آموزشگاه پرسا

نام و نام خانوادگی: گروه مشاوره آکو سهیل حاج

نام آزمون: ۲۰۰ سوال تشریحی سخت ریاضی

یازدهم فصل به فصل

۱ نقاط $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید:

الف – محیط مثلث ABC را بدست آورید.

ب – ABC چه نوع مثلثی است؟

پ – مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

۲ نقطه‌ای روی خط $y = ۲x + ۱$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله باشد.

۳ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ هستند.

الف – اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب – آیا نقطهٔ $C(۷,۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۴ نقاط $(۰,۰)$ و $(۳,۰)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. این مسئله چند جواب دارد؟

۵ ثابت کنید نقاط $A(۶,-۱۳)$، $B(-۲,۲)$، $C(۱۳,۱۰)$ و $D(۲۱,-۵)$ رئوس یک مربع‌اند.

۶ نقاط $(۰,۰)$ و $(۶,۰)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

۷ نقطه‌ای روی خط $y = ۲x$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(۱,۱)$ و $B(۳,-۱)$ به یک فاصله باشد.

۸ نقطه‌ی $A(a,۲a)$ مرکز دایره‌ی گذرنده بر دو نقطه $B(۲,۱)$ و $C(-۱,۴)$ است. شعاع دایره چقدر است؟

۹ خطی با شیب $-\frac{۳}{۴}$ از نقطه‌ی $A(۲,\frac{۵}{۲})$ گذشته و محورهای مختصات را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند.

طول پاره‌خط AB چقدر است؟

۱۰ نقاط $A(۳,۳)$ ، $B(-۱,۱)$ و $O(۰,۰)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟

۱۱ الف - نقطهٔ $N(۵,-۴)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(۷,-۲)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید.

ب – قرینهٔ نقطهٔ $C(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ را بدست آورید.

۱۲ مثلث با رأس‌های $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید.

الف - مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب – طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

پ – معادلهٔ میانهٔ AM را بدست آورید.

۱۳ دو نقطهٔ $A(۱۴,۳)$ و $B(۱۰,-۱۳)$ را در نظر بگیرید.

الف– فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط AB بدست آورید.

ب– معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

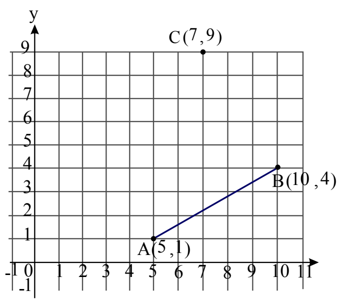
۱۴ مساحت مثلث ABC به مختصات $A(۰,۱)$، $B(۳,۴)$ و $C(-۱,۱)$ را به‌دست آورید.

۱۵ مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اوّل صفحهٔ مختصات واقع است، به‌طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند. الف - شیب ضلع AB را بنویسید.

ب - شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

پ – اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

ت) مربع را به‌طور کامل رسم کنید.



۱۶ اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۳,-۲)$ از خط $۴x+my+۲=۰$ برابر ۴ باشد، در اینصورت مقدار m را بدست‌آورید.

۱۷ نشان دهید دو خط با معادلات $۵x-۱۲y+۸=۰$ و $-۱۰x+۲۴y+۱۰=۰$ با یکدیگر موازی‌اند.

ب – فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید.

۱۸ معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف) $۲x^۴ - ۷x^۲ - ۴ = ۰$

ب) $x^۴ + ۳x^۲ + ۲ = ۰$

۱۹ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^۴ - ۸x^۲ + ۸ = ۰$

ب) $۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳$

۲۰ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳ \qquad x^۳ = u$

۲۱ اگر $\frac{۱}{۸}$ واسطه‌ی حسابی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(m^۲ - ۴)x^۲ - ۳x + m = ۰$ باشد، مقدار m را بدست آورید.

۲۲ اگر $\sqrt{۲}$ واسط هندسی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $mx^۲ - ۵x + m^۲ - ۳ = ۰$ باشد، مقدار m را بدست آورید.

۲۳ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ باشند، مقدار عددی عبارت $\frac{\beta^۲}{\alpha} + \frac{\alpha^۲}{\beta}$ را بدست آورید.

۲۴ معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های $x^۲ + x - ۱ = ۰$ باشد.

۲۵ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha + ۱}$ و $\frac{۱}{\beta + ۱}$ باشد.

۲۶ معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن برابر مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۴x - ۶ = ۰$ باشد.

۲۷ معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $۲ - \sqrt{۴ - a}\,,\ ۲ + \sqrt{۴ - a}$ باشند.

۲۸ مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^۲ + ۳x + m^۲ = ۲$ معکوس یکدیگر باشند؟

۲۹ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^{۲} - ۳x - ۵ = ۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{۱}{\beta + ۱} + \frac{۱}{\alpha + ۱}$ را بیابید.

۳۰ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۴x^{۲} - ۱۲x + ۱ = ۰$ باشند، مقدار $\frac{۱}{\sqrt{\beta}} + \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ را بدست آورید.

۳۱ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

الف – مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب – مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

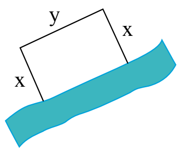
۳۲ مقدار a را طوری بدست آورید که نقطه‌ی مینیمم نمودار تابع $y = ax^{۲} - ۲\sqrt{۲}x + a$ بر روی خط $y = ۱$ واقع باشد.

۳۳ نقطه‌ی مینیمم تابع با ضابطه‌ی $y = x^{۲} + ax + ۲$ روی نیمساز ربع اول قرار دارد. a را بدست آورید.

۳۴ مقدار ماکسیمم یا مینیمم تابع داده شده را مشخص کنید.

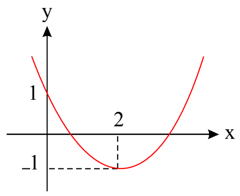
$x^{۲} - ۴x + ۸y - ۴ = ۰$

۳۵ قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

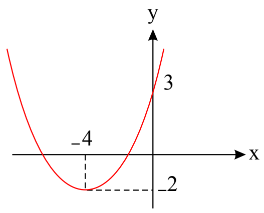


۳۶ مقدار max یا min تابع $f(x) = ۴ + ۸x - x^{۲}$ را بیابید.

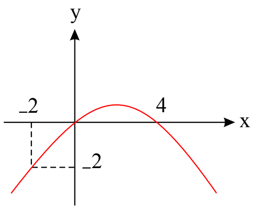
۳۷ در شکل زیر نمودار سهمی به معادله‌ی $p(x) = ax^{۲} + bx + c$ داده شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۳۸ در شکل زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^{۲} + bx + c$ داده شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.

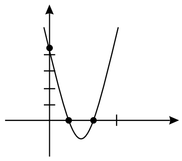


۳۹ در شکل زیر نمودار سهمی به معادله‌ی $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ رسم شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.

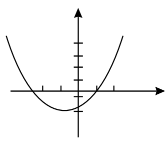


۴۰ با توجه به نمودارهای سهمی زیر به معادلهٔ $y = ax^{۲} + bx + c$ ، برای هر مورد ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

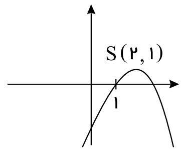
الف)



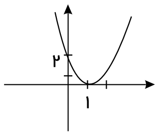
ب)



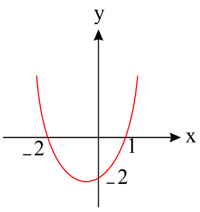
پ



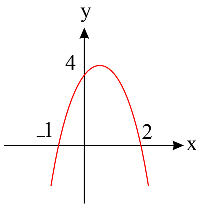
ت



۴۱ باتوجه به نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۴۲ معادله‌ی سهمی شکل زیر را بدست آورید.

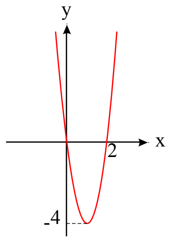


۴۳ معادله‌ی سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند و از نقطه‌ی $(۳,۱)$ نیز بگذرد. معادله‌ی سهمی را بصورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ در نظر می‌گیریم.

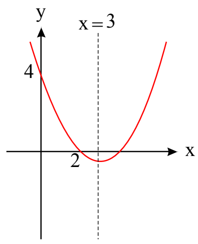
۴۴ اگر $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ باشد، هر یک از پارامترهای a و b و c را طوری تعیین کنید تا نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۳ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند و از نقطه‌ی $(-۱,۴)$ هم بگذرد.

۴۵ ضابطهٔ جبری سهمی‌های زیر را بنویسید.

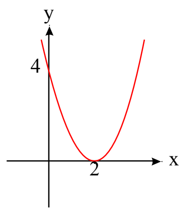
الف



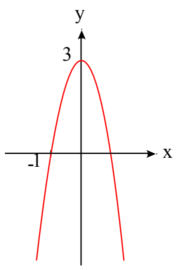
ب



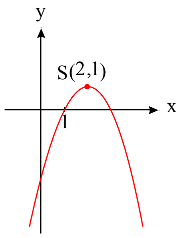
پ



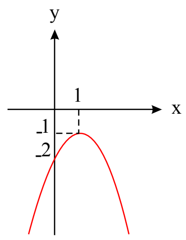
ت



ث



ج



۴۶ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی جمله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود یک ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از جمله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۴۷ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۲x}{x^۲-۱}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲-x}{x^۲-x}$$

۴۸ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\frac{۳}{x^۲}-۱۲=۰$$

ب

$$\frac{۲}{k}-\frac{۳k}{k+۲}=\frac{k}{k^۲+۲k}$$

پ

$$\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x-۳}=\frac{۱۲}{۹-x^۲}$$

۴۹ فاصلهٔ بین دو شهر A و B، ۱۸۰ کیلومتر است. اتومبیلی از شهر A با سرعت ثابت به سمت شهر B در حال حرکت است. نیم ساعت بعد، اتومبیل دیگری که سرعت آن ۴ کیلومتر در ساعت بیشتر از اتومبیل اول است از شهر A به سمت شهر B حرکت می‌کند. اگر زمان رسیدن هر دو اتومبیل یکسان باشد، سرعت هر یک از اتومبیل‌ها را به دست آورید.

۵۰ دو نفر با هم می‌توانند در ۴ ساعت، ساختمانی را رنگ‌آمیزی کنند. اگر سرعت کار یکی از آنها ۴ برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام بدهند.

۵۱ معادله‌ی رادیکالی زیر را حل کنید.

$$\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$$

۵۲ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲+\sqrt{۱+x}=\sqrt{x+۹}$$

۵۳ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x-\sqrt{x}=۲۰$$

۵۴ معادلات زیر را حل کنید.

الف)
$$۲\sqrt{۲t-۱}-t=۱$$

ب)
$$۲x=۱-\sqrt{۲-x}$$

پ)
$$\sqrt{x+۷}=\sqrt{x}+۱$$

ت)
$$\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}-\frac{۲}{\sqrt{u}}=۰$$

ث)
$$۲+\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}=x$$

۵۵ اگر فاصله بین دو نقطهٔ $(a,۵)$ و $(۴,a-۳)$ برابر $۲\sqrt{۱۰}$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

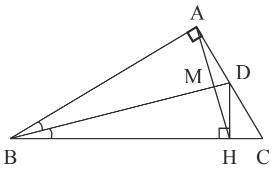
۵۶ دو خط متقاطع d و d' را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از نقطهٔ O (محل تقاطع) به فاصلهٔ $۵cm$ بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.

۵۷ مربعی رسم کنید که پاره‌خط AB یکی از قطرهای آن باشد.

۵۸ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\widehat{A}=۹۰^\circ)$ نیمساز زاویه‌ی B، ضلع AC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند، از نقطه‌ی D بر وتر BC عمود می‌کنیم و پای عمود را نقطه‌ی H می‌نامیم.

الف – ثابت کنید $A\overset{\Delta}{B}D=H\overset{\Delta}{B}D$

ب – ثابت کنید $D\widehat{A}M=D\widehat{H}M$



۵۹ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هر یک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

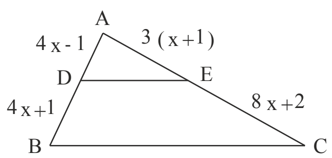
الف) مثلث متساوی‌الساقینی که A یک رأس آن و قاعدهٔ آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

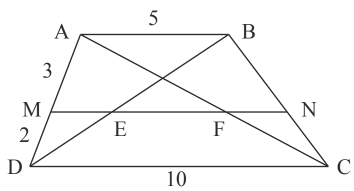
پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $۸cm^۲$ باشد.

۶۰ در مثلث ABC، نیمساز دو زاویه B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند دایره‌ای رسم کنید که بر سه ضلع مثلث مماس باشد طریقهٔ رسم دایره را توضیح دهید.

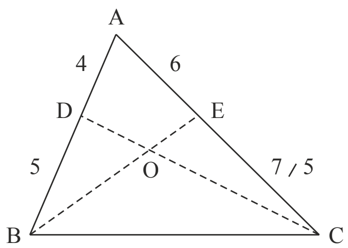
۶۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است. مقدار x را بدست آورید.



۶۲ در ذوزنقه شکل روبرو $AB \parallel MN$ است. طول پاره‌خط EF را بدست آورید.



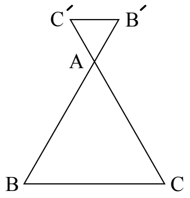
۶۳ در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE را بدست آورید.



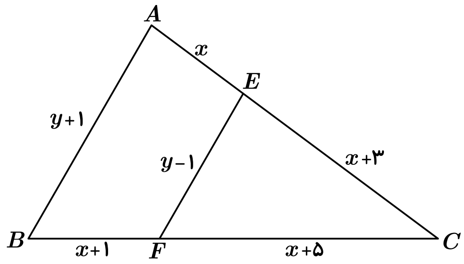
۶۴ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۶۵ با توجه به شکل، اگر $B'C' \parallel BC$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید:

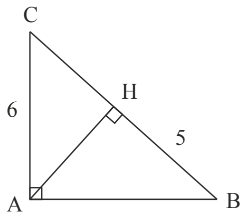
$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$



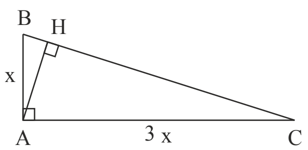
۶۶ اگر $EF||AB$ مقادیر x,y را بیابید.



۶۷ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\widehat{A}=۹۰^\circ)$ اگر $AC=۶$ و $BH=۵$ باشد، اندازه‌ی AH و AB را بدست آورید.

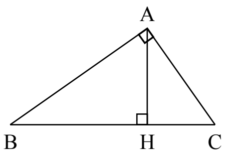


۶۸ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ به ۳ و مساحت مثلث ۶۰ واحد مربع است. طول ارتفاع وارد بر وتر را بدست آورید.



۶۹ در ذوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها ۴ و ۹ واحد و اندازه‌ی ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی را بدست آورید که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل می‌شود.

۷۰ در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو در هر حالت، اندازهٔ پاره‌خط خواسته شده را بدست آورید.



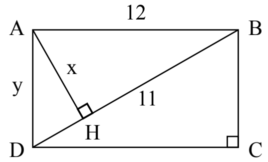
الف) $BC=۱۰$ ،$BH=۹$ ،$AH=?$ ،$AB=?$ ،$AC=?$

ب) $AC = ۵$ ،$CH = ۲$ ،$BC = ?$ ،$AH = ?$ ،$AB = ?$

پ) $AB = ۸$ ،$AC = ۶$ ،$BC = ?$ ،$AH = ?$ ،$BH = ?$ ،$CH = ?$

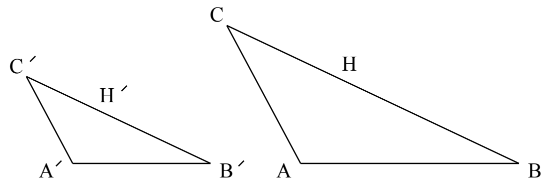
ت) $AB = ۱۲$ ،$AH = ۶$ ،$BH = ?$ ،$BC = ?$ ،$AC = ?$

۷۱) در مستطیل مقابل مقادیر x و y را بدست آورید.



۷۲) دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید، به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$ باشد.

اکنون ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.



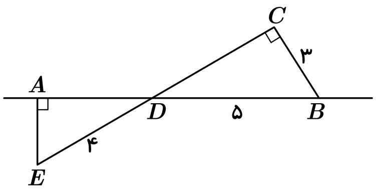
الف) ثابت کنید مثلث‌های $\overset{\triangle}{AHB}$ و $\overset{\triangle}{A'H'B'}$ متشابه‌اند.

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را بدست آورید.

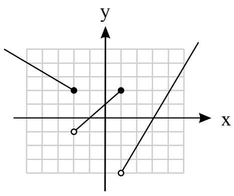
پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}}$ را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را بدست آورید.

۷۳) در شکل روبه‌رو، ابتدا نشان دهید دو مثلث ADE و CDB متشابه‌اند، سپس به کمک آن طول پاره‌خط AD را بیابید.



۷۴) ضابطه و دامنه و برد تابع مربوط به نمودار روبرو را بنویسید.



۷۵) اگر $f(x) = \frac{۲x^۲ + ۲}{x^۲ - ۳}$ باشد، مقدار $f(۲ - \sqrt{۳})$ را بدست آورید.

۷۶) نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{x}$ و با دامنهٔ $D_f = [-۵, ۵] - \{۰\}$ را رسم کنید.

۷۷) نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x) = -۳ + \sqrt{x - ۴}$ را رسم کنید.

۷۸ دامنهٔ تابع $f(x) = \dfrac{۴x - ۱}{x^۲ + ax + b}$، مجموعهٔ $\mathbb{R} - \{-۲, ۵\}$ می‌باشد. a و b را به دست آورید.

۷۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = a + \sqrt{x + b}$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۵ قطع می‌کند. اگر نمودار این تابع از نقطهٔ $(۱, -۲)$ بگذرد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۸۰ نمودار هر یک از توابع زیر را در بازهٔ $[-۲, ۲)$ رسم کنید.

الف
$y = [x] + ۱$

ب
$y = ۲[x] - ۳$

پ
$y = x + [x]$

ت
$y = x - [x]$

۸۱ اگر f یک تابع خطی باشد به طوری که $f(۱) = ۵$ و $f^{-۱}(۹) = ۳$، آنگاه ضابطه‌ی f و $f^{-۱}$ را بدست آورید.

۸۲ ضابطه‌ی وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^{\geq -۲} \to \mathbb{R}^{\geq -۱} \\ f(x) = x^۲ + ۴x + ۳ \end{cases}$$

۸۳ در تابع $f(x) = -x + \sqrt{-۲x}$ اگر $f^{-۱}(۴) = a$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

۸۴ با رسم نمودار هر یک از توابع زیر، مشخص کنید کدام‌یک از توابع زیر، تابعی یک‌به‌یک است؟ در توابع غیر یک‌به‌یک، دامنه‌ای مشخص کنید که تابع در آن محدوده یک‌به‌یک شود.

الف
$y = ۲x + ۱$

ب
$f(x) = x^۲ - ۲x$

پ
$y = ۲ + \sqrt{x + ۱}$

ت
$$f(x) = \begin{cases} x - ۱ & x \geq ۰ \\ x^۲ & x < ۰ \end{cases}$$

ث

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ x+\frac{۱}{۲} & x<۰ \end{cases}$$

ج

$$f(x)=|x-۱|+۱$$

چ

$$f(x)=[x]$$

ح

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۰ \\ -۱ & x,۰ \end{cases}$$

۸۵ نمودار تابع وارون، تابع خطی $f(x)=-x+m$ از نقطه $(۱ \text{ و } -۳)$ می‌گذرد. ابتدا مقدار m را به دست آورید و سپس ضابطه تابع وارون f را بنویسید.

۸۶ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=x^{۲}-۴$ باشد، ابتدا تابع $\frac{f}{g}$ و دامنه‌ی آن را بدست آورده و سپس مقدار $(g-۳f)(۵)$ را محاسبه کنید.

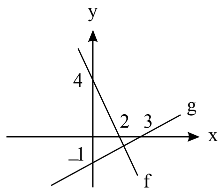
۸۷ اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=-۳x+۳$ باشد، دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بدست آورده و سپس مقدار $(۲f-g)(۰)$ را محاسبه کنید.

۸۸ اگر $f(x)=\frac{x+۱}{x-۴}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ دو تابع باشند، آن‌گاه مطلوبست محاسبه:

الف – دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ ب – دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{g}{f}$

پ - $(۴f-۳g)(۶)$

۸۹ اگر نمودار تابع f و g بصورت روبرو باشند، مطلوبست:الف – ضابطه و دامنه‌ی تابع $f+g$ ب – مقدار $(۳g-f)(۶)$



۹۰ در هر مورد، دامنه و ضابطهٔ حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق در تابع داده شده را بیابید.

الف

$$f(x)=|x| \quad , \quad g(x)=\frac{۱}{x}$$

ب

$f(x) = x^۲ - ۴$

$g(x) = x + ۲$

پ

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = -\sqrt{x}$

ت

$f(x) = \frac{x-۲}{x+۵}$

$g(x) = x^۲ + ۳x - ۱۰$

ث

$g = \{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\}$

$f = \{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}$

۹۱ اگر $f(x) = \sqrt{x+۴}$ و $g(x) = \dfrac{x+۲}{x-۴}$، مطلوب است:

الف

$D_{\frac{f}{g}}$

ب

$D_{\frac{g}{f}}$

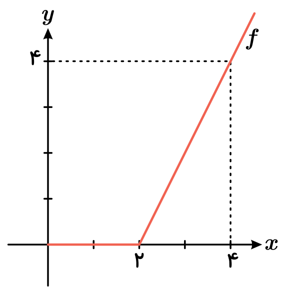
پ

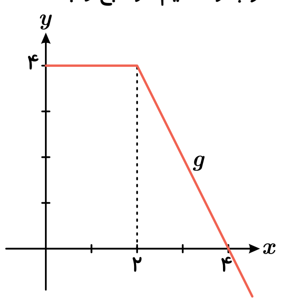
$D_{\frac{f}{g}+\frac{g}{f}}$

ت

$(۲f - g)(۵)$

۹۲ مطابق شکل زیر، دو تابع f و g داده شده‌اند. حاصل جمع، ضرب و تقسیم دو تابع را به‌دست آورید.





۹۳ نمودار سهمی $y = x^۲ + ۴x$ را ۳ واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، معادله‌ی آن را پس از انتقال بنویسید.

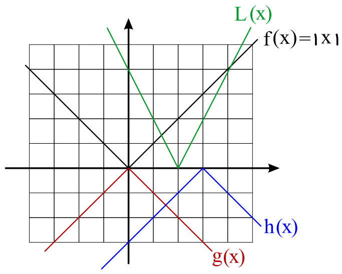
۹۴ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|$، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x)=-|x|$ ب) $h(x)=-|x-۳|$ پ) $l(x)=۲|x-۲|$

۹۵ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x)=۲\sqrt{x}$ ب) $s(x)=-\sqrt{x-۲}$ پ) $t(x)=-۳\sqrt{x}$

ت) $u(x)=۱-\sqrt{x}$ ث) $v(x)=۱-\sqrt{x-۳}$

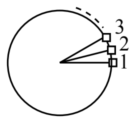


۹۶ چرخ و فلکی دارای ۳۰ کابین است و ما، در کابین شمارهٔ ۸ قرار داریم. اگر به اندازهٔ $\frac{۳۲\pi}{۵}$ رادیان و در جهت مثلثاتی بچرخیم، در موقعیت چه کابینی قرار می‌گیریم؟

۹۷ مجموع اندازهٔ سه زاویه $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان و زاویه‌ها با عددهای ۲ و ۳ و ۴ متناسب هستند. زاویه‌ها را برحسب درجه و رادیان بدست آورید.

۹۸ در فاصلهٔ ساعت ۱۰ تا $۱۰:۳۰'$ عقربه‌های ساعت‌شمار، دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار چه زاوایایی برحسب رادیان طی می‌کنند؟

۹۹ فرض کنید سوار چرخ‌وفلکی با ۸۰ کابین شده‌اید. اگر در ابتدا در کابین شماره ۵ قرار داشته باشد، پس از $\frac{۸۴\pi}{۲۰}$ رادیان دوران، در موقعیت کدام کابین قرار خواهید داشت؟



۱۰۰ اگر $\sin\theta=\frac{۳}{۵}$ و انتهای زاویه‌ی θ در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $\frac{۱+\tan^۲\theta}{۱-\tan^۲\theta}$ را بدست آورید.

۱۰۱ اگر $x=\frac{۲}{\sin\alpha}$ و $y=۳\cot\alpha$ باشد، رابطه‌ای بین x و y بدست آورید.

۱۰۲ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\tan(-\frac{\pi}{۳}) - \sin(-\frac{\pi}{۴})\cos(-\frac{\pi}{۳})$

ب) $\sin(-۴۵^\circ) \times \tan(-۶۰^\circ) - \cos(-۶۰^\circ) \times \cot(-۳۰^\circ)$

پ) $\dfrac{\tan(-۴۵^\circ) + ۲\sin(-۲۷۰^\circ)}{\cos(-۳۶۰^\circ) - \cot(-۴۵^\circ)}$

ت) $\dfrac{\sin\frac{۵\pi}{۶} + ۲\cos ۱۲۰^\circ}{\tan\frac{۳\pi}{۴} + \sqrt{۲}\cos ۱۳۵^\circ}$

ث) $\cos\frac{۳\pi}{۱۴} + \cos\frac{۵\pi}{۱۴} + \cos\frac{۷\pi}{۱۴} + \cos\frac{۹\pi}{۱۴} + \cos\frac{۱۱\pi}{۱۴}$

ج) $\dfrac{\sin(\frac{۷\pi}{۶}) \times \cot ۲۲۵^\circ - ۳\cos ۲۴۰^\circ \times \tan(\frac{۵\pi}{۴})}{\tan^۲(\frac{۷\pi}{۶}) + \cos^۲(\frac{۵\pi}{۴})}$

۱۰۳ اگر $\tan ۲۰^\circ = ۰/۳۶$ باشد حاصل $\dfrac{\sin ۱۶۰^\circ - \cos ۲۰۰^\circ}{\cos ۱۱۰^\circ + \sin ۷۰^\circ}$ را بدست آورید.

۱۰۴ اگر $\tan\theta = ۰/۲$ باشد، مقدار $\dfrac{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(۳\pi + \theta)}$ را بدست آورید.

۱۰۵ اگر $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$ را بدست آورید.

۱۰۶ اگر $\dfrac{۱}{۶} = \dfrac{\sin(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha)}{\sin(۷\pi + \alpha) + \cos(\alpha - \frac{۷\pi}{۲})}$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ را بدست آورید.

۱۰۷ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\dfrac{3\sin 150^\circ - \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4} + \cos 300^\circ}{\cot(-135^\circ) - \sqrt{3}\tan\frac{5^\circ}{6}}$

ب) $\dfrac{2\sin\frac{7\pi}{6}\times\tan\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}\tan\frac{5\pi}{3}}{\cos^2(\frac{7\pi}{4}) + \cot^2(\frac{4\pi}{3})}$

پ) $2\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha) + 7\sin(\pi-\alpha) - 3\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)$

ت) $\sin(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha) + \cot(\pi-\alpha) + 3\cos(\pi+\alpha) + \tan(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha)$

ث) $\sqrt{3}\cot\dfrac{7\pi}{3} + 2\sin\dfrac{20\pi}{3} + 2\cos\dfrac{5\pi}{3}\times\tan\dfrac{50\pi}{3}$

ج) $\dfrac{\tan 120^\circ\cos 210^\circ - \sin 225^\circ\cos 315^\circ}{\cot 135^\circ\sin 330^\circ - \cos 240^\circ\tan 225^\circ}$

چ) $3\tan\dfrac{29\pi}{6} - \sin\dfrac{39\pi}{4} + \cos\dfrac{27\pi}{4} - \cot\dfrac{34\pi}{3}$

ح) $5\sin^2(\dfrac{7\pi}{4}) + 2\tan^2(\dfrac{4\pi}{3}) + 3\cos(\dfrac{8\pi}{3}) - \cot^2(\dfrac{7\pi}{6})$

۱۰۸ اگر $\dfrac{\sin(\frac{11\pi}{2}+\alpha) + 2\cos(5\pi-\alpha)}{2\cos(\frac{7\pi}{2}+\alpha) - 3\sin(17\pi+\alpha)} = \dfrac{1}{10}$ باشد، مقدار $\tan\alpha$ را بدست آورید.

۱۰۹ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف

$\tan 135^\circ + \cot 120^\circ$

ب

$\cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ)$

پ

$\sin 630^\circ + \tan(-540^\circ)$

ت

$\cos(-720^\circ) + \cot(-600^\circ) + \tan(720^\circ) - \tan(-600^\circ)$

ث

$\sin(\dfrac{25\pi}{3}) - \cos(\dfrac{23\pi}{4})$

ج)

$$\frac{\sin \frac{۳\pi}{۴} - \cos \frac{۵\pi}{۶}}{\sin(\frac{-۳\pi}{۴}) + \tan(\frac{-۴\pi}{۳})}$$

۱۱۰ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید:

$$\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$$

۱۱۱ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه x / نسبت	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$								
$\cos x$								
$\tan x$								
$\cot x$								

۱۱۲ اگر $a \in (۰, \frac{\pi}{۲})$ و $\sin(\frac{\pi}{۲} + a) = \frac{۳}{۵}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{۷\pi}{۲} - a)$ را به دست آورید.

۱۱۳ آیا نمودار هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق هستند یا خیر؟

الف) $y_۱ = \sin(۴\pi - x)$, $y_۲ = \cos(x + \frac{۳\pi}{۲})$

ب) $y_۱ = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)$, $y_۲ = \cos(\pi - x)$

پ) $y_۱ = \sin(\pi - x)$, $y_۲ = \cos(\frac{۳\pi}{۲} - x)$

۱۱۴ بُرد هر یک از توابع زیر را در دامنه‌ی داده شده بدست آورید.

الف) $y = ۳\sin x - ۱ \quad [۰, ۲\pi]$

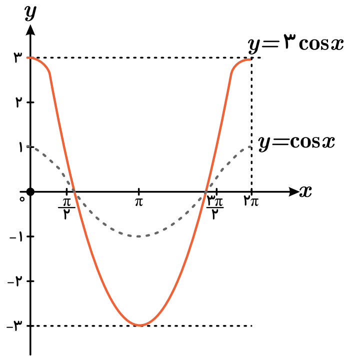
ب) $f(x) = ۲ - ۴\cos x \quad [۰, ۲\pi]$

پ) $h(x) = ۳\sin^۲ x - ۲ \quad [۰, ۲\pi]$

ت) $y = ۱ - ۲\cos(x - \frac{\pi}{۳}) \quad [۰, ۲\pi]$

۱۱۵ بیشترین و کمترین مقدار تابع $y=-۲\sin(x+\frac{۲\pi}{۳})+۳$ را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ را بدست آورید.

۱۱۶ هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



الف)
$y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

ب)
$y=\cos x-۱$

پ)
$y=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$

ت)
$y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})+۱$

۱۱۷ نمودار تابع $y=cos(x-\frac{\pi}{۴})+۱$ را در فاصله $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

۱۱۸ اگر نمودار تابع $f(x)=ab^x-۱$ از دو نقطهٔ $A(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $B(۱,۱۱)$ بگذرد، مقدار $f(-۱)$ را بیابید.

۱۱۹ اگر $۲^x=۶$، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $۸^{x-۱}$

ب) $۴^x+۸^x$

پ) $۱۶^{x-۲}$

ت) $(۰/۲۵)^{۲x}\times ۶۴^{x-۱}$

۱۲۰ نمودارهای دو تابع $g(x)=(\frac{۱}{۹})^x$ و $f(x)=۳^{ax+b}$ در نقطه‌ای به طول -۱ متقاطع هستند. اگر $f(۲)=\frac{۱}{۳}$ باشد، $f^{-۱}(۲۷)$ را بدست آورید.

۱۴۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $9^{x} = 3^{x^{2}-4x}$

ب) $(\frac{3}{5})^{x} = \frac{25}{9}$

پ) $3^{5x+2} = 27\sqrt{3}$

ت) $(\frac{3}{2})^{2x+3} = (\frac{16}{81})^{x}$

ث) $27^{x} - 3^{2x-5} = 0$

ج) $2^{x} + 2^{x+2} = 40$

ح) $3^{x+1} - 3^{x-1} = 72$

خ) $5^{2x+3y} = 7^{x+y+1}$

۱۴۲ دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

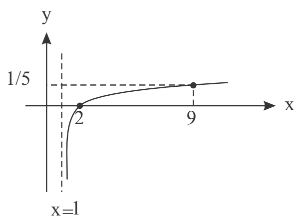
الف) $y = \log_{x}(2x+6)$

ب) $f(x) = \log_{(x-1)}(12-2x)$

پ) $f(x) = \log_{(x-2)}(25-x^{2})$

ت) $f(x) = \log_{(x-5)}(x^{2}-16)$

۱۴۳ اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_{a}(x-1)$ بصورت زیر باشد، ضابطهٔ وارون آن را بدست آورید.



۱۴۴ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ باشد، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log 5$

ب) $\log 18$

پ) $\log 1/5$

ت) $\log 75$

ث) $\log 42$

ج) $\log \frac{98}{45}$

چ) $\log \sqrt{210}$

ح) $\log \frac{\sqrt[3]{35}}{12}$

خ) $\log(135\sqrt[4]{56})$

۱۴۵ حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log_5 150 - \log_5 6$

ب) $\log_7 \sqrt[4]{343}$

پ) $\log_5 625 + \log_2 \frac{1}{64} + \log_{10} 0/001$

ت) $5^{(\log_{25} 3 - 2)}$

ث) $6\log_9 \sqrt[3]{81} - 3\log_2 \frac{1}{8} + 4\log_5 \frac{1}{125}$

ج) $\log_{27} 243$

چ) $\log_{\frac{1}{3}} 27 - 3\log_7 \frac{1}{49} + 2\log 0/0001$

ح) $\log_5 (\sqrt{125})^3$

۱۴۶ اگر $\log 2 = k$ باشد، حاصل $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ چقدر است؟

آموزشگاه پرسا

۱۲۷ حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log ۳۵ + ۲\log ۲\sqrt{۷} - \log ۲۰۰ - ۲\log ۷$

ب) $\log_۵ ۲۰۰ - \log_۵ ۴۰$

پ) $\log_۶ ۱۲\sqrt{۳} + \log_۶ ۳\sqrt{۱۲}$

ت) $۷^{(۲\log_۷ ۳ + ۳\log_۷ ۲)}$

ث) $\sqrt{۱۰}^{(\log ۳۲ + \log ۸)}$

ج) $۸^{(\log_۲ \sqrt[۳]{۲۰} - \log_۲ ۳)}$

چ) $\log ۲۰ + ۶\log \sqrt[۶]{۵} - \log_۴ \sqrt[۳]{۳۲}$

۱۲۸ اگر $\log ۳ + \log \sqrt[۴]{۳} = \log (۸۱)^k$ باشد، حاصل عبارت $\log_۲ \frac{۵}{k}$ را بدست آورید.

۱۲۹ اگر $\log_{\sqrt{۳}} a = \frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار $\log_۸ (a^۳ + ۷)$ چقدر است؟

۱۳۰ اگر $\log_۸ ۲\sqrt[۳]{۰/۲۵} = A$ باشد، آنگاه مقدار $\log_۴ (\frac{۱}{A} - ۱)$ چقدر است؟

۱۳۱ اگر $\log_۲ \sqrt[۵]{e^۲} = A$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{e}} ۳۲$ را بدست آورید.

۱۳۲ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\log \frac{۱}{۲} + \log \frac{۲}{۳} + \log \frac{۳}{۴} + \cdots + \log \frac{n}{n+۱}$

ب) $۵^{(۲\log_۵ ۲ + ۳\log_۵ ۳)}$

۱۳۳ اگر $\log_y \sqrt{۲} = \frac{۱}{۴}$ و $\log_x \sqrt[۳]{۱۶} = \frac{۴}{۳}$ باشند، حاصل $\log_{x^۳} y^۲$ را بدست آورید.

۱۳۴ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف

$\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$

ب

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

پ

$a^{\log_a b} = b$

ت

$\log_b a \times \log_a b = ۱$

آموزشگاه پرسا

۱۳۵ حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log_{۷} \sqrt[۵]{۴۹}$

ب) $\log_{۳} ۲۷^{\frac{۱}{۲}}$

پ) $-\log_{۵} ۱۲۵$

ت) $۳\log_{۱۰} \sqrt{۱۰۰۰}$

۱۳۶ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۵}(x+۶) = \log_{۵}(۲x-۸)$

ب) $\log_{۵}(x+۶) + \log_{۵}(x+۲) = ۱$

پ) $\log_{۴}(x+۲) = \log_{۴} ۸$

ت) $\log(x+۱) - \log(x-۳) = ۳$

ث) $\log_{۲}(۲x+۱) = ۳$

ج) $\log(۲x) - \log(x-۳) = ۱$

چ) $\log_{\sqrt{۲}} x = \log_{۲} ۶۴$

ح) $\log_{۷}(x-۲) = \frac{۱}{۲}$

۱۳۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۹}(x^{۲}-۲۴) = \log_{۹} ۵x$

ب) $\log_{۳}(x^{۲}-۱) = ۱ + \log_{۳}(x+۹)$

پ) $\log_{x}(x^{۳}-۲x) = ۲$

ت) $\begin{cases} \log x = \log ۲ + \log y \\ ۲^{x} \times ۸^{y} = ۴ \end{cases}$

ث) $\begin{cases} \log y = ۲\log ۳ + \log x \\ ۲^{x-۷} \times ۴^{x+y} = ۱ \end{cases}$

۱۳۸ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_x(x^۲ + x) = \log_x ۶$

ب) $\log_۹ x^۲ + ۷x + ۷ = ۰$

پ) $\log_x(x^۳ + ۳x - ۶) = ۳$

ت) $\log_۸(x+۱)^۳ + ۲\log_۴ x = ۱$

ث) $\log_{۱۲}(x-۲) + \log_{۱۲}(x+۲) = ۱$

ج) $\log ۳x - \log ۴ = \log(۷ - x)$

چ) $\log_۳\sqrt{۳} + \log_۵\sqrt{۵} = \frac{۱}{۲}\log_۲ x$

۱۳۹ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_۲ x + \log_۲(x-۲) = ۳$

ب) $۲\log\sqrt{۲x+۳} + \log(۲x-۳) - \frac{۱}{۲}\log ۴۹ = ۰$

پ) $\begin{cases} ۱ + \log\sqrt{x+۱} = \log y \\ ۴\sqrt{۲} = ۴^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log ۱۰ + \log\sqrt{x+۱} = \log y \\ ۲^۲ \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲x} \end{cases}$

۱۴۰ اگر $\log_۲(۵x+۱) + \log_۱ x = ۲$ باشد، مقدار $\frac{۴}{x}$ را بدست آورید.

۱۴۱ از معادلهٔ لگاریتمی $\log_۳(۲x^۲+۱) - \log_۳(x+۲) = ۱$ مقدار $\log_۸(۲x-۱)$ را بیابید.

۱۴۲ اگر $\log(x^۲ - x + ۱) + \log(x+۱) = ۱$ باشد، مقدار $\log_۳ x$ را بدست آورید.

۱۴۳ از دو معادلهٔ $\log_۳ x + \log_۳ y = ۲$ و $x^۲ + y^۲ = ۴۶$، مقدار $\log_۴(x+y)$ را بدست آورید.

۱۴۴ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف
$\log_۳(p^۲ - ۲) = \log_۳ p$

ب
$\log_۵(x+۱) + \log_۵(x-۱) = ۱$

پ
$۳\log_۴ a - \log_۴ ۵ = \log_۴ ۲۵$

ت
$\log_{\frac{۱}{۱۰}}(x^۲ - ۲۱) = -۲$

۱۴۵ اگر $\log 2 \simeq 0{,}3$ و $\log 3 \simeq 0{,}5$ باشند، مقدار تقریبی $\log \sqrt[3]{12^2}$ را به‌دست آورید.

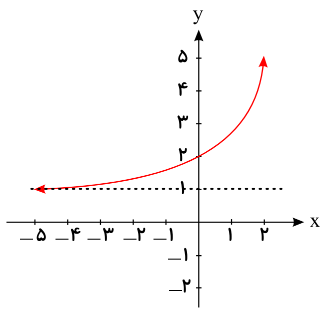
۱۴۶ نمودار تابع‌های $y = 2^x, y = 2^x + 1, y = 2^{(x+3)}, y = 2^{(x-2)} - 2, y = 3 - 2^x$ و $y = 2^{-x} - 4$ را رسم کنید و دامنه و برد هریک را مشخص کنید.

۱۴۷ تابع با ضابطهٔ $f(x) = 2^{-(x+b)} + c$، محور xها را در نقطه‌ای به طول -1 و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -4 قطع می‌کند. ضابطهٔ تابع را بدست آورده و سپس $f(-2)$ را بدست آورید.

۱۴۸ نمودار تابع‌های $y = \log_2 x, y = \log_2(x-3), y = \log_2(x+5) + 2, y = \log_2(-x) + 2, y = 3 - \log_2 x$ و $y = \log_2(x+3) - 2$ را رسم کنید و دامنه و برد هریک را مشخص کنید.

۱۴۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = -\log_2(x+b) + c$، محور xها را در نقطه‌ای به طول -2 و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند. ضابطهٔ تابع را بدست آورده و سپس $f(4)$ را محاسبه کنید.

۱۵۰ در دستگاه مختصات روبرو نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را بدست آورید.



۱۵۱ نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = a \times b^x - 5$ از دو نقطهٔ $(1, 7)$ و $(-1, -\frac{17}{4})$ می‌گذرد. مقایر a و b را به دست آورید.

۱۵۲ نمودار تابع $y = -\log_3(x-2)$ را رسم کنید. (مراحل انتقال را رسم کنید)

۱۵۳ اگر تعداد باکتری موجود در یک نمونه از فرمول $P(t) = ۶۰۰ \times ۲^{\frac{t}{۲}}$ بدست آید که t نشان دهندهٔ زمان برحسب ساعت باشد مطلوبست:

الف) تعداد اولیهٔ باکتری‌ها

ب) تعداد باکتری‌ها پس از ۸ ساعت

پ) پس از چند ساعت ۷۶۸۰۰ باکتری داریم؟

۱۵۴ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x & x \geq ۱ \\ ۴ - x^۲ & x < ۱ \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x = ۱$ بررسی کنید.

۱۵۵ اگر در تابع $f(x) = \begin{cases} x - a & x \geq ۱ \\ x^۲ + ۲a & x < ۱ \end{cases}$، مقدار حد راست در $x = ۱$، نصف حد چپ در این نقطه باشد، a را بدست آورید.

۱۵۶ تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b \ , & x > ۲ \\ ax^۲ + ۳bx + ۱ \ , & x < ۲ \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۵$ و $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = ۷$ باشد حاصل $a + b$ را بدست آورید.

۱۵۷ تابع $f(x) = \begin{cases} (a-۱)x + ۵ \ , & x > -۲ \\ x^۲ + ۲b \ , & x < -۲ \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim\limits_{x \to (-۱)} f(x) = ۲$ و $\lim\limits_{x \to (-۴)} f(x) = ۸$ باشد، a و b را بدست آورید.

۱۵۸ اگر $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + ۲}{x + ۱} & x > ۱ \\ ۲x + a & x < ۱ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) - \lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = ۳$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۱۵۹ هر یک از حدود زیر را تعیین کنید.

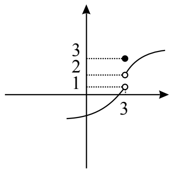
الف)

$$\lim_{x \to ۰} \frac{[x] + |x|}{x + ۱}$$

ب)

$$\lim_{x \to ۰^-} \frac{-۳}{|[x] + [-x]|}$$

۱۶۰ با توجه به شکل، حاصل عبارت روبه‌رو را تعیین کنید.



$$A = \lim_{x \to ۳^+} \sqrt{x^۲ - ۵} + \lim_{x \to ۳^-} \frac{xf(x)}{x + f(x)}$$

۱۶۱ حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to \frac{۸}{۴}} \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\sqrt{۲}\sin x - \sqrt{۲}\cos x}$

ب) $\lim_{x \to ۰} \frac{۱ - \cos x}{\tan^۲ x}$

پ) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos^۲ x}{۱ - \sin x}$

ت) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} \frac{۴\sin^۲ x - ۱}{۱ - ۲\sin x}$

۱۶۲ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \to (-۲)} \frac{۲x^۲ - ۸}{x^۲ - x - ۶}$

ب) $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - x}{x^۲ - ۴x + ۳}$

پ) $\lim_{x \to (-۲)} \frac{x^۲ + x - ۲}{x^۲ + ۳x + ۲}$

ت) $\lim_{x \to (-۳)} \frac{x^۳ + ۳x^۲}{x^۲ - ۹}$

ث) $\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲ - ۱}{۸x^۲ - ۲x - ۱}$

۱۶۳ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \to (-۳)} \frac{x^۲ - ۹}{x + ۳}$

ب) $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۴x + ۳}{x^۲ + ۴x - ۵}$

پ) $\lim_{x \to (-۱)} \frac{x^۲ - ۵x - ۶}{x^۲ + ۸x + ۷}$

ت) $\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - x - ۲}{x^۳ - ۸}$

ث) $\lim_{x \to (-۲)} \frac{x^۲ + ۵x + ۶}{x^۲ + ۲x}$

۱۶۴ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{۲x-۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۴x^{۲}}{۲x^{۲}-x^{۳}}$

پ) $\lim\limits_{x\to(-۱)}\dfrac{۳x^{۲}+۵x+۲}{۲x^{۲}+x-۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^{۳}-۲۷}{x^{۲}-۲x-۳}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۳x^{۳}+۴x-۳x^{۲}-۴}{x^{۲}+x-۲}$

۱۶۵ a را طوری بیابید که $\dfrac{۱}{۸}=\lim\limits_{x\to ۲a}\dfrac{x-۲a}{x^{۲}-۴a^{۲}}$ باشد.

۱۶۶ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{-x+|x-۲|}{x-۱} & , x\neq ۱\\ a & , x=۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد، a را بدست آورید.

۱۶۷ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۳x+۲} & , x\neq ۱\\ a & , x=۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

۱۶۸ مقدار a را طوری بدست آورید که تابع زیر در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۹}{|x-۳|}, & x<۳\\ x^{۲}-ax\ , & x\geq ۳\end{cases}$$

۱۶۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin^{۲}x}{۱-\cos x} & , \quad x>۰\\ a\sin(x+\frac{\pi}{۶}) & , \quad x\leq ۰\end{cases}$ به ازای چه مقداری از a در $x=۰$ پیوسته است؟

۱۷۰ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۲\sqrt{x^{۲}-۶x+۹}}{x-۳} & x>۳\\ ۲ & x=۳\\ ۵x-۱۳ & x<۳\end{cases}$ را در نقطه‌ای به طول $x=۳$ بررسی کنید. در مورد پیوستگی تابع f در سایر نقاط چه می‌توان گفت؟

۱۷۱ در یک خانواده سه‌فرزندی می‌دانیم که حداقل یک فرزند دختر است. احتمال این‌که خانواده دارای ۲ فرزند دختر باشد را محاسبه کنید.

۱۷۲ اگر $P(A|B')=P(B)=۰/۳$ باشد، مقدار $P(A-B)$ را بدست آورید.

۱۷۳ اگر در یک فضای نمونه‌ای S داشته باشیم $P(A|B') = ۰/۷$ و $P(B) = ۰/۴$ آنگاه $P(A \cup B)$ را بدست اورید.

۱۷۴ یک کارخانه دو محصول A و B را در دو کیفیت عالی (E) و متوسط (M) تولید می‌کند. جدول زیر درصد تولید هر یک از محصولات را نشان می‌دهید. مطلوبست:

الف- اگر محصول از نوع A باشد، با کدام احتمال دارای کیفیت متوسط (M) است؟

ب- اگر محصول از نوع B باشد، کدام احتمال دارای کیفیت عالی (E) است؟

پ- اگر محصولی عالی (E) باشد، با کدام احتمال از نوع A است؟

ت- اگر محصولی متوسط (M) باشد، با کدام احتمال از نوع B است؟

ث- احتمال این‌که محصولی دارای کیفیت عالی (E) و یا از نوع B باشد؟

کیفیت / محصول	E	M
A	۵۵%	۱۰%
B	۳۰%	۵%

۱۷۵ ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی، حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

۱۷۶ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشد و داشته باشیم $P(A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(A \cup B) = \frac{۵}{۶}$، آنگاه $P(B')$ را بدست آورید.

۱۷۷ برای دو پیشامد مستقل A و B، اگر $n(A) = ۱۲$ و $n(B) = ۶$ و پیشامد این‌که حداقل یکی از این دو پیشامد A و B روی دهد ۱۶ عضو دارد. فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

۱۷۸ احتمال این‌که فرزندی در خانواده A با چشمانی به رنگ آبی متولد شود ۴۰ درصد و احتمال این‌که فرزندی در خانواده B با چشمان آبی متولد شود ۷۰ درصد است. مطلوبست احتمال آنکه:

الف- هر دو نوزاد با چشمان به رنگ آبی متولد شوند.

ب- هر دو نوزاد با چشمانی به رنگ غیر از آبی متولد شوند.

پ- فقط یکی از نوزادان با چشمانی به رنگ آبی متولد شوند.

۱۷۹ در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C عددی بزرگتر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۱۸۰ احمد به احتمال ۰٫۷ در تیم بسکتبال مدرسه‌شان و به احتمال ۰٫۸ در تیم ملّی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم موردنظر انتخاب شود.

ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۱۸۱ احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰٫۶۲۵ باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۱۸۲ اگر میانگین داده‌های $x_۱ + ۱, x_۲ + ۲, x_۳ + ۳$ برابر $\bar{X}$ باشد، میانگین باشد، میانگین داده‌های $۳x_۱ + ۱,۳x_۲ + ۲,۳x_۳ + ۳$ را بیابید.

۱۸۳ اگر میانگین داده‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_N$ برابر $\bar{X}$ باشد، میانگین داده‌های $x_۱ + \bar{X}\ ,\ x_۲ + ۲\bar{X}\ ,\ \cdots\ ,\ x_N + N\bar{X}$ چقدر می‌شود؟

۱۸۴ در داده‌های مرتب شده ۴, ۶, ۷, ۸, ۱۰, x, ۲۰, ۲۲, ۲۷, ۲۹

الف- اگر میانه برابر با ۱۳ باشد، x را بدست آورید.

ب- اگر میانگین برابر ۱۵ باشد، x و میانه را بدست آورید.

۱۸۵ در یک جامعه آماری، انحراف ۷ تا از داده‌ها از میانگین برابر با ۴−، انحراف ۵ تا از داده‌ها از میانگین برابر ۲ و انحراف x تا از داده‌ها از میانگین برابر ۳ است. واریانس این جامعه آماری را بدست آورید.

۱۸۶ هشت داده آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ داریم. اگر دو دادهٔ ۱۲ و ۱۸ به آن‌ها افزوده شود، واریانس ۱۰ داده حاصل را بدست آورید.

۱۸۷ میانگین و واریانس ۲۹ داده آماری به ترتیب ۱۷ و ۵می‌باشد. اگر داده‌های ناجور ۱۲ ,۱۳ ,۲۱ ,۲۲ حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده را بدست آورید.

۱۸۸ یک جامعه آماری با اندازه ۱۲ و واریانس ۱۲٫۶، با جامعه دیگری با اندازه ۲۴ و واریانس ۷٫۲، تشکیل جامعه جدیدی داده‌اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف‌معیار جدید چقدر است؟

۱۸۹ در ۲۵ دادهٔ آماری، میانگین و انحراف‌معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می‌باشد، اگر داده‌های ناجور ۱۰ ,۱۵ ,۴۵ ,۵۰، از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده را بدست آورید.

۱۹۰ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰٫۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها را بدست آورید.

۱۹۱ اگر همهٔ داده‌های آماری را در عدد ۵ ضرب کنیم و سپس به هرکدام ۴ واحد اضافه کنیم، دامنهٔ تغییرات چه تغییری می‌کند؟

۱۹۲ در ۱۵۰ دادهٔ آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود؟

پاسـخنامه تشـریحی

۱

الف)

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}\to AB=۵$$

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۲-(-۲))^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}\to AC=۵$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۵-(-۲))^۲+(۴-۳)^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}$$

$$\to BC=۵\sqrt{۲}$$

$$\text{محیط } A\overset{\Delta}{B}C=P=AB+AC+BC=۵+۵+۵\sqrt{۲}\to P=۱۰+۵\sqrt{۲}$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\dfrac{۰-۴}{۲-۵}=\dfrac{-۴}{-۳}=\dfrac{۴}{۳}\\ m_{AC}=\dfrac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\dfrac{۰-۳}{۲-(-۲)}=-\dfrac{۳}{۴}\end{array}\right\} m_{AB}\cdot m_{AC}=\dfrac{۴}{۳}\times\dfrac{-۳}{۴}=-۱$$

$$\to AB\perp AC\to \hat{A}=۹۰\to A\overset{\Delta}{B}C=\text{قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین}$$

پ) $$S_{A\overset{\Delta}{B}C}=\dfrac{AB\times AC}{۲}=\dfrac{۵\times ۵}{۲}\to S_{A\overset{\Delta}{B}C}=۱۲/۵$$

۲

$$y=۲x+۱\to C(\alpha,۲\alpha+۱)\ ,\ A(۳,۰)\ ,\ B(-۱,۰)$$

$$AC=BC\to\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha+۱-۰)^۲}=\sqrt{(\alpha+۱)^۲+(۲\alpha+۱-۰)^۲}$$

$$\to(\alpha-۳)^۲+\cancel{(۲\alpha+۱)^۲}=(\alpha+۱)^۲+\cancel{(۲\alpha+۱)^۲}\to(\alpha-۳)^۲=(\alpha+۱)^۲$$

$$\to\cancel{\alpha^۲}-۶\alpha+۹=\cancel{\alpha^۲}+۲\alpha+۱\to ۹-۱=۲\alpha+۶\alpha\to ۸=۸\alpha\to\boxed{\alpha=۱}\to\boxed{C(۱,۳)}$$

۳

الف) $$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۶)^۲+(-۲-۴)^۲}=\sqrt{۱۶+۳۶}=\sqrt{۵۲}$$

$$\to AB=\sqrt{۴\times ۱۳}=۲\sqrt{۱۳}\ ,\ AB=۲R\to ۲\sqrt{۱۳}=۲R\to R=\sqrt{۱۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_O=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲+۶}{۲}=۴\\ y_O=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{-۲+۴}{۲}=۱\end{array}\right\}\to \underset{\text{مرکز دایره}}{O}(۴,۱)$$

ب) $$OC=\sqrt{(x_O-x_C)^۲+(y_O-y_C)^۲}=\sqrt{(۴-۷)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

$OC=\sqrt{۱۳}\to OC=R\to$ نقطهٔ C روی محیط دایره قرار دارد

۴ رأس سوم را $P(x,y)$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ رأس سوم از دو رأس دیگر برابر است و این فاصله برابر طول ضلع مثلث است.

$$(۰,۰),(x,y):\sqrt{x^۲+y^۲}$$

$$(۳,۰),(x,y):\sqrt{(x-۳)^۲+y^۲}$$

$$\to\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+y^۲}\to -۶x+۹=۰\to x=\dfrac{۳}{۲}$$

از طرفی فاصلهٔ $(۰,۰)$ و $(۳,۰)$ برابر طول ضلع مثلث است.

$$(۳,۰),(۰,۰):\sqrt{۳^۲+۰^۲}=۳\rightarrow \text{طول ضلع}=۳\xrightarrow{\text{مثلث متساوی‌الاضلاع}}\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+y^۲}=۳$$

$$\sqrt{x^۲+y^۲}=۳\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}}\sqrt{\frac{۹}{۴}+y^۲}=۳\rightarrow y^۲=۹-\frac{۹}{۴}\rightarrow y=\pm\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow P(\frac{۳}{۲},\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}),P(\frac{۳}{۲},\frac{-۳\sqrt{۳}}{۲})$$

پس مسئله دو جواب دارد.

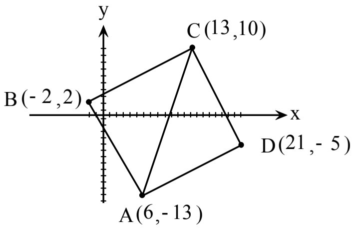
۵ چون مشخص نیست چه رئوسی روبه‌روی هم‌اند، پس حتماً باید نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کنیم.

باید نشان دهیم:

$$AB=BC=CD=DA$$
$$AB=\sqrt{(-۲-۶)^۲+(۲+۱۳)^۲}=\sqrt{۲۸۹}=۱۷$$
$$BC=\sqrt{(۱۳+۲)^۲+(۱۰-۲)^۲}=۱۷$$
$$CD=\sqrt{(۲۱-۱۳)^۲+(-۵-۱۰)^۲}=۱۷$$
$$DA=\sqrt{(۶-۲۱)^۲+(-۱۳+۵)^۲}=۱۷$$

اما یک لوزی هم چهار ضلع برابر دارد. حال کافی است رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC تحقیق کنیم و نشان دهیم مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ در زاویهٔ B قائمه است و این یعنی $ABCD$ مربع است.

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^۲+(y_C-y_A)^۲}=\sqrt{(۱۳-۶)^۲+(۱۰+۱۳)^۲}=\sqrt{۵۷۸}$$



فیثاغورس: $AC^۲\overset{?}{=}AB^۲+BC^۲\rightarrow ۵۷۸\overset{?}{=}۲۸۹+۲۸۹\rightarrow ۵۷۸\overset{\checkmark}{=}۵۷۸$

۶ در مثلث متساوی‌الاضلاع طول سه ضلع با هم برابر است پس داریم:

$$A(۰,۰)\ ,\ B(۶,۰)\ ,\ C(x_c,y_c)$$

$$AB=\sqrt{(۰-۶)^۲+(۰-۰)^۲}=\sqrt{۳۶}=۶$$

$$AC=\sqrt{(۰-x_C)^۲+(۰-y_C)^۲}=\sqrt{x_C^۲+y_C^۲}$$

$$BC=\sqrt{(۶-x_C)^۲+(۰-y_C)^۲}=\sqrt{(۶-x_C)^۲+y_C^۲}$$

$AC = BC \to x_c^2 + \cancel{y_c^2} = (6 - x_c)^2 + \cancel{y_c^2} \to \cancel{x_c^2} = 36 - 12x_c + \cancel{x_c^2}$

$\to 12x_c = 36 \to \boxed{x_c = 3}$

$AB = AC \to 6 = \sqrt{3^2 + y_c^2} \to 36 = 9 + y_c^2 \to 27 = y_c^2$

$\to y_c = \pm\sqrt{27} \to \boxed{y_c = \pm 3\sqrt{3}}$

مسأله دو جواب دارد: $C(3, 3\sqrt{3})$، $C(3, -3\sqrt{3})$

۷

$y = 2x \to C(\alpha, 2\alpha)\ ,\ \ A(1,1)\ ,\ \ B(3,-1)$

$AC = BC \to \sqrt{(\alpha-1)^2 + (2\alpha-1)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (2\alpha+1)^2}$

$\to (\alpha-1)^2 + (2\alpha-1)^2 = (\alpha-3)^2 + (2\alpha+1)^2$

$\to \cancel{\alpha^2} - 2\alpha + 1 + 4\cancel{\alpha^2} - 4\alpha + 1 = \cancel{\alpha^2} - 6\alpha + 9 + 4\cancel{\alpha^2} + 4\alpha + 1$

$\to 2 - 6\alpha = 10 - 2\alpha \to 2 - 10 = 6\alpha - 2\alpha \to -8 = 4\alpha \to \boxed{\alpha = -2} \to \boxed{C(-2, -4)}$

۸

$AB = R\ ,\ \ AC = R \to AB = AC \to \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$

$\to \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2} \to (a-2)^2 + (2a-1)^2 = (a+1)^2 + (2a-4)^2$

$\to \cancel{a^2} - 4a + 4 + \cancel{4a^2} - 4a + 1 = \cancel{a^2} + 2a + 1 + \cancel{4a^2} - 16a + 16 \to -8a + 5 = -14a + 17$

$\to 14a - 8a = 17 - 5 \to 6a = 12 \to \boxed{a = 2}$

$\to R = AB = \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (4-1)^2} \to \boxed{R = 3}$

۹

$y - y_1 = m(x - x_1) \to y - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2) \to y - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

$\to \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 4}\ \ x = 0 \to y = -\frac{3}{4}(0) + 4 \to y = 4 \to \boxed{A(0, 4)}$

$y = 0 \to 0 = -\frac{3}{4}x + 4 \to \frac{3x}{4} = 4 \to x = \frac{16}{3} \to \boxed{B(\frac{16}{3}, 0)}$

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(0 - \frac{16}{3})^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{\frac{256}{9} + 16}$

$\to AB = \sqrt{\frac{256 + 144}{9}} = \sqrt{\frac{400}{9}} \to \boxed{AB = \frac{20}{3}}$

۱۰

$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2} \Rightarrow OA = \sqrt{18}$

$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-0)^2} \Rightarrow OB = \sqrt{2}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-3)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{20}$

مشاهده می‌شود که: $(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{18})^2$ یعنی $OA^2 + OB^2 = AB^2$

پس AB = قطر مستطیل و OA و OB = ضلع مستطیل ←

$S = OA \times OB = \sqrt{۱۸} \times \sqrt{۲} \to S = \sqrt{۳۶} \to \boxed{S = ۶}$

۱۱

الف)

$$\left.\begin{aligned} x_N &= \frac{x_A + x_B}{۲} \to ۵ = \frac{x_A + ۷}{۲} \to ۱۰ = x_A + ۷ \to x_A = ۳ \\ y_N &= \frac{y_A + y_B}{۲} \to -۴ = \frac{y_A - ۲}{۲} \to -۸ = y_A - ۲ \to y_A = -۶ \end{aligned}\right\} \to A(۳, -۶)$$

ب) قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به نقطهٔ M نقطهٔ D است، بطوری‌که M وسط پاره‌خط DC است.

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_C + x_D}{۲} \to -۱ = \frac{۱ + x_D}{۲} \to -۲ = ۱ + x_D \to x_D = -۳ \\ y_M &= \frac{y_C + y_D}{۲} \to ۴ = \frac{۲ + y_D}{۲} \to ۸ = ۲ + y_D \to y_D = ۶ \end{aligned}\right\} \to D(-۳, ۶)$$

۱۲

الف) $$\left\{\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{۳ + ۷}{۲} \to x_M = ۵ \\ y_M &= \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{۱ + ۱۱}{۲} \to y_M = ۶ \end{aligned}\right. \to M(۵, ۶)$$

ب) $AM = \sqrt{(x_A - x_M)^۲ + (y_A - y_M)^۲} = \sqrt{(۱ - ۵)^۲ + (۹ - ۶)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} \to AM = ۵$

پ) $m_{AM} = \dfrac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \dfrac{۹ - ۶}{۱ - ۵} = \dfrac{۳}{-۴}$

$\to y - y_A = m_{AM}(x - x_A) \to y - ۹ = -\dfrac{۳}{۴}(x - ۱) \to y - ۹ = -\dfrac{۳}{۴}x + \dfrac{۳}{۴}$

$\to y = -\dfrac{۳}{۴}x + \dfrac{۳}{۴} + ۹ \to y = -\dfrac{۳}{۴}x + \dfrac{۳۹}{۴}$

۱۳

الف) $$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{۲} = \frac{۱۴ + ۱۰}{۲} \to x_M = ۱۲ \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{۲} = \frac{۳ + (-۱۳)}{۲} \to y_M = -۵ \end{aligned}\right\} \to M(۱۲, -۵)$$

$OM = \sqrt{x_M^۲ + y_M^۲} = \sqrt{۱۲^۲ + (-۵)^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵} \to \boxed{OM = ۱۳}$

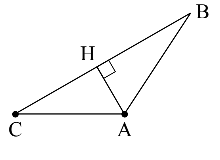
ب) $m_{AB} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{۳ - (-۱۳)}{۱۴ - ۱۰} = \dfrac{۱۶}{۴} \to m_{AB} = ۴$

شیب خط عمود بر AB معادلهٔ عمودمنصف $= m' \to m' = \dfrac{-۱}{m_{AB}} \to m' = -\dfrac{۱}{۴}$

$y - y_M = m'(x - x_M) \to y - (-۵) = -\dfrac{۱}{۴}(x - ۱۲)$

$\to y + ۵ = -\dfrac{۱}{۴}x + ۳ \to \boxed{y = -\dfrac{۱}{۴}x - ۲}$

۱۴ برای محاسبهٔ مساحت کافی است طول قاعده (BC) و ارتفاع (AH) را به‌دست آوریم.



$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^۲ + (y_B - y_C)^۲}$$

$$BC = \sqrt{(۳ - (-۱))^۲ + (۴ - ۱)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$

برای محاسبهٔ AH باید فاصلهٔ نقطهٔ A از خط گذرنده از B و C را تعیین کنیم.

$$B(۳,۴), C(-۱,۱) : m_{BC} = \frac{۴ - ۱}{۳ + ۱} = \frac{۳}{۴}$$

$$y - y_۰ = m_{BC}(x - x_۰) \xrightarrow{(-۱,۱)} y - ۱ = \frac{۳}{۴}(x + ۱)$$

$$y = \frac{۳}{۴}x + \frac{۷}{۴} \to \frac{۳}{۴}x - y + \frac{۷}{۴} = ۰ \to \begin{cases} a = \frac{۳}{۴} \\ b = -۱ \\ c = \frac{۷}{۴} \end{cases}$$

$$(۰,۱) : AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{\left|\frac{۳}{۴} \times ۰ + (-۱) \times ۱ + \frac{۷}{۴}\right|}{\sqrt{\frac{۹}{۱۶} + ۱}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۴}} = \frac{۳}{۵}$$

$$S = \frac{۱}{۲}AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۵} \times ۵ = \frac{۳}{۲}$$

۱۵

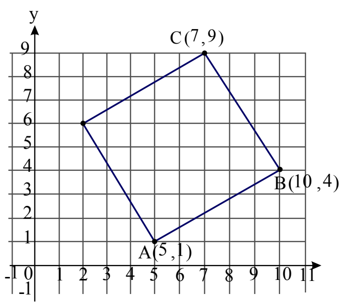
الف) $m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۱ - ۴}{۵ - ۱۰} = \frac{-۳}{-۵} \to m_{AB} = \frac{۳}{۵}$

ب) $AB \perp AD \to m_{AD} \cdot m_{AB} = -۱ \to m_{AD} = \frac{-۱}{m_{AB}} = \frac{-۱}{\frac{۳}{۵}} \to m_{AD} = -\frac{۵}{۳}$

پ) مربع نوعی از متوازی‌الاضلاع است و داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \to \begin{cases} ۵ + ۷ = ۱۰ + x_D \\ ۱ + ۹ = ۴ + y_D \end{cases} \to \begin{cases} x_D = ۲ \\ y_D = ۶ \end{cases} \to D(۲,۶)$$

ت)



۱۶

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \to 4=\frac{|4(3)+m(-2)+2|}{\sqrt{4^2+m^2}} \to 4=\frac{|14-2m|}{\sqrt{16+m^2}}$$

$$4\sqrt{16+m^2}=2\,|7-m| \to 2\sqrt{16+m^2}=|7-m|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(16+m^2)=(7-m)^2 \to 64+4m^2=49-14m+m^2 \to 3m^2+14m+15=0$$

$$\to \Delta=14^2-4(3)(15)=196-180=16 \to m=\frac{-14\pm\sqrt{16}}{2(3)} \begin{cases} \nearrow \boxed{m=-3} \\ \searrow \boxed{m=-\frac{5}{3}} \end{cases}$$

۱۷

الف) $\begin{cases} 5x-12y+8=0 \to 5x+8=12y \to y=\frac{5}{12}x+\frac{8}{12} \to m_1=\frac{5}{12} \\ -10x+24y+10=0 \to 24y=10x-10 \to y=\frac{5}{12}x-\frac{5}{12} \to m_2=\frac{5}{12} \end{cases}$

$m_1=m_2 \to$ دو خط با هم موازیند

ب) $L_1: 5x-12y+8=0 \qquad L_2: 5x-12y-5=0$

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|8-(-5)|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{13}{\sqrt{25+144}}=\frac{13}{\sqrt{169}}=\frac{13}{13} \to d=1$$

۱۸

الف) $2x^4-7x^2-4=0$

$x^2=u \to x^4=u^2$

$\to 2u^2-7u-4=0 \to \Delta=(-7)^2-4(2)(-4)=49+32=81$

$\to u=\frac{7\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{7\pm 9}{4} \to \begin{cases} u=4 \to x^2=4 \to x=2\ ,\ x=-2 \\ u=-\frac{1}{2} \to x^2=-\frac{1}{2} \to \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$

ب) $x^4+3x^2+2=0$

$x^2=u \to x^4=u^2$

$\to u^2+3u+2=0 \to (u+2)(u+1)=0$

$\to \begin{cases} u+2=0 \to u=-2 \to x^2=-2 \ \text{ریشه حقیقی ندارد} \\ u+1=0 \to u=-1 \to x^2=-1 \ \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$

۱۹

الف) $x^4-8x^2+8=0$

$x^2=u \to x^4=u^2$

$u^2-8u+8=0 \to \Delta=(-8)^2-4(1)(8)=64-32=32$

$\to u=\frac{8\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{8\pm 4\sqrt{2}}{2} \to u=4\pm 2\sqrt{2}$

$$\rightarrow\begin{cases} u=۴+۲\sqrt{۲}\rightarrow x^{۲}=۴+۲\sqrt{۲}\rightarrow\begin{cases}\boxed{x=\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}}\\ \boxed{x=-\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}}\end{cases}\\ u=۴-۲\sqrt{۲}\rightarrow x^{۲}=۴-۲\sqrt{۲}\rightarrow\begin{cases}\boxed{x=\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}}\\ \boxed{x=-\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}}\end{cases}\end{cases}$$

ب) $۴x^{۶}+۱=۵x^{۳}\rightarrow ۴x^{۶}-۵x^{۳}+۱=۰\ ,\ \ x^{۳}=u\rightarrow x^{۶}=u^{۲}$

$۴u^{۲}-۵u+۱=۰\rightarrow(۴u-۱)(u-۱)=۰$

$$\rightarrow\begin{cases}۴u-۱=۰\rightarrow u=\frac{۱}{۴}\rightarrow x^{۳}=\frac{۱}{۴}\rightarrow\boxed{x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}}\\ u-۱=۰\rightarrow u=۱\rightarrow x^{۳}=۱\rightarrow\boxed{x=۱}\end{cases}$$

۲۰

$\rightarrow ۴u^{۲}+۱=۵u\rightarrow ۴u^{۲}-۵u+۱=۰\rightarrow\Delta=(-۵)^{۲}-۴(۴)(۱)=۲۵-۱۶=۹$

$$\rightarrow u=\frac{۵\pm\sqrt{۹}}{۲(۴)}\rightarrow u=\frac{۵\pm۳}{۸}\ \begin{matrix}\nearrow u=۱\rightarrow x^{۳}=۱\rightarrow\boxed{x=۱}\\ \searrow u=\frac{۱}{۴}\rightarrow x^{۳}=\frac{۱}{۴}\rightarrow\boxed{x=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}}\end{matrix}$$

۲۱

$\frac{۱}{۸}$ واسطه‌ی حسابی بین α و β $\rightarrow\alpha+\beta=۲(\frac{۱}{۸})$

$\rightarrow-\frac{-۳}{m^{۲}-۴}=\frac{۱}{۴}\rightarrow ۱۲=m^{۲}-۴\rightarrow m^{۲}=۱۶\rightarrow m=\pm۴$

$m=۴\rightarrow ۱۲x^{۲}-۳x+۴=۰\rightarrow\Delta=(-۳)^{۲}-۴(۱۲)(۴)=۹-۱۹۲<۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد

$\boxed{m=-۴}\rightarrow ۱۲x^{۲}-۳x-۴=۰\rightarrow\Delta=(-۳)^{۲}-۴(۱۲)(-۴)=۹+۱۹۲>۰$ ریشه‌ی حقیقی دارد

۲۲

$\sqrt{۲}$ واسطه‌ی هندسی بین α و β $\rightarrow\alpha\beta=(\sqrt{۲})^{۲}$

$\rightarrow\frac{m^{۲}-۳}{m}=۲\rightarrow m^{۲}-۳=۲m\rightarrow m^{۲}-۲m-۳=۰$

$$\rightarrow(m-۳)(m+۱)=۰\ \begin{cases}m-۳=۰\rightarrow m=۳\rightarrow ۳x^{۲}-۵x+۶=۰\\ \Delta=(-۵)^{۲}-۴(۳)(۶)=۲۵-۷۲<۰\ \text{ریشه حقیقی ندارد}\\ m+۱=۰\rightarrow\boxed{m=-۱}\rightarrow -x^{۲}-۵x-۲=۰\\ \Delta=(-۵)^{۲}-۴(-۱)(-۲)=۲۵-۸>۰\ \text{ریشه حقیقی دارد}\end{cases}$$

۲۳

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\rightarrow S=\alpha+\beta=۵\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}\rightarrow P=\alpha\beta=۲\end{cases}$$

$$\frac{\alpha^{۲}}{\beta}+\frac{\beta^{۲}}{\alpha}=\frac{\alpha^{۳}+\beta^{۳}}{\alpha\beta}=\frac{S^{۳}-۳PS}{P}=\frac{۵^{۳}-۳(۲)(۵)}{۲}=\frac{۱۲۵-۳۰}{۲}=\frac{۹۵}{۲}\rightarrow\boxed{\frac{\alpha^{۲}}{\beta}+\frac{\beta^{۲}}{\alpha}=۴۷/۵}$$

۲۴

$$x^{۲}+x-۱=۰\ \begin{matrix}\nearrow\alpha\\ \searrow\beta\end{matrix}\ \rightarrow\ \begin{matrix}S=\alpha+\beta=-\frac{۱}{۱}\rightarrow S=-۱\\ P=\alpha\beta=\frac{-۱}{۱}\rightarrow P=-۱\end{matrix}$$

$X=x^{۳}\rightarrow S'=\alpha^{۳}+\beta^{۳}=S^{۳}-۳PS=(-۱)^{۳}-۳(-۱)(-۱)=-۱-۳\rightarrow \boxed{S'=-۴}$

$P'=\alpha^{۳}\cdot\beta^{۳}=(\alpha\beta)^{۳}=P^{۳}=(-۱)^{۳}\rightarrow\boxed{P'=-۱}$

$\rightarrow X^{۲}-S'X+P'=۰\rightarrow X^{۲}-(-۴)X-۱=۰\rightarrow\boxed{x^{۲}+۴x-۱=۰}$

۲۵

$$x^{۲}-۲x-۱=۰\rightarrow\alpha,\beta\rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\dfrac{-۲}{۱}\rightarrow\boxed{S=۲}\\ P=\alpha\beta=\dfrac{-۱}{۱}\rightarrow\boxed{=-۱}\end{cases}$$

$$S'=\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{\beta+۱+\alpha+۱}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}\rightarrow S'=\frac{S+۲}{P+S+۱}=\frac{۲+۲}{-۱+۲+۱}\rightarrow\boxed{S'=۲}$$

$$P'=\frac{۱}{\alpha+۱}\cdot\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{۱}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}\rightarrow P'=\frac{۱}{P+S+۱}=\frac{۱}{-۱+۲+۱}\rightarrow\boxed{P'=\frac{۱}{۲}}$$

$$\rightarrow X^{۲}-S'X+P'=۰\rightarrow X^{۲}-۲X+\frac{۱}{۲}=۰\rightarrow\boxed{۲X^{۲}-۴X+۱=۰}$$

۲۶

$$۲x^{۲}-۴x-۶=۰\begin{matrix}\nearrow\alpha\\ \searrow\beta\end{matrix}\rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{-۴}{۲}\rightarrow S=۲\\ P=\alpha\beta=\frac{-۶}{۲}\rightarrow P=-۳\end{cases}$$

معادله‌ی جدید $X=(\frac{۱}{x})^{۲}=\frac{۱}{x^{۲}}\rightarrow S'=\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}=\frac{\alpha^{۲}+\beta^{۲}}{(\alpha\beta)^{۲}}=\frac{S^{۲}-۲P}{P^{۲}}=\frac{۲^{۲}-۲(-۳)}{(-۳)^{۲}}\rightarrow\boxed{S'=\frac{۱۰}{۹}}$

$$P'=\frac{۱}{\alpha^{۲}}\cdot\frac{۱}{\beta^{۲}}=\frac{۱}{(\alpha\beta)^{۲}}=\frac{۱}{P^{۲}}=\frac{۱}{(-۳)^{۲}}\rightarrow\boxed{P'=\frac{۱}{۹}}$$

$$\rightarrow x^{۲}-S'x+P=۰\rightarrow x^{۲}-\frac{۱۰}{۹}x+\frac{۱}{۹}=۰\rightarrow\boxed{۹x^{۲}-۱۰x+۱=۰}$$

۲۷

$$\alpha=۲-\sqrt{۴-a}\ ,\ \beta=۲+\sqrt{۴-a}\rightarrow S=\alpha+\beta=۲-\sqrt{۴-a}+۲+\sqrt{۴-a}\rightarrow\boxed{S=۴}$$

$$P=\alpha\beta=(۲-\sqrt{۴-a})(۲+\sqrt{۴-a})=۴-(۴-a)\rightarrow\boxed{P=a}$$

$$\rightarrow x^{۲}-Sx+P=۰\rightarrow\boxed{x^{۲}-۴x+a=۰}$$

۲۸

$mx^{۲}+۳x+m^{۲}-۲=۰\rightarrow$ ریشه‌ها معکوس $\rightarrow\frac{c}{a}=۱\rightarrow\frac{m^{۲}-۲}{m}=۱\rightarrow m^{۲}-۲=m$

$$\rightarrow m^{۲}-m-۲=۰\rightarrow(m-۲)(m+۱)=۰\begin{matrix}\nearrow m-۲=۰\rightarrow m=۲\\ \searrow m+۱=۰\rightarrow m=-۱\end{matrix}$$

$m=۲\rightarrow ۲x^{۲}+۳x+۲=۰\rightarrow\Delta=۳^{۲}-۴(۲)(۲)=۹-۱۶=-۷<۰\rightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد

$m=-۱\rightarrow -x^{۲}+۳x-۱=۰\rightarrow\Delta=۳^{۲}-۴(-۱)(-۱)=۹-۴=۵>۰\rightarrow\boxed{m=-۱}$ ریشه‌ی حقیقی دارد

۲۹

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{۱}\rightarrow S=\alpha+\beta=۳\ ,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۵}{۱}\rightarrow P=\alpha\beta=-۵$$

$$\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{\beta+۱+\alpha+۱}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}=\frac{\alpha+\beta+۲}{\alpha\beta+\alpha+\beta+۱}=\frac{S+۲}{P+S+۱}=\frac{۳+۲}{-۵+۳+۱}=\frac{۵}{-۱}=-۵$$

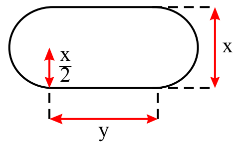
۳۰

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-\frac{-۱۲}{۴}\rightarrow\boxed{\alpha+\beta=۳}\ ,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۴}\rightarrow\boxed{\alpha\beta=\frac{۱}{۴}}$$

$$\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=k\xrightarrow{k>۰}k^{۲}=\frac{\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}$$

$$\rightarrow k^{۲}=\frac{۳+۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۳+۲(\frac{۱}{۲})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۴}{\frac{۱}{۴}}\rightarrow k^{۲}=۱۶\rightarrow\begin{cases}\boxed{k=۴}\\ k=-۴\ \text{غ}\end{cases}$$

۳۱



محیط استادیوم$= P$

$P = ۲y + \pi x \to ۲y + \pi x = ۱۵۰۰ \to ۲y = -\pi x + ۱۵۰۰$

$\to y = \frac{-\pi x}{۲} + ۷۵۰$

الف) مساحت مستطیل $S_۱ = xy = x(\frac{-\pi x}{۲} + ۷۵۰) = -\frac{\pi}{۲}x^۲ + ۷۵۰x \;,\; a < ۰$

$x_{\max} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۷۵۰}{۲(-\frac{\pi}{۲})} \Rightarrow \boxed{x_{\max} = \frac{۷۵۰}{\pi} \approx ۲۳۸/۸۵}$

$y_{\max} = -\frac{\pi}{۲}(\frac{۷۵۰}{\pi}) + ۷۵۰ = -۳۷۵ + ۷۵۰ \to \boxed{y_{\max} = ۳۷۵}$

ب) مساحت استادیوم $S_۲ = xy + \pi(\frac{x}{۲})^۲ = x(\frac{-\pi x}{۲} + ۷۵۰) + \pi\frac{x^۲}{۴}$

$\to S_۲ = -\frac{\pi x^۲}{۲} + ۷۵۰x + \frac{\pi x^۲}{۴} \to S_۲ = -\frac{\pi x^۲}{۴} + ۷۵۰x \;,\; a < ۰$

$\to x_{\max} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۷۵۰}{۲(-\frac{\pi}{۴})} \to \boxed{x_{\max} = \frac{۱۵۰۰}{\pi} \approx ۴۷۷/۷۰}$

$y_{\max} = -\frac{\pi}{۲}(\frac{۱۵۰۰}{\pi}) + ۷۵۰ \to y_{\max} = -۷۵۰ + ۷۵۰ \to \boxed{y_{\max} = ۰}$

۳۲

$\min \to a > ۰$

$y_{\min} = ۱ \;,\; y_{\min} = \frac{-\Delta}{۴a} \to -\frac{(-۲\sqrt{۲})^۲ - ۴a(a)}{۴a} = ۱$

$\to \frac{۸ - ۴a^۲}{-۴a} = ۱ \to ۸ - ۴a^۲ = -۴a \to ۴a^۲ - ۴a - ۸ = ۰$

$\to a^۲ - a - ۲ = ۰ \to (a-۲)(a+۱) = ۰ \begin{cases} a - ۲ = ۰ \to \boxed{a = ۲} \\ a + ۱ = ۰ \to a = -۱ \end{cases}$

۳۳

$\begin{cases} x = -\frac{b}{۲a} \\ y = -\frac{\Delta}{۴a} \end{cases} \xrightarrow[x,y>۰]{\text{نیمساز ربع اول}} x = y \to \frac{-b}{۲a} = \frac{-\Delta}{۴a} \to \Delta = ۲b$

$\to b^۲ - ۴ac = ۲b \xrightarrow{\text{جایگذاری}} a^۲ - ۴(۱)(۲) = ۲a \to a^۲ - ۲a - ۸ = ۰$

$\to (a-۴)(a+۲) = ۰ \begin{cases} a - ۴ = ۰ \to a = ۴ \to y = x^۲ + ۴x + ۲ \to x_{\min} = -\frac{۴}{۲(۱)} < ۰ \text{ غ} \\ a + ۲ = ۰ \to \boxed{a = -۲} \to y = x^۲ - ۲x + ۲ \to x_{\min} = -\frac{-۲}{۲(۱)} = ۱ > ۰ \checkmark \end{cases}$

۳۴

$۸y = -x^۲ + ۴x + ۴ \to y = -\frac{۱}{۸}x^۲ + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}$

$a = -\frac{۱}{۸} < ۰ \to$ تابع نقطه‌ی max دارد

$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{\frac{۱}{۲}}{۲(\frac{-۱}{۸})} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}} \to \boxed{x = ۲}$

$y = -\frac{۱}{۸}(۲)^۲ + \frac{۱}{۲}(۲) + \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲} + ۱ + \frac{۱}{۲} \to \boxed{y_{\max} = ۱}$

۳۵

$۲x + y = ۱۰۰ \to y = ۱۰۰ - ۲x$

مساحت مستطیل $f(x) = x \cdot y = x(۱۰۰ - ۲x) = ۱۰۰x - ۲x^۲$

$\to f(x) = -۲x^۲ + ۱۰۰x \to x_{\max} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱۰۰}{۲(-۲)} \to x_{\max} = ۲۵,\ y_{\max} = ۵۰$

$\to$ بیشترین مساحت $S_{\max} = ۱۲۵۰$

۳۶

تابع نقطه‌ی max دارد $a = -۱ < ۰ \to$

$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۸}{۲(-۱)} = ۴ \to y_{\max} = ۴ + ۸(۴) - ۴^۲ = ۴ + ۳۲ - ۱۶ \to \boxed{y_{max} = ۲۰}$

۳۷

$$\begin{cases} P(۰) = ۱ \\ \frac{-b}{۲a} = ۲ \\ P(۲) = -۱ \end{cases} \to \begin{cases} \boxed{c = ۱} \\ -b = ۴a \\ ۴a + ۲b + c = -۱ \end{cases} \to \begin{cases} -\cancel{۴a} - b = ۰ \\ \cancel{۴a} + ۲b = -۲ \end{cases} +$$

$$\boxed{b = -۲},\ \boxed{a = \frac{۱}{۲}}$$

$$\to \boxed{P(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۲x + ۱}$$

۳۸

$$\begin{cases} P(۰) = ۳ \\ \frac{-b}{۲a} = -۴ \\ P(-۴) = -۲ \end{cases} \to \begin{cases} \boxed{c = ۳} \\ b = ۸a \\ ۱۶a - ۴b + c = -۲ \end{cases} \to \begin{cases} b - ۸a = ۰ \\ ۱۶a - ۴b = -۵ \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \cancel{۴b} - ۳۲a = ۰ \\ ۱۶a - \cancel{۴b} = -۵ \end{cases} +$$

$$-۱۶a = -۵ \to \boxed{a = \frac{۵}{۱۶}},\ \boxed{b = \frac{۵}{۲}}$$

$$\to \boxed{P(x) = \frac{۵}{۱۶}x^۲ + \frac{۵}{۲} + ۳}$$

۳۹

$$\begin{cases} f(۰) = ۰ \\ f(-۲) = -۲ \\ f(۴) = ۰ \end{cases} \to \begin{cases} \boxed{c = ۰} \\ ۴a - ۲b + c = -۲ \\ ۱۶a + ۴b + c = ۰ \end{cases} \to \begin{cases} ۴a - \cancel{۲b} = -۲ \\ ۸a + \cancel{۲b} = ۰ \end{cases} +$$

$$۱۲a = -۲ \to \boxed{a = -\frac{۱}{۶}},\ \boxed{b = \frac{۲}{۳}}$$

$$\to f(x) = -\frac{۱}{۶}x^۲ + \frac{۲}{۳}x$$

۴۰

با توجه به $f(x) = ax^۲ + bx + c$ و نقاط منحنی داریم:

الف

$f(۰) = ۴ \to ۰ + ۰ + c = ۴ \to c = ۴\ (۱)$

$f(۱) = ۰ \to a + b + c = ۰ \xrightarrow{(۱)} a + b = -۴\ (۲)$

$f(۲) = ۰ \to ۴a + ۲b + c = ۰ \xrightarrow{(۱)} ۴a + ۲b = -۴ \to ۲a + b = -۲\ (۳)$

$(۳) - (۲) : a = ۲ \xrightarrow{(۲)} b = -۶$

$\Rightarrow f(x) = ۲x^۲ - ۶x + ۴$

(ب)

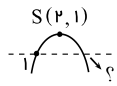
با توجه به $f(x) = ax^۲ + bx + c$ و نقاط منحنی داریم:

$$\begin{aligned}
&f(-۱) = -۲ \to a - b + c = -۲ \quad (۱)\\
&f(-۳) = ۰ \to ۹a - ۳b + c = ۰ \quad (۲)\\
&f(۱) = ۰ \to a + b + c = ۰ \quad (۳)
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(۱) - (۳) : -۲b = -۲ \to b = ۱ \quad (*)\\
&(۲) - (۳) : ۸a - ۴b = ۰ \xrightarrow{*} a = \frac{۱}{۲}\\
&(۱) : \frac{۱}{۲} - ۱ + c = -۲ \to c = \frac{-۳}{۲}
\end{aligned}\right\} \to f(x) = \frac{x^۲}{۲} + x - \frac{۳}{۲}$$

(پ)

رأس سهمی دقیقاً بین دو ریشهٔ تابع است



$$۲ = \frac{۱ + ?}{۲} \to ? = ۲ \times ۲ - ۱ = ۳$$

$$\begin{aligned}
&f(۲) = ۱ \to ۴a + ۲b + c = ۱ \quad (۱)\\
&f(۱) = ۰ \to a + b + c = ۰ \quad (۲)\\
&f(۳) = ۰ \to ۹a + ۳b + c = ۰ \quad (۳)
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(۱) - (۲) : ۳a + b = ۱ \quad (*)\\
&(۳) - (۱) : ۵a + b = -۱ \quad (**)
\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(**)-(*)} ۲a = -۲ \to a = -۱ \xrightarrow{*} b = ۴ \xrightarrow{(۲)} c = -۳$$

$$\to f(x) = -x^۲ + ۴x - ۳$$

(ت)

$$f(۰) = ۲ \to ۰ + ۰ + c = ۲ \to c = ۲ \quad (۱)$$

$$x = \frac{-b}{۲a} = ۱ \to ۲a + b = ۰ \quad (۲)$$

$$f(۱) = ۰ \to a + b + c = ۰ \xrightarrow{(۱)} a + b = -۲ \quad (۳)$$

$$(۲) - (۳) : a = ۲ \xrightarrow{(۲)} b = -۴ \Rightarrow f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۲$$

۴۱

$$\begin{cases} f(۰) = -۲ \\ f(۱) = ۰ \\ f(-۲) = ۰ \end{cases} \to \begin{cases} \boxed{c = -۲} \\ a + b + c = ۰ \\ ۴a - ۲b + c = ۰ \end{cases} \to \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۴a - ۲b = ۲ \end{cases} \to \begin{cases} a + \cancel{b} = ۲ \\ ۲a - \cancel{b} = ۱ \end{cases} +$$

$$۳a = ۳ \to \boxed{a = ۱}\ , \boxed{b = ۱}$$

$$\to \boxed{f(x) = x^۲ + x - ۲}$$

۴۲

$$f(x) = ax^۲ + bx + c$$

$$\begin{cases} f(۲) = ۰ \\ f(-۱) = ۰ \\ f(۰) = ۴ \end{cases} \to \begin{cases} ۴a + ۲b + c = ۰ \\ a - b + c = ۰ \\ \boxed{c = ۴} \end{cases} \to \begin{cases} ۴a + ۲b = -۴ \\ a - b = -۴ \end{cases} \to \begin{cases} ۲a + \cancel{b} = -۲ \\ a - \cancel{b} = -۴ \end{cases} +$$

$$۳a = -۶ \to \boxed{a = -۲}\ , \ \boxed{b = ۲}$$

$$\to \boxed{y = f(x) = -۲x^۲ + ۲x + ۴}$$

۴۳

$$\begin{cases}(۲,۰)\\(۰,۲)\\(۳,۱)\end{cases} \to \begin{cases} f(۲)=۰\\ f(۰)=۲\\ f(۳)=۱\end{cases} \to \begin{cases} ۴a+۲b+c=۰\\ \boxed{c=۲}\\ ۹a+۳b+c=۱\end{cases} \to \begin{cases}۴a+۲b=-۲\\ ۹a+۳b=-۱\end{cases} \to \begin{cases}-۱۲a-\cancel{۶b}=۶\\ ۱۸a+\cancel{۶b}=-۲\end{cases}+$$

$$\boxed{y=f(x)=\frac{۲}{۳}x^۲-\frac{۷}{۳}x+۲} \leftarrow \boxed{b=\frac{-۷}{۳}} \leftarrow \boxed{a=\frac{۲}{۳}} \leftarrow ۶a=۴$$

۴۴

$$\begin{cases}(۰,-۳)\\(۳,۰)\\(-۱,۴)\end{cases} \to \begin{cases}\boxed{c=-۳}\\ ۹a+۳b+c=۰\\ a-b+c=۴\end{cases} \to \begin{cases}۹a+۳b=۳\\ a-b=۷\end{cases} \to \begin{cases}۳a+\cancel{b}=۱\\ a-\cancel{b}=۷\end{cases}+$$

$$۴a=۸ \to \boxed{a=۲}\ ,\ \boxed{b=-۵}$$

۴۵

الف

$$f(x)=y=ax^۲+bx+c$$

$$\begin{cases}f(۰)=۰\\ f(۲)=۰\\ y_{\min}=-۴\end{cases} \to \begin{cases}a(۰)^۲+b(۰)+c=۰\\ a(۲)^۲+b(۲)+c=۰\\ -\frac{b^۲-۴ac}{۴a}=-۴\end{cases} \to \begin{cases}\boxed{c=۰}\\ ۴a+۲b=۰\\ \frac{-b^۲+۴a(۰)}{۴a}=-۴\end{cases}$$

$$\to \begin{cases}۲a+b=۰\\ -b^۲=-۱۶a\end{cases} \to \begin{cases}b=-۲a\\ b^۲=۱۶a \to (-۲a)^۲=۱۶a \to ۴a^۲=۱۶a\end{cases}$$

$$\to ۴a^۲-۱۶a=۰ \to ۴a(a-۴)=۰ \to \begin{cases}a=۰ & \text{غ}\\ \boxed{a=۴} \to \boxed{b=-۸}\end{cases}$$

$$\to \boxed{f(x)=۴x^۲-۸x}$$

ب

$$f(x)=y=ax^۲+bx+c$$

$$\begin{cases}f(۰)=۴\\ f(۲)=۰\\ \frac{-b}{۲a}=۳\end{cases} \to \begin{cases}a(۰)^۲+b(۰)+c=۴\\ a(۲)^۲+b(۲)+c=۰\\ -b=۶a\end{cases} \to \begin{cases}\boxed{c=۴}\\ ۴a+۲b+۴=۰\\ b=-۶a\end{cases}$$

$$\to ۴a+۲(-۶a)+۴=۰ \to ۴a-۱۲a+۴=۰ \to -۸a+۴=۰ \to \boxed{a=\frac{۱}{۲}}$$

$$,\ \boxed{b=-۳} \to \boxed{f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+۴}$$

پ

$$f(x)=a(x-x_۰)^۲$$

$$\to \begin{cases}x_۰=۲\\ f(۰)=۴\end{cases} \to \begin{cases}f(x)=a(x-۲)^۲\\ ۴=a(۰-۲)^۲ \to ۴=۴a \to \boxed{a=۱}\end{cases}$$

$$\to f(x)=۱(x-۲)^۲ \to \boxed{f(x)=x^۲-۴x+۴}$$

ت

$$f(x)=y=ax^۲+bx+c$$

$$\begin{cases}f(۰)=۳\\ f(-۱)=۰\\ -\frac{b}{۲a}=۰\end{cases} \to \begin{cases}a(۰)^۲+b(۰)+c=۳\\ a(-۱)^۲+b(-۱)+c=۰\\ \frac{-b}{۲a}=۰\end{cases} \to \begin{cases}\boxed{c=۳}\\ a+۳=۰ \to \boxed{a=-۳}\\ \boxed{b=۰}\end{cases}$$

$$\to \boxed{f(x)=-۳x^۲+۳}$$

ث

$$f(x)=y=ax^۲+bx+c$$

$$\begin{cases} f(۱)=۰ \\ f(۲)=۱ \\ -\frac{b}{۲a}=۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(۱)^۲+b(۱)+c=۰ \\ a(۲)^۲+b(۲)+c=۱ \\ -b=۴a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+c=۰ \\ ۴a+۲b+c=۱ \\ b=-۴a \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-۴a+c=۰ \\ ۴a+۲(-۴a)+c=۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۳a+c=۰ \\ -۴a+c=۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -۳a+c=۰ \\ ۴a-c=-۱ \end{cases} +$$

$$\boxed{a=-۱} \rightarrow \boxed{c=-۳} \rightarrow \boxed{b=۴}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x)=-x^۲+۴x-۳}$$

ج

$$f(x)=y=ax^۲+bx+c$$

$$\begin{cases} f(۰)=-۲ \\ f(۱)=-۱ \\ \frac{-b}{۲a}=۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(۰)^۲+b(۰)+c=-۲ \\ a(۱)^۲+b(۱)+c=-۱ \\ -b=۲a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{c=-۲} \\ a+b-۲=-۱ \\ b=-۲a \end{cases}$$

$$\rightarrow a+(-۲a)=۱ \rightarrow -a=۱ \rightarrow \boxed{a=-۱} \ , \ \boxed{b=۲}$$

$$\rightarrow \boxed{f(x)=-x^۲+۲x-۲}$$

۴۶

زمان ویرایش رضا $= x$ زمان ویرایش دو نفر، $= ۱\frac{۲۰}{۶۰} = ۱\frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳}$

سرعت ویرایش دو نفر = سرعت ویرایش رضا + سرعت ویرایش علی $\rightarrow$

$$\frac{۱۶}{۲}+\frac{۱۶}{x}=\frac{۱۶}{\frac{۴}{۳}} \rightarrow ۸+\frac{۱۶}{x}=۱۲ \rightarrow \frac{۱۶}{x}=۴ \rightarrow \boxed{x=۴}$$ ساعت

۴۷

$$\rightarrow \frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{۲}{(x+۱)}=\frac{۲-x}{x(x-۱)} \rightarrow \text{ک م م مخرج‌ها} = x(x-۱)(x+۱) \rightarrow \begin{cases} x\neq ۰ \\ x\neq ۱ \\ x\neq -۱ \end{cases}$$

$$\rightarrow x(x-۱)(x+۱)\times\left[\frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{۲}{(x+۱)}=\frac{۲-x}{x(x-۱)}\right]$$

$$\rightarrow ۲x(x)+۲x(x-۱)=(۲-x)(x+۱)$$

$$\rightarrow ۲x^۲+۲x^۲-۲x=۲x+۲-x^۲-x \rightarrow ۴x^۲-۲x=-x^۲+x+۲$$

$$\rightarrow ۵x^۲-۳x-۲=۰ \rightarrow \Delta=(-۳)^۲-۴(۵)(-۲)=۹+۴۰=۴۹$$

$$\rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۴۹}}{۲(۵)} \rightarrow x=\frac{۳\pm ۷}{۱۰} \rightarrow \begin{cases} x=۱ \ \text{غیرقابل قبول} \\ \boxed{x=-\frac{۲}{۵}} \end{cases}$$

۴۸

الف

$$\frac{۳}{x^۲}-۱۲=۰ \rightarrow \frac{۳}{x^۲}-\frac{۱۲}{۱}=۰$$

کمم مخرج‌ها $= x^۲ \rightarrow x\neq ۰ \rightarrow x^۲\times\left[\frac{۳}{x^۲}-\frac{۱۲}{۱}=۰\right] \rightarrow ۳-۱۲x^۲=۰$

$$\to 3(1-4x^2)=0 \to 3(1-2x)(1+2x)=0 \begin{cases} 1-2x=0 \to \boxed{x=\frac{1}{2}} \\ 1+2x=0 \to \boxed{x=-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

ب

$\to \dfrac{2}{k}-\dfrac{3k}{k+2}=\dfrac{k}{k(k+2)} \to$ ک.م.م مخرج‌ها $=k(k+2) \begin{cases} k\neq 0 \\ k\neq -2 \end{cases}$

$$\to k(k+2)\times\left[\frac{2}{k}-\frac{3k}{(k+2)}=\frac{k}{k(k+2)}\right]$$

$$\to 2(k+2)-3k^2=k \to 2k+4-3k^2=k \to 3k^2-k-4=0$$

$$\to \Delta=(-1)^2-4(3)(-4)=1+48=49$$

$$\to k=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2(3)}=\frac{1\pm 7}{6} \begin{cases} \boxed{k=\frac{4}{3}} \\ \boxed{k=-1} \end{cases}$$

پ

$\to \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{(x-3)}=\dfrac{-12}{(x-3)(x+3)} \to$ ک.م.م مخرج‌ها $=x(x-3)(x+3) \to \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 3 \\ x\neq -3 \end{cases}$

$$\to x(x-3)(x+3)\times\left[\frac{3}{x}-\frac{2}{(x-3)}=\frac{-12}{(x-3)(x+3)}\right]$$

$$\to 3(x-3)(x+3)-2x(x+3)=-12x$$

$$\to 3x^2-27-2x^2-6x=-12x \to x^2+6x-27=0$$

$\to (x-3)(x+9)=0 \begin{cases} x-3=0 \to x=3 & \text{غیرقابل قبول} \\ x+9=0 \to x=-9 & \text{قابل قبول} \end{cases}$

۴۹ فرض کنیم سرعت اتومبیل اول v و مدت زمان حرکت آن t_1 باشد، در این‌صورت:

$$t_1=\frac{180}{v}$$

سرعت اتومبیل دوم $v+4$ می‌باشد، اگر t_2 مدت زمان حرکت آن باشد، آنگاه:

$$t_2=\frac{180}{v+4}\ ,\ t_2=t_1-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{180}{v+4}=\frac{180}{v}-\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2v(v+4)} 360v=360(v+4)-v(v+4)$$

$$\Rightarrow \cancel{360v}=\cancel{360v}+360\times 4-v^2-4v$$

$$\Rightarrow v^2+4v-360\times 4=0 \Rightarrow v=36 \Rightarrow v+4=40$$

۵۰ فرض کنیم یکی از آنها در x ساعت و دیگری در $4x$ ساعت به تنهایی ساختمان را رنگ‌آمیزی کنند، پس هر یک به تنهایی در یک ساعت به‌ترتیب، $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{4x}$ از ساختمان را رنگ می‌کنند. از طرفی دو نفر با هم در ۴ ساعت کل ساختمان را رنگ می‌کنند، پس دو نفر با هم در یک ساعت، $\frac{1}{4}$ از ساختمان را رنگ می‌کنند. بنابراین:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۴x}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\times ۴x}۴+۱=x\Rightarrow x=۵$$

پس یکی از آنها در ۵ ساعت و دیگری در $۲۰=۵\times ۴$ ساعت به تنهایی ساختمان را رنگ‌آمیزی می‌کنند.

۵۱

$$\xrightarrow{x\geq ۰ \text{ با شرط }}\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=(۱+\sqrt{x})(۱-\sqrt{x})\rightarrow(۱-\sqrt{x})=(۱+\sqrt{x})^{۲}(۱-\sqrt{x})$$

$$\rightarrow(۱+\sqrt{x})^{۲}(۱-\sqrt{x})-(۱-\sqrt{x})=۰$$

$$۱-\sqrt{x}=۰\rightarrow ۱=\sqrt{x}\rightarrow\boxed{x=۱}\quad \text{زیرا}:\ \frac{۱-\sqrt{۱}}{۱+\sqrt{۱}}=۱-۱\ \checkmark$$

$$\rightarrow(۱-\sqrt{x})\left((۱+\sqrt{x})^{۲}-۱\right)=۰$$

$$(۱+\sqrt{x})^{۲}=۱\rightarrow\sqrt{x}=۰\rightarrow\boxed{x=۰}\quad \text{زیرا}:\ \frac{۱-\sqrt{۰}}{۱+\sqrt{۰}}=۱-۰\ \checkmark$$

۵۲

$$\rightarrow(۲+\sqrt{۱+x})^{۲}=(\sqrt{x+۹})^{۲}\rightarrow ۴+۴\sqrt{۱+x}+۱+\cancel{x}=\cancel{x}+۹$$

$$\rightarrow ۴\sqrt{۱+x}=۴\rightarrow\sqrt{۱+x}=۱\rightarrow ۱+x=۱\rightarrow\boxed{x=۰}$$

۵۳

$$x-\sqrt{x}=۲۰\rightarrow x-۲۰=\sqrt{x}$$

$$\rightarrow(x-۲۰)^{۲}=(\sqrt{x})^{۲}\rightarrow x^{۲}-۴۰x+۴۰۰=x\rightarrow x^{۲}-۴۱x+۴۰۰=۰$$

$$\rightarrow(x-۲۵)(x-۱۶)=۰ \begin{cases} x-۲۵=۰\rightarrow x=۲۵ \\ x-۱۶=۰\rightarrow x=۱۶ \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۵۴

الف

$$۲\sqrt{۲t-۱}-t=۱\rightarrow ۲\sqrt{۲t-۱}=t+۱$$

$$\rightarrow(۲\sqrt{۲t-۱})^{۲}=(t+۱)^{۲}\rightarrow ۴(۲t-۱)=(t+۱)^{۲}$$

$$\rightarrow ۸t-۴=t^{۲}+۲t+۱\rightarrow t^{۲}-۶t+۵=۰\rightarrow(t-۱)(t-۵)=۰$$

$$\rightarrow t-۱=۰\rightarrow\boxed{t=۱}\ ,\quad t-۵=۰\rightarrow\boxed{t=۵}$$

ب

$$۲x=۱-\sqrt{۲-x}\rightarrow\sqrt{۲-x}=۱-۲x$$

$$\rightarrow ۲-x=(۱-۲x)^{۲}\rightarrow ۲-x=۱-۴x+۴x^{۲}\rightarrow ۴x^{۲}-۳x-۱=۰$$

$$\rightarrow\Delta=(-۳)^{۲}-۴(۴)(-۱)=۹+۱۶=۲۵\rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۲۵}}{۸}\rightarrow\begin{cases} x=۱ \quad \text{غ ق ق} \\ x=-\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

پ

$$\sqrt{x+۷}=\sqrt{x}+۱\rightarrow(\sqrt{x+۷})^{۲}=(\sqrt{x}+۱)^{۲}\rightarrow x+۷=x+۲\sqrt{x}+۱$$

$$\rightarrow ۶=۲\sqrt{x}\rightarrow\sqrt{x}=۳\rightarrow x=۹$$

ت

$$\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}-\frac{۲}{\sqrt{u}}=۰\rightarrow\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}=\frac{۲}{\sqrt{u}}$$

$$\to (\frac{1}{\sqrt{u-3}})^2 = (\frac{2}{\sqrt{u}})^2 \to \frac{1}{u-3} = \frac{4}{u} \to u = 4(u-3) \to u = 4u - 12$$

$$\to 12 = 3u \to u = 4$$

ث)

$$\to \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \to (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x-2)^2$$

$$\to 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \to x^2 - x - 2 = 0$$

$$\to (x-2)(x+1) = 0 \begin{cases} x - 2 = 0 \to \boxed{x = 2} \\ x + 1 = 0 \to x = -1 \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۵۵) فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(a, 5)$ و $B(4, a-3)$ را به دست می‌آوریم و آن را مساوی $2\sqrt{10}$ قرار می‌دهیم:

$$AB = \sqrt{(4-a)^2 + (a-3-5)^2} = \sqrt{(4-a)^2 + (a-8)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} (4-a)^2 + (a-8)^2 = 40$$

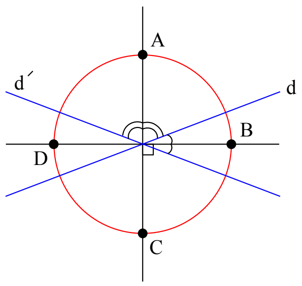
$$\Rightarrow 16 - 8a + a^2 + a^2 - 16a + 64 = 40 \Rightarrow 2a^2 - 24a + 40 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} a^2 - 12a + 20 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ a - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 10 \end{cases}$$

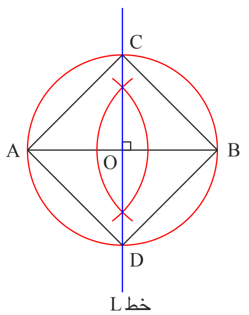
۵۶)

ابتدا نیمساز هر دو زاویه‌ای که دو خط باهم می‌سازند را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O و به شعاع $5cm$ یک دایره رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با دو نیمساز جواب مسأله است. ۴ نقطهٔ A، B، C و D از دو خط به یک فاصله‌اند و از O به فاصلهٔ $5cm$ هستند.



۵۷)

در مربع قطرها عمودمنصف یکدیگرند. ابتدا عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. محل برخورد پاره‌خط AB و عمودمنصف AB (خط L) را نقطهٔ O می‌نامیم. نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB است. اکنون به مرکز O و شعاع OA، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط L(عمودمنصف AB) را در دو نقطهٔ C و D قطع کند. چهارضلعی $ABCD$ مربع و جواب مسئله است.



۵۸)

الف)

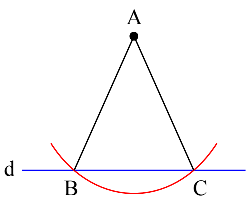
$$\left.\begin{array}{l} BD = \text{نیمساز} \to A\hat{B}D = H\hat{B}D \\ \hat{A} = \widehat{H} = 90^\circ \\ BD = BD = \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}D = H\overset{\Delta}{B}D$$

ب)

$$\overset{\Delta}{ABD} = \overset{\Delta}{HBD} \rightarrow \begin{cases} A\widehat{D}M = \widehat{H}DM \\ AD = DH \\ AB = BH \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}DM = \widehat{H}DM \\ AD = DH \\ MD = MD \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMD} = \overset{\Delta}{HMD} \Rightarrow D\widehat{A}M = D\widehat{H}M$$

۵۹ الف) دهانهٔ پرگار را بیش از ۴ سانتی‌متر باز می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز نقطهٔ A و شعاع انتخاب شده رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. مثلث متساوی‌الساقینی $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسئله است زیرا $AB = AC = R$



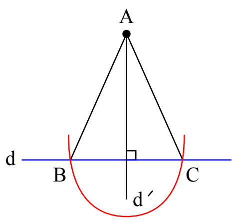
ب) مطابق با شرایط قسمت (الف) عمل می‌کنیم و دهانهٔ پرگار را دقیقاً ۶ سانتی‌متر باز می‌کنیم تا طول ساق‌ها ۶ سانتی‌متر بدست آید.

پ) چون فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d (قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین) ۴ سانتی‌متر است پس ارتفاع مثلث ۴ سانتی‌متر است و قاعدهٔ آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$S = \frac{AH \times BC}{۲} \rightarrow ۸ = \frac{۴ \times BC}{۲} \rightarrow \boxed{BC = ۴}$$

اکنون باید مثلث ABC را طوری رسم کنیم که قاعدهٔ آن (BC) برابر ۴ سانتی‌متر باشد.

ابتدا از نقطهٔ A خط d' را بر خط d عمود می‌کنیم و محل برخورد دو خط را H می‌نامیم. پس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۲ سانتی‌متر (نصف قاعده) باز می‌کنیم و به مرکز H دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند. $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسئله است زیرا $AB = AC$، $BC = ۴$ و $AH = ۴$ و $S = ۸cm^۲$



۶۰ در مثلث ABC، نیمساز دو زاویهٔ B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است از نقطهٔ O به سه ضلع مثلث عمود می‌کنیم $OH = OH'' , OH = OH'$ این مقدار مساوی را شعاع دایره می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز o و شعاع r رسم می‌کنیم.

۶۱

$$DE \parallel BC \to \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{AC} \to \frac{۴x - ۱}{۴x + ۱} = \frac{۳x + ۳}{۸x + ۲}$$

$$\to (۴x - ۱)(۸x + ۲) = (۳x + ۳)(۴x + ۱)$$

$$\to ۳۲x^۲ + \cancel{۸x} - \cancel{۸x} - ۲ = ۱۲x^۲ + ۳x + ۱۲x + ۳ \to ۲۰x^۲ - ۱۵x - ۵ = ۰$$

$$\to ۵(۴x^۲ - ۳x - ۱) = ۰ \to ۴x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \to (x - ۱)(۴x + ۱) = ۰ \begin{cases} x - ۱ = ۰ \to \boxed{x = ۱} \\ ۴x + ۱ = ۰ \to x = \frac{-۱}{۴} \end{cases}$$

غیر قابل قبول زیرا $AD < ۰$ و $DB = ۰$ می‌شود.

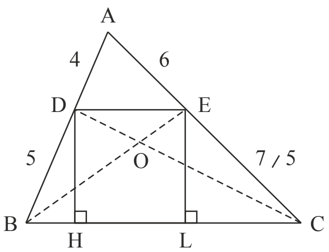
۶۲

$$\overset{\Delta}{ABD} : ME \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{ME}{AB} = \frac{MD}{AD} \to \frac{ME}{۵} = \frac{۲}{۵} \to \boxed{ME = ۲}$$

$$\overset{\Delta}{ADC} : MF \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MF}{DC} = \frac{AM}{AD} \to \frac{MF}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \to \boxed{MF = ۶}$$

$$ME + EF = MF \to ۲ + EF = ۶ \to \boxed{EF = ۴}$$

۶۳



$$\left.\begin{array}{l} \frac{AD}{DB} = \frac{۴}{۵} \\ \frac{AE}{EC} = \frac{۶}{۷/۵} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} DE \parallel BC$$

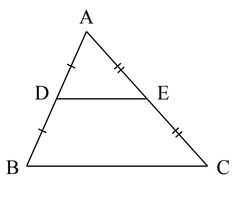
$$DE \parallel BC \Rightarrow DH = DL \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BCD}} = S_{\overset{\Delta}{BCE}}$$

$$\to S_{\overset{\Delta}{BDO}} + \cancel{S_{\overset{\Delta}{OBC}}} = S_{\overset{\Delta}{ECO}} + \cancel{S_{\overset{\Delta}{OBC}}} \to S_{\overset{\Delta}{OBD}} = S_{\overset{\Delta}{OCE}} \to \boxed{\frac{S_{\overset{\Delta}{OBD}}}{S_{\overset{\Delta}{OCE}}} = ۱}$$

۶۴

فرض: $AE = EC \ , \ AD = DB$

حکم: $DE = \frac{BC}{۲} \ , \ DE \parallel BC$



اثبات:

$$\begin{array}{l} AD = DB \\ AB = AD + DB \end{array} \to \frac{AD}{AB} = \frac{۱}{۲}$$

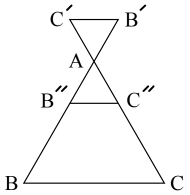
$$\begin{array}{l} AE = EC \\ AC = AE + EC \end{array} \to \frac{AE}{AC} = \frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE \parallel BC$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۲}\rightarrow DE=\frac{BC}{۲}$$

۶۵ پاره‌خط $B''C''$ را طوری رسم می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\begin{cases} AB''=AB' \\ AC''=AC' \end{cases}$$



از این‌رو دو مثلث $AB'C'$ و $AB''C''$ به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین هم‌نهشت‌اند، بنابراین:

$$\begin{cases} \text{طبق خطوط موازی و مورب} \Rightarrow \hat{B}=\hat{B}' \\ \text{طبق تساوی مثلث} \Rightarrow \hat{B}=\hat{B}'' \end{cases} \Rightarrow \hat{B}=\hat{B}''$$

حال در $\overset{\triangle}{ABC}$ تعمیم قضیهٔ تالس را می‌نویسیم:

$$B''C''\parallel BC \Rightarrow \frac{AB''}{AB}=\frac{AC''}{AC}=\frac{B''C''}{BC}$$

و چون دو مثلث $\overset{\triangle}{AB'C'}$ و $\overset{\triangle}{AB''C''}$ هم‌نهشت‌اند، کافی است ضلع متناظر هر ضلع را در تساوی فوق جایگذاری کنیم و حکم ثابت می‌شود:

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

۶۶

$$EF\parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CE}{AC}=\frac{CF}{BC}=\frac{EF}{AB}\rightarrow \frac{x+۳}{۲x+۳}=\frac{x+۵}{۲x+۶}=\frac{y-۱}{y+۱}$$

$$\rightarrow ۲x^۲+۱۲x+۱۸=۲x^۲+۱۳x+۱۵\rightarrow x=۳\rightarrow \frac{۸}{۱۲}=\frac{y-۱}{y+۱}\rightarrow y=۵$$

۶۷

$$AC^۲=CH\cdot BC\rightarrow AC^۲=CH(CH+BH)$$

$$\rightarrow ۶^۲=CH(CH+۵)\rightarrow ۳۶=CH^۲+۵CH$$

$$\rightarrow CH^۲+۵CH-۳۶=۰\rightarrow (CH-۴)(CH+۹)=۰ \begin{cases} \boxed{CH=۴} \\ CH=-۹ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\rightarrow AH^۲=CH\cdot BH\rightarrow AH^۲=۴\times ۵\rightarrow AH^۲=۲۰\rightarrow \boxed{AH=۲\sqrt{۵}}$$

$$\rightarrow AB^۲=BH\cdot BC\rightarrow AB^۲=۵\times ۹\rightarrow AB^۲=۴۵\rightarrow \boxed{AB=۳\sqrt{۵}}$$

۶۸

$$S=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\rightarrow ۶۰=\frac{x\times ۳x}{۲}\rightarrow ۳x^۲=۱۲۰\rightarrow x^۲=۴۰$$

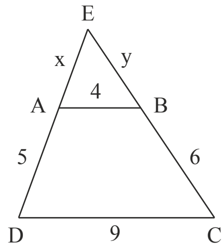
$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\rightarrow BC^۲=x^۲+(۳x)^۲=x^۲+۹x^۲$$

$$\rightarrow BC^۲=۱۰x^۲\rightarrow BC^۲=۱۰\times ۴۰=۴۰۰\rightarrow \boxed{BC=۲۰}$$

$$S=\frac{۱}{۲}AH\cdot BC\rightarrow ۶۰=\frac{AH\times ۲۰}{۲}\rightarrow \boxed{AH=۶}$$

۶۹

$$AB \parallel DC \to \frac{EA}{ED}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{DC} \to \frac{x}{x+۵}=\frac{y}{y+۶}=\frac{۴}{۹}$$



$$\to ۹x=۴(x+۵) \to ۹x=۴x+۲۰ \to ۵x=۲۰ \to \boxed{x=۴}$$

$$۹y=۴(y+۶) \to ۹y=۴y+۲۴ \to ۵y=۲۴ \to \boxed{y=۴/۸}$$

$$P_{\overset{\Delta}{ABE}}=AB+AE+BE=۴+۴+۴/۸ \to \boxed{P_{\overset{\Delta}{ABE}}=۱۲/۸}$$

۷۰

الف

$$BC=BH+HC \to ۱۰=۹+HC \to HC=۱$$

$$AH^{۲}=BH\cdot CH \to AH^{۲}=۹\times ۱ \to \boxed{AH=۳}$$

$$AB^{۲}=BC\cdot BH \to AB^{۲}=۱۰\times ۹ \to AB=\sqrt{۹۰} \to \boxed{AB=۳\sqrt{۱۰}}$$

$$AC^{۲}=BC\cdot CH \to AC^{۲}=۱۰\times ۱ \to \boxed{AC=\sqrt{۱۰}}$$

ب

$$AC^{۲}=BC\cdot CH \to ۵^{۲}=BC\times ۲ \to \boxed{BC=۱۲/۵}$$

$$BC=BH+CH \to ۱۲/۵=BH+۲ \to \boxed{BH=۱۰/۵}$$

$$AH^{۲}=BH\cdot CH \to AH^{۲}=۱۰/۵\times ۲ \to AH^{۲}=۲۱ \to \boxed{AH=\sqrt{۲۱}}$$

$$AB^{۲}=BC\cdot BH \to AB^{۲}=۱۲/۵\times ۱۰/۵ \to AB^{۲}=۱۳۱/۲۵$$

$$\to AB=\sqrt{۲۱\times ۶/۲۵} \to \boxed{AB=۲/۵\sqrt{۲۱}}$$

یا

$$AB\cdot AC=BC\cdot AH \to AB\times ۵=۱۲/۵\times \sqrt{۲۱} \to \boxed{AB=۲/۵\sqrt{۲۱}}$$

پ

$$AB^{۲}+AC^{۲}=BC^{۲} \to ۸^{۲}+۶^{۲}=BC^{۲} \to BC^{۲}=۱۰۰ \to \boxed{BC=۱۰}$$

$$AB\cdot AC=BC\cdot AH \to ۸\times ۶=۱۰\times AH \to \boxed{AH=۴/۸}$$

$AC^{۲} = BC \cdot CH \to ۶^{۲} = ۱۰ \times CH \to \boxed{CH = ۳/۶}$

$AB^{۲} = BC \cdot BH \to ۸^{۲} = ۱۰ \times BH \to \boxed{BH = ۶/۴}$

ت) $AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \to ۱۲^{۲} = ۶^{۲} + BH^{۲} \to BH^{۲} = ۱۴۴ - ۳۶ \to BH^{۲} = ۱۰۸$
$\to \boxed{BH = ۶\sqrt{۳}}$

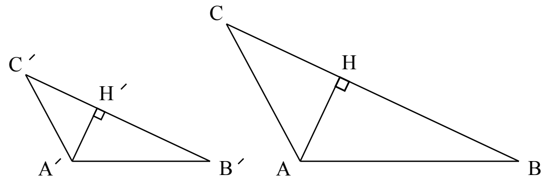
$AB^{۲} = BC \cdot BH \to ۱۲^{۲} = BC \times ۶\sqrt{۳} \to BC = \dfrac{۱۴۴}{۶\sqrt{۳}} \to \boxed{BC = ۸\sqrt{۳}}$

$AB \cdot AC = AH \cdot BC \to ۱۲ \times AC = ۶ \times ۸\sqrt{۳} \to \boxed{AC = ۴\sqrt{۳}}$

$AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \to ۱۲^{۲} = x^{۲} + ۱۱^{۲} \to x^{۲} = ۱۴۴ - ۱۲۱$ ۷۱
$\to x^{۲} = ۲۳ \to \boxed{x = \sqrt{۲۳}}$

$\overset{\Delta}{ADH} \sim \overset{\Delta}{ABH} \to \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{AD}{AB} \to \dfrac{\sqrt{۲۳}}{۱۱} = \dfrac{y}{۱۲} \to \boxed{y = \dfrac{۱۲}{۱۱}\sqrt{۲۳}}$

الف) $\left.\begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{H} = \widehat{H'} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{A'B'H'}$ ۷۲



ب) $\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{A'B'H'} \to \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AH}{A'H'} = K \to \boxed{\dfrac{AH}{A'H'} = K}$

پ) $\dfrac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}} = \dfrac{\frac{۱}{۲}BC \cdot AH}{\frac{۱}{۲}B'C' \cdot A'H'} = \dfrac{BC}{B'C'} \cdot \dfrac{AH}{A'H'} = K^{۲} \to \boxed{\dfrac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}} = K^{۲}}$

ت) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = K \to AB = A'B' \cdot K \;,\; AC = A'C' \cdot K \;,\; BC = B'C' \cdot K$
$\dfrac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{P_{A'B'C'}} = \dfrac{AB + AC + BC}{A'B' + A'C' + B'C'} = \dfrac{K(A'B' + A'C' + B'C')}{A'B' + A'C' + B'C'} \to \boxed{\dfrac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{P_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}} = K}$

۷۳

$$DC^{۲} = DB^{۲} - BC^{۲} = ۱۶ \to DC = ۴$$

$$\left.\begin{matrix} D_۱ = D_۲ \\ A = C \end{matrix}\right\} ADE \sim CDB \to \frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DB} \to \frac{AD}{۴} = \frac{۴}{۵}$$

$$AD = \frac{۱۶}{۵}$$

۷۴ نمودار تابع روبرو بصورت سه ضابطه‌ای می‌باشد و پیش از بدست آوردن ضابطه‌ها هم می‌توان دامنه و برد تابع را از روی شکل بدست آورد.

$$x \in \mathbb{R} \to \boxed{D_f = \mathbb{R}} \;,\; y > -۴ \to \boxed{R_f = (-۴, +\infty)}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -۵ \\ ۴ \end{bmatrix} , \; f_۱(x) = ax + b \to \begin{cases} -۲a + b = ۲ \\ -۵a + b = ۴ \end{cases} \to \begin{cases} -۲a + \cancel{b} = ۲ \\ ۵a - \cancel{b} = -۴ \end{cases} +$$

$$۳a = -۲ \to \boxed{a = -\frac{۲}{۳}}$$

$$-۲(\frac{-۲}{۳}) + b = ۲ \to \boxed{b = \frac{۲}{۳}}$$

$$\boxed{\to f_۱(x) = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۲}{۳}}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} , \; f_۲(x) = ax + b \to \begin{cases} -۲a + b = -۱ \\ a + b = ۲ \end{cases} \to \begin{cases} ۲a - \cancel{b} = ۱ \\ a + \cancel{b} = ۲ \end{cases} +$$

$$۳a = ۳ \to \boxed{a = ۱} \;,\; \boxed{b = ۱}$$

$$\to \boxed{f_۲(x) = x + ۱}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix} , \; f_۳(x) = ax + b \to \begin{cases} a + b = -۴ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \to \begin{cases} -a - \cancel{b} = ۴ \\ ۳a + \cancel{b} = ۰ \end{cases}$$

$$۲a = ۴ \to \boxed{a = ۲} \;,\; \boxed{b = -۶}$$

$$\to \boxed{f_۳(x) = ۲x - ۶}$$

$$\to f(x) = \begin{cases} -\frac{۲}{۳}x + \frac{۲}{۳} & , \quad x \leq -۲ \\ x + ۱ & , \quad -۲ < x \leq ۱ \\ ۲x - ۶ & , \quad ۱ < x \end{cases}$$

۷۵

$$f(۲ - \sqrt{۳}) = \frac{۲(۲ - \sqrt{۳})^{۲} + ۲}{(۲ - \sqrt{۳})^{۲} - ۳} = \frac{۲(۴ - ۴\sqrt{۳} + ۳) + ۲}{۴ - ۴\sqrt{۳} + ۳ - ۳} = \frac{۱۶ - ۸\sqrt{۳}}{۴ - ۴\sqrt{۳}} = \frac{۴(۴ - ۲\sqrt{۳})}{۴(۱ - \sqrt{۳})}$$

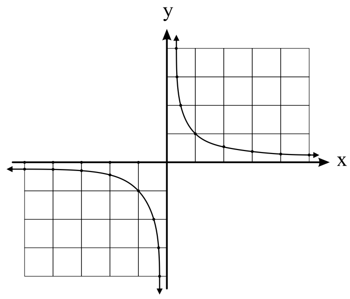
$$\to f(۲ - \sqrt{۳}) = \frac{۴ - ۲\sqrt{۳}}{۱ - \sqrt{۳}} \times \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۱ + \sqrt{۳}} = \frac{۴ + ۴\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳} - ۶}{۱ - ۳}$$

$$= \frac{-۲ + ۲\sqrt{۳}}{-۲} = \frac{-۲(۱ - \sqrt{۳})}{-۲} \to \boxed{f(۲ - \sqrt{۳}) = ۱ - \sqrt{۳}}$$

۷۶

x	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	$\cdots$
$\frac{۱}{x}$	$-\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	-۳	$\cdots$

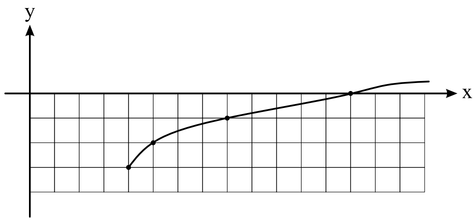
x	۵	۴	۳	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\cdots$
$\frac{۱}{x}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳	$\cdots$



۷۷

$$g(x) = -۳ + \sqrt{x-۴} \to x-۴ \geq ۰ \to x \geq ۴ \to D_g = [۴, +\infty)$$

x	y
۴	-۳
۵	-۲
۸	-۱
۱۳	۰



۷۸ طبق فرض، $x=-۲$ و $x=۵$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^{۲}+ax+b=۰$ می‌باشند. داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -a = -۲+۵ = ۳ \Rightarrow a = -۳$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = b = -۱۰$$

۷۹ نمودار f محور xها در نقطه‌ای به طول ۵ قطع کرده است، پس مختصات نقطهٔ $(۵, ۰)$ در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(۵) = ۰ \Rightarrow f(۵) = a + \sqrt{۵+b} = ۰ \quad (۱)$$

همچنین $f(۱) = -۲$ می‌باشد، پس داریم:

$$f(۱) = a + \sqrt{۱+b} = -۲ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} a+\sqrt{۵+b}=۰ \\ a+\sqrt{۱+b}=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{a}-\sqrt{۵+b}=۰ \\ \cancel{a}+\sqrt{۱+b}=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱+b} - \sqrt{۵+b} = -۲ \Rightarrow \sqrt{۱+b}+۲ = \sqrt{۵+b}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}} (۱+\cancel{b}) + ۴\sqrt{۱+b} + ۴ = ۵ + \cancel{b}$$

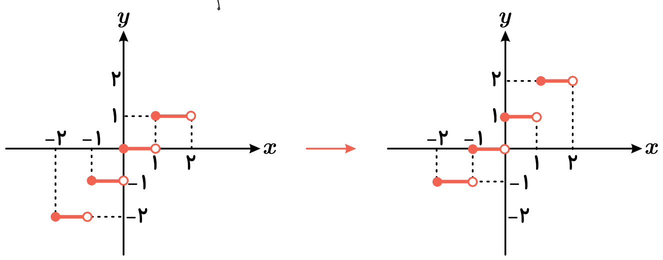
$$\Rightarrow ۴\sqrt{۱+b} = ۰ \Rightarrow ۱+b = ۰ \Rightarrow b = -۱$$

$$\xrightarrow{a+\sqrt{۵+b}=۰} a + \sqrt{۵-۱} = ۰ \Rightarrow a+۲ = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

۸۰

با انتقال به اندازهٔ یک واحد نمودار $y=[x]$ به سمت بالا، نمودار $y=[x]+۱$ رسم می‌شود:

الف



ب)

با توجه به تعریف جزء صحیح، تابع را به‌صورت یک تابع پله‌ای می‌نویسیم. اگر n یک عدد صحیح و $n \le x < n + ۱$، آنگاه $[x] = n$، بنابراین داریم:

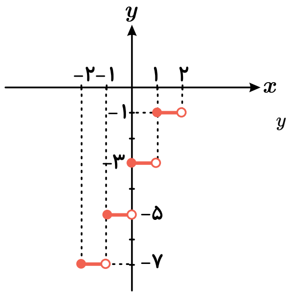
$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = ۲[x] - ۳ = ۲(-۲) - ۳ = -۷$$

$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = ۲[x] - ۳ = ۲(-۱) - ۳ = -۵$$

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۲[x] - ۳ = ۲(۰) - ۳ = -۳$$

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = ۲[x] - ۳ = ۲(۱) - ۳ = -۱$$

ضابطهٔ تابع و نمودار تابع به‌صورت زیر است:



$$y = \begin{cases} -۱ & ۱ \le x < ۲ \\ -۳ & ۰ \le x < ۱ \\ -۵ & -۱ \le x < ۰ \\ -۷ & -۲ \le x < -۱ \end{cases}$$

پ)

با در نظر گرفتن بازه‌های مختلف و با حذف $[x]$، ضابطهٔ تابع را به دست می‌آوریم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = x + [x] = x$$

باید خط $y = x$ را در محدودهٔ $۰ \le x < ۱$ رسم کنیم:

x	۰	۱
y	۰	۱

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x + [x] = x + ۱$$

باید خط $y = x + ۱$ را در محدودهٔ $۱ \le x < ۲$ رسم کنیم:

x	۱	۲
y	۲	۳

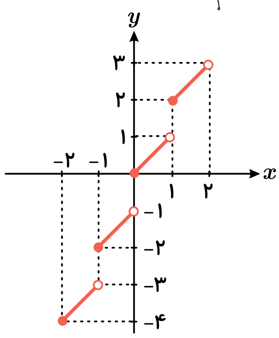
$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = x + [x] = x - ۱$$

باید خط $y = x - ۱$ را در محدودهٔ $-۱ \le x < ۰$ رسم کنیم:

x	-۱	۰
y	-۲	-۱

$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = x + [x] = x - ۲$$

همچنین خط $y = x - ۲$ در محدودهٔ
$-۲ \le x < -۱$ باید رسم شود:



x	-۲	-۱
y	-۴	-۳

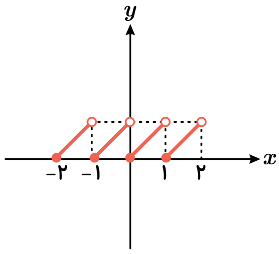
ت) ابتدا با استفاده از تعریف جزء صحیح و در نظر گرفتن محدودهٔ مناسب، مقدار $[x]$ را به دست می‌آوریم و ضابطهٔ تابع را بدون $[x]$ می‌نویسیم و سپس نمودار تابع به‌دست‌آمده را در همان محدوده رسم می‌کنیم:

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x - [x] = x - ۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$$

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = x - [x] = x - ۰ = x \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$$

$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = x - [x] = x + ۱ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۱ & ۰ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$$

$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = x - [x] = x + ۲ \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -۲ & -۱ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$$



۸۱

$$f(۱) = ۵ \to (۱,۵) \in f \ , \ \ (۵,۱) \in f^{-۱}$$

$$f^{-۱}(۹) = ۳ \to (۹,۳) \in f^{-۱} \ , \ \ (۳,۹) \in f$$

$$\xrightarrow{f} (۱,۵), (۳,۹) \to a = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۹ - ۵}{۳ - ۱} = \frac{۴}{۲} = ۲ \to y = ax + b$$

$$\to y = ۲x + b \xrightarrow{(۱,۵)} ۵ = ۲(۱) + b \to b = ۳ \to y = ۲x + ۳$$

$$\to \boxed{f(x) = ۲x + ۳}$$

$$\to y = ۲x + ۳ \to ۲x = y - ۳ \to x = \frac{y - ۳}{۲} \to x = \frac{y}{۲} - \frac{۳}{۲}$$

$$\to f^{-۱}(y) = \frac{y}{۲} - \frac{۳}{۲} \to \boxed{f^{-۱}(x) = \frac{x}{۲} - \frac{۳}{۲}}$$

۸۲ تابع درجه دوم یک به یک و وارون‌پذیر نیست، اما در تابع روبرو چون دامنه‌ی تابع محدود شده و شکل تابع نیمی از سهمی تابع درجه ۲ است پس تابع یک به یک بوده و وارون‌پذیر است.

$$y = x^۲ + ۴x + ۳ \to y = x^۲ + ۴x + ۴ - ۱ \to y = (x + ۲)^۲ - ۱$$

$$\to y + ۱ = (x + ۲)^۲ \to \sqrt{y + ۱} = x + ۲ \to x = \sqrt{y + ۱} - ۲$$

$$\rightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{y+1}-2 \rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-2 \rightarrow \begin{cases} f^{-1}:\mathbb{R}^{\geq -1}\rightarrow \mathbb{R}^{\geq -2} \\ f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-2 \end{cases}$$

۸۳

$$f^{-1}(4)=a \rightarrow (4,a)\in f^{-1} \rightarrow (a,4)\in f \rightarrow -a+\sqrt{-2a}=4$$

$$\rightarrow \sqrt{-2a}=4+a \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2a=a^2+8a+16 \rightarrow a^2+10a+16=0$$

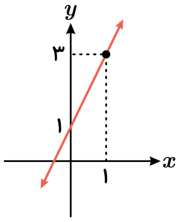
$$\rightarrow (a+8)(a+2)=0 \begin{cases} a+2=0 \rightarrow \boxed{a=-2} \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-2(-2)}=4-2 \quad \checkmark \\ a+8=0 \rightarrow a=-8 \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-2(-8)}=4-8 \quad \times \end{cases}$$

۸۴

نمودار تابع خطی با مشخص کردن دو نقطه روی آن قابل رسم است:

الف

x	0	1
y	1	3



هر خط به موازات محور xها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، پس $y=2x+1$ ضابطهٔ یک تابع یک‌به‌یک است.

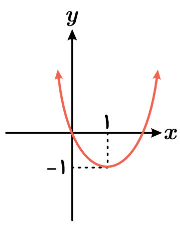
ب

با مشخص کردن رأس سهمی و دو نقطهٔ کمکی، نمودار را رسم می‌کنیم:

$$x=-\frac{b}{2a}=1 \Rightarrow y=(1)^2-2(1)=-1$$

$$\Rightarrow S(1,-1)$$

x	0	1	2
y	0	-1	0

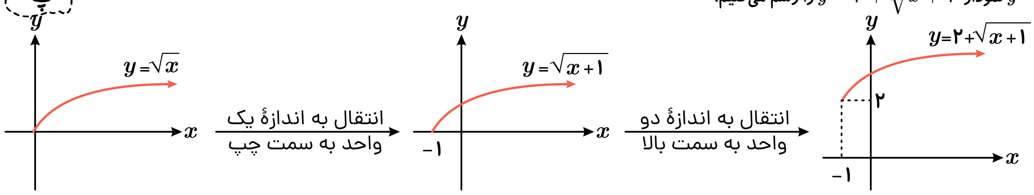


نمودار تابع، محور xها را در دو نقطه قطع کرده است، پس f تابعی یک‌به‌یک نمی‌باشد.

اگر ضابطهٔ f را در محدودهٔ $(-\infty,1]$ یا $[1,+\infty)$ و یا در هر زیربازه از آنها در نظر بگیریم، آنگاه f در این محدوده تابعی یک‌به‌یک است.

پ

با انتقال نمودار $y=\sqrt{x}$ نمودار $y=2+\sqrt{x+1}$ را رسم می‌کنیم:



هر خط به موازات محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس نمودار یک تابع یک‌به‌یک است.

ت

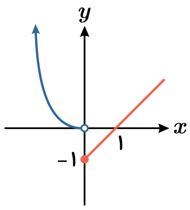
f یک تابع دوضابطه‌ای است. نمودار f از خط $y = x - ۱$ در بازهٔ $[۰, +\infty)$ و سهمی $y = x^۲$ در بازهٔ $(-\infty, ۰)$ تشکیل شده است.

$y = x - ۱$,

x	۰	۱
y	-۱	۰

$y = x^۲$,

x	-۱	۰
y	۱	۰



با توجه به نمودار، خط $y = ۱$، نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس f تابع یک‌به‌یک نیست.

اگر ضابطهٔ f را در محدودهٔ $(-\infty, ۰]$ یا $[۰, +\infty)$ در نظر بگیریم، آنگاه در این محدوده f تابعی یک‌به‌یک است.

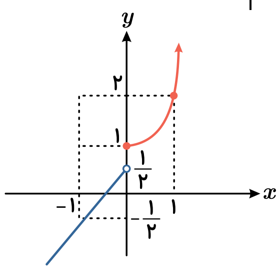
ث

$y = x^۲ + ۱$,

x	۰	۱
y	۱	۲

$y = x + \frac{۱}{۲}$,

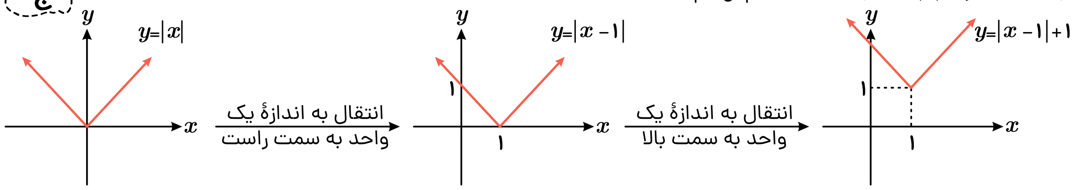
x	-۱	۰
y	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$



با توجه به نمودار، هر خط به موازات محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس f یک تابع یک‌به‌یک است.

ج

نمودار تابع f را با استفاده از نمودار $y = |x|$ و به کمک انتقال رسم می‌کنیم:

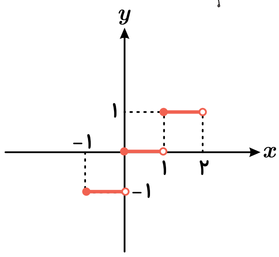


خط $y = ۲$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، پس f تابعی غیر یک‌به‌یک است.

اگر ضابطهٔ f را در محدودهٔ $(-\infty, ۱]$ یا $[۱, +\infty)$ در نظر بگیریم، آنگاه f در این محدوده تابعی یک‌به‌یک است.

چ

نمودار تابع $y = [x]$ به‌صورت روبه‌رو است:

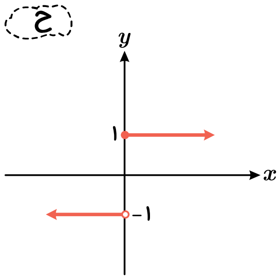


با توجه به نمودار، خط $y=۱$، نمودار تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند، پس $y=[x]$ تابعی یک‌به‌یک نمی‌باشد.

هیچ بازه‌ای نمی‌توان مشخص کرد که تابع در آن بازه یک‌به‌یک باشد.

ج

نمودار تابع پله‌ای f به‌صورت روبه‌رو است:



خط‌های $y=-۱$ و $y=۱$، نمودار تابع f را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کنند، پس تابع پله‌ای f یک تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد. تابع f روی هیچ بازه‌ای تابع یک‌به‌یک نمی‌باشد.

۸۵

$$f^{-۱}(-۳)=۱ \Rightarrow f(۱)=-۳ \Rightarrow -۳=-۱+m \Rightarrow m=-۲$$
$$y=-x-۲ \Rightarrow x=-y-۲ \Rightarrow f^{-۱}(x)=-x-۲$$

۸۶

$$f(x)=\sqrt{x-۱} \to x-۱ \geq ۰ \to x \geq ۱ \to D_f=[۱,+\infty)$$
$$g(x)=x^۲-۴ \to D_g=\mathbb{R}$$
$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x\,|g(x)=۰\}=([۱,+\infty)\cap\mathbb{R})-\left\{x|x^۲-۴=۰\right\}$$
$$\to D_{\frac{f}{g}}=[۱,+\infty)-\{-۲,۲\} \to \boxed{D_{\frac{f}{g}}=[۱,۲)\cup(۲,+\infty)}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-۱}}{x^۲-۴} \to \boxed{(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{x^۲-۴}}$$
$$g(۵)=۵^۲-۴ \to g(۵)=۲۱$$
$$f(۵)=\sqrt{۵-۱} \to f(۵)=۲$$
$$(g-۳f)(۵)=g(۵)-۳f(۵)=۲۱-۳(۲) \to \boxed{(g-۳f)(۵)=۱۵}$$

۸۷

$$f(x)=\sqrt{۲-x} \to ۲-x \geq ۰ \to ۲ \geq x \to D_f=(-\infty,۲]$$
$$g(x)=-۳x+۳ \to D_g=\mathbb{R}$$
$$g(x)=۰ \to -۳x+۳=۰ \to ۳=۳x \to x=۱$$
$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x\,|g(x)=۰\}=((-\infty,,۲]\cap\mathbb{R})-\{۱\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (-\infty,۲] - \{۱\} = (-\infty,۱)\cup(۱,۲]}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{۲-x}}{-۳x+۳} \rightarrow \boxed{(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{۲-x}}{-۳x+۳}}$$

$$f(۰) = \sqrt{۲-۰} = \sqrt{۲}\ ,\quad g(۰) = -۳(۰)+۳ = ۳$$

$$\rightarrow (۲f-g)(۰) = ۲f(۰) - g(۰) = ۲\sqrt{۲} - ۳ \rightarrow \boxed{(۲f-g)(۰) = ۲\sqrt{۲}-۳}$$

۸۸

$$f(x) = \frac{x+۱}{x-۴} \rightarrow x-۴ \neq ۰ \rightarrow x \neq ۴ \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۴\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-۲} \rightarrow x-۲ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۲ \rightarrow D_g = [۲,+\infty)$$

$$\rightarrow D_f \cap D_g = [۲,+\infty) - \{۴\} \text{ یا } D_f \cap D_g = [۲,۴)\cap(۴,+\infty)$$

الف) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+۱}{x-۴}}{\sqrt{x-۲}} \rightarrow \boxed{(\frac{f}{g})(x) = \frac{(x+۱)}{(x-۴)\sqrt{x-۲}}}$

$$\left.\begin{array}{l} D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \,|\, g(x) = ۰\} \\ g(x) = ۰ \rightarrow \sqrt{x-۲} = ۰ \rightarrow x = ۲ \end{array}\right\} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = ([۲,۴)\cup(۴,+\infty)) - \{۲\}$$

$$\rightarrow \boxed{D_{\frac{f}{g}} = (۲,۴)\cup(۴,+\infty)}$$

ب) $(\frac{g}{f})(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x-۲}}{\frac{x+۱}{x-۴}} \rightarrow \boxed{(\frac{g}{f})(x) = \frac{(\sqrt{x-۲})(x-۴)}{(x+۱)}}$

$$f(x) = ۰ \rightarrow \frac{x+۱}{x-۴} = ۰ \rightarrow x = -۱ \rightarrow D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \,|\, f(x) = ۰\}$$

$$\rightarrow D_{\frac{g}{f}} = ([۲,۴)\cup(۴,+\infty)) - \{۱\} \rightarrow \boxed{D_{\frac{g}{f}} = [۲,۴)\cup(۴,+\infty)}$$

پ) $f(۶) = \frac{۶+۱}{۶-۴} = \frac{۷}{۲}\ ,\quad g(۶) = \sqrt{۶-۲} = ۲$

$$\rightarrow (۴f-۳g)(۶) = ۴f(۶) - ۳g(۶) = ۴(\frac{۷}{۲}) - ۳(۲) = ۱۴ - ۶$$

$$\rightarrow \boxed{(۴f-۳g)(۶) = ۸}$$

۸۹

$$(۰,۴),(۲,۰) \in f \rightarrow a = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴-۰}{۰-۲} = -۲$$

$$\rightarrow y = -۲x + b \xrightarrow{(۰,۴)} ۴ = -۲(۰) + b \rightarrow b = ۴ \rightarrow \boxed{f(x) = -۲x+۴}$$

$$(۰,-۱),(۳,۰) \in g \rightarrow a = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۰-(-۱)}{۳-۰} = \frac{۱}{۳} \rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + b \xrightarrow{(۰,-۱)} -۱ = \frac{۱}{۳}(۰) + b$$

$$\rightarrow b = -۱ \rightarrow \boxed{g(x) = \frac{x}{۳} - ۱}$$

الف) $f(x) = -۲x+۴ \rightarrow D_f = \mathbb{R}\ ,\quad g(x) = \frac{x}{۳} - ۱ \rightarrow D_g = \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -۲x + ۴ + \frac{x}{۳} - ۱ \rightarrow \boxed{(f+g)(x) = \frac{-۵x}{۳} + ۳}$$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \to \boxed{D_{f+g} = \mathbb{R}}$

ب) $f(۶) = -۲(۶) + ۴ \to f(۶) = -۸ \;,\; g(۶) = \frac{۶}{۳} - ۱ \to g(۶) = ۱$

$\to (۳g - f)(۶) = ۳g(۶) - f(۶) = ۳(۱) - (-۸) \to \boxed{(۳g - f)(۶) = ۱۱}$

۹۰

الف

$f(x) = |x| \quad , \quad g(x) = \frac{۱}{x} \quad \begin{matrix} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} - \{۰\} \end{matrix} \to D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |x| + \frac{۱}{x} \quad , \quad D_{f+g} = \mathbb{R} - \{۰\}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = |x| - \frac{۱}{x} \quad , \quad D_{f-g} = \mathbb{R} - \{۰\}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = |x| \times \frac{۱}{x} = \frac{|x|}{x} \quad , \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{۰\}$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x|}{\frac{۱}{x}} = x|x| \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{۰\} - \{x | g(x) = ۰\} = \mathbb{R} - \{۰\}$

ب

$\begin{matrix} f(x) = x^۲ - ۴ \to D_f = \mathbb{R} \\ g(x) = x + ۲ \to D_g = \mathbb{R} \end{matrix} \to D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^۲ - ۴ + x + ۲ \to (f+g)(x) = x^۲ + x - ۲ \quad , \quad D_{f+g} = \mathbb{R}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^۲ - ۴ - (x+۲) \to (f-g)(x) = x^۲ - x - ۶ \quad , \quad D_{f-g} = \mathbb{R}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^۲ - ۴)(x+۲) \to (f \cdot g)(x) = x^۳ + ۲x^۲ - ۴x - ۸ \quad , \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^۲ - ۴}{x+۲} \to (\frac{f}{g})(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x+۲} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-۲\}$

پ

$\begin{matrix} f(x) = \sqrt{x} \to D_f = [۰, +\infty) \\ g(x) = -\sqrt{x} \to D_g = [۰, +\infty) \end{matrix} \to D_f \cap D_g = [۰, +\infty)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = ۰ \to (f+g)(x) = ۰ \quad , \quad D_{f+g} = [۰, +\infty)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = ۲\sqrt{x} \to (f-g)(x) = ۲\sqrt{x} \quad , \quad D_{f-g} = [۰, +\infty)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \times (-\sqrt{x}) = -x \to (f \cdot g)(x) = -x \quad , \quad D_{f \cdot g} = [۰, +\infty)$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -۱ \to (\frac{f}{g})(x) = -۱ \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = (۰, +\infty)$

ت

$\begin{matrix} f(x) = \frac{x-۲}{x+۵} \to D_f = \mathbb{R} - \{-۵\} \\ g(x) = x^۲ + ۳x - ۱۰ \to D_g = \mathbb{R} \end{matrix} \to D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-۵\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-۲}{x+۵} + x^۲ + ۳x - ۱۰ \quad , \quad D_{f+g} = \mathbb{R} - \{-۵\}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x-۲}{x+۵} - (x^۲ + ۳x - ۱۰) \quad , \quad D_{f-g} = \mathbb{R} - \{-۵\}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x-۲}{x+۵}(x^۲ + ۳x - ۱۰) \quad , \quad D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{-۵\}$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-۲}{x+۵}}{x^۲ + ۳x - ۱۰} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-۵\} - \{x | g(x) = ۰\}$

$\to D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-۵\} - \{۲, -۵\} \to D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{۲, -۵\}$

ث

$$\left.\begin{array}{l} g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\}\rightarrow D_g=\{-۱,۰,۲,۳\} \\ f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}\rightarrow D_f=\{۲,۳,۰\}\end{array}\right.\rightarrow D_f\cap D_g=\{۰,۲,۳\}$$

$$f+g=\{(۰,-۲+۳)(۲,۵+۴)(۳,۴+۰)\}\rightarrow f+g=\{(۰,۱)(۲,۹)(۳,۴)\}$$

$$f-g=\{(۰,-۲-۳)(۲,۵-۴)(۳,۴-۰)\}\rightarrow f-g=\{(۰,-۵)(۲,۱)(۳,۴)\}$$

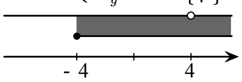
$$f\cdot g=\{(۰,-۲\times ۳)(۲,۵\times ۴)(۳,۴\times ۰)\}\rightarrow f\cdot g=\{(۰,-۶)(۲,۲۰)(۳,۰)\}$$

$$\frac{f}{g}=\left\{(۰,\frac{-۲}{۳})(۲,\frac{۵}{۴})(۳,\frac{۴}{۰})\right\}\rightarrow \frac{f}{g}=\left\{(۰,-\frac{۲}{۳})(۲,\frac{۵}{۴})\right\}$$

۹۱

الف

$$\begin{cases} D_f=[-۴,+\infty) \\ D_g=\mathbb{R}-\{۴\}\end{cases}\rightarrow D_f\cap D_g=[-۴,+\infty)-\{-۴\}\quad (۱)$$



$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}\quad (۲)$$

$$g(x)=۰\rightarrow \frac{x+۲}{x-۴}=۰\rightarrow x=-۲\quad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳):D_{\frac{f}{g}}=[-۴,+\infty)-\{-۲,۴\}$$

ب

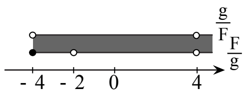
$$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x|f(x)=۰\}\quad (۲)'$$

$$f(x)=۰\rightarrow \sqrt{x+۴}=۰\rightarrow x=-۴\quad (۳)'$$

$$(۱),(۲)',(۳)':D_{\frac{g}{f}}=(-۴,+\infty)-\{۴\}$$

پ

در این حالت هر یک از توابع $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ خود حکم دو تابع هستند و دامنهٔ جمع آن‌ها، همان دامنهٔ اشتراک آن ها است.



$$D_{\frac{f}{g}+\frac{g}{f}}=D_{\frac{f}{g}}\cap D_{\frac{g}{f}}=(-۴,+\infty)-\{-۲,۴\}$$

ت

$$(۲f-g)(۵)=۲f(۵)-g(۵)=۲\sqrt{۵+۴}-\frac{۵+۲}{۵-۴}=۲\times ۳-۷=-۱$$

۹۲

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\leq x\leq ۲ \\ ۲x-۲ & x>۲\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} ۴ & ۰\leq x\leq ۲ \\ -۲x+۸ & x>۲\end{cases}$$

عمل‌های مربوط را باید در دامنهٔ مشترک توابع انجام دهیم.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} ۴ & ۰\leq x\leq ۲ \\ ۶ & x>۲\end{cases}$$

$$f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}۰ & ۰\le x\le ۲\\ -۴x^{۲}+۲۰x-۱۶ & x>۲\end{cases}$$

در عمل تقسیم $\frac{f}{g}$، ریشه‌های مخرج $g(x)=۰$ را باید از دامنهٔ مشترک حذف کنیم.

$$g(x)=۰\rightarrow -۲x+۸=۰\rightarrow x=۴\rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{۴\}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}۰ & ۰\le x\le ۲\\ \frac{x-۱}{۴-x} & x>۲-\{۴\}\end{cases}$$

توجه داریم که عمل $\frac{g(x)}{f(x)}$ را به ازای $x=۴$ نمی‌توانیم انجام دهیم.

۹۳

$$y=x^{۲}+۴x=x^{۲}+۴x+۴-۴\rightarrow y=(x+۲)^{۲}-۴$$

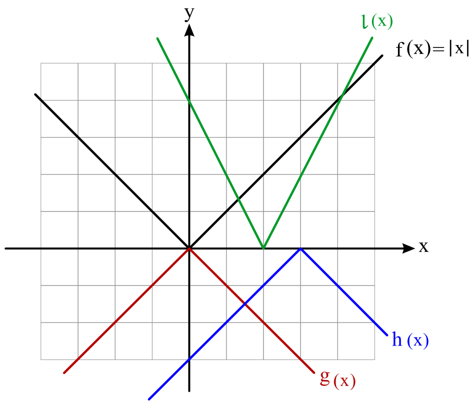
ابتدا نمودار سهمی $y=(x+۲)^{۲}-۴$ را ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم و داریم:

$$y=(x+۲-۳)^{۲}-۴\rightarrow y=(x-۱)^{۲}-۴$$

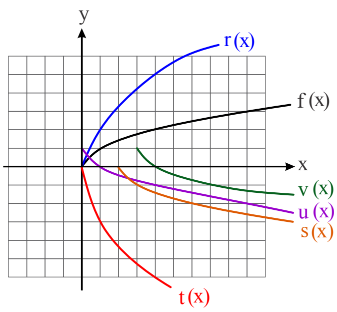
آنگاه نمودار جدید را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم و داریم:

$$y=(x-۱)^{۲}-۴-۱\rightarrow \boxed{y=(x-۱)^{۲}-۵}\ \text{یا}\ \boxed{y=x^{۲}-۲x-۴}$$

۹۴



۹۵



۹۶

$\alpha = \frac{۲\pi}{۳۰} \to \alpha = \frac{\pi}{۱۵}$ زاویه‌ی مرکزی بین دو کابین متوالی

$\theta = \frac{۳۲\pi}{۵} = \frac{۳۰\pi}{۵} + \frac{۲\pi}{۵} \to \theta = ۶\pi + \frac{۲\pi}{۵} \to \theta = \frac{۲\pi}{۵}$

$\theta = n\alpha \to \frac{۲\pi}{۵} = n \times \frac{\pi}{۱۵} \to n = ۶$ زاویه‌ی جابجا شده کابین

موقعیت ما ۶ کابین جلوتر آمده و اکنون در موقعیت کابین ۱۴ هستیم. $\to ۸ + ۶ = ۱۴$

۹۷

$$\begin{cases} \alpha = ۲x\,,\ \beta = ۳x\,,\ \gamma = ۴x \\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{۵\pi}{۴} \to ۲x + ۳x + ۴x = \frac{۵\pi}{۴} \to ۹x = \frac{۵\pi}{۴} \to x = \frac{۵\pi}{۳۶} \end{cases}$$

$\to \alpha = ۲x = ۲ \times \frac{۵\pi}{۳۶} \to \alpha = \frac{۵\pi}{۱۸}$ رادیان , $\alpha = ۵۰^\circ$

$\to \beta = ۳x = ۳ \times \frac{۵\pi}{۳۶} \to \beta = \frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان , $\beta = ۷۵^\circ$

$\to \gamma = ۴x = ۴ \times \frac{۵\pi}{۳۶} \to \gamma = \frac{۵\pi}{۹}$ رادیان , $\gamma = ۱۰۰^\circ$

۹۸ عقربهٔ ساعت‌شمار با گذشت یک ساعت ۳۰ درجه ($\frac{\pi}{۶}$ رادیان) می‌پیماید. پس با گذشت نیم ساعت $\frac{۱}{۲}(\frac{\pi}{۶}) = \frac{\pi}{۱۲}$ رادیان طی می‌کند. عقربهٔ دقیقه‌شمار هر ۵ دقیقه ۳۰ درجه می‌پیماید. پس با گذشت نیم ساعت (۳۰ دقیقه)، $\frac{\pi}{۶} \times ۶ = \pi$ رادیان طی می‌کند. عقربهٔ ثانیه‌شمار نیز هر دقیقه ۳۶۰ درجه (۲π رادیان) طی می‌کند. پس با گذشت ۳۰ دقیقه، $۳۰ \times ۲\pi = ۶۰\pi$ رادیان طی می‌کند.

۹۹ فاصلهٔ هر دو کابین متوالی برحسب رادیان برابر است با:

$$\frac{\text{زاویهٔ کل دایره برحسب رادیان}}{\text{تعداد کابین}} = \frac{۲\pi}{۸۰} = \frac{\pi}{۴۰}$$

فرض کنید کابین ۱، $\frac{۸۴\pi}{۲۰}$ دوران کند، داریم:

$$\frac{۸۴\pi}{۲۰} = \frac{۸۰\pi + ۴\pi}{۲۰} = ۴\pi + \frac{۴\pi}{۲۰} = ۴\pi + \frac{۴\pi \times ۲}{۲۰ \times ۲} = ۴\pi + ۸ \times \frac{\pi}{۴۰}$$

یعنی کابین ۱ در موقعیت کابین ۸ قرار می‌گیرد.

بنابراین کابین ۵ در موقعیت کابین $۱۳ = ۵ + ۸$ قرار می‌گیرد.

۱۰۰

$$\cos^۲\theta = ۱ - \sin^۲\theta = ۱ - (\frac{۳}{۵})^۲ = ۱ - \frac{۹}{۲۵} \to \cos^۲\theta = \frac{۱۶}{۲۵} \to \boxed{\cos\theta = -\frac{۴}{۵}}$$

$$\to \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{-۴}{۵}} \to \boxed{\tan\theta = -\frac{۳}{۴}}$$

$$\frac{۱ + \tan^۲\theta}{۱ - \tan^۲\theta} = \frac{۱ + (-\frac{۳}{۴})^۲}{۱ - (-\frac{۳}{۴})^۲} = \frac{۱ + \frac{۹}{۱۶}}{۱ - \frac{۹}{۱۶}} = \frac{\frac{۱۶}{۱۶} + \frac{۹}{۱۶}}{\frac{۱۶}{۱۶} - \frac{۹}{۱۶}} = \frac{\frac{۲۵}{۱۶}}{\frac{۷}{۱۶}} \to \boxed{\frac{۱ + \tan^۲\theta}{۱ - \tan^۲\theta} = \frac{۲۵}{۷}}$$

۱۰۱

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{۲}{\sin\alpha} \to \sin\alpha = \frac{۲}{x} \\ y = ۳\cot\alpha \to \cot\alpha = \frac{y}{۳} \end{array}\right\} \to ۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \to ۱ + (\frac{y}{۳})^۲ = \frac{۱}{(\frac{۲}{x})^۲}$$

$$\to ۱ + (\frac{y}{۳})^۲ = (\frac{x}{۲})^۲ \to ۱ + \frac{y^۲}{۹} = \frac{x^۲}{۴} \quad \text{یا} \quad \boxed{\frac{x^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۹} = ۱}$$

۱۰۲

الف) $= -\tan(\frac{\pi}{3}) - (-\sin(\frac{\pi}{4}))\cos\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{-4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$

ب) $= (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\sqrt{3}) - (\frac{1}{2})(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}$

پ) $= \frac{-\tan 45^\circ - 2\sin 270^\circ}{\cos 360^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{-1-2(-1)}{1+1} = \frac{1}{2}$

ت) $= \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(180^\circ - 60^\circ)}{\tan(\pi - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\cos(180^\circ - 45^\circ)}$

$= \frac{\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos 60^\circ}{-\tan\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} - 2(\frac{1}{2})}{-1 - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\frac{1}{2}-1}{-1-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4}$

ث) $= \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} + \cos(\pi - \frac{5\pi}{14}) + \cos(\pi - \frac{3\pi}{14}) =$

$= \cancel{\cos\frac{3\pi}{14}} + \cancel{\cos\frac{5\pi}{14}} + \cos\frac{7\pi}{14} - \cancel{\cos\frac{5\pi}{14}} - \cancel{\cos\frac{3\pi}{14}} = \cos\frac{7\pi}{14} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

ج) $= \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \times \cot(180^\circ + 45^\circ) - 3\cos(180^\circ + 60^\circ)\tan(\pi + \frac{\pi}{4})}{(\tan(\pi + \frac{\pi}{6}))^2 + (\cos(\pi + \frac{\pi}{4}))^2}$

$= \frac{-\sin\frac{\pi}{6} \times \cot 45^\circ - 3(-\cos 60^\circ) \times \tan\frac{\pi}{4}}{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + (-\cos\frac{\pi}{4})^2} = \frac{-\frac{1}{2} \times 1 - 3(-\frac{1}{2})(1)}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$

۱۰۳

$\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ)}$

$= \frac{\sin 20^\circ - (-\cos 20^\circ)}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}}{-\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}}$

$= \frac{\tan 20^\circ + 1}{-\tan 20^\circ + 1} = \frac{0.36 + 1}{-0.36 + 1} = \frac{1.36}{0.64} = \frac{136}{64} = \frac{17}{8}$

۱۰۴

$\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin\theta - (-\cos\theta)}{\sin\theta - (-\sin\theta)} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2\sin\theta}$

$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\tan\theta + 1}{2\tan\theta} = \frac{0.2 + 1}{2(0.2)} = \frac{1.2}{0.4} = \frac{12}{4} = 3$

۱۰۵

$\cos 285^\circ = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ \quad , \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$

$\sin 525^\circ = \sin(\cancel{360^\circ} + 180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ \quad , \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$

$\rightarrow \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1}$

$= \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = \frac{128}{-72} = -\frac{16}{9}$

۱۰۶

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin(۷\pi+\alpha)=\sin(\cancel{۶\pi}+\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha-\frac{۷\pi}{۲})=\cos(\alpha-\frac{۷\pi}{۲}+\frac{۸\pi}{۲})=\cos(\alpha+\frac{\pi}{۲})=-\sin\alpha$$

$$\to\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha-\sin\alpha}=\frac{۱}{۶}\to\frac{-\cos\alpha}{-۲\sin\alpha}=\frac{۱}{۶}\to\frac{۲\sin\alpha}{\cos\alpha}=۶\to ۲\tan\alpha=۶\to\boxed{\tan\alpha=۳}$$

۱۰۷

الف) $$=\frac{۳\sin(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)-\sqrt{۲}\cos(\pi+\frac{\pi}{۴})+\cos(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)}{-\cot(۱۳۵^\circ)-\sqrt{۳}\tan(\pi-\frac{\pi}{۶})}$$

$$=\frac{۳\sin ۳۰^\circ-\sqrt{۲}(-\cos\frac{\pi}{۴})+\cos(-۶۰^\circ)}{-\cot(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)-\sqrt{۳}(-\tan\frac{\pi}{۶})}=\frac{۳\sin ۳۰^\circ+\sqrt{۲}\cos\frac{\pi}{۴}+\cos ۶۰^\circ}{\cot ۴۵^\circ+\sqrt{۳}\tan\frac{\pi}{۶}}$$

$$=\frac{۳(\frac{۱}{۲})+\sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})+\frac{۱}{۲}}{۱+\sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۳})}=\frac{\frac{۳}{۲}+\frac{۲}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۳}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

ب) $$=\frac{۲\sin(\pi+\frac{\pi}{۶})\times\tan(\pi+\frac{\pi}{۴})-\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})\times\tan(۲\pi-\frac{\pi}{۳})}{\cos^۲(۲\pi-\frac{\pi}{۴})+\cot^۲(\pi+\frac{\pi}{۳})}$$

$$=\frac{۲(-\sin\frac{\pi}{۶})\times\tan(\frac{\pi}{۴})-(-\cos\frac{\pi}{۶})(-\tan\frac{\pi}{۳})}{\cos^۲\frac{\pi}{۴}+\cot^۲\frac{\pi}{۳}}=\frac{۲(-\frac{۱}{۲})(۱)-(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\sqrt{۳})}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{۳})^۲}$$

$$=\frac{-\frac{۲}{۲}-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}=\frac{-\frac{۵}{۲}}{\frac{۵}{۶}}=-\frac{۶}{۲}=-۳$$

پ) $$۲(-\sin\alpha)+۷\sin\alpha-۳\sin\alpha=-۲\sin\alpha+۷\sin\alpha-۳\sin\alpha=۲\sin\alpha$$

ت) $$=-\cos\alpha-\cancel{\cot\alpha}+۳(-\cos\alpha)+\cancel{\cot\alpha}=-۴\cos\alpha$$

ث) $$=\sqrt{۳}\cot(\cancel{۲\pi}+\frac{\pi}{۳})+۲\sin(\cancel{۶\pi}+\frac{۲\pi}{۳})+۲\cos(\cancel{۲\pi}-\frac{\pi}{۳})\times\tan(\cancel{۱۶\pi}+\frac{۲\pi}{۳})$$

$$=\sqrt{۳}\cot\frac{\pi}{۳}+۲\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})+۲\cos\frac{\pi}{۳}\times\tan(\pi-\frac{\pi}{۳})$$

$$=\sqrt{۳}\cot\frac{\pi}{۳}+۲(\sin\frac{\pi}{۳})+۲\cos\frac{\pi}{۳}\times(-\tan\frac{\pi}{۳})$$

$$=\sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۳})+۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+۲(\frac{۱}{۲})(-\sqrt{۳})=۱+\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=۱$$

ج) $$\frac{\tan(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)-\sin(۱۸۰^\circ+۴۵^\circ)\cos(۳۶۰^\circ-۴۵^\circ)}{\cot(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)\sin(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)-\cos(۱۸۰^\circ+۶۰^\circ)\tan(۱۸۰^\circ+۴۵^\circ)}$$

$$=\frac{-\tan ۶۰^\circ(-\cos ۳۰^\circ)-(-\sin ۴۵^\circ)\cos ۴۵^\circ}{-\cot ۴۵^\circ(-\sin ۳۰^\circ)-(-\cos ۶۰^\circ)\tan ۴۵^\circ}=\frac{(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})-(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{(-۱)(-\frac{۱}{۲})-(-\frac{۱}{۲})(۱)}$$

$$=\frac{\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۱}=۲$$

چ) $$=۳\tan(\cancel{۴\pi}+\frac{۵\pi}{۶})-\sin(\cancel{۱۰\pi}-\frac{\pi}{۴})+\cos(\cancel{۶\pi}+\frac{۳\pi}{۴})-\cot(\cancel{۱۰\pi}+\frac{۴\pi}{۳})$$

$$= ۳\tan(\pi - \frac{\pi}{۶}) - \sin(-\frac{\pi}{۴}) + \cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) - \cot(\pi + \frac{\pi}{۳})$$

$$= ۳(-\tan\frac{\pi}{۶}) + \sin\frac{\pi}{۴} + (-\cos\frac{\pi}{۴}) - \cot\frac{\pi}{۳}$$

$$= ۳(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) + \cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} - \cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} - \frac{\sqrt{۳}}{۳} = -\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

ح) $= ۵\sin^۲(\cancel{۲\pi} - \frac{\pi}{۴}) + ۲\tan^۲(\pi + \frac{\pi}{۳}) + ۳\cos(\cancel{۲\pi} + \frac{۲\pi}{۳}) - \cot^۲(\pi + \frac{\pi}{۶})$

$$= ۵(-\sin\frac{\pi}{۴})^۲ + ۲(\tan\frac{\pi}{۳})^۲ + ۳\cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) - (\cot\frac{\pi}{۶})^۲$$

$$= ۵(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + ۲(\sqrt{۳})^۲ + ۳(-\frac{۱}{۲}) - (\sqrt{۳})^۲$$

$$= ۵(\frac{۱}{۲}) + ۲(۳) - \frac{۳}{۲} - ۳ = \frac{۵}{۲} + ۶ - \frac{۳}{۲} - ۳ = ۴$$

۱۰۸

$$\frac{\sin(\cancel{۴\pi} + \frac{۳\pi}{۲} + \alpha) + ۲\cos(\cancel{۴\pi} + \pi - \alpha)}{۲\cos(\cancel{۲\pi} + \frac{۳\pi}{۲} + \alpha) - ۳\sin(\cancel{۱۶\pi} + \pi + \alpha)} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos\alpha + ۲(-\cos\alpha)}{۲\sin\alpha - ۳(-\sin\alpha)} = \frac{۱}{۱۰} \rightarrow \frac{-۳\cos\alpha}{۵\sin\alpha} = \frac{۱}{۱۰} \rightarrow ۵\sin\alpha = -۳۰\cos\alpha$$

$$\rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-۳۰}{۵} \rightarrow \boxed{\tan\alpha = -۶}$$

۱۰۹

الف

$$\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\tan ۴۵^\circ - \cot ۶۰^\circ = -۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

ب

$$\cos(-۲۱۰^\circ) + \cot(۲۴۰^\circ) = \cos(۲۱۰^\circ) + \cot(۲۴۰^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ)$$

$$= -\cos ۳۰^\circ + \cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{-\sqrt{۳}}{۶}$$

پ

$$\sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) = \sin(۷۲۰^\circ - ۹۰^\circ) + \tan(-۳۶۰^\circ - ۱۸۰^\circ)$$

$$= \sin(-۹۰^\circ) + \tan(-۱۸۰^\circ) = -\sin ۹۰^\circ - \tan ۱۸۰^\circ = -۱ - ۰ = -۱$$

ت

$$\cos(-۷۲۰^\circ) + \cot(-۶۰۰^\circ) + \tan(۷۲۰^\circ) - \tan(-۶۰۰^\circ)$$

$$= \cos(-۷۲۰^\circ + ۷۲۰^\circ) + \cot(۷۲۰^\circ - ۶۰۰^\circ) + \tan(۷۲۰^\circ + ۰^\circ) - \tan(۷۲۰^\circ - ۶۰۰^\circ) =$$

$$\cos(۰^\circ) + \cot(۱۲۰^\circ) + \tan(۰^\circ) - \tan(۱۲۰^\circ) =$$

$$\cos(۰^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) + \tan(۰^\circ) - \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) =$$

$$\cos(۰^\circ) - \cot(۶۰^\circ) + \tan(۰^\circ) + \tan(۶۰^\circ) = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۰ + \sqrt{۳} = \frac{۳ + ۲\sqrt{۳}}{۳}$$

ث

$$\sin(\frac{25\pi}{3}) - \cos(\frac{23\pi}{4}) = \sin(8\pi + \frac{\pi}{3}) - \cos(6\pi - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin(\frac{\pi}{3}) - \cos(-\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ج

$$\frac{\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin(\frac{-3\pi}{4}) + \tan(\frac{-4\pi}{3})} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6})}{\sin(2\pi - \frac{3\pi}{4}) + \tan(2\pi - \frac{4\pi}{3})}$$

$$= \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6})}{\sin(\pi + \frac{\pi}{4}) + \tan(\pi - \frac{\pi}{3})} = \frac{\sin\frac{\pi}{4} - (-\cos\frac{\pi}{6})}{-\sin\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

۱۱۰

$\rightarrow x + 20^\circ + x = 90^\circ + (k \times 360^\circ)$

$k = 0 \rightarrow 2x = 70^\circ \rightarrow \boxed{x = 35^\circ}$

$k = 1 \rightarrow 2x + 20 = 450^\circ \rightarrow 2x = 430^\circ \rightarrow \boxed{x = 215^\circ}$

$k = 2 \rightarrow 2x + 20 = 810^\circ \rightarrow 2x = 790^\circ \rightarrow x = 395^\circ \rightarrow x = 35^\circ$ تکراری

۱۱۱

زاویه x / نسبت	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	330°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

۱۱۲

$$\sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos a = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan(\frac{7\pi}{2} - a) = \tan(3\pi + \frac{\pi}{2} - a) = \tan(\frac{\pi}{2} - a) = \cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

۱۱۳

الف) $\begin{cases} y_1 = \sin(4\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x \\ y_2 = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x \end{cases} \rightarrow y_1 \neq y_2 \rightarrow$ دو تابع بر یکدیگر منطبق نیستند

ب) $\begin{cases} y_1 = \sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x \\ y_2 = \cos(\pi - x) = -\cos x \end{cases} \rightarrow y_1 = y_2 \rightarrow$ دو تابع بر یکدیگر منطبق هستند

پ) $\begin{cases} y_۱ = \sin(\pi - x) = \sin x \\ y_۲ = \cos(\frac{۳\pi}{۲} - x) = -\sin x \end{cases} \to y_۱ \neq y_۲ \to$ دو تابع بر یکدیگر منطبق نیستند

۱۱۴

الف) $-۱ \leq \sin x \leq ۱ \xrightarrow{\times ۳} -۳ \leq ۳\sin x \leq ۳ \xrightarrow{-۱} -۴ \leq ۳\sin x - ۱ \leq ۲$

$\to -۴ \leq y \leq ۲ \to R_y = [-۴, ۲]$

ب) $-۱ \leq \cos x \leq ۱ \xrightarrow{\times(-۴)} ۴ \geq -۴\cos x \geq -۴ \xrightarrow{+۲} ۶ \geq ۲ - ۴\cos x \geq -۲$

$\to ۶ \geq y \geq -۲ \to R_f = [-۲, ۶]$

پ) $-۱ \leq \sin x \leq ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۰ \leq \sin^۲ x \leq ۱ \xrightarrow{\times ۳} ۰ \leq ۳\sin^۲ x \leq ۳$

$\xrightarrow{-۲} -۲ \leq ۳\sin^۲ x - ۲ \leq ۱ \to -۲ \leq y \leq ۱ \to R_h = [-۲, ۱]$

ت) $-۱ \leq \cos(x - \frac{\pi}{۳}) \leq ۱ \xrightarrow{\times(-۲)} ۲ \geq -۲\cos(x - \frac{\pi}{۳}) \geq -۲ \xrightarrow{+۱}$

$۳ \geq ۱ - ۲\cos(x - \frac{\pi}{۳}) \geq -۱ \to ۳ \geq y \geq -۱ \to R_y = [-۱, ۳]$

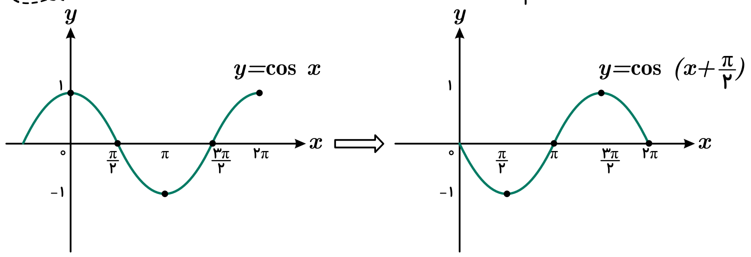
۱۱۵

$-۱ \leq \sin(x + \frac{۲\pi}{۳}) \leq ۱ \xrightarrow{\times(-۲)} ۲ \geq -۲\sin(x + \frac{۲\pi}{۳}) \geq -۲ \xrightarrow{+۳}$

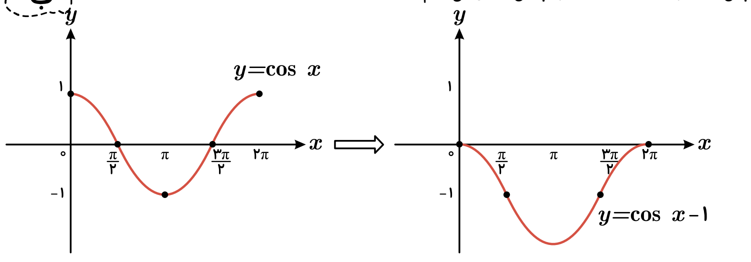
$۵ \geq -۲\sin(x + \frac{۲\pi}{۳}) + ۳ \geq ۱ \to ۵ \geq y \geq ۱$ $\nearrow \boxed{y_{\max} = ۵}$ $\searrow \boxed{y_{\min} = ۱}$

۱۱۶

الف) برای رسم $y = \cos(x + \frac{\pi}{۲})$، ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم سپس آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ به سمت چپ منتقل می‌کنیم:

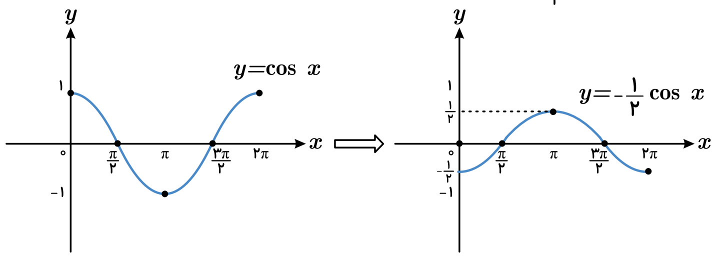


ب) برای رسم $y = \cos x - ۱$، ابتدا $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازهٔ یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.

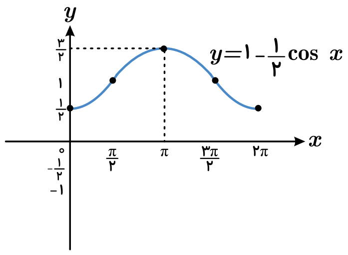


پ)

برای رسم $y = ۱ - \frac{۱}{۲}\cos x$، ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار $y = \frac{-۱}{۲}\cos x$ را رسم می‌کنیم.

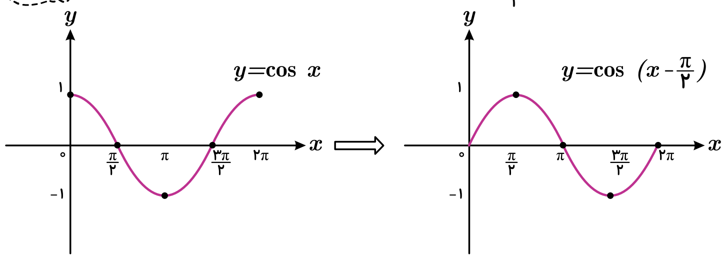


در ادامه نمودار به‌دست آمده را به اندازهٔ یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

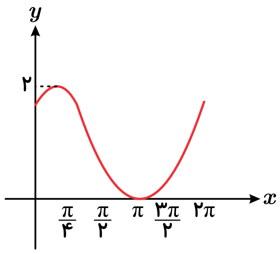


ت

برای رسم $y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) + ۱$، ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ به راست منتقل می‌کنیم.



۱۱۷



۱۱۸

$$\begin{cases} A(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}) \to f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} \to \frac{۱}{۲} = ab^{-\frac{۱}{۲}} - ۱ \to ab^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۲} \\ B(۱, ۱۱) \to f(۱) = ۱۱ \to ۱۱ = ab^{۱} - ۱ \to ab = ۱۲ \end{cases} \div \to b^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱۲}{\frac{۳}{۲}}$$

$$\to b^{\frac{۳}{۲}} = ۸ \to b^{\frac{۳}{۲}} = ۲^{۳} \to b^{\frac{۱}{۲}} = ۲ \to \boxed{b = ۴} \;,\; \boxed{a = ۳}$$

$\rightarrow \boxed{f(x) = ۳ \times ۴^{x} - ۱} \rightarrow f(-۱) = ۳ \times ۴^{-۱} - ۱ = \frac{۳}{۴} - ۱ = -\frac{۱}{۴} \rightarrow \boxed{f(-۱) = -\frac{۱}{۴}}$

۱۱۹

الف) $۸^{x-۱} = \frac{۸^{x}}{۸} = \frac{(۲^{۳})^{x}}{۸} = \frac{(۲^{x})^{۳}}{۸} = \frac{۶^{۳}}{۸} = \frac{۶^{۳}}{۲^{۳}} = (\frac{۶}{۲})^{۳} = ۳^{۳} = ۲۷$

ب) $۴^{x} + ۸^{x} = (۲^{۲})^{x} + (۲^{۳})^{x} = (۲^{x})^{۲} + (۲^{x})^{۳} = ۶^{۲} + ۶^{۳} = ۳۶ + ۲۱۶ = ۲۵۲$

پ) $۱۶^{x-۲} = \frac{۱۶^{x}}{۱۶^{۲}} = \frac{(۲^{۴})^{x}}{(۲^{۴})^{۲}} = \frac{(۲^{x})^{۴}}{(۲^{۲})^{۴}} = \frac{۶^{۴}}{۴^{۴}} = (\frac{۶}{۴})^{۴} = (\frac{۳}{۲})^{۴} = \frac{۸۱}{۱۶}$

ت) $(۰/۲۵)^{۲x} \times ۶۴^{x-۱} = (\frac{۱}{۴})^{۲x} \times \frac{۶۴^{x}}{۶۴} = (۲^{-۲})^{۲x} \times \frac{(۲^{۶})^{x}}{۲^{۶}} = \frac{۲^{-۴x} \times ۲^{۶x}}{۲^{۶}} = \frac{۲^{۲x}}{۲^{۶}}$

$= \frac{(۲^{x})^{۲}}{۲^{۶}} = \frac{۶^{۲}}{۲^{۶}} = \frac{۳۶}{۶۴} = \frac{۹}{۱۶}$

۱۲۰

$g(-۱) = (\frac{۱}{۹})^{-۱} = ۹$

$f(-۱) = g(-۱) \rightarrow ۳^{-a+b} = ۹ \rightarrow ۳^{-a+b} = ۳^{۲} \rightarrow -a + b = ۲ \quad *$

$f(۲) = \frac{۱}{۳} \rightarrow ۳^{۲a+b} = ۳^{-۱} \rightarrow ۲a + b = -۱ \quad **$

$*, ** \rightarrow \begin{cases} -a + b = ۲ \\ ۲a + b = -۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - \cancel{b} = -۲ \\ ۲a + \cancel{b} = -۱ \end{cases} +$

$۳a = -۳ \rightarrow \boxed{a = -۱}, \boxed{b = ۱} \rightarrow \boxed{f(x) = ۳^{-x+۱}}$

$f^{-۱}(۲۷) = A \rightarrow f(A) = ۲۷ \rightarrow ۳^{-A+۱} = ۳^{۳} \rightarrow -A + ۱ = ۳ \rightarrow \boxed{A = -۲} \rightarrow \boxed{f^{-۱}(۲۷) = -۲}$

۱۲۱

الف) $۹^{x} = ۳^{x^{۲} - ۴x} \rightarrow ۳^{۲x} = ۳^{x^{۲} - ۴x} \rightarrow ۲x = x^{۲} - ۴x \rightarrow x^{۲} - ۶x = ۰$

$\rightarrow x(x - ۶) = ۰ \begin{cases} \boxed{x = ۰} \\ x - ۶ = ۰ \rightarrow \boxed{x = ۶} \end{cases}$

ب) $(\frac{۳}{۵})^{x} = \frac{۲۵}{۹} \rightarrow (\frac{۳}{۵})^{x} = (\frac{۵}{۳})^{۲} \rightarrow (\frac{۳}{۵})^{x} = (\frac{۳}{۵})^{-۲} \rightarrow \boxed{x = -۲}$

پ) $۳^{۵x+۲} = ۲۷\sqrt{۳} \rightarrow ۳^{۵x+۲} = ۳^{۳} \times ۳^{\frac{۱}{۲}} \rightarrow ۳^{۵x+۲} = ۳^{\frac{۷}{۲}} \rightarrow ۵x + ۲ = \frac{۷}{۲}$

$\rightarrow ۵x = \frac{۷}{۲} - ۲ \rightarrow ۵x = \frac{۳}{۲} \rightarrow \boxed{x = \frac{۳}{۱۰}}$

ت) $(\frac{۳}{۲})^{۲x+۳} = (\frac{۱۶}{۸۱})^{x} \rightarrow (\frac{۳}{۲})^{۲x+۳} = (\frac{۲^{۴}}{۳^{۴}})^{x} \rightarrow (\frac{۳}{۲})^{۲x+۳} = (\frac{۳}{۲})^{-۴x}$

$\rightarrow ۲x + ۳ = -۴x \rightarrow ۲x + ۴x = -۳ \rightarrow ۶x = -۳ \rightarrow \boxed{x = -\frac{۱}{۲}}$

ث) $۲۷^{x} - ۳^{۲x-۵} = ۰ \rightarrow ۲۷^{x} = ۳^{۲x-۵} \rightarrow (۳^{۳})^{x} = ۳^{۲x-۵}$

$\rightarrow ۳^{۳x} = ۳^{۲x-۵} \rightarrow ۳x = ۲x - ۵ \rightarrow ۳x - ۲x = -۵ \rightarrow \boxed{x = -۵}$

ج) $۲^{x} + ۲^{x+۲} = ۴۰ \rightarrow ۲^{x} + ۲^{۲} \times ۲^{x} = ۴۰ \rightarrow ۲^{x} + ۴ \times ۲^{x} = ۴۰ \rightarrow ۵ \times ۲^{x} = ۴۰$

$\rightarrow ۲^{x} = ۸ \rightarrow ۲^{x} = ۲^{۳} \rightarrow \boxed{x = ۳}$

ح) $۳^{x+۱} - ۳^{x-۱} = ۷۲ \rightarrow ۳ \times ۳^{x} - \frac{۳^{x}}{۳} = ۷۲ \rightarrow \frac{۹ \times ۳^{x} - ۳^{x}}{۳} = ۷۲$

$۸ \times ۳^{x} = ۷۲ \times ۳ \rightarrow ۳^{x} = ۲۷ \rightarrow ۳^{x} = ۳^{۳} \rightarrow \boxed{x = ۳}$

خ) $۵^{۲x+۳y} = ۷^{x+y+۱} \to \begin{cases} ۲x+۳y=۰ \\ x+y+۱=۰ \end{cases} \to \begin{cases} \cancel{۲x}+۳y=۰ \\ -\cancel{۲x}-۲y=۲ \end{cases} +$

$\boxed{y=۲} \to \boxed{x=-۳}$

۱۴۲

الف) $y=\log_x(۲x+۶)$

$\left.\begin{cases} ۲x+۶>۰ \to ۲x>-۶ \to x>-۳ \\ x>۰ \\ x\neq ۱ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(۰,+\infty)-\{۱\}$

ب) $f(x)=\log_{(x-۱)}(۱۲-۲x)$

$\left.\begin{cases} ۱۲-۲x>۰ \to ۱۲>۲x \to ۶>x \\ x-۱>۰ \to x>۱ \\ x-۱\neq ۱ \to x\neq ۲ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(۱,۶)-\{۲\}$

پ) $f(x)=\log_{(x-۲)}(۲۵-x^۲)$

$\left.\begin{cases} ۲۵-x^۲>۰ \to -۵<x<۵ \\ x-۲>۰ \to x>۲ \\ x-۲\neq ۱ \to x\neq ۳ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(۲,۵)-\{۳\}$

ت) $f(x)=\log_{(x-۵)}(x^۲-۱۶)$

$\left.\begin{cases} x^۲-۱۶>۰ \to x<-۴ \quad \text{یا} \quad ۴<x \\ x-۵>۰ \to ۵<x \\ x-۵\neq ۱ \to x\neq ۶ \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=(۵,+\infty)-\{۶\}$

۱۴۳

$f(۹)=۱/۵ \to \log_a(۹-۱)=۱/۵ \to ۸=a^{\frac{۳}{۲}} \to ۲^۳=(a^{\frac{۱}{۲}})^۳ \to ۲=a^{\frac{۱}{۲}} \to \boxed{a=۴}$

$\to y=\log_۴(x-۱) \to ۴^y=x-۱ \to x=۴^y+۱ \to f^{-۱}(y)=۴^y+۱ \to \boxed{f^{-۱}(x)=۴^x+۱}$

۱۴۴

الف) $\log ۵=\log(\frac{۱۰}{۲})=\log ۱۰-\log ۲=۱-a$

ب) $\log ۱۸=\log(۳^۲\times ۲)=\log ۳^۲+\log ۲=۲\log ۳+\log ۲=۲b+a$

پ) $\log ۱/۵=\log(\frac{۳}{۲})=\log ۳-\log ۲=b-a$

ت) $\log ۷۵=\log(۳\times ۵^۲)=\log ۳+\log ۵^۲=\log ۳+۲\log ۵=۳+۲(۱-a)=۵-۲a$

ث) $\log ۴۲=\log(۲\times ۳\times ۷)=\log ۲+\log ۳+\log ۷=a+b+c$

ج) $\log\frac{۹۸}{۴۵}=\log(\frac{۷^۲\times ۲}{۳^۲\times ۵})=\log ۷^۲+\log ۲-\log ۳^۲-\log ۵$

$=۲\log ۷+\log ۲-۲\log ۳-\log ۵=۲c+a-۲b-(۱-a)=۲a-۲b+۲c-۱$

چ) $\log\sqrt{۲۱۰}=\log\sqrt{۳\times ۷\times ۱۰}=\log(۳\times ۷\times ۱۰)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log(۳\times ۷\times ۱۰)$

$=\frac{۱}{۲}(\log ۳+\log ۷+\log ۱۰)=\frac{۱}{۲}(b+c+۱)$

ح) $\log\frac{\sqrt[۳]{۳۵}}{۱۲}=\log(\frac{\sqrt[۳]{۵\times ۷}}{۲^۲\times ۳})=\log(۵\times ۷)^{\frac{۱}{۳}}-\log(۲^۲\times ۳)$

$=\log(۵^{\frac{۱}{۳}}\times ۷^{\frac{۱}{۳}})-\log(۲^۲\times ۳)=\log ۵^{\frac{۱}{۳}}+\log ۷^{\frac{۱}{۳}}-\log ۲^۲-\log ۳$

$$= \frac{۱}{۳}\log ۵ + \frac{۱}{۳}\log ۷ - ۲\log ۲ - \log ۳ = \frac{۱}{۳}(۱ - a) + \frac{۱}{۳}c - ۲a - b = -\frac{۷}{۳}a - b + \frac{۱}{۳}c + \frac{۱}{۳}$$

خ) $\log(۱۳۵\sqrt[۴]{۵۶}) = \log(۳^{۳} \times ۵ \times \sqrt[۴]{۲^{۳} \times ۷}) = \log(۳^{۳} \times ۵ \times ۲^{\frac{۳}{۴}} \times ۷^{\frac{۱}{۴}})$

$$= \log ۳^{۳} + \log ۵ + \log ۲^{\frac{۳}{۴}} + \log ۷^{\frac{۱}{۴}} = ۳\log ۳ + \log ۵ + \frac{۳}{۴}\log ۲ + \frac{۱}{۴}\log ۷$$

$$= ۳b + (۱ - a) + \frac{۳}{۴}a + \frac{۱}{۴}c = -\frac{۱}{۴}a + ۳b + \frac{۱}{۴}c + ۱$$

۱۲۵

الف) $\log_{۵} ۱۵۰ - \log_{۵} ۶ = \log_{۵}\frac{۱۵۰}{۶} = \log_{۵} ۲۵ = \log_{۵} ۵^{۲} = ۲\log_{۵} ۵ = ۲$

ب) $\log_{۷}\sqrt[۴]{۳۴۳} = \log_{۷}\sqrt[۴]{۷^{۳}} = \log_{۷} ۷^{\frac{۳}{۴}} = \frac{۳}{۴}\log_{۷} ۷ = \frac{۳}{۴}$

پ) $\log_{۵} ۶۲۵ + \log_{۲}\frac{۱}{۶۴} + \log_{۱۰} ۰٫۰۰۱ = \log_{۵} ۵^{۴} + \log_{۲} ۲^{-۶} + \log_{۱۰} ۱۰^{-۳}$

$$= ۴\log_{۵} ۵ - ۶\log_{۲} ۲ - ۳\log_{۱۰} ۱۰ = ۴ - ۶ - ۳ = -۵$$

ت) $۵^{(\log_{۲۵} ۳ - ۲)} = ۵^{\log_{۲۵} ۳} \div ۵^{۲} = \frac{۵^{\log_{۵^{۲}} ۳}}{۵^{۲}} = \frac{۵^{\frac{۱}{۲}\log_{۵} ۳}}{۵^{۲}} = \frac{۵^{\log_{۵} ۳^{\frac{۱}{۲}}}}{۵^{۲}} = \frac{۵^{\log_{۵}\sqrt{۳}}}{۵^{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲۵}$

ث) $۶\log_{۹}\sqrt[۳]{۸۱} - ۳\log_{۲}\frac{۱}{۸} + ۴\log_{۵}\frac{۱}{۱۲۵} = ۶\log_{۳^{۲}} ۳^{\frac{۴}{۳}} - ۳\log_{۲} ۲^{-۳} + ۴\log_{۵} ۵^{-۳}$

$$= ۶\left(\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۲}{۱}}\right)\log_{۳} ۳ - ۳(-۳\log_{۲} ۲) + ۴(-۳\log_{۵} ۵) = ۶\left(\frac{۴}{۶}\right) - ۳(-۳) + ۴(-۳) = ۴ + ۹ - ۱۲ = ۱$$

ج) $\log_{۲۷} ۲۴۳ = \log_{۳^{۳}} ۳^{۵} = \frac{۵}{۳}\log_{۳} ۳ = \frac{۵}{۳}$

چ) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۲۷ - ۳\log_{۷}\frac{۱}{۴۹} + ۲\log ۰٫۰۰۰۱ = \log_{۳^{-۱}} ۳^{۳} - ۳\log_{۷} ۷^{-۲} + ۲\log_{۱۰} ۱۰^{-۴}$

$$= \left(\frac{۳}{-۱}\right)\log_{۳} ۳ - ۳(-۲\log_{۷} ۷) + ۲(-۴\log_{۱۰} ۱۰) = -۳ + ۶ - ۸ = -۵$$

ح) $\log_{۵}(\sqrt{۱۲۵})^{۳} = \log_{۵}(\sqrt{۵^{۳}})^{۳} = \log_{۵}(۵^{\frac{۳}{۲}})^{۳} = \log_{۵} ۵^{\frac{۹}{۲}} = \frac{۹}{۲}\log_{۵} ۵ = \frac{۹}{۲}$

۱۴۶

$$\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱ + \sqrt{۵}) = \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۱ + \sqrt{۵})^{۲}$$
$$= \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۱ + ۲\sqrt{۵} + ۵) = \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۶ + ۲\sqrt{۵})$$
$$= \log((۶ - ۲\sqrt{۵})(۶ + ۲\sqrt{۵})) = \log(۳۶ - ۲۰) = \log ۱۶ = \log ۲^{۴} = ۴\log ۲ = ۴k$$

۱۴۷

الف) $\log ۳۵ + ۲\log ۲\sqrt{۷} - \log ۲۰۰ - ۲\log ۷ = \log ۳۵ + \log(۲\sqrt{۷})^{۲} - \log ۲۰۰ - \log ۷^{۲}$

$$= \log ۳۵ + \log ۲۸ - \log ۲۰۰ - \log ۴۹ = \log\frac{۳۵ \times ۲۸}{۲۰۰ \times ۴۹} = \log\frac{۱}{۱۰} = \log ۱۰^{-۱} = -۱\log ۱۰ = -۱$$

ب) $\log_{۵} ۲۰۰ - \log_{۵} ۴۰ = \log_{۵}\left(\frac{۲۰۰}{۴۰}\right) = \log_{۵} ۵ = ۱$

پ) $\log_{۶} ۱۲\sqrt{۳} + \log_{۶} ۳\sqrt{۱۲} = \log_{۶}(۱۲\sqrt{۳} \times ۳\sqrt{۱۲}) = \log_{۶}(۳۶ \times \sqrt{۳۶})$

$$= \log_{۶}(۳۶ \times ۶) = \log_{۶} ۶^{۳} = ۳\log_{۶} ۶ = ۳$$

ت) $۷^{(۲\log_{۷} ۳ + ۳\log_{۷} ۲)} = ۷^{(\log_{۷} ۳^{۲} + \log_{۷} ۲^{۳})} = ۷^{(\log_{۷} ۹ + \log_{۷} ۸)} = ۷^{(\log_{۷} ۷۲)} = ۷۲$

ث) $\sqrt{10^{(\log 32+\log 8)}} = (10^{\frac{1}{2}})^{(\log 256)} = 10^{(\frac{1}{2}\log 256)} = 10^{\log 256^{\frac{1}{2}}} = 10^{\log\sqrt{256}} = 10^{\log 16} = 16$

ج) $8^{(\log_2 \sqrt[3]{20} - \log_2 3)} = (2^3)^{(\log_2 \frac{\sqrt[3]{20}}{3})} = 2^{3\log_2 \frac{\sqrt[3]{20}}{3}} = 2^{\log_2 (\frac{\sqrt[3]{20}}{3})^3} = 2^{\log_2 \frac{20}{27}} = \frac{20}{27}$

چ) $\log 20 + 6\log\sqrt[6]{5} - \log_4 \sqrt[3]{32} = \log 20 + \log(\sqrt[6]{5})^6 - \log_{2^2} 2^{\frac{5}{3}}$

$= \log 20 + \log 5 - (\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{1}})\log_2 2 = \log 100 - \frac{5}{6}\log_2 2 = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$

۱۴۸

$\log 3 + \log\sqrt[4]{3} = \log(81)^k \to \log 3 + \log 3^{\frac{1}{4}} = \log(3^4)^k$

$\to \log 3^{\frac{5}{4}} = \log 3^{4k} \to \frac{5}{4} = 4k \to \boxed{\frac{5}{k} = 16}$

$\log_2 \frac{5}{k} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4 \to \boxed{\log_2\frac{5}{k} = 4}$

۱۴۹

$\log_{\sqrt{3}} a = \frac{4}{3} \to a = (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \to a^3 = ((\sqrt{3})^{\frac{4}{3}})^3 \to a^3 = \sqrt{3^4}$

$\to \boxed{a^3 = 9} \to \log_8(a^3+7) = \log_8(9+7) = \log_8 16$

$= \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}\log_2 2 = \frac{4}{3} \to \boxed{\log_8(a^3+7) = \frac{4}{3}}$

۱۵۰

$\log_8 2\sqrt[3]{0/25} = \log_{2^3} 2(\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}} = \log_{2^3} 2(2^{-2})^{\frac{1}{3}} = \log_{2^3} 2(2^{-\frac{2}{3}}) = \log_{2^3} 2^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{1}}\log_2 2 = \frac{1}{9} \to \boxed{A = \frac{1}{9}}$

$\to \log_4(\frac{1}{A} - 1) = \log_4(\frac{1}{\frac{1}{9}} - 1) = \log_4(9-1) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3$

$= \frac{3}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2} \to \boxed{\log_4(\frac{1}{A}-1) = \frac{3}{2}}$

۱۵۱

$\log_2 \sqrt[5]{e^2} = A \to \sqrt[5]{e^2} = 2^A \to e^{\frac{2}{5}} = 2^A \to (e^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}} = (2^A)^{\frac{5}{2}}$

$\to \boxed{e = 2^{\frac{5A}{2}}} \to \sqrt{e} = (2^{\frac{5A}{2}})^{\frac{1}{2}} \to \sqrt{e} = 2^{\frac{5A}{4}}$

$\to \log_{\sqrt{e}} 32 = \log_{2^{\frac{5A}{4}}} 2^5 = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{5A}{4}}\log_2 2 = \frac{4}{A}\log_2 2 = \frac{4}{A} \to \boxed{\log_{\sqrt{e}}32 = \frac{4}{A}}$

۱۵۲

الف) $\log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \cdots + \log\frac{n}{n+1} = \log(\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n}}\times\frac{\cancel{n}}{n+1})$

$= \log(\frac{1}{n+1}) = \log(n+1)^{-1} = -\log(n+1)$

ب) $5^{(2\log_5 2 + 3\log_5 3)} = 5^{(\log_5 2^2 + \log_5 3^3)} = 5^{(\log_5 4 + \log_5 27)} = 5^{\log_5 108} = 108$

۱۵۳

$\log_y \sqrt{۲} = \frac{۱}{۴} \to \log_{\sqrt{۲}} y = ۴ \to y = (\sqrt{۲})^۴ \to \boxed{y = ۴}$

$\log_x \sqrt[۳]{۱۶} = \frac{۴}{۳} \to \log_{\sqrt[۳]{۱۶}} x = \frac{۳}{۴} \to x = (۱۶^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۴}} \to x = ۱۶^{\frac{۱}{۴}} \to \boxed{x = ۲}$

$\to \log_{x^۳} y^۲ = \log_{۲^۳} ۴^۲ = \log_{۲^۳} ۲^۴ = \frac{۴}{۳}\log_۲ ۲ = \frac{۴}{۳} \to \boxed{\log_{x^۳} y^۲ = \frac{۴}{۳}}$

۱۳۴

الف

$\log_c a = x \to a = c^x \ , \ \log_c b = y \to b = c^y \ , \ \log_c d = z \to d = c^z$

$\to abd = c^x c^y c^z \to abd = c^{x+y+z} \to \log_c abd = x + y + z$

$\to \log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$

ب

$\log_c a = x \to a = c^x \ , \ \log_c b = y \to b = c^y$

$\log_b a = \log_{c^y} c^x = \frac{x}{y}\log_c c = \frac{x}{y} \to \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

پ

$\log_a b = x \to b = a^x \to b = a^{\log_a b}$

ت

$\log_b a = x \to a = b^x \to \log_a b = \log_{b^x} b = \frac{۱}{x}\log_b b = \frac{۱}{x}$

$\to \log_b a \times \log_a b = x \cdot \frac{۱}{x} = ۱$

۱۳۵

الف) $\log_۷ \sqrt[۵]{۴۹} = \log_۷ ۷^{\frac{۲}{۵}} = \frac{۲}{۵}\log_۷ ۷ = \frac{۲}{۵}$

ب) $\log_۳ ۲۷^{\frac{۱}{۲}} = \log_۳ ۳^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲}\log_۳ ۳ = \frac{۳}{۲}$

پ) $-\log_۵ ۱۲۵ = -\log_۵ ۵^۳ = -۳\log_۵ ۵ = -۳$

ت) $۳\log_{۱۰} \sqrt{۱۰۰۰} = ۳\log_{۱۰} ۱۰^{\frac{۳}{۲}} = ۳ \times \frac{۳}{۲}\log_{۱۰} ۱۰ = \frac{۹}{۲}$

۱۳۶

الف) $\log_۵ (x + ۶) = \log_۵ (۲x - ۸) \to x + ۶ = ۲x - ۸ \to ۶ + ۸ = ۲x - x \to \boxed{x = ۱۴}$

ب) $\log_۵ (x + ۶) + \log_۵ (x + ۲) = ۱ \to \log_۵ ((x + ۶)(x + ۲)) = \log_۵ ۵$

$\to x^۲ + ۸x + ۱۲ = ۵ \to x^۲ + ۸x + ۷ = ۰ \to (x + ۱)(x + ۷) = ۰ \begin{cases} x + ۱ = ۰ \to \boxed{x = -۱} \\ x + ۷ = ۰ \to x = -۷ \quad \text{غ} \end{cases}$

پ) $\log_۴ (x + ۲) = \log_۴ ۸ \to x + ۲ = ۸ \to \boxed{x = ۶}$

ت) $\log(x + ۱) - \log(x - ۳) = ۳ \to \log(\frac{x + ۱}{x - ۳}) = \log ۱۰^۳ \to \frac{x + ۱}{x - ۳} = ۱۰۰۰$

$\to x + ۱ = ۱۰۰۰x - ۳۰۰۰ \to ۱ + ۳۰۰۰ = ۱۰۰۰x - x \to ۳۰۰۱ = ۹۹۹x \to \boxed{x = \frac{۳۰۰۱}{۹۹۹}}$

ث) $\log_۲ (۲x + ۱) = ۳ \to ۲x + ۱ = ۲^۳ \to ۲x + ۱ = ۸ \to ۲x = ۷ \to \boxed{x = \frac{۷}{۲}}$

ج) $\log(۲x) - \log(x - ۳) = ۱ \to \log \frac{۲x}{x - ۳} = \log ۱۰$

$\to \frac{۲x}{x - ۳} = ۱۰ \to ۲x = ۱۰x - ۳۰ \to ۳۰ = ۱۰x - ۲x \to ۳۰ = ۸x \to x = \frac{۳۰}{۸} \to \boxed{x = ۳/۷۵}$

چ) $\log_{\sqrt{2}} x = \log_2 64 \to \log_{\sqrt{2}} x = \log_2 2^6 \to \log_{\sqrt{2}} x = 6\log_2 2$

$\to \log_{\sqrt{2}} x = 6 \to x = (\sqrt{2})^6 \to x = (2^{\frac{1}{2}})^6 \to x = 2^3 \to \boxed{x = 8}$

ح) $\log_7 (x-2) = \frac{1}{2} \to x - 2 = 7^{\frac{1}{2}} \to x - 2 = \sqrt{7} \to \boxed{x = \sqrt{7} + 2}$

۱۳۷

الف) $\log_9 (x^2 - 24) = \log_9 5x \to x^2 - 24 = 5x \to x^2 - 5x - 24 = 0$

$\to (x-8)(x+3) = 0 \begin{cases} x - 8 = 0 \to \boxed{x = 8} \\ x + 3 = 0 \to x = -3 \quad \text{غ} \end{cases}$

ب) $\log_3 (x^2 - 1) = 1 + \log_3 (x+9) \to \log_3 (x^2 - 1) = \log_3 3 + \log_3 (x+9)$

$\to \log_3 (x^2 - 1) = \log_3 (3x + 27) \to x^2 - 1 = 3x + 27 \to x^2 - 3x - 28 = 0$

$\to (x-7)(x+4) = 0 \begin{cases} x - 7 = 0 \to \boxed{x = 7} \\ x + 4 = 0 \to \boxed{x = -4} \end{cases}$

پ) $\log_x (x^3 - 2x) = 2 \to x^3 - 2x = x^2 \to x^3 - x^2 - 2x = 0$

$\to x(x^2 - x - 2) = 0 \to x(x-2)(x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \quad \text{غ} \\ x - 2 = 0 \to \boxed{x = 2} \\ x + 1 = 0 \to x = -1 \quad \text{غ} \end{cases}$

ت) $\begin{cases} \log x = \log 2 + \log y \\ 2^x \times 8^y = 4 \end{cases} \to \begin{cases} \log x = \log 2y \\ 2^x \times (2^3)^y = 2^2 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} 2y + 3y = 2 \to 5y = 2 \to \boxed{y = \frac{2}{5}} \quad , \quad \boxed{x = \frac{4}{5}}$

ث) $\begin{cases} \log y = 2\log 3 + \log x \\ 2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} \log y = \log 3^2 + \log x \\ 2^{x-7} \times (2^2)^{x+y} = 2^0 \end{cases} \to \begin{cases} \log y = \log(9x) \\ 2^{x-7} \times 2^{2x+2y} = 2^0 \end{cases}$

$\to \begin{cases} y = 9x \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 3x + 2(9x) = 7 \to \boxed{x = \frac{1}{3}} \quad , \quad \boxed{y = 3}$

۱۳۸

الف) $\log_x (x^2 + x) = \log_x 6 \to x^2 + x = 6 \to x^2 + x - 6 = 0$

$\to (x+3)(x-2) = 0 \begin{cases} x + 3 = 0 \to x = -3 \quad \text{غ} \\ x - 2 = 0 \to \boxed{x = 2} \end{cases}$

ب) $\log_9 x^2 + 7x + 7 = 0 \to x^2 + 7x + 7 = 9^0 \to x^2 + 7x + 7 = 1$

$\to x^2 + 7x + 6 = 0 \to (x+6)(x+1) = 0 \begin{cases} x + 6 = 0 \to \boxed{x = -6} \\ x + 1 = 0 \to \boxed{x = -1} \end{cases}$

پ) $\log_x (x^3 + 3x - 6) = 3 \to x^3 + 3x - 6 = x^3 \to 3x - 6 = 0 \to 3x = 6 \to \boxed{x = 2}$

ت) $\log_8 (x+1)^3 + 2\log_4 x = 1 \to \log_{2^3} (x+1)^3 + \log_{2^2} x^2 = 1$

$\to \frac{3}{3}\log_2 (x+1) + \frac{2}{2}\log_2 x = \log_2 2 \to \log_2 (x+1)x = \log_2 2 \to x(x+1) = 2$

$\to x^2 + x - 2 = 0 \to (x+2)(x-1) = 0 \begin{cases} x - 1 = 0 \to \boxed{x = 1} \\ x + 2 = 0 \to x = -2 \quad \text{غ} \end{cases}$

ث) $\log_{12} (x-2) + \log_{12} (x+2) = 1 \to \log_{12} ((x-2)(x+2)) = \log_{12} 12$

$$\rightarrow \log_{۱۲}(x^{۲}-۴)=\log_{۱۲}۱۲ \rightarrow x^{۲}-۴=۱۲ \rightarrow x^{۲}=۱۶ \begin{cases} \boxed{x=۴} \\ x=-۴ \quad \text{غ} \end{cases}$$

ج) $\log ۳x-\log ۴=\log(۷-x) \rightarrow \log f(\frac{۳x}{۴})=\log(۷-x)$

$$\rightarrow \frac{۳x}{۴}=۷-x \rightarrow ۳x=۴(۷-x) \rightarrow ۳x=۲۸-۴x \rightarrow ۷x=۲۸ \rightarrow \boxed{x=۴}$$

چ) $\log_{۳}\sqrt{۳}+\log_{۵}\sqrt{۵}=\frac{۱}{۲}\log_{۲}x \rightarrow \log_{۳}۳^{\frac{۱}{۲}}+\log_{۵}۵^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log_{۲}x \rightarrow \frac{۱}{۲}\log_{۳}۳+\frac{۱}{۲}\log_{۵}۵=\frac{۱}{۲}\log_{۲}x$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\log_{۲}x \rightarrow ۱=\frac{۱}{۲}\log_{۲}x \rightarrow \log_{۲}x=۲ \rightarrow x=۲^{۲} \rightarrow \boxed{x=۴}$$

۱۳۹

الف) $\log_{۲}x+\log_{۲}(x-۲)=۳ \rightarrow \log_{۲}(x(x-۲))=۳\log_{۲}۲$

$$\rightarrow \log_{۲}(x^{۲}-۲x)=\log_{۲}۲^{۳} \rightarrow x^{۲}-۲x=۸ \rightarrow x^{۲}-۲x-۸=۰$$

$$\rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \begin{cases} x-۴=۰ \rightarrow \boxed{x=۴} \\ x+۲=۰ \rightarrow x=-۲ \quad \text{غ} \end{cases}$$

ب) $۲\log\sqrt{۲x+۳}+\log(۲x-۳)-\frac{۱}{۲}\log ۴۹=۰ \rightarrow \log(\sqrt{۲x+۳})^{۲}+\log(۲x-۳)-\log ۴۹^{\frac{۱}{۲}}=۰$

$$\rightarrow \log(۲x+۳)+\log(۲x-۳)=\log ۷ \rightarrow \log((۲x+۳)(۲x-۳))=\log ۷$$

$$\rightarrow \log(۴x^{۲}-۹)=\log ۷ \rightarrow ۴x^{۲}-۹=۷ \rightarrow ۴x^{۲}-۱۶ \rightarrow x^{۲}=۴ \begin{cases} \boxed{x=۲} \\ x=-۲ \quad \text{غ} \end{cases}$$

پ) $\begin{cases} ۱+\log\sqrt{x+۱}=\log y \\ ۴\sqrt{۲}=۴^{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log ۱۰+\log\sqrt{x+۱}=\log y \\ ۲^{۲}\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=۲^{۲x} \end{cases}$

$$\begin{cases} \log(۱۰\sqrt{x+۱})=\log y \rightarrow ۱۰\sqrt{\frac{۵}{۴}+۱}=y \rightarrow ۱۰\sqrt{\frac{۹}{۴}}=y \rightarrow y=۱۰\times\frac{۳}{۲} \rightarrow \boxed{y=۱۵} \\ ۲^{\frac{۵}{۲}}=۲^{۲x} \rightarrow \frac{۵}{۲}=۲x \rightarrow \boxed{x=\frac{۵}{۴}} \end{cases}$$

۱۴۰

$$\log_{۲}(۵x+۱)+\log_{۲}x=۲ \rightarrow \log_{۲}(x(۵x+۱))=\log_{۲}۴ \rightarrow ۵x^{۲}+x=۴$$

$$\rightarrow ۵x^{۲}+x-۴=۰ \rightarrow (۵x-۴)(x+۱)=۰ \begin{cases} ۵x-۴=۰ \rightarrow \boxed{x=\frac{۴}{۵}} \\ x+۱=۰ \rightarrow x=-۱ \quad \text{غ} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{۴}{x}=\frac{۴}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۲۰}{۴}=۵ \rightarrow \boxed{\frac{۴}{x}=۵}$$

۱۴۱

$$\log_{۳}(۲x^{۲}+۱)-\log_{۳}(x+۲)=۱ \rightarrow \log_{۳}\frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}=\log_{۳}۳ \rightarrow \frac{۲x^{۲}+۱}{x+۲}=۳$$

$$\rightarrow ۲x^{۲}+۱=۳x+۶ \rightarrow ۲x^{۲}-۳x-۵=۰ \rightarrow (x+۱)(۲x-۵)=۰ \begin{cases} x+۱=۰ \rightarrow \boxed{x=-۱} \\ ۲x-۵=۰ \rightarrow \boxed{x=\frac{۵}{۲}} \end{cases}$$

$$x=-۱ \rightarrow \log_{۸}(۲x-۱)=\log_{۸}(۲(-۱)-۱)=\log_{۸}(-۳) \quad \text{غ}$$

$$x=\frac{۵}{۲} \rightarrow \log_{۸}(۲x-۱)=\log_{۸}(۲(\frac{۵}{۲})-۱)=\log_{۸}۴=\log_{۲^{۳}}۲^{۲}=\frac{۲}{۳}\log_{۲}۲ \rightarrow \boxed{\log_{۸}(۲x-۱)=\frac{۲}{۳}}$$

۱۴۲

$$\log(x^۲-x+۱)+\log(x+۱)=۱\to\log((x^۲-x+۱)(x+۱))=\log ۱۰$$

$$\to\log(x^۳+۱)=\log ۱۰\to x^۳+۱=۱۰\to x^۳=۹\to\boxed{x=\sqrt[۳]{۹}}$$

$$\to\log_۳ x=\log_۳\sqrt[۳]{۹}=\log_۳(۳^۲)^{\frac{۱}{۳}}=\log_۳ ۳^{\frac{۲}{۳}}=\frac{۲}{۳}\log_۳ ۳=\frac{۲}{۳}\to\boxed{\log_۳ x=\frac{۲}{۳}}$$

۱۴۳

$$\begin{cases}\log_۳ x+\log_۳ y=۲\\ x^۲+y^۲=۴۶\end{cases}\to\begin{cases}\log_۳ xy=۲\\ x^۲+y^۲=۴۶\end{cases}\to\begin{cases}xy=۳^۲\\ x^۲+y^۲=۴۶\end{cases}\to\begin{cases}xy=۹\\ x^۲+y^۲=۴۶\end{cases}$$

$$\to(x+y)^۲=x^۲+y^۲+۲xy\to(x+y)^۲=۴۶+۲(۹)\to(x+y)^۲=۶۴$$

$$\begin{cases}\boxed{x+y=۸}\\ x+y=-۸\quad غ\end{cases}\to\log_۴(x+y)=\log_۴ ۸=\log_{۲^۲} ۲^۳=\frac{۳}{۲}\log_۲ ۲=\frac{۳}{۲}\to\boxed{\log_۴(x+y)=\frac{۳}{۲}}$$

۱۴۴

الف

$$\log_۳(p^۲-۲)=\log_۳ p\to p^۲-۲=p\to p^۲-p-۲=۰$$

$$\to(p-۲)(p+۱)=۰\to\begin{cases}p-۲=۰\to\boxed{p=۲}\\ p+۱=۰\to p=-۱\quad غ\end{cases}$$

ب

$$\log_۵(x+۱)+\log_۵(x-۱)=۱$$

$$\to\log_۵((x+۱)(x-۱))=\log_۵ ۵\to\log_۵(x^۲-۱)=\log_۵ ۵$$

$$\to x^۲-۱=۵\to x^۲=۶\to\begin{cases}\boxed{x=\sqrt{۶}}\\ x=-\sqrt{۶}\quad غ\end{cases}$$

پ

$$۳\log_۴ a-\log_۴ ۵=\log_۴ ۲۵$$

$$\to\log_۴ a^۳=\log_۴ ۲۵+\log_۴ ۵\to\log_۴ a^۳=\log_۴(۲۵\times ۵)$$

$$\to a^۳=۱۲۵\to a^۳=۵^۳\to\boxed{a=۵}$$

ت

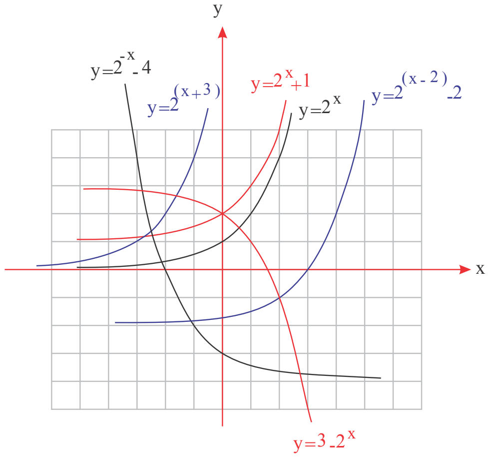
$$\log_{\frac{۱}{۱۰}}(x^۲-۲۱)=-۲\to x^۲-۲۱=(\frac{۱}{۱۰})^{-۲}\to x^۲-۲۱=۱۰^۲$$

$$\to x^۲-۲۱=۱۰۰\to x^۲=۱۲۱\to\begin{cases}\boxed{x=۱۱}\\ \boxed{x=-۱۱}\end{cases}$$

۱۴۵

$$\frac{۲}{۳}\log ۱۲=\frac{۲}{۳}(\log ۳+\log ۴)=\frac{۲}{۳}(۰/۵+۲\log ۲)=\frac{۱۱}{۱۵}$$

۱۴۶



الف) $y = ۲^{x} \to D = \mathbb{R}, R = (۰, +\infty)$

ب) $y = ۲^{x} + ۱ \to D = \mathbb{R}, R = (۱, +\infty)$

پ) $y = ۲^{(x+۳)} \to D = \mathbb{R}, R = (۰, +\infty)$

ت) $y = ۲^{(x-۲)} - ۲ \to D = \mathbb{R}, R = (-۲, +\infty)$

ث) $y = ۳ - ۲^{x} \to D = \mathbb{R}, R = (-\infty, ۳)$

ج) $y = ۲^{-x} - ۴ \to D = \mathbb{R}, R = (-۴, +\infty)$

۱۴۷

$$\begin{cases}(-۱, ۰)\\(۰, -۴)\end{cases} \to \begin{cases}f(-۱) = ۰\\f(۰) = -۴\end{cases} \to \begin{cases}۲^{-(-۱+b)} + c = ۰\\۲^{-(۰+b)} + c = -۴\end{cases} \to \begin{cases}۲^{۱-b} + c = ۰\\۲^{-b} + c = -۴\end{cases} \to \begin{cases}۲^{۱-b} = -c\\۲^{-b} + ۴ = -c\end{cases}$$

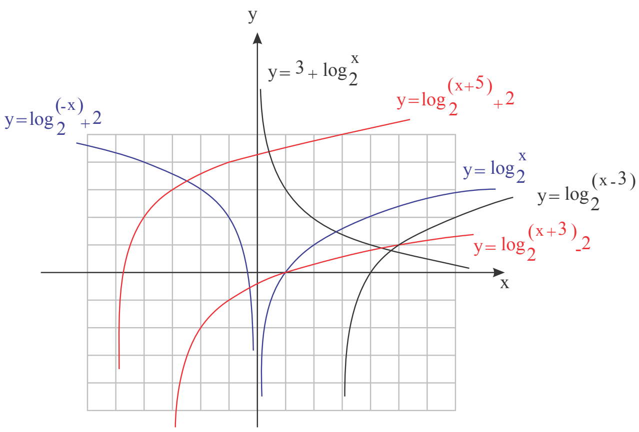
$$\to ۲^{۱-b} = ۲^{-b} + ۴ \to ۲(۲^{-b}) = (۲^{-b}) + ۴$$

$$\to ۲(۲^{-b}) - (۲^{-b}) = ۴ \to ۲^{-b} = ۴ \to ۲^{-b} = ۲^{۲} \to -b = ۲ \to \boxed{b = -۲}$$

$$\to ۲^{۱-(-۲)} = -c \to ۲^{۳} = -c \to ۸ = -c \to \boxed{c = -۸} \to \boxed{f(x) = ۲^{-(x-۲)} - ۸}$$

$$f(-۲) = ۲^{-(-۲-۲)} - ۸ \to f(-۲) = ۲^{۴} - ۸ \to \boxed{f(-۲) = ۸}$$

۱۴۸



الف) $y=\log_{۲} x \to D=(۰,+\infty), R=\mathbb{R}$

ب) $y=\log_{۲}(x-۳) \to D=(۳,+\infty), R=\mathbb{R}$

پ) $y=\log_{۲}(x+۵)+۲ \to D=(-۵,+\infty), R=\mathbb{R}$

ت) $y=\log_{۲}(-x)+۲ \to D=(-\infty,۰), R=\mathbb{R}$

ث) $y=۳-\log_{۲} x+۲ \to D=(۰,+\infty), R=\mathbb{R}$

ج) $y=\log_{۲}(x+۳)-۲ \to D=(-۳,+\infty), R=\mathbb{R}$

۱۴۹

$$\begin{cases}(-۲,۰)\\(۰,-۱)\end{cases} \to \begin{cases}f(-۲)=۰\\f(۰)=-۱\end{cases} \to \begin{cases}-\log_{۲}(-۲+b)+c=۰\\-\log_{۲}(۰+b)+c=-۱\end{cases} \to \begin{cases}c=\log_{۲}(b-۲)\\c=\log_{۲} b-۱\end{cases}$$

$$\to \log_{۲} b-۱=\log_{۲}(b-۲) \to \log_{۲} b-\log_{۲} ۲=\log_{۲}(b-۲)$$

$$\to \log_{۲}\left(\frac{b}{۲}\right)=\log_{۲}(b-۲) \to \frac{b}{۲}=b-۲ \to b=۲b-۴ \to \boxed{b=۴}$$

$$\to c=\log_{۲} ۴-۱=\log_{۲} ۲^{۲}-۱=۲\log_{۲} ۲-۱ \to \boxed{c=۱} \to \boxed{f(x)=-\log_{۲}(x+۴)+۱}$$

$$\to f(۴)=-\log_{۲}(۴+۴)+۱=-\log_{۲} ۸+۱=-۳+۱ \to \boxed{f(۴)=-۲}$$

۱۵۰

$$\begin{cases}(۰,۲) \to f(۰)=۲ \to ۲=a+۲^{-b} \to ۲=a+\frac{۱}{۲^{b}}\\(۱,۳) \to f(۱)=۳ \to ۳=a+۲^{۱-b} \to ۳=a+\frac{۲}{۲^{b}}\end{cases}$$

$$\to \begin{cases}-۲=-a-\frac{۱}{۲^{b}}\\۳=a+\frac{۲}{۲^{b}}\end{cases} +$$

$$۱=\frac{۱}{۲^{b}} \to ۲^{b}=۱ \to \boxed{b=۰} \to ۲=a+\frac{۱}{۲^{۰}} \to ۲=a+۱ \to \boxed{a=۱}$$

۱۵۱

$$f(۱)=a\times b^{۱}-۵=۷ \Rightarrow a\times b=۱۲ \qquad (۱)$$

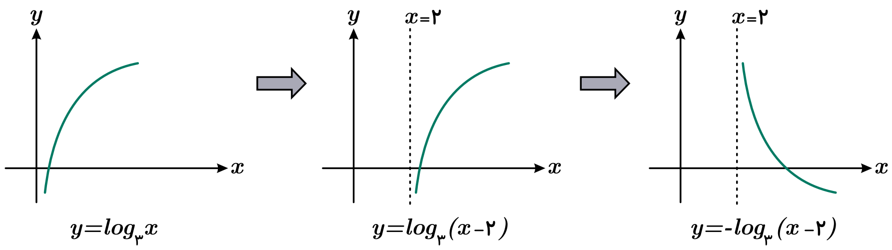
$$f(-۱)=a\times b^{-۱}-۵=-\frac{۱۷}{۴} \Rightarrow a\times b^{-۱}=۵-\frac{۱۷}{۴}=\frac{۳}{۴} \qquad (۲)$$

$$\frac{(۱)}{(۲)} \Rightarrow \frac{\cancel{a}\times b}{\cancel{a}\times b^{-۱}}=\frac{۱۲}{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow \frac{b}{\frac{۱}{b}}=۱۶ \Rightarrow b^{۲}=۱۶ \Rightarrow b=\pm۴$$

در تابع نمایی، پایه عددی مثبت و مخالف یک است، پس $b=۴$ قابل قبول است و داریم:

$$b=۴ \xrightarrow{a\times b=۱۲} ۴a=۱۲ \Rightarrow a=۳$$

۱۵۲



۱۵۳

الف) تعداد اولیهٔ باکتری‌ها در زمان $t=۰$ محاسبه می‌شود $\to t=۰ \to p(۰)=۶۰۰\times ۲^{۰} \to \boxed{p(۰)=۶۰۰}$

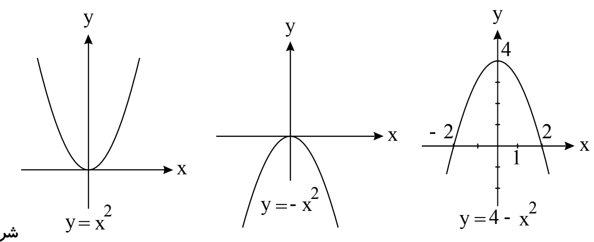
ب) $t=۸ \to p(۸)=۶۰۰\times ۲^{\frac{۸}{۲}} = ۶۰۰\times ۲^{۴} = ۶۰۰\times ۱۶ \to \boxed{p(۸)=۹۶۰۰}$

پ) $p(t)=۷۶۸۰۰ \to ۶۰۰\times ۲^{\frac{t}{۲}} = ۷۶۸۰۰ \to ۲^{\frac{t}{۲}} = \frac{۷۶۸۰۰}{۶۰۰} \to ۲^{\frac{t}{۲}} = ۱۲۸$

$\to ۲^{\frac{t}{۲}} = ۲^{۷} \to \frac{t}{۲} = ۷ \to$ $\boxed{t=۱۴ \text{ ساعت}}$

۱۵۴

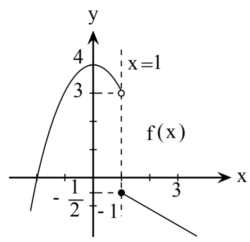
$$f(x)=\begin{cases} -\frac{۱}{۲}x & x\geq ۱ \\ ۴-x^{۲} & x<۱ \end{cases}$$



شرط وجود حد در نقطهٔ $x=۱$ آن است که: $\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x)$

$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۳$

$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = -\frac{۱}{۲}$



چون حد چپ و راست برابر نیستند، تابع در نقطهٔ $x=۱$ حد ندارد.

۱۵۵

$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x-a) = ۱-a$

$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (x^{۲}+۲a) = (۱)^{۲}+۲a = ۱+۲a$

$\to \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۱^-} f(x) \to ۱-a = \frac{۱}{۲}(۱+۲a) \to ۲-۲a = ۱+۲a \to ۱ = ۴a \to \boxed{a=\frac{۱}{۴}}$

۱۵۶

$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (ax+b) = a(۲)+b = ۲a+b = ۵$

$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (ax^{۲}+۳bx+۱) = a(۲)^{۲}+۳b(۲)+۱ = ۴a+۶b+۱ = ۷$

$\to \begin{cases} ۲a+b=۵ \\ ۴a+۶b=۶ \end{cases} \to \begin{cases} ۲a+b=۵ \\ ۲a+۳b=۳ \end{cases} \to \begin{cases} -\cancel{۲a}-b=-۵ \\ \cancel{۲a}+۳b=۳ \end{cases}$

$۲b=-۲ \to \boxed{b=-۱}$

$\to ۲a-۱=۵ \to ۲a=۶ \to \boxed{a=۳} \to \boxed{a+b=۲}$

۱۵۷

$$\lim_{x\to(-1)} f(x) = \lim_{x\to(-1)} (a-1)x+5 = (a-1)(-1)+5 = -a+6 \to -a+6=2 \to \boxed{a=4}$$

$$\lim_{x\to(-4)} f(x) = \lim_{x\to(-4)} x^2+2b = (-4)^2+2b = 16+2b \to 16+2b = 8 \to 2b=-8 \to \boxed{b=-4}$$

۱۵۸ f یک تابع دوضابطه‌ای است. مقدار حد چپ تابع f در $x=1$ را از ضابطهٔ $f(x)=2x+a$ و مقدار حد راست تابع f در $x=1$ را از ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+2}{x+1}$ به دست می‌آوریم.

$$x\to 1^- \Rightarrow x<1 \Rightarrow f(x)=2x+a \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x+a) = 2+a \quad (1)$$

$$x\to 1^+ \Rightarrow x>1 \Rightarrow f(x)=\frac{ax+2}{x+1} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax+2}{x+1} = \frac{a+2}{2} \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) - \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 \xrightarrow{(1),(2)} (a+2) - (\frac{a+2}{2}) = 3$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2(a+2)-(a+2)=6 \Rightarrow a+2=6 \Rightarrow a=4$$

۱۵۹

الف

$$x\to 0^+ : x>0 \to [x]=0,\ x\to 0^- : x<0 \to [x]=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} \frac{[x]+|x|}{x+1} = \frac{0+0}{0+1} = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{[x]+|x|}{x+1} = \frac{-1+0}{0+1} = -1\end{array}\right\} \to \text{حد ندارد.}$$

ب

$$x\to 0^- : x<0 \to [x]=-1$$

$$x\to 0^- : x<0 \xrightarrow{\times -1} -x>0 \to [-x]=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-3}{|[x]+[-x]|} = \frac{-3}{|-1+0|} = -3$$

۱۶۰

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2\ ,\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$$

$$A = \lim_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-5} + \lim_{x\to 3^-}\frac{xf(x)}{x+f(x)}$$

$$A = \sqrt{\lim_{x\to 3^+}(x^2-5)} + \frac{\lim_{x\to 3^-} xf(x)}{\lim_{x\to 3^-}(x+f(x))}$$

$$A = \sqrt{3^2-5} + \frac{\lim_{x\to 3^-} x \times \lim_{x\to 3^-} f(x)}{\lim_{x\to 3^-} x + \lim_{x\to 3^-} f(x)}$$

$$A = 2 + \frac{3\times 1}{3+1} = 2+\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

۱۶۱

الف) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{0}{0} \to$$

$$\to \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(cosx-sinx)(cosx+sinx)}{-\sqrt{2}(\cos x - \sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \frac{1-1}{(0)^2} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos)\cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)cos^2 x}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1)^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

پ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \frac{(0)^2}{1-1} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\sin x) = 1+1 = 2$$

ت) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 x - 1}{1-2\sin x} = \frac{4(\frac{1}{2})^2 - 1}{1-2(\frac{1}{2})} = \frac{0}{0} \to \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 x - 1}{1-2\sin x}$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{-(2\sin x - 1)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x + 1}{-1} = \frac{2(\frac{1}{2})+1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

۱۶۲

الف) $\lim_{x\to(-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6} = \frac{2(-2)^2 - 8}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \frac{0}{0}$

$$\to \lim_{x\to(-2)} \frac{2(x^2-4)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to(-2)} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to(-2)} \frac{2(x-2)}{(x-3)} = \frac{2(-2-2)}{-2-3} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

ب) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 - 4(1) + 3} = \frac{0}{0}$

$$\to \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-3} = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

پ) $\lim_{x\to(-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(-2)^2 + (-2) - 2}{(-2)^2 + 3(-2) + 2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to(-2)} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to(-2)} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2-1}{-2+1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

ت) $\lim_{x\to(-3)} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9} = \frac{(-3)^3 + 3(-3)^2}{(-3)^2 - 9} = \frac{0}{0}$

$$\to \lim_{x\to(-3)} \frac{x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to(-3)} \frac{x^2}{x-3} = \frac{(-3)^2}{-3-3} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

ث) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1} = \frac{4(\frac{1}{2})^2 - 1}{8(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) - 1} = \frac{0}{0}$

$$\to \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(4x+1)} = \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{2(\frac{1}{2})+1}{4(\frac{1}{2})+1} = \frac{2}{3}$$

۱۶۳

الف) $\lim_{x\to(-3)} \frac{x^2 - 9}{x+3} = \frac{(-3)^2 - 9}{-3+3} = \frac{0}{0}$

$$\to \lim_{x\to(-3)} \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)} = \lim_{x\to(-3)} (x-3) = -3-3 = -6$$

ب) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 4x - 5} = \frac{(1)^2 - 4(1) + 3}{(1)^2 + 4(1) - 5} = \frac{0}{0}$

$$\to \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x-۳)}{(x-۱)(x+۵)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x-۳}{x+۵} = \frac{۱-۳}{۱+۵} = \frac{-۲}{۶} = -\frac{۱}{۳}$$

پ) $\lim_{x\to(-۱)} \frac{x^۲-۵x-۶}{x^۲+۸x+۷} = \frac{(-۱)^۲-۵(-۱)-۶}{(-۱)^۲+۸(-۱)+۷} = \frac{۰}{۰}$

$$\to \lim_{x\to(-۱)} \frac{(x+۱)(x-۶)}{(x+۱)(x+۷)} = \lim_{x\to(-۱)} \frac{x-۶}{x+۷} = \frac{-۱-۶}{-۱+۷} = \frac{-۷}{۶}$$

ت) $\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-x-۲}{x^۳-۸} = \frac{(۲)^۲-۲-۲}{(۲)^۳-۸} = \frac{۰}{۰}$

$$\to \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x+۱)}{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)} = \lim_{x\to ۲} \frac{x+۱}{x^۲+۲x+۴} = \frac{۲+۱}{۲^۲+۲(۲)+۴} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

ث) $\lim_{x\to(-۲)} \frac{x^۲+۵x+۶}{x^۲+۲x} = \frac{(-۲)^۲+۵(-۲)+۶}{(-۲)^۲+۲(-۲)} = \frac{۰}{۰}$

$$\to \lim_{x\to(-۲)} \frac{(x+۲)(x+۳)}{x(x+۲)}$$

$$= \lim_{x\to(-۲)} \frac{x+۳}{x} = \frac{-۲+۳}{-۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۶۴

الف) $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۳x+۲}{۲x-۲} = \frac{(۱)^۲-۳(۱)+۲}{۲(۱)-۲} = \frac{۰}{۰}$

$$\to \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x-۲)}{۲(x-۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x-۲}{۲} = \frac{۱-۲}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

ب) $\lim_{x\to ۰} \frac{۴x^۲}{۲x^۲-x^۳} = \frac{۴(۰)^۲}{۲(۰)^۲-(۰)^۳} = \frac{۰}{۰}$

$$\to \lim_{x\to ۰} \frac{۴x^۲}{x^۲(۲-x)} = \lim_{x\to ۰} \frac{۴}{۲-x} = \frac{۴}{۲-۰} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

پ) $\lim_{x\to(-۱)} \frac{۳x^۲+۵x+۲}{۲x^۲+x-۱} = \frac{۳(-۱)^۲+۵(-۱)+۲}{۲(-۱)^۲+(-۱)-۱} = \frac{۰}{۰}$

$$\to \lim_{x\to(-۱)} \frac{(x+۱)(۳x+۲)}{(x+۱)(۲x-۱)} = \lim_{x\to(-۱)} \frac{۳x+۲}{۲x-۱} = \frac{۳(-۱)+۲}{۲(-۱)-۱} = \frac{-۱}{-۳} = \frac{۱}{۳}$$

ت) $\lim_{x\to ۳} \frac{x^۳-۲۷}{x^۲-۲x-۳} = \frac{(۳)^۳-۲۷}{۳^۳-۲(۳)-۳} = \frac{۰}{۰}$

$$\to \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x^۲+۳x+۹)}{(x-۳)(x+۱)} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x^۲+۳x+۹)}{(x+۱)} = \frac{۳^۲+۳(۳)+۹}{۳+۱} = \frac{۲۷}{۴}$$

ث) $\lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۳+۴x-۳x^۲-۴}{x^۲+x-۲} = \frac{۳(۱)^۳+۴(۱)-۳(۱)^۲-۴}{(۱)^۲+۱-۲} = \frac{۰}{۰}$

$$\to \lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۲(x-۱)+۴(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(۳x^۲+۴)}{(x-۱)(x+۲)} = \lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۲+۴}{x+۲} = \frac{۳(۱)^۲+۴}{۱+۲} = \frac{۷}{۳}$$

۱۶۵

$$\lim_{x\to ۲a} \frac{x-۲a}{x^۲-۴a^۲} = \lim_{x\to ۲a} \frac{\cancel{(x-۲a)}}{\cancel{(x-۲a)}(x+۲a)} = \lim_{x\to ۲a} \frac{۱}{x+۲a} = \frac{۱}{۲a+۲a} = \frac{۱}{۴a}$$

فرض : $\frac{۱}{۴a} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow ۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$

۱۶۶

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{-x+|x-۲|}{x-۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\to \lim_{x\to ۱} \frac{-x|x-۲|}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{-x+(-x+۲)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{-۲x+۲}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{-۲(x-۱)}{(x-۱)} = -۲$$

$, f(۱) = a \to \boxed{a=-۲}$

۱۶۷

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{x^۲-۳x+۲} = \frac{۰}{۰}$$

$$\to \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ - ۳x + ۲} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x-۲)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x+۱}{x-۲} = \frac{۱+۱}{۱-۲} = \frac{۲}{-۱} = -۲$$

$$,\ \ f(۱) = a \to \boxed{a = -۲}$$

۱۶۸

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۹}{|x-۳|}, & x < ۳ \\ x^۲ - ax\ , & x \ge ۳ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} x^۲ - ax = (۳)^۲ - a(۳) = ۹ - ۳a$$

$$f(۳) = ۳^۲ - a(۳) = ۹ - ۳a$$

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲ - ۹}{|x-۳|} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲-۹}{-(x-۳)} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{(x-۳)(x+۳)}{-(x-۳)} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{x+۳}{-۱} = -۶$$

$$\to ۹ - ۳a = -۶ \to ۱۵ = ۳a \to \boxed{a = ۵}$$

۱۶۹

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin^۲ x}{۱ - \cos x} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱ - \cos^۲ x}{۱ - \cos x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{(۱-\cos x)} = \lim_{x\to ۰^+} (۱ + \cos x) = ۱ + ۱ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} a\sin(x + \frac{\pi}{۶}) = a\sin(۰ + \frac{\pi}{۶}) = \frac{a}{۲}\ ,\ f(۰) = \frac{a}{۲}$$

$$\to \frac{\alpha}{۲} = ۲ \to \boxed{a = ۴}$$

۱۷۰ **شرط پیوستگی در نقطهٔ $x = ۳$ آن است که:**

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} f(x) = f(۳)$$

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۲\sqrt{x^۲ - ۶x + ۹}}{x - ۳} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۲\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۲|x-۳|}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۲(x-۳)}{x-۳} = ۲$$

$x \to ۳^+$، پس عبارت درون قدر مطلق و خود عبارت بدون قدرمطلق بیرون می‌آید.

$$\lim_{x\to ۳^-} (۵x - ۱۳) = ۲, f(۳) = ۲$$

بنابراین تابع در نقطهٔ $x = ۳$ پیوسته است. تابع f در سایر نقاط نیز پیوسته است. تابع در سایر نقاط نیز پیوسته است. چرا که نمودار تابع در هر یک از ضابطه‌ها پیوسته و بدون بریدگی یا قطع‌شدگی است.

۱۷۱

$A =$ **پیشامد آن‌که حداقل یک فرزند دختر باشد** $= \{$(ددد), (ددپ), (دپد), (دپپ), (پدد), (پدپ), (پپد)$\}$

$B =$ **پیشامد آن‌که خانواده دارای ۲ فرزند دختر باشد** $= \{$(ددپ), (دپد), (پدد)$\}$

$A \cap B = \{$(ددپ), (دپد), (پدد)$\}$

$$\to P(B|A) = \frac{n(B\cap A)}{n(A)} = \frac{۳}{۷} \to \boxed{P(B|A) = \frac{۳}{۷}}$$

۱۷۲

$$P(B) = ۰{,}۳ \to P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - ۰{,}۳ \to \boxed{P(B') = ۰{,}۷}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} \to P(A\cap B') = P(A|B')\cdot P(B') = ۰{,}۳ \times ۰{,}۷$$

$\rightarrow \boxed{P(A\cap B') = ۰/۲۱} \quad , \quad P(A-B) = P(A\cap B') \rightarrow \boxed{P(A-B) = ۰/۲۱}$

۱۷۳

$P(B) = ۰/۴ \rightarrow P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - ۰/۴ \rightarrow \boxed{P(B') = ۰/۶}$

$$P(A|B') = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} \rightarrow P(A\cap B') = P(A|B')\cdot P(B') = ۰/۷ \times ۰/۶$$

$\rightarrow \boxed{P(A\cap B') = ۰/۴۲}$

$P(A\cap B') = P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

$\rightarrow P(A\cup B) = P(B) + P(A) - P(A\cap B) = P(B) + P(A\cap B') = ۰/۴۰ + ۰/۴۲$

$\rightarrow \boxed{P(A\cup B) = ۰/۸۲}$

۱۷۴ الف-

$P(A) = ۰/۵۵ + ۰/۱۰ \rightarrow P(A) = ۰/۶۵$

$$\rightarrow P(M|A) = \frac{P(M\cap A)}{P(A)} = \frac{۰/۱۰}{۰/۶۵} = \frac{۱۰}{۶۵} \rightarrow \boxed{P(M|A) = \frac{۲}{۱۳}}$$

ب-

$P(B) = ۰/۳۰ + ۰/۰۵ \rightarrow P(B) = ۰/۳۵$

$$\rightarrow P(E|B) = \frac{P(E\cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۳۰}{۰/۳۵} = \frac{۳۰}{۳۵} \rightarrow \boxed{P(E|B) = \frac{۶}{۷}}$$

پ-

$P(E) = ۰/۵۵ + ۰/۳۰ \rightarrow P(E) = ۰/۸۵$

$$\rightarrow P(A|E) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{۰/۵۵}{۰/۸۵} = \frac{۵۵}{۸۵} \rightarrow \boxed{P(A|E) = \frac{۱۱}{۱۷}}$$

ت-

$P(M) = ۰/۱۰ + ۰/۰۵ \rightarrow P(M) = ۰/۱۵$

$$\rightarrow P(B|M) = \frac{P(B\cap M)}{P(M)} = \frac{۰/۰۵}{۰/۱۵} = \frac{۵}{۱۵} \rightarrow \boxed{P(B|M) = \frac{۱}{۳}}$$

ث-

$P(E\cup B) = P(E) + P(B) - P(E\cap B) = ۰/۸۵ + ۰/۳۵ - ۰/۳۰ = ۰/۹۰$

$\rightarrow \boxed{(E\cup B) = ۰/۹۰}$

۱۷۵

$$P(A) = \frac{۱}{۵}, \ P(B) = \frac{۱}{۷}, \ P(B|A) = \frac{۱}{۴}, \ P(A\cup B) = ?$$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A\cap B) = P(B|A)\cdot P(A) = \frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۲۰}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۲۰} = \frac{۲۸}{۱۴۰} + \frac{۲۰}{۱۴۰} - \frac{۷}{۱۴۰} \rightarrow \boxed{P(A\cup B) = \frac{۴۱}{۱۴۰}}$$

۱۷۶

پیشامدهای A و B مستقل از هم هستند $\rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

$\rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$\rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B)$

$$\frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۳} + P(B) - \frac{۱}{۳}P(B) \rightarrow \frac{۵}{۶} - \frac{۱}{۳} = (۱ - \frac{۱}{۳})P(B)$$

$\rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{۲}{۳}P(B) \rightarrow \boxed{P(B) = \frac{۳}{۴}}$

$\rightarrow P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۳}{۴} \rightarrow \boxed{P(B') = \frac{۱}{۴}}$

۱۷۷

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \rightarrow ۱۶ = ۱۲ + ۶ - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cap B) = ۲$

دو پیشامد A و B مستقل هستند $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow \frac{n(A \cap B)}{n(s)} = \frac{n(A)}{n(s)} \cdot \frac{n(B)}{n(s)}$

$\rightarrow \frac{۲}{n(s)} = \frac{۱۲}{n(s)} \cdot \frac{۶}{n(s)} \rightarrow ۲(n(s))^۲ = ۷۲\, n(s) \rightarrow (n(s))^۲ = ۳۶ n(s)$

$\rightarrow n(s)(n(s) - ۳۶) = ۰ \begin{cases} n(s) = ۰ & \text{غ} \\ n(s) = ۳۶ \end{cases}$

۱۷۸ الف-

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۷۰}{۱۰۰} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{۲۸}{۱۰۰}}$

ب-

$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۴۰}{۱۰۰} \rightarrow \boxed{P(A') = \frac{۶۰}{۱۰۰}}$

$P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۷۰}{۱۰۰} \rightarrow \boxed{P(B') = \frac{۳۰}{۱۰۰}}$

$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۳۰}{۱۰۰} \rightarrow \boxed{P(A' \cap B') = \frac{۱۸}{۱۰۰}}$

پ-

$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) = \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۳۰}{۱۰۰} + \frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۷۰}{۱۰۰}$

$\rightarrow \boxed{P(A \cap B') + P(A' \cap B) = \frac{۵۴}{۱۰۰}}$

۱۷۹

$A = \{۲, ۴, ۶\} \rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶}, \; B = \{۳, ۶\} \rightarrow P(B) = \frac{۲}{۶}, \; C = \{۳, ۴, ۵, ۶\} \rightarrow P(C) = \frac{۴}{۶}$

$A \cap B = \{۶\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۶} \rightarrow P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(B) \rightarrow \frac{۱}{۶} = \frac{۳}{۶} \times \frac{۲}{۶}$

دو پیشامد A و B مستقل هستند.

$A \cap C = \{۴, ۶\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{۲}{۶} \rightarrow P(A \cap C) \overset{?}{=} P(A) \cdot P(C) \rightarrow \frac{۲}{۶} = \frac{۳}{۶} \times \frac{۴}{۶}$

دو پیشامد A و C مستقل هستند.

$B \cap C = \{۳, ۶\} \rightarrow P(B \cap C) = \frac{۲}{۶} \rightarrow P(B \cap C) \overset{?}{=} P(B) \cdot P(C) \rightarrow \frac{۲}{۶} \neq \frac{۲}{۶} \times \frac{۴}{۶}$

دو پیشامد B و C مستقل نیستند.

۱۸۰

الف

$A =$ پیشامد انتخاب در تیم بسکتبال $\rightarrow P(A) = ۰/۷$

$B =$ پیشامد انتخاب در تیم ملّی فوتبال نوجوانان $\rightarrow P(B) = ۰/۸$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۰} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{۵۶}{۱۰۰}}$

ب

روش ۱: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۷}{۱۰} + \frac{۸}{۱۰} - \frac{۵۶}{۱۰۰} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{۹۴}{۱۰۰}$

$\rightarrow P(A \cup B)' = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - \frac{۹۴}{۱۰۰} \rightarrow \boxed{P(A \cup B)' = \frac{۶}{۱۰۰}}$

روش ۲: $P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۷}{۱۰} = \frac{۳}{۱۰}$

$P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۸}{۱۰} = \frac{۲}{۱۰}$

$\rightarrow P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} \rightarrow \boxed{P(A' \cap B') = \frac{۶}{۱۰۰}}$

پ

$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B) \cdot P(A') = \frac{۸}{۱۰} \times \frac{۳}{۱۰} \rightarrow \boxed{P(B - A) = \frac{۲۴}{۱۰۰}}$

ت

روش ۱: $P(B - A) + P(A - B) = P(B \cap A') + P(A \cap B') = P(B) \cdot P(A') + P(A) \cdot P(B')$

$= \frac{۸}{۱۰} \times \frac{۳}{۱۰} + \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} = \frac{۲۴}{۱۰۰} + \frac{۱۴}{۱۰۰} \rightarrow \boxed{P(B - A) + P(A - B) = \frac{۳۸}{۱۰۰}}$

روش ۲: $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{۹۴}{۱۰۰} - \frac{۵۶}{۱۰۰} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{۳۸}{۱۰۰}}$

ث

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۷}{۱۰} + \frac{۸}{۱۰} - \frac{۵۶}{۱۰۰} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{۹۴}{۱۰۰}}$

۱۸۱

$A =$ پیشامد قبول شدن رویا در درس ریاضی $B =$ پیشامد قبول شدن دوست رویا در درس ریاضی

دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند در نتیجه: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(B) = x \,,\, P(A) = ۲x$

$P(A \cup B) = ۰٫۶۲۵ \rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۶۲۵}{۱۰۰۰}$

$\rightarrow ۲x + x - (۲x \cdot x) = \frac{۵}{۸} \rightarrow ۳x - ۲x^۲ = \frac{۵}{۸} \rightarrow ۲۴x - ۱۶x^۲ = ۵$

$\rightarrow ۱۶x^۲ - ۲۴x + ۵ = ۰ \rightarrow (۴x)^۲ - ۶(۴x) + ۵ = ۰ \rightarrow (۴x - ۱)(۴x - ۵) = ۰$

$$\begin{cases} ۴x - ۵ = ۰ \rightarrow x = \frac{۵}{۴} > ۱ \ \text{غیرقابل قبول} \\ ۴x - ۱ = ۰ \rightarrow x = \boxed{\frac{۱}{۴}} \,,\, ۲x = \frac{۱}{۲} \rightarrow \boxed{P(A) = \frac{۱}{۲}} \end{cases}$$

۱۸۲

$\frac{x_۱ + ۱ + x_۲ + ۲ + x_۳ + ۳}{۳} = \bar{X} \rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ + ۶ = ۳\bar{X} \rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳\bar{X} - ۶$

$\bar{Y} = \frac{۳x_۱ + ۱ + ۳x_۲ + ۲ + ۳x_۳ + ۳}{۳} = \frac{۳x_۱ + ۳x_۲ + ۳x_۳ + ۶}{۳} = \frac{۳(x_۱ + x_۲ + x_۳)}{۳} + \frac{۶}{۳}$

$\rightarrow \bar{Y} = x_۱ + x_۲ + x_۳ + ۲ \rightarrow \bar{Y} = ۳\bar{X} - ۶ + ۲ \rightarrow \boxed{\bar{Y} = ۳\bar{X} - ۴}$

۱۸۳

$$\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_N}{N}=\bar{X}\to x_۱+x_۲+\ldots+x_N=N\bar{X}$$

$$\bar{Y}=\frac{x_۱+\bar{X}+x_۲+۲\bar{X}+\ldots+x_N+N\bar{X}}{N}=\frac{(x_۱+x_۲+\ldots+x_N)+(\bar{X}+۲\bar{X}+\ldots+N\bar{X})}{N}$$

$$\to\bar{Y}=\frac{N\bar{X}+\frac{N(N+۱)}{۲}\bar{X}}{N}=\frac{N\bar{X}}{N}+\frac{N(N+۱)}{۲N}\bar{X}=\bar{X}+\frac{N+۱}{۲}\bar{X}$$

$$\to\bar{Y}=\frac{۲+N+۱}{۲}\bar{X}\to\boxed{\bar{Y}=\frac{N+۳}{۲}\bar{X}}$$

۱۸۴

الف-

$$Q_۲=\frac{۱۰+x}{۲}\to ۱۳=\frac{۱۰+x}{۲}\to ۱۰+x=۲۶\to\boxed{x=۱۶}$$

ب-

$$\bar{X}=\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_N}{N}\to ۱۵=\frac{۴+۶+\ldots+x+\ldots+۲۹}{۱۰}\to\boxed{۱۵=\frac{۱۳۳+x}{۱۰}}$$

$$\to ۱۳۳+x=۱۵۰\to\boxed{x=۱۷}\to\boxed{Q_۲=\frac{۱۰+۱۷}{۲}}\to\boxed{Q_۲=۱۳/۵}$$

۱۸۵ مجموع انحراف داده‌ها از میانگین برابر صفر است پس داریم:

$$۷\times(-۴)+۵\times ۲+x\times ۳=۰\to ۳x=۱۸\to\boxed{x=۶}$$

$$\sigma^۲=\frac{۷(-۴)^۲+۵(۲)^۲+۶(۳)^۲}{۷+۵+۶}=\frac{۱۱۲+۲۰+۵۴}{۱۸}=\frac{۱۸۶}{۱۸}\to\boxed{\sigma^۲=\frac{۳۱}{۳}\simeq ۱۰/۳۳}$$

۱۸۶

$$\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_۸}{۸}=۱۵\to x_۱+x_۲+\ldots+x_۸=۱۲۰$$

$$۴=\frac{(x_۱-۱۵)^۲+(x_۲-۱۵)^۲+\ldots+(x_۸-۱۵)^۲}{۸}$$

$$\to(x_۱-۱۵)^۲+(x_۲-۱۵)^۲+\ldots+(x_۸-۱۵)^۲=۳۲$$

اگر دو داده جدید ۱۲ و ۱۸ را اضافه کنیم داریم:

$$\bar{X}=\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_۸+۱۲+۱۸}{۸+۲}=\frac{۱۲۰+۳۰}{۱۰}\to\boxed{\bar{X}=۱۵}$$

$$\sigma^۲=\frac{(x_۱-۱۵)^۲+(x_۲-۱۵)^۲+\ldots+(x_۸-۱۵)^۲+(۱۲-۱۵)^۲+(۱۸-۱۵)^۲}{۱۰}=\frac{۳۲+۹+۹}{۱۰}$$

$$\to\sigma^۲=\frac{۵۰}{۱۰}\to\boxed{\sigma^۲=۵}$$

۱۸۷

$$\bar{X}_{۲۹}=\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_{۲۹}}{۲۹}\to ۱۷=\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_{۲۵}+۱۲+۱۳+۲۱+۲۲}{۲۹}$$

$$\to x_۱+x_۲+\ldots+x_{۲۵}+۶۸=۴۹۳\to x_۱+x_۲+\ldots+x_{۲۵}=۴۲۵$$

همان میانگین قبلی است.

$$\to\bar{X}_{۲۵}=\frac{x_۱+x_۲+\ldots+x_{۲۵}}{۲۵}=\frac{۴۲۵}{۲۵}\to\boxed{\bar{X}_{۲۵}=۱۷}$$

$$\to{\sigma^۲}_{۲۹}=\frac{(x_۱-\bar{X}_{۲۹})^۲+\ldots+(x_{۲۹}-\bar{X}_{۲۹})^۲}{۲۹}\to ۵=\frac{(x_۱-۱۷)^۲+\ldots+(x_{۲۹}-۱۷)^۲}{۲۹}$$

$$\to ۵\times ۲۹=(x_۱-۱۷)^۲+\ldots+(x_{۲۵}-۱۷)^۲+(۱۲-۱۷)^۲+(۱۳-۱۷)^۲$$

$$+(۲۱-۱۷)^۲+(۲۲-۱۷)^۲$$

$$\to ۱۴۵=(x_۱-۱۷)^۲+\ldots+(x_{۲۵}-۱۷)^۲+۲۵+۱۶+۱۶+۲۵$$

$$\to(x_۱-۱۷)^۲+\ldots+(x_{۲۵}-۱۷)^۲=۶۳$$

$$\rightarrow \sigma^{۲}{}_{۲۵} = \frac{(x_۱ - ۱۷)^۲ + \ldots + (x_{۲۵} - ۱۷)^۲}{۲۵} = \frac{۶۳}{۲۵} \rightarrow \sigma^{۲}{}_{۲۵} = ۲/۵۲$$

۱۸۸

۱۲ دادهٔ آماری : $۱۲/۶ = \frac{(x_۱ - \bar{X})^۲ + \ldots + (x_{۱۲} - \bar{X})^۲}{۱۲} \rightarrow (x_۱ - \bar{X})^۲ + \ldots + (x_{۱۲} - \bar{X})^۲ = ۱۵۱/۲$

۲۴ دادهٔ آماری : $۷/۲ = \frac{(y_۱ - \bar{X})^۲ + \ldots + (y_{۲۴} - \bar{X})^۲}{۲۴} \rightarrow (y_۱ - \bar{X})^۲ + \ldots + (y_{۲۴} - \bar{X})^۲ = ۱۷۲/۸$

$$\rightarrow \sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{X})^۲ + \ldots + (x_{۱۲} - \bar{X})^۲ + (y_۱ - \bar{X})^۲ + \ldots + (y_{۲۴} - \bar{X})^۲}{۱۲ + ۲۴} = \frac{۱۵۱/۲ + ۱۷۲/۸}{۱۲ + ۲۴}$$

$$\rightarrow \sigma^۲ = \frac{۳۲۴}{۳۶} \rightarrow \sigma^۲ = ۹ \rightarrow \boxed{\sigma = ۳}$$

۱۸۹

$$\bar{X}_{۲۵} = \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{۲۵}}{۲۵} \rightarrow ۳۰ = \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{۲۱} + ۱۰ + ۱۵ + ۴۵ + ۵۰}{۲۵}$$

$$\rightarrow x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{۲۱} + ۱۲۰ = ۷۵۰ \rightarrow x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{۲۱} = ۶۳۰$$

همان میانگین قبلی است

$$\rightarrow \bar{X}_{۲۱} = \frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_{۲۱}}{۲۱} = \frac{۶۳۰}{۲۱} \rightarrow \boxed{\bar{X}_{۲۱} = ۳۰}$$

$$\sigma_{۲۵} = ۸ \rightarrow \sigma^۲_{۲۵} = ۶۴$$

$$\sigma^۲_{۲۵} = \frac{(x_۱ - \bar{X}_{۲۵})^۲ + \ldots + (x_{۲۵} - \bar{X}_{۲۵})^۲}{۲۵} \rightarrow ۶۴ = \frac{(x_۱ - ۳۰)^۲ + \ldots + (x_{۲۵} - ۳۰)^۲}{۲۵}$$

$$\rightarrow ۶۴ \times ۲۵ = (x_۱ - ۳۰)^۲ + \ldots + (x_{۲۱} - ۳۰)^۲ + (۱۰ - ۳۰)^۲ + (۱۵ - ۳۰)^۲$$

$$+ (۴۵ - ۳۰)^۲ + (۵۰ - ۳۰)^۲$$

$$\rightarrow ۱۶۰۰ = (x_۱ - ۳۰)^۲ + \ldots + (x_{۲۱} - ۳۰)^۲ + ۴۰۰ + ۲۲۵ + ۲۲۵ + ۴۰۰$$

$$\rightarrow (x_۱ - ۳۰)^۲ + \ldots + (x_{۲۱} - ۳۰)^۲ = ۳۵۰$$

$$\rightarrow \sigma^۲_{۲۱} = \frac{(x_۱ - ۳۰)^۲ + \ldots + (x_{۲۱} - ۳۰)^۲}{۲۱} = \frac{۳۵۰}{۲۱} \rightarrow \boxed{\sigma^۲_{۲۱} = \frac{۵۰}{۳} \simeq ۱۶/۶۷}$$

۱۹۰ اگر طول ضلع مربع‌ها را $x_۱, x_۲, \ldots, x_N$ در نظر بگیریم:

$$\bar{X} = ۱۵ \quad , \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} \rightarrow ۰/۲ = \frac{\sigma}{۱۵} \rightarrow \boxed{\sigma = ۳}$$

مساحت مربع‌ها را می‌توانیم بصورت $x_۱{}^۲, x_۲{}^۲, \ldots, x_N{}^۲$ بنویسیم و داریم:

$$\sigma^۲ = \frac{x_۱{}^۲ + x_۲{}^۲ + \ldots + x_N{}^۲}{N} - \bar{X}^۲ \rightarrow ۳^۲ = \frac{x_۱{}^۲ + x_۲{}^۲ + \ldots + x_N{}^۲}{N} - ۱۵^۲$$

$$\rightarrow \frac{x_۱{}^۲ + x_۲{}^۲ + \ldots + x_N{}^۲}{N} = ۹ + ۲۲۵ \rightarrow \boxed{\frac{x_۱{}^۲ + x_۲{}^۲ + \ldots + x_N{}^۲}{N} = ۲۳۴}$$

۱۹۱ اگر بیشترین و کمترین مقدار داده‌های اولیه را به‌ترتیب $x_۱$ و $x_۲$ در نظر بگیریم، دامنهٔ تغییرات اولیه:

$$R_۱ = x_۱ - x_۲$$

حال همهٔ داده‌ها را در ۵ ضرب کرده و داده‌های جدید به‌ترتیب برابر با $۵x_۱$ و $۵x_۲$ و دامنهٔ تغییرات جدید:

$$R_۲ = ۵x_۱ - ۵x_۲ = ۵(x_۱ - x_۲) = ۵R_۱$$

بنابراین اگر همهٔ داده‌های آماری در ۵ ضرب کنیم، دامنهٔ تغییرات ۵ برابر می‌شود.

حال همهٔ داده‌ها را با ۴ جمع کرده و مقدار داده‌های جدید برابر با $۵x_۱ + ۴$ و $۵x_۲ + ۴$ می‌شود و دامنهٔ تغییرات جدید:

$$R_۲ = (۵x_۱ + ۴) - (۵x_۲ + ۴) = ۵(x_۱ - x_۲) = ۵R_۱$$

بنابراین اگر به همهٔ داده‌های آماری ۴ واحد اضافه کنیم، دامنهٔ تغییرات تغییری نمی‌کند.

۱۹۲ اگر داده‌های اولیّه بصورت $x_۱ , x_۲ , \dots , x_{۱۵۰}$ باشند، داریم:

$$\bar{X}_x = ۱۲ \quad , \quad CV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{X}_x} = \frac{\sigma_x}{۱۲}$$

داده‌های جدید بصورت $۲x_۱ + ۳, ۲x_۲ + ۳, \dots , ۲x_{۱۵۰} + ۳$ می‌باشند و داریم:

$$\bar{X}_{۲x+۳} = ۲ \times \bar{X}_x + ۳ = ۲۷ \quad , \quad \sigma_{۲x+۳} = ۲\sigma_x \quad , \quad CV_{۲x+۳} = \frac{\sigma_{۲x+۳}}{\bar{X}_{۲x+۳}} = \frac{۲\sigma_x}{۲۷}$$

$$\rightarrow \frac{CV_{۲x+۳}}{CV_x} = \frac{\frac{۲\sigma_x}{۲۷}}{\frac{\sigma_x}{۱۲}} = \frac{۲ \times ۱۲}{۲۷} \rightarrow \frac{CV_{۲x+۳}}{CV_x} = \frac{۸}{۹}$$