سؤالات موضوعی نهایی

((هندسه ۳))

پایه دوازدهم رشته‌ی ریاضی و فیزیک

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

آخرین نسخه: شهریور ۱۴۰۱

فصل اوّل

((هندسه ۳))

* * *

درس ۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

۱	عبارت زیر را کامل کنید اگر ماتریس $\begin{bmatrix} n & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+n$ برابر با ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	ماتریس A مربعی مرتبه ۳ به صورت $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$، به صورت زیر $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ تعریف شده است، این ماتریس را با درایه هایش (آرایش مستطیلی) بنویسید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۴	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید. (خارج کشور) ماتریس $A_{۳\times۴}$ دارای ۱۲ درایه است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	ماتریس مربعی I_n که آن را ماتریس واحد مرتبه‌ی n می نامیم، عضو خنثی برای عمل..... ماتریس های مربعی مرتبه‌ی n است. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۶	با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نمی باشد، به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی توان نتیجه گرفت $B=C$ (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۷	الف) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲x-۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با .... است. ب) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۲n+۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه‌ی m و n ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه‌ی دو است).	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره

۸	اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A=[۳i-۲j]_{۳\times۳}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند. الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) ماتریس $B^۲$ را محاسبه کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۹	اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ و تعویض پذیر باشند، ثابت کنید : $(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲$	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۱۰	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) ماتریس مربعی که تمام درایه های واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند،ماتریس قطری نامیده می شود.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۱	اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i\times j & i>j \\ i^۲ & i=j \\ i+j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد. ماتریس $۳A-۴I$ را به دست آورید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۱۲	اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس های $A^۳$ و $A\times B$ را با درایه هایشان مشخص کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره

فصل اوّل

((هندسه ۳))

❊❊❊

درس ۲ : وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان و وارون ماتریس

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $\|A\|=۵$ باشد، آنگاه $\|۲A\|=۴۰$ است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	دترمینان ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را معلوم کنید. (خارج کشور) دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.(خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۵	اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۲ \\ -۴ & -۴ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\|\|A\|A\|$ را بیابید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۶	اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت عدد حقیقی m را چنان بیابید که تساوی زیر برقرار باشد. $\|A\|^۲ -۵\|A\| +۶ = ۰$ (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۷	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{۲۲}=۵$، در این صورت $\|A\|$ برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۸	اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A-۲I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه‌ی دو است.)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره

۹	اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۲&۰\\۰&۰&-۱\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\|\|A\|A\|$ را بیابید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۱۰	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خارج کشور) الف) وارون هر ماتریس مربعی، در صورت وجود .... است. ب) اگر $A=\begin{bmatrix}۸&a\\-۶&-۳\end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار a برابر .... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۱۱	اگر $A=\begin{bmatrix}\|A\|&۲\|A\|\\\|A\|^۲&۷\end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $\|A\|$ را بیابید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۷۵ نمره

دستگاه معادلات خطی

۱	دستگاه $\begin{cases}۲x+y=۴\\۷x+۴y=۱۵\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۲	دستگاه $\begin{cases}۲x+y=۰\\x+۳y=۵\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ آنگاه دستگاه بی شمار جواب دارد.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۴	دستگاه $\begin{cases}۲x+y=۰\\۳y+x=۵\end{cases}$ را به روش ماتریس معکوس حل کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۵			
۶			
۷			

فصل دوّم

((هندسه ۳))

* * *

درس ۱ : مقاطع مخروطی و مکان هندسی

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر صفحه‌ی P به گونه ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک هذلولی است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	نقاط A و B و C در صفحه مفروض اند، نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از C به فاصله‌ی۳ سانتی باشد. (در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی گزاره زیر را معلوم کنید. (خارج کشور) فصل مشترک یک صفحه و یک کره، همواره یک دایره است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	نقاط A و B و خط d در صفحه مفروض اند، نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله‌ی یک سانتی باشد. (در مورد حالت های مختلف جواب بحث کنید.) (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	جای خالی را کامل کنید. اگر صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه‌ی سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحه‌ی P و سطح مخروطی یک ..... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه‌ی ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۸	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماسند، دو خط به موازات d و به فاصله‌ی r از d است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره

فصل دوّم

((هندسه۳))

***

درس ۲ : دایره

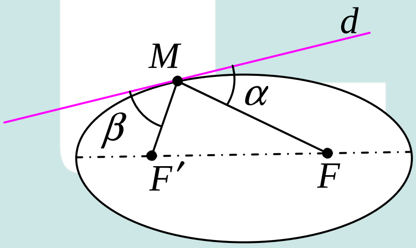
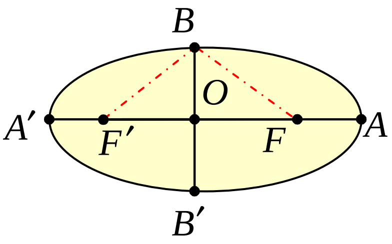
۱	عبارت زیر را با یکی از کلمات داخل پرانتز کامل کنید. نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ در....... دایره به معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y=۰$ قرار دارد. (خارج/ داخل)	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(۱,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	وضعیت خط $۳x-۴y=۱۳$ را نسبت به دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x=۳$ مشخص کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	الف) حدود k را طوری به دست آورید که $x^{۲}+y^{۲}-۴x+۶y+k=۰$ معادله‌ی یک دایره باشد. ب) وضعیت خط $x+y=۱$ و دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y-۲=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۵	حدود k را طوری به دست آورید که $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۸y+k=۰$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۶	در نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y-۳=۰$ مماسی بر آن رسم کرده ایم، معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۷	وضعیت دو دایره‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۲x=۴$ و $x^{۲}+y^{۲}=۴$ را نسبت به هم مشخص کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره

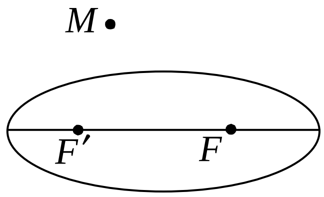
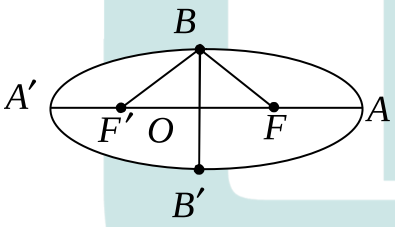
فصل دوّم

((هندسه۳))

❀❀❀

درس ۲ : بیضی

۱	عبارت زیر را کامل کنید. اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به ..... نزدیکتر می شود.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در شکل روبرو اگر خط d در نقطه‌ی M بر بیضی مماس بوده و زاویه‌ی FMF' برابر ۵۰ درجه باشد، آنگاه $\alpha = \beta = ۶۰^{\circ}$ است. 	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۳	در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است. الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید. ب) مختصات کانون ها (F و F') و مختصات دو سر قطر بزرگ (A و A') و مختصات دو سرقطر کوچک (B و B') را به دست آورید. پ) بیضی را در دستگاه محور های مختصات رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (خارج کشور) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر .... باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	در یک بیضی اندازه‌ی قطر بزرگ برابر ۲۰ و خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ است. طول قطر کوچک بیضی و اندازه‌ی کانونی آن را بیابید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۶	اگر در بیضی زیر، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید. (خارج کشور) 	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره

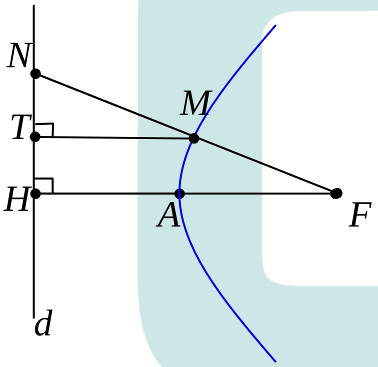
۷	اگر M نقطه ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید، مجموع فواصل نقطه‌ی M از کانون های F و F' بزرگتر از طول قطر بزرگ بیضی است.  	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۸	اگر در یک بیضی طول قطر بزرگ(AA') برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{۳}{۴}$ باشد، فاصله‌ی رأس A تا نزدیکترین کانون را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۹	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خارج کشور) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیکتر شود، شکل بیضی به .... نزدیکتر می شود.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۰	اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۳}{۵}$ و اندازه‌ی قطر کوچک بیضی برابر۱۶ باشد: (خارج کشور) الف : طول قطر بزرگ بیضی را تعیین کنید. ب : فاصله‌ی کانونی را تعیین کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۱۱	در یک بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' را تعیین کنید. (خارج کشور)  	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره

فصل دوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۲ : سهمی

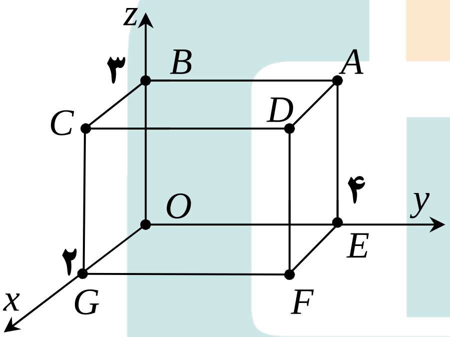
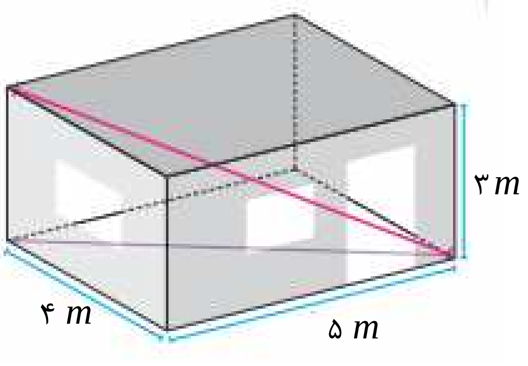
۱	سهمی به معادله‌ی $y^۲ - ۲y - ۸x + ۹ = ۰$ را در نظر بگیرید. الف) معادله‌ی متعارف و فاصله‌ی کانونی را بیابید. ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۲	در شکل روبرو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه‌ی M ، پاره خط MT را بر d عمود کرده ایم. ثابت کنید $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$ 	خرداد ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۳	سهمی به معادله‌ی $y^۲ + ۸x + ۲y + ۹ = ۰$ مفروض است. معادله‌ی استاندارد سهمی را نوشته، نوع سهمی ، مختصات رأس ، مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی را به دست آورید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۴	الف) معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(۲,۳)$ رأس آن بوده و معادله‌ی خط هادی آن $x = ۳$ باشد. ب) مختصات کانون سهمی را بیابید. پ) مختصات نقطه‌ی برخورد سهمی با محور طول ها را حساب کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۵	معادله‌ی سهمی $x^۲ - ۴ = ۸y + ۴x$ را به حالت استاندارد تبدیل، مختصات کانون و رأس آن را تعیین کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۶			
۷			

فصل سوّم

((هندسه۳))

* * *

درس ۱ : فضای سه بعدی و بردار

۱	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه‌ی $x^۲ \le y \le ۲$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۲	با توجه به شکل مقابل، به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) نام وجهی از شکل که معادله‌ی آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید. ($۰ \le z \le ۳$ و $۰ \le y \le ۴$ و $x = ۲$) ب) معادلات مربوط به پاره خط(یال) AD را بنویسید. پ) مختصات نقطه‌ی D را بنویسید.  ت) معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که موازی با صفحه‌ی xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۳	در شکل مقابل ، اتاقی به طول ۵ و عرض ۴ و ارتفاع ۳ متر مشاهده می شود. طول قطر کف اتاق و طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه‌ی مقابلش چقدر است؟ (خارج کشور) 	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۴	در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (خارج کشور) نمودار مربوط به معادله‌ی $x = ۰$ در $R^۳$ ، تمام نقاط .... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۵	جای خالی را کامل کنید. در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ ، معادله‌ی محور .... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره

۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\vec{b} = r\vec{a}$، آنگاه $\|\vec{b}\| = \|r\| \times \|\vec{a}\|$	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه‌ی $-1 < x \leq 2$ و $y = x^2$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۷۵ نمره
۸	طول بردار $\vec{a} = (0,-3,4)$ را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) نقطه‌ی $(0,0,-3)$ روی صفحه‌ی yoz قرار دارد.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۱۰	در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خارج کشور) اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\|$ در این صورت زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ...... است.	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره

فصل سوّم

((هندسه ۳))

⁂

درس ۲ : ضرب داخلی دو بردار و کاربرد

۱	سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ را در نظر بگیرید. الف) کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}-\vec{c}$ را بدست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۷۵ نمره
۲	برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، بر هم عمودند،اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	اگر $\vec{a}=۴\vec{k}-۲\vec{j}-\vec{i}$ و $\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}$ و $r=\frac{۱}{۴}$ (خارج کشور) الف) بردار $r(۳\vec{a}-\vec{b})$ را بیابید. ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را بدست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۲ نمره
۴	زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ را پیدا کنید. (خارج کشور)	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۵	مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}=(۲,m,-۱)$ و $\vec{b}=(m+۱,۳,۲)$ بر هم عمود باشند.	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره
۶	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. (خارج کشور) برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامساوی $\lvert\vec{a}.\vec{b}\rvert\leq\lvert\lvert\vec{a}\rvert\rvert\times\lvert\lvert\vec{b}\rvert\rvert$	شهریور ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۷	فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردار هایی باشند که به ترتیب به طول های ۲ و ۳ و ۴ باشند. اگر این سه بردار دو به دو بر هم عمود باشند، طول بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ را تعیین کنید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۸	اگر $\vec{a}=(۲,-۶,۴)$ و $\vec{b}=(-۲,۱,-۵)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ را به دست آورید. (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱ نمره

فصل سوّم

((هندسه ۳))

* * *

درس ۳ : ضرب خارجی دو بردار و کاربرد

۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حاصل ضرب خارجی ($\vec{i}\times\vec{j}=\vec{o}$) برابر صفر است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۲	دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند. اگر $\|\vec{a}\|=۶$ و $\|\vec{b}\|$ و زاویه‌ی بین دو بردار ۳۰ درجه باشد. مقدار $\|۲\vec{a}\times\vec{b}\|$ را محاسبه کنید.	خرداد ۱۴۰۱	۱ نمره
۳	عبارت زیر را کامل کنید. اگر سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آنگاه حجم متوازی السطوح بنا شده توسط این سه بردار برابر .... است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۴	اگر $A=(۲,-۱,۳)$ و $B=(۳,۱,۴)$ و $C=(-۱,۱,۰)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت ABC را با استفاده از ضرب خارجی به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۵	درستی یا نادرستی گزاره ی زیر را معلوم کنید. حاصل ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر بردار صفر است.	خرداد ۱۴۰۱	۰/۲۵ نمره
۶	اگر $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۰,-۱)$ و $C(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت ABC را با استفاده از ضرب خارجی به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۱	۱/۵ نمره
۷	اگر $\|\vec{a}\|=۳$ و $\|\vec{b}\|=۵$ و حاصل ضرب داخلی دو بردار برابر ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تولید می شود، چقدر است؟	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۸	حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{b}=(۰,۲,۲)$ و $\vec{c}=(۲,-۳,۰)$ تولید می شود.	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره
۹	دو بردار $\vec{a}=-\vec{k}-\vec{j}$ و $\vec{b}=(۲,-۱,-۲)$ را در نظر بگیرید. (خارج کشور) الف) زاویه‌ی بین دو بردار را تعیین کنید. ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.	شهریور ۱۴۰۱	۲ نمره
۱۰	آیا سه بردار $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{c}=(۳,۱,۲)$ در یک صفحه قرار دارند؟چرا؟ (خارج کشور)	شهریور ۱۴۰۱	۱/۲۵ نمره

فصل اوّل

((هندسه ۳))

❁❁❁

درس ۱ : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

۱ می دانیم که در ماتریس همانی درایه های روی قطر اصل برابر یک و درایه های خارج قطر اصلی صفر هستند. لذا در ماتریس همانی $\begin{bmatrix} n & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داریم $n=۱$ و $m-۱=۰$ یعنی $m=۱$ که نتیجه می شود $m+n=۲$

۲ $A\times B=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}$

و چون در ماتریس قطری دایره های خارج از قطر اصلی برابر صفر می باشند، لذا :

$-۸+۲a=۰\rightarrow a=۴$ و $b-۳=۰\rightarrow b=۳$

۳ با توجه به تعریف $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ می توان به شکل زیر عمل کرد :

ستون / سطر	۱	۲	۳
۱	۱+۱=۲	٠	٠
۲	۱	۲+۲=٤	٠
۳	۱	۲	۳+۳=٦

$\rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & ٠ & ٠ \\ ۱ & ۴ & ٠ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$

۴ درست ، وقتی گفته می شود، ماتریس $A_{۳\times۴}$ ، یعنی اینکه این ماتریس دارای ۳ سطر و۴ ستون می باشد. در نتیجه این ماتریس دارای $۱۲=۴\times۳$ درایه می باشد.

۵ می دانیم که برابر هر ماتریس مربعی I_n داریم $AI=IA=A$ ، لذا در اصطلاح گفته می شود که I_n عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس های مربعی مرتبه‌ی n است.

۶ اگر $C=\begin{bmatrix} ٠ & ۴ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ۲ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ در این صورت

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

یعنی $AB=AC$. این در حالی است که $B\neq C$

۷

الف) $۲x-۱=۵\rightarrow x=۳$

ب) $m+۱=۰\rightarrow m=-۱$ و $۲n+۴=۰\rightarrow n=-۲$

$$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$$

۸

الف) ابتدا هر یک از درایه های ماتریس A را محاسبه می کنیم.

$۳i-۲j$	۱	۲	۳
۱	$۳(۱)-۲(۱)=۱$	$۳(۱)-۲(۲)=-۱$	$۳(۱)-۲(۳)=-۳$
۲	$۳(۲)-۲(۱)=۴$	$۳(۲)-۲(۲)=۲$	$۳(۲)-۲(۳)=۰$
۳	$۳(۳)-۲(۱)=۷$	$۳(۳)-۲(۲)=۵$	$۳(۳)-۲(۳)=۳$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۴ & ۲ & ۰\\ ۷ & ۵ & ۳\end{bmatrix}$$

ب)

$$B^۲=B\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۶\\ -۳ & ۷ & ۶\\ -۲ & ۲ & ۷\end{bmatrix}$$

۹

$$(A-B)^۲=(A-B)(A-B)=A^۲-AB-BA+B^۲\overset{AB=BA}{=}A^۲-۲AB+B^۲$$

۱۰

نادرست، در ماتریس قطری تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی آن برابر صفر می باشند.

۱۱

ابتدا هر یک از درایه های ماتریس A را محاسبه می کنیم.

	۱	۲	۳
۱	$(۱)^۲=۱$	$(۲)(۱)=۲$	$(۳)(۱)=۳$
۲	$(۱)+(۲)=۳$	$(۲)^۲=۴$	$(۳)(۲)=۶$
۳	$(۱)+(۳)=۴$	$(۲)+(۳)=۵$	$(۳)^۲=۹$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۳ & ۴ & ۶\\ ۴ & ۵ & ۹\end{bmatrix}$$

	$۳A-۴I=۳\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۳&۴&۶\\۴&۵&۹\end{bmatrix}-۴\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۶&۹\\۹&۸&۱۸\\۱۲&۱۵&۲۳\end{bmatrix}$
۱۲	$A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}\rightarrow A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۹&۰\\۰&۰&۴\end{bmatrix}$ $A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۹&۰\\۰&۰&۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۲۷&۰\\۰&۰&-۸\end{bmatrix}$ $A\times B=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&-۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱&۰&-۲\\-۱&۳&۰\\۲&۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&-۲\\-۳&۹&۰\\-۴&-۲&۰\end{bmatrix}$

فصل اوّل

((هندسه ۳))

* * *

درس ۲ : وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان و وارون ماتریس

۱	درست : بنابر ویژگی های دترمینان می توان نوشت: $\lvert ۲A\rvert=۲^{۳}\lvert A\rvert=۸\times ۵=۴۰$
۲	برای محاسبه دترمینان، چون در صورت سؤال اشاره ای به روش خاصی نشده است، می توان به دلخواه عمل کرد. در اینجا از روش ساروس استفاده می کنیم. $\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$ $\rightarrow\lvert B\rvert=(۳۰+۴+۰)-(۰-۵+۰)=۳۴+۵=۳۹$
۳	می دانیم که دو ماتریس B و A وارون همدیگرند، هرگاه $A\times B=B\times A=I$ در اینجا چون $A\times B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و چون حاصل ضرب ماتریس همانی نشد، پس دو ماتریس وارون یکدیگر نیستند و لذا عبارت داده شده نادرست است.
۴	کافی است ماتریس را دو بار کنار هم بنویسیم و سپس دستور ساروس را بکار بگیریم. $\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ $\lvert A\rvert=(۲-۶-۲)-(-۲-۲-۶)=۴$
۵	ابتدا $\lvert A\rvert$ را به روش دلخواه محاسبه می کنیم. در اینجا از روش بسط نسبت به سطر اول استفاده می کنیم. $\lvert A\rvert=(-۱)(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix}۲ & -۲\\ -۴ & ۱\end{vmatrix}=(-۱)(۱)(۲+۸)=-۱۰$ ماتریس A یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ است و به کمک ویژگی های دترمینان می توان نوشت: $\lvert\lvert A\rvert A\rvert=\lvert A\rvert^{۳}\lvert A\rvert=(-۱۰)^{۳}(-۱۰)=(-۱۰۰۰)(-۱۰)=۱۰۰۰۰$

۶	ابتدا دترمینان ماتریس A را محاسبه می کنیم. $A=\begin{bmatrix}۲ & m\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\to\lvert A\rvert=(۲)(۳)-(۱)(m)=۶-m$ $\lvert A\rvert^۲-۵\lvert A\rvert+۶=۰\to(۶-m)^۲-۵(۶-m)+۶=۰$ $\to ۳۶-۱۲m+m^۲-۳۰+۵m+۶=۰\to m^۲-۷m+۱۲=۰$ $\to(m-۳)(m-۴)=۰\to m=۳\quad,\quad m=۴$
۷	می دانیم که ماتریس اسکالر، یک ماتریس قطری است که در آن تمام درایه های روی قطر اصلی برابر می باشند. در اینجا چون $a_{۲۲}=۵$ و این درایه روی قطر اصلی قرار دارد، لذا تمام درایه های روی قطر اصلی ماتریس A برابر ۵ می باشند. از طرفی ماتریس A یک ماتریس قطری است و دترمینان ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است. پس : $\lvert A\rvert=۵\times۵\times۵=۱۲۵$
۸	$A-۲I=\begin{bmatrix}۴&۱\\۰&۳\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۱\end{bmatrix}$ $\lvert A-۲I\rvert=(۲)(۱)-(۱)(۰)=۲$ $(A-۲I)^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A-۲I\rvert}(A-۲I)^*=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۰&۲\end{bmatrix}$
۹	$A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۲&۰\\-۱&۰&۰\end{bmatrix}\to\lvert A\rvert=۱(-۱)^{۱+۳}\begin{bmatrix}۰&۲\\-۱&۰\end{bmatrix}=۲$ $\lvert\lvert A\rvert A\rvert=\lvert۲A\rvert=۲^۳\lvert A\rvert=۸\times۲=۱۶$
۱۰	الف) منحصر به فرد ب) چون ماتریس داده شده وارون پذیر نیست. پس : $\lvert A\rvert=۰\to(-۶)(a)-(۸)(-۳)=۰\to-۶a=-۲۴\to a=۴$
۱۱	فرض کنیم که $\lvert A\rvert=d$ در این صورت : $A=\begin{bmatrix}۲\lvert A\rvert & \lvert A\rvert\\ ۷ & \lvert A\rvert^۲\end{bmatrix}\to\lvert A\rvert=\begin{vmatrix}۲\lvert A\rvert & \lvert A\rvert\\ ۷ & \lvert A\rvert^۲\end{vmatrix}\to d=\begin{vmatrix}۲d & d\\ ۷ & d^۲\end{vmatrix}\to d=۲d^۳-۷d$ $\to ۲d^۳-۸d=۰\to ۲d(d^۲-۴)=۰\to d=۰\ ,\ d=۲\ ,\ d=-۲$

دستگاه معادلات خطی

۱	$\begin{cases}۲x+y=۴\\ ۷x+۴y=۱۵\end{cases}\to A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۷&۴\end{bmatrix}\to\lvert A\rvert=(۲)(۴)-(۱)(۷)=۸-۷=۱$ $A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^*=\frac{۱}{۱}\times\begin{bmatrix}۴&-۱\\-۷&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۱\\-۷&۲\end{bmatrix}$

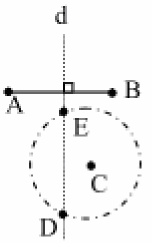
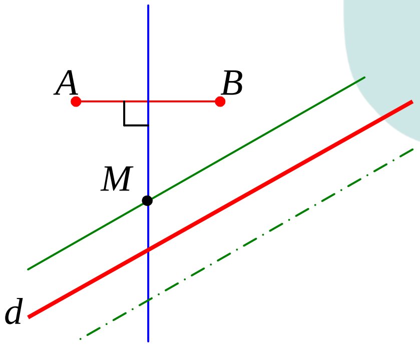
	$X=A^{-۱}D\to\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۱\\-۷&۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴\\۱۵\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}\to\begin{cases}x=۱\\y=۲\end{cases}$
۲	$\begin{cases}۲x+y=۰\\x+۳y=۵\end{cases}\to A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۳\end{bmatrix}\to\lvert A\rvert=(۲)(۳)-(۱)(۱)=۶-۱=۵$ $A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^{*}=\frac{۱}{۵}\times\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵}&\frac{-۱}{۵}\\\frac{-۱}{۵}&\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}$ $X=A^{-۱}D\to\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵}&\frac{-۱}{۵}\\\frac{-۱}{۵}&\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰\\۵\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}\to\begin{cases}x=-۱\\y=۲\end{cases}$
۳	نادرست
۴	$\begin{cases}۲x+y=۰\\۳y+x=۵\end{cases}\to A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۳\end{bmatrix}\ ,\ D=\begin{bmatrix}۰\\۵\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۳\end{bmatrix}\to\lvert A\rvert=(۲)(۳)-(۱)(۱)=۵$ $A^{-۱}=\frac{۱}{\lvert A\rvert}A^{*}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۱&۲\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A^{-۱}D=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}۳&-۱\\-۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۵\end{bmatrix}=\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}-۵\\۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}\to\begin{cases}x=-۱\\y=-۲\end{cases}$

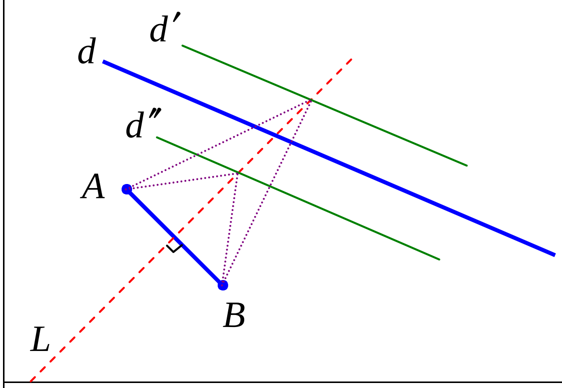
فصل دوّم

((هندسه۳))

* * *

درس ۱ : مقاطع مخروطی و مکان هندسی

۱	درست : بنابر تعریف مقاطع مخروطی، سطح مخروطی حاصل یک هذلولی است.
۲	مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است و مکان هندسی نقاطی که از نقطه‌ی C به فاصله‌ی ۳ واحد باشند. دایره ای به مرکز C و شعاع ۳ است. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط عمود منصف (d) و دایره جواب مسأله است.(نقاط D و E) الف) اگر خط عمود منصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، مسأله دو جواب دارد. ب) اگر مماس شوند، مسأله یک جواب دارد. پ) در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند، مسأله جواب ندارد. 
۳	در حالتی که صفحه بر کره مماس باشد، فصل مشترک صفحه و کره ، یک نقطه است. لذا این عبارت نادرست است.
۴	ابتدا عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم. سپس خطی موازی خط d و به فاصله‌ی یک سانتی از آن رسم می کنیم. محل تقاطع عمود منصف AB با این خط جواب مسأله است. چون دو خط در دو طرف خط d به فاصله‌ی یک سانتی متر از آن می توان رسم کرد، لذا مسأله جواب دیگری دارد. اگر AB عمود بر d باشد، چون در این حالت عمود منصف AB، خط d را قطع نمی کند، مسأله جواب ندارد و اگر عمود منصف AB، منطبق بر خط d باشد، مسأله دو جواب دارد. 
۵	بیضی
۶	درست
۷	مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را رسم می کنیم و آن را L می نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر هستند دو خط d' و d'' می باشند که موازی d هستند. محل برخورد دو خط d' و d'' با خط L جواب مسأله است. الف) اگر خط L دو خط d' و d'' را قطع کند، مسأله دو جواب دارد.

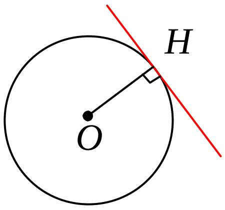
	ب) اگر خط L بر دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسأله بی شمار جواب دارد. ج) اگر خط L هیچ یک از دو خط d' و d'' را قطع نکند، مسأله جواب ندارد. 
۸	درست

فصل دوّم

((هندسه ۳))

* * *

درس ۲ : دایره

۱	اگر مختصات نقطه‌ی $A(۱,-۲)$ را در عبارت $x^۲+y^۲-۲x+۲y$ جایگزین کنیم، بدست می آید، $(۱)^۲+(-۲)^۲-۲(۱)+۲(-۲)=۱+۴-۲-۴=-۱$ و چون حاصل منفی شد، نتیجه می شود که نقطه داخل دایره است. توجه داشته باشید که اگر ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را به دست آورده و با فاصله‌ی این نقطه تا مرکز مقایسه کنیم، همین نتیجه بدست می آید.
۲	فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده برابر شعاع دایره است. $R=OH=\frac{\|a\alpha+b\beta+c\|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\|۳(۱)-۴(-۱)+۳\|}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$  لذا معادله‌ی دایره را می توان به شکل زیر نیز نوشت: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ $\to(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴$
۳	کافی است که فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده شده $(d:۳x-۴y-۱۳=۰)$ را تعیین و با اندازه‌ی شعاع دایره مقایسه کنیم. $x^۲+y^۲-۲x=۳\to x^۲-۲x+۱+y^۲=۲$ $\to(x-۱)^۲+(y-۰)^۲=۲$ $R=\sqrt{۲}$ اندازه‌ی شعاع دایره $O(۱,۰)$ مختصات مرکز دایره فاصله مرکز دایره تا خط d $OH=\frac{\|a\alpha+b\beta+c\|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\|۳(۱)-۴(۰)-۱۳\|}{\sqrt{(۳)^۲+(-۴)^۲}}=\frac{\|-۱۰\|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$ اکنون چون $OH>R$ ، پس خط داده شده، دایره را قطع نمی کند.
۴	الف) $a^۲+b^۲>۴c\to۱۶+۳۶>۴k\to k<۱۳$

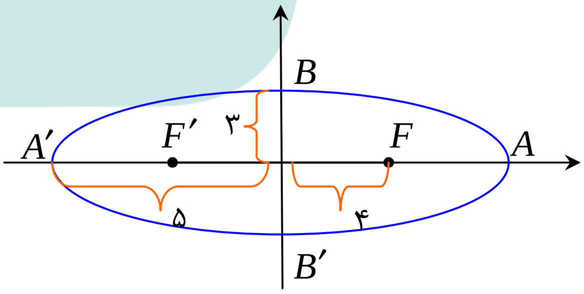
	ب) کافی است فاصله‌ی خط داده شده، تا مرکز دایره را تعیین و با اندازه‌ی شعاع دایره ، مقایسه کنیم. $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۲=۰\rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱=۴$ $\rightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴\rightarrow \begin{cases} O(۱,۱)\\ R=۲\end{cases}$ $d=\frac{\lvert a\alpha+b\beta+c\rvert}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{\lvert(۱)(۱)+(۱)(۱)+(-۱)\rvert}{\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\Rightarrow d<R$ خط و دایره متقاطع هستند.
۵	$a^۲+b^۲>۴c\rightarrow ۳۶+۶۴>۴k\rightarrow k<۲۵$
۶	اگر مختصات نقطه‌ی $A(۲,۳)$ را در معادله‌ی دایره جایگزین کنیم. معلوم می شود که مختصات این نقطه در معادله‌ی داده شده صدق می کنند. این یعنی اینکه نقطه روی دایره واقع است. پس معادله‌ی خط مماس را می توان بدین شکل نوشت: $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۳=۰\rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱=۵$ $\rightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵\rightarrow (x-۱)(x-۱)+(y-۱)(y-۱)=۵$ معادله‌ی خط مماس $(۲-۱)(x-۱)+(۳-۱)(y-۱)=۵\rightarrow x-۱+۲y-۲=۵\rightarrow x+۲y=۸$
۷	کافی است طول خط المرکزین را با مجموع یا تفاضل اندازه‌ی شعاع های دو دایره مقایسه کنیم. $x^۲+y^۲=۴\rightarrow \begin{cases} O_۱(۰,۰)\\ R_۱=۲\end{cases}$ $x^۲+y^۲-۲x=۴\rightarrow \begin{cases} O_۲(۱,۰)\\ R_۲=\sqrt{۵}\end{cases}$ $d=O_۱O_۲=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۰-۰)^۲}=۱$ طول خط المرکزین $\left.\begin{matrix} R_۲+R_۱=۲+\sqrt{۵}\\ R_۲-R_۱=\sqrt{۵}-۲\end{matrix}\right\}\rightarrow R_۲-R_۱<d<R_۲+R_۱$ لذا دو دایره متقاطع هستند.

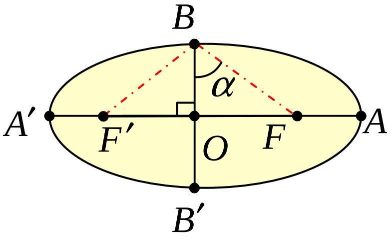
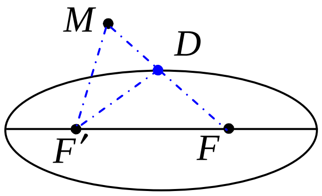
فصل دوّم

((هندسه۳))

✻✻✻

درس ۲ : بیضی

۱	بنابر مفهوم خروج از مرکز بیضی، در این حالت بیضی به دایره نزدیکتر می شود.
۲	نادرست : زیرا $\angle\alpha+\angle\beta+\angle(F'MF)=۱۸۰\xrightarrow{\angle\alpha=\angle\beta}۲\alpha+۵۰=۱۸۰$ $\rightarrow ۲\alpha=۱۳۰\rightarrow\alpha=۶۵^\circ$
۳	می دانیم که $AA'=۲a$ و $BB'=۲b$ پس : $۲a=۱۰\rightarrow a=۵$ $۲b=۶\rightarrow b=۳$ $a^۲=b^۲+c^۲\rightarrow ۲۵=۹+c^۲\rightarrow c^۲=۱۶\rightarrow c=۴$ $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$ خروج از مرکز بیضی مختصات رئوس واقع روی قطر بزرگ $\begin{cases}A(۵,۰)\\A'(-۵,۰)\end{cases}$ مختصات کانون ها $\begin{cases}F(۴,۰)\\F'(-۴,۰)\end{cases}$ مختصات رئوس واقع روی قطر کوچک $\begin{cases}B(۰,۳)\\B'(۰,-۳)\end{cases}$ 
۴	در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود. توجه : داشته باشید که در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می شود.
۵	$AA'=۲a=۲۰\rightarrow a=۱۰$ $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}\xrightarrow{a=۱۰}\frac{c}{۱۰}=\frac{۴}{۵}\rightarrow c=۸$ $a^۲=b^۲+c^۲\rightarrow ۱۰۰=b^۲+۶۴\rightarrow b^۲=۳۶\rightarrow b=۶$ $BB'=۲b=۲(۶)=۱۲$ طول قطر کوچک $FF'=۲c=۲(۸)=۱۶$ طول فاصله‌ی کانونی

۶	بنابر اطلاعات مسأله می توان نوشت : $AA'=۲BB' \to ۲a=۲(۲b) \to a=۲b$  از طرفی مثلث FBF' متساوی الساقین است، پس $BF'=BF$ و چون نقطه‌ی B روی بیضی قرار دارد، لذا $BF+BF'=۲a \to ۲BF=۲a \to BF=a$ مثلث FBO مثلث قائم الزاویه است. پس : $\cos\alpha=\frac{OB}{BF} \to \cos\alpha=\frac{b}{a} \to \cos\alpha=\frac{b}{۲b} \to \cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ در نتیجه $\alpha=۶۰^\circ$. حال چون BB' میانه‌ی وارده بر قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین FBF' است. پس نیمساز زاویه‌ی رأس نیز می باشد. در نهایت می توان نوشت: $\angle FBF'=۲\alpha=۲(۶۰)=۱۲۰^\circ$
۷	از نقطه‌ی M به کانون های بیضی وصل می کنیم تا بیضی را در نقطه‌ی D قطع کند. نقطه‌ی D روی بیضی قرار دارد. بنابر تعریف بیضی: $DF+DF'=۲a$ بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:  $MD+MF'>DF' \xrightarrow{+DF} DF+MD+MF'>DF+DF'$ $\to MF+MF'>۲a$
۸	$e=\frac{۳}{۴} \to \frac{c}{a}=\frac{۳}{۴} \xrightarrow{۲a=۱۶\to a=۸} \frac{c}{۸}=\frac{۳}{۴} \to c=۶$ $AF=a-c=۸-۶=۲$
۹	در این حالت شکل بیضی به دایره نزدیکتر می شود.
۱۰	$e=\frac{۳}{۵} \to \frac{c}{a}=\frac{۳}{۵} \to c=\frac{۳}{۵}a$ $b^۲+c^۲=a^۲ \xrightarrow{۲b=۱۶\to b=۸} ۶۴+(\frac{۳}{۵}a)^۲=a^۲ \to ۶۴+\frac{۹}{۲۵}a^۲=a^۲$ $\to \frac{۱۶}{۲۵}a^۲=۶۴ \to a^۲=۶۴\times\frac{۲۵}{۱۶}=۱۰۰ \to a=۱۰ \to AA'=۲a=۲۰$ $c=\frac{۳}{۵}a=\frac{۳}{۵}(۱۰)=۶ \to FF'=۲c=۱۲$

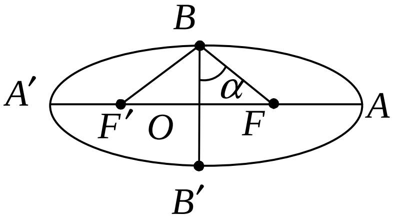
۱۱

$AA' = ۲BB' \to a = ۲b$

$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF = BF'} ۲BF = ۲a \to BF = a$

$\cos\alpha = \frac{BO}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{b}{۲b} = \frac{۱}{۲} \to \alpha = ۶۰^\circ$

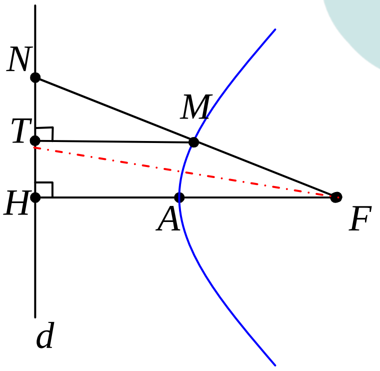
$\to \angle FBF' = ۲\alpha = ۱۲۰^\circ$



فصل دوّم

((هندسه ۳))

درس ۲ : سهمی

۱	ابتدا معادله‌ی سهمی را به شکل زیر می نویسیم. $y^{۲}-۲y-۸x+۹=۰ \to y^{۲}-۲y+۱=۸x-۸ \to (y-۱)^{۲}=۸(x-۱)$ لذا با مقایسه با معادله ی استاندارد $(y+\beta)^{۲}=۴p(x+\alpha)$ معلوم می شود که سهمی افقی روبه راست است. پس می توان نوشت: پارامتر سهمی $۴p=۸ \to p=۲$ فاصله‌ی کانونی $۲p=۲(۲)=۴$ مختصات رأس سهمی $S(۱,۱)$ معادله‌ی خط هادی $x=-۱$ مختصات کانون $F(۳,۱)$
۲	بنابر تعریف سهمی $MT=MF$ و لذا مثلث MFT متساوی الساقین است. از اینجا نتیجه می شود که : $\angle MTF=\angle MFT$ از طرفی $FH \parallel MT$ و FT خط مورب می باشد. پس بنا به قضیه‌ی خطوط موازی: $\angle MTF=\angle TFH$ از این دو نتیجه معلوم می شود که TF نیمساز زاویه‌ی NFH می باشد. اکنون بنابر قضیه‌ی نیمساز در مثلث FHN داریم:  $\frac{NF}{NT}=\frac{FH}{TH} \to \frac{NF}{FH}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{\div ۲} \frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$
۳	$y^{۲}+۸x+۲y+۹=۰ \to y^{۲}+۲y+۱=-۸x-۸ \to (y+۱)^{۲}=-۸(x+۱)$ با مقایسه با معادله‌ی استاندارد $(y+\beta)^{۲}=-۴p(x+\alpha)$ معلوم است که سهمی افقی و رو به سمت چپ محور طول ها است. لذا : پارامتر سهمی $-۴p=-۸ \to p=۲$ مختصات رأس سهمی $S(-۱,-۱)$

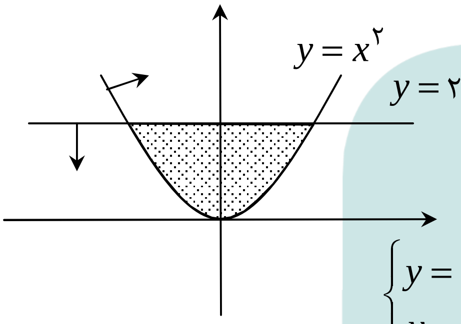
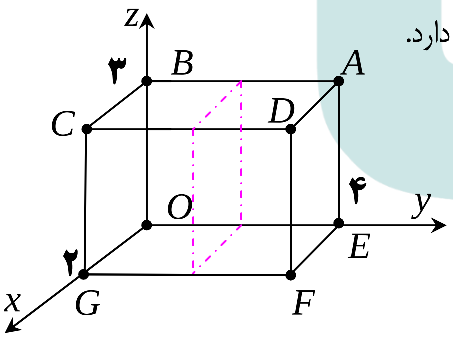
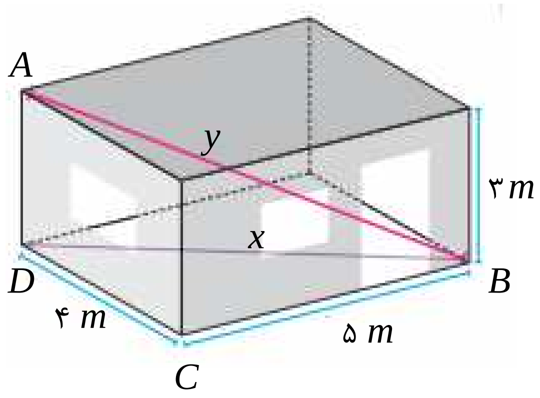
	$F(\alpha-p,\beta)\to F(-۱-۲,-۱)\to F(-۳,-۱)$ مختصات کانون سهمی $y=\alpha+p\to y=-۱+۲\to y=۱$ معادله خط هادی
۴	الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله‌ی خط هادی، به سادگی معلوم می شود که سهمی افقی و دهانه‌ی آن به سمت چپ می باشد. در این سهمی $p=۱$ و معادله‌ی آن برابر است با : $(y-۳)^{۲}=-۴(x-۲)$ ب) مختصات کانون سهمی $F(-p+h,k)=(-۱+۲,۳)=(۱,۳)$ پ) مختصات محل برخورد با محور طول ها برابر است با : $y=۰\to x=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow(-\frac{۱}{۴},۰)$
۵	$x^{۲}-۴=۸y+۴x\to x^{۲}-۴x+۴=۸y+۸\to(x-۲)^{۲}=۸(y+۱)$ با مشاهده‌ی معادله‌ی سهمی معلوم می شود که سهمی قائم رو به بالا است. $۴p=۸\to p=۲$ پارامتر سهمی $S(\alpha,\beta)\to S(۲,-۱)$ رأس سهمی $F(\alpha,\beta+p)\to F(۲,-۱+۲)\to F(۲,۱)$ مختصات کانون
۶	
۷	

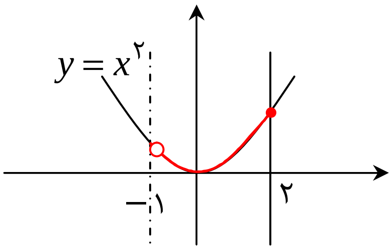
فصل سوّم

((هندسه۳))

✻✻✻

درس ۱ : فضای سه بعدی و بردار

۱	نمودار معادلات $y=x^۲$ و $y=۲$ را رسم می کنیم. سپس ناحیه‌ی مشترک نامعادلات $x^۲\le y$ و $y\le ۲$ را تعیین می کنیم.  $\begin{cases} y=x^۲ \\ y=۲ \end{cases} \to x^۲=۲ \to x=\pm\sqrt{۲}$
۲	الف) وجه $CDFG$ شرایط ($۰\le z\le ۳$ و $۰\le y\le ۴$ و $x=۲$) را دارد.  ب) معادلات $\begin{cases} ۰\le x\le ۲ \\ y=۴ \\ z=۳ \end{cases}$ یال AD را مشخص می کنند. پ) مختصات نقطه‌ی D به صورت $D(۲,۴,۳)$ می باشد. ت) صفحه به معادله‌ی $y=۲$ هم موازی با صفحه‌ی xoz باشد و هم مکعب مستطیل را نصف کند.
۳	با دو بار استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث های قائم الزاویه‌ی BCD و ABD، می توان نوشت:  $x^۲=(۴)^۲+(۵)^۲ \to x^۲=۱۶+۲۵$ $\to x^۲=۴۱ \to x=\sqrt{۴۱}$ $y^۲=(\sqrt{۴۱})^۲+(۳)^۲ \to y^۲=۴۱+۹$ $\to y^۲=۵۰ \to y=۵\sqrt{۲}$
۴	نمودار مربوط به معادله‌ی $x=۰$ در $R^۳$ ، تمام نقاط صفحه‌ی yz است.

	توجه : نمودار مربوط به معادله‌ی $y=۰$ در $R^{۳}$ ، تمام نقاط صفحه‌ی xz است و همچنین نمودار مربوط به معادله‌ی $z=۰$ در $R^{۳}$ ، تمام نقاط صفحه‌ی xy است.
۵	محور عرض ها
۶	درست
۷	
۸	$\|\vec{a}\|=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}=\sqrt{(۰)^{۲}+(-۳)^{۲}+(۴)^{۲}}=\sqrt{۰+۹+۱۶}=۵$
۹	نادرست، نقطه روی محور z قرار دارد.
۱۰	می دانیم که برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم. $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta$ حال با توجه به اینکه $\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ نتیجه گرفته می شود که $\cos\theta=۱$ یعنی $\angle\theta=۰^\circ$

فصل سوّم

((هندسه ۳))

* * *

درس ۲ : ضرب داخلی دو بردار و کاربرد

۱	الف) $\vec a=۲\vec i+۳\vec j-\vec k=(۲,۳,-۱)$ $\vec b=\vec i+\vec k=(۱,۰,۱)$ $\vec a.\vec b=(۲)(۱)+(۳)(۰)+(-۱)(۱)=۲+۰-۱=۱$ $\Vert\vec a\Vert=\sqrt{۴+۹+۱}=\sqrt{۱۴}$ $\Vert\vec b\Vert=\sqrt{۱+۰+۱}=\sqrt{۲}$ $\cos\theta=\frac{\vec a.\vec b}{\Vert\vec a\Vert\times\Vert\vec b\Vert}=\frac{۱}{\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$ ب) $\vec c=(۰,۲,۱)$ $\vec d=\vec b-\vec c=(۱,۰,۱)-(۰,۲,۱)=(۱,-۲,۰)$ $\vec a.\vec d=(۲)(۱)+(۳)(-۲)+(-۱)(۰)=۲-۶+۰=-۴$ $\Vert\vec d\Vert=\sqrt{۱+۴+۰}=\sqrt{۵}$ $\vec a'=\frac{\vec a.\vec d}{\Vert\vec d\Vert^۲}\vec d=\frac{-۴}{۵}(۱,-۲,۰)$
۲	اگر دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ بر هم عمود باشند، پس زاویه‌ی بین آنها برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. لذا : $\vec a.\vec b=\Vert\vec a\Vert\times\Vert\vec b\Vert\cos(\frac{\pi}{۲})=۰$ حال اگر $\vec a.\vec b=۰$ پس $\Vert\vec a\Vert\times\Vert\vec b\Vert\cos\theta=۰$ و چون $\Vert\vec b\Vert\neq۰$ و $\Vert\vec a\Vert\neq۰$ لذا $\cos\theta=۰$ یعنی $\theta=\frac{\pi}{۲}$ یعنی دو بردار $\vec a$ بر $\vec b$ بر هم عمودند.
۳	الف) $\vec a=۴\vec k-۲\vec j-\vec i=(-۱,-۲,۴)$

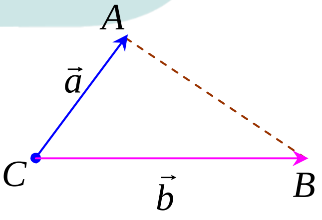
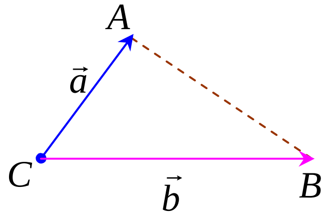
	$\vec{b}=\vec{i}+۲\vec{j}=(۱,۲,۰)$ $۳\vec{a}-\vec{b}=۳(-۱,-۲,۴)-(۱,۲,۰)=(-۳,-۶,۱۲)+(-۱,-۲,۰)=(-۴,-۸,۱۲)$ $r(۳\vec{a}-\vec{b})=\frac{۱}{۴}(-۴,-۸,۱۲)=(-۱,-۲,۳)$ ب) اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ باشد، در این صورت، می توان نوشت: $\vec{a}.\vec{b}=(-۱)(۱)+(-۲)(۲)+(۴)(۰)=-۵$ $\Vert\vec{b}\Vert=\sqrt{(۱)^۲+(۲)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۱+۴+۰}=\sqrt{۵}$ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\Vert\vec{b}\Vert^۲}\vec{b}=\frac{-۵}{(\sqrt{۵})^۲}(۱,۲,۰)=-(۱,۲,۰)=(-۱,-۲,۰)$
۴	فرض کنید که θ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. در این صورت: $\vec{a}.\vec{b}=(۲)(۱)+(۲)(۰)+(-۱)(-۱)=۲+۰+۱=۳$ $\Vert\vec{a}\Vert=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$ $\Vert\vec{b}\Vert=\sqrt{۱+۰+۱}=\sqrt{۲}$ $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\Vert\vec{a}\Vert\times\Vert\vec{b}\Vert}=\frac{۳}{۳\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$
۵	$\vec{a}\perp\vec{b}\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=۰\rightarrow(۲)(m+۱)+(m)(۳)+(-۱)(۲)=۰$ $\rightarrow۲m+۲+۳m-۲=۰\rightarrow m=۰$
۶	درست (نامساوی کشی شوارتز)
۷	$\Vert\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\Vert^۲=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ $=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}$ $=\Vert\vec{a}\Vert^۲+۰+۰+۰+\Vert\vec{b}\Vert^۲+۰+۰+۰+\Vert\vec{c}\Vert^۲=(۲)^۲+(۳)^۲+(۴)^۲$ $=۴+۹+۱۶=۲۹$
۸	$\vec{a}.\vec{b}=(۲)(-۲)+(-۶)(۱)+(۴)(-۵)=-۴-۶-۲۰=-۳۰$ $\Vert\vec{b}\Vert=\sqrt{(-۲)^۲+(۱)^۲+(-۵)^۲}=\sqrt{۴+۱+۲۵}=\sqrt{۳۰}$ $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\Vert\vec{b}\Vert^۲}\vec{b}=\frac{-۳۰}{۳۰}(-۲,۱,-۵)=(۲,-۱,۵)$

فصل سوّم

((هندسه۳))

❋❋❋

درس ۳ : ضرب خارجی دو بردار و کاربرد

۱	نادرست : برای دو بردار واحد $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۰,۱)$ $\vec{i}\times\vec{j}=(\begin{vmatrix}۰&۰\\۱&۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰&۱\\۰&۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{vmatrix})=(۰,۰,۱)=\vec{k}$
۲	زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همان زاویه‌ی بین دو بردار $۲\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض می باشد. پس : $\Vert ۲\vec{a}\times\vec{b}\Vert=\Vert ۲\vec{a}\Vert\times\Vert\vec{b}\Vert\cos(۳۰^\circ)=۲(۶)(۴)(\frac{۱}{۲})=۲۴$
۳	چون هر سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه واقعند، پس حجم متوازی السطوح بنا شده توسط این سه بردار برابر صفر است. زیرا کلاً با سه بردار واقع بر یک صفحه، متوازی السطوحی ایجاد نمی شود.
۴	با معلوم بودن مختصات سه رأس مثلث ABC ، مساحت مثلث را می توان با استفاده از ضرب خارجی به شکل زیر به دست آورد. $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(۲,-۱,۳)-(-۱,۱,۰)=(۳,-۲,۳)$ $\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(۳,۱,۴)-(-۱,۱,۰)=(۴,۰,۴)$ $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-۲&۳\\۰&۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳&۳\\۴&۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳&-۲\\۴&۰\end{vmatrix})=(-۸,۰,۸)$  پس مساحت مثلث مورد نظر به صورت زیر است. $S=\frac{۱}{۲}\Vert\vec{a}\times\vec{b}\Vert=\frac{۱}{۲}\sqrt{(۸)^۲+(۰)^۲+(۸)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴+۰+۶۴}=\frac{۱}{۲}\times ۸\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$
۵	درست، برابر هر بردار مانند $\vec{a}$ ثابت می شود که $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$
۶	اگر $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۱,۰,-۱)$ و $C(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت ABC را با استفاده از ضرب خارجی به شکل زیر به دست می آید. $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(-۱,۲,۰)-(۰,-۱,۱)=(-۱,۳,-۱)$ $\vec{b}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=(۱,۰,-۱)-(۰,-۱,۱)=(۱,۱,-۲)$ $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}۳&-۱\\۱&-۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱&-۱\\-۲&۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱&۳\\۱&۱\end{vmatrix})=(-۵,-۳,-۴)$ 

	پس مساحت مثلث مورد نظر به صورت زیر است. $S=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۵)^{۲}+(-۳)^{۲}+(-۴)^{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۵۰}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$
۷	$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times\cos\theta\to ۱۰=۳\times۵\times\cos\theta\to\cos\theta=\frac{۲}{۳}$ $\xrightarrow{\sin^{۲}\theta=۱-\cos\theta}\sin^{۲}\theta=۱-(\frac{۲}{۳})^{۲}\to\sin\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta=۳\times۵\times\frac{\sqrt{۵}}{۳}=۵\sqrt{۵}$ $S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{۱}{۲}\times۵\sqrt{۵}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۵}$
۸	$\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۲\\ ۲ & -۳\end{vmatrix})=(۶,۴,-۴)$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱)(۶)+(۰)(۴)+(-۱)(-۴)=۶+۰+۴=۱۰$ $v=\|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\|=۱۰$
۹	$\vec{a}=-\vec{k}-\vec{j}=(۰,-۱,-۱)$ $\|\vec{a}\|=\sqrt{(۰)^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۱)^{۲}}=\sqrt{۰+۱+۱}=\sqrt{۲}$ $\|\vec{b}\|=\sqrt{(۲)^{۲}+(-۱)^{۲}+(-۲)^{۲}}=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$ $\vec{a}.\vec{b}=(۰)(۲)+(-۱)(-۱)+(-۱)(-۲)=۰+۱+۲=۳$ $\cos\alpha=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\alpha=۴۵^{\circ}$ ب) کافی است، بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ را تعیین کنید. $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}-۱ & -۱\\ -۱ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۰\\ -۲ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & -۱\\ ۲ & -۱\end{vmatrix})=(۱,-۲,۲)$
۱۰	$\vec{b}\times\vec{c}=(\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۱\end{vmatrix})=(-۴,۲,۵)$ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(۱)(-۴)+(۱)(۲)+(۰)(۵)=-۴+۲+۰=-۲$ چون حاصل $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ برابر صفر نیست، پس سه بردار داده شده روی یک صفحه نیستند.