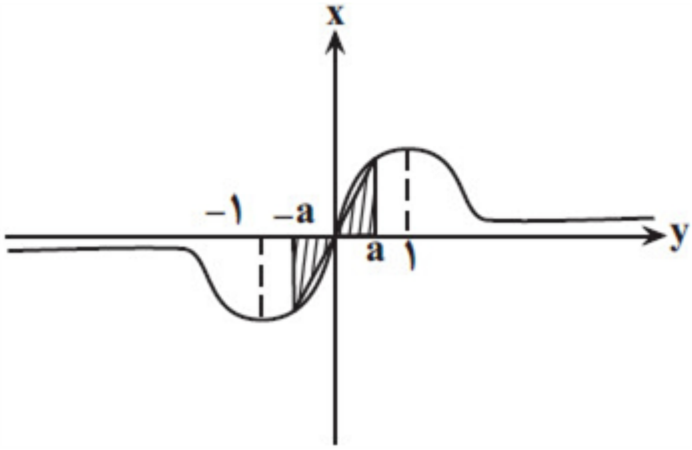
نام و نام خانوادگی : **عنوان آزمون :** احتمالی کنکوری

پایه تحصیلی : **زمان آزمون :**

نام دبیر : **تاریخ برگزاری**

۱) اگر $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 4^-} \dfrac{a\,[x]-12}{4-x} = +\infty$ باشد، حاصل $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{a}-3x\right]$ را حساب کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

۲) نمودار تابع $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ به صورت زیر است. آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت ناحیه هاشورخورده مقابل که شامل دو مثلث است، در لحظه‌ای که $a=\dfrac{1}{2}$ می‌شود، کدام است؟



۱) $\dfrac{19}{16}$ ۲) $\dfrac{16}{25}$ ۳) $\dfrac{19}{32}$ ۴) $\dfrac{32}{25}$

۳) اگر $g(x)$ یک تابع خطی غیرثابت باشد به طوری‌که $g(4)=2$ و داشته باشیم: $f(x)=\dfrac{x^3-5x+2}{x-2}$، $(\text{fog})(5)=8$ و $(g^{-1}\text{o}f^{-1})(20)=11$، آنگاه آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع fog در نقطهٔ $x=8$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۸

۴) از معادلهٔ $\operatorname{Sin}3x+\operatorname{Cos}2x=0$، اختلاف بیشترین و کم‌ترین جواب در بازهٔ $(0,2\pi)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{7\pi}{5}$ ۲) $\dfrac{8\pi}{5}$ ۳) $\dfrac{9\pi}{5}$ ۴) $\dfrac{6\pi}{5}$

۵) تابع $f(x)=|x|\left|\dfrac{1}{3}x^2+x+1\right|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۱

Scanned with CamScanner

۶ اگر تابع $f(x) = -۳\left(\frac{۴a+۱}{a+۲}\right)^{۲-x}$ اکیداً نزولی باشد، مجموعه مقادیر ممکن برای $\left[\frac{a}{۲}\right]$ چند عضو دارد؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷ اگر نقطهٔ $A(۲,۵)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطهٔ متناظر با A روی نمودار $y=۳f(۲x-۱)+۴$ را به دست آورید.

۸ اگر نقطهٔ $A(-۲,۵)$ روی نمودار $y=۲f(x-۱)+۳$ باشد، آنگاه نقطهٔ متناظر با A روی نمودار $y=۳f(۲x-۱)+۲$ را به دست آورید.

۹ خطوط $x+۲y=۳$ و $۲x+ay=۶$، یکدیگر را در نقطه A و خط $x+y=۰$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه دوم واقع باشد، مقدار $\operatorname{Cotg}(B-C)$ در مثلث ABC کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۱۰ اگر $A=\left\{\frac{۱}{\sqrt{\operatorname{Log}_{۸}^{x}+۴\operatorname{Log}_{x^۳}^{۲}}} : x>۱\right\}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۱ تابع $f(x)=\frac{|x|+|a|x}{|۲x-۱|+b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر $y=\alpha$ و $y=۲\alpha$ مجانب‌های افقی و $x=\beta$ و $x=۲\beta$ مجانب‌های قائم باشند، کدام مورد برابر b است؟

۱) $-|a|$ ۲) $|a|$ ۳) $۲|a|$ ۴) $-۲|a|$

۱۲ اگر $f(x)=x^۳+۲x+۱$ و $g(x)=x-۱$ باشد، ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $\operatorname{fog}(x)=۱-۳x^۲$ در کدام فاصله قرار دارد؟

۱) $\left(\frac{۳}{۵},۱\right)$ ۲) $\left(۰,\frac{۳}{۵}\right)$ ۳) $(-۳,۰)$ ۴) $(-۵,-۳)$

۱۳ اختلاف کم‌ترین مقدار و بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{\operatorname{Cos}x}{۲+\operatorname{Sin}x}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

Scanned with CamScanner

۱۴) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<-۱\\ x & -۱\le x\le ۱\\ ۱ & x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر <u>نیست</u>، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵) نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\text{Cos}^۲x-۲\,\text{Cos}\,x\,;x\in[۰,۲\pi]$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳}\right)$ ۲) $\left(\pi,\frac{۴\pi}{۳}\right)$ ۳) $\left(\frac{۲\pi}{۳},\pi\right)$ ۴) $\left(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲}\right)$

۱۶) خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=-\frac{۱}{۳}x^۳+۲x^۲-x$ با بیش‌ترین شیب ممکن محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$ ۳) $-\frac{۷}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

۱۷) به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $(m+۲)y=\text{mx}$، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\sqrt{۱+x^۲}$ است؟

۱) $m>-۱$ ۲) $m<-۱$ ۳) $m>۱$ ۴) $m<۱$

۱۸) طول نقطهٔ عطف تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x^۳-(m-۱)x^۲+۸\text{x}$ از -۲ کم‌تر است. در مورد طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی f کدام صحیح است؟

۱) هر دو منفی‌اند.

۲) هر دو مثبت‌اند.

۳) یکی مثبت و دیگری منفی است.

۴) تابع f اکسترمم نسبی ندارد.

۱۹) اگر $f'(x)=\frac{۱}{۱+x}$ و $g(x)=f(\text{Cos}\,۲x)$ باشد، حاصل $g''\left(\frac{\pi}{۳}\right)$ چه‌قدر است؟

۱) ۶ ۲) -۶ ۳) ۸ ۴) -۸

۲۰) اگر $f(x)=\left|x^۲-۱\right|$، مشتق تابع $y=f\left(\frac{۳\text{x}}{f(x)}\right)$ به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}$ ۲) $-\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۸۰}{۳}$ ۴) $-\frac{۸۰}{۳}$

۲۱) معادلهٔ $\tan ۳\text{x}=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Scanned with CamScanner

۲۲ فرض کنید $f(x) = x^۲ - \mathrm{ax} + b$، با کدام شرط ، تابع $y = \dfrac{x}{f(x)}$ اکسترمم نسبی ندارد؟

۱) $a > ۰$ ۲) $a \leq ۰$ ۳) $b > ۰$ ۴) $b \leq ۰$

۲۳ حاصل $\lim\limits_{x \to ۰} \left(\dfrac{۱}{\cos x - ۱} - \dfrac{۱}{x} \right)$ کدام است؟

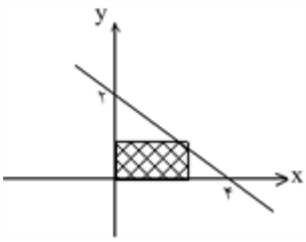
۱) $-\infty$ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) $+\infty$

۲۴ معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۲\sqrt{x}$ را در $x = ۴$ واقع بر منحنی، به‌دست آورید.

۲۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x\left|x^۲ - ۱\right|$ و دامنه‌ی $(-۲, ۲)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

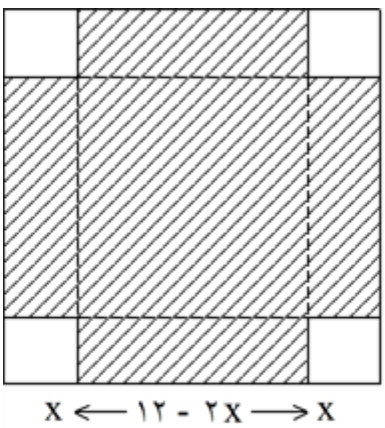
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۶ مستطیلی به محورهای x و y و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \dfrac{۴ - x}{۲}$ محدود شده است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟



۲۷ مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی $M(۱, ۲)$ یکی از نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم تابع $y = \dfrac{x^۲ + ۳}{\mathrm{ax} + b}$ باشد.

۲۸ می‌خواهیم از یک قطعه ورقه فلزی مربعی شکل
که طول هر ضلع آن ۱۲ سانتی‌متر است یک جعبه در باز بسازیم به گونه‌ای که از گوشه‌های آن مربع‌های کوچکی بریده
و صفحه را در راستای خطوط تا کنیم (شکل روبه‌رو).
حجم بزرگترین جعبه‌ای را که بدین گونه ساخته می‌شود بیابید.



۲۹ معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جواب‌های آن را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ به‌دست آورید.

$$\tan ۷x \tan ۵x = ۱$$

Scanned with CamScanner

۳۰ حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{۲x-۱}{\sqrt{۳x^۲+x+۱}}$$

۳۱ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۳} & -۳\le x\le ۰\\ \frac{-۱}{x} & x>۰\end{cases}$ را رسم نموده و دامنه وبرد آن را بنویسید.

۳۲ اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ و $g(x)=\frac{|x|-|x+۱|}{|x|+|x+۱|}$ آنگاه در برد fog مجموع اعداد صحیح کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) صفر

۳۳ معادلهٔ $\sqrt[۳]{k}=\left|\operatorname{Log}\frac{(۳-x)}{۲}\right|$ دو جواب مثبت دارد. حداکثر مقدار طبیعی برای k کدام است؟

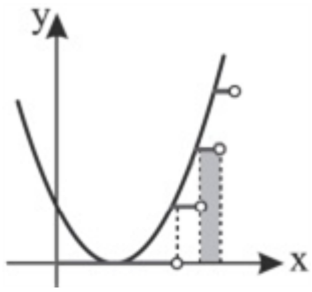
$(\operatorname{Log}۲\simeq ۰/۳, \operatorname{Log}۳\simeq ۰/۴۸)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴ اگر $f(x)=-۲|-x+۱|+۲$ و $g(x)=۲\sin x$، تابع $(fog)(x)$ در کدام بازه نزولی اکید است؟

۱) $\left[۰,\frac{\pi}{۶}\right]$ ۲) $\left[\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\right]$ ۳) $\left[\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲}\right]$ ۴) $\left[\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۶}\right]$

۳۵ نمودار تابع $y=(x-۱)^۲$ و $f(x)=\left[(x-۱)^۲\right]$ در شکل داده شده است، مساحت سایه خورده چه عددی است؟



۱) $۲(۲-\sqrt{۳})$ ۲) $۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۳۶ در سهمی $y=۲x^۲+۳x+b$، مثلثی که رئوس آن نقاط برخورد نمودار با محورهای مختصات هستند، قائم‌الزاویه است. عرض رأس سهمی کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۲}$ ۲) $\frac{-۹}{۸}$ ۳) $\frac{-۱۱}{۸}$ ۴) $\frac{-۱۳}{۸}$

۳۷ حاصل $\left(۱+\cos\frac{\pi}{۸}\right)\left(۱+\cos\frac{۳\pi}{۸}\right)\left(۱+\cos\frac{۵\pi}{۸}\right)\left(۱+\cos\frac{۷\pi}{۸}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

Scanned with CamScanner

۳۸ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^{۳}-۲x^{۲}+۲x-۱|<۲x^{۲}-۲x+۲$ بازهٔ (a,b) است. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۹ از نقطه‌ی $A(۰,۷)$ بر دو خط به معادلات $۳x+۴y=۰$ و $۴x-۳y=۰$ عمودهایی رسم می‌کنیم و پای این عمودها را E و F می‌نامیم. محیط چهارضلعی OFAE کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

۱) ۱۹/۶ ۲) ۱۸/۸ ۳) ۲۰/۲ ۴) ۱۷/۴

۴۰ عنصری رادیواکتیو در طی ۱۵ روز $\frac{۱}{۲۵}$ جرمش را از دست می‌دهد. اگر در ابتدا ۴۸۰ گرم از آن موجود باشد، بعد از گذشت چند روز فقط ۶ گرم از آن باقی خواهد ماند؟ $(\text{Log}\ ۳=۰/۴۸\ ,\ \text{Log}\ ۲=۰/۳)$

۱) ۱۴۰۲ ۲) ۱۴۲۰ ۳) ۱۴۵۰ ۴) ۱۴۲۵

۴۱ فاصله نقطه A روی خط d از دو نقطه $B(۱,-۲)$ و $C(-۳,۴)$ به ترتیب برابر با $\sqrt{۵}$ و ۱ است. اگر خط d در نقطه $x=۳$ بر منحنی $y=\text{x}f(x)$ مماس باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۳f^{۲}(x)-f(x)-۴}{x-۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۹}$ ۳) $\frac{-۱۴}{۹}$ ۴) $\frac{۷۴}{۹}$

۴۲ α و β ریشه‌های معادله $۲x^{۲}+۶x+a=۰$ هستند. اگر $\beta<\alpha<۰$ و $\alpha^{۳}+\beta^{۳}+\beta^{۲}=-\frac{۲۱}{۲}+\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) $\frac{۳۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۵

۴۳ ضرایب معادله $۲\text{k}x^{۲}-۴x-۴k-۵=۰$ صحیح هستند. اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله دارای بیشترین مقدار باشد، مقدار Δ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۲۸

۴۴ تابع خطی $f(x)=\text{a}x+b$ مفروض است. اگر مساحت بین $y=|f(x)|$ و خط $y=b$ برابر ۴ واحد باشد، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

۱) $b=|a|$ ۲) $b^{۲}=|a|$ ۳) $b=|۴\text{a}|$ ۴) $b^{۲}=|۴\text{a}|$

۴۵ حاصل جمع ریشه‌های معادله $۲(x-۲)^{۴}-۶x^{۲}+۲۴x-۲۰=۰$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

Scanned with CamScanner

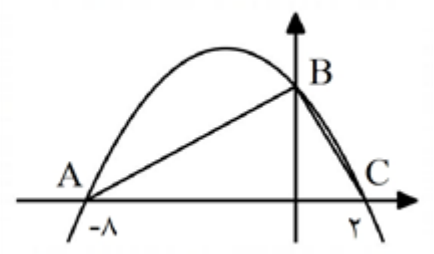
۴۶) اگر $f=\{(۰,۱),(۲,۰),(۱,۲),(۳,۱),(۵,۴)\}$ و $g=\{(۱,۰),(۰,۲),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۵)\}$ باشد، حاصل جمع عضوهای مجموعه‌ی برد تابع $\frac{g^{۲}}{f-g}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۲-
۴) ۶-

۴۷) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۳\,\text{Log}\frac{۲}{x}+۲\,\text{Log}\frac{x}{\sqrt{۲}}=۸$ باشند، حاصل $\alpha^{۶}+\beta^{۶}$ چه‌قدر با حاصل $\alpha^{۴}+\beta^{۴}$ تفاوت دارد؟

۱) ۴۵۲
۲) ۴۸۶
۳) ۵۵۲
۴) ۵۸۶

۴۸) نمودار سهمی $y=f(x)$ شکل زیر است. اگر مثلثی با رئوس A، B و C در رأس B، قائمه باشد، بیش‌ترین مقدار سهمی چه عددی است؟



۱) $\frac{۲۵}{۴}$
۲) $\frac{۲۵}{۲}$
۳) $\frac{۳۹}{۴}$
۴) $\frac{۳۹}{۲}$

۴۹) معادله‌ی $x^{۴}-(m^{۲}-۱)x^{۲}+۳-۴m=۰$، چهار ریشه‌ی حقیقی دارد که مجموع مربعات آن‌ها برابر ۳۰ است. چند مقدار برای m وجود دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۵۰) به ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی $\frac{a+۲}{x-۱}-۱=\frac{x-۲}{\text{ax}-۵}$، دارای جواب $x=۳$ است؟

۱) -۲، $\frac{۱}{۳}$
۲) ۲، $-\frac{۱}{۳}$
۳) ۱، $-\frac{۲}{۳}$
۴) ۱، $\frac{۲}{۳}$

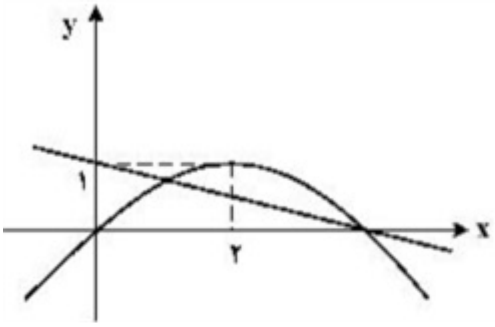
۵۱) اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$ آنگاه حاصل $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۴

Scanned with CamScanner

۵۲ نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است.

مقدار $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{f(x)+g(x)}{4-x}$، کدام است؟



۱) $-\dfrac{3}{2}$ ۲) $-\dfrac{5}{4}$ ۳) $\dfrac{5}{4}$ ۴) $\dfrac{3}{2}$

۵۳ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\mathrm{Log}_{4}\left(\left|x^2-2\right|-x\right)$، کدام است؟

۱) $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1)\cup(\sqrt{2},+\infty)$

۳) $\left[-1,1\right)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ ۴) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

۵۴ فرض کنید $\begin{vmatrix}\mathrm{Log}\,5 & \mathrm{Log}\,2\\ \mathrm{Log}\,2 & \mathrm{Log}\,5\end{vmatrix}\mathrm{Log}_{\frac{5}{2}}(3x-2)=1$، مقدار x، کدام است؟

۱) 9 ۲) $\dfrac{17}{3}$ ۳) 4 ۴) $\dfrac{7}{3}$

۵۵ نمودارهای دو تابع $f(x)=4^x$ و $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}+\dfrac{3}{2}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا نقطه‌ی $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) $\sqrt{5}$

۵۶ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)-1}{x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) 14 ۳) 63 ۴) 120

Scanned with CamScanner

۵۷ مجموعه جواب کدام نامعادله، یک همسایگی محذوف ۲ است؟

الف) $\frac{۱+۳x-x^۲}{(x-۲)^۲} < \frac{۱}{|x-۲|}$

ب) $\frac{x^۲+۳x}{|x-۲|} < ۰$

ج) $\frac{۴}{x} > ۱$

۱) الف - ب ۲) ب ۳) ج ۴) الف - ج

۵۸ اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$، دامنه‌ی تابع gof کدام است؟

۱) $(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$ ۲) $R-\{۰,۸\}$ ۳) $R-\{۰\}$ ۴) $(۰,+\infty)$

۵۹ اگر $f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{۲} & ; x<۰\\ ۲x & ; x\geqslant ۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۲x & ; x<۰\\ ۱ & ; x\geqslant ۰\end{cases}$، کدام تابع در $x=۰$ پیوسته است؟

۱) $f+g$ ۲) fof ۳) gof ۴) fog

۶۰ با استفاده از سه قضیه‌ی ۳، ۴ و۵ عبارت زیر را تبدیل کنید:

$\text{Log}\,(\sqrt[۳]{a}\sqrt[۴]{b}\sqrt[۴]{۵})$

۶۱ ۱۰ عضو از اعضای مجموعه $A=\{۱۰,۱۱,۱۲,\ldots,۱۰۰\}$ را انتخاب می‌کنیم به طوری‌که این اعداد تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. در چند حالت قدرنسبت دنباله بزرگ‌تر از ۸ است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۶۲ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x^۳-۲x^۲+۲x-۱| < ۲x^۲-۲x+۲$ بازهٔ (a,b) است. حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۳ یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار mاُم «رو» ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{m}{m+۳}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب m بار سکه «رو» بیاید. کدام مقدار می‌تواند nm باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۵ ۳) ۴۰ ۴) ۳۵

۶۴ در یک ساختمان مسکونی، ۷ زوج زندگی می‌کنند. به چند طریق می‌توان ۴ نفر را از بین آن‌ها انتخاب کرد به طوری‌که در بین انتخاب‌شدگان حداکثر یک زوج باشد؟

۱) ۸۴۰ ۲) ۸۹۰ ۳) ۹۲۰ ۴) ۹۸۰

۶۵ بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله درجه دوم $a_n=-۲n^۲+۳۳n+۱۷$ چقدر با جملهٔ بیستم یک دنبالهٔ خطی که جملهٔ سوم و یازدهم آن به ترتیب ۱۱ و ۷۵ است، تفاوت دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

Scanned with CamScanner

۶۶) معادلهٔ $\frac{۱}{۲}x + k = |۶ - x|$ فقط یک ریشه دارد. مجموعهٔ تمام مقادیر k کدام است؟

۱) $k > -۳$ ۲) $k < -۳$ ۳) $k = -۳$ ۴) $k > ۰$

۶۷) به چند طریق ۶ دانش‌آموز می‌توانند در ۴ رشته ورزشی متمایز ثبت‌نام کنند به طوری‌که در هر رشته ورزشی، حداقل یک دانش‌آموز ثبت‌نام کند؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۷۹۲ ۴) ۱۵۶۰

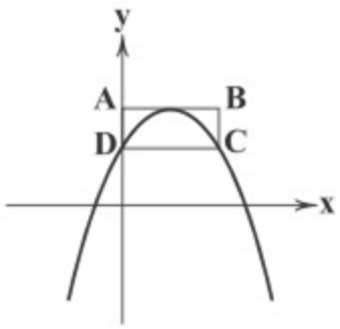
۶۸) حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt{۸۸ + ۱۸\sqrt{۷}} - \sqrt{۸۸ - ۱۸\sqrt{۷}}}{\sqrt{۴ - \sqrt{۷}} + \sqrt{۴ + \sqrt{۷}}}$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۴}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۱۴}}{۷}$

۶۹) اگر $\operatorname{Cotg}\alpha = \sqrt{\frac{m}{n} - ۱}$ و $\operatorname{Cos}\alpha = \sqrt{۱ - m^۲}$ باشد، رابطهٔ بین m و n همواره کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

۱) $m = n^۲$ ۲) $m = n^۳$ ۳) $n = m^۳$ ۴) $n = m^۲$

۷۰) معادلهٔ سهمی زیر $y = -x^۲ + \mathrm{kx} + ۶$ و مساحت مستطیل ABCD برابر ۵۴ واحد مربع است، فاصلهٔ نقطهٔ B از محور xها چقدر است؟



۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۷۱) اگر $f = \left\{(۰, ۲\mathrm{y} + x), \left(\frac{۱}{۲}, x - y\right), (۰, ۳), (۰/۵, ۲), (x, y)\right\}$ تابع باشد، مجموع اعضای برد f کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

۷۲) مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $۲, \cdots, ۳\mathrm{a} + ۲$ و $۲\mathrm{a} + ۱$ و a برابر ۱۵۵ است. جملهٔ هشتم این دنباله کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

Scanned with CamScanner

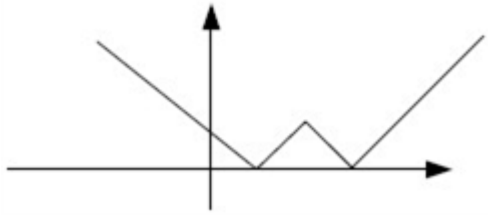
۷۳ معادلهٔ $۷x^{۲} - ۶x + k = ۰$ به ازای مقدار مشخصی از k ریشهٔ مضاعف دارد. مقدار این ریشهٔ مضاعف چند است؟

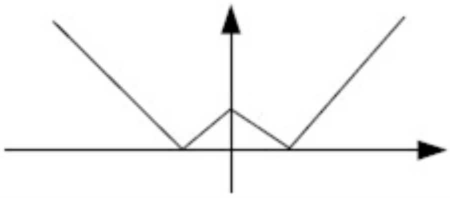
۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

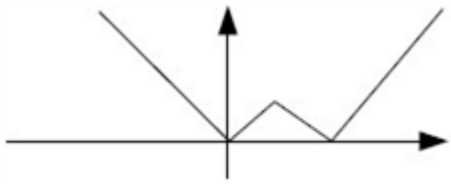
۷۴ اعداد ۱۴ و ۱۷/۲ به‌ترتیب جملات پنجم و هفتم یک دنباله درجه دوم هستند. اگر ضریب بزرگ‌ترین درجه جمله عمومی، برابر $\frac{۱}{۷۰}$ قرینه جمله پنجم باشد، جمله پانزدهم چند برابر جمله اول است؟

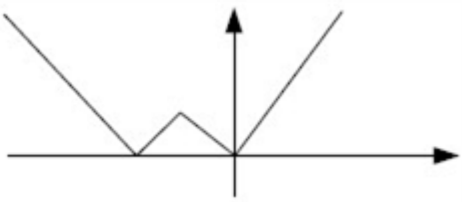
۱) ۲ ۲) ۲/۴ ۳) ۴/۶ ۴) ۵

۷۵ اگر $f(-x) = |۱ - |۱ - x||$ باشد، نمودار تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۷۶ یک تانکر گاز از یک استوانه و یک نیم‌کره به شعاع x در انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه $۲۰m$ و حجم تانکر با حجم مکعبی به ضلع $۲x$ برابر باشد، مساحت کل مکعب کدام است؟ (π را برابر ۳ فرض کنید.)

۱) ۱۸۰۰ ۲) ۱۲۰۰ ۳) ۹۰۰ ۴) ۶۰۰

۷۷ جملهٔ چهارم دنبالهٔ بازگشتی $a_۱ = ۲$ و $a_{n+۱} = ۲a_n^{۲}$ چند برابر عدد ۴۰۹۶ است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۷۸ اگر $f(x) = (۲ - x)\,|x| + \frac{۲}{x}$ باشد، مقدار $f(۱ - \sqrt{۲})$ کدام است؟ (||، علامت قدرمطلق است.)

۱) $-(۱ + ۲\sqrt{۲})$ ۲) $۲ + ۲\sqrt{۲}$ ۳) $-۱ - \sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲} - ۲$

۷۹ در یک کلاس ۳۰ نفره، ۱۵ نفر در کلاس فوتبال و ۱۸ نفر در کلاس والیبال شرکت کرده‌اند. اگر ۴ نفر از کسانی‌که در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند، از کلاس فوتبال انصراف دهند و ۳ نفر از کسانی‌که در هیچ کلاسی شرکت نکرده بودند، در کلاس فوتبال شرکت کنند، آن‌گاه می‌توان گفت ۸۰ درصد کل افراد این کلاس، فقط در یک کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در ابتدا در هر دو کلاس شرکت کرده بودند؟

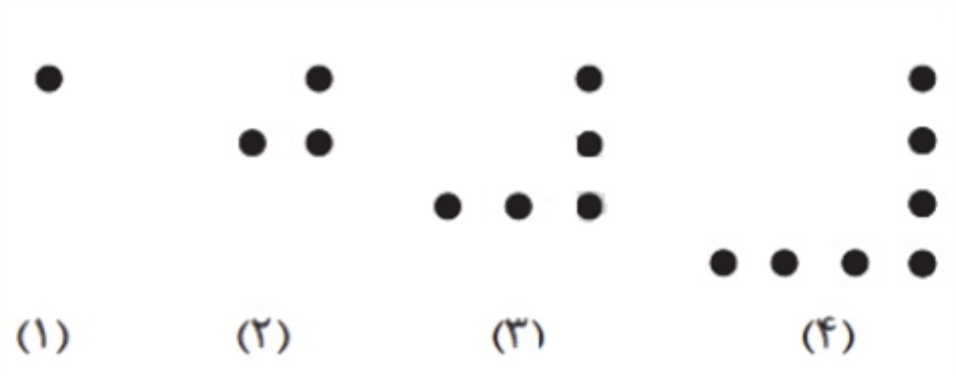
۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

Scanned with CamScanner

۸۰ از ۱۴ قطعه که ۵تای آن‌ها خراب است، ۳ قطعه به تصادف برمی‌داریم. احتمال آن‌که فقط یکی از آن‌ها خراب باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳۳}{۹۱}$　۲) $\frac{۳۶}{۹۱}$　۳) $\frac{۴۵}{۹۱}$　۴) $\frac{۴۸}{۹۱}$

۸۱ در الگوی شکل مقابل حاصل ضرب تعداد نقاط شکل n اُم و $(n+۱)$ اُم برابر a_n است. حاصل $\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\dots+\frac{۱}{a_{۱۰}}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۹}{۲۱}$　۲) $\frac{۱۱}{۲۱}$　۳) $\frac{۲۰}{۲۱}$　۴) $\frac{۱۰}{۲۱}$

۸۲ با فرض $\frac{۱}{۳}=\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x$، حاصل $A=\frac{\operatorname{tg}^۲x+\operatorname{Cotg}^۲x}{\operatorname{tg}^۳x+\operatorname{Cotg}^۳x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۶}$　۲) $\frac{۷}{۱۸}$　۳) $\frac{۵}{۱۶}$　۴) $\frac{۵}{۱۸}$

۸۳ در یک دنباله حسابی افزایشی، مجموع سه جمله اول برابر ۴۸ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۳۱۶۰ است. این دنباله چند جمله دو رقمی دارد؟

۸۴ اگر f تابع همانی، g تابع ثابت، $h=f-g$ و نمودار h نمودار تابع $y=|x+۵|$ را در $x=۱$ قطع کند، $h(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۸۵ اگر $a_n=\frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۳\times۵}+\frac{۱}{۵\times۷}+\dots+\frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)}$ باشد، حاصل $a_{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$　۲) $\frac{۴}{۵}$　۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$　۴) $\frac{۱۰}{۱۹}$

۸۶ یک شرکت ۳۰ کارمند دارد که ۱۹ تای آن‌ها خانم هستند و ۱۶ نفر از کارمندان تحصیلات دانشگاهی دارند. حداقل و حداکثر چند نفر از خانم‌ها تحصیلات دانشگاهی <u>ندارند</u>؟

۱) ۵ و ۱۶　۲) صفر و ۱۶　۳) ۳ و ۱۴　۴) ۳ و ۱۹

Scanned with CamScanner

۸۷ اگر حاصل عبارت $(۲ - \sqrt{۳})^{\frac{۳}{۲}}(۲ + \sqrt{۳})^{\frac{۴}{۳}} \times \sqrt[۳]{\sqrt{۲}}$ ، به‌صورت $\sqrt[۳]{A}$ باشد، A کدام است؟

۱) $\sqrt{۳} - ۱$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۳} + ۱$

۸۸ ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲ = -۴|x| + ۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}$

۸۹ حاصل عبارت $A = \frac{۱}{۱ + \sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۳} + \sqrt{۴}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt{۹۹} + \sqrt{۱۰۰}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۹۰ یک قالی در اتاقی به ابعاد ۶ متر و ۴ متر قرار دارد به طوری که فاصله هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ متر مربع باشد فاصله هر طرف قالی را تا دیوار حساب کنید.

Scanned with CamScanner

پاسخنامه تشریحی

۱

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{a[x]-۱۲}{۴-x}=\frac{۳a-۱۲}{۰^+}=+\infty \Rightarrow ۳a-۱۲>۰\Rightarrow a>۴$$

$$a>۴\Rightarrow ۰<\frac{۱}{a}<\frac{۱}{۴}\xrightarrow{-۳}-۳<\frac{۱}{a}-۳<\frac{-۱۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to ۱}\left[\frac{x}{a}-۳x\right]=\left[\frac{۱}{a}-۳\right]=-۳$$

۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ناحیه هاشورخورده از دو مثلث با مساحت برابر تشکیل شده است. قاعده این مثلث‌ها برابر $x=a$ و ارتفاع آن برابر $y=\frac{۲a}{a^۲+۱}$ است، لذا داریم:

$$S(x)=۲\times\left(\frac{x\times y}{۲}\right)=۲\times\left(\frac{\frac{۲x^۲}{x^۲+۱}}{۲}\right)=\frac{۲x^۲}{x^۲+۱}\Rightarrow S(x)=\frac{۲x^۲}{x^۲+۱}$$

بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر مساحت دو مثلث برابر است با:

$$S'(x)=\frac{۴x(x^۲+۱)-۴x^۳}{(x^۲+۱)^۲}\Rightarrow S'\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۲}{\frac{۲۵}{۱۶}}=\frac{۳۲}{۲۵}$$

۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون داریم $(\text{fog})^{-۱}(x)=(g^{-۱}\text{of}^{-۱})(x)$ لذا داریم.

$$(g^{-۱}\text{of}^{-۱})(۲۰)=۱۱\Rightarrow(\text{fog})(۱۱)=۲۰$$

از طرف دیگر با ساده کردن تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x^۲+۲x-۱)}{(x-۲)}\Rightarrow f(x)=x^۲+۲x-۱,\, x\neq ۲$$

حال تابع g یک تابع خطی دوم غیرثابت و $f(x)$ یک تابع درجهٔ دوم است لذا fog نیز از درجهٔ دوم است و چون $\frac{۱۱+۵}{۲}=۸$ پس $x=۸$ نقطهٔ وسط بازه $[۵,۱۱]$ است و با توجه به این‌که می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع درجهٔ دوم در وسط یک بازه برابر با آهنگ متوسط تغییر در آن بازه است. لذا:

$$(\text{fog})'(۸)=\frac{(\text{fog})(۱۱)-(\text{fog})(۵)}{۱۱-۵}=\frac{۲۰-۸}{۶}=\frac{۱۲}{۶}=۲$$

۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin ۳x=-\cos ۲x=\sin\left(۲x-\frac{\pi}{۲}\right)\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+۲x-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\\ ۳x=۲k\pi+\pi-\left(۲x-\frac{\pi}{۲}\right)\Rightarrow ۵x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

$$x=(۴k+۳)\frac{\pi}{۱۰}$$

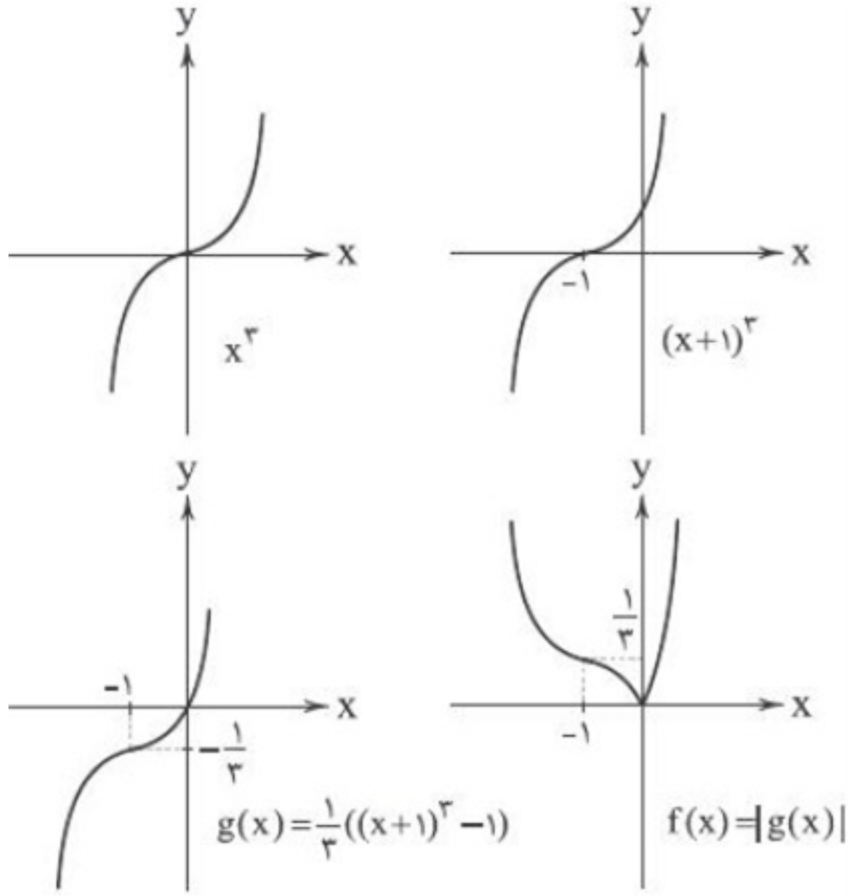
کم‌ترین جواب $x=\frac{۳\pi}{۱۰}$ و بیشترین جواب $x=\frac{۱۹\pi}{۱۰}$ است و اختلاف می‌شود $\frac{۱۶\pi}{۱۰}$ یا $\frac{۸\pi}{۵}$.

Scanned with CamScanner

۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = x\left(\frac{۱}{۳}x^۲ + x + ۱\right) = \frac{۱}{۳}x^۳ + x^۲ + x = \frac{۱}{۳}(x^۳ + ۳x^۲ + ۳x)$$

$$g(x) = \frac{۱}{۳}((x+۱)^۳ - ۱)$$



نمودار $f(x)$ در بازهٔ $(-\infty, ۰]$ اکیداً نزولی است، پس حداکثر مقدار a برابر صفر است.

۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آنکه تابع $f(x) = -۳\left(\frac{۴a+۱}{a+۲}\right)^{۲-x}$ اکیداً نزولی باشد، لازم است که تابع نمایی $y = \left(\frac{۴a+۱}{a+۲}\right)^x$ اکیداً نزولی باشد و برای این منظور باید: $۰ < \frac{۴a+۱}{a+۲} < ۱$

از حل این نامعادله به $\frac{-۱}{۴} < a < \frac{۱}{۳}$ می‌رسیم و از آنجا با تقسیم طرفین نامساوی بر ۲ داریم:

$$\frac{-۱}{۸} < \frac{a}{۲} < \frac{۱}{۶} \Rightarrow \left[\frac{a}{۲}\right] = -۱, ۰ \Rightarrow$$ دو مقدار

Scanned with CamScanner

۷ برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(۲,۵)$ باشد ۲ برابر x و ۵ برای y است.

$$A(۲,۵) \xrightarrow{x=۲ \text{ و } y=۵} f(۲)=۵$$

برای قسمت دوم سؤال باید:

$$۲\text{x}-۱=۲ \Rightarrow ۲\text{x}=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}} y=۳\text{f}(۲)+۴ \Rightarrow y=۳(۵)+۴ \Rightarrow y=۱۹$$

بنابراین نقطه متناظر برای تابع جدید $A'\left(\frac{۳}{۲},۱۹\right)$ است. یعنی دقیقاً از x و y جدید استفاده می‌کنیم.

۸ برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر $A(-۲,۵)$ باشد ۲- برابر x و ۵ برای y است.

$$A(-۲,۵) \xrightarrow{x=-۲ \text{ و } y=۵} ۵=۲\text{f}(-۲-۱)+۳ \Rightarrow f(-۳)=۱$$

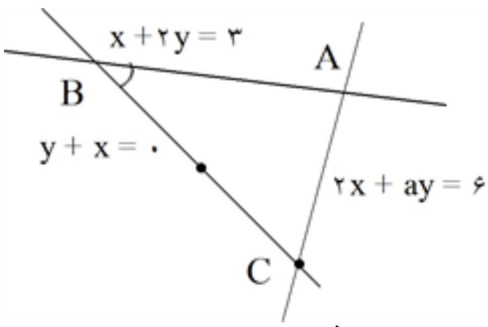
برای قسمت دوم سؤال باید:

$$۲\text{x}-۱=-۳ \Rightarrow ۲\text{x}=-۲ \Rightarrow x=-۱$$

$$\xrightarrow{x=-۱} y=۳\text{f}(-۳)+۲ \Rightarrow y=۳(۱)+۲ \Rightarrow y=۵$$

بنابراین نقطه متناظر برای تابع جدید $A'(-۱,۵)$ است. یعنی دقیقاً از x و y جدید استفاده می‌کنیم.

۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مرکز دایره‌ای که از ۳ رأس C, B, A می‌گذرد روی ضلع BC قرار دارد پس مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.



$$m_{\text{AB}}.m_{\text{AC}}=-۱ \Rightarrow \left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۲}{a}\right)=-۱ \Rightarrow a=-۱$$

$$\begin{cases} x+۲y=۳ \\ y+x=۰ \\ ۲x-y=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(۳,۰) \\ B(-۳,۳) \\ C(۲,-۲) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{AB}&=\sqrt{۳۶+۹}=۳\sqrt{۵} \\ \text{AC}&=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \text{tg}\,(\widehat{B})&=\frac{\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۵}}=\frac{۱}{۳} \\ \text{tg}\,(\widehat{C})&=۳ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{tg}\,(B-C)=\frac{\text{tg}\,B-\text{tg}\,C}{۱+\text{tg}\,B\,\text{tg}\,C}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۳}-۳}{۱+۱}=-\frac{۴}{۳} \Rightarrow \text{Cotg}\,(B-C)=-\frac{۳}{۴}$$

۱۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۱}{\sqrt{\text{Log}\,\frac{x}{۸}+۴\,\text{Log}\,\frac{۲}{x^۳}}}=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳}\,\text{Log}\,\frac{x}{۲}+\frac{۴}{۳}\,\text{Log}\,\frac{۲}{x}}} \xrightarrow{\text{Log}\,\frac{x}{۲}=t} \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳}\left(t+\frac{۴}{t}\right)}}$$

$$t.\frac{۴}{t}=۴ \Rightarrow \text{Min}\left(t+\frac{۴}{t}\right)=۲+۲=۴ \Rightarrow \text{Max}\;A=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۴}{۳}}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

Scanned with CamScanner

۱۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+|a|\,x}{۲x-۱+b}=\frac{۱+|a|}{۲},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+|a|\,x}{-۲x+۱+b}=\frac{۱-|a|}{۲}\Rightarrow\frac{۱+|a|}{۲}=۲\times\frac{۱-|a|}{۲}\Rightarrow|a|=\frac{۱}{۳}$$

$$|۲x-۱|=-b\xrightarrow{b<۰}\begin{cases}۲x-۱=-b\Rightarrow x=\frac{۱-b}{۲}\\ ۲x-۱=+b\Rightarrow x=\frac{۱+b}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱-b}{۲}=۲\times\frac{۱+b}{۲}\Rightarrow b=\frac{-۱}{۳}$$

$$\Rightarrow b=-|a|$$

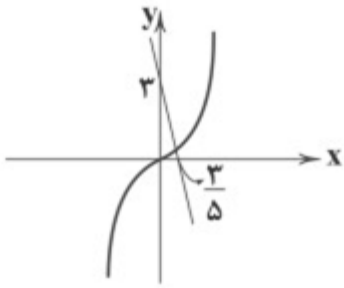
۱۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\text{fog}\,(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{fog}\,(x)=f(g(x))=f(x-۱)=(x-۱)^۳+۲(x-۱)+۱$$
$$=x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۲x-۲+۱=x^۳-۳x^۲+۵x-۲$$

حال معادله‌ی $\text{fog}\,(x)=۱-۳x^۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$x^۳-۳x^۲+۵x-۲=۱-۳x^۲\Rightarrow x^۳=۳-۵x$$

جواب معادله‌ی بالا محل برخورد دو تابع $x^۳$ و $۳-۵x$ را نشان می‌دهد.



دو تابع در یک نقطه با طول $x_۰$ که $۰<x_۰<\frac{۳}{۵}$ است، یک‌دیگر را قطع می‌کنند.

۱۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $T=۲\pi$ متناوب است. رفتار تابع را روی بازه‌ای به طول ۲π مانند $[۰,۲\pi]$ بررسی می‌کنیم. تابع در این بازه پیوسته است. اکسترمم‌های مطلق تابع در نقاط بحرانی یا نقاط انتهایی دامنه رخ می‌دهد. پس ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته، مقدار تابع را در نقاط مذکور محاسبه و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\operatorname{Cos}x}{۲+\operatorname{Sin}x}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\operatorname{Sin}x(۲+\operatorname{Sin}x)-\operatorname{Cos}x(\operatorname{Cos}x)}{(۲+\operatorname{Sin}x)^۲}$$
$$=\frac{-۲\operatorname{Sin}x-\operatorname{Sin}^۲x-\operatorname{Cos}^۲x}{(۲+\operatorname{Sin}x)^۲}=\frac{-۲\operatorname{Sin}x-۱}{(۲+\operatorname{Sin}x)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow\operatorname{Sin}x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}\Rightarrow$$ نقاط بحرانی

$$f\left(\frac{۷\pi}{۶}\right)=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲-\frac{۱}{۲}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳},\ f\left(\frac{۱۱\pi}{۶}\right)=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲-\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$f(۰)=f(۲\pi)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$ نقاط انتهایی

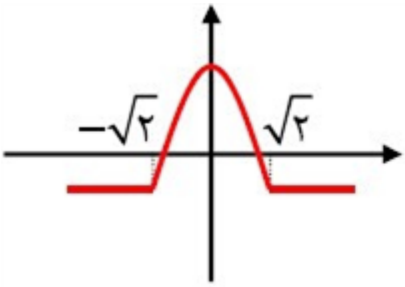
پس بیشترین و کمترین مقدار تابع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است و اختلاف این دو $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ است.

Scanned with CamScanner

۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x))=\begin{cases} -۱ & ۱-x^۲<-۱ \Rightarrow x^۲>۲ \Rightarrow |x|>\sqrt{۲} \\ ۱-x^۲ & -۱\le ۱-x^۲\le ۱ \Rightarrow -۱\le x^۲-۱\le ۱ \Rightarrow ۰\le x^۲\le ۲ \Rightarrow |x|\le\sqrt{۲} \\ ۱ & ۱-x^۲>۱ \quad \times \end{cases}$$

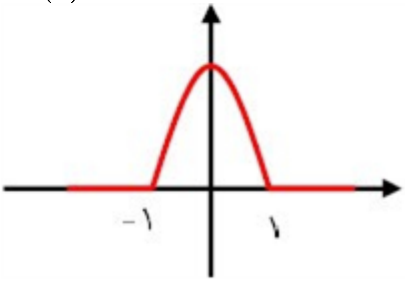
$$\text{fog}\,(x)=\begin{cases} -۱ & |x|>\sqrt{۲} \\ ۱-x^۲ & |x|\le\sqrt{۲} \end{cases}$$



۲ نقطه مشتق ناپذیری

$$\text{gof}\,(x)=۱-(f(x))^۲=\begin{cases} ۱-(-۱)^۲ & x<-۱ \\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱ \\ ۱-(۱)^۲ & x>۱ \end{cases}$$

$$\text{gof}\,(x)=\begin{cases} ۰ & x<-۱ \\ ۱-x^۲ & x\le x\le ۱ \\ ۰ & x>۱ \end{cases}$$



۲ نقطه مشتق ناپذیری

در کل ۴ نقطه مشتق‌ناپذیر دارد.

۱۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ بازه‌ای را انتخاب کنیم که در آن $f'(x)<۰$ و $f''(x)<۰$ است:

$۱)\ f'(x)=۲\,\text{Cos}\,x(-\text{Sin}\,x)+۲\,\text{Sin}\,x<۰$

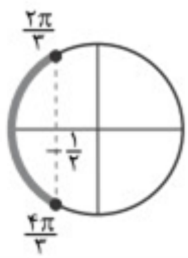
$$\Rightarrow ۲\ \text{Sin x}\ \underbrace{(-\text{Cos x}+۱)}_{\text{همواره نامنفی}}<۰ \Rightarrow \text{Sin x}<۰ \Rightarrow \pi<\text{x}<۲\pi \qquad (\text{I})$$

$۲)\ f''(x)=-۲\,\text{Cos}\,۲\text{x}+۲\,\text{Cos}\,x=-۲((۲\,\text{Cos}^۲x-۱)-\text{Cos}\,x)$

$$\Rightarrow ۲\,\text{Cos}\,x+۱<۰ \Rightarrow \text{Cos}\,x<-\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲\pi}{۳}<x<\frac{۴\pi}{۳}$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده $\left(\pi,\frac{۴\pi}{۳}\right)$ است.



Scanned with CamScanner

۱۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=-\frac{۱}{۳}x^{۳}+۲x^{۲}-x \Rightarrow f'(x)=-x^{۲}+۴x-۱$$

چون می‌خواهیم خط مماس، بیش‌ترین شیب ممکن را داشته باشد، پس باید $f'(x)$ ماکزیمم شود. بیش‌ترین مقدار $f'(x)$ که تابعی از درجه دوم است، برابر است با:

$$\max(f'(x))=-\frac{\Delta}{۴a}=\frac{-(۱۶-۴)}{-۴}=۳\Rightarrow$$

بنابراین حداکثر مقدار شیب خط مماس برابر ۳ است. این مقدار در نقطه‌ی $x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۴}{-۲}=۲$ اتفاق می‌افتد که

چون $f(۲)=\frac{۱۰}{۳}$ است، پس معادله‌ی خط مماس به صورت زیر است:

$$y-\frac{۱۰}{۳}=۳(x-۲)\Rightarrow y=۳x-\frac{۸}{۳}\xrightarrow{x=۰}y=-\frac{۸}{۳}\Rightarrow$$

پس خط مماس محور yها را در نقطه‌ای به عرض $-\frac{۸}{۳}$ قطع می‌کند.

۱۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه‌ی $x=x_۰$ برابر $f'(x_۰)$ است؛ ضمناً اگر دو خط غیرقائم، با هم موازی باشند، شیب آن‌ها با هم برابر است؛ پس باید معادله‌ی $f'(x)=\frac{m}{m+۲}$ ریشه‌ی حقیقی داشته باشد. دقت کنید که:

$$f'(x)=\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x}}=\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

حال تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $y=\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ را درنظر بگیرید. اگر برد آن R باشد، باید $\frac{m}{m+۲}\in R$ باشد تا معادله‌ی مزبور ریشه داشته باشد پس برد این تابع را می‌یابیم:

$$y'=\frac{۱\sqrt{۱+x^{۲}}-\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}x}{۱+x^{۲}}\times\frac{\sqrt{۱+x^{۲}}}{\sqrt{۱+x^{۲}}}=\frac{(۱+x^{۲})-x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۱}{(۱+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}>۰$$

تابع همواره اکیداً صعودی است و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\pm۱$؛ پس $R=(-۱,۱)$ بنابراین باید:

$$-۱<\frac{m}{m+۲}<۱\Rightarrow\left|\frac{m}{m+۲}\right|<۱\Rightarrow|m|<|m+۲|\Rightarrow m^{۲}<m^{۲}+۴m+۴\Rightarrow m>-۱$$

۱۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طول نقطه‌ی عطف تابع، ریشه‌ی $f''(x)=۰$ است:

$$f'(x)=۲x^{۲}-۲(m-۱)x+۸\Rightarrow f''(x)=۴x-۲(m-۱)=۰\Rightarrow x=\frac{m-۱}{۲}$$

پس باید:

$$\frac{m-۱}{۲}<-۲\Rightarrow m-۱<-۴\Rightarrow m<-۳$$

طول نقطه اکسترمم تابع f، ریشه‌های معادله‌ی $f'(x)=۰$ است. در این معادله داریم:

$$\Delta=۴(m-۱)^{۲}-۴(۲)(۸)=۴(m^{۲}-۲m+۱-۱۶)=۴(m^{۲}-۲m-۱۵)=۴(m+۳)(m-۵)>۰$$

$$P=\frac{۸}{۲}>۰$$

$$S=-\frac{-۲(m-۱)}{۲}=m-۱<-۴$$

پس طول نقاط اکسترمم نسبی منفی است.

Scanned with CamScanner

۱۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دو طرف رابطه‌ی $g(x)=f(\operatorname{Cos} ۲x)$ مشتق می‌گیریم:

$$g'(x)=(-۲\operatorname{Sin} ۲x).f'(\operatorname{Cos} ۲x)=-۲\operatorname{Sin} ۲x\left(\frac{۱}{۱+\operatorname{Cos} ۲x}\right)=\frac{-۴\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x}{۲\operatorname{Cos}^۲ x}=-۲\operatorname{tg} x$$

$$\Rightarrow g'(x)=-۲\operatorname{tg} x$$

$$\Rightarrow g''(x)=-۲(۱+\operatorname{tg}^۲ x)\Rightarrow g''\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-۲(۱+۳)=-۸$$

۲۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض $y=f\left(\frac{۳x}{f(x)}\right)$ در یک همسایگی $x=\frac{۱}{۲}$ داریم، $f(x)=۱-x^۲$، پس:

$$y=f\left(\frac{۳x}{۱-x^۲}\right) \text{ و } f'(x)=-۲x$$

$$\Rightarrow y'=\frac{۳(۱-x^۲)-(-۲x)۳x}{(۱-x^۲)^۲}f'\left(\frac{۳x}{۱-x^۲}\right)=\frac{۳(۱+x^۲)}{(۱-x^۲)^۲}f'\left(\frac{۳x}{۱-x^۲}\right)$$

$$=\frac{۳(۱+x^۲)}{(۱-x^۲)^۲}\times(-۲)\left(\frac{۳x}{۱-x^۲}\right)$$

$$y'=\frac{-۱۸x(۱+x^۲)}{(۱-x^۲)^۳}\Rightarrow y'\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{-۸۰}{۳}$$

۲۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\tan\left(\frac{\pi}{۴}-x\right)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$. حال معادله را بازنویسی و حل می‌کنیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{۴}-x\right)=\tan ۳x\Rightarrow \frac{\pi}{۴}-x=k\pi+۳x\Rightarrow ۴x=-k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=-\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۱۶}=\frac{k'\pi}{۴}+\frac{\pi}{۱۶}$$

$$\begin{cases} k'=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۶}\\ k'=۱\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۱۶}\\ k'=۲\Rightarrow x=\frac{۹\pi}{۱۶}\\ k'=۳x=\frac{۱۳\pi}{۱۶}\end{cases}$$

معادله در بازه‌ی $(۰,\pi)$ چهار جواب دارد.

۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $y=\frac{x}{f(x)}=\frac{x}{x^۲-ax+b}$ در تمام دامنه‌اش مشتق‌پذیراست. از طرفی نقطه اکسترمم نسبی جزء نقاط بحرانی است؛ حال می‌توان نوشت:

$$y'=\frac{۱(x^۲-ax+b)-(۲x-a)x}{(x^۲-ax+b)^۲}=\frac{-x^۲+b}{(x^۲-ax+b)^۲}$$

اگر $b<۰$، آن‌گاه همواره $y'<۰$ است و تابع فاقد نقطه‌ی بحرانی و اکسترمم نسبی است.

اگر $b=۰$، آن‌گاه $x=۰$ ریشه‌ی مضاعف $y'=۰$ است؛ پس $x=۰$ نقطه‌ی بحرانی تابع است؛ اما y' در اطراف آن تغییر علامت نمی‌دهد؛ بنابراین $x=۰$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی نخواهد بود (عطف است).

اگر $b>۰$، آن‌گاه معادله‌ی $y'=۰$ دو ریشه‌ی ساده دارد. این ریشه ها طول نقاط اکسترمم نسبی هستند.

پس اگر تابع اکسترمم نسبی نداشته باشد، باید $b\leq ۰$.

Scanned with CamScanner

۲۳ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی هم‌ارزی $\underset{u\to ۰}{۱-\text{Cos}^{k}u \approx \frac{k}{۲}u^{۲}}$، داریم:

$$\underset{x\to ۰}{\text{Lim}}\left(\frac{۱}{\text{Cos}\,x-۱}-\frac{۱}{x}\right)=\underset{x\to ۰}{\text{Lim}}\left(\frac{۱}{-\frac{x^{۲}}{۲}}-\frac{۱}{x}\right)=\underset{x\to ۰}{\text{Lim}}\left(\frac{-۲}{x^{۲}}-\frac{۱}{x}\right)=\underset{x\to ۰}{\text{Lim}}\,\frac{-۲-x}{x^{۲}}=\frac{-۲}{۰^{+}}=-\infty$$

۲۴ ابتدا مشتق می‌گیریم و سپس شیب خط را مشخص می‌کنیم:

$$x_{۱}=۴\Rightarrow y_{۱}=۴$$

$$y'=\frac{۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

$$y-۴=\frac{۱}{۲}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۲$$

۲۵ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ریشه‌های ساده‌ی درون قدرمطلق یعنی نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ بحرانی‌اند. حال به جستجوی سایر نقاط بحرانی می‌پردازیم:

$$f(x)=\begin{cases}x(x^{۲}-۱) & ;\, x^{۲}\geqslant ۱\\ x(-x^{۲}+۱) & ;\, x^{۲}<۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^{۳}-x & ;\, x^{۲}\geqslant ۱\\ -x^{۳}+x & ;\, x^{۲}<۱\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f_{۱}(x)=x^{۳}-x\Rightarrow f'_{۱}(x)=۳\text{x}^{۲}-۱=۰\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۳}\not\geqslant ۱\ \text{غ ق ق}\\ f_{۲}(x)=-x^{۳}+x\Rightarrow f'_{۲}(x)=-۳\text{x}^{۲}+۱=۰\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۳}<۱\ \text{ق ق}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۱}{۳}}\end{cases}$$

پس نقاط $x=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و $x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ نیز نقاط بحرانی تابع هستند. بنابراین این تابع در مجموع ۴ نقطه‌ی بحرانی در بازه‌ی $(-۲,۲)$ دارد.

۲۶ ابعاد مستطیل $x,y=\frac{۴-x}{۲}$ مساحت $S=x\left(\frac{۴-x}{۲}\right)=۲\text{x}-\frac{x^{۲}}{۲}\Rightarrow S'=۲-x=۰\quad x=۲,y=۱$

۲۷

$$y=\frac{x^{۲}+۳}{\text{ax}+b}\to y'=\frac{۲\text{x}(\text{ax}+b)-a(x^{۲}+۳)}{(\text{ax}+b)^{۲}}$$

$$\begin{cases}f(۱)=۲\Rightarrow \frac{(۱)^{۲}+۳}{a(۱)+b}=۲\\ f'(۱)=۰\Rightarrow \frac{۲(۱)(a+b)-a(۱+۳)}{(a+b)^{۲}}=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=۲\\ -۲\text{a}+۲\text{b}=۰\end{cases}\Rightarrow a=۱,b=۱$$

۲۸

$$V=x(۱۲-۲\text{x})^{۲}\Rightarrow V'=(۱۲-۲\text{x})^{۲}-۴\text{x}(۱۲-۲\text{x})$$

$$V'=(۱۲-۲\text{x})(۱۲-۶\text{x})$$

$$V'=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۲\Rightarrow V=۱۲۸\\ x=۶\Rightarrow V=۰\end{cases}\Rightarrow V_{\max}=۱۲۸$$

۲۹

$$\text{tg}\,۷\text{x}=\frac{۱}{\text{tg}\,۵\text{x}}\to \text{tg}\,۷\text{x}=\cot\,۵\text{x}\to \text{tg}\,۷\text{x}=\text{tg}\left(\frac{\pi}{۲}-\pi\right)$$

$$\to ۷\text{x}=\text{k}\pi+\frac{\pi}{۲}-\pi\to ۱۲\text{x}=(۲\text{k}+۱)\frac{\pi}{۲}\to x=(۲\text{k}+۱)\frac{\pi}{۲۴}$$

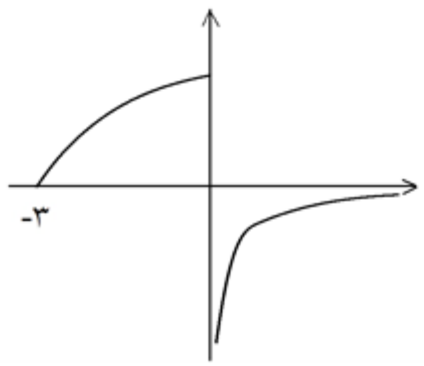
جواب‌های خاص $=\left\{\frac{\pi}{۲۴},\frac{۳\pi}{۲۴},\frac{۵\pi}{۲۴},\ldots,\frac{۴۷\pi}{۲۴}\right\}$

Scanned with CamScanner

۳۰

$$\text{حد مورد نظر} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(۲-\frac{۱}{x}\right)}{\sqrt{x^۲\left(۳+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(۲-\frac{۱}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{۳+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}}} = \frac{۲-۰}{-\sqrt{۳+۰+۰}} = \frac{-۲}{\sqrt{۳}}$$

۳۱



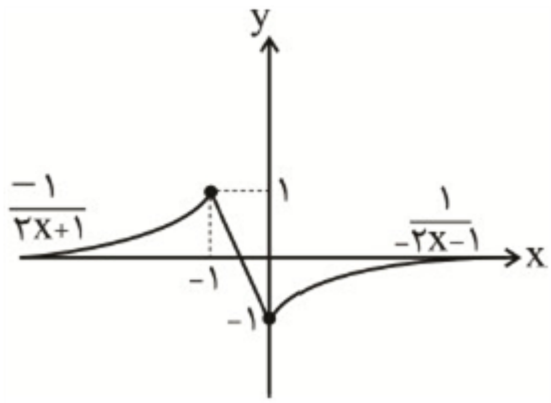
$D = [-۳ , +\infty)$

$R = (-\infty , \sqrt{۳}]$

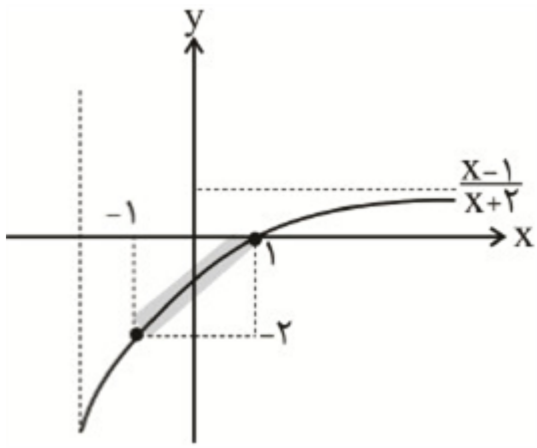
۳۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $g(x) = \dfrac{|x|-|x+۱|}{|x|+|x+۱|}$ را با بازه‌بندی رسم می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-x+(x+۱)}{-x-(x+۱)} & , \ x < -۱ \\ \frac{-x-(x+۱)}{-x+(x+۱)} & , \ -۱ \le x < ۰ \\ \frac{x-(x+۱)}{x+(x+۱)} & , \ x \ge ۰ \end{cases} = \begin{cases} \frac{۱}{-۲x-۱} & , \ x < -۱ \ \text{یا} \ x \ge ۰ \\ -۲x-۱ & , \ -۱ \le x < ۰ \end{cases}$$

نمودار g را ببینید.



پس برد g در فاصله $[-۱, ۱]$ است و باید فقط قسمتی از نمودار f که در فاصله ۱- تا ۱ است را ببینیم:



$$-۱ \le g(x) \le ۱$$

$$\xrightarrow{f \ \text{صعودی است}} f(-۱) \le f(g(x)) \le f(۱)$$

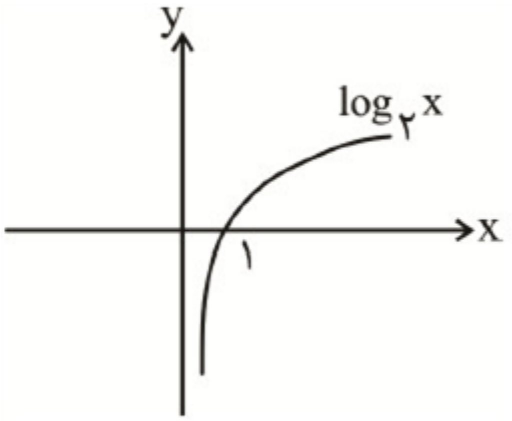
$$\Rightarrow -۲ \le \text{fog} \le ۰$$

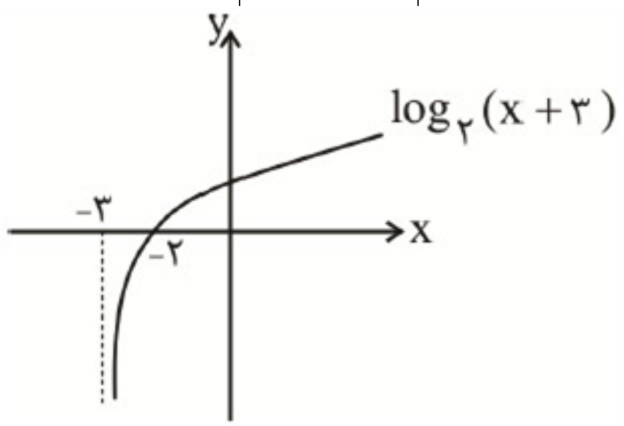
یعنی برد fog فاصله $[-۲, ۰]$ است که ۳ عدد صحیح دارد و جمع آن‌ها می‌شود.

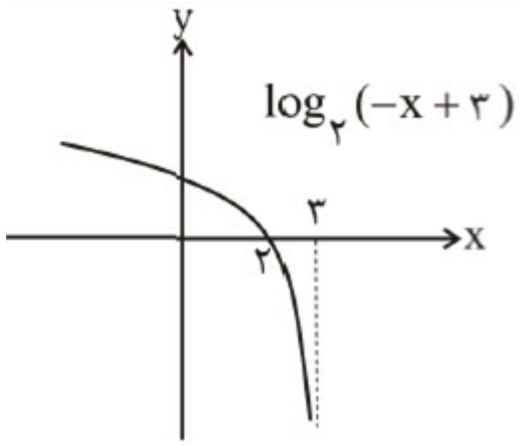
$$(-۲)+(-۱)+۰ = -۳$$

Scanned with CamScanner

۳۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار $y=\left|\mathrm{Log}_{۲}(۳-x)\right|$ را رسم می‌کنیم.

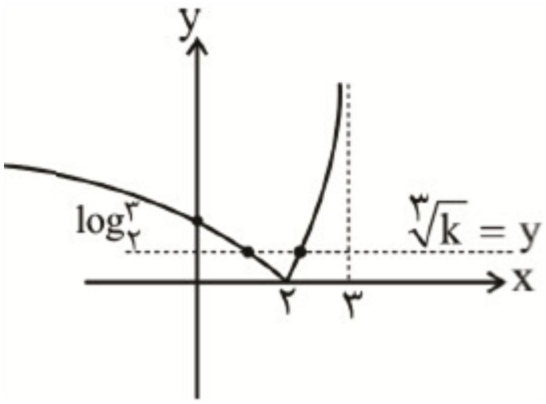






$y=\left|\mathrm{Log}_{۲}(۳-x)\right|$

پس:



حالا تلاقی آن با $y=\sqrt[۳]{k}$ دو جواب مثبت دارد، پس: $۰<\sqrt[۳]{k}<\mathrm{Log}_{۲}^{۳}$

مقدار $\mathrm{Log}_{۲}^{۳}$ برابر است: $\mathrm{Log}_{۲}^{۳}=\frac{\mathrm{Log}\,۳}{\mathrm{Log}\,۲}=\frac{۰/۴۸}{۰/۳}=۱/۶$

بنابراین $\sqrt[۳]{k}<۱/۶$ پس $k<۱/۶^{۳}$ یعنی $k<۴/۰۹۶$ و بیشترین مقدار طبیعی k می شود ۴.

Scanned with CamScanner

۳۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر f و g هر دو صعودی اکید یا هر دو نزولی اکید باشند، fog صعودی اکید است.

اگر f و g یکی صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشد، fog نزولی اکید است. تابع $f(x)$ در $(-\infty, ۱]$ اکیداً صعودی و در $[۱, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

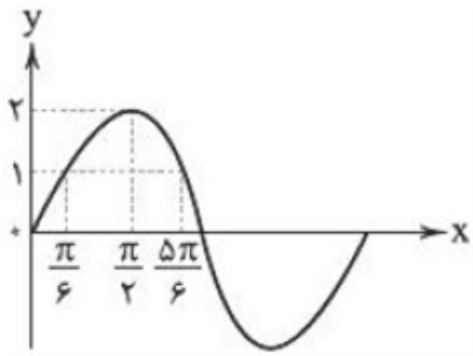
با توجه به نمودار تابع $g(x) = ۲\,\mathrm{Sin}\,x$ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) در $\left[۰, \frac{\pi}{۶}\right]$ تابع g اکیداً صعودی است و $R_g = [۰, ۱]$ و در این بازه f اکیداً صعودی است. پس fog اکیداً صعودی است.

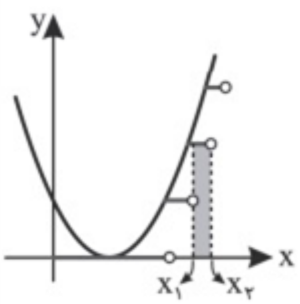
۲) در $\left[\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\right]$ تابع g ابتدا اکیداً صعودی و سپس اکیداً نزولی است و $R_g = [۱, ۲]$ و در این بازه f اکیداً نزولی است. پس fog ابتدا اکیداً نزولی، سپس اکیداً صعودی است، یعنی غیریکنوا است.

۳) در $\left[\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}\right]$ تابع g اکیداً صعودی است و $R_g = [۱, ۲]$ و در این بازه تابع f اکیداً نزولی است، یعنی fog اکیداً نزولی است.

۴) در $\left[\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶}\right]$ تابع g، اکیداً نزولی است و $R_g = [۱, ۲]$ و در این بازه تابع f اکیداً نزولی است، پس fog اکیداً صعودی است.



۳۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دقت کنید در ابتدا $y = (x - ۱)^۲$ را رسم کرده و آن را بر روی خطوط افقی $y = k$ تصویر می‌کنیم.



$$(x - ۱)^۲ = ۲ \Rightarrow x_۱ = \sqrt{۲} + ۱$$

$$(x - ۱)^۲ = ۳ \Rightarrow x_۲ = \sqrt{۳} + ۱$$

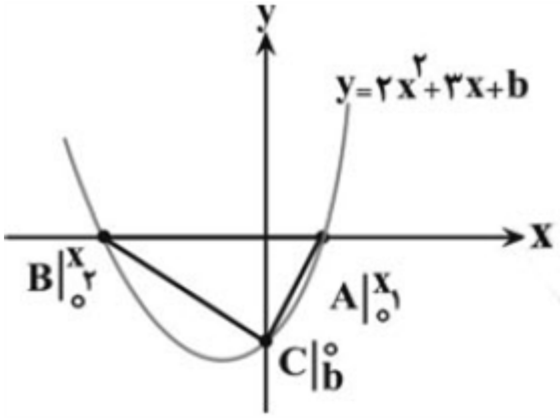
$$\text{مستطیل } S = (x_۲ - x_۱) f(x_۱)$$

$$S = \left(\sqrt{۳} + ۱ - \sqrt{۲} - ۱\right) \times ۲$$

$$S = ۲\left(\sqrt{۳} - \sqrt{۲}\right)$$

Scanned with CamScanner

۳۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث ABC قائم‌الزاویه است پس $CA \perp CB$ $m_{CA} \times m_{CB} = -۱$ و داریم:



$$\frac{b-۰}{۰-x_۱}\times\frac{b-۰}{۰-x_۲}=-۱\Rightarrow\frac{b^۲}{x_۱x_۲}=-۱$$

$$\Rightarrow b^۲=-x_۱x_۲=\frac{-b}{۲}\Rightarrow\begin{cases}b=۰\\ b=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

واضح است که b صفر نیست پس $b=\frac{-۱}{۲}$ و داریم: $y=۲x^۲+۳x-\frac{۱}{۲}$

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳}{۴}$$

$$y_S=۲\left(\frac{-۳}{۴}\right)^۲+۳\left(\frac{-۳}{۴}\right)-\frac{۱}{۲}=\frac{۹}{۸}-\frac{۹}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{-۹}{۸}-\frac{۴}{۸}=\frac{-۱۳}{۸}$$

۳۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\pi}{۸}+\frac{۷\pi}{۸}=\pi\Rightarrow \text{Cos}\,\frac{۷\pi}{۸}=-\text{Cos}\,\frac{\pi}{۸}$$

$$\frac{۳\pi}{۸}+\frac{۵\pi}{۸}=\pi\Rightarrow \text{Cos}\,\frac{۵\pi}{۸}=-\text{Cos}\,\frac{۳\pi}{۸}$$

$$\frac{\pi}{۸}+\frac{۳\pi}{۸}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \text{Sin}\,\frac{۳\pi}{۸}=\text{Cos}\,\frac{\pi}{۸}\quad(۱)$$

$$\text{عبارت موردنظر}=\left(۱+\text{Cos}\frac{\pi}{۸}\right)\left(۱+\text{Cos}\frac{۳\pi}{۸}\right)\left(۱-\text{Cos}\frac{۳\pi}{۸}\right)\left(۱-\text{Cos}\frac{\pi}{۸}\right)$$

$$=\left(۱-\text{Cos}^۲\left(\frac{\pi}{۸}\right)\right)\left(۱-\text{Cos}^۲\left(\frac{۳\pi}{۸}\right)\right)=\text{Sin}^۲\left(\frac{\pi}{۸}\right).\text{Sin}^۲\left(\frac{۳\pi}{۸}\right)=\text{Sin}^۲\left(\frac{\pi}{۸}\right).\text{Cos}^۲\left(\frac{\pi}{۸}\right)$$

$$\overset{(۱)}{=}\left(\text{Sin}\frac{\pi}{۸}.\text{Cos}\frac{\pi}{۸}\right)^۲=\left(\frac{۱}{۲}\text{Sin}\frac{۲\pi}{۸}\right)^۲=\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=\frac{۲}{۱۶}=\frac{۱}{۸}$$

۳۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا عبارت $x^۳-۲x^۲+۲x-۱$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳-۲x^۲+۲x-۱=(x^۳-۱)+(-۲x^۲+۲x)=(x-۱)(x^۲+x+۱)-۲x(x-۱)$$
$$=(x-۱)(x^۲-x+۱)$$

پس نامعادله صورت سؤال به صورت زیر در می‌آید:

$$\left|(x-۱)(x^۲-x+۱)\right|<۲(x^۲-x+۱)\xrightarrow{x^۲-x+۱>۰}$$

$$|x-۱|\,(x^۲-x+۱)<۲(x^۲-x+۱)\Rightarrow|x-۱|<۲\Rightarrow-۲<x-۱<۲\Rightarrow-۱<x<۳$$

پس $a=-۱$ و $b=۳$ و در نتیجه $b-a=۴$ است.

Scanned with CamScanner

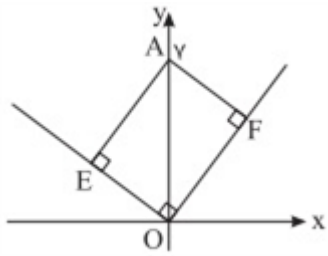
۳۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

توجه شود که دو خط $۳x + ۴y = ۰$ و $۴x - ۳y = ۰$ هر دو از مبدأ مختصات می‌گذرند و بر هم عمودند (زیرا شیب آنها عکس و قرینه‌ی یکدیگر است) پس اگر از نقطه‌ی A عمودهایی بر دو خط فوق رسم کنیم، چهارضلعی $OFAE$ مستطیل خواهد بود. برای محاسبه‌ی محیط آن کافی است طول دو ضلع مجاور آن یعنی AF و AE را محاسبه کنیم.

$$AF = \frac{|۰ + ۲۸|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{۲۸}{۵}$$

$$AE = \frac{|۰ - ۲۱|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{۲۱}{۵}$$

$$OFAE \text{ محیط چهارضلعی } = ۲\left(\frac{۲۸}{۵} + \frac{۲۱}{۵}\right) = \frac{۹۸}{۵} = ۱۹/۶$$



۴۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$m = m_. \left(۱ - \frac{۱}{۲۵}\right)^{\frac{t}{۱۵}} \Rightarrow ۶ = ۴۸۰\left(\frac{۲۴}{۲۵}\right)^{\frac{t}{۱۵}}$$

(m: جرم باقی‌مانده، $m_.$: جرم اولیه)

$$\frac{۱}{۸۰} = \left(\frac{۲۴}{۲۵}\right)^{\frac{t}{۱۵}} \Rightarrow \text{Log}\,\frac{۱}{۸۰} = \frac{t}{۱۵} \times \text{Log}\,\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\frac{t}{۱۵} = \frac{\text{Log}\,\frac{۱}{۸۰}}{\text{Log}\,\frac{۲۴}{۲۵}} \Rightarrow \frac{t}{۱۵} = \frac{\text{Log}\,۱ - \text{Log}\,۸۰}{\text{Log}\,۲۴ - \text{Log}\,۲۵} = \frac{-\text{Log}\,۱۰ \times ۲^۳}{\text{Log}\,۳ \times ۲^۳ - \text{Log}\,\frac{۱۰۰}{۴}}$$

$$\frac{t}{۱۵} = \frac{-\text{Log}\,۱۰ - ۳\,\text{Log}\,۲}{\text{Log}\,۳ + ۳\,\text{Log}\,۲ - \text{Log}\,۱۰۰ + ۲\,\text{Log}\,۲} \Rightarrow \frac{t}{۱۵} = \frac{-\text{Log}\,۱۰ - ۳\,\text{Log}\,۱۲}{\text{Log}\,۳ - \text{Log}\,۱۰۰ + ۵\,\text{Log}\,۲}$$

$$\frac{t}{۱۵} = \frac{-۱ - ۳(۰/۳)}{۰/۴۸ - ۲ + ۵(۰/۳)} \Rightarrow \frac{t}{۱۵} = \frac{-۱/۹}{-۰/۰۲} \Rightarrow t = ۱۴۲۵ \text{ روز}$$

Scanned with CamScanner

۴۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه A را به صورت $A(x,y)$ درنظر می‌گیریم. داریم:

$$AB=\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۲)^۲}=\sqrt{۵}\Rightarrow (x^۲-۲x+۱)+(y^۲+۴y+۴)=۵$$
$$AC=\sqrt{(x+۳)^۲+(y-۴)^۲}=۱\Rightarrow (x^۲+۶x+۹)+(y^۲-۸y+۱۶)=۱$$

با کم کردن طرفین معادلات اخیر از هم، داریم:

$$(-۸x-۸)+(۱۲y-۱۲)=۴\Rightarrow ۱۲y=۸x+۲۴\Rightarrow ۳y=۲x+۶$$

حالا این خط در نقطه $x=۳$ بر منحنی $y=\mathrm{xf}(x)$ مماس است.

با جایگذاری $x=۳$ در معادله خط، نقطه مماس به صورت $(۳,۴)$ است و این نقطه روی منحنی $y=\mathrm{xf}(x)$ هم قرار دارد.

پس: $۳f(۳)=۴\Rightarrow f(۳)=\frac{۴}{۳}$

از طرفی شیب این خط مماس برابر با $\frac{۲}{۳}$ است، پس مشتق تابع $y=\mathrm{xf}(x)$ در $x=۳$ باید برابر $\frac{۲}{۳}$ شود:

$$(\mathrm{xf}(x))'=f(x)+\mathrm{xf}'(x)\xrightarrow{x=۳}f(۳)+۳f'(۳)=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{f(۳)=\frac{۴}{۳}}\frac{۴}{۳}+۳f'(۳)=\frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow f'(۳)=\frac{-۲}{۹}$$

نهایتاً برای محاسبه حد خواسته شده که به صورت $\frac{۰}{۰}$ است، از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۳f^۲(x)-f(x)-۴}{x-۳}\xrightarrow{f(۳)=\frac{۴}{۳}}\frac{۰}{۰}$$
$$\lim_{x\to ۳}\frac{۶f(x)f'(x)-f'(x)}{۱}=۶f(۳)f'(۳)\xrightarrow[f'(۳)=\frac{-۲}{۹}]{f(۳)=\frac{۴}{۳}}۶\left(\frac{۴}{۳}\right)\left(\frac{-۲}{۹}\right)-\left(\frac{-۲}{۹}\right)$$
$$=\frac{-۱۶}{۹}+\frac{۲}{۹}=\frac{-۱۴}{۹}$$

۴۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به دلیل اینکه ضریب x زوج است، بهتر است طرفین معادله را تقسیم بر ۲ کنیم تا محاسبات ساده‌تر شود:

$$۲x^۲+۶x+a=۰\Rightarrow x^۲+۳x+\frac{a}{۲}=۰$$
$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-۳\\ P=\alpha\beta=\frac{a}{۲}\\ \beta=\frac{-۳-\sqrt{۹-۲a}}{۲}\end{cases}$$
$$\alpha^۳+\beta^۳+\beta^۲=-\frac{۲۱}{۲}+\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}\Rightarrow S^۳-۳PS+\beta^۲=-\frac{۲۱}{۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\Rightarrow -۲۷-۳\left(\frac{a}{۲}\right)(-۳)+\left(\frac{۹+۹-۲a+۶\sqrt{۹-۲a}}{۴}\right)=-\frac{۲۱}{۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\Rightarrow -۲۷+\frac{۹a}{۲}+\frac{۹}{۲}-\frac{a}{۲}+\frac{۳}{۲}\sqrt{۹-۲a}=-\frac{۲۱}{۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow ۹-۲a=۳\Rightarrow ۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

Scanned with CamScanner

۴۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در معادلهٔ درجه دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ به شرط $\Delta > ۰$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. بنابراین:

$$۲kx^{۲} - ۴x - ۴k - ۵ = ۰$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \frac{-(۴k+۵)}{۲k} = -۲ - \frac{۵}{۲k}$$

چون ضرایب معادله صحیح هستند پس $۲k$ عددی صحیح است. از طرفی حاصل‌ضرب ریشه‌ها باید بیش‌ترین مقدار را داشته باشد، پس $۲k$ حداکثر مقدار صحیح منفی یعنی $۲k = -۱$ باشد. پس $k = -\frac{۱}{۲}$ در نتیجه:

$$k = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow -x^{۲} - ۴x - ۳ = ۰$$

$$\Delta = (-۴)^{۲} - ۴(-۱)(-۳) = ۱۶ - ۱۲ = ۴$$

۴۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نمودار توابع $y = |ax + b|$ و $y = b$ را رسم کرده‌ایم.

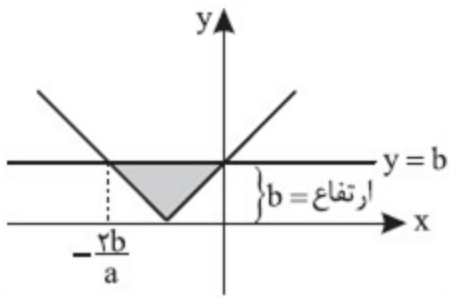
برای اینکه سطح محصور بین نمودار این دو تابع ایجاد شود باید $b > ۰$ باشد.

نقاط برخورد بین دو نمودار را پیدا می‌کنیم:

$$۱)\ ax + b = b \Rightarrow x = ۰$$

$$۲)\ ax + b = -b \Rightarrow x = \frac{-۲b}{a}$$

$$\text{مساحت} : S = \frac{\left|\frac{۲b}{a}\right| \times b}{۲} = \frac{b^{۲}}{|a|} = ۴ \Rightarrow b^{۲} = ۴|a|$$



۴۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۲(x-۲)^{۴} - ۶(x^{۲} - ۴x + ۴) + ۴ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۲)^{۴} - ۶(x-۲)^{۲} + ۴ = ۰, (x-۲)^{۲} = A$$

$$۲A^{۲} - ۶A + ۴ = ۰ \Rightarrow A^{۲} - ۳A + ۲ = ۰$$

$$A = ۱ \Rightarrow (x-۲)^{۲} = ۱ \Rightarrow x - ۲ = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۳ \\ x_۲ = ۱ \end{cases}$$

$$A = ۲ \Rightarrow (x-۲)^{۲} = ۲ \Rightarrow x - ۲ = \pm\sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = ۲ + \sqrt{۲} \\ x_۲ = ۲ - \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\text{حاصل‌جمع ریشه‌ها} = ۳ + ۱ + ۲ + \sqrt{۲} + ۲ - \sqrt{۲} = ۸$$

Scanned with CamScanner

۴۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f=\{(۰,۱),(۲,۰),(۱,۲),(۳,۱),(۵,۴)\}$$
$$g=\{(۱,۰),(۰,۲),(۲,۲),(۳,۱),(۴,۵)\}$$
$$g^{۲}=g\times g=\{(۱,۰),(۰,۴),(۲,۴),(۳,۱),(۴,۲۵)\}$$
$$D_f\cap D_g=\{۰,۱,۲,۳\}$$
$$f-g=\{(۰,-۱),(۱,۲),(۲,-۲),(۳,۰)\}$$
$$D_{\frac{g^{۲}}{f-g}}=D_{g^{۲}}\cap D_{f-g}-\{x\,|(f-g)(x)=۰\}=\{۰,۱,۲,۳\}-\{۳\}=\{۰,۱,۲\}$$
$$\frac{g^{۲}}{f-g}=\{(۰,-۴),(۱,۰),(۲,-۲)\}$$
حاصل‌جمع عضوهای برد $= -۴+۰+(-۲)=-۶$

۴۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با فرض $\operatorname{Log}_{۲}^{x}=Z$:

$$۳\operatorname{Log}_{x}^{۲}+۲\operatorname{Log}_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^{x}-۸=۰$$

$$۳\times\frac{۱}{Z}+\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}Z=۸\xrightarrow{\times Z}۴Z^{۲}-۸Z+۳=۰\begin{cases}Z=\frac{۳}{۲}\\ Z=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$
$$\operatorname{Log}_{۲}^{x}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=۲^{\frac{۳}{۲}}=۲\sqrt{۲}=\alpha$$
$$\operatorname{Log}_{۲}^{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}=\beta$$
$$\alpha^{۶}+\beta^{۶}=(۲\sqrt{۲})^{۶}+(\sqrt{۲})^{۶}=۵۱۲+۸=۵۲۰$$
$$\alpha^{۴}+\beta^{۴}=(۲\sqrt{۲})^{۴}+(\sqrt{۲})^{۴}=۶۴+۴=۶۸$$
اختلاف دو عبارت خواسته شده $=۵۲۰-۶۸=۴۵۲$

۴۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون مثلث در رأس B قائمه است پس $\mathrm{OB}^{۲}=\mathrm{OA}.\mathrm{OC}$.

$$\mathrm{OB}^{۲}=۸\times۲\Rightarrow\mathrm{OB}=۴$$
$$\left.\begin{array}{r}f(x)=k(x+۸)(x-۲)\\ f(۰)=۴\end{array}\right\}\Rightarrow-۱۶k=۴\Rightarrow k=-\frac{۱}{۴}$$
$$f(x)=-\frac{۱}{۴}(x+۸)(x-۲)\qquad S\left|\begin{array}{l}-۳\\ y\end{array}\right.$$
$$f(-۳)=-\frac{۱}{۴}\times۵\times-۵=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow y_{\max}=\frac{۲۵}{۴}$$

Scanned with CamScanner

۴۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر $x^۲ = t$ درنظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$t^۲ - (m^۲ - ۱)t + ۳ - ۴m = ۰$$

معادله‌ی اصلی دارای ۴ ریشه است، پس معادله‌ی اخیر دارای ۲ ریشه‌ی مثبت است، یعنی $\Delta > ۰$، $S > ۰, P > ۰$ از طرفی اگر $t_۱, t_۲$ ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$x^۲ = t_۱ \Rightarrow x_۱ = \sqrt{t_۱}, x_۲ = -\sqrt{t_۱}$$
$$x^۲ = t_۲ \Rightarrow x_۳ = \sqrt{t_۲}, x_۴ = -\sqrt{t_۲}$$

در مسأله ذکر شده که مجموع مربعات ریشه‌ها برابر ۳۰ است، پس:

$$(\sqrt{t_۱})^۲ + (-\sqrt{t_۱})^۲ + (\sqrt{t_۲})^۲ + (-\sqrt{t_۲})^۲ = ۳۰ \Rightarrow t_۱ + t_۱ + t_۲ + t_۲ = ۳۰$$
$$\Rightarrow ۲(t_۱ + t_۲) = ۳۰ \Rightarrow t_۱ + t_۲ = ۱۵ \Rightarrow S = ۱۵ \Rightarrow -\frac{b}{a} = ۱۵$$
$$\Rightarrow \frac{m^۲ - ۱}{۱} = ۱۵ \Rightarrow m^۲ = ۱۶ \Rightarrow m = \pm ۴ \xrightarrow[P>۰, S>۰, \Delta>۰]{\text{بررسی سه شرط}} m = ۴$$
$$\Rightarrow t^۲ - ۱۵t - ۱۳ = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰, S > ۰, P < ۰ \Rightarrow \text{غ ق ق}$$
$$m = -۴ \Rightarrow t^۲ - ۱۵t + ۱۹ = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰, S > ۰, P > ۰ \Rightarrow \text{ق ق}$$

تنها یک مقدار $m = -۴$ برای m وجود دارد.

۵۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، لذا با جایگذاری $x = ۳$ در معادله داریم:

$$\frac{x - ۲}{\mathrm{ax} - ۵} = \frac{a + ۲}{x - ۱} - ۱ \xrightarrow{x=۳} \frac{۳ - ۲}{a \times ۳ - ۵} = \frac{a + ۲}{۳ - ۱} - ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۳a - ۵} = \frac{a + ۲}{۲} - ۱$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۳a - ۵} = \frac{a + ۲}{۲} - \frac{۲}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۳a - ۵} = \frac{a + ۲ - ۲}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۳a - ۵} = \frac{a}{۲} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین می کنیم}}$$
$$a(۳a - ۵) = ۲ \Rightarrow ۳a^۲ - ۵a - ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{حل با استفاده از روش } \Delta}$$
$$\Delta = (-۵)^۲ - ۴ \times (۳) \times (-۲) = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹$$
$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x_۱ = \frac{-(-۵) + \sqrt{۴۹}}{۲ \times ۳} = \frac{۵ + ۷}{۶} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$
$$x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x_۲ = \frac{-(-۵) - \sqrt{۴۹}}{۲ \times ۳} = \frac{۵ - ۷}{۶} = \frac{-۲}{۶} = -\frac{۱}{۳}$$

Scanned with CamScanner

۵۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

راه حل اول:

$$f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳\Rightarrow y=\frac{۱}{۸}x-۳\Rightarrow y+۳=\frac{۱}{۸}x\Rightarrow x=۸\text{y}+۲۴$$

$$f^{-۱}(x)=۸\text{x}+۲۴\quad ,g(x)=x^{۳}$$

$$\Rightarrow y=x^{۳}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y}\Rightarrow g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}\text{of}^{-۱}(۵)=g^{-۱}\left(f^{-۱}(۵)\right)=g^{-۱}(۸(۵)+۲۴)=g^{-۱}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

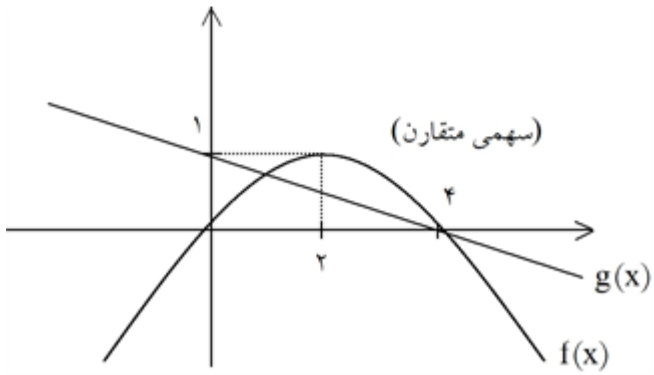
راه حل دوم: چون همواره $g^{-۱}\text{of}^{-۱}(x)=(\text{fog})^{-۱}(x)$ پس خواهیم داشت:

$$g^{-۱}\text{of}^{-۱}(۵)=(\text{fog})^{-۱}(۵)$$

$$\Rightarrow \text{fog}\,(x)=f(g(x))=\frac{۱}{۸}g(x)-۳=\frac{۱}{۸}x^{۳}-۳$$

$$\Rightarrow(\text{fog})^{-۱}(۵)=\alpha\Rightarrow(\text{fog})(\alpha)=۵\Rightarrow\frac{۱}{۸}\alpha^{۳}-۳=۵\Rightarrow\frac{۱}{۸}\alpha^{۳}=۸\Rightarrow\alpha^{۳}=۶۴\Rightarrow\alpha=۴$$

۵۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$=\lim_{x\to ۴^-}\underbrace{\frac{f(x)}{۴-x}}_{\frac{۰}{۰}}+\lim_{x\to ۴^-}\underbrace{\frac{g(x)}{۴-x}}_{\frac{۰}{۰}}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}}-f'(۴)-g'(۴)$$

$$(۰,۱),(۴,۰)\Rightarrow g(x):y-۰=\frac{۰-۱}{۴-۰}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{-۱}{۴}(x-۴)\Rightarrow g(x)=\frac{-۱}{۴}x+۱$$

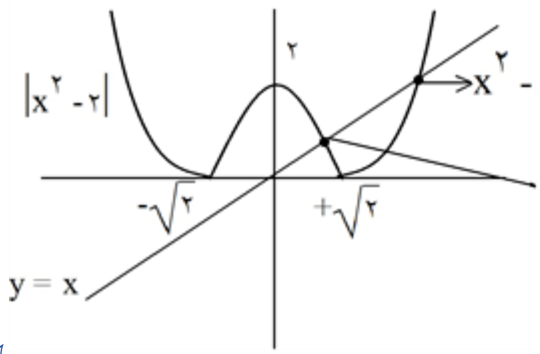
$$x_۱=۰,x_۲=۴\Rightarrow f(x)=\text{ax}\,(x-۴)\xrightarrow{(۲,۱)}f(x)=\frac{-۱}{۴}x(x-۴)\Rightarrow f(x)=\frac{-۱}{۴}x^{۲}+x$$

$$g'(x)=\frac{-۱}{۴},f'(x)=\frac{-۱}{۲}x+۱$$

$$-f'(۴)-g'(۴)=-(-۱)-\left(\frac{-۱}{۴}\right)=\frac{۵}{۴}$$

۵۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left|x^{۲}-۲\right|-x>۰\Rightarrow\left|x^{۲}-۲\right|>x$$



$$x^{۲}-۲=x\Rightarrow x^{۲}-x-۲=۰\Rightarrow\overbrace{(x-۲)}^{\checkmark}\overbrace{(x+۱)}^{\text{غ ق ق}}=۰$$

$$۲-x^{۲}=x\Rightarrow x^{۲}+x-۲=۰\Rightarrow\underbrace{(x-۱)}_{\checkmark}\underbrace{(x+۲)}_{\text{غ ق ق}}=۰$$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$$

Scanned with CamScanner

۵۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\begin{vmatrix}\text{Log } ۵ & \text{Log } ۲\\ \text{Log } ۲ & \text{Log } ۵\end{vmatrix}}_{\underbrace{(\text{Log } ۵)^۲ - (\text{Log } ۲)^۲}_{\underbrace{(\text{Log } ۵ + \text{Log } ۲)}_{\text{Log } ۱۰}\underbrace{(\text{Log } ۵ - \text{Log } ۲)}_{\text{Log } \frac{۵}{۲}}}} \text{Log}_{\frac{۵}{۲}}(۳x-۲) = ۱$$

$$\text{Log } \frac{۵}{۲} \times \text{Log}_{\frac{۵}{۲}}(۳x-۲) = ۱ \Rightarrow \cancel{\text{Log } \frac{۵}{۲}} \times \frac{\text{Log }(۳x-۲)}{\cancel{\text{Log } \frac{۵}{۲}}} = \text{Log }(۳x-۲) = ۱ \Rightarrow ۳x-۲=۱۰ \Rightarrow x=۴$$

۵۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای یافتن نقطه‌ی تقاطع باید معادله‌ی $f(x)=g(x)$ را حل کنیم:

$$۴^x = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x} + \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۴^x = \frac{۱}{۴^x} + \frac{۳}{۲}$$

با تغییر متغیر $۴^x = t > ۰$ داریم:

$$t = \frac{۱}{t} + \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲t} ۲t^۲ = ۲ + ۳t \Rightarrow ۲t^۲ - ۳t - ۲ = ۰ \Rightarrow (t-۲)(۲t+۱) = ۰ \xrightarrow{t>۰} t = ۲$$

$$\Rightarrow ۴^x = ۲ \Rightarrow ۲^{۲x} = ۲^۱ \Rightarrow ۲x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۴^{\frac{۱}{۲}} = ۲ \Rightarrow A\left(\frac{۱}{۲}, ۲\right)$$

فاصله‌ی A تا نقطه‌ی $B\left(-\frac{۱}{۲}, ۱\right)$ برابر است با: $\text{AB} = \sqrt{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)^۲ + (۲-۱)^۲} = \sqrt{۲}$

۵۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(۱+۲\text{x})(۱+۳\text{x})(۱+۴\text{x})(۱+۵\text{x}) = ۱ + (۲+۳+۴+۵)x + (\cdots)x^۲ + \cdots$$

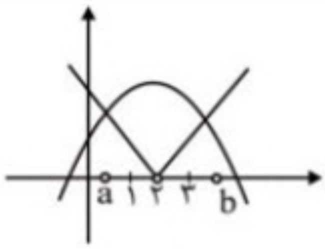
$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱ + (۲+۳+۴+۵)x + (\cdots)x^۲ + \cdots - ۱}{x} = ۲+۳+۴+۵ = ۱۴$$

۵۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در معادله الف داریم: $(x \neq ۲)$ و $-x^۲ + ۳x + ۱ > |x-۲|$ با توجه به روش هندسی
ناحیه جواب بازه بازی مانند (a,b) است که $x \neq ۲$ می‌باشد.

در نامعادله ب ناحیه جواب $(-۳, ۰)$ و همسایگی محذوف ۲ نیست. در نامعادله ج داریم:

$$۱ < \frac{۴}{x} \xrightarrow{\text{در } x^۲ \text{ ضرب}} x^۲ < ۴x \Rightarrow x^۲ - ۴x < ۰$$

در ناحیه جواب، $۲ \in (۰, ۴)$، پس همسایگی محذوف ۲ نیست.



Scanned with CamScanner

۵۸ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین دامنه‌ی تابع gof ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=\sqrt{x+|x|}\xrightarrow{D_f} x+|x|\geqslant ۰\Rightarrow\begin{cases} x\geqslant ۰: ۲x\geqslant ۰\Rightarrow x\geqslant ۰ \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\geqslant ۰\\ x<۰: x-x\geqslant ۰\Rightarrow ۰\geqslant ۰\ \text{همواره برقرار} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x<۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} x\in R\Rightarrow D_f=R$$

$$g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}\Rightarrow D_g=R-\{۰,۴\}$$

حال با توجه به دامنه‌ی تعریف تابع مرکب، می‌نویسیم:

$$D_{\text{gof}}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\left\{x\in R\middle|\sqrt{x+|x|}\in(R-\{۰,۴\})\right\}$$

باید مقادیری از x که به ازای آن‌ها $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ برابر ۰ یا ۴ می‌شوند را از R کنار بگذاریم. داریم:

$$\sqrt{x+|x|}=۰\Rightarrow x+|x|=۰\ |x|=-x\Rightarrow x\leqslant ۰$$

$$\sqrt{x+|x|}=۴\Rightarrow x+|x|=۱۶\Rightarrow\begin{cases} x\geqslant ۰: ۲x=۱۶\Rightarrow x=۸\\ x<۰: x-x=۱۶\Rightarrow ۰=۱۶\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

بنابراین اگر از R، $x\leqslant ۰$ و $x=۸$ را کنار بگذاریم، دامنه‌ی gof به‌دست می‌آید:

$$D_{\text{gof}}=\{x\in R\mid x\not\leqslant ۰, x\neq ۸\}=R>۰-\{۸\}=(۰,۸)\cup(۸,+\infty)$$

۵۹ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که هر دو تابع f و g در $x=۰$ ناپیوسته‌اند، در مورد پیوستگی جمع و تفریق و ضرب و تقسیم آن‌ها و نیز ترکیب آن با هم یعنی fog و gof و fof نمی‌توان اظهارنظر قطعی نمود و باید در هر گزینه، ضابطه‌ی تابع تابع داده شده را تشکیل داد.

بررسی هر چهار گزینه:

$$(۱)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}-۲x-\frac{۱}{۲}\ ; x<۰\\ ۲x+۱\ ; x\geqslant ۰\end{cases}$$ تابع $f+g$ در $x=۰$ ناپیوسته است

$$(۲)\ (\text{fof})(x)=f(f(x))=\begin{cases} f\left(\frac{-۱}{۲}\right)=\frac{-۱}{۲}\ ; x<۰\\ f(۲x)=۴x\ ; x\geqslant ۰\end{cases}$$ تابع fof در $x=۰$ ناپیوسته است

$$(۳)\ \text{gof}(x)=g(f(x))=\begin{cases} g\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۱ & x<۰\\ g(۲x)=۱ & x\geqslant ۰\end{cases}\Rightarrow \text{gof}(x)=۱$$ در $x=۰$ پیوسته است.

$$(۴)\ \text{fog}(x)=f(g(x))=\begin{cases} f(-۲x)=۲(-۲x)=-۴x\ ; x<۰\\ f(۱)=۲(۱)=۲\ ; x\geqslant ۰\end{cases}$$ تابع fog در $x=۰$ ناپیوسته است

۶۰

$$\text{Log}\sqrt[۳]{a}+\text{Log}\sqrt[۴]{b}+\text{Log}\sqrt[۴]{۵}=\frac{۱}{۳}\text{Log}\,a+\frac{۱}{۴}\text{Log}\,b+\frac{۱}{۴}\text{Log}\,۵$$

Scanned with CamScanner

۶۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جملهٔ اول دنباله $a_1 \geq 10$ و قدرنسبت $d \geq 9$ است. جملهٔ دهم دنباله هم نباید بزرگ‌تر از ۱۰۰ باشد.

$$a_{10} = a_1 + 9d \leq 100$$

برای d فقط دو مقدار ۹ و ۱۰ قابل قبول است. برای هر دو مقدار تعداد دنباله را حساب می‌کنیم:

الف) $$d = 10 \Rightarrow a_1 + 90 \leq 100 \Rightarrow a_1 \leq 10 \xrightarrow{a_1 \geq 10} a_1 = 10$$

یعنی فقط یک دنباله برای $d = 10$ پیدا می‌شود.

ب) $$d = 9 \Rightarrow a_1 + 81 \leq 100 \Rightarrow a_1 \leq 19 \xrightarrow{a_1 \geq 10} 10 \leq a_1 \leq 19$$

یعنی برای $d = 9$، $19 - 10 + 1 = 10$ دنبالهٔ متفاوت پیدا می‌شود. در نهایت ۱۱ دنباله با شرایط مطلوب پیدا می‌شود.

۶۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا عبارت $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x^3 - 1) + (-2x^2 + 2x) = (x-1)(x^2 + x + 1) - 2x(x-1)$$
$$= (x-1)(x^2 - x + 1)$$

پس نامعادله صورت سؤال به صورت زیر در می‌آید:

$$\left|(x-1)(x^2 - x + 1)\right| < 2(x^2 - x + 1) \xrightarrow{x^2 - x + 1 > 0}$$
$$|x-1|\,(x^2 - x + 1) < 2(x^2 - x + 1) \Rightarrow |x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x - 1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

پس $a = -1$ و $b = 3$ و در نتیجه $b - a = 4$ است.

۶۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^n} = \frac{m}{m+3} \frac{\binom{n}{m}}{2^n} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,\cancel{(n-m)!}} = \frac{m}{m+3} \cdot \frac{n}{m!\,\cancel{(n-m)!}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\cancel{m}}{m+3} \cdot \frac{n}{\cancel{m}} \Rightarrow n = m + 3 \Rightarrow \mathrm{mn} = m(m+3)$$

فقط گزینهٔ ۳ را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو عدد متوالی با اختلاف ۳ نوشت یعنی $m = 5$

۶۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

(یک زوج) یا (هیچ زوج) $\equiv$ حداکثر یک زوج انتخاب شود

$$\text{تعداد کل حالات انتخابی} = \underbrace{\binom{7}{4}}_{\substack{\text{انتخاب ۴ خانواده (زوج) از} \\ \text{۷ خانواده (زوج)}}} \times \underbrace{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}_{\text{انتخاب یک نفر از هر زوج}} + \overbrace{\binom{7}{1}}^{\substack{\text{انتخاب یک زوج (خانواده)} \\ \text{(}\equiv\text{ انتخاب ۲ نفر)}}} \times \underbrace{\binom{6}{2}}_{\substack{\text{انتخاب ۲ خانواده (زوج) از} \\ \text{باقی مانده خانواده ها}}} \times \underbrace{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}_{\text{انتخاب یک نفر از هر زوج}}$$

$$\text{تعداد کل حالات انتخاب} = (35 \times 16) + (7 \times 15 \times 4) = 980$$

Scanned with CamScanner

۶۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{بزرگترین مقدار دنباله درجه دوم} : n = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۳۳}{۲(-۲)} = ۸/۲۵ \xrightarrow[\text{عدد طبیعی است}]{\text{در دنباله، شمار جمله } (n)}$$

$$\begin{cases} n = ۸ \Rightarrow a_۸ = ۱۵۳ = \text{Max} \\ n = ۹ \Rightarrow a_۹ = ۱۵۲ \end{cases} \Rightarrow \text{(۱) بزرگ‌ترین جملهٔ } a_n \text{ برابر ۱۵۳ است}$$

$$\text{دنباله خطی} : b_n = \text{an} + b$$

$$\begin{cases} ۱۱ = ۳a + b \\ ۷۵ = ۱۱a + b \end{cases} \begin{cases} a = ۸ \\ b = -۱۳ \end{cases} \Rightarrow b_n = ۸n - ۱۳$$

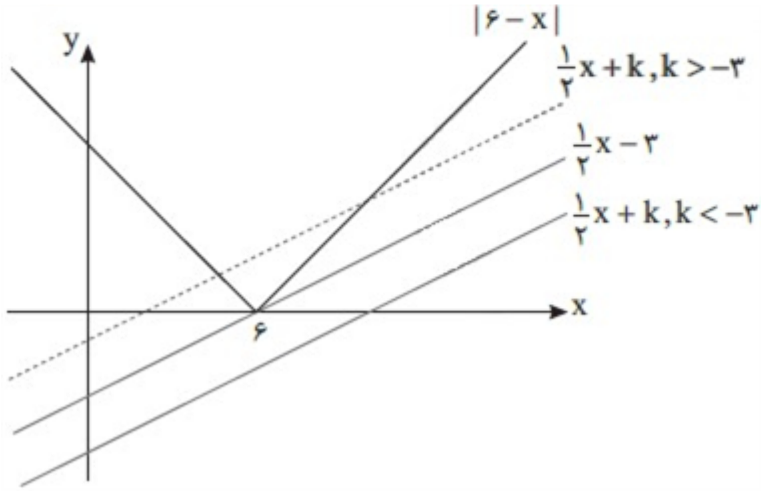
$$b_{۲۰} = ۸(۲۰) - ۱۳ \Rightarrow b_{۲۰} = ۱۴۷ \ (۲)$$

$$۱, ۲ \Rightarrow ۱۵۳ - ۱۴۷ = ۶$$

۶۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل نمودار توابع $y = |۶ - x|$ و $y = \frac{۱}{۲}x + k$ را رسم می‌کنیم. اگر $k > -۳$ باشد ۲ نمودار در ۲ نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. اگر $k = -۳$ باشد تنها نقطه‌ی برخورد نقطه‌ای با طول ۶ است. اگر $k < -۳$ باشد دو نمودار یکدیگر را قطع نمی کنند.

پس معادله‌ی $|۶ - x| = \frac{۱}{۲}x + k$ فقط به ازای $k = -۳$ یک ریشه دارد.



۶۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد توابع پوشا از مجموعه ۶ عضوی به ۴ عضوی را باید به دست آوریم:

$$۴^۶ - \left(\binom{۴}{۱}(۴-۱)^۶ - \binom{۴}{۲}(۴-۲)^۶ + \binom{۴}{۳}(۴-۳)^۶\right) = ۴۰۹۶ - (۲۹۱۶ - ۳۸۴ + ۴) = ۱۵۶۰$$

۶۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sqrt{۸۸ + ۱۸\sqrt{۷}} - \sqrt{۸۸ - ۱۸\sqrt{۷}}}{\sqrt{۴ - \sqrt{۷}} + \sqrt{۴ + \sqrt{۷}}} = \frac{\sqrt{(۹ + \sqrt{۷})^۲} - \sqrt{(۹ - \sqrt{۷})^۲}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{۷}{۲}} - \sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)^۲} + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{۷}{۲}} + \sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)^۲}}$$

$$= \frac{۹ + \sqrt{۷} - ۹ + \sqrt{۷}}{\sqrt{\frac{۷}{۲}} - \sqrt{\frac{۱}{۲}} + \sqrt{\frac{۷}{۲}} + \sqrt{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲\sqrt{۷}}{۲ \times \frac{\sqrt{۷}}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$

Scanned with CamScanner

۶۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اتحاد مثلثاتی $۱+\text{tg}^{۲}\alpha=\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}\alpha}$ و $\text{tg}\,\alpha=\frac{۱}{\text{Cotg}\,\alpha}$ خواهیم داشت:

$$۱+\frac{۱}{\text{Cotg}^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}\alpha}\quad(۱)\Rightarrow ۱+\frac{۱}{\left(\sqrt{\frac{m}{n}-۱}\right)^{۲}}=\frac{۱}{\left(\sqrt{۱-m^{۲}}\right)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۱+\frac{۱}{\frac{m}{n}-۱}=\frac{۱}{۱-m^{۲}}\Rightarrow ۱+\frac{n}{m-n}=\frac{۱}{۱-m^{۲}}\Rightarrow\frac{m-n+n}{m-n}=\frac{۱}{۱-m^{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{m}{m-n}=\frac{۱}{۱-m^{۲}}\Rightarrow m-m^{۳}=m-n\Rightarrow n=m^{۳}$$

۷۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی D، نقطه‌ی برخورد سهمی با محور عرض‌هاست.

$$x=۰\Rightarrow y=۶\Rightarrow y_D=۶\Rightarrow \text{DC}:y=۶$$

رأس سهمی را حساب می‌کنیم:

$$x_S=-\frac{k}{۲(-۱)}=\frac{k}{۲}\Rightarrow y_s=-\frac{k^{۲}}{۴}+\frac{k^{۲}}{۲}+۶=\frac{k^{۲}+۲۴}{۴}$$

$$S_{\text{ABCD}}=\text{DC}\times\text{BC}=k\times\left(\frac{k^{۲}+۲۴}{۴}-۶\right)=\frac{k^{۳}}{۴}=۵۴$$

$$\Rightarrow k^{۳}=۴\times۵۴=۸\times۲۷\Rightarrow k=۲\times۳=۶$$

فاصله‌ی نقطه‌ی B از محور xها $=\frac{k^{۲}+۲۴}{۴}=\frac{۳۶+۲۴}{۴}=۱۵$

۷۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(۰,۲\text{y}+x),(۰,۳)\Rightarrow ۲\text{y}+x=۳\ (۱)$$

$$\left(\frac{۱}{۲},x-y\right),(۰/۵,۲)\Rightarrow x-y=۲\Rightarrow y-x=-۲\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)}۳\text{y}=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۳},x=۲+y=۲+\frac{۱}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

$$f=\left\{(۰,۳),\left(\frac{۱}{۲},۲\right),\left(\frac{۷}{۳},\frac{۱}{۳}\right)\right\}$$

برد f $=R_f=\left\{۳,۲,\frac{۱}{۳}\right\}\Rightarrow$ مجموع اعضا $=۵\frac{۱}{۳}=\frac{۱۶}{۳}$

Scanned with CamScanner

۷۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a, ۲a+۱, ۳a+۲, \cdots$$

$$a_۱ = a, d = ۲a+۱-a = a+۱, S_{۱۰} = ۱۵۵, n = ۱۰$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$$

$$\xrightarrow[n=۱۰]{S_{۱۰}=۱۵۵} ۱۵۵ = \frac{۱۰}{۲}(۲(a) + (۱۰-۱)(a+۱))$$

$$\Rightarrow ۱۵۵ = ۵(۲a + ۹a + ۹) \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{طرفین بر ۵}} ۳۱ = ۱۱a + ۹$$

$$\Rightarrow ۳۱ - ۹ = ۱۱a \Rightarrow ۲۲ = ۱۱a \Rightarrow a = \frac{۲۲}{۱۱} = ۲ \Rightarrow a = a_۱ = ۲$$

$$d = a + ۱ \xrightarrow{a=۲} d = ۲ + ۱ = ۳$$

$$a_۸ = a_۱ + ۷d = ۲ + ۷(۳) = ۲ + ۲۱ = ۲۳$$

۷۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

پاسخ‌های معادله درجه ۲ از رابطهٔ $x_{۱,۲} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$ به‌دست می‌آیند. وقتی ریشه مضاعف باشد مقدار دلتا صفر است، بنابراین مقدار ریشه برابر است با:

$$x = \frac{-b}{۲a}$$

با توجه به معادلهٔ $۷x^۲ - ۶x + k = ۰$، مقدار b برابر ۶- و مقدار a برابر ۷ است (نیازی به پیدا کردن k نیست):

$$x = \frac{-b}{۲a} \Rightarrow x = \frac{-(-۶)}{۲(۷)} = \frac{۳}{۷}$$

۷۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} a_n = an^۲ + bn + c \\ a = -\frac{۱}{۷۰}(۱۴) = -\frac{۱}{۵} \end{array}\right\} a_n = -\frac{۱}{۵}n^۲ + bn + c$$

$$\left.\begin{array}{l} a_۵ = ۱۴ \Rightarrow -۵ + ۵b + c = ۱۴ \Rightarrow ۵b + c = ۱۹ \\ a_۷ = ۱۷/۲ \Rightarrow -\frac{۴۹}{۵} + ۷b + c = ۱۷/۲ \Rightarrow ۷b + c = ۲۷ \end{array}\right. \Rightarrow b = ۴, c = -۱$$

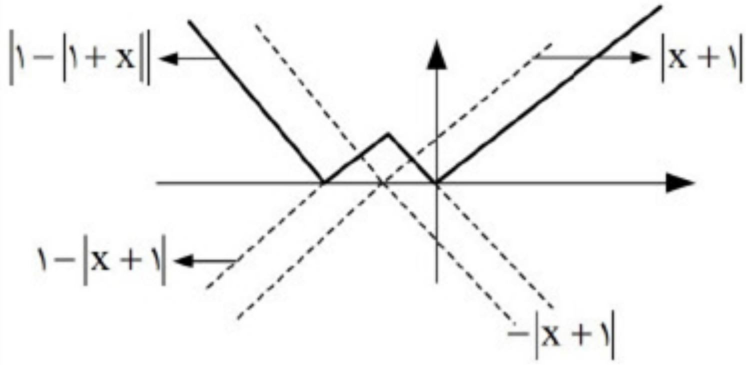
$$a_n = -۰/۲n^۲ + ۴n - ۱$$

$$\frac{a_{۱۵}}{a_۱} = \frac{-۰/۲ \times ۲۲۵ + ۶۰ - ۱}{-۰/۲ + ۴ - ۱} = \frac{۱۴}{۲/۸} = ۵$$

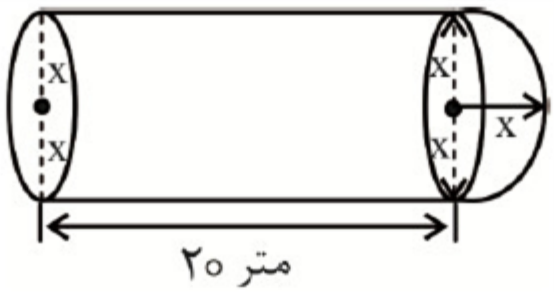
Scanned with CamScanner

۷۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(-x) = |۱ - |۱ + (-x)|| \Rightarrow f(x) = |۱ - |۱ + x||$$



۷۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$V(x) =$ حجم نیمکره + حجم استوانه

$$V(x) = \pi x^۲ \times ۲۰ + \frac{۲}{۳}\pi x^۳$$

حجم تانکر $V(x) = ۶۰x^۲ + ۲x^۳$ (π برابر فرض شود۳)

حجم مکعب به ضلع $۲x$ $W(x) = (۲x)^۳ = ۸x^۳$

$$V(x) = w(x) \Rightarrow ۶۰x^۲ + ۲x^۳ = ۸x^۳ \Rightarrow ۶۰x^۲ - ۶x^۳ = ۰$$

$$۶x^۲(۱۰ - x) = ۰ \begin{cases} x = ۰ & \text{غ ق ق} \\ x = ۱۰ & \text{متر} \end{cases}$$

کل $S = ۶x^۲ = ۶(۱۰)^۲ = ۶۰۰$ متر مربع

۷۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $a_۱ = ۲$

$$a_۲ = ۲(a_۱)^۲ = ۲(۲)^۲ = ۲^۳$$

$$a_۳ = ۲(a_۲)^۲ = ۲(۲^۳)^۲ = ۲^۷$$

$$a_۴ = ۲(a_۳)^۲ = ۲(۲^۷)^۲ = ۲^{۱۵}$$

$$\frac{a_۴}{۴۰۹۶} = \frac{۲^{۱۵}}{۲^{۱۲}} = ۲^۳ = ۸$$

۷۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن مقدار تابع داریم:

$$f(x) = (۲ - x)\,|x| + \frac{۲}{x}$$

$$f(۱ - \sqrt{۲}) = (۲ - (۱ - \sqrt{۲}))\left|۱ - \sqrt{۲}\right| + \frac{۲}{(۱ - \sqrt{۲})}$$

$$= (۱ + \sqrt{۲})(\sqrt{۲} - ۱) + \frac{۲}{۱ - \sqrt{۲}} \times \frac{(۱ + \sqrt{۲})}{(۱ + \sqrt{۲})} = (۲ - ۱) + \frac{۲ + ۲\sqrt{۲}}{۱ - ۲} = +۱ - ۲ - ۲\sqrt{۲}$$

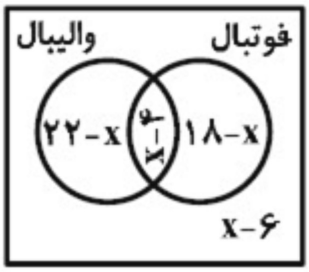
$$= -۱ - ۲\sqrt{۲} = -(۱ + ۲\sqrt{۲})$$

Scanned with CamScanner

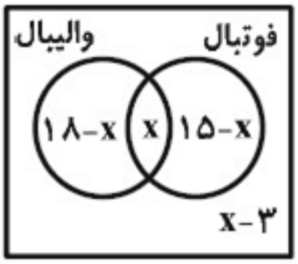
۷۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. x را تعداد دانش‌آموزانی درنظر می‌گیریم که در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. طبق نمودار ون تعداد افرادی که در هیچ کلاسی شرکت نکرده‌اند برابر است با:

با انصراف ۴ نفر از کسانی‌که در هر کلاس ثبت‌نام کرده‌اند از کلاس فوتبال، از x چهار نفر کم شده و به $x - ۱۸$، ۴ نفر اضافه می‌شود.

با ثبت‌نام ۳ نفر جدید در کلاس فوتبال، از $x - ۳$، سه نفر کم شده و به $x - ۱۵$، سه نفر اضافه می‌شود. طبق فرض داریم:



$$\frac{۲۲-x+۱۸-x}{۳۰} = \frac{۸۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۴۰-۲x}{۳۰} = \frac{۸۰}{۱۰۰}$$
$$\Rightarrow ۴۰ - ۲x = ۲۴ \Rightarrow x = ۸$$



۸۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = \binom{۱۴}{۳} = \frac{۱۴!}{۳!\,۱۱!} = \frac{۱۴\times۱۳\times۱۲\times۱۱!}{۳\times۲\times۱\times۱۱!} = ۱۴\times۱۳\times۲$$

باید ۱ قطعه خراب و ۲ قطعه سالم باشند:

$$n(A) = \binom{۵}{۱}\binom{۹}{۲} = ۵\times\frac{۹!}{۲!\,۷!} = ۵\times\frac{۹\times۸\times۷!}{۲\times۷!} = ۵\times۳۶$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵\times۳۶}{۱۴\times۱۳\times۲} = \frac{۴۵}{۹۱}$$

۸۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد نقاط در شکل n ام برابر $۲n - ۱$ است.

$$a_n = (۲n-۱)(۲n+۱)$$
$$S = \frac{۱}{۱\times۳} + \frac{۱}{۳\times۵} + \dots + \frac{۱}{۱۹\times۲۱}$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \dots + \frac{۱}{۱۹} - \frac{۱}{۲۱}\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲۱}\right) = \frac{۱۰}{۲۱}$$

Scanned with CamScanner

۸۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} + \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{\operatorname{Sin}^{۲} x + \operatorname{Cos}^{۲} x}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \frac{۱}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = ۳$$

$$A = \frac{\operatorname{tg}^{۲} x + \operatorname{Cotg}^{۲} x}{\operatorname{tg}^{۳} x + \operatorname{Cotg}^{۳} x} = \frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x)^{۲} - ۲ \operatorname{tg} x . \operatorname{Cotg} x}{(\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x)^{۳} - ۳ \operatorname{tg} x . \operatorname{Cotg} x (\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x)} = \frac{۳^{۲} - ۲}{۳^{۳} - ۳(۳)} = \frac{۷}{۱۸}$$

۸۳ برای حل این سؤال جمله وسط را b درنظر می‌گیریم. $b - d, b, b + d$

مجموع این سه جمله: $b - d + b + b + d = ۴۸ \Rightarrow ۳b = ۴۸ \Rightarrow b = ۱۶$

ضرب این سه جمله:

$$(b - d)b(b + d) = ۲۱۶۰ \xrightarrow{b=۱۶} (۱۶ - d)۱۶(۱۶ + d) = ۲۱۶۰ \xrightarrow{\div ۱۶} ۲۵۶ - d^{۲} = ۱۳۵$$

$$\Rightarrow d^{۲} = ۱۲۱ \Rightarrow d = \pm ۱۱$$

چون دنباله افزایشی است $d = ۱۱$ درنظر می‌گیریم.

$$\xrightarrow[d=۱۱]{b=۱۶} ۵, ۱۶, ۲۷, \ldots \Rightarrow \begin{cases} a_{۱} = ۵ \\ d = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow a_n = a_{۱} + (n - ۱)d \Rightarrow a_n = ۵ + (n - ۱)(۱۱)$$

$$\Rightarrow a_n = ۱۱n - ۶$$

برای یافتن جملات دو رقمی، جمله عمومی این دنباله را بین ۹ و ۱۰۰ قرار می‌دهیم.

$$۹ < ۱۱n - ۶ < ۱۰۰ \xrightarrow{+۶} ۱۵ < ۱۱n < ۱۰۶ \xrightarrow{\div ۱۱} ۱/۳ < n < ۹/۶ \Rightarrow ۲ \leq n \leq ۹$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جملات} = ۹ - ۲ + ۱ = ۸$$

بنابراین ۸ جمله این دنباله دو رقمی است.

۸۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر $g(x) = b$ ثابت باشد، داریم:

$$h(۱) = |۱ + ۵| = ۶ = f(۱) - g(۱) = ۱ - b \Rightarrow b = -۵$$

$$h(-۱) = f(-۱) - g(-۱) = -۱ - (-۵) = ۴$$

Scanned with CamScanner

۸۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a_n = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2a_n = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{3\times 5} + \cdots + \frac{2}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$2a_n = \frac{3-1}{1\times 3} + \frac{5-3}{3\times 5} + \cdots + \frac{(2n+1)-(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)}$$

با تفکیک هر کدام از کسرها داریم:

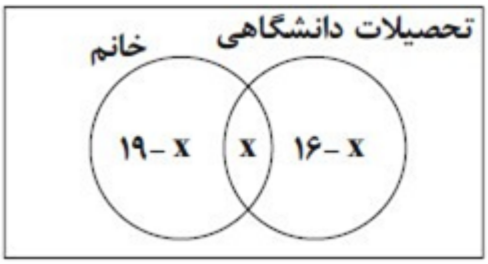
$$2a_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$2a_n = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

مقدار a_{10} را می‌خواهیم پس $n = 10$ قرار می‌دهیم:

$$2a_{10} = 1 - \frac{1}{2(10)+1} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \xrightarrow{\div 2} a_{10} = \frac{10}{21}$$

۸۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر تعداد خانم‌هایی که تحصیلات دانشگاهی دارند را با x نشان دهیم، نمودار ون زیر به‌دست می‌آید:



با توجه به آن‌که شرکت ۳۰ کارمند دارد، پس:

$$(19-x) + x + (16-x) \leq 30 \Rightarrow x \geq 5$$

از طرفی واضح است که $x \leq 16$.

طبق نمودار ون تعداد خانم‌هایی که تحصیلات دانشگاهی ندارند برابر با $19 - x$ است. پس:

$$5 \leq x \leq 16 \Rightarrow 3 \leq 19 - x \leq 14$$

۸۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt[3]{A} = (2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}(2+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^3}\,\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})^4}\,\sqrt[3]{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^9(2+\sqrt{3})^8(\sqrt{2})^2} = \sqrt[6]{((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}))^8(2-\sqrt{3})(2)}$$

$$= \sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \Rightarrow A = \sqrt{3}-1$$

Scanned with CamScanner

۸۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا فرض می‌کنیم $x < ۰$ باشد: اگر $x < ۰ \Rightarrow |x| = -x$

$$۴x^۲ = -۴(-x) + ۳ \Rightarrow ۴x^۲ = ۴x + ۳$$

$$۴x^۲ - ۴x - ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۱۶ + ۴۸ = ۶۴$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۴ \pm ۸}{۸} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۴+۸}{۸} = \frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق} \Rightarrow \text{فرض شده بود } x < ۰ \text{ چون} \\ x = \frac{۴-۸}{۸} = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

اکنون حالت $x > ۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$x > ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow ۴x^۲ = -۴x + ۳ \Rightarrow ۴x^۲ + ۴x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

بنابراین $x = \frac{۱}{۲}$ و $x = -\frac{۱}{۲}$ ریشه‌های معادله هستند.

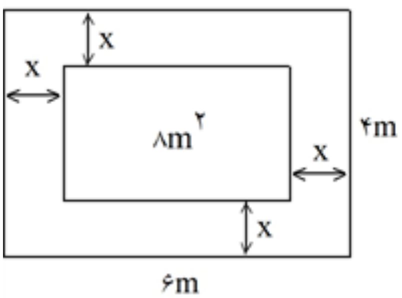
۸۹ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مخرج هریک از کسرها را به‌طور جداگانه گویا می‌کنیم.

$$A = \frac{\sqrt{۲} - ۱}{(\sqrt{۲} + ۱)(\sqrt{۲} - ۱)} + \frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})} + \dots + \frac{\sqrt{۱۰۰} - \sqrt{۹۹}}{(\sqrt{۱۰۰} + \sqrt{۹۹})(\sqrt{۱۰۰} - \sqrt{۹۹})}$$

$$\frac{\sqrt{۲} - ۱}{۱} + \frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{۱} + \dots + \frac{\sqrt{۱۰۰} - \sqrt{۹۹}}{۱} = \sqrt{۱۰۰} - ۱ = ۹$$

توجه کنید که در عبارت فوق عبارت‌ها یکی‌یکی ساده می‌شوند و فقط ۱- از عبارت اول و $\sqrt{۱۰۰}$ از عبارت آخر باقی می‌ماند.

۹۰ فاصله هر طرف قالی را تا دیوارهای اتاق مستطیل شکل برابر با x فرض می‌کنیم (طبق شکل).



مساحت قالی $= ۸m^۲$

طول قالی $= ۶ - ۲x$

عرض قالی $= ۴ - ۲x$

$$\Rightarrow (۶ - ۲x)(۴ - ۲x) = ۸$$

$$\Rightarrow ۲۴ + ۴x^۲ - ۲۰x = ۸$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۲۰x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ & \times \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ & \checkmark \end{cases}$$

مقدار ۴ برای x قابل قبول نیست
زیرا عرض اتاق ۴m است

Scanned with CamScanner

پاسخنامه کلیدی

۲	۱	۲	۳	**۴**
۳	۱	۲	**۳**	۴
۴	۱	**۲**	۳	۴
۵	۱	۲	**۳**	۴
۶	۱	۲	**۳**	۴
۹	۱	**۲**	۳	۴
۱۰	۱	**۲**	۳	۴
۱۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۲	۱	**۲**	۳	۴
۱۳	**۱**	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	**۳**	۴
۱۵	۱	**۲**	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	**۴**
۱۷	**۱**	۲	۳	۴
۱۸	**۱**	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	**۴**
۲۰	۱	۲	۳	**۴**
۲۱	۱	۲	۳	**۴**
۲۲	۱	۲	۳	**۴**
۲۳	**۱**	۲	۳	۴
۲۵	۱	**۲**	۳	۴
۳۲	۱	۲	**۳**	۴
۳۳	۱	۲	۳	**۴**
۳۴	۱	۲	**۳**	۴
۳۵	۱	**۲**	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	**۴**
۳۷	۱	۲	**۳**	۴
۳۸	۱	۲	۳	**۴**
۳۹	**۱**	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	**۴**
۴۱	۱	۲	**۳**	۴
۴۲	۱	۲	**۳**	۴
۴۳	**۱**	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	**۴**
۴۵	۱	۲	۳	**۴**
۴۶	۱	۲	۳	**۴**
۴۷	**۱**	۲	۳	۴
۴۸	**۱**	۲	۳	۴
۴۹	۱	**۲**	۳	۴
۵۰	۱	**۲**	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	**۴**
۵۲	۱	۲	**۳**	۴
۵۳	۱	۲	۳	**۴**
۵۴	۱	۲	**۳**	۴
۵۵	۱	**۲**	۳	۴
۵۶	۱	**۲**	۳	۴
۵۷	**۱**	۲	۳	۴
۵۸	**۱**	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	**۳**	۴
۶۱	۱	**۲**	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	**۴**
۶۳	۱	۲	**۳**	۴
۶۴	۱	۲	۳	**۴**
۶۵	**۱**	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	**۳**	۴
۶۷	۱	۲	۳	**۴**
۶۸	۱	**۲**	۳	۴
۶۹	۱	۲	**۳**	۴
۷۰	۱	۲	**۳**	۴
۷۱	۱	۲	۳	**۴**
۷۲	۱	۲	**۳**	۴
۷۳	۱	۲	۳	**۴**
۷۴	۱	۲	۳	**۴**
۷۵	۱	۲	۳	**۴**
۷۶	۱	۲	۳	**۴**
۷۷	۱	**۲**	۳	۴
۷۸	**۱**	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	**۳**	۴
۸۰	۱	۲	**۳**	۴
۸۱	۱	۲	۳	**۴**
۸۲	۱	**۲**	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	**۴**
۸۵	۱	۲	**۳**	۴
۸۶	۱	۲	**۳**	۴
۸۷	**۱**	۲	۳	۴
۸۸	**۱**	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	**۳**	۴

Scanned with CamScanner