

۱) اگر در ماتریس $A = [2i + j]_{n \times n}$ مجموع درایه‌های ستون سوم برابر ۶۰ باشد، مجموع درایه‌های سطر چهارم کدام است؟

- ۴۸ ① ۵۵ ② ۶۱ ③ ۶۹ ④

۲) اگر $A = [a_{ij}]_{v \times v}$ و $a_{ij} = ij$ باشد، آنگاه مجموع تمام درایه‌های ماتریس A کدام است؟

- ۴۴۱ ① ۱۰۱۵ ② ۷۸۴ ③ ۸۱۹ ④

۳) اگر A و B ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشد طوری که $B^3 = I$ و $AB = B^2A$ ، حاصل ماتریس $(AB^2)^2$ کدام است؟

- A ① A^2 ② B ③ I ④

۴) اگر $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ و $a_{ij} = ij$ و مجموع تمام درایه‌های ماتریس A برابر ۱۲۹۶ باشد، آنگاه n کدام است؟

- ۹ ① ۸ ② ۷ ③ ۶ ④

۵) اگر $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه حاصل $a + 2b + 3c + 4d$ چقدر است؟

- ۳۰ ① ۳۱ ② ۳۲ ③ ۳۳ ④

۶) چند ماتریس اسکالر مانند A وجود دارد به طوری که حاصل ضرب درایه‌های غیر صفر آن ۶۴ و مجموع تمام درایه‌های آن ۱۲ باشد؟

- چنین ماتریسی وجود ندارد. ① ۱ ② ۲ ③ بیش از ۲ ④

۷) ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & b \\ a & 1 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ b & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر DC یک ماتریس قطری باشد،

جمع درایه‌های روی قطر اصلی AB کدام است؟

- ۴۰ ① ۴۳ ② ۴۵ ③ ۴۶ ④

۸) اگر برای دو ماتریس مربعی A و B تساوی‌های $AB^3 = -mB^2A$ و $3AB = -4BA$ برقرار باشند، مقدار m کدام است؟

- $\frac{64}{27}$ ① $\frac{16}{9}$ ② $-\frac{64}{9}$ ③ $-\frac{16}{9}$ ④

۹) اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ و $B - A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB + BA$ کدام است؟

- $\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$ ① $\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -8 & -10 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$ ④

۱۰) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه A^{101} کدام است؟

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ① $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ③ $-I$ ④

۱۱) برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ رابطه $A^2 = \alpha A + \beta I$ برقرار است. دوتایی (α, β) کدام است؟

- ① (۲, ۱۱) ② (۲, ۱۳) ③ (۴, ۱۱) ④ (۴, ۱۳)

۱۲) اگر $\bar{O} = A^3 - 2A^2 + 3A - 2I$ باشد آنگاه ماتریس A^4 کدام است؟

- ① $A^2 - 4A + 4I$ ② $A^2 - 4A - 4I$ ③ $A^2 + 4A + 4I$ ④ $A^2 + 4A - 4I$

۱۳) اگر $A^2 = A - 2I$ و $A^5 = \alpha A + \beta I$ باشد، حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

- ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۱۴) اگر $AB - BA = I$ باشد، حاصل $AB^2 - B^2A$ کدام است؟

- ① $2A$ ② $2B$ ③ A^2 ④ B^2

۱۵) رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ برقرار است. حاصل $\frac{x+y}{x-y}$ کدام است؟

- ① ۱۲ ② ۱۸ ③ ۱۶ ④ ۲۴

۱۶) اگر $A = \begin{bmatrix} \tan x & 1 \\ -1 & -\tan x \\ \cos^2 x & \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $A^5 - A^6 + A^7$ کدام است؟ $(x \neq \frac{k\pi}{2})$

- ① I ② $-I$ ③ $3I$ ④ $-3I$

۱۷) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A \times B \times A$ کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۱۸) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ آنگاه A^{15} کدام است؟

- ① A ② I ③ $-A$ ④ A^{15}

۱۹) اگر $A = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ 1 & -\tan x \\ \cos^2 x & \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $A^{30} + A^{20} + A^6$ کدام است؟ $(x \neq \frac{k\pi}{2})$

- ① I ② $-I$ ③ $3I$ ④ $-3I$

۲۰) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{10}$ کدام است؟

- ① ۲۰ ② ۲۵ ③ ۳۰ ④ ۳۵

۲۱) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه حاصل $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{20}$ کدام است؟

- ① $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 0 & 40 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۲۲) اگر $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} A$ باشد، و درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی باشند، کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های A کدام است؟

- ① ۶ ② ۴ ③ ۵ ④ ۸

۲۳) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد مجموع درایه‌های سطر دوم در ماتریس A^{1000} کدام است؟

- ① ۱۰۰۱ ② ۲۰۰۱ ③ ۱۰۰۰ ④ ۲۰۰۰

۲۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $(A - 2I)(A^2 + 2A + I)$ کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۱۲ ۴) -۱۲

۲۵) با توجه به رابطه $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$ ، حاصل $x + y$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۶) ماتریس $A = \begin{bmatrix} -\tan x & \frac{1}{\cos x} \\ \frac{-1}{\cos x} & \tan x \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس $A^{10} + A^7 + A^5$ کدام است؟ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$

- ۱) $2A + I$ ۲) $A - 2I$ ۳) $2A - I$ ۴) $-I$

۲۷) اگر $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 5}$ و $C = AB$ باشد، درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس C از کدام رابطه به دست می‌آید؟

- ۱) $\sum_{i=1}^4 a_{2i} b_{i3}$ ۲) $\sum_{i=1}^3 a_{2i} b_{i3}$ ۳) $\sum_{i=1}^4 a_{i2} b_{3i}$ ۴) $\sum_{i=1}^3 a_{i2} b_{3i}$

۲۸) در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A^{2n} + A^{2n+1}$ برابر ۱۴۵۸ باشد، n کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۹) در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های A^{10} کدام است؟

- ۱) 2^{10} ۲) 2^{11} ۳) 2^{12} ۴) 2^9

۳۰) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ در ماتریس A^{100} حاصل جمع درایه‌ها کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۳

۳۱) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3y & 0 \\ 0 & -3 & z+2 \end{bmatrix}$ و AB ماتریس اسکالر باشد، حاصل $x + y + z$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲) ماتریس $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ با تعریف $a_{ij} = 2i + j$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس A برابر ۴۵ باشد، آنگاه مجموع

درایه‌های سطر دوم این ماتریس کدام است؟

- ۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۳۳) اگر $[3 \ 5] \times A = [2 \ 1]$ و $[-1 \ 2] \times A = [3 \ 4]$ باشد، حاصل $[8 \ 9] \times A$ کدام است؟

- ۱) $[1 \ 9]$ ۲) $[1 \ -9]$ ۳) $[-1 \ 9]$ ۴) $[-1 \ -9]$

۳۴) در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل $A^n - A^{n-1}$ کدام است؟

- ۱) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$

۳۵) اگر برای ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه A و B روابط $AB + B = A$ و $BA + A = B$ برقرار باشد، آنگاه چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح‌اند؟

الف) $B = \bar{O}$ (ب) $B^2 = I$

ج) $AB = \bar{O}$ (د) $A^2 = \bar{O}$

ه) $B = A$

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

۳۶) معادله $\begin{bmatrix} 3 & x & -1 \\ x & 1 & 2 \\ -2 & -4 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{bmatrix} = \bar{O}$ به ازای کدام مقدار a ، ریشه مضاعف دارد؟

-۴ (۴)

۴ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

۳۷) ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ با درایه‌های $A_{ij} = \begin{cases} i^2 - j; & i > j \\ i + j; & i = j \\ j^2 - i; & i < j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 2}$ با درایه‌های $b_{ij} = ij$ مفروض‌اند. حاصل

$\sum_{k=1}^3 a_{1k} b_{k2}$ چقدر است؟

۶۴ (۴)

۴۸ (۳)

۵۲ (۲)

۴۶ (۱)

۳۸) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ و $A + 4B = O$ آنگاه حاصل $(A + 2B)(2A - B)(A + B)$ کدام است؟

\bar{O} (۴)

I (۳)

$-\frac{27}{32}A$ (۲)

$\frac{27}{32}A$ (۱)

۳۹) ماتریس‌های مربعی A و B هم‌مرتبه بوده و ماتریس $3B^2A - BA$ ماتریسی اسکالر است که مجموع تمام درایه‌هایش صفر است. ماتریس B^3A چند برابر ماتریس AB^6 است؟

۸۱ (۴)

۲۷ (۳)

۹ (۲)

۳ (۱)

۴۰) چه تعداد از گزاره‌های زیر درباره ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B درست است؟

الف) اگر ماتریس AB معلوم باشد، بی‌شمار ماتریس ممکن برای A و B وجود دارد.

ب) اگر ماتریس A^2 معلوم باشد دقیقاً یک ماتریس منحصر به فرد برای A وجود دارد.

پ) اگر ماتریس AB قطری باشد، ماتریس BA هم قطعاً قطری است.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۴۱) اگر $B = \begin{bmatrix} \circ & \tan x \\ \cot x & \circ \end{bmatrix}$ آنگاه $B^{999} + B^{1000}$ کدام است؟ (درایه‌های ماتریس B تعریف شده هستند.)

$\begin{bmatrix} \tan x & 1 \\ 1 & \cot x \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ \cot x & 1 \end{bmatrix}$ (۳)

B (۲)

I (۱)

۴۲) فرض کنید $A = [a_{ij}]_{999 \times 999}$ و $a_{ij} = \begin{cases} \circ & ; i + j \neq 1000 \\ -1 & ; i + j = 1000 \end{cases}$ در این صورت مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{1000} + A^{1001}$ چقدر است؟

-۱۰۰۱ (۴)

۱۰۰۰ (۳)

-۹۹۹ (۲)

۹۹۸ (۱)

۴۳) اگر $AB = B$ و $BA = A$ حاصل $(A + B)(A - B)$ کدام است؟

$A + B$ (۴)

$2A + 2B$ (۳)

$A - B$ (۲)

$2A - 2B$ (۱)

۴۴ اگر $A = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$ درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس A کدام است؟

- $\cos^2 \alpha$ (۴) $\frac{\sin 2\alpha}{2}$ (۳) $\sin^2 \alpha$ (۲) $\sin 2\alpha$ (۱)

۴۵ ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i; i > j \\ i + j; i = j \\ |i^2 - j^2|; i < j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ با درایه‌های $b_{ij} = ij$ مفروض‌اند. مجموع درایه‌های

سطر دوم ماتریس AB چقدر است؟

- ۱۵۰ (۴) ۱۴۰ (۳) ۱۳۵ (۲) ۱۲۵ (۱)

۴۶ اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و $AB = B$ و $BA = A$ باشد، آنگاه حاصل $(A + B)^3$ کدام است؟

- $4(A + B)$ (۴) $3(A + B)$ (۳) $2(A + B)$ (۲) $A + B$ (۱)

۴۷ اگر $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $B^2(B + I)^6$ کدام است؟

- $32B$ (۴) $64B$ (۳) $6B$ (۲) B (۱)

۴۸ برای ماتریس مربعی A داریم $A^2 = A$ ، حاصل $A(7A - 5I)^{20}$ کدام است؟

- $2^{21}I$ (۴) $2^{21}A$ (۳) $2^{20}I$ (۲) $2^{20}A$ (۱)

۴۹ ماتریس مربعی A طوری مفروض است که $A^3 = \bar{O}$ ، حاصل $A(3I - A)^5$ کدام است؟

- $243I + 405A$ (۴) $243A + 405A^2$ (۳) $243A - 405A^2$ (۲) $243I - 405A$ (۱)

۵۰ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ و رابطه $(2A + B)(A - 2B) = 2(A^2 - B^2 - 2AB) + AB$ برقرار باشد، حاصل $a^2 - b^2$ کدام است؟

- ۹ (۴) ۳ (۳) ۵ (۲) ۴ (۱)

پاسخنامه تشریحی

۱ ابتدا ماتریس A را می‌سازیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۱)

$$A = [2i + j]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2+2 & 2+3 & \dots & 2+n \\ 4+1 & 4+2 & 4+3 & \dots & 4+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 2n+n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

مجموع درایه‌های ستون سوم = $60 \rightarrow (2+4+\dots+2n) + \underbrace{(3+3+\dots+3)}_{n \text{ بار}} = 60$

$$2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n = 60 \rightarrow n^2 + 4n - 60 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -10 \text{ غرض} \end{cases}$$

مجموع درایه‌های سطر چهارم = $(8+8+8+8+8+8) + (1+2+3+4+5+6) = 48 + 21 = 69$

۲ ماتریس A طبق تعریف به صورت زیر است: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times 4 & 2 \times 5 & 2 \times 6 & 2 \times 7 \\ 3 & 3 \times 2 & 3 \times 3 & 3 \times 4 & 3 \times 5 & 3 \times 6 & 3 \times 7 \\ 4 & 4 \times 2 & 4 \times 3 & 4 \times 4 & 4 \times 5 & 4 \times 6 & 4 \times 7 \\ 5 & 5 \times 2 & 5 \times 3 & 5 \times 4 & 5 \times 5 & 5 \times 6 & 5 \times 7 \\ 6 & 6 \times 2 & 6 \times 3 & 6 \times 4 & 6 \times 5 & 6 \times 6 & 6 \times 7 \\ 7 & 7 \times 2 & 7 \times 3 & 7 \times 4 & 7 \times 5 & 7 \times 6 & 7 \times 7 \end{bmatrix}$$

یعنی سطر i ام، i برابر سطر اول است. مجموع درایه‌های سطر اول با $\frac{7 \times 8}{2}$ یعنی ۲۸ برابر است. پس:

$$A \text{ درایه‌های } = 1 \times 28 + 2 \times 28 + \dots + 7 \times 28 \\ = 28(1 + 2 + \dots + 7) = 28 \times 28 = 784$$

۳ با توجه به فرض سوال داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۳)

$$(AB^T)^T = AB^T AB^T = AB^T(AB)B = AB^T(B^T A)B$$

می‌دانیم $B^T = I$ می‌باشد پس $B^T = B$ می‌باشد.

$$= AB^T AB = AB(AB) = AB(B^T A) = AB^T A = AIA = A^T$$

۴ مجموع درایه‌های سطر اول برابر $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ است. همچنین درایه‌های سطر k ام، k برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۴)

$$A \text{ درایه‌های } = \frac{n(n+1)}{2} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + \dots + n \times \frac{n(n+1)}{2} = (1+2+\dots+n) \frac{n(n+1)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

پس:

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = 1296 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 36 \Rightarrow n = 8$$

۵ جمع ماتریسی سمت راست را انجام داده و درایه‌های متناظر در دو طرف را با هم برابر قرار می‌دهیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+b+c+d & a-b+c+d \\ a+b-c+d & a+b+c-d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+b+c+d = 5 \\ a-b+c+d = 6 \\ a+b-c+d = 7 \\ a+b+c-d = 10 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2(a+b+c+d) = 28 \Rightarrow a+b+c+d = 14$$

حال معادله آخر را با هر کدام از معادلات بالا حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a+b+c+d = 14 \\ -a+b+c+d = 5 \end{cases} \Rightarrow 2a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$b = 4, c = \frac{7}{2}, d = 2$$

در نتیجه:

$$a + 2b + 3c + 4d = \frac{9}{2} + 8 + \frac{21}{2} + 8 = 31$$

۶ ماتریس اسکالر A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۶)

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم:

$$x: \begin{cases} x^n = 64 \xrightarrow{\text{گویا } x} \text{طبیعی است} \\ nx = 12 \end{cases} \Rightarrow (x=4, n=3) \text{ یا } (x=2, n=6)$$

پس دو حالت ممکن وجود دارد.

ماتریس DC را تشکیل می‌دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$D \times C = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ b & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 2 - 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ 0 = b - 12 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 40 \end{bmatrix}$$

$AB = 45$ = مجموع درایه‌های روی قطر اصلی AB

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

طبق فرض داریم:

$$3AB = -4BA \Rightarrow AB = -\frac{4}{3}BA$$

$$AB^T = AB \cdot B^T = -\frac{4}{3}BA \cdot B^T = -\frac{4}{3}B \cdot AB \cdot B^T = -\frac{4}{3}B \cdot (-\frac{4}{3}BA) \cdot B^T = \frac{16}{9}B^T \cdot AB = \frac{16}{9}B^T \cdot (-\frac{4}{3}BA) = -\frac{64}{27}B^T A$$

$$\Rightarrow AB^T = -\frac{64}{27}B^T A \quad (1)$$

از طرفی طبق مسئله: $AB^T = -mB^T A \quad (2)$

بنابراین از دو رابطه (1) و (2) نتیجه می‌شود:

$$m = \frac{64}{27}$$

عبارت موردنظر در توان دوم ماتریس $B - A$ وجود دارد: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$(B - A)^2 = (B - A) \cdot (B - A) = B^2 - BA - AB + A^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - AB - BA + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -15 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= -AB - BA + \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB + BA = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -8 & -10 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های A^T و A^3 را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^T A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$\rightarrow A^3 = -I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳۳}} A^{99} = -I \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } A^2} A^{101} = -A^2$$

ماتریس A^2 را یافته و در رابطه داده شده قرار می‌دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

روش اول:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha + \beta & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 13 \end{cases}$$

روش دوم: (نکته) هر ماتریس 2×2 مانند A در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (a+d)A + |A|I = \bar{O}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - 2A - 13I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = 2A + 13I \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$$

طبق فرض داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲**

$$A^2 - 2A^2 + 2A - 2I = \bar{O} \xrightarrow{\text{طرفین در } A \text{ ضرب شود}} A^4 - 2A^3 + 2A^2 - 2A = \bar{O}$$

$$\xrightarrow{A^2 = 2A^2 - 2A + 2I} A^4 - 2(2A^2 - 2A + 2I) + 2A^2 - 2A = \bar{O}$$

$$\rightarrow A^4 - 4A^2 + 4A - 4I + 2A^2 - 2A = \bar{O} \rightarrow A^4 - A^2 + 4A - 4I = \bar{O}$$

$$\rightarrow A^4 = A^2 - 4A + 4I$$

از روی ماتریس A^2 ، ماتریس A^4 را می‌یابیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳**

$$A^4 = A - 2I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 2} A^4 = A^2 - 4A + 4I = (A - 2I) - 4A + 4I$$

$$\rightarrow A^4 = -3A + 4I \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A} A^5 = -3A^2 + 4AI = -3(A - 2I) + 4A$$

$$\rightarrow A^5 = -3A + 6I + 4A$$

$$\rightarrow A^5 = -A + 6I = \alpha A + \beta I \rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 6 \end{cases} \rightarrow \alpha + \beta = 5$$

فرض سؤال را از سمت راست و از سمت چپ در ماتریس B ضرب می‌کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴**

$$AB - BA = I \xrightarrow{\text{طرفین از سمت راست}} AB^2 - BAB = B$$

در B ضرب شود

$$\xrightarrow{+} AB^2 - B^2A = 2B$$

$$AB - BA = I \xrightarrow{\text{طرفین از سمت چپ}} BAB - B^2A = B$$

در B ضرب شود

ضرب دو ماتریس فوق را انجام می‌دهیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵**

$$\begin{bmatrix} x & 2 \\ y & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 2y & xy + 2x \\ xy + 2y & y^2 + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} xy + 2x = 6 \\ xy + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 2(x - y) = 1 \rightarrow x - y = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 9 \\ y^2 + 2x = 4 \end{cases} \rightarrow x^2 + 2y - (y^2 + 2x) = 5 \rightarrow (x^2 - y^2) + 2(y - x) = 5$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y) + 2(y - x) = 5 \rightarrow (x - y)(x + y - 2) = 5 \xrightarrow{x - y = \frac{1}{2}} \frac{1}{2}(x + y - 2) = 5 \rightarrow x + y - 2 = 10 \rightarrow x + y = 12$$

در نتیجه:

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$$

ماتریس A^2 را می‌سازیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶**

$$A^2 = \begin{bmatrix} \tan x & 1 \\ -\frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tan x & 1 \\ -\frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} & \tan x - \tan x \\ -\frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{\cos^2 x} & -\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \tan^2 x - (1 + \tan^2 x) & 0 \\ 0 & -(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^5 - A^6 + A^7 = (A^2)^2 \times A - (A^2)^3 + (A^2)^4 \times A = A + I - A = I$$

ماتریس A باید 2×2 باشد تا ضرب قابل انجام باشد. با فرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داریم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**

$$[-1 \ 1] \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [2 \ 4] \rightarrow [-a + c \ -b + d] = [2 \ 4] \rightarrow -a + c = 2, \ -b + d = 4$$

$$[2 \ 3] \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [1 \ -3] \rightarrow [2a + 3c \ 2b + 3d] = [1 \ -3] \rightarrow 2a + 3c = 1, \ 2b + 3d = -3$$

$$\begin{cases} -a + c = 2 \\ 2a + 3c = 1 \end{cases} \rightarrow c = 1, a = -1$$

$$\begin{cases} -b + d = 4 \\ 2b + 3d = -3 \end{cases} \rightarrow d = 1, b = -3$$

$$[-1 \ -2] \times A = [-1 \ -2] \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [-1 \ 1]$$

۱۸) ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

بنابراین:

$$A^{15} = A^{\overbrace{2 \times 4 \times 5 \times \dots \times 15}^{\text{زوج: } k}} = (-I)^k = I$$

۱۹) از اتحادهای مثلثاتی می‌دانیم $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$ ، پس خواهیم داشت: ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$\Rightarrow A^{20} + A^{20} + A^{20} = (-I)^{10} + (-I)^{10} + (-I)^{20} = -I$$

۲۰) سعی می‌کنیم قانونی برای A^n به دست بیاوریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1 \\ -1 & -(1-1) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2 \\ -2 & -(2-1) \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 3 \\ -3 & -(3-1) \end{bmatrix}$$

طبق استدلال استقرایی می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$A^n = \begin{bmatrix} n+1 & n \\ -n & -(n-1) \end{bmatrix}$$

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ -10 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3+\dots+11 & 1+2+\dots+10 \\ -1-2-\dots-10 & -1-2-\dots-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13 \times 10}{2} & \frac{10 \times 11}{2} \\ -\frac{10 \times 11}{2} & \frac{-9 \times 10}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 55 \\ -55 & -45 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 20$$

۲۱) ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

پس نتیجه می‌شود:

$$A^n = \begin{cases} A & , n = \text{فرد} \\ I & , n = \text{زوج} \end{cases}$$

بنابراین:

$$A + A^2 + \dots + A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۲) ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و مثبت بنا به فرض در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند: ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2b & a \\ c+2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$$

اگر $c = 2b$ و $a = b + d$ باشد. تساوی اخیر همواره برقرار است پس $A = \begin{bmatrix} b+d & b \\ 2b & d \end{bmatrix}$ و جمع درایه‌های آن $4b + 2d$ می‌شود که کم‌ترین مقدار آن به ازای $b = d = 1$ عدد ۶ می‌شود.

۲۳) ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به نظر می‌رسد اگر ادامه دهیم، آنگاه:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & x \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{1000} = \begin{bmatrix} 1 & 1000 & x \\ 0 & 1 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{1000} = \text{جمع درایه‌های سطر دوم} = 1001$$

۲۴ اگر A^3 را محاسبه کنیم، نتیجه می‌گیریم $A^3 = \bar{O}$ ، بنابراین داریم: ۱ ۲ ۳ ۴

$$(A - 2I)(A^2 + 2A + I) = A^3 + 2A^2 + A - 2A^2 - 4A - 2I$$

$$= -3A - 2I = -3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y & xy + x \\ xy + y & y^2 + x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 18 \\ y^2 + x = 8 \end{cases} \rightarrow (x^2 + y) - (y^2 + x) = 18 - 8 \Rightarrow (x^2 - y^2) - (x - y) = 10$$

$$(x - y)(x + y - 1) = 10 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy + x = 12 \\ xy + y = 10 \end{cases} \rightarrow (xy + x) - (xy + y) = 12 - 10 = 2 \Rightarrow x - y = 2 \quad (2)$$

(1), (2) $\rightarrow 2(x + y - 1) = 10 \Rightarrow x + y - 1 = 5 \Rightarrow x + y = 6$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۶ ابتدا ماتریس A را می‌سازیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -\tan x & \frac{1}{\cos x} \\ -1 & \tan x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\tan x & \frac{1}{\cos x} \\ -1 & \tan x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} & -\frac{\tan x}{\cos x} + \frac{\tan x}{\cos x} \\ \frac{\tan x}{\cos x} - \frac{\tan x}{\cos x} & -1 + \tan^2 x \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\begin{bmatrix} \tan^2 x - 1 - \tan^2 x & 0 \\ 0 & -1 - \tan^2 x + \tan^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^5 = (-I)^5 + A^4 + A^3 = (-I)^5 + (-I)^4 \times A + (-I)^3 \times A$$

$$= (-I)^5 + (-I)^4 \times A + (-I)^3 \times A = -I - I \times A + I \times A = -I - A + A = -I$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۷

$$\underbrace{\begin{bmatrix} - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}}_{A \quad 4 \times 3} \times \underbrace{\begin{bmatrix} - & - & b_{13} & - & - \\ - & - & b_{23} & - & - \\ - & - & b_{33} & - & - \end{bmatrix}}_{B \quad 3 \times 5} = \underbrace{\begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & c_{13} & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{bmatrix}}_{C \quad 4 \times 5}$$

می‌دانیم c_{13} از ضرب درایه‌های سطر دوم A در ستون سوم B بدست می‌آید و در ماتریس A درایه‌های سطر دوم به شکل a_{1i} و در ماتریس B درایه‌های ستون سوم به شکل b_{i3} می‌باشد.

پس c_{13} به صورت $\sum_{i=1}^3 a_{1i} b_{i3} = a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} + a_{13} b_{33}$ بدست می‌آید.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۸ ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3I$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، آنگاه $A^n = \begin{cases} 3^k I, n = 2k \\ 3^k A, n = 2k + 1 \end{cases}$ پس:

$$A^{2n} + A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 3^{2n} & 0 \\ 0 & 3^{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3^{2n+1} & 0 \\ 0 & 3^{2n} \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 3 \times 3^{2n} + 3^{2n+1} = 2 \times 3^{2n+1}$$

$$\Rightarrow 2 \times 3^{2n+1} = 1458 \Rightarrow 3^{2n+1} = 729 = 3^6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۹ ابتدا ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2A \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4A$$

پس $A^2 = 2^1 A$ و $A^3 = 2^2 A$ به استقرا نتیجه می‌گیریم $A^n = 2^{n-1} A$ داریم:

$$A^{10} = 2^9 A \Rightarrow A^{10} \text{ مجموع درایه‌های } = 2^9 (A) = 2^9 \times 2^3 = 2^{12}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

اگر ماتریس‌های A^2 و A^3 را به دست آوریم و به استقرا نتیجه می‌گیریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & -100 & 100 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3y & 0 \\ 0 & -3 & z+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3x & x(z+2) \\ 0 & 3y & 0 \\ 3y-3z & 3yz-3 & z+2 \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر است، بنابراین:

$$\begin{cases} 3 = 3y = z + 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \\ -3x = x(z+2) = 3y - 3z = 3yz - 3 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

پس: $x + y + z = 2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$A = [2i + j]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2+2 & 2+3 & \dots & 2+n \\ 4+1 & 4+2 & 4+3 & \dots & 4+n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2n+1 & & 2n+3 & \dots & 2n+n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$A \text{ مجموع درایه های ستون سوم} = 45 \Rightarrow 2(1+2+\dots+n) + \underbrace{(3+\dots+3)}_{n \text{ تا سطر}} = 45$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n = 45 \Rightarrow n^2 + 4n = 45 \Rightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \rightarrow \begin{cases} n = -9 & \text{غ قی} \\ n = 5 & \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه های سطر دوم} = 2(2+2+\dots+2) + (1+2+3+4+5) = 20 + \frac{5 \times 6}{2} = 35$$

ماتریس A باید 2×2 باشد تا ضرب قابل انجام باشد. بنابراین فرض می کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [2 \ 1] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [2a+c \ 2b+d] = [3 \ 5] \rightarrow \begin{cases} 2a+c=3 \\ 2b+d=5 \end{cases}$$

$$[3 \ 4] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [3a+4c \ 3b+4d] = [-1 \ 2] \rightarrow \begin{cases} 3a+4c=-1 \\ 3b+4d=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2a+c=3 \\ 3a+4c=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{5} \\ c = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2b+d=5 \\ 3b+4d=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = \frac{18}{5} \\ d = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow [8 \ 9] \begin{bmatrix} \frac{13}{5} & \frac{18}{5} \\ -\frac{11}{5} & -\frac{11}{5} \end{bmatrix} = [1 \ 9]$$

ماتریس های A^2 و A^3 را به دست می آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2^2-1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 2^3-1 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 1 \end{bmatrix}$ می شود.

$$A^n - A^{n-1} = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1}-1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n-2^{n-1} & 0 \\ 2^n-2^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$$

$$A^n - A^{n-1} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

از روابط داده شده به صورت زیر استفاده می کنیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$\begin{cases} AB + B = A \rightarrow AB + BA + B + A = A + B \Rightarrow AB + BA = \bar{O} \quad (1) \\ BA + A = B \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \times (BA + A) = A \times B \Rightarrow ABA + A^2 = AB \rightarrow A^2 - BA = AB - A^2 \Rightarrow 2A^2 = AB + BA \quad (2) \\ (AB + B) \times A = A \times A \Rightarrow ABA + BA = A^2 \end{cases}$$

مورد (د) صحیح است $\rightarrow 2A^2 = \bar{O} \Rightarrow A^2 = \bar{O}$

مورد (ج) صحیح است $\rightarrow AB + B = A \Rightarrow A \times (AB + B) = A \times A \Rightarrow A^2 B + AB = A^2 \Rightarrow \bar{O} B + AB = \bar{O} \Rightarrow AB = \bar{O}$

مورد (ه) صحیح است $\rightarrow AB + B = A \Rightarrow \bar{O} + B = A \Rightarrow B = A$

اگر $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، شرایط مسئله برقرار است ولی هیچ کدام از روابط $B^2 = I$ و $B = \bar{O}$ برقرار نیستند.

1 2 3 4 36

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 2 \\ x & 1 & 2 \\ -2 & -4 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 - 1 & 2x - 8 & 4x - 1 \\ x^2 - 1 & 2x - 8 & 4x - 1 \\ x^2 - 1 & 2x - 8 & 4x - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 + 2ax - 8a - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (2a - 4)x - 8a = 0$$

$$\Delta = (2a - 4)^2 - 4(1)(-8a) = 0 \Rightarrow 4a^2 - 16a + 16 + 32a = 0 \Rightarrow 4a^2 + 16a + 16 = (2a + 4)^2 = 0 \Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2$$

1 2 3 4 37

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 3}, a_{ij} = \begin{cases} i^2 - j & i > j \\ i + j & i = j \\ j^2 - i & i < j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1^2 - 1 = 0 \\ a_{12} = 1^2 - 2 = -1 \\ a_{13} = 1^2 - 3 = -2 \\ a_{21} = 2^2 - 1 = 3 \\ a_{22} = 2^2 - 2 = 2 \\ a_{23} = 2^2 - 3 = 1 \end{cases}$$

$$B = [b_{ij}], b_{ij} = ij \Rightarrow \begin{cases} b_{12} = 1 \times 2 = 2 \\ b_{22} = 2 \times 2 = 4 \\ b_{32} = 3 \times 2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^3 a_{1k} b_{k2} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} = 0 \times 2 + (-1) \times 4 + (-2) \times 6 = -16$$

تذکر: نماد \sum یعنی مجموع

طبق فرض داریم: 1 2 3 4 38

$$A + 4B = \bar{O} \Rightarrow A = -4B$$

در عبارت خواسته شده به جای A مساوی آن $-4B$ را قرار می دهیم.

$$? = (-4B)(-2B)(-9B)(-3B) = +216B^4$$

حال لازم است ماتریس B^4 را به دست آوریم.

$$B^4 = \left(-\frac{1}{4}A\right)^4 = \frac{1}{256}A^4(I)$$

از طرفی برای ماتریس A داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I(II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow ? = \frac{216}{256}A^4 \times A = \frac{-216}{32}A$$

با استفاده از فرض سؤال می فهمیم که ماتریس مورد نظر ماتریس صفر است. پس: 1 2 3 4 39

$$3B^2 A - BA = \bar{O} \Rightarrow 3B^2 A = BA \quad (1)$$

$$\begin{aligned} B^2 A &= B^2(BA) \stackrel{(1)}{=} B^2(3B^2 A) = 3B^4 A = 3B^2(BA) \\ &\stackrel{(1)}{=} 3B^2(3B^2 A) = 9B^4 A = 9B^2(BA) \\ &\stackrel{(1)}{=} 9B^2(3B^2 A) = 27B^4 A \end{aligned}$$

بررسی گزاره ها: 1 2 3 4 40

الف) اگر فرض کنیم $A = kI$ و $B = \frac{1}{k}(AB)$ ، آنگاه به ازای همه مقادیر حقیقی و غیر صفر k ، A و B وجود دارد پس گزاره الف صحیح است.

ب) برای ماتریس A^2 ، اگر A جواب باشد $(-A)$ نیز جواب است. پس گزاره ب نادرست است.

پ) مثال نقض فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ در این صورت:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$$

ماتریس AB قطری است ولی BA قطری نمی باشد پس گزاره پ نادرست است.

ماتریس B^T را به دست می آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۱

$$B^T = \begin{bmatrix} \circ & \tan x \\ \cot x & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \tan x \\ \cot x & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B^n = I; \text{ عدد طبیعی زوج } n \\ B^n = B; \text{ عدد طبیعی فرد } n \end{cases}$$

$$B^{999} + B^{1000} = B + I = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ \cot x & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس A به صورت زیر است: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۲

$$A = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \dots & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \dots & -1 & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & \circ & \dots & \circ & \circ \end{bmatrix}_{999 \times 999}$$

یعنی یک ماتریس مربعی مرتبه ۹۹۹ که قطر فرعی آن همگی عدد -1 و بقیه درایه ها همگی صفرند. در چنین ماتریسی می توان نشان داد به ازای n های زوج برابر I و به ازای n های فرد برابر A است، پس:

$$A^{1000} + A^{1001} = I + A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & 1 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ & \circ & \dots & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \dots & -1 & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & \circ & \dots & \circ & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \dots & -1 \\ \circ & 1 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \circ & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

در ماتریس مربعی $I + A$ (که از مرتبه زوج ۹۹۹ است)، درایه های قطر اصلی، همگی برابر ۱، فقط درایه وسطی برابر صفر است، بنابراین مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس $I + A$ برابر ۹۹۸ است.

با توجه به فرض سؤال داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۳

$$AB = B \xrightarrow{A=BA} \underbrace{BAB}_B = B \rightarrow B^T = B$$

$$BA = A \xrightarrow{B=AB} \underbrace{ABA}_A = A \rightarrow A^T = A$$

$$(A+B)(A-B) = \underbrace{A^T}_A - \underbrace{AB}_B + \underbrace{BA}_A - \underbrace{B^T}_B = 2A - 2B$$

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ، ماتریس A^T را به دست می آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۴

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha & \cos^2 \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ \cos^2 \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) & \cos \alpha \sin \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) & \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} = A$$

$$\rightarrow A^T = A \rightarrow A^{1^\circ} = A \rightarrow \text{درایه سطر اول و ستون دوم} = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴۵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن درایه های سطر دوم AB ، کافیه سطر دوم A را در ستون های ۱ تا ۳ ماتریس ضرب کنیم:

$$AB = [25 \quad 50 \quad 75] \Rightarrow \text{مجموع} = 150$$

۴۶) ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$AB = B \quad (1) \quad , \quad BA = A \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = B \xrightarrow{(2)} (BA)B = B \xrightarrow{(1)} BB = B \Rightarrow B^2 = B \\ BA = A \xrightarrow{(1)} (AB)A = A \xrightarrow{(2)} AA = A \Rightarrow A^2 = A \end{cases}$$

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + B + A + B = 2(A + B)$$

$$(A + B)^3 = (A + B)^2(A + B) = 2(A + B)(A + B)$$

$$= 2(A + B)^2 = 4(A + B)$$

توجه: اگر $A = B = I$ باشد حاصل برابر با AI است و فقط گزینه‌ی «۴» درست است.

۴۷) ۱ ۲ ۳ ۴ با کمی تحقیق می‌بینیم که $B^2 = B$ ، پس $B^n = B$ در حالت کلی داریم:

$$(B + I)^6 = \binom{6}{0} B^6 + \binom{6}{1} B^5 + \binom{6}{2} B^4 + \dots + \binom{6}{6} I$$

$$= \binom{6}{0} B + \binom{6}{1} B + \binom{6}{2} B + \dots + \binom{6}{5} B + I$$

$$= \left(\binom{6}{0} + \dots + \binom{6}{5} \right) B + 6I = (2^6 - 1)B + 6I = 63B + I$$

$$B^2 = B \Rightarrow B^2(B + I)^6 = B(63B + I) = 63B^2 + B = 63B + B = 64B$$

۴۸) ۱ ۲ ۳ ۴ برای عبارت خواسته شده سعی می‌کنیم الگویی به دست بیاوریم:

$$A(\nu A - \delta I) = \nu A^2 - \delta A \stackrel{A^2=A}{=} \nu A - \delta A = 2A \quad (1)$$

$$A(\nu A - \delta I)^2 = A(\nu A - \delta I)(\nu A - \delta I) \stackrel{(1) \text{ از}}{=} 2A(\nu A - \delta I) \stackrel{(1) \text{ از}}{=} 2 \times 2A = 4A \quad (2)$$

$$A(\nu A - \delta I)^3 = A(\nu A - \delta I)^2(\nu A - \delta I) \stackrel{(2) \text{ از}}{=} 4A(\nu A - \delta I) \stackrel{(1) \text{ از}}{=} 4 \times 2A = 8A$$

به استقرا ثابت می‌شود:

$$A(\nu A - \delta I)^n = 2^n A$$

۴۹) ۱ ۲ ۳ ۴

اولاً چون $IA = AI$ می‌باشد، پس می‌توانیم از اتحادها استفاده کنیم. ضمناً چون $A^n = \bar{O}$ ، پس به‌ازای $n \geq 3$ داریم:

$$(3I - A)^5 = (3I)^5 - \binom{5}{1} (3I)^4 A + \binom{5}{2} (3I)^3 (A)^2 - \binom{5}{3} (3I)^2 (A)^3 + \dots$$

بقیه جملات دارای A^3 و A^4 و A^5 هستند که حاصل آن‌ها حتماً ماتریس صفر است.

$$\Rightarrow (3I - A)^5 = 243I - 405A + 270A^2$$

$$? = A(243I - 405A + 270A^2) = 243A - 405A^2 + 270A^3 \stackrel{A^3=\bar{O}}{=} 243A - 405A^2$$

۵۰) ۱ ۲ ۳ ۴ ضرب ماتریسی عبارت سمت چپ تساوی را انجام می‌دهیم:

$$2A^2 - 2B^2 - 4AB + BA = 2(A^2 - B^2 - 2AB) + AB \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2b - 15 & 0 \\ ab - 20 & -3a + 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b - 3a = 15 \\ -10 + 2a = -3a + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 9$$

پاسخنامه کاپری

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴

۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴

۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴

۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴