

۱ در دنباله هندسی $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$

الف) ضابطه بازگشتی این دنباله را بنویسید.
ب) مجموع ۶ جمله اول دنباله داده شده را به دست آورید.

۲ در دنباله هندسی مقابل $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots$

الف) جمله عمومی دنباله را بنویسید.
ب) رابطه بازگشتی آن را مشخص کنید.

۳ با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{2n-1}{n+1}, b_n = 2n^2 + 1, c_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$ حاصل عبارت $b_2 - a_2 + c_2$ را بیابید.

۴ در یک دنباله هندسی، جمله چهارم برابر ۵ و جمله هفتم برابر ۱۳۵ است. نسبت مشترک دنباله چند می‌باشد؟

۵ جمله دوم یک دنباله هندسی، ۶ و جمله پنجم همین دنباله، ۴۸ است.
الف) نسبت مشترک این دنباله را پیدا کنید.
ب) جمله هفتم این دنباله را بنویسید.

۶ اگر $x + 3$ و $x - 3$ ، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقادیر x را به دست آورید.

۷ نخستین جمله یک دنباله هندسی ۹۶ و نسبت مشترک این دنباله ۲ می‌باشد، کدام جمله دنباله برابر ۷۶۸ است؟

۸ با توجه به دنباله هندسی، $1, 2, \dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

۱۴

$a_9 - a_6$

۹ مجموع شش جمله اول دنباله زیر را با استفاده از فرمول به دست آورید.
 $1, 4, 16, \dots$

۱۰ در دنباله هندسی زیر با فرض نسبت مشترک مثبت آن را به دست آورید، سپس جاهای خالی را پر کنید.

$7, \square, \square, \square, 112$

در یک دنباله هندسی جمله اول ۱۰۲۴ و نسبت مشترک دنباله $\frac{1}{2}$ است.

الف) چندمین جمله دنباله برابر ۶۴ می‌باشد؟
ب) مجموع شش جمله اول این دنباله را به دست آورید.

۱۲ با توجه به دنباله روبه‌رو به سوالات زیر پاسخ دهید.

۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳, ۰۰۰

الف) نوع دنباله را مشخص کنید.
ب) ضابطه بازگشتی دنباله را بنویسید.
پ) جمله عمومی دنباله را بنویسید.
ت) جمله دهم این دنباله را بنویسید.

۱۳ با توجه به دنباله هندسی $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ حاصل عبارت $\frac{a_{10}}{a_7}$ را به دست آورید.

۱۴ مقدار a را چنان بیابید که $1, \sqrt{a}, \sqrt{a} - 1, \dots$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند. سپس مقدار نسبت مشترک دنباله را تعیین کنید.

۱۵ نخستین جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{2}$ است. کدام جمله‌ی دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

۱۶ مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$

ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

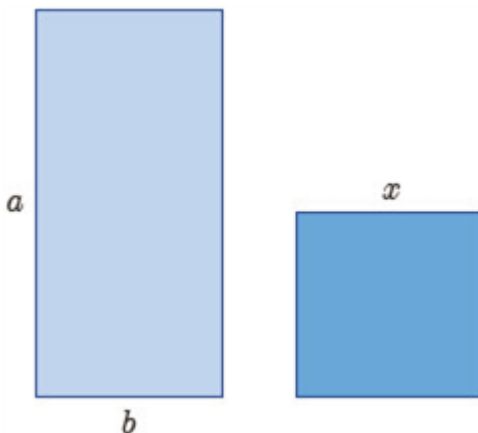
۱۷ یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب‌سنگ به جو زمین، چه قدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۱۸ مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم‌مساحت با آن باشد، کدام‌یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند؟

الف) x و b و a

ب) a و x و b

پ) b و a و x



سرطان از تکثیر بیش از حد سلولها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی‌درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

الف) اگر داروی شیمی‌درمانی هر بار 60% سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده‌ی سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی‌درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟
 ب) فرض کنید پس از اولین شیمی‌درمانی، رشد توده‌ی سرطانی متوقف شده است. برای این‌که این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی‌درمانی کمتر از $10^6 \times 10^7$ سلول شود و سپس با کوچک شدن توده‌ی سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده‌ی سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی‌درمانی شود؟

با توجه به مفهوم دنباله‌ی هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله‌ی هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (ب را واسطه‌ی هندسی میان a و c می‌نامند).

در یک دنباله هندسی جمله اول 1536 و نسبت مشترک دنباله $\frac{1}{4}$ است.

الف) چندمین جمله دنباله برابر 6 می‌باشد؟
 ب) مجموع ده جمله اول این دنباله را به دست آورید.

طول ضلع مربعی 1 متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله‌ی قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل 99% از سطح کل مربع رنگ شده است؟

اگر هر جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی افزایش یکسانی داشته باشد، آیا دنباله‌ی جدید می‌تواند یک دنباله‌ی هندسی باشد؟

ثابت کنید اگر a, b, c و d جمله‌های متوالی از یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه داریم:

$$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2$$

اگر a, b, c و d جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی باشند، درستی رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$(b - c)^2 = ac + bd - 2ad$$

اگر a, b و c هم تشکیل دنباله عددی دهند و هم تشکیل دنباله هندسی a, b و c چه رابطه‌ای با هم دارند؟ قدر نسبت هر یک از این دنباله‌ها چیست؟

جمعیت یک روستا 1000 نفر است. اگر جمعیت این روستا هر سال به اندازه $\frac{1}{10}$ جمعیت سال قبل کاهش یابد، پس از

4 سال چند نفر در این روستا زندگی می‌کنند؟

$$\frac{-2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{-5}{8}, \dots$$

مجموع 20 جمله‌ی اول دنباله مقابل را حساب کنید.

$$1, 2, 4, \dots$$

مجموع 20 جمله‌ی اول دنباله مقابل را حساب کنید.

اگر a ، b و c دنباله هندسی تشکیل دهند، نشان دهید که اعداد $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ نیز دنباله هندسی تشکیل می‌دهند.

الف) $\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} = 3 \end{cases}$ یا $\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases}$ (ص ۸۱)

ب) $S_7 = \frac{\frac{2}{3}(1-3^7)}{1-3} = \frac{\frac{2}{3}(1-2187)}{-2} = \frac{\frac{2}{3}(-2186)}{-2} = \frac{-\frac{2 \times 2186}{3}}{-2} = \frac{2186}{3}$

الف) $a_n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ (ص ۷۶)

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$ یا $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5}$

$b_2 - a_2 + c_2 = 2(3)^2 + 1 - \frac{2(2) - 1}{2+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1} \Rightarrow 19 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{73}{4}$ یا $18\frac{1}{4}$

$\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1 r^7}{a_1 r^4} = r^3 = \frac{135}{5} = 27 \Rightarrow r = 3$

الف) $\frac{a_1 r^6}{a_1 r} = r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{48}{6} = 8 \Rightarrow r = 2$

ب) $a_2 = a_1 r \Rightarrow 6 = a_1 \times 2 \Rightarrow a_1 = 3$

$a_7 = a_1 r^6 \Rightarrow a_7 = 3 \times 2^6 = 192$ (ص ۸۳)

$16 = (x-3)(x+3) \Rightarrow 16 = x^2 - 9 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$ (ص ۸۳)

$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow 768 = 96 \times 2^{n-1} \Rightarrow 8 = 2^{n-1} \Rightarrow n-1 = 3 \Rightarrow n = 4$ (ص ۷۴)

$\frac{14}{a_1 - a_7} = \frac{14}{32 - 4} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$ (ص ۸۱)

$S_7 = \frac{1(1-4^7)}{1-4} = 1365$ (ص ۸۳)

$r = 2$ ۱۴, ۲۸, ۵۶ (ص ۸۳)

الف) $64 = 1024 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 5$

ب) $S_7 = \frac{1024 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1 - \frac{1}{2}}$ (ص ۸۵)

۱

۲

۳

۴

۵

۶

۷

۸

۹

۱۰

۱۱

ب) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$

پ) $a_n = 3^n$

ت) $a_{10} = 3^{10}$ (ص ۷۷)

$$r = 2 \Rightarrow \frac{a_1 r^3}{a_1 r^6} = \frac{2^3}{2^6} \Rightarrow \frac{a_1 r^3}{a_1 r^6} = 2^3 = 8$$

$$7^2 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1) \Rightarrow 49 = a - 1 \Rightarrow a = 50$$

$$r = \frac{7}{\sqrt{50} - 1}$$

$$a_1 = 1536 \quad r = \frac{1}{2} \quad a_n = 6 \quad n = ?$$

الف) جمله عمومی $a_n = a_1 r^{n-1} = 1536 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\Rightarrow 6 = 1536 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{6}{1536} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 9$$

ب) پس در واقع مجموع ۹ جمله اول این دنباله هندسی را باید محاسبه کنیم.

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$n = 9 \Rightarrow S_9 = 1536 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9}{1 - \frac{1}{2}} = 1536 \times \frac{1 - \frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = 1536 \times \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{1536 \times 511}{256} = 6 \times 511 = 3066$$

الف) ۱۶) جمله عمومی $a_1 = 1, r = 4 \Rightarrow a_n = a_1 \times r^{n-1} = 1 \times 4^{n-1} = 4^{n-1}$

باید بینیم آخرین جمله یعنی ۴۰۹۶ چندمین جمله دنباله است:

$$4096 = 4^{n-1} \Rightarrow 4^7 = 4^{n-1} \Rightarrow 7 = n - 1 \Rightarrow n = 8$$

حال با استفاده از فرمول مجموع n جمله دنباله هندسی داریم:

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$n = 8 \Rightarrow S_8 = 1 \times \frac{1 - 4^8}{1 - 4} = \frac{4^8 - 1}{3} = \frac{16383}{3} = 5461$$

ب) جمله عمومی $a_1 = \frac{1}{5}, r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\frac{1}{640} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow 7 = n - 1 \Rightarrow n = 8$$

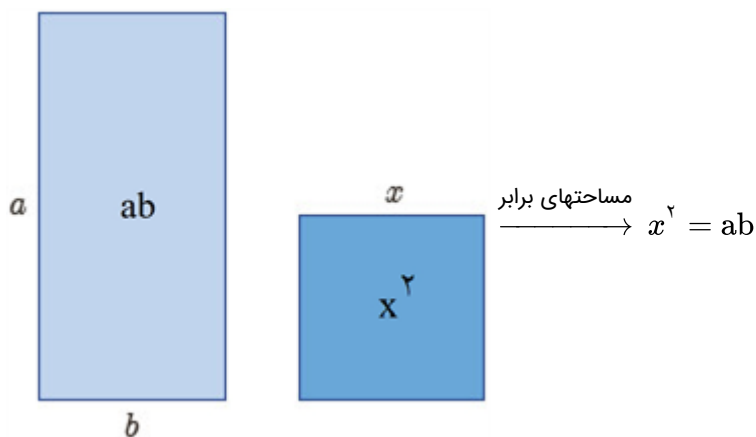
$$n = 8 \Rightarrow S_8 = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times \frac{1 - \frac{1}{256}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times \frac{\frac{255}{256}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \times \frac{255 \times 2}{256} = \frac{51}{128} \cong 0.3984$$

$$100\% - 15\% = 85\%$$

$$a_1 = 15000 \times \left(\frac{85}{100} \right), r = \frac{85}{100}$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow a_n = 15000 \left(\frac{85}{100} \right) \left(\frac{85}{100} \right)^{n-1} = 15000 \left(\frac{85}{100} \right)^n \quad \text{جمله عمومی}$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 15000 \times \left(\frac{85}{100} \right)^5 \cong 6655 / 58$$



طبق تمرین ۲، x واسطه‌ی هندسی بین a ، b است پس دنباله‌ی هندسی آن a ، x ، b یا a ، x ، b می‌باشد، در نتیجه گزینه ب دنباله‌ی هندسی است.

$$100\% - 60\% = 40\% \quad \text{الف} \quad 19$$

$$a_1 = 10^{12} \times \left(\frac{40}{100} \right) = 0.4 \times 10^{12} \quad \text{و} \quad r = 0.4$$

$$\xrightarrow{a_n = a_1 \times r^{n-1}} a_n = 0.4 \times 10^{12} \times (0.4)^{n-1} \Rightarrow a_n = 10^{12} \times (0.4)^n$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 10^{12} \times (0.4)^3 = 10^{12} \times \left(\frac{64}{1000} \right) = 64 \times 10^9$$

(ب)

$$a_n < 7 \times 10^6 \Rightarrow 10^{12} \times (0.4)^n < 7 \times 10^6$$

باید:

$$\Rightarrow 10^6 \times (0.4)^n < 7 \Rightarrow (0.4)^n < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow (0.4)^n < 0.000007$$

با روش سعی و خطا (راهبرد حدس و آزمایش) مقدار n را تعیین می‌کنیم.

$$n = 10 \Rightarrow (0.4)^{10} = 0.0001048576 > 0.000007$$

$$n = 11 \Rightarrow (0.4)^{11} = 0.00004194304 > 0.000007$$

$$n = 12 \Rightarrow (0.4)^{12} = 0.000016777216 > 0.000007$$

$$n = 13 \Rightarrow (0.4)^{13} = 0.0000067108864 < 0.000007$$

پس فرد باید ۱۳ مرتبه شیمی‌درمانی شود.

$$a, b, c \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \begin{cases} r = \frac{b}{a} \\ r = \frac{c}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a \times c$$

۲۰

صفحه ۸۵ کتاب ۲۱

$$r = 1536 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 9$$

$$S_{10} = \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r} = \frac{1536 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1536 \left(1 - \frac{1}{1024}\right)}{\frac{1}{2}} = 3069$$

(ب)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99}{100}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{100} \rightarrow 2^n \geq 100 \rightarrow n = 7$$

مثال صفحه ۳

خیل ۲۳

$$\begin{aligned} \text{سمت چپ} &= (b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (aq - aq^2)^2 + (aq^2 - a)^2 + (aq^3 - aq)^2 \\ &= a^2 q^2 (1-q)^2 + a^2 (q^2 - 1)^2 + a^2 q^2 (q^2 - 1)^2 \\ &= a^2 (1-q)^2 (q^2 + (q+1)^2 + q^2 (q+1)^2) \\ &= a^2 (1-q)^2 (q^2 + 2q^2 + 3q^2 + 2q + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{سمت راست} &= (a-d)^2 = (a - aq^3)^2 = a^2 (1 - q^3)^2 \\ &= a^2 (1-q)^2 (1+q+q^2)^2 \\ &= a^2 (1-q)^2 (q^2 + q^2 + 1 + 2q^2 + 2q^2 + 2q) \end{aligned}$$

$$\text{سمت چپ} = a^2 (1-q)^2 (q^2 + 2q^2 + 3q^2 + 2q + 1)$$

$$d = aq^3 \text{ و } c = aq^2, b = aq \text{ پس } q = \frac{b}{a} \text{ فرض کنید } ۲۵$$

$$\text{سمت چپ} : (b-c)^2 = (aq - aq^2)^2 = a^2 q^2 (1-q)^2$$

$$\begin{aligned} \text{سمت راست} : ac + bd - 2ad &= a(aq^2) + (aq)(aq^3) - 2a(aq^3) \\ &= a^2 q^2 + a^2 q^4 - 2a^2 q^3 = a^2 q^2 (1 + q^2 - 2q) \\ &= a^2 q^2 (1-q)^2 = \text{سمت چپ} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b^x = ac \\ 2b = a + c \end{cases} \rightarrow x^x - (2b)x + b^x = 0$$

a و c ریشه‌های معادله‌ی $x^x - (2b)x + b^x = 0$ هستند، یعنی $(x - b)^x = 0$ و یا $x = b$ پس $a = c = b$ بنابراین قدر نسبت تصاعد هندسی و حسابی به ترتیب ۱ و ۰ است.

دنباله هندسی‌ای را می‌نویسیم که جمله‌ی اول آن ۱۰۰۰ و قدر نسبت آن $\frac{9}{10}$ است.

۷۲۹ نفر زندگی می‌کنند. ۱۰۰۰, ۹۰۰, ۸۱۰, ۷۲۹

$$q = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{5}} = -\frac{5}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{-\frac{1}{5} \left(\left(-\frac{5}{2} \right)^{20} - 1 \right)}{-\frac{5}{2} - 1} = -\frac{1}{45} \left(\left(\frac{5}{2} \right)^{20} - 1 \right)$$

$$q = \frac{2}{1} = 2$$

$$S_{20} = \frac{a(q^{20} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \times (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 2^{20} - 1$$

چون a, b, c تشکیل دنباله هندسی می‌دهند، پس $b^2 = ac$ حال باید ثابت کنیم $\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{a} \times \frac{1}{c}$ داریم:

$$b^x = ac \rightarrow \frac{1}{b^x} = \frac{1}{ac} \rightarrow \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{a} \times \frac{1}{c}$$

