



وزارت آموزش و پرورش  
اداره کل آموزش و پرورش استان مازندران  
معاونت آموزش متوسط



## سؤالات آزمون های نهایی سال های ۱۴۰۱ و ۱۴۰۲ (شش دوره)

درس: ریاضیات گسسته  
رشته: ریاضی و فیزیک

اداره آموزش  
دوره دوم متوسطه نظری  
مازندران

به صورت درس به درس  
و همراه با  
پاسخنامه تشریحی

با ما در **کانال کام نهایی مازندران** در **شاد** همراه باشید:

<http://shad.ir/motnazarimazand>



باسمه تعالی

اداره کل آموزش و پرورش مازندران

نام درس: ریاضیات گسسته

معاونت آموزش متوسطه

پایه: دوازدهم

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری

رشته: ریاضی و فیزیک

کانال گام نهایی مازندران (شاد) <http://shad.ir/motnazarimazand>

ردیف	نام و نام خانوادگی دبیر: تاریخ و امضا:	نمره با عدد: نمره با حروف:	نام و نام خانوادگی دبیر: تاریخ و امضا:	نمره با عدد: نمره با حروف:	بارم
۱					لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید
					<p style="text-align: center;"><b>ریاضیات گسسته (فصل ۱)</b></p> <p style="text-align: center;"><b>سوال ۳۸</b></p> <p>رقم یکان عدد <math>100! + 99! + \dots + 2! + 1! = A</math> را به دست آورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۲					<p>اگر <math>a b</math> و <math>b \neq 0</math>، در این صورت ثابت کنید: <math> a  \leq  b </math>.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۳					<p>ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل ضرب آنها کمتر نیست.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۴					<p>کدامیک از معادلات هم‌نهشتی زیر در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟</p> <p> <math>6x \equiv 11 \pmod{9}</math> (۱)     <math>2x \equiv 3 \pmod{5}</math> (۲)     <math>5x \equiv 10 \pmod{3}</math> (۳)     <math>3x \equiv 10 \pmod{4}</math> (۴) </p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۵					<p>باقی مانده تقسیم عدد <math>(9^{100} - 2^{100} - 7^{100})</math> بر ۱۴ کدام است؟</p> <p> (۱) صفر     (۲) ۳     (۳) ۵     (۴) ۸ </p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۶					<p>عدد ۱۴۰۲ به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟</p> <p> (۱) ۵     (۲) ۲     (۳) ۰     (۴) ۱ </p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>
۷					<p>چنانچه گزاره زیر درست است آن را اثبات کنید و اگر نادرست است آن را با ارائه مثال نقض، رد کنید.</p> <p>- حاصل ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

۸	چنانچه گزاره زیر درست است آن را اثبات کنید و اگر نادرست است آن را با ارائه مثال نقض، رد کنید. - با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۹	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر $a, b$ و $c$ اعدادی طبیعی باشند که $a b$ و $b c$ ، در این صورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر ..... است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۱۰	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. اگر $k$ عددی صحیح باشد، باقی مانده تقسیم $300 - 19k$ بر ۱۹ برابر با ..... است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۱۱	باقی مانده تقسیم عدد $A = 63^{14} + 1$ را بر ۱۶ به دست آورید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۲	اگر عددی مانند $k$ در $Z$ باشد به طوری که $7 2k + 1$ ، ثابت کنید: $49 4k^2 - 10k - 6$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۳	به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر $a$ عدد صحیح فرد باشد و $2 a + b$ ، آن گاه $b$ نیز عددی فرد است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۴	برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ ، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۵	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) برای اعداد صحیح $a, b$ و $c$ که $a \neq 0$ ، اگر $a b + c$ آن گاه $a b$ یا $a c$ . ج) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) b$ . د) اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ آن گاه می‌گوییم؛ $a$ و $b$ نسبت به هم اول‌اند.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۶	در معادله سیاله $15x + 19y = 7$ ، بزرگترین عدد $2$ رقمی طبیعی که می‌توان برای $x$ در نظر گرفت چه مقداری می‌باشد؟ (با راه حل)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۷	باقی مانده تقسیم $a$ بر دو عدد $4$ و $5$ به ترتیب برابر $3$ و $4$ می‌باشد، باقی مانده تقسیم $a$ بر $20$ را محاسبه کنید. (با راه حل)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۸	اگر $2m + 3 a$ و $7 m + a$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای $a$ وجود دارد؟	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۱۹	اگر $x, y$ و $z$ سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$
۲۰	معادله همنهشتی $6x \equiv 10$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.
۲۱	باقی مانده تقسیم عدد $200! + 199! + 198! + 197! + 196! + \dots + 2! + 1!$ بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل می باشد.)
۲۲	اگر $a$ و $b$ عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر ۸ بیابید.
۲۳	اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(4m + 5)$ و $(6m + 5)$ بر $a$ بخشپذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$ .
۲۴	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید: «برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ »
۲۵	در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید. الف) حاصل $(m^5, m^3, m^2)$ برابر با ..... است. ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم $a$ و $b$ ..... هستند. پ) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر ..... می‌نامیم. ت) تعداد یال‌های گراف $K_7$ برابر ..... است.
۲۶	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $x$ یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است. ب) اگر $a b + c$ آنگاه $a b$ یا $a c$ . پ) برای مقادیر حقیقی و ناصفر $a$ و $b$ به شرط آنکه $a + b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است. ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.
۲۷	دانش‌آموز در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.) این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟
۲۸	ثابت کنید باقیمانده هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.



۲۹	اگر باقیمانده تقسیم عدد $a$ بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم عدد $a$ را بر ۴۲ بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۳۰	اگر عدد طبیعی $a$ ، دو عدد $(۵k + ۹)$ و $(۸k + ۱۳)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = ۱$ یا $a = ۷$ . سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۳۱	$a_1, a_2, a_3$ اعدادی صحیح هستند و $b_1, b_2, b_3$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۳۲	هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال، نقض کنید. الف) برای هر عدد طبیعی $n$ ، عدد $۲^n + ۱$ اول است. ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۳۳	اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟ سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۴	باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۲۷^{۲۰} + ۱۸$ را بر ۱۳ بیابید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۵	اگر عددی مانند $k$ در $Z$ باشد، به طوری که $۱ + ۴k \mid ۵$ ، ثابت کنید $۶ + ۲۸k + ۱۶k^۲ \mid ۲۵$ . سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۶	ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج $n$ ، $۷ + ۵n - n^۲$ عددی فرد است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۷	درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. الف) اگر $a \mid b$ و $b \neq ۰$ ، در این صورت $ a  >  b $ . ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ اگر $(a \mid c, b \mid c) \Rightarrow (a, b) \mid c$ و $(\forall m > ۰, a \mid m, b \mid m \Rightarrow c \leq m)$ آن‌گاه $[a, b] = c$ . پ) برای هر دو عدد صحیح $a$ و $b$ و عدد طبیعی $m$ ، اگر باقی‌مانده تقسیم $a$ بر $m$ مساوی با $r$ باشد، در این صورت $a \equiv r \pmod{m}$ . ت) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲ برابر ۲- است. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱
۳۸	معادله هم‌نهشتی $۱۱ \equiv ۱۴۰۲x \pmod{۹}$ را حل کنید. سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

$$A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100! \Rightarrow A = 2! + 4! + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

مضرب ۲ و ۵

$$\Rightarrow A \equiv 2 + 24 + 0 \Rightarrow A \equiv 26 \equiv 6 \pmod{10} \text{ (ص ۲۹)}$$

$$a|b \Rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow |b| = |a| |q|$$

$$q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Rightarrow |q| \geq 1 \Rightarrow |a| |q| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a| \text{ (ص ۱۱)}$$

$$a^x + b^x \geq -ab \Leftrightarrow a^x + b^x + ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^x + 2b^x + 2ab \geq 0 \text{ (ص ۷)}$$

$$\Leftrightarrow a^x + b^x + (a^x + b^x + 2ab) \geq 0 \Leftrightarrow a^x + b^x + (a+b)^x \geq 0 \text{ همواره برقرار}$$

۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۵)

۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹)

۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹)

۷ نادرست - با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل ضرب صفر است که گویا می‌شود. (ص ۵)

$$2k \times (2k + 2) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2 \text{ درست (ص ۳)}$$

۹ b (ص ۱۳)

۱۰ ۴ (ص ۱۴)

$$63 \equiv -1 \pmod{16} \Rightarrow 63^{14} \equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow A \equiv 2 \pmod{16} \Rightarrow r = 2 \text{ (ص ۲۱)}$$

$$7|2k + 1 \Rightarrow \begin{cases} 49|4k^2 + 4k + 1 \\ 49|14k + 7 \end{cases} \Rightarrow 49|4k^2 - 10k - 6 \text{ (ص ۱۶)}$$

$$b = 2k, b|a + 2 \Rightarrow a + 2 = bq \Rightarrow a = 2t$$

که با فرض سؤال در تناقض است. (ص ۱۶)

$$2x^x + 2xy + y^x \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^x + 2xy + y^x + x^x - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^x + (x-2)^x \geq 0$$

این رابطه همواره برقرار است. (ص ۸)

۱۵ الف) نادرست (ص ۵)      ب) نادرست (ص ۱۱)      ج) درست (ص ۲۵)      د)

درست (ص ۱۳)

$$15x \equiv 7 \pmod{19} \Rightarrow 15x \equiv 45 \pmod{19} \xrightarrow{(15,19)=1} x \equiv 3 \pmod{19} \Rightarrow x = 19k + 3$$

$$\xrightarrow{k=5} x = 98 \text{ (ص ۲۸)}$$

$$\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_2 + 15 \end{cases} \Rightarrow a = 20q' - 1 \Rightarrow a = 20q'' + 19 \quad (16 \text{ ص})$$

۱۷

$$\begin{cases} a | 2m + 3 \xrightarrow{\times 2} a | 4m + 6 \\ a | m + 7 \xrightarrow{\times 5} a | 5m + 35 \end{cases} \Rightarrow a | 11 \Rightarrow a = 1, a = 11 \quad (11 \text{ ص})$$

۱۸

$$x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + z^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + z^2 + 1 \geq 0$$

همواره بدیهی است. (ص ۸)

۱۹

۲۰ چون  $20 | (12, 8)$  معادله جواب دارد. (ص ۳۰)

$$4x \equiv 10 \Rightarrow 2x \equiv 5 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 3k + 1$$

۲۱ می‌دانیم  $1! \equiv 1$  و  $2! \equiv 2$  و  $3! \equiv 6$  و  $4! \equiv 24$  و  $5! \equiv 120$  و  $6! \equiv 720$  پس داریم: (ص ۲۹)

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 20! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + \dots + 20! \equiv 3$$

۲۲ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت  $1 + 4k$  می‌باشد ( $k \in \mathbb{Z}$ ) پس داریم: (ص ۱۶)

$$\begin{cases} a^2 = 4k + 1 \\ b^2 = 4k' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 4k + 1 + 4k' + 1 + 5 \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 4k'' + 7 \Rightarrow r = 7$$

$$\begin{matrix} a | 6(5m + 4) \\ a | 5(6m + 5) \end{matrix} \Rightarrow a | 5(6m + 5) - 6(5m + 4) \Rightarrow a | 1 \Rightarrow a = \pm 1 \quad (11 \text{ ص})$$

۲۳

$$y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (x + y)^2 \geq 0$$

(ص ۸ و ۷) این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است

۲۴

۲۵ الف)  $m^2$  (ب) نسبت به هم اول (ص ۱۳)

پ) مینیمال (ص ۴۶)

ت) ۲۱ (ص ۳۸)

۲۶ الف) درست (ب) نادرست (پ) نادرست (ت) درست

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42 \equiv 6 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k \Rightarrow 5(3k) + 3y = 42 \Rightarrow y = -5k + 14$$

۲۷

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 14 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}; \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \quad (28 \text{ ص})$$

۲۸ عدد  $n$  رقمی  $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1$  را بسط می‌دهیم و در هم‌نشستی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم، داریم: (ص ۲۲)

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + 1 a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

$$a = 6q + 3 \Rightarrow 7a = 42q + 21 \Rightarrow a = 42(q - q' - 1) + 33 \Rightarrow r = 33 \text{ (ص ۱۴)}$$

$$a = 7q' + 5 \Rightarrow 6a = 42q' + 30$$

۲۹

$$\begin{cases} a|5k + 9 \\ a|8k + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|40k + 72 \\ a|40k + 65 \end{cases} \Rightarrow a|7 \Rightarrow a = 1 \vee a = 7 \text{ (ص ۱۲)}$$

۳۰

۳۱ اگر  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، پس هر سه عامل  $(a_1 - b_1)$  و  $(a_2 - b_2)$  و  $(a_3 - b_3)$  هم باید فرد باشد. در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید فرد باشد. اما با توجه به فرض مسأله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (ص ۶)

۳۲ الف) نادرست، مثال نقض  $n = 3$  (ص ۳)

ب) درست، اثبات:

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

ص ۸

۳۳ فاصله ۱ متر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، یعنی

$$131 = 12 + 3 \times 30 + 29. \text{ از طرفی } 5 \equiv 131 \pmod{7}. \text{ بنابراین طبق جدول زیر } 12 \text{ بهمن پنجشنبه است. (ص ۲۴)}$$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (27)^{13} \equiv 1, 18 = 13 \times 1 + 5, 18 \equiv 5 \pmod{13}$$

۳۴

$$\Rightarrow (27)^{18} + 18 \equiv 1 + 5 \pmod{13} \Rightarrow r = 6 \text{ (ص ۲۱)}$$

$$5|4k + 1 \Rightarrow 25|16k^2 + 8k + 1 \rightarrow 25|16k^2 + 28k + 6 \text{ (ص ۱۶)}$$

$$5|4k + 1 \Rightarrow 25|20k + 5$$

۳۵

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1 \text{ (ص ۴)}$$

۳۶

ب) درست (ص ۱۳)

الف) نادرست (ص ۱۱)

۳۷

ت) نادرست (ص ۱۳)

پ) درست (ص ۲۱)

$$(1 + 4 + 0 + 2)x^9 \equiv 1 + 1 \Rightarrow 7x^9 \equiv 2 \Rightarrow 7x^9 \equiv -7 \xrightarrow{(7,9)=1} x^9 \equiv -1 \Rightarrow x = 9k - 1 \text{ (ص ۳۰)}$$

۳۸

۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴



باسمه تعالی

اداره کل آموزش و پرورش مازندران

نام درس: ریاضیات گسسته

معاونت آموزش متوسطه

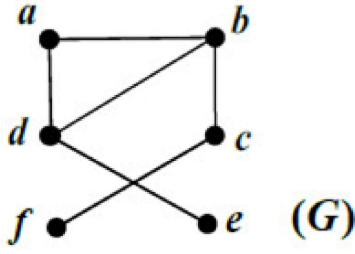
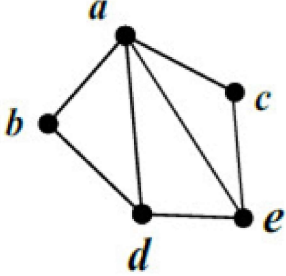
پایه: دوازدهم

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری

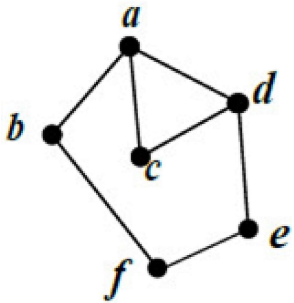
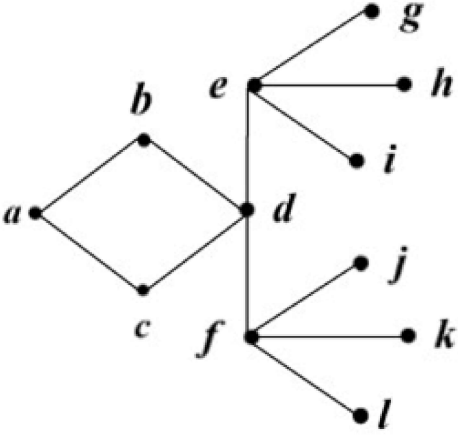
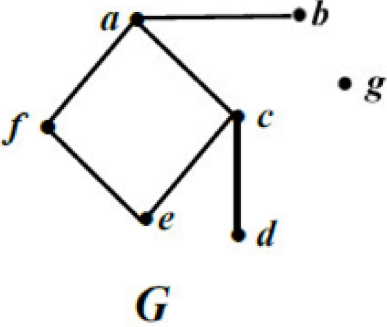
رشته: ریاضی و فیزیک

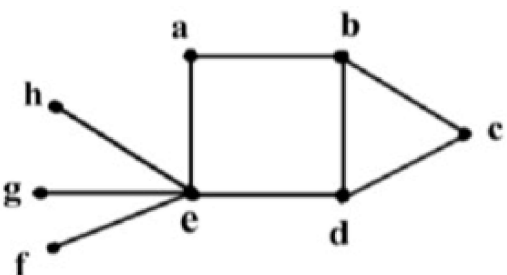
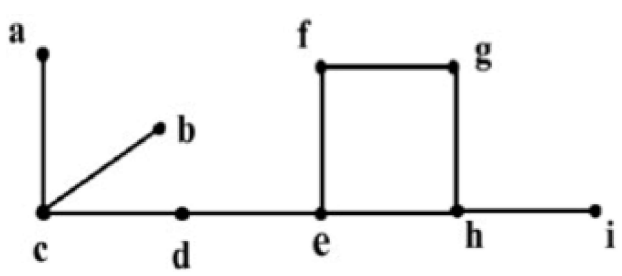
کانال گام نهایی مازندران (شاد) <http://shad.ir/motnazarimazand>

نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:
تاریخ و امضا:	نمره با حروف:	تاریخ و امضا:	نمره با حروف:

ردیف	لطفًا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	بارم
۱	<p><b>ریاضیات گسسته (فصل 2)</b></p> <p><b>سوال ۳۷</b></p> <p>یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بنویسید که مینیمم نباشد. برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>	
۲	<p>با ذکر دلیل عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را تعیین کنید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>	
۳	<p>در گراف <math>P_1</math> چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>	
۴	<p>آیا می‌توان گرافی ۳-منتظم از مرتبه ۹ رسم کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>	
۵	<p>مکمل گراف G که در شکل مقابل آمده است را رسم کنید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>	

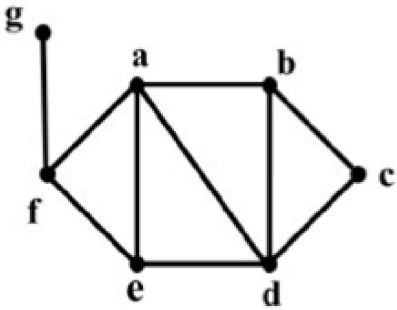
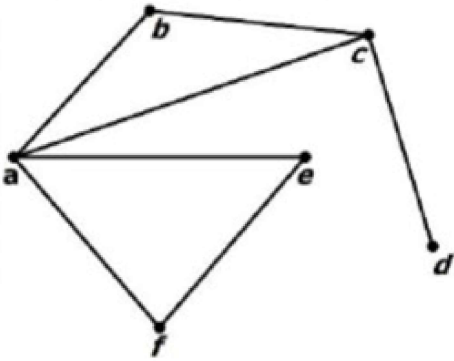
**اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران**

	 <p>در گراف شکل مقابل همسایگی باز رأس <math>d</math> را بنویسید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>	۶
	<p>مجموعه همسایگی بسته یک رأس در گراف را تعریف کنید.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲</p>	۷
	<p>گراف زیر را در نظر بگیرید:</p> <p>(الف) عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.</p> <p>(ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.</p> <p>(ج) یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۲</p>	۸
	<p>گراف <math>G</math> به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>(الف) مرتبه و اندازه آن را بنویسید.</p> <p>(ب) مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید.</p> <p>(ج) مجموعه <math>N_G[c]</math> را بنویسید.</p> <p>(د) دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید.</p> <p>(ه) حاصل عبارت <math>q(\overline{G}) + \deg_{\overline{G}}(g)</math> را به دست آورید.</p>  <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۲</p>	۹

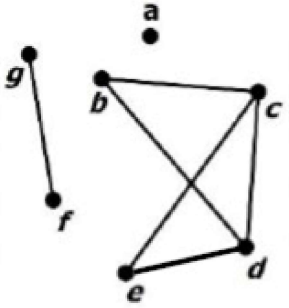
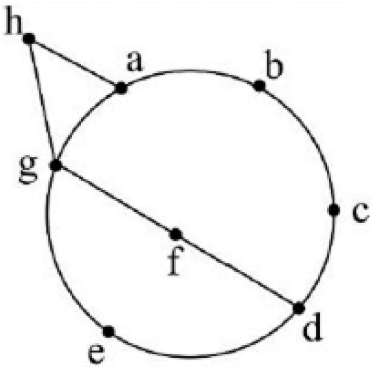
	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.          الف) گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف ..... می‌گوییم.          ب) تعداد رئوس فرد هر گراف عددی ..... است.          ج) مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه <math>p</math> برابر ..... است.          د) گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد <math>k</math> باشد، گراف ..... می‌گوییم.</p>	۱۰
	<p>الف) عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.          ب) این گراف چند <math>\chi</math> - مجموعه دارد؟</p> 	۱۱
	<p>یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۳ داشته باشد.</p>	۱۲
	<p>یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۳ داشته باشد.</p>	۱۳
	<p>گراف مقابل را در نظر بگیرید.</p>  <p>الف) یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال با ۴ عضو بنویسید.          ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.          ج) با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه‌گری گراف ۲ خواهد شد؟</p>	۱۴

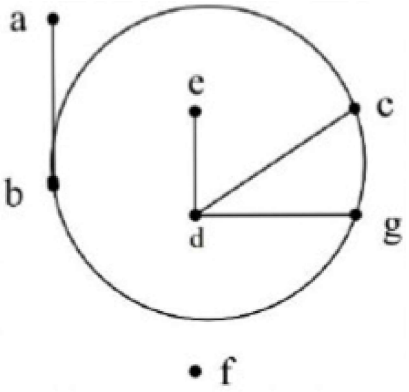
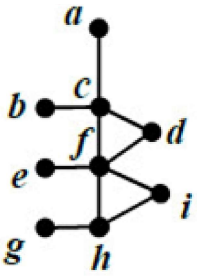
**اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران**



	<p>گراف <math>G</math> به صورت مقابل رسم شده است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.          الف) مجموعه <math>N_G(g)</math> را بنویسید.          ب) یک دور به طول ۵ با شروع از رأس <math>a</math> بنویسید.          ج) درجه رأس <math>c</math> در گراف <math>\overline{G}</math> (مکمل گراف <math>G</math>) را مشخص کنید.</p> 	۱۵
	<p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>	
	<p>به گراف ۸ رأسی ۳- منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه حل)</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>	۱۶
	<p>درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.          الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.          ب) حاصل <math>(3m + 2)</math>, <math>(3m + 1)</math> برابر ۱ می باشد.          ج) تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی فرد است.          د) عدد احاطه‌گری <math>P_{10}</math> برابر عدد ۳ است.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲</p>	۱۷
	<p>یک گراف ۲- منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.</p> <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>	۱۸
	<p>عدد احاطه‌گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.</p>  <p>سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱</p>	۱۹

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

	<p>گراف <math>G</math> (شکل مقابل) را در نظر بگیرید:  الف) <math>\Delta(G)</math> و <math>\delta(G)</math> را مشخص کنید.  ب) دوری به طول ۴ بنویسید.  پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از رأس <math>b</math> بنویسید.  ت) <math>N_G(f)</math> را با اعضا مشخص کنید.</p> 	۲۰
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱	<p>در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.  الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه، مرتبه) می‌نامیم.  ب) گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد.  پ) اگر <math>G</math> یک گراف <math>n</math> رأسی باشد، مقدار <math>q(G) + q(\bar{G})</math> برابر با <math>\left(\frac{n(n-1)}{2}, n(n-1)\right)</math> است.  ت) گراف <math>C_n</math> تنها یک (دور، مسیر) <math>n</math> رأسی دارد.</p>	۲۱
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱	<p>در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید.  الف) حاصل <math>(m^2, m^5)</math> برابر با ..... است.  ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر <math>a</math> و <math>b</math> داشته باشیم <math>(a, b) = 1</math>، می‌گوییم <math>a</math> و <math>b</math> ..... هستند.  پ) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر ..... می‌نامیم.  ت) تعداد یال‌های گراف <math>K_n</math> برابر ..... است.</p>	۲۲
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱	<p>با توجه به گراف <math>G</math> به سؤالات زیر پاسخ دهید.  الف) عدد احاطه‌گری را برای گراف زیر مشخص کنید.  ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p> 	۲۳
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱	<p>یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴-عضوی از گراف <math>C_8</math> را مشخص کنید.</p>	۲۴
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریور ماه ۱۴۰۱		

	<p>یک <math>\gamma</math> - مجموعه از گراف <math>C_8</math> را مشخص کنید.</p>	۲۵
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱	<p>گراف <math>C_8</math> را رسم کنید.</p>	۲۶
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱	<p>در یک گراف از مرتبه ۸ با <math>\Delta = 3</math>، حداقل چند رأس برای احاطه همه رئوس لازم است؟ (با ذکر دلیل)</p>	۲۷
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱	<p>یک گراف کامل ۱۱ رأسی چند یال دارد؟ (با ذکر دلیل)</p>	۲۸
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱	<p>با توجه به گراف <math>G</math> (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.          الف) یک مسیر به طول ۳ از <math>a</math> به <math>c</math> بنویسید.          ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.          پ) درجه رأس <math>a</math> را در گراف <math>\overline{G}</math> تعیین کنید.          ت) آیا گراف <math>G</math> همبند است؟ (با ذکر دلیل)          ث) <math>N_G[f]</math> را بنویسید.</p> 	۲۹
سؤالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱	<p>گراف شکل مقابل مقابل را در نظر بگیرید.          الف) یک <math>\gamma</math> - مجموعه مشخص کنید.          ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.</p> 	۳۰

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران



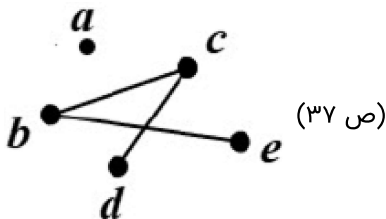
۱  $D = \{a, f, e\}$  دلیل آنکه مجموعه احاطه‌گر مینیمال است: با حذف رأس  $a$ ، رأس  $a$  احاطه نمی‌شود. با حذف رأس  $f$ ، رأس  $c$  احاطه نمی‌شود. با حذف رأس  $e$ ، خود رأس  $e$  احاطه نمی‌شود. (ص ۴۶)  
(توجه: به سایر احاطه‌گرهای مینیمال غیرمینیمم، با ذکر دلیل نمره داده شود.)

۲ طبق قضیه داریم  $\chi(G) \leq 2 \leq \frac{6}{3+1}$ . از طرفی مجموعه  $D = \{d, c\}$  یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا  $\chi(G) \leq 2$ . بنابراین  $\chi(G) = 2$ . (ص ۴۹)



۳ مسیر نوشتن مسیرهها  $1234 - 2345 - 3456 - 4567 - 5678 - 6789 - 78910$

۴ خیر - در یک گراف  $r$ -منتظم داریم  $\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$ . به عبارتی  $rp = 2q$ . در این سؤال  $r = 3$ ،  $p = 9$ ، لذا  $rp = 27$  عددی فرد و  $2q$  عددی زوج است. و این تناقض است. (ص ۴۲)



۵  $N_G(d) = \{a, c, e\}$  (ص ۳۶)

۶ مجموعه رأس‌هایی از یک گراف که به یک رأس متصل هستند به همراه خود رأس را مجموعه همسایگی بسته آن رأس می‌نامیم. (ص ۳۶)

۷ الف)  $\chi(G) \geq \frac{p}{\Delta + 1} \Rightarrow \chi(G) \geq 3$  (\*) (ص ۴۹)

از طرفی  $A = \{a, e, f\}$  یک مجموعه احاطه‌گر است بنابه رابطه (\*): پس  $\chi(G) = 3$

ب)  $B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$

به هر مجموعه احاطه‌گر هشت عضوی مینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۶)

ج)  $C = \{a, e, f, b\}$

به هر مجموعه احاطه‌گر چهار عضوی غیرمینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۷)

۸ الف)  $p = 7, q = 6$  (ص ۳۵)

ب)  $2q = 12$  (ص ۳۹)

ج)  $N_G[c] = \{a, c, d, e\}$  (ص ۳۶)

د)  $a c e f a$  (ص ۳۸)

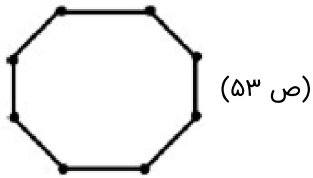
ه)  $q(\bar{G}) + d_{\bar{G}}(g) = 15 + 6 = 21$  (ص ۳۸)

۹ الف) همبند (ص ۳۹)      ب) زوج (ص ۴۰)      ج)  $p - 1$  (ص ۴۲)      د)  $-k$

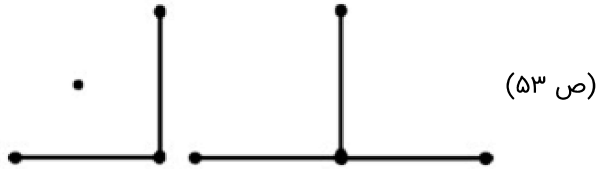
منتظم (ص ۳۵)

۱۱) الف) می‌دانیم  $\frac{n}{\Delta + 1} \leq \chi(G)$  پس داریم  $\frac{\Delta}{\Delta + 1} \leq \chi(G)$  در نتیجه  $2 \leq \chi(G)$

از طرفی مجموعه‌ای مانند  $\{e, c\}$  (هر کدام از مجموعه‌های  $\{e, b\}$  یا  $\{e, d\}$  اگر نوشته شد نیز مورد قبول است) یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف  $(G)$  می‌باشد پس  $\chi(G) \leq 2$  بنابراین  $\chi(G) = 2$   
 ب) ۳ (ص ۵۰)



۱۲



۱۳

الف)  $\{c, e, h, f\}$

۱۴

ب)  $\{c, g, i, e\}$

ج) fh (ص ۴۷)

الف)  $\{f\}$

۱۵

ب) abcdea یا abdefa

ج) ۴ (ص ۴۱)

$$\begin{cases} q = \frac{kn}{r} \Rightarrow q = \frac{\Delta \times r}{r} = 12 \\ q = \frac{n(n-1)}{r} \Rightarrow q = \frac{\Delta \times \Delta}{r} = 28 \end{cases} \Rightarrow 28 - 12 = 16 \text{ (ص ۴۰)}$$

۱۶

د)

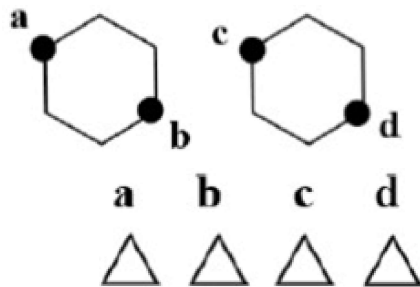
ج) نادرست (ص ۴۰)

ب) درست (ص ۱۷)

الف) درست (ص ۵)

نادرست (ص ۵۳)

۱۷



۱۸) رسم شکل با مشخص کردن نقاط احاطه‌گری آن:

(به شکل‌های دیگر نیز نمره داده شود). مانند:

(ص ۵۳)

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

۱۹ روش اول: می‌دانیم  $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$  پس داریم  $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor$  بنابراین  $\chi(G) \leq 2$  و با توجه به  $\{a, d\}$  داریم

$$\chi(G) \leq 2 \text{ و لذا } \chi(G) = 2$$

روش دیگر: این گراف با مجموعه دو عضوی  $\{a, d\}$  احاطه می‌شود. پس عدد احاطه‌گری این گراف کوچکتر یا مساوی ۲ است یعنی  $\chi(G) \leq 2$ . اما اگر  $\chi(G) = 1$  یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رؤوس را احاطه می‌کند یعنی رأس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد و لذا  $\chi(G) > 1$  بنابراین  $1 \leq \chi(G) \leq 2$  و لذا  $\chi(G) = 2$ . (ص ۳۹)

الف)  $\delta(G) = 0, \Delta(G) = 3$

۲۰

ب) c e d b

پ) b c d e یا b d e c یا b d c e یا b d c e (دو مورد)

ت)  $N_G(f) = \{g\}$  (ص ۴۱)

ت) دور

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ (پ)}$$

ب) مسیر

۲۱ الف) مرتبه

(ص ۳۵ و ۳۸)

ب) نسبت به هم اول (ص ۱۳)

ت) ۲۱ (ص ۳۸)

۲۲ الف)  $m^2$

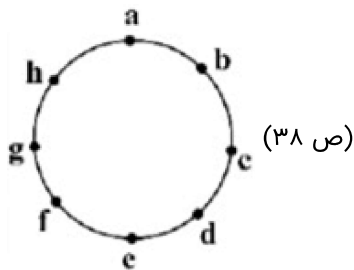
ب) مینیمال (ص ۴۶)

الف)  $\{g, c\} \Rightarrow \chi(G) = 2$  (ص ۵۲)

ب)  $\{h, d, b\}$  (ص ۴۶)

(ص ۴۶)  $\{a, c, e, g\}$ : یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال

$D = \{a, d, g\}$  (ص ۴۴)



$$\frac{n}{\Delta + 1} = \frac{8}{3 + 1} = 2 \text{ (ص ۴۹)}$$

$$\frac{p(p-1)}{2} = \frac{11(11-1)}{2} = 55 \text{ (ص ۳۸)}$$

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران

۲۹ الف) a b g c (ص ۳۸)

ب) b c d g b (ص ۳۸)

پ) ۵ (ص ۳۷)

ت) خیر. زیرا دارای رأس ایزوله است (هیچ مسیری از f به سایر رئوس وجود ندارد) (ص ۳۹)

ث)  $N_G[f] = \{f\}$  (ص ۳۶)

الف)  $D = \{h, c, e\}$

ب)  $D = \{g, c, i, e\}$

۳۰

(در صورت ارائه مجموعه‌های مشابه با این ویژگی‌ها نمره داده شود.) (ص ۵۴)



۳۱ رسم گراف

$D = \{۲, ۵, ۸\}$  (ص ۵۱ و ص ۳۸)

۳۲ برای احاطه کردن رئوس  $a, b, c, d, g$  حداقل دو تا از آن‌ها باید در مجموع احاطه‌گر باشند، زیرا  $\frac{۵}{۳+۱} = ۲$ .

برای احاطه کردن رئوس  $e, f, h$  حداقل یکی از آن‌ها باید انتخاب شوند، زیرا،  $\frac{۳}{۳+۱} = ۱$ . بنابراین حداقل سه رأس باید در

هر مجموعه احاطه‌گری از گراف باشد یعنی  $\chi(G) \geq ۳$ . از طرفی مجموعه  $D = \{a, c, e\}$  یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا  $\chi(G) \leq ۳$ . بنابراین  $\chi(G) = ۳$  (ص ۵۰)

$D = \{h, b, i, a\}$

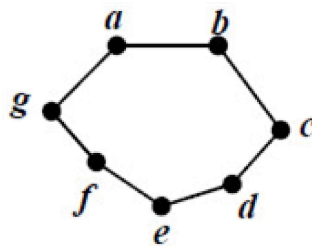
۳۳

(به سایر مجموعه‌های احاطه‌گر صحیح، نمره داده شود.) (ص ۴۵)

۳۴ یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم. (ص ۴۶)

$N_G(c) = \{b, d\}$  (ص ۳۶)

۳۵



۳۶ رسم گراف (ص ۳۸)

مسیر: a b c d e f

ت) همینند (ص ۳۹)

پ) ۶ (ص ۴۰)

ب) تهی (ص ۳۵)

۳۷ الف) فرد (ص ۳۵)





باسمه تعالی

اداره کل آموزش و پرورش مازندران

نام درس: ریاضیات گسسته

معاونت آموزش متوسطه

پایه: دوازدهم

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری

رشته: ریاضی و فیزیک

کانال گام نهایی مازندران (شاد) <http://shad.ir/motnazarimazand>

نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:	نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:
تاریخ و امضا:	نمره با حروف:	تاریخ و امضا:	نمره با حروف:

ردیف: لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید

بارم: ۱

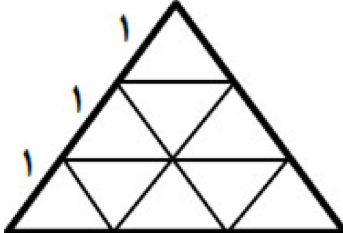
ریاضیات گسسته (فصل 3) سوال ۳۶

به چند طریق می‌توان با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

بارم: ۲

یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به طول ضلع ۳ واحد تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل دو نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آن‌ها از یکدیگر کمتر از یک باشد.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

بارم: ۳

با ارقام ۶، ۶، ۵، ۱، ۴، ۴، ۴ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

بارم: ۴

نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  برابر با  $\binom{n-1}{k-1}$  است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

بارم: ۵

مربع لاتینی بنویسید که با مربع لاتین زیر متعامد باشد و متعامد بودن آن را با ذکر دلیل بیان کنید.

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

**اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران**

۶	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. تعداد توابع یک به یک از مجموعه دو عضوی به مجموعه ۴ عضوی برابر ..... می باشد.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۷	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. دو مربع لاتین $2 \times 2$ وجود ..... و ..... مربع لاتین $1 \times 1$ وجود دارد.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲
۸	یک نجار در هفته ۴ مدل مختلف صندلی در ۳ رنگ متفاوت می سازد. او در یک هفته حداقل چند صندلی بسازد تا مطمئن باشیم. لاقط ۳ صندلی هم رنگ و هم مدل ساخته است؟	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۹	در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ ( $1 \leq n \leq 500$ ) چند عدد وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۰	ابتدا شرط متعامد بودن دو مربع لاتین را نوشته و سپس دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۱	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_2 = 4$ و $x_4 \geq 3$ باشد؟	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۲	با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۰ چند کد ۸ رقمی می توان نوشت؟	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۳	چهار برادر و سه خواهر می خواهند در یک ردیف کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند. اگر همواره خواهرها کنار هم و برادرها کنار هم قرار بگیرند، آن گاه این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲
۱۴	حداقل افراد شرکت کننده در یک همایش چند نفر باشند، تا با اطمینان بتوان گفت که ۵ نفر از آن ها در یک ماه متولد شده اند و رقم یکان کد ملی آنها زوج است.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۵	چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می توان نوشت به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ (نیاز به محاسبه پاسخ نهایی نمی باشد)	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۶	قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند به گونه ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هریک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسأله برنامه ریزی کنید.	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۷	معادله $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4^3 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۱۸	اگر داشته باشیم $A = \{۷, ۸, ۹\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ در این صورت چند کد با شش کاراکتر متمایز می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و چهار حرف از B باشد؟
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۱۹	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) در یک گراف از مرتبه $p$ ، اگر $\chi(G) = ۱$ باشد، در این صورت حداقل تعداد یالها برابر ..... است. ب) در یک مربع لاتین چرخشی $۴ \times ۴$ مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر ..... است. ج) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۵ عضوی برابر ..... است.
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲
۲۰	هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها کمتر از $\sqrt{۸}$ است.
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۱	چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid ۱ \leq n \leq ۶۳۰\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخشیدیرند؟
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۲	قرار است سه مدرس $T_۱, T_۲, T_۳$ در سه جلسه متوالی در سه کلاس $C_۱, C_۲, C_۳$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه‌ریزی کنید.
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۳	به چند روش می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم؟
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۴	می‌خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، این کار را به چند روش می‌توان انجام داد؟
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱
۲۵	حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آن‌ها فاصله‌شان کمتر از ۱ است؟
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۶	تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۷ عضوی را به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود.)
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۷	دو مربع لاتین متعامد $۳ \times ۳$ را بنویسید. (دلیل متعادل بودن آن‌ها را بیان کنید.)
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱
۲۸	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده شده به دست آورید. $x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۹$ ( $x_i \geq ۰, ۱ \leq i \leq ۴, x_۵ = ۲$ )
	سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

	<p>۲۹ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن <math>4! \times 7!</math> باشد.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p>																	
	<p>۳۰ به چند طریق می‌توان ۴۵ دانش‌آموز را در چهار کلاس ۸ نفره، ۱۰ نفره، ۱۲ نفره و ۱۵ نفره در یک مدرسه قرار داد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱</p>																	
	<p>۳۱ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، لاکل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>																	
	<p>۳۲ به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>																	
	<p>الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت</p> $\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 2 \\ 3 &\rightarrow 4 \\ 4 &\rightarrow 1 \end{aligned}$ <p>مربع لاتین B را به دست آورید.</p> <p>ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.</p> <p>A =</p> <table border="1" data-bbox="285 793 513 1035"> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>	۳	۴	۱	۲	۲	۱	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۴	۳	۲	۱	
۳	۴	۱	۲															
۲	۱	۴	۳															
۱	۲	۳	۴															
۴	۳	۲	۱															
	<p>۳۴ معادله <math>x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12</math> چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که <math>x_3 = 4</math> و <math>x_5 &gt; 2</math> باشد؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>																	
	<p>۳۵ با ارقام ۱, ۱, ۱, ۳, ۳, ۵, ۶, ۷, ۹ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>																	
	<p>۳۶ ۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که: الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند. ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.</p> <p>سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱</p>																	

**اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران**

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\},$$

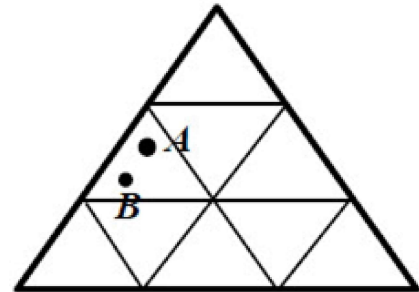
$$A_j = \{f : A \rightarrow B | f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}, 1 \leq j \leq 3$$

$$|S| = 3^4 = 81, |A_j| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36 \text{ (ص ۷۷)}$$

۱۰ نقطه را کبوتر و هریک از ۹ قسمت مثلث را لانه فرض می‌کنیم. طبق اصل کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند. یعنی حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت به طوری که  $|AB| < 1$ . (ص ۸۰)



$$\frac{7!}{2! \times 3!} \text{ (ص ۵۸)}$$

به هر کدام از  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$  را اضافه می‌کنیم.

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$$

لذا تعداد حالات جواب از رابطه  $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$  به دست می‌آید. (ص ۶۱)

۵ در مربع لاتین دوم عدد دو رقمی تکراری نداریم. بنابراین مربع لاتین ارائه شده با مربع لاتین مورد سؤال متعامد هستند.

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

 $\rightarrow$ 

۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱
۳۲	۲۱	۱۳

(توجه: به سایر مربع‌های لاتینی که شرایط مسأله را برقرار کنند، نمره داده شود.) (ص ۷۲)

۱۲ (ص ۷۹) ۶

ندارد - یک (ص ۶۶) ۷

$$k+1=3 \Rightarrow k=2, n=3 \times 4=12 \Rightarrow kn+1=12 \times 2+1=25 \text{ (ص ۸۲)}$$

$$|A| = \left[ \begin{matrix} 500 \\ 5 \end{matrix} \right] = 100, |B| = \left[ \begin{matrix} 500 \\ 4 \end{matrix} \right] = 125, |A \cap B| = \left[ \begin{matrix} 500 \\ 20 \end{matrix} \right] = 25$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = 500 - (100 + 125 - 25) = 300 \text{ (ص ۷۵)}$$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

هر کدام از مربع‌های لاتین (ص ۶۴ و ۶۵)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \text{ (ص ۶۱)}$$

$$x_2 - 3 = y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 + y_2 = 5 \Rightarrow \binom{7}{2} = 21$$

$$\frac{8!}{4! \times 3! \times 1!} \text{ (ص ۵۸)}$$

$$3! \times 4! \times 2! = 288 \text{ (ص ۷۲)}$$

$$n = 12 \times 5 = 60 \Rightarrow \text{تعداد حالات یکان زوج کدملی} \times \text{تعداد ماه‌ها} = \text{تعداد لانه‌ها}$$

$$k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4 = \text{تعداد کبوترها} = nk + 1 \xrightarrow[k=4]{n=60} 60 \times 4 + 1 = 241$$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری حداقل ۲۴۱ نفر موردنیاز است. (ص ۸۳)

$$|S| = 5^4 \text{ (ص ۷۵): تعداد کل رمزها}$$

$$|A| = 4^4 \text{ : تعداد رمزهای فاقد ۳}$$

$$|B| = 4^4 \text{ : تعداد رمزهای فاقد ۲}$$

$$|A \cap B| = 3^4 \text{ : تعداد رمزهای فاقد ۲ و ۳}$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A \cup B| = 5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4)$$

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

 $\Rightarrow$ 

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

 $\Rightarrow$ 

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱
دوشنبه	۲۲	۳۱	۱۳

(ص ۷۲)

اگر مربع‌های لاتین متعامد صحیح دیگری نیز بتوانید به دست آورید، درست است.

$$\begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \binom{12}{2} = 66 \\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \binom{10}{2} = 45 \end{cases} \Rightarrow 66 + 45 = 111 \text{ (ص ۷۱)}$$

$$\binom{3}{2} \times \binom{6}{6} \times 6! \text{ (ص ۷۱)}$$

**اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران**

(ج)  $\frac{5!}{2!} = 60$  (ص ۷۸)

(ب) ۴ (ص ۶۳)

(الف)  $p - 1$  (ص ۵۳) **۱۹**

**۲۰** ابتدا مستطیل موردنظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می‌کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری دست‌کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است با توجه به قضیه فیثاغورس داریم: (ص ۸۴)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

$|\overline{A \cup B}| = |s| - |A \cup B| = |s| - |A| - |B| + |A \cap B|$  **۲۱**

$|s| = 630, |A| = 210, |B| = 126, |A \cap B| = 42 \Rightarrow |\overline{A \cup B}| = 336$  (ص ۸۳)

**۲۲** فرض کنیم هر سطر نشان‌دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرسه‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین  $3 \times 3$  زیر هر مدرسه در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد. (ص ۶۲)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$  **۲۳**

$x_3 = 3$

$x_2 \geq 3, x_5 \geq 5 \xrightarrow{x_2=4, x_3=y_2+3, x_5=y_5+5} x_1 + x_2 + 3 + y_2 + 3 + y_5 = 5$

$x_i \geq 0, y_i \geq 0 \Rightarrow \binom{5+4-1}{4-1} = 56$  (ص ۷۱)

$4! \times 2^4 = 384$  (ص ۷۱) **۲۴**

**۲۵** ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک را لانه در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری ( $4 < 5$ ) حداقل یک لانه (مثلث وجود دارد که دو نقطه (کبوتر) در آن قرار می‌گیرد. (ص ۸۲)

**۲۶** اگر فرض کنیم  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  و  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_v\}$  برای تعریف  $f$  روی هر عضو  $A$ ،  $v$  انتخاب

داریم، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل تابع‌های یک به یک برابر است با  $\frac{v!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$  (اگر دانش‌آموزی از فرمول

$(v)_5 = \frac{v!}{2!}$  پاسخ دهد نمره کامل داده شود.) (ص ۷۸)

**۲۷** متعامدند چون در مربع ترکیبی عدد تکراری در انطباق آنها نداریم. (ص ۶۴)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۲۸

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{9}{2} = 36 \Rightarrow 36 + 10 = 46$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10 \text{ (ص ۷۱)}$$

۲۹

۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم را به چند طریق می‌توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد به طوری که همواره دانش‌آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند. (با توجه به باز پاسخ بودن سؤال، به پاسخ‌های صحیح دیگر نمره داده شود). (ص ۷۱)

$$\frac{45!}{8! \times 10! \times 12! \times 15!} \text{ در صورتی که جواب را به فرم } \binom{45}{8} \times \binom{37}{10} \times \binom{27}{12} \times \binom{15}{15} \text{ (ص ۵۹)}$$

۳۱

تعداد کیبوترها = ۵۰۵ و تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته  $\times$  تعداد ماه‌های سال.  $n = 7 \times 12 = 84$  طبق تعمیم اصل لانه کیبوتری:

$$\text{تعداد کیبوترها} = kn + 1 \xrightarrow{n=84} 505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لاقط ۷ کیبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (ص ۸۳)

۳۲

این سؤال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضو می‌توان نوشت. (ص ۷۸)

$$3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 243 - 93 = 150$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

۳۳ (الف)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 34 & 41 & 13 & 22 \\ \hline 22 & 13 & 41 & 34 \\ \hline 13 & 22 & 34 & 41 \\ \hline 41 & 34 & 22 & 13 \\ \hline \end{array}$$

(ب)

متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۴)

$$x_2 = 2, x_5 \geq 3 \Rightarrow x_5 = y_5 + 3$$

۳۴

$$x_1 + x_2 + 2 + x_3 + 3 + y_5 + x_6 = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + y_5 + x_6 = 5 \Rightarrow j = \binom{9}{4} \text{ (ص ۷۱)}$$

$$\frac{9!}{2! \times 2!} \text{ (ص ۵۸)}$$

۳۵

اداره آموزش دوره دوم متوسطه نظری مازندران



الف)  $۶! \times ۶!$

ب)  $۶! \times ۵!$  (ص ۵۷)