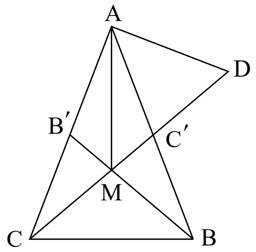
نام آزمون: نمونه سوال تشریحی فصل ۱و۲ هندسه

دهم سخت

آموزشگاه پرسا

۱) دو خط متقاطع $d$ و $d'$ را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از نقطهٔ $O$ (محل تقاطع) به فاصلهٔ $۵cm$ بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.

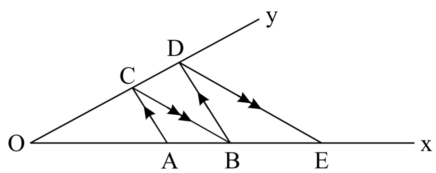
۲) در مثلث متساوی‌الساقین $ABC$ $(AB = AC)$ محل تلاقی نیمسازهای دو زاویهٔ $B$ و $C$ را $M$ و نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ $C$ با عمودی که در نقطهٔ $A$ بر $AC$ رسم شده است را نقطهٔ $D$ می‌نامیم. ثابت کنید مثلث $AMD$ متساوی‌الساقین است.




۳) میانگین هندسی دو عدد $۵\sqrt{۳}$ و $۱۲\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

۴) اگر $\frac{x}{y} = \frac{۷}{۵}$ , $\frac{y}{z} = \frac{۳}{۸}$ باشد، حاصل $\frac{x}{z}$ را به‌دست آورید.

۵) بر ضلع $Ox$ از زاویهٔ $x\hat{O}y$ دو نقطهٔ $A$ و $B$ را اختیار کرده و از این نقاط دو خط موازی هم رسم می‌کنیم تا ضلع $Oy$ را به‌ترتیب در نقاط $C$ و $D$ قطع کنند و از نقطهٔ $D$ خطی موازی $BC$ رسم می‌کنیم تا ضلع $Ox$ را در نقطهٔ $E$ قطع کند. ثابت کنید:




$OB^۲ = OA \times OE$

۶) در مثلث $ABC$، $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ و نیمسازهای داخلی زاویهٔ $A$ ضلع $BC$ را در نقطهٔ $D$ قطع می‌کند.

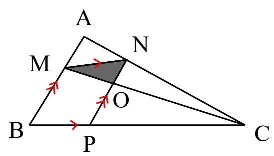
ثابت کنید: $\frac{۱}{AC} + \frac{۱}{AB} = \frac{۱}{AD}$.

۷) مثلثی را رسم کنید که $AB = ۵cm$ و $AC = ۶cm$ دو ضلع و $AM = ۴cm$ میانهٔ وارد بر ضلع سوم آن مثلث باشند.

۸) مثلث $ABC$ را با داشتن $BC = ۸cm$ و $AH = ۵cm$ (ارتفاع) و $AM = ۷cm$ (میانه) رسم کنید.

۹) در مثلث $ABC$، $AD$ نیمساز زاویهٔ $A$ است و $AD = ۴cm$. اگر زاویه‌های $B\hat{D}A$ برابر $۶۰^\circ$ و $B\hat{A}D$ برابر $۳۵^\circ$ باشند، مثلث را ترسیم کنید.

۱۰) در شکل مقابل، $\frac{MA}{MB} = \frac{۲}{۳}$ است. نسبت مساحت مثلث هاشورخورده به متوازی‌الاضلاع $MNPB$ را به‌دست آورید.




۱۱) در مستطیلی که ابعاد آن ۶ و ۸ سانتی‌متر است، نیمساز دو زاویهٔ روبه‌روی هم، قطر مقابل را در دو نقطه قطع می‌کنند. فاصلهٔ این دو نقطه را محاسبه کنید.

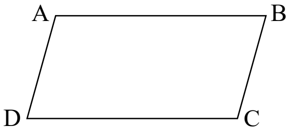
۱۲) ثابت کنید در هر مثلث نسبت ارتفاع‌ها با عکس نسبت اضلاع متناظر آنها برابر است.

۱۳) آیا حکم کلی «محل برخورد ارتفاع‌های تمام مثلث‌ها در داخل آن قرار دارد»، درست است؟

اگر درست است نقیض آن‌را بیان کنید و اگر نادرست است یک مثال نقض ارائه نمایید.

۱۴ ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به‌هم وصل می‌کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع آنهاست.

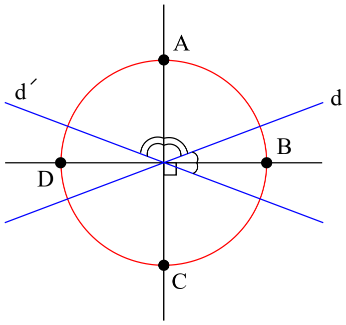
۱۵ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. از نقطهٔ $C$ خطی چنان رسم می‌کنیم که امتداد خطوط $AD$ و $AB$ را در نقاط $F$ و $E$ قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=1$.



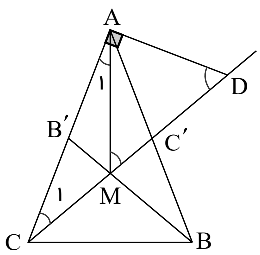
# پاسخنامه تشریحی

۱

ابتدا نیمساز هر دو زاویه‌ای که دو خط باهم می‌سازند را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز $O$ و به شعاع $5cm$ یک دایره رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با دو نیمساز جواب مسأله است. ۴ نقطهٔ $A$، $B$، $C$ و $D$ از دو خط به یک فاصله‌اند و از $O$ به فاصلهٔ $5cm$ هستند.




۲ می‌دانیم سه نیمساز همرس‌اند، یعنی $AM$ نیمساز زاویهٔ $A$ است. زاویهٔ $A\hat{M}D$ زاویهٔ خارجی مثلث $AMC$ است پس:




$$A\hat{M}D = \hat{A}_1 + \hat{C}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \quad (1)$$

اما در مثلث قائم‌الزاویه $ACD$ $(C\hat{A}D = 90^\circ)$ داریم:

$$A\hat{D}M = 90^\circ - \hat{C}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$$

و چون $\hat{B} = \hat{C}$ است پس:

$$A\hat{D}M = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \quad (2)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $A\hat{M}D = A\hat{D}M$ ، یعنی مثلث $AMD$ متساوی‌الساقین است.

۳

$$a^2 = bc \Rightarrow a^2 = 12\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 60 \times 3 = 180 \Rightarrow a = \sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$$

۴

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{5} \\[2mm] \dfrac{y}{z} = \dfrac{3}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{7}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{21}{40}$$

۵

فرض : $\left\{\begin{array}{l} AC || BD \\ BC || DE \end{array}\right.$ حکم : $OB^2 = OA \times OE$

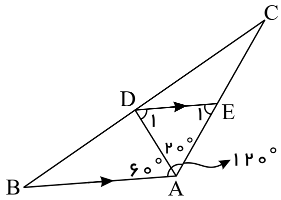
$$\overset{\Delta}{OBD} : AC || BD \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{OED} : BC || DE \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD} \quad (2)$$

(۱) و (۲) $\rightarrow \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OB}{OE} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} OB^2 = OA \times OE$

۶

$$\begin{cases} \text{فرض} : \hat{A} = ۱۲۰^\circ \\ \text{حکم} : \dfrac{۱}{AD} = \dfrac{۱}{AB} + \dfrac{۱}{AC} \end{cases}$$




از نقطهٔ $D$ موازی $AB$ رسم تا ضلع $AC$ را در نقطهٔ $E$ قطع کند.

$DE||AB \xrightarrow{AD \text{ مورب}} B\hat{A}D = A\hat{D}E = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{E}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow$ $\overset{\Delta}{AD}E$ متساوی‌الاضلاع است.

$$\overset{\Delta}{AB}C : DE||AB \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{CE}{AC} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{AD}{AB} \xrightarrow{\div AD} \frac{CE}{AC \times AD} = \frac{۱}{AB} \quad (۱)$$

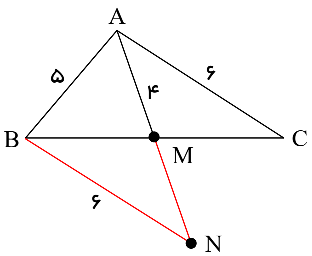
در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{AC} \overset{(۱)}{=\!=} \frac{CE}{AC \times AD} + \frac{۱}{AC} = \frac{CE + \overbrace{AD}^{AE}}{AC \times AD} = \frac{AC}{AC \times AD} = \frac{۱}{AD}$$

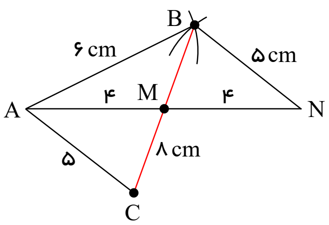
**۷**

شکل فرضی مثلث $ABC$ را رسم می‌کنیم.

ابتدا مثلث $ABN$ به اضلاع ۵ و ۶ و ۸ را رسم می‌کنیم.

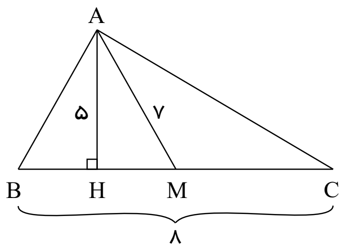



سپس از نقطهٔ $B$ به وسط $AN$ نقطهٔ $M$ وصل کرده و به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ $C$ حاصل شود از $A$ به $C$ وصل می‌کنیم. $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.

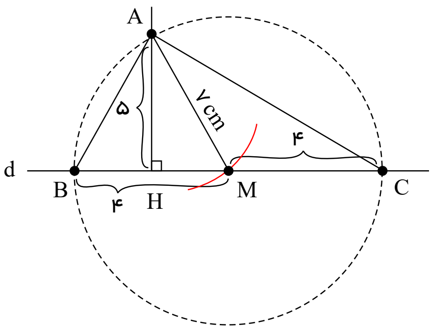



**۸** شکل فرضی مثلث را در نظر می‌گیریم.

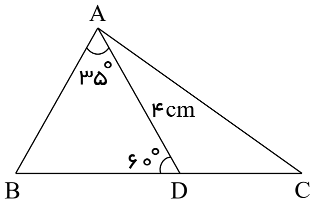
ابتدا خط $d$ را رسم کرده و روی خط $d$ نقطهٔ دلخواه $H$ را انتخاب و عمودی از آن نقطه خارج می‌کنیم و روی آن به اندازهٔ $AH = ۵$ جدا کرده و از نقطهٔ $A$ به اندازهٔ $AM = ۷$ یک کمان می‌زنیم تا خط $d$ را در نقطهٔ $M$ قطع کند.



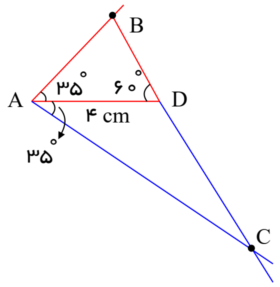

به مرکز $M$ و به شعاع $۴cm$ یک دایره رسم می‌کنیم تا خط $d$ را در نقاط $B$ و $C$ قطع کند از $A$ به $B$ و $C$ وصل می‌کنیم. $\overset{\Delta}{ABC}$ جواب مسأله است.




**۹**

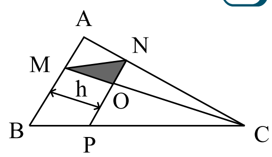



شکل تقریبی سؤال را در نظر می‌گیریم. بنابراین ابتدا $\overset{\triangle}{BDA}$ را با «زض‌ز» معلوم رسم می‌کنیم.




سپس زاویهٔ $C\hat{A}D$ را به اندازهٔ $۳۵^\circ$ رسم می‌کنیم و ضلع $BD$ را امتداد داده تا نقطهٔ $C$ حاصل شود. $\overset{\triangle}{ABC}$ جواب مسأله است.

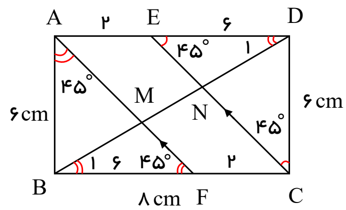
۱۰




$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABC}: NP \parallel AB \Rightarrow \dfrac{CN}{AC}=\dfrac{NP}{AB}\\ \overset{\triangle}{ACM}: ON \parallel AM \Rightarrow \dfrac{ON}{AM}=\dfrac{CN}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ON}{AM}=\frac{NP}{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \dfrac{ON}{NP}=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{۲}{۲+۳}=\dfrac{۲}{۵}\\ \dfrac{S_{\overset{\triangle}{ONM}}}{S_{MNPB}}=\dfrac{\frac{۱}{۲}ON\times h}{NP\times h}=\dfrac{ON}{۲NP}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{OMN}}}{S_{MNPB}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۵}$$

۱۱




$$\overset{\triangle}{ABD}: AB^۲+AD^۲=BD^۲ \Rightarrow ۶^۲+۸^۲=BD^۲ \Rightarrow BD=۱۰$$

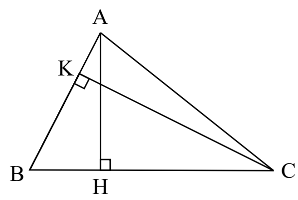
$$\left.\begin{array}{ll}\overset{\triangle}{ABF}: \hat{A}=\hat{F}=۴۵^\circ \Rightarrow & AB=BF=۶cm\\ \overset{\triangle}{DCE}: \hat{C}=\hat{E}=۴۵^\circ \Rightarrow & DE=DC=۶cm\\ & \hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABF}\cong\overset{\triangle}{DCE} \Rightarrow AF=CE$$

$$\left.\begin{array}{ll}AD \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } BD} & \hat{D}_۱=\hat{B}_۱\\ & \hat{E}=\hat{F}=۴۵^\circ\\ & DE=BF=۶cm\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{DEN}\cong\overset{\triangle}{BFM} \Rightarrow BM=DN$$

$$\overset{\triangle}{AMD}: EN \parallel AM \xrightarrow{\text{ق تالس}} \frac{DE}{AD}=\frac{DN}{DM} \Rightarrow \frac{۶}{۸}=\frac{DN}{DM} \xrightarrow{\text{ترکیب صورت و مخرج}} \frac{۶}{۱۴}=\frac{DN}{\underbrace{DM+DN}_{BD}}$$

$$\Rightarrow \frac{۶}{۱۴}=\frac{DN}{۱۰} \Rightarrow DN=\frac{۳۰}{۷}=BM \Rightarrow MN=۱۰-۲\times\frac{۳۰}{۷}=\frac{۱۰}{۷}$$

۱۲

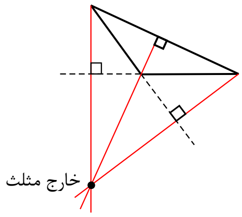



حکم : $\dfrac{AH}{CK}=\dfrac{AB}{BC}$

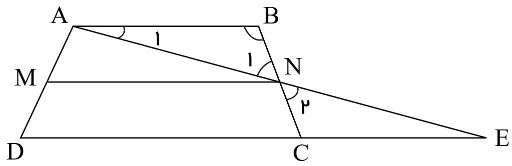
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}CK\times AB$$

$$\Rightarrow AH\times BC=CK\times AB \Rightarrow \frac{AH}{CK}=\frac{AB}{BC}$$

**۱۳** خیر درست نیست زیرا محل برخورد ارتفاع‌های یک مثلث، یا داخل مثلث قرار دارد (هر سه زاویه تند باشد) یا روی مثلث (رأس قائمه) قرار دارد (قائم‌الزاویه باشد) و یا در بیرون مثلث قرار دارد (یک زاویهٔ منفرجه داشته باشد).




**۱۴** در ذوزنقهٔ $ABCD$ وسط ساق $AD$ را $M$ و وسط ساق $BC$ را $N$ می‌نامیم و از $M$ به $N$ وصل می‌کنیم. حال از $A$ به $N$ وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا امتداد قاعدهٔ $CD$ را در نقطهٔ $E$ قطع کند. دو مثلث $ABN$ و $NCE$ هم‌نهشت هستند. پس $AB = CE$ و $AN = NE$ است و $DE = DC + CE = DC + AB$. از طرفی، چون $MN||DE$ و نقطه‌های $M$ و $N$ وسط ضلع‌های $AD$ و $AE$ از مثلث $ADE$ هستند. طبق قضیهٔ تالس داریم:




$$\overset{\triangle}{ADE}: \frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DE} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

**۱۵** با توجه به شکل و قضیهٔ تالس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} BC||AF \rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{FC}{EF} \\ DC||AE \rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{EC}{EF} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{FC}{EF} + \frac{EC}{EF} = \frac{FC + EC}{EF} = \frac{EF}{EF} = 1 \rightarrow \frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = 1$$