ۲ | ۱۰۱ | ۳ |
| ۶ | ۱ | ۳۸ | ۴ | ۷۰ | ۴ | ۱۰۲ | ۴ |
| ۷ | ۳ | ۳۹ | ۲ | ۷۱ | ۳ | ۱۰۳ | ۳ |
| ۸ | ۴ | ۴۰ | ۳ | ۷۲ | ۴ | ۱۰۴ | ۲ |
| ۹ | ۴ | ۴۱ | ۳ | ۷۳ | ۲ | ۱۰۵ | ۳ |
| ۱۰ | ۱ | ۴۲ | ۳ | ۷۴ | ۳ | ۱۰۶ | ۲ |
| ۱۱ | ۴ | ۴۳ | ۲ | ۷۵ | ۴ | ۱۰۷ | ۱ |
| ۱۲ | ۱ | ۴۴ | ۳ | ۷۶ | ۴ | ۱۰۸ | ۱ |
| ۱۳ | ۳ | ۴۵ | ۳ | ۷۷ | ۱ | ۱۰۹ | ۱ |
| ۱۴ | ۳ | ۴۶ | ۳ | ۷۸ | ۲ | ۱۱۰ | ۱ |
| ۱۵ | ۱ | ۴۷ | ۱ | ۷۹ | ۳ | ۱۱۱ | ۲ |
| ۱۶ | ۳ | ۴۸ | ۲ | ۸۰ | ۳ | ۱۱۲ | ۱ |
| ۱۷ | ۱ | ۴۹ | ۳ | ۸۱ | ۳ | ۱۱۳ | ۲ |
| ۱۸ | ۲ | ۵۰ | ۴ | ۸۲ | ۴ | ۱۱۴ | ۴ |
| ۱۹ | ۳ | ۵۱ | ۱ | ۸۳ | ۴ | ۱۱۵ | ۱ |
| ۲۰ | ۲ | ۵۲ | ۴ | ۸۴ | ۲ | ۱۱۶ | ۳ |
| ۲۱ | ۲ | ۵۳ | ۳ | ۸۵ | ۳ | ۱۱۷ | ۳ |
| ۲۲ | ۴ | ۵۴ | ۲ | ۸۶ | ۲ | ۱۱۸ | ۳ |
| ۲۳ | ۳ | ۵۵ | ۲ | ۸۷ | ۱ | ۱۱۹ | ۴ |
| ۲۴ | ۴ | ۵۶ | ۴ | ۸۸ | ۳ | ۱۲۰ | ۴ |
| ۲۵ | ۲ | ۵۷ | ۴ | ۸۹ | ۲ | ۱۲۱ | ۳ |
| ۲۶ | ۴ | ۵۸ | ۴ | ۹۰ | ۲ | ۱۲۲ | ۱ |
| ۲۷ | ۱ | ۵۹ | ۱ | ۹۱ | ۳ | ۱۲۳ | ۳ |
| ۲۸ | ۳ | ۶۰ | ۲ | ۹۲ | ۱ | ۱۲۴ | ۴ |
| ۲۹ | ۳ | ۶۱ | ۳ | ۹۳ | ۲ | ۱۲۵ | ۴ |
| ۳۰ | ۳ | ۶۲ | ۱ | ۹۴ | ۴ | ۱۲۶ | ۲ |
| ۳۱ | ۳ | ۶۳ | ۱ | ۹۵ | ۳ | ۱۲۷ | ۲ |
| ۳۲ | ۴ | ۶۴ | ۴ | ۹۶ | ۳ | ۱۲۸ | ۲ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱۲۹ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۳۰ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۳۱ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۱۳۲ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۳۳ | ۱ | ۲ | ۳ | **۴** |
| ۱۳۴ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۳۵ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۳۶ | **۱** | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳۷ | **۱** | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳۸ | **۱** | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳۹ | **۱** | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴۰ | **۱** | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴۱ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۱۴۲ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۱۴۳ | **۱** | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴۴ | ۱ | **۲** | ۳ | ۴ |
| ۱۴۵ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۱۴۶ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |
| ۱۴۷ | ۱ | ۲ | **۳** | ۴ |