کد اجرا: نامشخص | تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۸/۲۵

نام و نام خانوادگی: | زمان برگزاری: ۱۴۶ دقیقه

نام آزمون: نمونه سوالات نهایی از فصل ۱ هندسه دوازدهم

آموزشگاه پرسا

۱) اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد. تمرین های کتاب- ۱۴۰۲

۲) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

الف) در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۴\times ۳}$ که در آن $a_{ij}=\frac{۲i}{j-۱}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس A برابر است با: ..... .

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|-A|$ برابر است با ..... .

۳) درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

الف) هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۴) اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۷}$ را به دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۵) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲\\ ۰ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a+b & ۲ & ۲\\ ۲ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۴a+b\end{bmatrix}$ مفروض‌اند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

$A^{۲}-B=\overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است.)

۶) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

الف) اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۸\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مقدار a برابر ..... است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند آن را یک ماتریس ..... می‌نامیم. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۷) درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

الف) در حالت کلی حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد و $|A|=۲$، آنگاه $|۲A|=۱۶$ است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۸) دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲\\ n+۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ m & ۰ & n\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $|A|+|B|$ را محاسبه کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۹) الف) اگر $A=\begin{bmatrix}|A| & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.

۱۰) در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & x\end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۱۱) الف) مقادیر قابل‌قبول m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases}۲mx+۳y=۱\\ ۲x-y=۳\end{cases}$ دارای جواب منحصربه‌فرد باشد.

ب) جواب دستگاه مذکور را به‌ازای $m=۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۱۲) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

الف در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ m-۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار m برابر ..... است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

ب اگر A یک ماتریس ۳×۳ باشد و $|A| = ۵$، آنگاه $|\frac{۱}{۲}A|$ برابر ..... است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۱۳ اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند مقدار $x+y+z$ را بیابید.
سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۱۴ معادلهٔ ماتریسی $[x \quad ۳]\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$ را حل کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۱۵ اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطهٔ $A^۲ = mA + nI_۲$ برقرار باشد. ($I_۲$ ماتریس همانی است.)
سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۱۶ الف) به‌ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y = ۳ \\ mx+۶y = -۴ \end{cases}$ فاقد جواب است؟ سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

ب) دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y = ۳ \\ ۲x+۶y = -۴ \end{cases}$ را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

۱۷ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

الف حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ..... . سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۱۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

الف اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم، $AB = AC$، آنگاه لزوماً $B = C$ است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۱۹ اگر یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i = j \\ ۲ & i < j \\ i-j & i > j \end{cases}$ باشد، درایه‌های $a_{۲۱}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۳۲}$ را به‌دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۲۰ مقادیر x و y را از معادلهٔ زیر به دست آورید.

$$[\overline{x} \quad ۴]\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = [۴ \quad y]$$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۲۱ دستگاه مقابل را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x-۵y = -۱ \\ ۲x+y = ۸ \end{cases}$$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۲۲ اگر $I_۳$ ماتریس همانی ۳×۳ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|A \times B| + |۲I_۳|$$

۲۳ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

الف اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان این ماتریس برابر ..... است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۲۴ دو ماتریس A و B مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۲۵ اگر $۲A = \begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $|A^{-۱}|$ را بیابید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۲۶ عبارت‌های زیر را کامل کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

الف اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر با ..... است.

۲۷ ماتریس A مربعی مرتبه سه به‌صورت $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i+j & i = j \\ j & i > j \\ ۰ & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد،

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

الف ماتریس A را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

ب دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۲۸ الف) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۲x & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با ..... است.

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۲m+۴ & ۲\end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبهٔ m ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۲۹ اگر دو ماتریس مربعی A و B به‌صورت $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشند،

الف) ماتریس A را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) ماتریس $B^۲$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۰ اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲$$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۱ الف) در دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (درست - نادرست)

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ باشد $|A|$ حاصل $|A|$ را بیابید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$، نشان دهید:

$$(۵A)^{-۱}=\frac{۱}{۵}A^{-۱}$$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۳ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$، حاصل $|A^۴|$ را به‌دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۴ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ..... نامیده می‌شود.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۵ اگر $A=\begin{bmatrix}۲x & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $A=B$، در این صورت حاصل $x+۲y+۳z$ را به دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۶ اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases}۲x-y=۴\\ -۴x+۳y=۲\end{cases}$ در نظر بگیریم، از تساوی $AX=B$ ماتریس X را به دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۷ اگر ماتریس A مرتبه ۳ باشد و $|۲A|=۳۲$ باشد، آنگاه حاصل $|A|$ را به دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۳۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف ماتریس مربعی که همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس ..... گویند.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۳۹ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند، آنگاه عبارت $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ همواره برقرار است.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۴۰ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۳ & -۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟ سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

ب حاصل $|A \times B|$ را به‌دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۴۱ ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۴۲ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A + B^{T} = \begin{bmatrix} x & ۴ \\ ۸ & y \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را به دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۴۳ ماتریس $A = [a_{ij}]_{۲\times ۲}$ به‌صورت $a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه $|kA| = ۴$ برقرار باشد. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۴۴ در تساوی ماتریسی $A^{۲} = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}$، ماتریس A را به دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۴۵ اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & ۰ & ۱ \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ را بیابید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۴۶ جاهای خالی را پر کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

الف اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس ..... می‌نامند. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

ب اگر $A = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر ..... است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

پ اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن موازی نباشد و از رأس عبور نکند، آنگاه سطح مقطع حاصل، یک ..... است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۴۷ ماتریس $A = [a_{ij}]_{۲\times ۲}$ به‌صورت $a_{ij} = \begin{cases} i^{۲} - j & i > j \\ i + j & i \leq j \end{cases}$ داده شده است، ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۴۸ در تساوی $\begin{bmatrix} x & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}$، مقدار x را بیابید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۴۹ اگر $۳A = \begin{bmatrix} |A| & -۵ \\ ۱ & ۴|A| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A^{-۱}|$ را محاسبه کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۵۰ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + ۹y = m + ۱ \\ ۴x + my = -۴ \end{cases}$ جواب نداشته باشد. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

پاسخ‌نامه تشریحی

۱

$$AB=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری درایه‌های خارج قطر اصلی همگی صفر هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}-۸+۲a=۰\to a=۴\\ b-۳=۰\to b=۳\end{cases}$$

۲

الف

$$a_{ij}=\frac{۲i}{j-۱}\Rightarrow a_{۳۲}=\frac{۲\times ۳}{۲-۱}=۶$$

ب

$$|-A|=(-۱)^{۳}|A|=-۸$$

توجه : $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۱ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۸$

۳

الف درست

۴

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}=-۲I$$

$$A^{۷}=(A^{۲})^{۳}\cdot A=(-۲I)^{۳}\cdot A=-۸\begin{bmatrix}۰ & ۲\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$$

۵ طبق فرض $A^{۲}-B=\overline{O}$ داریم:

$$A^{۲}=B\to\begin{bmatrix}۵ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & ۲ & ۲\\ ۲ & ۲ & -۱\\ ۲ & -۱ & ۴a+b\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a+b=۵\\ ۴a+b=۵\end{cases}\to a=۰\,,\ b=۵$$

۶

الف

$$|A|=۰\Rightarrow -۴a-۲۴=۰\Rightarrow a=-۶$$

ب اسکالر

۷

نادرست

الف

در حالت کلی ماتریس خاصیت جابه‌جایی ندارد. برای مثال $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{aligned}AB&=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\\ BA&=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow AB\neq BA$$

ب

$$|۲A|=(۲)^{۳}|A|\overset{|A|=۲}{=\!=\!=}۸\times ۲=۱۶$$ درست

می‌دانیم: اگرماتریس A به‌صورت $n\times n$ باشد، داریم:

$$|kA|=k^{n}|A|$$

۸

$$A\Rightarrow\begin{cases}m-۲=۰\to m=۲\\ n+۱=۰\to n=-۱\end{cases}$$ ماتریس قطری

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}\rightarrow |B|=۲(-۱)-۱(۷)+(-۲)=-۱۱\ ,\ |A|=۲$$

در نتیجه:

$$|A|+|B|=۲+(-۱۱)=-۹$$

۹ الف) از دو طرف ماتریس A دترمینان می‌گیریم؛ داریم:

$$A=\begin{bmatrix}|A| & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۵|A|-۲۴\rightarrow |A|=۶$$

ب) ماتریس A وارون‌پذیر است و وارون آن برابر است با:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix}۵ & -۸\\ -۳ & ۶\end{bmatrix}$$

می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی $A^{-۱}$ برابر است با:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

۱۰

$$\begin{bmatrix}۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰\rightarrow \begin{bmatrix}۲+x & ۴+۲x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۲x+۴+۲x\end{bmatrix}=۰\rightarrow x=-۲$$

۱۱ الف)

$$\frac{۲m}{۲}\neq\frac{۳}{-۱}\rightarrow m\neq -۳$$

ب) می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی $A^{-۱}$ برابر است با:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$m=۲\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\rightarrow |A|=-۱۰\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ -۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=-۱\end{cases}$$

۱۲

برای آنکه ماتریس قطری باشد، باید:

الف

$$m-۱=۰\Rightarrow m=۱$$

ب

$$\left|\frac{۱}{۲}A\right|=(\frac{۱}{۲})^{۳}\ |A|=\frac{۵}{۸}$$

۱۳

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}x-۱=y+۱\\ x-۲=۸\\ z+۱=۴\end{cases}\rightarrow x=۱۰\ ,\ y=۸\ ,\ z=۳\Rightarrow x+y+z=۲۱$$

۱۴

$$\begin{bmatrix}x & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}=۰=\begin{bmatrix}x-۳ & ۱۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳x-۲۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow x=۷$$

۱۵

$$\left.\begin{aligned}&A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}\\ &mA+nI=\begin{bmatrix}۰ & ۴m\\ ۲m & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & ۰\\ ۰ & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & ۴m\\ ۲m & m+n\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow n=۸\ ,\ \ m=۱$$

۱۶ الف)

$$\text{شرط فاقد جواب}:\ \frac{۱}{m}=\frac{-۲}{۶}\neq\frac{۳}{-۴}\Rightarrow m=-۳\ \text{قابل‌قبول}$$

ب)

$$\begin{vmatrix}۱ & -۲\\ ۲ & ۶\end{vmatrix}=۱۰\rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۶ & ۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۶ & ۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}\rightarrow x=۱\ ,\ y=-۱$$

۱۷

الف ندارد

۱۸

نادرست

الف

مثال نقض : $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \overline{O} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$

۱۹

$a_{۳۳} = ۲, a_{۳۱} = ۳ + ۱ = ۴, a_{۱۲} = ۱ - ۲ = -۱$

۲۰

$[۲x \quad ۴x - ۲] = [۴ \quad y - ۲] \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲ \\ ۴x - ۲ = y - ۲ \Rightarrow y = ۸ \end{cases}$

۲۱ نکته: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم دستگاه $\begin{cases} ax + by = e_۱ \\ cx + dy = e_۲ \end{cases}$ باشد، داریم:

$AX = B \Rightarrow X = A^{-۱}B$

از طرفی:

$A^{-۱} = \frac{۱}{|ad - bc|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}, \ |A| = ۳ + ۱۰ = ۱۳ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-۱} \times B = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} -۱ + ۴۰ \\ ۲ + ۲۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۳, y = ۲$

۲۲ بنابر دستور ساروس برای ماتریس A داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ & ۱ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$|A| = (۴ - ۹ - ۴) - (-۴ - ۱۲ + ۳) = -۹ + ۱۳ = ۴$

$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow B = ۳ \times (-۱) \times ۲ = -۶$

در نتیجه داریم:

$|A \times B| + |۲I_۳| = |A| \times |B| + ۸|I| = -۲۴ + ۸ = -۱۶$

۲۳

الف ۸

۲۴

$\begin{cases} m - ۲ = ۰ \\ n + ۱ = ۰ \end{cases} \to \begin{cases} m = ۲ \\ n = -۱ \end{cases}$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$

۲۵

$|۲A| = (|A|^۲ + ۴) \Rightarrow ۴|A| = |A|^۲ + ۴ \to (|A| - ۲)^۲ = ۰ \to |A| = ۲$

$|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|} = \frac{۱}{۲}$

۲۶ .

ماتریس همانی یک ماتریس مربعی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر با ۱ و بقیه درایه‌ها همگی صفر هستند.

الف

$\begin{cases} r = ۱ \\ m - ۱ = ۰ \to m = ۱ \end{cases} \to m + r = ۱ + ۱ = ۲$

۲۷ .

الف

$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$

ب

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{matrix} \Rightarrow |B| = (۳۰ + ۴ + ۰) - (۰ + ۰ - ۵) = ۳۹$$

۲۸ الف) $۲x - ۱ = ۵ \rightarrow x = ۳$

ب) ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$\begin{cases} m + ۱ = ۰ \\ ۲n + ۴ = ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ n = -۲ \end{cases}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

۲۹ الف)

$$A = \begin{bmatrix} ۳(۱) - ۲(۱) & ۳(۱) - ۲(۲) & ۳(۱) - ۲(۳) \\ ۳(۲) - ۲(۱) & ۳(۲) - ۲(۲) & ۳(۲) - ۲(۳) \\ ۳(۳) - ۲(۱) & ۳(۳) - ۲(۲) & ۳(۳) - ۲(۳) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب)

$$B^۲ = B \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \times ۱ + ۲ \times ۰ + ۰ \times (-۱) & ۱ \times ۲ + ۲ \times ۱ + ۰ \times ۲ & ۱ \times ۰ + ۲ \times ۳ + ۰ \times ۱ \\ ۰ \times ۱ + ۱ \times ۰ + ۳ \times (-۱) & ۰ \times ۲ + ۱ \times ۱ + ۳ \times ۲ & ۰ \times ۰ + ۱ \times ۳ + ۳ \times ۱ \\ -۱ \times ۱ + ۲ \times ۰ + ۱ \times (-۱) & -۱ \times ۲ + ۲ \times ۱ + ۱ \times ۲ & -۱ \times ۰ + ۲ \times ۳ + ۱ \times ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ -۳ & ۷ & ۶ \\ -۲ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

۳۰ دو ماتریس A و B را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه $AB = BA$.

$$(A - B)^۲ = (A - B)(A - B) = A^۲ - AB - BA + B^۲ \overset{AB=BA}{=} A^۲ - ۲AB + B^۲$$

۳۱ الف) نادرست، زیرا در دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی، اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، پس دستگاه هیچ جوابی ندارد.

ب) با استفاده از دستور ساروس دترمینان ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \end{vmatrix} \rightarrow |A| = (۰ \times ۲ \times ۰ + ۰ \times (-۱) + ۱ \times ۰ \times ۰) - (۱ \times ۲ \times (-۱) + ۰ + ۰) = ۰ - (-۲) = ۲$$

می‌دانیم اگر k یک عدد حقیقی باشد و A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت $|kA| = k^n|A|$ بنابراین داریم:

$$||A|A| = |A|^۳|A| = |A|^۴ = ۱۶$$

۳۲

$$A^{-۱} = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow \frac{۱}{۵}A^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰} \\ \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰} \end{bmatrix}$$

$$۵A = \begin{bmatrix} ۱۵ & -۵ \\ ۵ & -۵ \end{bmatrix} \quad (۵A)^{-۱} = \frac{۱}{-۵۰}\begin{bmatrix} -۵ & ۵ \\ -۵ & ۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰} \\ \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰} \end{bmatrix}$$

۳۳

$$|A| = ۲ \ , \ |-\frac{۱}{۲}A^۴| = (-\frac{۱}{۲})^۳|A|^۴ = -۲$$

۳۴

الف ماتریس

۳۵

$$A = B \rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳x & ۲x + y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۲x = ۳ \\ ۲x + y = ۵ \\ z = -۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{۳}{۲} \\ y = ۲ \end{cases} \rightarrow x + ۲y + ۳z = \frac{-۱}{۲}$$

۳۶

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} \ , \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \rightarrow X = A^{-۱}B = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$$

۳۷

$$|A|A|| = |۴A| = ۴^۳|A| = ۴^۴$$

۳۸

الف قطری

۳۹

الف نادرست

۴۰

الف خیر ـ زیرا دو ماتریس هم‌مرتبه نیستند.

ب

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۳ & ۴ & -۲\\ -۴ & ۶ & -۴\\ -۸ & ۱۱ & -۶\end{bmatrix}\ |A\times B|=۰$$

۴۱

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\to |A^{-۱}|=۸\ ,A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}$$

۴۲

$$x=۲\ ,\ y=-۱$$

۴۳

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۱$$

$$k|kA|=k(k^{۳}|A|)=k^{۴}\times ۱=۶۲۵\Rightarrow k=\pm ۵$$

۴۴

$$\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۷ & ۳\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۷ & ۳\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۵-۱۴}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۷ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۷ & ۴\\ ۱۷ & -۹\end{bmatrix}$$

۴۵

$$|A|=|A|(|A|-۲)+۱(۲)\Rightarrow |A|^{۲}-۳|A|+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\\ |A|=۲\end{cases}$$

۴۶

الف اسکالر

ب

-۱

پ بیضی

۴۷

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-۱$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۳\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$$

۴۸

$$\begin{bmatrix}x-۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow x^{۲}-۲x-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=۳\end{cases}$$

۴۹

$$|۳A|=۴|A|^{۲}+۵\Rightarrow ۴|A|^{۲}-۹|A|+۵=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\Rightarrow |A^{-۱}|=۱\\ |A|=\frac{۵}{۴}\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

۵۰

$$\frac{m}{۴}=\frac{۹}{m}\neq\frac{m+۱}{-۴}\Rightarrow m^{۲}=۳۶\Rightarrow\begin{cases}m=۶\\ m=-۶\end{cases}$$ هر دو جواب قابل قبول