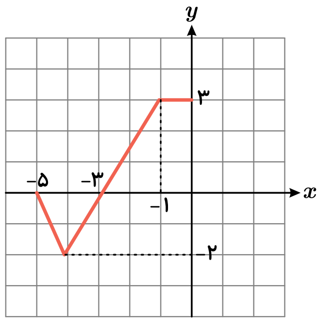
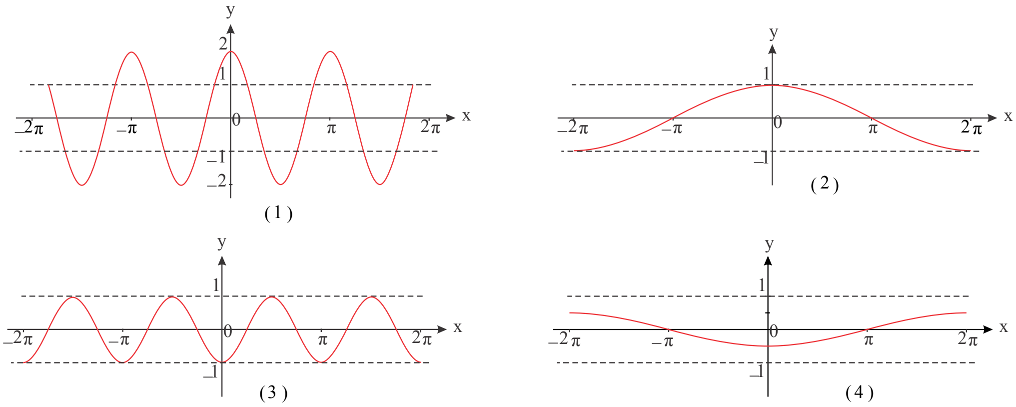
۱. تابع $y = x^{۳}$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع f حاصل شود. ضابطهٔ تابع وارون تابع f را بیابید.

۲. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $g(x) = ۲f(-x)$ را بنویسید.



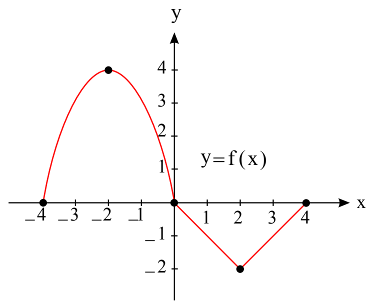
۳. نمودار توابع $y = -\sin ۲x - ۱$ و $y = ۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار $y = \sin x$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

۴. با استفاده از نمودار $y = \cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطهٔ هر نمودار را مشخص کنید.



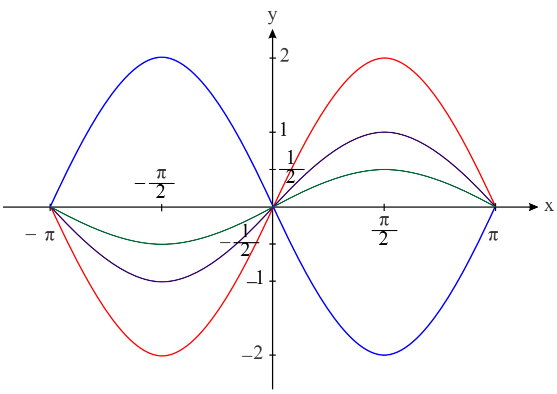
الف) $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ب) $y = ۲\cos ۲x$ پ) $y = \cos(\frac{۱}{۲}x)$ ت) $y = -\cos ۲x$

۵. نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۴,۴]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.

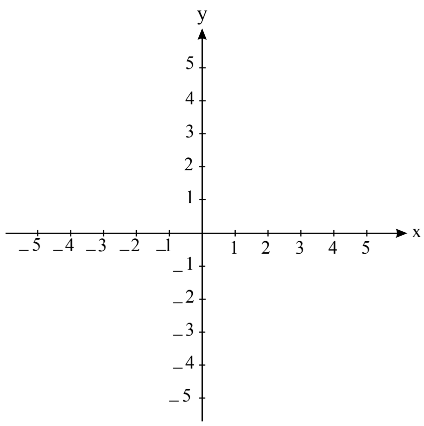


x	$f(x)$
-۴	۰
-۲	۴
۰	۰
۲	-۲
۴	۰

۶. در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$، $y=۲\sin x$، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

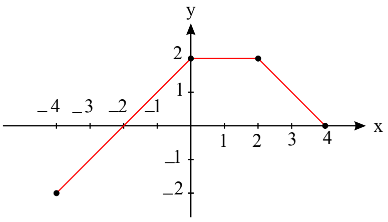


۷. نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازهٔ $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.



۸. نمودار $y=\sqrt[۳]{x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل را ۴ واحد به راست منتقل می‌کنیم و سپس آن را ۳ واحد به پایین می‌بریم تا تابع f حاصل شود. ضابطهٔ تابع وارون تابع f را بیابید.

۹. با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف

$y=\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱$

ب

$y=۲f(x-۱)-۳$

۱۰. با فرض $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g=\{(۳,-۱),(۰,۲),(۴,۱),(۱,-۲)\}$، دامنه، برد و اعضای تابع ترکیب fog را مشخص کنید.

۱۱. اگر بدانیم: $f(x)=x+b$، $g(x)=ax^۲-bx+c$ و $gof(x)=-x^۲-۳x+۷$، مقدار پارامتر c را به‌دست آورید.

۱۲. اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و fof را به‌دست آورید.

۱۳. تابع $h(x)=x-۲$ را از ترکیب کدام دو تابع می‌توان به‌دست آورد؟

الف) $f(x)=x^۲\ ,\ g(x)=\sqrt{x-۲}$ ب) $f(x)=\sqrt{x}\ ,\ g(x)=(x-۲)^۲$

۱۴. f تابعی اکیداً صعودی و g تابعی اکیداً نزولی است. نشان دهید تابع‌های ترکیب fog و gof هردو اکیداً نزولی هستند.

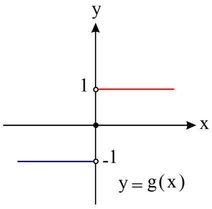
۱۵. تابع خطی f در رابطهٔ $fof(x)=۲+۳x$ صدق می‌کند. ضابطهٔ تابع f را به‌دست آورید.

۱۶. ضابطهٔ تابع مرکب gof را با فرض $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & ;x>۰ \\ x-۱ & ;x\leq ۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۳x-۲ & ;x>۰ \\ ۱-۴x & ;x\leq ۰\end{cases}$ به‌دست آورید.

۱۷. دانش‌آموزی دامنهٔ تابع مرکب $y=\frac{۳x-۲}{-۲x+۳}$ را که از ترکیب دو تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ به دست آمده است از روی ضابطهٔ آن به صورت $x\neq+\frac{۳}{۲}$ تعیین نموده است، آیا پاسخ او درست است؟ در صورت اشتباه بودن، پاسخ درست و دلیل این اشتباه را تعیین نمائید.

۱۸. اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $f=\{(x,2x-1), x\in A\}$ تابع $f(f(x))$ را با زوج‌های مرتب نمایش دهید.

۱۹. باتوجه به نمودار تابع g، ضابطهٔ تابع gof را برای $f(x)=4-x^2$ به‌دست آورید.



۲۰. تابع $h(x)=9^x-3^{x+1}$ را به‌صورت ترکیب دو تابع دیگر بنویسید.

۲۱. با فرض $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ و $gof(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$، مقدار $g(3)$ را به‌دست آورید.

۲۲. برای تابع $f(x)=\dfrac{-x}{x-1}$، ضابطهٔ تابع مرکب fof رابه‌دست آورید. دامنهٔ تابع fof چگونه است؟

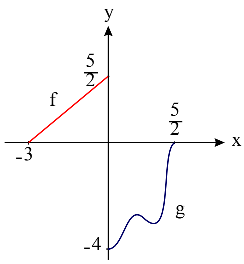
۲۳. تابع $f=\{(-1,3),(2,-1),(0,2),(6,0)\}$ مفروض است. تابع ترکیب $h=(f^2+f)of$ را با اعضایش مشخص کنید.

۲۴. برای تابع‌های $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=2x+1$، ریشه‌های معادلهٔ $fog(x)=gof(x)$ را به‌دست آورید.

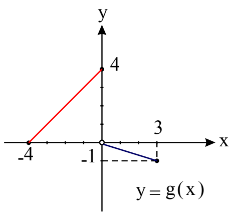
۲۵. ضابطهٔ تابع ترکیب $y=fog(x)$ را برای تابع‌های f و g با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}2x-3 & ; x>0\\ x^2-1 & ; x\leq 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x^2+1 & ; x\geq 2\\ -2\sqrt{x} & ; 0\leq x<2\end{cases}$ به‌دست آورید.

۲۶. اگر $f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ و $g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

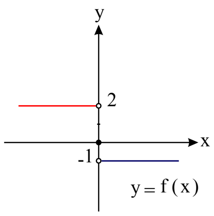
۲۷. نمودارهای توابع f و g در شکل رسم شده‌اند. دامنهٔ ترکیب gof را به‌دست آورید.



۲۸. نمودار تابع‌های f و g مطابق شکل‌های زیر رسم شده‌اند. مقدار عبارت $fog(3)+gof(1)$ را به‌دست آورید.



،



۲۹. برای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$، ضابطهٔ تابع‌های ترکیب $fof(x)$ و $fofof(x)$ را به‌دست آورید.

۳۰. ترکیب تابع همانی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با خودش برابر تابع همانی شده است. رابطهٔ بین ضرایب a و d را به‌دست آورید.

۳۱. برای توابع اکیداً نزولی f و g نشان دهید تابع‌های ترکیبی fog و gof هردو صعودی اکید هستند.

۳۲. برای تابع‌های اکیداً صعودی f و g نشان دهید که تابع‌های ترکیبی fog و gof نیز اکیداً صعودی هستند.

۳۳. باتوجه به ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۱-۲x}$ و $g(x)=\frac{۱-۳x}{x+۲}$، دامنهٔ تابع مرکب fog و ضابطهٔ آن را به‌دست آورید.

۳۴. با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آن‌ها را حل کنید.

الف) $f(x)=۲x-۵ \quad , \; g(x)=x^۲-۳x+۸ \quad : \; (fog)(x)=۷$

ب) $f(x)=۳x^۲+x-۱ \quad , \; g(x)=۱-۲x \quad : \; (gof)(x)=-۵$

۳۵. موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

الف

$f(x)=x^۲-۵ \;\; ; \; g(x)=\sqrt{x+۶} \quad : \; D_{fog},(fog)(x)$

ب

$f(x)=\sqrt{۲x-۳} \;\; ; \; g(x)=\frac{۶}{۳x-۵} \quad : D_{fog},(fog)(x)$

پ

$f(x)=\sqrt{x+۲} \;\; ; \; g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶} \quad : \; D_{gof},(gof)(x)$

ت

$f(x)=\sin x \;\; ; \; g(x)=\sqrt{x} \quad : \; D_{gof},(gof)(x)$

۳۶. شرکت خودروسازی سایپا به مناسبت سالگرد پیروزی انقلاب اسلامی ایران خودروهایش را با تخفیف ۱۵ درصدی به معرض فروش گذاشته است. از طرفی هر سال در عید مبارک فطر، این شرکت به مشتریانش دو میلیون تومان تخفیف نقدی می‌دهد، کوروش می‌خواهد از این شرکت یک دستگاه خودرو پراید به قیمت ۵۰ میلیون تومان خریداری نماید. به کمک تابع مرکب، پیش‌بینی کنید که کدام‌یک بیشتر به سود کوروش خواهد بود ← ابتدا تخفیف دو میلیون تومانی را دریافت نموده سپس از تخفیف ۱۵ درصدی بهره ببرد یا برعکس ابتدا از تخفیف ۱۵ درصدی استفاده کند سپس دو میلیون تومان تخفیف بگیرد. (فرض کنید که در سال جاری، سالگرد پیروزی انقلاب با عید فطر مصادف شده است.)

۳۷. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\leq x<۲\\ ۳x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$$

۳۸. اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|۲x-۱|)-f(|x+۱|)}$$

۳۹. توابع f و g هردو اکیداً نزولی هستند و تابع fog تعریف شده است. اگر $fog(m^۲)=۲a-۱$ و $fog(m^۲+۱)=-a+۴$ باشند، حدود a را بیابید.

۴۰. اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-۲)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{(x^۲-۸۱)f(x)}$$

۴۱. اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{(x^۲-۳x)f(x)}$$

۴۲. اگر f روی $\mathbb{R}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-۲|)-f(|x+۱|)}$$

۴۳. اگر f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\sqrt{f(|x-۳|)-f(|x+۲|)}$$

۴۴. صعودی و نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x)=[-۲x]+۱$$

۴۵. با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

۴۶. اگر $f=\{(۳,۲),(۲,۰),(۰,-۳)\}$ و $g(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & ;x>۰\\ x^۲-۱ & ;x\leq ۰\end{cases}$ بوده و تساوی $f^{-۱}og(m)=۲$ نیز برقرار باشد، مقدار m را به‌دست آورید.

۴۷. برای تابع‌های اکیداً صعودی f و g نشان دهید توابع ترکیب $g^{-۱}of^{-۱}$ و $f^{-۱}og^{-۱}$ نیز اکیداً صعودی هستند.

۴۸. برای توابع $f=\{(۴,-۱),(۳,۱),(۵,۲)\}$ و $g=\{(-۱,۲),(۴,۰),(۵,۳)\}$، تابع‌های ترکیب $gof^{-۱}$ و $fog^{-۱}$ را به‌دست آورید.

۴۹. با فرض معکوس‌پذیری توابع f و g، معکوس تابع $f(x)=۱-\dfrac{g(x-۱)}{۳}$ را تعیین کنید.

۵۰. تحقیق کنید تابع مقابل یک به یک است و سپس ضابطهٔ تابع معکوس آن را بنویسید.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$$

۵۱. با فرض $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=x^{۲}+mx-۲$، اگر $(g^{-۱}of^{-۱}og^{-۱})(-۱)=۰$ باشد، مقدار m را به‌دست آورید.

۵۲. هرگاه بدانیم: $f(x)=x^{۲}-۳x$ ، $g(x)=x^{۲}+mx$ و $(f^{-۱}og^{-۱}of^{-۱})(۰)=۲$، مقدارهای ممکن برای m را به‌دست آورید.

۵۳. برای تابع $f=\{(۲,-۱),(۱,۳),(۰,۴)\}$، تابع‌های ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید. آیا توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ باهم برابرند؟

۵۴. ضابطهٔ تابع وارون توابع یک به یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{-۸x+۳}{۲}$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

۵۵. جواب(های) معادلهٔ $fof^{-۱}(۲x)-f^{-۱}of(x)=۳x-۸$ را با فرض $f(x)=x^{۳}-۳x+۹$ به‌دست آورید.

۵۶. برای تابع وارون‌پذیر f، تابع‌های ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ چه زمانی باهم برابر می‌شوند؟

۵۷. با فرض $f(x)=x+۱$ و $g(x)=۲x^{۲}-۳x$، صفرهای تابع $y=(gof^{-۱})(x)$ را به‌دست آورید.

۵۸. باتوجه به ماشین $x\to\boxed{g}\to\boxed{f}\to x$، اگر $f(x)=\dfrac{۵x+۶}{۲x-۱}$ و تابع g معکوس‌پذیر باشد و داشته باشیم $g(a)=۳$، مقدار a را به‌دست آورید.

۵۹. برای تابع $f=\{(-۱,۱),(۱,-۱),(۲,۰),(۴,-۲)\}$، تابع‌های ترکیب $h=fo(f^{۲}+f)$ و $k=(f^{۲}+f)of^{-۱}$ را با اعضایشان مشخص کنید.

۶۰. اگر $f(x)=\dfrac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$ ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

۶۱. در مورد هریک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\dfrac{-۷}{۲}x-۳ \quad , \quad g(x)=-\dfrac{۲x+۶}{۷}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸} \quad , \quad g(x)=۸+x^{۲}\ ;\ x\le ۰$

۶۲. توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آن‌ها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف

$f(x)=|x|$

ب

$g(x) = -x^{۲}$

پ

$h(x) = x^{۲} + ۴x + ۳$

۶۳. تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۴x - x^{۲} - ۳ & , \quad x < ۲ \\ x - ۲ & , \quad x \geq ۲ \end{cases}$ مفروض است. ضابطهٔ تابع معکوس را به دست آورید.

۶۴. ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = ۲\sin^{۴} x - ۵$ ب) $g(x) = -۳\sin^{۵} ۲x + ۱۰$

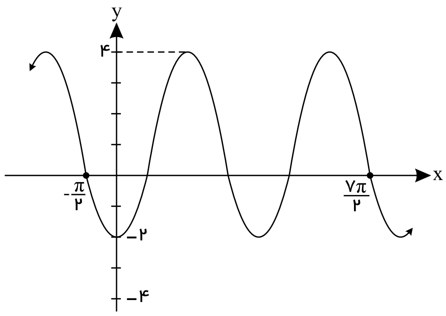
۶۵. دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{\tan^{۲} x - ۱}$ را بیابید.

۶۶. نمودار هریک از توابع داده‌شده را رسم کرده و بیشترین و کمترین مقدار و دورهٔ تناوب تابع را مشخص کنید.

الف) $y = |\sin x|$

ب) $y = |\cos ۲x|$

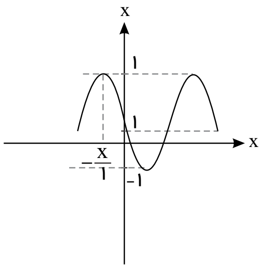
۶۷. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a\cos bx + c$ به‌صورت مقابل رسم شده است. مقادیر a، b و c را به دست آورید.



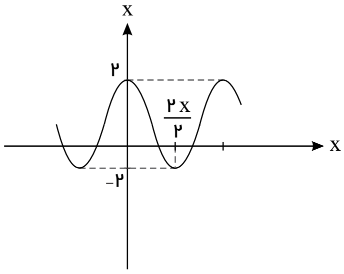
۶۸. برد تابع $f(x) = [\pi \cos ۲x - \frac{\pi}{۲}]$ را بیابید. ([ ] جزء صحیح است)

۶۹. در تابع $f(x) = \sqrt{۲}\cos(\frac{۱}{۳}x) - ۱$، دورهٔ تناوب و نسبت ماکزیمم تابع به مینیمم آن را بیابید.

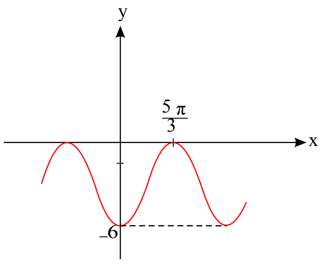
۷۰. نمودار تابع $f(x) = a\sin bx + c$ به‌صورت زیر است، ضابطهٔ آن را بیابید.



۷۱. نمودار تابع $f(x) = a\cos bx + c$ به‌صورت زیر است. ضابطهٔ آن را بیابید.

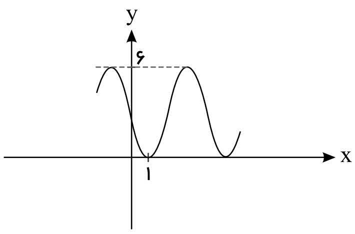


۷۲. نمودار تابع $f(x) = a\cos bx + c$ به‌صورت زیر است، ضابطهٔ آن را بیابید.

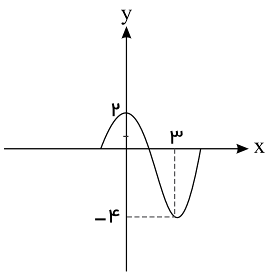


۷۳. اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin(mx) + m$ برابر ۴π باشد، ماکزیمم تابع را بیابید. $(m > ۰)$

۷۴. اگر نمودار تابع $f(x) = a\sin bx + c$ به‌صورت زیر باشد، ضابطهٔ تابع را بیابید.



۷۵. نمودار تابع $f(x) = a\cos bx + c$ به‌صورت زیر است، ضابطهٔ این تابع را بیابید.



۷۶. ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = ۳\cos^۲ ۲x - ۶$ ب) $g(x) = -\pi\cos^۳ ۴x - \frac{\pi}{۲}$

۷۷. اگر $\tan\alpha \geq \frac{\sqrt{۳}}{۳}$، آنگاه حدود α را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ بیابید.

۷۸. اگر $\sin\alpha = ۲m - ۱$ و $\tan\alpha = m + ۱$ و $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ آنگاه حدود m را بیابید.

۷۹. اگر $\tan\alpha \leq -۱$، آنگاه حدود α را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ بیابید.

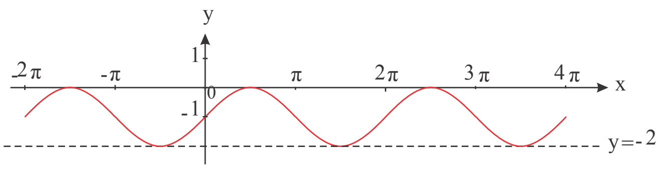
۸۰. با توجه به اطلاعات داده‌شده محدودهٔ m را به دست آورید.

الف) $\tan\theta = ۴ + ۲m,\ \pi \le \theta < \frac{۳\pi}{۲}$

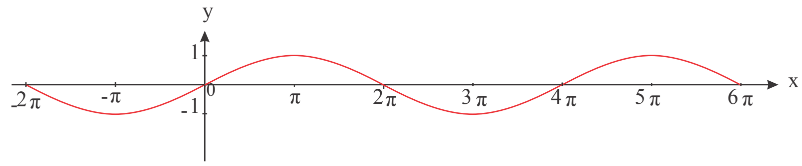
ب) $\tan\theta = -۱ + ۲m,\ \frac{۳\pi}{۴} < \theta < \frac{۵\pi}{۶}$

۸۱. ضابطهٔ هریک از توابع داده‌شده به‌صورت $y = \sin bx + c$ است. مقدار b, c و دورهٔ تناوب تابع را مشخص کنید.

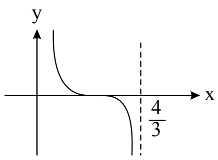
الف



ب

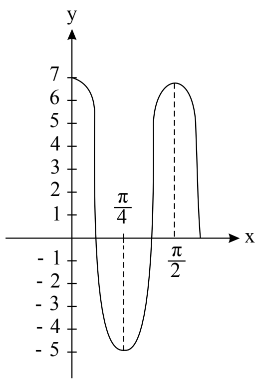


۸۲. اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \tan(ax + \frac{۱}{۲})\pi$ به شکل زیر باشد، a کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

۸۳. نمودار داده‌شده مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin bx + c$ و یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. باتوجه به نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را بنویسید.



۸۴. معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳$$

۸۵. اگر $\frac{\pi}{۳} < \alpha < \frac{۵\pi}{۶}$ و $\tan\alpha = \frac{۲m - ۱}{۳}$، آنگاه حدود m را بیابید.

۸۶. معادلات زیر را حل کنید.

الف

$\sin ۳x + ۲\cos ۲x = ۲$

۸۷. جوابهای کلی معادلهٔ زیر را بیابید.

$\sin^۳ \pi x + \cos^۳ \pi x = ۰$

۸۸. جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۳x + \sin ۵x = ۰$ را بیابید.

۸۹. جواب‌های کلی معادلهٔ زیر را بیابید.

$\tan ۴x = \cot(\frac{\pi}{۳} + ۴x)$

۹۰. معادلهٔ $\sin(\frac{x}{۲}) + \cos(\frac{x}{۲}) = ۰$ در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۹۱. معادلهٔ زیر چند جواب در بازهٔ $[۰, \pi]$ دارد؟

$\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{x}{۴} + \pi)$

۹۲. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin ۲x + ۳\cos x = ۰$

ب) $۴\sin(\frac{x}{۲})\cos(\frac{x}{۲}) = ۱$

۹۳. معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin^۲ x - \sqrt{۲}\sin x = ۰$

ب) $۲\cos^۲ x - \sqrt{۳}\cos x = ۰$

۹۴. جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی زیر را بیابید.

$\cos(۴x + \frac{\pi}{۴}) + \sin ۳x = ۰$

۹۵. معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$۴\sin^۲ x - ۲(\sqrt{۲} + ۱)\sin x + \sqrt{۲} = ۰$

۹۶. معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $۲\cos^۲ ۳x + \cos ۳x = ۰$

ب) $\sin ۵x + \cos ۳x = ۰$

۹۷. معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$\tan^۳ x - \tan^۲ x + ۱ = \tan x$

۹۸. معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کرده و جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ را بیابید.

$$\sin x + \cos^۲ x = \frac{۱}{۴}$$

۹۹. معادلهٔ مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$۲\sin^۲ x + ۹\cos x + ۳ = ۰$$

۱۰۰. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) معادلهٔ $\sqrt{۸\cos x - \sqrt{۲}} = ۰$ در بازهٔ $[-۳\pi, \pi]$ دو جواب دارد.

۱۰۱. حاصل حد مقابل را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{۵\pi}{۴}} \frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x + ۱}$$

۱۰۲. حاصل $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{۱+\cos x}$ را بیابید.

۱۰۳. حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n + ۳x^۴ - x^۲ + ۱}{۲x^n - x^۴ + ۵}$ را به‌ازای مقادیر مختلف n $(n\in\mathbb{N})$ به دست آورید.

۱۰۴. تابع $f(x) = \frac{۱}{x-۳}, x > ۳$ مفروض است، برای اینکه $f(x)$ بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ باشد، x در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

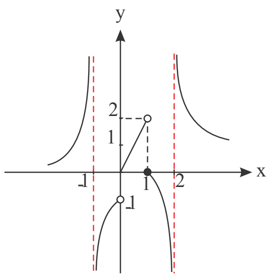
۱۰۵. تابع $f(x) = \frac{۱}{۴-x}, x > ۴$ مفروض است، برای آنکه $f(x)$ کمتر از -۱۰۰۰ باشد، x در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

۱۰۶. تابع $f(x) = \frac{۱}{x+۵}, x < -۵$ مفروض است، برای آنکه $f(x)$ کمتر از -۱۰۰۰۰ باشد، x در چه محدوده‌ای باید قرار داشته باشد؟

۱۰۷. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.

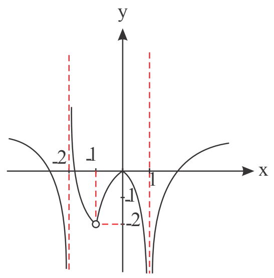
الف) $\lim_{x\to ۲^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)$

ج) $\lim_{x\to ۱^-} fof(x)$ د) $\lim_{x\to ۰^-} fof(x)$



۱۰۸. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 1} f(x)$ ب) $\lim_{x\to (-2)^-} f(x)$ ج) $\lim_{x\to -1} fof(x)$

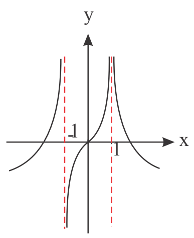


۱۰۹. اگر $\lim_{x\to -3} \dfrac{x+1}{x^2+mx+n} = -\infty$ آنگاه m و n را بیابید.

۱۱۰. حاصل $\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \dfrac{1-x}{\sqrt{2}\cos x+1}$ را بیابید.

۱۱۱. نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to (-1)^-} [\dfrac{-1}{f(x)}]$ ب) $\lim_{x\to 1} [\dfrac{-1}{f(x)}]$ ج) $\lim_{x\to (-1)^+} [\dfrac{x}{f(x)}]$



۱۱۲. تابع $f(x)=\log_2^{(x-1)}$ را در نظر بگیرید و حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to 1^+} (\dfrac{x+2}{f(x)})$

۱۱۳. با فرض $f(x)=\log_{0/3}^{x}$ حاصل $\lim_{x\to 0^+} [\dfrac{x+2}{f(x)}]$ را بیابید. ($[\,]$ نماد جزء صحیح است.)

۱۱۴. با فرض $f(x)=\log_{0/2}^{(x+1)}$، حاصل $\lim_{x\to (-1)^+} [\dfrac{x-2}{f(x)}]$ را بیابید. ($[\,]$ نماد جزء صحیح است.)

۱۱۵. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to \pi^+} \frac{[\cos 4x]}{\tan x}$$

ب

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[\cos 2x]}{\cos x}$$

پ

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos x}{1-\sin x}$$

ت

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{(x-6)(2x-7)(4x+1)}{17x^3+5}$$

ث

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+2)^2+(x-2)^2}$$

۱۱۶. حاصل حدهای زیر را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^-} \left[\frac{x+1}{\tan x}\right]$$

ب

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \left[\frac{2-x}{\tan x}\right]$$

۱۱۷. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\cos 2x}$$

ب

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{1-\cos x}$$

۱۱۸. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{(x-3)^2}$$

ب

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$$

۱۱۹. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{2\sin x-1}$$

ب

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin x}{2\cos x-1}$$

۱۲۰. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+3}{\sin x}$$

ب

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-x}{1-\cos x}$$

۱۲۱. حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim_{x\to ۴^+} \frac{۲x+[-x]}{x-۴}$

ب

$\lim_{x\to ۳^-} \frac{[۲x]-۷}{۹-x^۲}$

۱۲۲ . حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim_{x\to ۳} \frac{x+۲}{x^۲-۹}$

ب

$\lim_{x\to -۲} \frac{x-۱}{(x+۲)^۲}$

۱۲۳ . اگر $\lim_{x\to -\infty} (mx^۳-(x-۱)^۳+x^۲+۲)=+\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۱۲۴ . اگر $\lim_{x\to -\infty} ((x+۱)^۳+mx^۳-۴x^۲+۲)=+\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۱۲۵ . اگر $\lim_{x\to -\infty} (mx^۲+(x+۲)^۲-۷x)=+\infty$ ، آنگاه حدود m را بیابید.

۱۲۶ . اگر $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{۲x^n+mx^۳+x^۲-۱}{۴x^۳+x^۲-۳}=-۲$ ، آنگاه m و n را بیابید. $(n\in \mathbb{N})$

۱۲۷ . حاصل $\lim_{x\to \pm\infty} [\frac{-۲x+۱}{x-۲}]$ را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱۲۸ . حاصل حدهای زیر را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف

$\lim_{x\to +\infty} [\frac{۳x+۱}{x+۲}]$

ب

$\lim_{x\to -\infty} [\frac{x+۲}{x-۱}]$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

۱۲۹ . اگر $\lim_{x\to \infty} \frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$ آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x=-۲$ چقدر است؟

۱۳۰ . تابع $f(x)=\frac{x-۳}{x+۱}$ مفروض است، برای این که فاصلهٔ $f(x)$ تا خط $y=۱$ کمتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ باشد، x را باید در چه محدوده‌ای در نظر بگیریم؟

۱۳۱ . اگر $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{mx^n-۲x^۳+۱}{۳x^۴+x^۳+۷}=۵$ ، آنگاه m و n را بیابید.

۱۳۲ . اگر $\lim_{x\to -\infty} \frac{|۲x-۳|+mx}{m|x+۲|+۴x}=-۳$ ، آنگاه m را بیابید.

۱۳۳ . اگر $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-۲$ و $\lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$ ، حاصل حدهای زیر را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x\to +\infty} (f(x)\cdot g(x))$ ب) $\lim_{x\to +\infty} [\frac{f(x)}{g(x)}]$

۱۳۴ . حدود زیر را محاسبه کنید.

الف
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(۴x+۳)^۲+(۳x-۱)^۲}{(۵x+۱۷)^۲}$$

ب
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{۹x^۲+۱}+\sqrt{۴x^۲-x}}{\sqrt{۲۵x^۲+۹}+x}$$

پ
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۶x-\sqrt{۴x^۲+۱}}{۷x+\sqrt{۹x^۲+۸}}$$

ت
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۴]{x}}{\sqrt{۲x+۱۷}}$$

ث
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}-۱۷}{\sqrt{x^۳+۲}}$$

۱۳۵ . حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x+\sqrt{x}}{|۳x-۱|+x}$$

ب
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۴x-\sqrt{x^۲+۱}}{\sqrt{۴x^۲+۳}+x}$$

۱۳۶ . حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|۳x-۱|-x}{|۲-x|+۳x}$$

ب
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|۳x+۲|+x}{|۵-x|+۲x}$$

۱۳۷ . حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x-|x+۲|}{|x-۳|+۴x}$$

ب
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|۲x-۱|-۳x}{۴x-|x-۲|}$$

۱۳۸ . حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{2}(x+1)^{5}+x^{4}}{(2x-1)^{3}(x^{2}+1)^{2}}$$

ب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}+1)^{2}(x^{2}+2)^{2}}{(2-x)^{5}}$$

۱۳۹ . حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-6x^{3}+x^{2}+4}{x^{5}+x^{2}-9x}$$

ب

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^{3}-x^{3}+x^{2}}{-3x^{2}+x-1}$$

۱۴۰ . حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

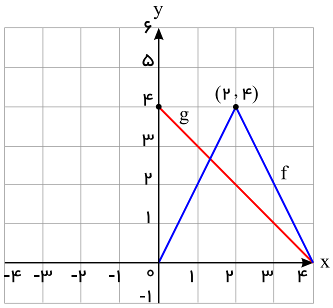
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{5}-2x^{2}-4}{x^{2}+3x}$$

ب

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-6x^{4}+7x^{3}+9}{2x^{4}-x+1}$$

۱۴۱ . مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^{2}}}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

۱۴۲ . نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$، $k'(2)$ و $k'(3)$

۱۴۳ . اگر $4f(a)=f'(a)=2$ مشتق $f^{2}(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ در $x=a$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -6

۳) 4 ۴) 6

۱۴۴ . مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف

$g(x) = \dfrac{(۲x-۱)^۴}{x^۳+۸}$

ب

$f(x) = \sqrt[۳]{۲x+۱}$

۱۴۵ . مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف

$f(x) = (۲\sqrt{x}+۱)(x^۴-۲x)$

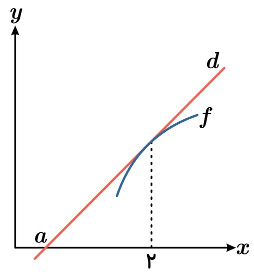
ب

$g(x) = \dfrac{۳x+۱}{x^۵-x+۱}$

۱۴۶ . نقاطی از منحنی $y = \dfrac{۲x+۳}{۱-x}$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط بر خط $y+۵x=۸$ عمود باشد.

۱۴۷ . مشتق تابع $g(x) = \dfrac{۲x+۱}{x+۲}$ را در نقطهٔ -۱ حساب کنید و به کمک آن معادلهٔ خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطهٔ $A(-۱,-۱)$ بنویسید.

۱۴۸ . خط d در نقطه با طول $x=۲$ بر نمودار تابع $f(X) = -x^۲+۶x-۵$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور x ها) را بیابید.



۱۴۹ . اگر f تابعی مشتق‌پذیر بوده و $g(x) = x^۳+۱$ و $(fog)(x) = x^۲+۲$، آنگاه $f'(۰)$ را بیابید.

۱۵۰ . در تابع $f(x) = \dfrac{x^۲}{x+۱}$ حاصل $f''(۱)$ را بیابید.

۱۵۱ . مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{|x+۲|}$ در نقطهٔ $x=-۲$ را بررسی کنید.

۱۵۲ . مشتق‌پذیری توابع زیر را در نقاط داده‌شده بررسی کنید.

الف

$f(x) = x\sqrt{x^۲-۴x+۴} \quad , \quad x_۰ = ۲$

ب

$f(x) = \sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}} \quad , \quad x_۰ = ۰$

پ

$f(x)=\sqrt{|x+۳|} \quad , \quad x_\circ=-۳$

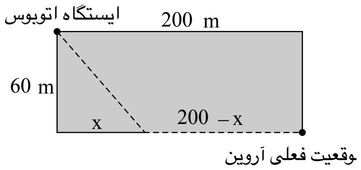
۱۵۳ . نقاط بحرانی تابع $f(x)=۲x^۲-|x|$ را بیابید.

۱۵۴ . مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^۲+|x+۱|$ را در بازهٔ $[-۲,۲]$ بیابید.

۱۵۵ . یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۵۶ . هر صفحهٔ مستطیل‌شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $۳۲cm^۲$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه $۲cm$ و حاشیه‌های کناری هرکدام یک سانتی‌متر درنظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

۱۵۷ . آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰متری غرب و ۶۰متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متربرثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به‌سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $۲ m/s$ عبور کند. باتوجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کم‌ترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



۱۵۸ . ورق فلزی مربع شکل به‌طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

۱۵۹ . نقطهٔ M با کدام طول روی محور xها انتخاب شود به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه $A(۱,۵)$, $B(۷,-۲)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

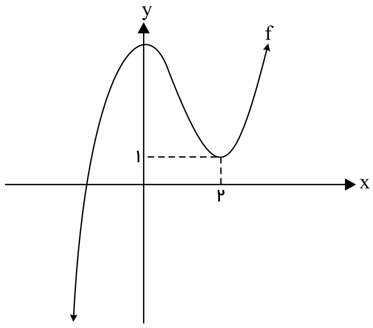
۱۶۰ . می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و درباز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کاررفته در تولید آن مینیمم شود؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱۶۱. بازه‌هایی که تابع $y = x\sqrt{۴ - x^۲}$ بر آنها صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.

۱۶۲. با رسم جدول تغییرات تابع $f(x) = x^۳ - ۲۷x + ۱$ مشخص کنید تابع در کدام بازه‌ها اکیداً صعودی است؟

۱۶۳. نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

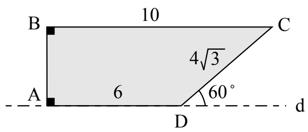
$$f(x) = \begin{cases} x^۳ + ۳x^۲ & x \le ۰ \\ x^۲ - ۶x & x > ۰ \end{cases}$$



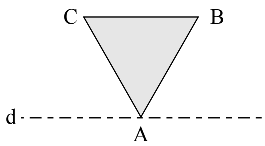
۱۶۴. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ به‌صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.

۱۶۵. ضابطه و دامنهٔ مشتق تابع $f(x) = |x^۲ - ۴|$ را به‌دست آورید و سپس نمودار f' را رسم کنید.

۱۶۶. مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^۲ - ۲x|$ را در نقاط $x_۰ = ۰$ و $x_۰ = ۲$ بررسی کنید و سپس نمودار f و f' را رسم کنید.

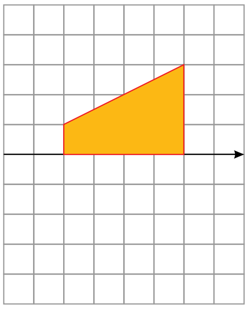


۱۶۷. از دوران ذوزنقهٔ $ABCD$ حول d شکلی با چه حجم به‌دست می‌آید؟



۱۶۸. مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۲\sqrt{۳}$ را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟

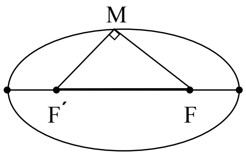
۱۶۹ . در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقهٔ قائمه را حول محور دوران دهیم.الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.
ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



۱۷۰ . مربعی به ضلع ۶ واحد را حول قطرش دوران می‌دهیم. اندازهٔ حجم جسم حاصل چقدر است؟

۱۷۱ . مربعی به ضلع ۴ واحد را حول محوری موازی با یکی از اضلاع آن به فاصلهٔ ۳ واحد نزدیک‌تر، دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چقدر است؟

۱۷۲ . نقطهٔ M روی یک بیضی با کانون‌های F و F' به‌گونه‌ای قرار دارد که MF و MF' برهم عمودند نشان دهید که $MF \times MF' = 2b^2$ است.

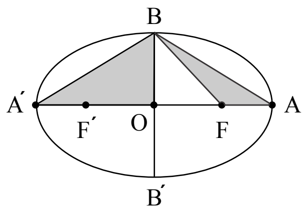


۱۷۳ . یک بیضی بر چهار خط $x = -1$ و $y = -4$ و $y = 6$ مماس است. مختصات کانون‌ها و مرکز تقارن بیضی را پیدا کنید.

۱۷۴ . یک بیضی افقی با دایرهٔ $C : x^2 + y^2 + 2x = 8$ هم‌مرکز است. اگر قطر بیضی دو واحد بزرگ تر از قطر دایره و قطر کوچک بیضی دو واحد کوچک‌تر از قطر دایره باشد، مختصات رئوس و کانون‌ها و مرکز بیضی و فاصلهٔ کانونی و اندازهٔ خروج از مرکز بیضی را بیابید.

۱۷۵ . طول قطر کوچک، فاصلهٔ کانونی و خروج از مرکز یک بیضی را به‌دست آورید که نقاط $A\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}3\\-4\end{matrix}\right.$ دو سر قطر بزرگ بیضی و طول قطر کوچک آن $\frac{3}{4}$ فاصلهٔ کانونی باشد.

۱۷۶ . در بیضی زیر اگر مساحت مثلث BAF یک‌سوم مساحت مثلث $A'OB$ باشد و طول قطر کوچک بیضی ۴ باشد، خروج از مرکز و طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.



۱۷۷ . حدود m را چنان بیابید که خط $3x-4y+m=0$ دایرهٔ $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ را قطع نکند.

۱۷۸ . فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادلهٔ $C: x^2+y^2-2x+4y=4$ از خط d به معادلهٔ $3x+4y=15$ چقدر است؟

۱۷۹ . معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $\begin{vmatrix}-1\\-1\end{vmatrix}$ و با دایرهٔ $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد.

۱۸۰ . معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطهٔ $C'\begin{vmatrix}5\\7\end{vmatrix}$ بوده و بر دایرهٔ $x^2+y^2-4x-6y+4=0$ مماس باشد.

۱۸۱ . یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

۱۸۲ . دو ظرف همانند داریم. اولی شامل ۴ توپ قرمز و ۲ توپ آبی و دومی شامل ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. به‌طور تصادفی از یکی از ظرف‌ها دو توپ باهم خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که توپ‌ها همرنگ نباشند چقدر است؟

۱۸۳ . در دو جعبه به‌ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبهٔ اول ۴ عدد و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به‌تصادف برداشته و در یک جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

۱۸۴ . ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف یکی از ۳ ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید است؟

۱۸۵ . داخل جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه وجود دارد. یک مهره برداشته و بدون نگاه‌کردن کنار می‌گذاریم و سپس مهرهٔ دیگری از این جعبه خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

۱۸۶ . جعبهٔ شماره یک دارای ۲ مهرهٔ سیاه و ۵ مهرهٔ سفید و جعبهٔ شماره دو دارای ۴ مهرهٔ سیاه و ۳ مهرهٔ سفید است. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

۱۸۷. دو ظرف همانند داریم، ظرف اول شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و ظرف دوم شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. از اولین ظرف یک مهره برداشته و بدون رؤیت آن داخل ظرف دوم قرار می دهیم. اگر از ظرف دوم یک مهره به‌تصادف برداریم چقدر احتمال دارد این مهره سیاه باشد؟

۱۸۸. ۶۰ درصد کارکنان یک شرکت مرد و بقیه زن هستند. ۶۵ درصد مردان و ۵۰ درصد زنان این شرکت عینکی هستند. اگر یک نفر از بین کارکنان این شرکت به تصادف انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد عینکی باشد؟

۱۸۹. سه ظرف همانند داریم، ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ قرمز و ۱۱ مهرهٔ آبی است. ظرف دوم شامل ۳ مهرهٔ قرمز و ۹ مهرهٔ آبی و ظرف سوم شامل مهره‌های آبی می‌باشد. با چشم بسته یکی از سه ظرف را انتخاب و از آن مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال این‌که مهره خارج‌شده آبی باشد چقدر است؟

۱۹۰. احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای افرادی که ورزش می‌کنند ۰٫۰۷ و برای افرادی که ورزش نمی‌کنند برابر ۰٫۴۵ می‌باشد. اگر ۴۰ درصد افراد جامعه‌ای ورزش کنند و یک نفر به‌تصادف از این جامعه انتخاب کنیم با چه احتمالی به این بیماری خاص مبتلا نمی‌شود؟

۱۹۱. درون جعبهٔ A، ۵ لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب، درون جعبهٔ B، ۵ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب و درون جعبهٔ C، ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب وجود دارد. یکی از جعبه‌ها را به‌تصادف انتخاب کرده و لامپی را به‌تصادف از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این لامپ سالم باشد؟

۱۹۲. دو ظرف همانند داریم که اولی شامل ۳ توپ آبی و ۴ توپ قرمز و دومی شامل ۵ توپ آبی و یک توپ قرمز می‌باشد. تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر زوج بزرگتر از ۳ بیاید ظرف اول و در غیر این‌صورت ظرف دوم را انتخاب کرده و یک توپ به‌تصادف از آن خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این توپ قرمز باشد؟

۱۹۳. در کارخانه‌ای سه دستگاه A، B و C به‌ترتیب ۳۰، ۴۰، ۳۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند و می‌دانیم محصولات این سه دستگاه به‌ترتیب ۱۰، ۲۰، ۲۰ درصد معیوب هستند. احتمال این‌که محصولی که از این کارخانه انتخاب می‌شود سالم باشد چقدر است؟

۱۹۴. جمعیت یک روستا، ۶۰ درصد زن و ۴۰ درصد مرد است. می‌دانیم ۸۰ درصد زنان و ۷۰ درصد مردان در این روستا دفترچه سلامت دارند. اگر فردی به تصادف یکی از ساکنان این روستا انتخاب شود با چه احتمال دفترچه سلامت دارد؟

۱۹۵. سه ظرف همانند داریم. در اولی و دومی هر کدام ۵ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در ظرف سوم ۴ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. اگر به تصادف یک ظرف انتخاب و یک مهره بیرون آوریم، باکدام احتمال این مهره سیاه است؟

۱۹۶. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید تاس را می‌ریزیم، اگر «پشت» بیاید، سه سکهٔ دیگر را باهم می‌ریزیم. در این ازمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه «رو» ظاهر شود کدام است؟

۱۹۷. در پرتاب یک تاس اگر ۶ ظاهر شود، مجاز به پرتاب دوم هستیم، در غیر این‌صورت دو سکه پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یک سکه «رو» ظاهر می‌شود؟

۱۹۸. در یک شهر ۸۰ درصد از راننده‌ها زن و ۲۰ درصد مرد هستند. احتمال این‌که یک راننده مرد چراغ قرمز را رد کند ۰٫۳ و این احتمال برای راننده زن ۰٫۲ است. اگر در این شهر یک راننده را به تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد که چراغ قرمز را رد کند؟

۱۹۹. احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰٫۰۱ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰٫۳ است. $\frac{۳}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند با کدام احتمال این بیماری منتقل می‌شود؟

۲۰۰. در جعبهٔ اول ۴ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ قرمز، در جعبهٔ دوم ۳ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ قرمز موجود است، به‌تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره را باهم بیرون می‌آوریم با کدام احتمال هر دو مهره آبی هستند؟

۲۰۱. دو ظرف داریم. اولی شامل ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و دومی شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۱ مهرهٔ سیاه است. از ظرف اول به‌تصادف یک مهره برداشته و در ظرف دوم قرار می‌دهیم، سپس از ظرف دوم مهره‌ای بر می‌داریم. احتمال آن‌که این مهره سفید باشد چقدر است؟

پاسخنامه تشریحی

۱.

$$y = x^3 \xrightarrow[x \to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y = (-x)^3 = -x^3 \xrightarrow[x \to x+2]{\text{۲ واحد چپ}} y = -(x+2)^3$$

$$\xrightarrow{\text{۵ واحد بالا}} y = f(x) = -(x+2)^3 + 5 \Rightarrow (x+2)^3 = 5 - y$$

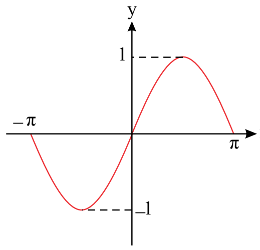
$$\Rightarrow x + 2 = \sqrt[3]{5 - y} \Rightarrow x + 2 = -\sqrt[3]{y - 5} \Rightarrow x = -2 - \sqrt[3]{y - 5}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = -2 - \sqrt[3]{x - 5}$$

۲.

$D_g = [0, 5], R_g = [-4, 6]$

۳. نمودار تابع $y = \sin x$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ به‌صورت

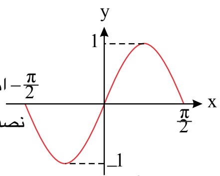


بوده و به کمک انتقال نمودارها داریم:

$y = -\sin 2x - 1$:

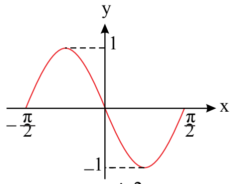
ابتدا نمودار sin 2 x را رسم کن

نصف کردن طول هر نقطه



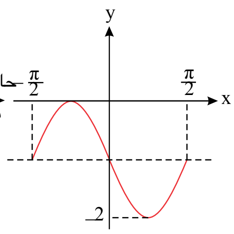
y= sin2 x

قرینه نسبت به محور x ها



y=−sin2 x

حال یک واحد برو پایین

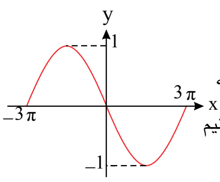


y=−sin2 x−1

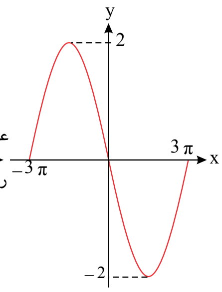
$y = 2\sin(\frac{-1}{3}x)$:

ابتدا نمودار $\sin(-\frac{1}{3}x)$ را با

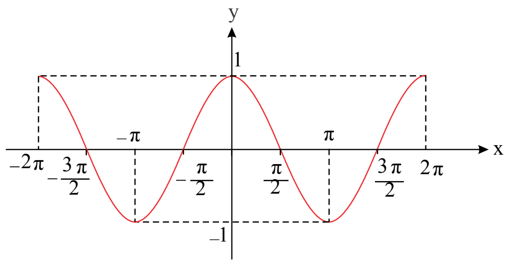
۳ برابر طول هر نقطه رسم می‌کنیم



عرض هر نقطه را ۲ برابر می‌کنیم



۴. ابتدا به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ توجه کنید:



با توجه به این نمودار و دورهٔ تناوب هر تابع و نیز برد آن‌ها به راحتی می‌توانیم تشخیص دهیم که نمودار (۴) مربوط به تابع (الف)، نمودار (۱) مربوط به تابع (ب)، نمودار (۲) متعلق به تابع (پ) و بالاخره نمودار (۳) متعلق به تابع (ت) می‌باشد.

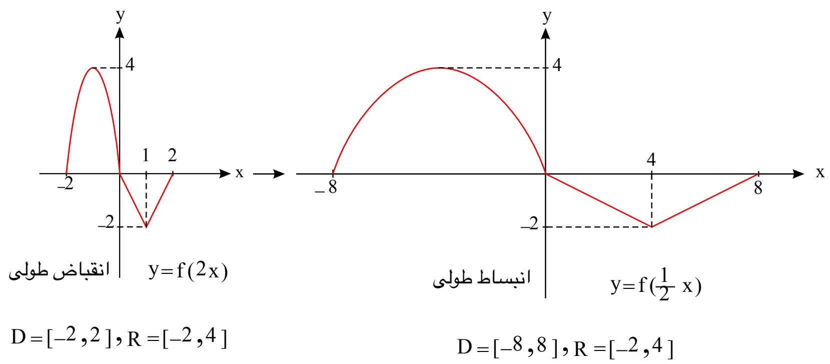
الف) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x) \to$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را -۲ برابر و عرض آن‌ها را $\frac{-۱}{۲}$ برابرمی‌کنیم.

ب) $y=۲\cos ۲x \to$ طول هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ را $\frac{۱}{۲}$ برابر و عرض آن‌ها را ۲ برابر می‌کنیم.

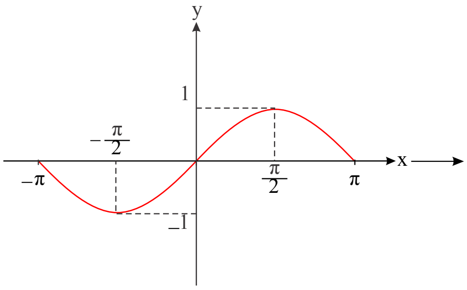
پ) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x) \to$ با ثابت ماندن عرض هر نقطه از نمودار $y=\cos x$ باید طول هریک را ۲ برابر کرد.

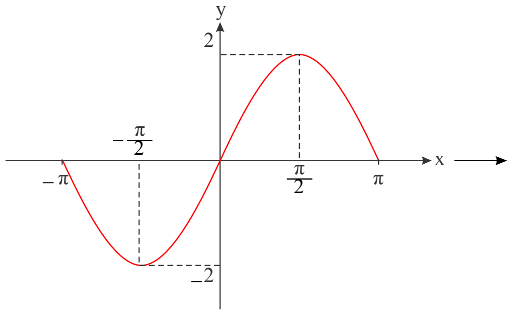
ت) $y=-\cos ۲x \to$ طول هر نقطه را نصف و عرض را قرینه می‌کنیم.

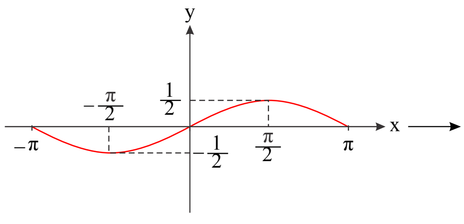
۵ . باید بدانیم که برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار $y=f(x)$ کافی است طول هر نقطه از $f(x)$ را $\frac{۱}{k}$ برابر کرده و عرض آن‌ها را ثابت نگه داریم. به همین مناسبت می‌توانیم بگوییم که نمودار تابع $y=f(x)$، برای kهای بزرگتر از یک ($k>۱$) با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض (بسته‌تر) و برای kهای بین ۰ و ۱ ($۰<k<۱$) با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط (یا بازتر) می‌شود.

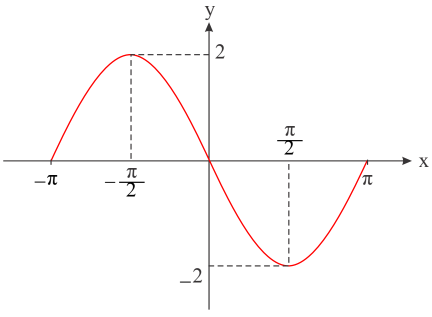


۶ . هر چهار نمودار $y=\sin x$، $y=۲\sin x$، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ دامنه‌ای به صورت $[-\pi,\pi]$ داشته اما بردشان تفاوت دارد. در حقیقت با توجه به برد تابع پایهٔ $y=\sin x$، که فاصلهٔ بستهٔ $[-۱,۱]$ است، برد تابع $y=r\sin x$ برای $r>۰$ به صورت $[-r,r]$ و برای $r<۰$ به صورت $[r,-r]$ بوده و شکل نمودار برای $|r|>۱$ کشیده‌تر و برای $۰<|r|<۱$ بسته‌تر خواهد شد. حواستان باشد که برای rهای منفی نمودار دقیقاً قرینه نمودار $y=|r|\sin x$ نسبت به محور xها خواهد بود. حالا بهتر است که نمودار این چهار تابع را در کنار هم رسم کنیم تا موضوع بهتر درک شود:

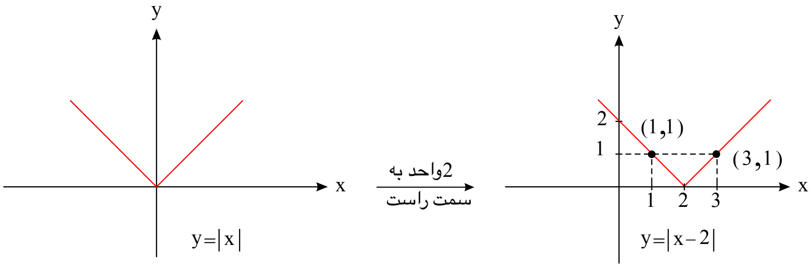

y=sin x


y=2 sin x

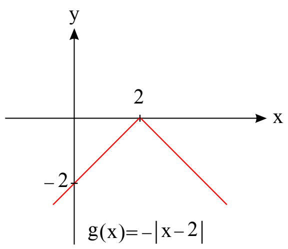

y=$\frac{1}{2}$ sin x


y=−2 sin x

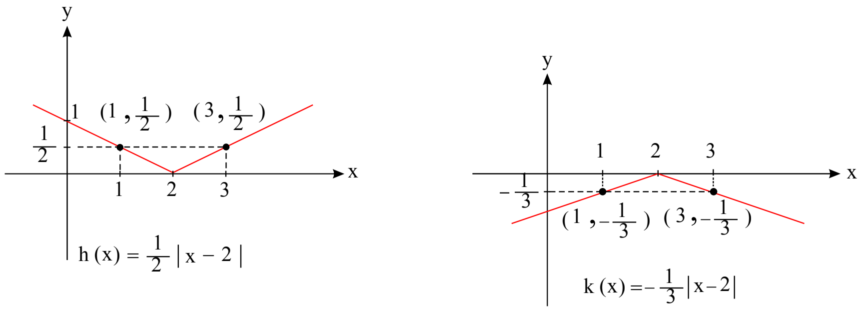
۷ . ابتدا نمودار تابع $y = |x - ۲|$ را به کمک انتقال نمودار نام‌آشنای $y = |x|$ رسم می‌کنیم:



حالا برای رسم $y = -|x - ۲|$، نمودار $y = |x - ۲|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



و برای رسم نمودار $y = \frac{۱}{۲}|x - ۲|$، می‌بایستی عرض هر نقطه از نمودار $y = |x - ۲|$ را (با ثابت ماندن طول) نصف کنیم. به همین منوال اگر عرض نقاط را با ثابت ماندن طول آن‌ها در $\frac{-۱}{۳}$ ضرب کنیم به نمودار $y = \frac{-۱}{۳}|x - ۲|$ می‌رسیم:



۸.

$$y=\sqrt[۳]{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x \text{ ها}}y=-\sqrt[۳]{x}\xrightarrow[x\to x-۴]{\text{۴ واحد راست}}y=-\sqrt[۳]{x-۴}$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}}y=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳\Rightarrow f(x)=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳$$

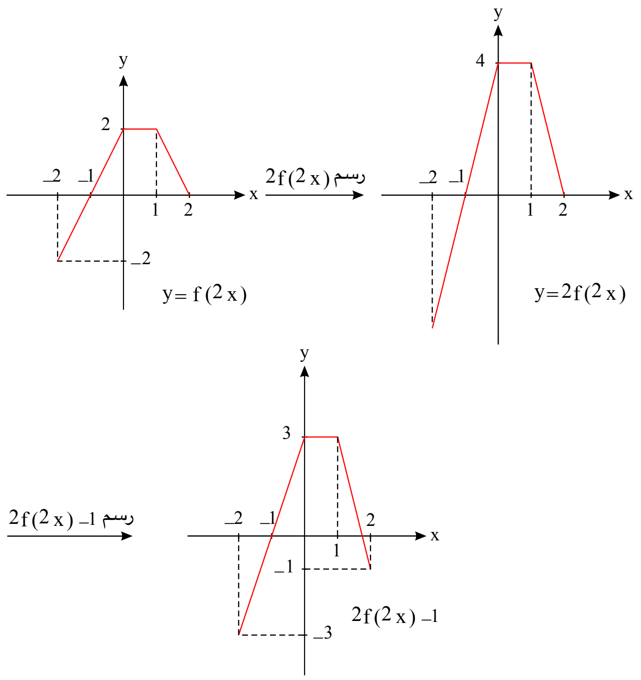
$$y=-\sqrt[۳]{x-۴}-۳\Rightarrow\sqrt[۳]{x-۴}=-y-۳\Rightarrow x-۴=(-y-۳)^{۳}$$

$$\Rightarrow x=(-y-۳)^{۳}+۴\Rightarrow x=۴-(۳+y)^{۳}\Rightarrow y=۴-(۳+x)^{۳}=f^{-۱}(x)$$

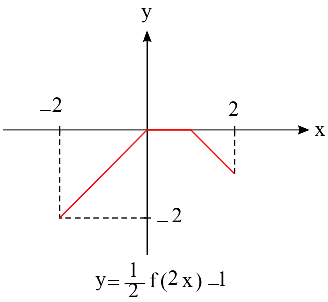
۹.

نمودار تابع $f(x)$ را داریم و می‌خواهیم به کمک انتقال نمودارها، نمودارهای توابع داده شده را نیز ترسیم کنیم:

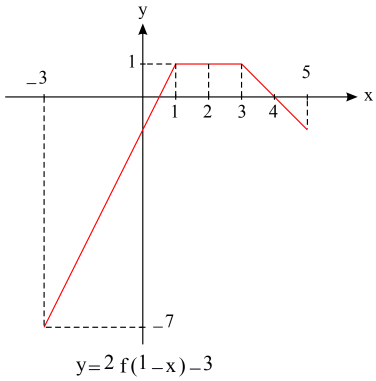
الف



برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱$ نیز کافی است ابتدا در نمودار $f(۲x)$ با ثابت ماندن عرض نقاط، طول آن‌ها را نصف کنیم و سپس در نمودار حاصل، با ثابت ماندن طول هر نقطه، عرض آن‌ها را نصف کنیم تا نمودار $\frac{۱}{۲}f(۲x)$ به‌دست آید. حال اگر این نمودار را یک واحد به پایین ببریم (انگار که محور xها را یک واحد به بالا کشیده باشیم!) به نمودار مطلوب می‌رسیم. اگر این روند را به درستی انجام دهیم به این نمودار خواهیم رسید:



ب برای رسم نمودار $y = ۲f(x - ۱) - ۳$ ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست می‌بریم تا به نمودار $f(x - ۱)$ برسیم. حال اگر با ثابت ماندن طول نقاط این نمودار، عرض هرکدام را ۲ برابر کنیم نمودار $۲f(x - ۱)$ پدید می‌آید که با انتقال آن به اندازهٔ ۳ واحد به پایین به نمودار مورد نظر خواهیم رسید. با رعایت این مکانیسم به نمودار زیر می‌رسیم:



۱۰ . ابتدا توجه داریم که: $R_g = \{-۱, ۲, ۱, -۲\}$ و $D_g = \{۳, ۰, ۴, ۱\}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{-۲\}$

اکنون با توجه به تعریف‌های $fog(x) = f(g(x))$ و $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$، درمی‌یابیم که تابع fog روی آن‌دسته از دامنه‌های g اثر می‌کند که برد متناظر با آن دامنه متعلق به دامنهٔ تابع f بوده باشد. براین اساس داریم:

$$fog(۳) = f(g(۳)) = f(-۱) \xlongequal{\text{ضابطهٔ } f} \frac{۲(-۱) - ۱}{-۱ + ۲} = -۳ (۳ \xrightarrow{g} -۱ \xrightarrow{f} -۳ : ۳ \xrightarrow{fog} -۳)$$

$$fog(۰) = f(g(۰)) = f(۲) \xlongequal{\text{ضابطهٔ } f} \frac{۲(۲) - ۱}{۲ + ۲} = \frac{۳}{۴} (۰ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} \frac{۳}{۴} : ۰ \xrightarrow{fog} \frac{۳}{۴})$$

$$fog(۴) = f(g(۴)) = f(۱) \xlongequal{\text{ضابطهٔ } f} \frac{۲(۱) - ۱}{۱ + ۲} = \frac{۱}{۳} (۴ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} \frac{۱}{۳} : ۴ \xrightarrow{fog} \frac{۱}{۳})$$

$$fog(۱) = f(g(۱)) = f(-۲) = \frac{۲(-۲) - ۱}{-۲ + ۲} = \frac{-۵}{۰} \times (-۲ \notin D_f)$$

بنابراین می‌بینیم که $D_{fog} = \{۳, ۰, ۴\}$، $R_{fog} = \{-۳, \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۳}\}$ و لذا $fog = \{(۳, -۳), (۰, \frac{۳}{۴}), (۴, \frac{۱}{۳})\}$ می‌باشد.

۱۱ . ابتدا باتوجه به ضابطه‌های f و g، ضابطهٔ تابع ترکیب gof را می‌یابیم و سپس مرتب‌شدهٔ آن را با عبارت معادلاش، یعنی $-x^۲ - ۳x + ۷$، برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$gof(x)=g(f(x))=g(x+b)=a(x+b)^۲-b(x+b)+c$$
$$=ax^۲+۲abx+ab^۲-bx-b^۲+c=ax^۲+(۲ab-b)x+(ab^۲-b^۲+c)$$
$$\xrightarrow{\text{حال باید}} ax^۲+(۲ab-b)x+(ab^۲-b^۲+c)=-x^۲-۳x+۷\to\begin{cases}a=-۱\\ ۲ab-b=-۳\\ ab^۲-b^۲+c=۷\end{cases}$$

روند محاسبهٔ پارامترهای b و c اینگونه است:

$$a=-۱\xrightarrow{۲ab-b=-۳}-۲b-b=-۳\to-۳b=-۳\to b=۱$$
$$\begin{cases}a=-۱\\ b=۱\end{cases}\xrightarrow{ab-b^۲+c=۷}-۱-۱+c=۷\to c=۹$$
$$\to\begin{cases}a=-۱\\ b=۱\\ c=۹\end{cases}$$

۱۲ . با توجه به ضابطه‌های $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، برای تعیین ضابطهٔ توابع مرکب fog و fof داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۳}{x})\xrightarrow[\frac{۳}{x}\ \text{قرارمی‌دهیم}]{\text{به جای } x \text{ های } f}\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}=\frac{۲x}{۳-x}$$

البته دقت کنید که برای تعیین دامنهٔ این تابع در مرحلهٔ $\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}$ تأمل کرده و ریشه‌های مخرج‌ها (یعنی $x=۰$ و $x=۳$) را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم. $D_{fog}=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{۲}{x-۱})\xrightarrow[\frac{۲}{x-۱}\ \text{قرار بده}]{\text{به جای } x \text{ های } f}\frac{۲}{\frac{۲}{x-۱}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}=\frac{۲x-۲}{۳-x}$$

برای تعیین دامنهٔ این تابع نیز با توجه به مرحلهٔ ساده نشدهٔ $\frac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}$، می‌بایستی ریشه‌های مخرج (یعنی $x=۳$ و $x=۱$) را از $\mathbb{R}$ برداریم. لذا: $D_{fof}=\mathbb{R}-\{۱,۳\}$

۱۳ . در هر حالت تابع‌های ترکیب fog و gof را به‌دست آورده و باتوجه به دامنهٔ مربوطه ساده می‌کنیم تا معلوم شود در کدام مورد تابع h به‌دست می‌آید:

الف)
$$\begin{cases}fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-۲})=(\sqrt{x-۲})^۲\overset{(x\geq۲)}{=\!=}x-۲=h(x)\\ gof(x)=g(f(x))=g(x^۲)=\sqrt{x^۲-۲}\neq h(x)\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases}fog(x)=f(g(x))=f((x-۲)^۲)=\sqrt{(x-۲)^۲}\overset{\sqrt{u^۲}=|u|}{=\!=}|x-۲|\neq h(x)\\ gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x}-۲)^۲\overset{(x\geq۰)}{=\!=}x-۴\sqrt{x}+۴\neq h(x)\end{cases}$$

بنابراین تابع $h(x)=x-۲$ را می‌توان از ترکیب توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ به‌صورت $h(x)=fog(x)$ به‌دست آورد.

۱۴ . f تابعی اکیداً صعودی است. لذا برای هر a و b از D_f داریم:

$$a>b\to f(a)>f(b)\xrightarrow{g\ \text{تابعی اکیداً نزولی است.}}g(f(a))<g(f(b))$$
$$\xrightarrow{g(f(x))=gof(x)\ \text{باتوجه به تعریف}}gof(a)<gof(b)\to$$ تابع gof اکیداً نزولی است.

حال این‌بار فرض می‌کنیم g تابعی اکیداً نزولی است. بنابراین برای هر a و b از D_f داریم:

$$a>b\to g(a)<g(b)\xrightarrow{f\ \text{اکیداً صعودی است.}}f(g(a))<f(g(b))$$
$$\xrightarrow{f(g(x))=fog(x)\ \text{باتوجه به تعریف}}fog(a)<fog(b)\to$$ تابع fog اکیداً نزولی است.

از این مسأله نتیجه می‌گیریم که اگر بین دو تابع f و g، یکی صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشد تابع‌های ترکیب fog و gof هردو نزولی اکید خواهند بود.

۱۵ . از آن‌جایی‌که از تابع f به‌جز خطی بودن اطلاع دیگری در دست نیست می‌بایستی ضابطهٔ آن را به‌صورت $f(x)=ax+b$ درنظر گرفته و تابع ترکیب $fof(x)$ را به‌دست آوریم:

$$fof(x)=f(f(x))=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^{2}x+ab+b$$

حال باید این تابع را با تابع خطی $y=3x+2$ مساوی قرار داده و ضرایب a و b را به‌دست آوریم؛ داریم:

$$a^{2}x+ab+b=3x+2\xrightarrow[\text{اعداد ثابت باهم مساوی‌اند.}]{\text{ضریب } x \text{ ها باهم و}}\begin{cases}a^{2}=3\rightarrow a=\sqrt{3}\ \text{یا}\ -\sqrt{3}\\ ab+b=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=\sqrt{3}\rightarrow\sqrt{3}b+b=2\rightarrow b(\sqrt{3}+1)=2\rightarrow b=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}\\ \text{یا}\\ a=-\sqrt{3}\rightarrow-\sqrt{3}b+b=2\rightarrow b(-\sqrt{3}+1)=2\rightarrow b=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}\end{cases}$$

درنتیجه ضابطهٔ تابع خطی f می‌تواند به‌صورت $f(x)=\sqrt{3}x+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$ یا $f(x)=-\sqrt{3}x+\dfrac{2}{1-\sqrt{3}}$ باشد.

۱۶ . ضابطهٔ gof را به شکل $y=gof(x)=g(f(x))=\begin{cases}3f(x)-2 & ;f(x)>0\\ 1-4f(x) & ;f(x)\leq 0\end{cases}$ نوشته و با توجه به ضابطهٔ f، به‌دنبال xهایی می‌گردیم که حالت‌های $f(x)>0$ و $f(x)\leq 0$ برقرار باشد. با اندکی تأمل درمی‌یابیم که حالت $f(x)>0$ تنها برای $x>1$ و حالت $f(x)\leq 0$ یک‌بار برای $0<x\leq 1$ و بار دیگر برای $x\leq 0$ رخ می‌دهد. از این‌رو می‌بایستی در ضابطهٔ gof، برای $x>1$ از $f(x)=x^{2}-1$، برای $0<x\leq 1$ نیز از $f(x)=x^{2}-1$ و بالاخره برای $x\leq 0$ از $f(x)=x-1$ استفاده کنیم. در این صورت داریم:

$$y=gof(x)=\begin{cases}3(x^{2}-1)-2 & ;x>1\\ 1-4(x^{2}-1) & ;0<x\leq 1\\ 1-4(x-1) & ;x\leq 0\end{cases}=\begin{cases}3x^{2}-5 & ;x>1\\ -4x^{2}+5 & ;0<x\leq 1\\ -4x+5 & ;x\leq 0\end{cases}$$

۱۷ . پاسخ او اشتباه است زیرا وقتی دو تابع f و g را ترکیب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{x}{x-1})=\frac{\frac{x}{x-1}+2}{\frac{x}{x-1}-3}\rightarrow(fog)(x)=\frac{\frac{x+2x-2}{\cancel{x-1}}}{\frac{x-3x+3}{\cancel{x-1}}}\Rightarrow(fog)(x)=\frac{3x-2}{-2x+3}$$

همانطور که می‌بینید هنگام ساده کردن عبارت $x-1$ دچار این اشتباه می‌شویم که یکی از محدودیت‌های دامنه را بی‌دلیل حذف می‌نمائیم در واقع علت اصلی ارتکاب این اشتباه آن است که دامنهٔ fog یا gof را نباید از روی ضابطه‌شان تعیین کرد بلکه همواره باید از رابطهٔ مربوط به آن‌ها، استفاده کنیم در این سؤال داریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_{fog}|g(x)\in D_f\}$$

$$D_{fog}=\{x\neq 1|g(x)\neq 3\}\rightarrow x\neq 1\quad(1)\ \text{و}\ \frac{x}{x-1}\neq 3\quad(2)\rightarrow x\neq 3x-3\rightarrow 2x\neq 3\rightarrow x\neq\frac{3}{2}\quad(*)\xrightarrow{(1)\cap(*)}D_{fog}=\mathbb{R}-\left\{1,\frac{3}{2}\right\}$$

۱۸ .

$A=\{1,2,3,4,5\}$

$f=\{(x,2x-1)|x\in A\}$

$x=1\Rightarrow f(1)=1\Rightarrow(1,1)\in f$

$x=2\Rightarrow f(2)=3\Rightarrow(2,3)\in f$

$x=۳\Rightarrow f(۳)=۵\Rightarrow (۳,۵)\in f$

$x=۴\Rightarrow f(۴)=۷\Rightarrow (۴,۷)\in f$

$x=۵\Rightarrow f(۵)=۹\Rightarrow (۵,۹)\in f$

$\Rightarrow f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷),(۵,۹)\}$

$x=۱\Rightarrow f(۱)=۱\Rightarrow f(f(۱))=f(۱)=۱\Rightarrow (۱,۱)\in fof$

$x=۲\Rightarrow f(۲)=۳\Rightarrow f(f(۲))=f(۳)=۵\Rightarrow (۲,۵)\in fof$

$x=۳\Rightarrow f(۳)=۵\Rightarrow f(f(۳))=f(۵)=۹\Rightarrow (۳,۹)\in fof$

$x=۴\Rightarrow f(۴)=۷\Rightarrow f(f(۴))=f(۷)=$ تعریف نشده

$x=۵\Rightarrow f(۵)=۹\Rightarrow f(f(۵))=f(۹)=$ تعریف نشده

پس تابع $f(f(x))$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(f(x))=\{(۱,۱),(۲,۵),(۳,۹)\}$$

۱۹ . ابتدا ضابطهٔ تابع g را از روی نمودار آن به‌دست می‌آوریم:

از نمودار پیداست که مقدار تابع برای تمام xهای مثبت برابر ۱ $=g(x)$،

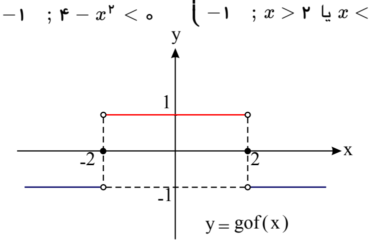
برای تمام xهای منفی برابر -۱ $=g(x)$ و برای $x=۰$ برابر $g(x)=۰$ می‌باشد.

$$g(x)=\begin{cases}۱ & ;x>۰\\ ۰ & ;x=۰\\ -۱ & ;x<۰\end{cases}$$

حال باتوجه به تعریف تابع ترکیب gof داریم:

$$gof(x)=g(f(x))=g(۴-x^۲)=\begin{cases}۱ & ;۴-x^۲>۰\\ ۰ & ;۴-x^۲=۰\\ -۱ & ;۴-x^۲<۰\end{cases}=\begin{cases}۱ & ;-۲<x<۲\\ ۰ & ;x=۲ \text{ یا } -۲\\ -۱ & ;x>۲ \text{ یا } x<-۲\end{cases}$$

نمودار تابع ترکیب gof هم به این شکل است:



اگر در حل نامعادله‌های $۴-x^۲>۰$ و $۴-x^۲<۰$ مشکلی دارید دقت کنید که:

$$\begin{cases}۴-x^۲>۰\to x^۲<۴\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x^۲}<\sqrt{۴}\to |x|<۲\to -۲<x<۲\\ ۴-x^۲<۰\to x^۲>۴\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x^۲}>\sqrt{۴}\to |x|>۲\to x>۲ \text{ یا } x<-۲\end{cases}$$

۲۰ . اگر تابع h را به شکل $h(x)=۹^x-۳^{x+۱}=(۳^x)^۲-۳\times ۳^x$ بازنویسی کنیم به روشنی می‌توانیم ببینیم که با فرض $f(x)=x^۲-۳x$ و $g(x)=۳^x$، تابع ترکیب $fog(x)$ همان تابع $h(x)$ خواهد بود:

$$\begin{cases}f(x)=x^۲-۳x\\ g(x)=۳^x\end{cases}\to fog(x)=f(g(x))=f(۳^x)=(۳^x)^۲-۳(۳^x)$$

$$=(۳^۲)^x-۳^{۱+x}=۹^x-۳^{x+۱}=h(x)$$

۲۱ . برای رسیدن به مقدار $g(۳)$، باید ضابطهٔ $g(x)$ را به‌دست آوریم. برای این منظور باتوجه به تعریف $gof(x)=g(f(x))$ و شرایط موجود داریم:

$$g(f(x))=x^۲+\frac{۱}{x^۲}\xrightarrow{f(x)=x+\frac{۱}{x}}g(x+\frac{۱}{x})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}\quad(\star)$$

حال اگر اتحاد $۲+\frac{۱}{x^۲}+x^۲=(x+\frac{۱}{x})^۲$ را به‌کار بگیریم، داریم:

$$x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=(x+\frac{۱}{x})^{۲}-۲\xrightarrow{(*)}g(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^{۲}-۲$$

حال دیگر معلوم است که با فرض $x+\frac{۱}{x}=t$، ضابطهٔ g به‌صورت $g(t)=t^{۲}-۲$ یا $g(x)=x^{۲}-۲$ بوده و برای $g(۳)$ داریم:

$$g(۳)=(۳)^{۲}-۲=۹-۲=۷$$

۲۲ . برای از بین بردن علامت منفی در صورت کسر ضابطهٔ f، ابتدا ضابطهٔ آن را به فرم $f(x)=\frac{x}{۱-x}$ نوشته و سپس باتوجه به تعریف $fof(x)=f(f(x))$ ضابطهٔ تابع مرکب fof را به‌دست می‌آوریم:

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{x}{۱-x})=\frac{(\frac{x}{۱-x})}{۱-(\frac{x}{۱-x})}=\frac{\frac{x}{۱-x}}{\frac{۱-x-x}{۱-x}}=\frac{\frac{x}{۱-x}}{\frac{۱-۲x}{۱-x}}$$

$$\xrightarrow[\text{صورت و مخرج را در } (x-۱) \text{ ضرب می‌کنیم.}]{\text{باتوجه به شرط } ۱-x\neq ۰\ (x\neq ۱)} fof(x)=\frac{x}{۱-۲x}$$

و اما درمورد دامنهٔ تابع fof، باتوجه به ضابطهٔ به‌دست آمده می‌بایستی $۱-۲x\neq ۰$ و درنتیجه $x\neq\frac{۱}{۲}$ باشد و البته با درنظر گرفتن آن شرط $x\neq ۱$ به این نتیجه می‌رسیم که دامنهٔ fof به‌صورت $x\neq ۱,\frac{۱}{۲}$ یا $D_{fof}=\mathbb{R}-\{۱,\frac{۱}{۲}\}$ می‌باشد.

۲۳ . ابتدا باید تابع $g=f^{۲}+f$ را به‌دست آوریم. دامنهٔ این تابع همان دامنهٔ f می‌باشد. (زیرا: $D_{f^{۲}}=D_f$ و $D_g=D_{f^{۲}}\cap D_f=D_f$)

$$g=f^{۲}+f=\{(-۱,f^{۲}(-۱)+f(-۱)),(۲,f^{۲}(۲)+f(۲)),(۰,f^{۲}(۰)+f(۰)),(۶,f^{۲}(۶)+f(۶))\}$$
$$=\{(-۱,۱۲),(۲,۰),(۰,۶),(۶,۰)\}$$

در ادامه تابع ترکیب $h=gof$ را باتوجه به تعریف و دامنهٔ تابع gof محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$D_h=D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\{۲,۰,۶\}$$

$$h=gof=?\begin{cases}gof(۲)=g(f(۲))=g(-۱)=۱۲(۲\xrightarrow{f}-۱\xrightarrow{g}۱۲:۲\xrightarrow{gof}۱۲)\\ gof(۰)=g(f(۰))=g(۲)=۰(۰\xrightarrow{f}۲\xrightarrow{g}۰:۰\xrightarrow{gof}۰)\\ gof(۶)=g(f(۶))=g(۰)=۶(۶\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{g}۶:۶\xrightarrow{gof}۶)\end{cases}$$

بنابراین تابع h به‌صورت $h=\{(۲,۱۲),(۰,۰),(۶,۶)\}$ است.

حتماً درک کرده‌اید که:

$$gof(-۱)=g(f(-۱))=g(۳)=x\xrightarrow{\text{زیرا}}۳\notin D_g$$

۲۴ . براساس تعریف توابع مرکب داریم:

$$\begin{cases}fog(x)=f(g(x))=f(۲x+۱)=(۲x+۱)^{۲}-(۲x+۱)=۴x^{۲}+۴x+۱-۲x-۱=۴x^{۲}+۲x\\ gof(x)=g(f(x))=g(x^{۲}-x)=۲(x^{۲}-x)+۱=۲x^{۲}-۲x+۱\end{cases}$$

$$fog(x)=gof(x)\to ۴x^{۲}+۲x=۲x^{۲}-۲x+۱\xrightarrow{\text{مرتب می‌کنیم.}}۲x^{۲}+۴x-۱=۰$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادلهٔ درجه ۲ از روش دلتا}}\Delta=b^{۲}-۴ac=(۴)^{۲}-۴(۲)(-۱)=۱۶+۸=۲۴$$
$$\to x_{۱,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۴\pm\sqrt{۲۴}}{۲(۲)}=\frac{-۴\pm ۲\sqrt{۶}}{۴}=\frac{-۲\pm\sqrt{۶}}{۲}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-۲+\sqrt{۶}}{۲} \\ \text{یا} \qquad\qquad (\text{ریشه‌های معادله}) \\ x_۲ = \dfrac{-۲-\sqrt{۶}}{۲} \end{cases}$$

۲۵ . باتوجه به تعریف تابع ترکیب fog، ضابطهٔ fog را به شکل $y = fog(x) = f(g(x)) = \begin{cases} ۲g(x) - ۳ & ; g(x) > ۰ \\ (g(x))^۲ - ۱ & ; g(x) \leq ۰ \end{cases}$ می‌نویسیم.

حال در ضابطهٔ g بررسی می‌کنیم ببینیم در چه بازه‌ای از x، $g(x) > ۰$ و در چه بازه‌ای $g(x) \leq ۰$ است. این تابع برای $x \geq ۲$ در شرط $g(x) = x^۲ + ۱ > ۰$ و برای $۰ \leq x < ۲$ در شرط $g(x) = -۲\sqrt{x} \leq ۰$ صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$y = fog(x) = f(g(x)) = \begin{cases} ۲g(x) - ۳ & ; g(x) > ۰ \\ (g(x))^۲ - ۱ & ; g(x) \leq ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۲(x^۲+۱) - ۳ & ; x \geq ۲ \\ (-۲\sqrt{x})^۲ - ۱ & ; ۰ \leq x < ۲ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۲x^۲ - ۱ & ; x \geq ۲ \\ ۴x - ۱ & ; ۰ \leq x < ۲ \end{cases}$$

۲۶ . با توجه به این نکته که «در $fog(a)$ ابتدا a وارد ماشین g شده و $g(a)$ بیرون می‌آید و سپس $g(a)$ وارد ماشین f شده و $fog(a)$ بیرون می‌آید» داریم:

$$\begin{cases} f = \{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\} \\ g = \{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} fog \ =? \begin{cases} ۵ \xrightarrow{g} ۷ \xrightarrow{f} ۸ : fog(۵) = ۸ \\ ۳ \xrightarrow{g} ۵ \xrightarrow{f} ۳ : fog(۳) = ۳ \\ ۷ \xrightarrow{g} ۹ \xrightarrow{f} ۸ : fog(۷) = ۸ \\ ۹ \xrightarrow{g} ۱۱ \xrightarrow{f} ۴ : fog(۹) = ۴ \end{cases} = \{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\} \\ gof \ =? \begin{cases} ۷ \xrightarrow{f} ۸ \xrightarrow{g} \times \\ ۵ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} ۵ : gof(۵) = ۵ \\ ۹ \xrightarrow{f} ۸ \xrightarrow{g} \times \\ ۱۱ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{g} \times \end{cases} = \{(۵,۵)\} \end{cases}$$

۲۷ . دامنهٔ تابع gof باتوجه به تعریف $gof(x) = g(f(x))$ از دستور $D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$ به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر دامنهٔ gof، آن قسمت از دامنهٔ f را شامل می‌شود که به‌ازای آن‌ها، $f(x)$ متعلق به دامنهٔ g باشد. در این‌جا باتوجه به نمودار داریم:

$$D_f = [-۳, ۰] \ , \ R_f = [۰, \frac{۵}{۲}] \ , \ D_g = [۰, \frac{۵}{۲}]$$

$$D_{gof} = \{x \in [-۳,۰] | f(x) \in [۰, \frac{۵}{۲}]\} = [-۳, ۰]$$

دامنهٔ gof همان دامنهٔ f و برابر $[-۳, ۰]$ است. زیرا به‌ازای تمام اعضای این بازه، مقادیر تابع f متعلق به $D_g = [۰, \frac{۵}{۲}]$ می‌باشد. مقادیر f همان $R_f = [۰, \frac{۵}{۲}]$ است.

۲۸ . از روی نمودارها به‌راحتی می‌توانیم ضابطه‌های f و g را به‌دست آوریم. پس ابتدا همین‌کار را انجام می‌دهیم:

$$f : \begin{cases} x < ۰ & ; y = ۲ \\ x = ۰ & ; y = ۰ \\ x > ۰ & ; y = -۱ \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} ۲ & ; x < ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \\ -۱ & ; x > ۰ \end{cases}$$

$$g:\begin{cases}-۴\leq x\leq ۰:(-۴,۰),(۰,۴)\to y-۰=\dfrac{۴-۰}{۰+۴}(x+۴)\to y=x+۴\\ ۰<x\leq ۳:(۰,۰),(۳,-۱)\to y-۰=\dfrac{۰+۱}{۰-۳}(x-۰)\to y=\dfrac{-۱}{۳}x\end{cases}$$

$$\to g(x)=\begin{cases}x+۴ & ;-۴\leq x\leq ۰\\ \dfrac{-x}{۳} & ;۰<x\leq ۳\end{cases}$$

حالا دیگر می‌توانیم حاصل عبارت را باتوجه به تعریف تابع ترکیب به‌دست آوریم. داریم:

$$\begin{cases}fog(۳)=f(g(۳))\xlongequal{g(۳)=\frac{-۳}{۳}=-۱}f(-۱)=۲\\ gof(۱)=g(f(۱))\xlongequal{f(۱)=-۱}g(-۱)=-۱+۴=۳\end{cases}\to fog(۳)+gof(۱)=۲+۳=۵$$

۲۹ . ابتدا تابع fof را به‌دست می‌آوریم:

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{x+۲}{x-۱})=\frac{(\frac{x+۲}{x-۱})+۲}{(\frac{x+۲}{x-۱})-۱}=\frac{\frac{x+۲+۲x-۲}{x-۱}}{\frac{x+۲-x+۱}{x-۱}}=\frac{\frac{۳x}{x-۱}}{\frac{۳}{x-۱}}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } (x-۱) \text{ ضرب می‌کنیم. } (x\neq ۱)} fof(x)=\frac{۳x}{۳}=x$$

می‌بینیم که تابع $fof(x)$ یک تابع همانی است. به همین دلیل هم محاسبهٔ ضابطهٔ تابع $fofof$ به‌راحتی قابل انجام خواهد بود؛ داریم:

$$fofof(x)=f(\underbrace{fof(x)}_{\text{برابر } x})=f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$$

درنتیجه برای هر تابع مانند $f(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}$ که شرط $fof(x)=x$ را داراست، حاصل تابع ترکیبی $\underbrace{fofof\cdots of}_{k \text{ مرتبه}}(x)$ برای kهای زوج برابر تابع همانی x و برای kهای فرد برابر خود $f(x)$ خواهد بود.

۳۰ . کار را با محاسبه و ساده کردن تابع ترکیب fof آغاز می‌کنیم:

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{ax+b}{cx+d})=\frac{a(\frac{ax+b}{cx+d})+b}{c(\frac{ax+b}{cx+d})+d}=\frac{\frac{a^۲x+ab+bcx+bd}{cx+d}}{\frac{acx+bc+cdx+d^۲}{cx+d}}$$

$$=\frac{\frac{(a^۲+bc)x+(a+d)b}{cx+d}}{\frac{(a+d)cx+bc+d^۲}{cx+d}}\xrightarrow{cx+d\neq ۰}fof(x)=\frac{(a^۲+bc)x+(a+d)b}{(a+d)cx+bc+d^۲}\xlongequal{\text{قرار است که}}x$$

با درنگی کوتاه روی تساوی اخیر، اگر $a+d=۰$ (یا $a=-d$) باشد، آن‌گاه ضابطهٔ سادهٔ‌شدهٔ $fof(x)$ برابر تابع همانی x می‌شود:

$$a+d=۰ \text{ یا } a=-d\to fof(x)=\frac{(a^۲+bc)x}{bc+a^۲}=x$$

بنابراین اگر در تابع هموگرافیک $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$، رابطهٔ $a+d=۰$ (یا $a=-d$) برقرار باشد ترکیب تابع با خودش برابر تابع همانی می‌شود. مثلاً برای $f(x)=\dfrac{x}{x-۱}$ داریم: $fof(x)=x$

۳۱ . f اکیداً نزولی است. بنابراین برای هر a و b از دامنهٔ f، اگر $a>b$، آن‌گاه داریم:

$$a>b\to f(a)<f(b)\xrightarrow{\text{حالا اکیداً نزولی بودن } g \text{ را اعمال می‌کنیم.}}g(f(a))>g(f(b))$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به تعریف تابع ترکیب } gof}gof(a)>gof(b)$$

از $a>b$ به $gof(a)>gof(b)$ رسیدیم و این یعنی gof اکیداً صعودی است.

این‌بار کار را با اکیداً نزولی بودن g شروع می‌کنیم. برای هر a و b از دامنهٔ g، اگر $a>b$، آن‌گاه:

$$a>b\to g(a)<g(b)\xrightarrow{\text{حال اکیداً نزولی بودن } f \text{ را اعمال می‌کنیم.}} f(g(a))>f(g(b))$$
$$\xrightarrow{\text{براساس تعریف تابع ترکیب } fog} fog(a)>fog(b)$$

از $a>b$ به $fog(a)>fog(b)$ رسیدیم و این یعنی fog صعودی اکید است.

۳۲ . تابع f اکیداً صعودی است. بنابراین برای هر a و b از دامنهٔ f، اگر $a>b$ باشد می‌توان نوشت:

$$a>b\to f(a)>f(b)\xrightarrow{\text{حال اکیداً صعودی بودن } g \text{ را اعمال می‌کنیم.}} g(f(a))>g(f(b))$$
$$\xrightarrow{\text{براساس تعریف تابع ترکیب } gof} gof(a)>gof(b)\to \text{اکیداً صعودی است. } gof$$

این‌بار اکیداً صعودی بودن را با g آغاز می‌کنیم. برای هر a و b از دامنهٔ g، اگر $a>b$ باشد می‌توان نوشت:

$$a>b\to g(a)>g(b)\xrightarrow{\text{حال اکیداً صعودی بودن } f \text{ را اعمال می‌کنیم.}} f(g(a))>f(g(b))$$
$$\xrightarrow{\text{براساس تعریف تابع ترکیب } fog} fog(a)>fog(b)\to \text{اکیداً صعودی است. } fog$$

۳۳ . یک روش برای یافتن دامنهٔ تابع ترکیب fog استفاده از رابطهٔ $D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$ است. برای استفاده از این روش ابتدا باید دامنهٔ توابع f و g را به‌دست آوریم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f:1-2x\geq 0\to 2x\leq 1\to x\leq \frac{1}{2}\to D_f=(-\infty,\frac{1}{2}] \\ g:x+2\neq 0\to x\neq -2\to D_g=\mathbb{R}-\{-2\}\end{array}\right\}$$

$$\to D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}-\{-2\}|\frac{1-3x}{x+2}\leq\frac{1}{2}\}=?$$

حالا در این مرحله مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{1-3x}{x+2}\leq\frac{1}{2}$ را یافته و اشتراک آن با $\mathbb{R}-\{-2\}$ را به‌عنوان دامنهٔ fog معرفی می‌کنیم. داریم:

$$\frac{1-3x}{x+2}-\frac{1}{2}\leq 0\to\frac{2-6x-x-2}{2x+4}\leq 0\to\frac{-7x}{2x+4}\leq 0$$

x		-2		0	
$\frac{-7x}{2x+4}$	$-$	ت.ن	$+$		$-$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= x\geq 0\ ,\ x<-2$

$$\xrightarrow[\mathbb{R}-\{-2\}]{\text{اشتراک با}} D_{fog}=(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$$

۳۴ .

الف)

$$\begin{cases} f(x)=2x-5\\ g(x)=x^2-3x+8\end{cases}\to fog(x)=f(g(x))=f(x^2-3x+8)=2(x^2-3x+8)-5=7$$
$$\Rightarrow 2x^2-6x+11=7\xrightarrow{\text{مرتب کن}}2x^2-6x+4=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب، صفر است.}}x=1\ \text{ یا }\ x=\frac{c}{a}=\frac{4}{2}=2$$

ب)

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x-1\\ g(x)=1-2x\end{cases}\to gof(x)=g(f(x))=g(3x^2+x-1)=1-2(3x^2+x-1)=-5$$
$$\Rightarrow -6x^2-2x+3=-5\xrightarrow{\text{مرتب کن}}-6x^2-2x-8=0\xrightarrow{\times(-1)}6x^2+2x+8=0\xrightarrow{\text{حل از }\Delta}\Delta=(2)^2-4(6)(8)<0\to \text{فاقد جواب}$$

۳۵.

الف

$$f(x)=x^{۲}-۵\ ,\ g(x)=\sqrt{x+۶}$$
$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g: x+۶\geq ۰\to x\geq -۶\to D_g=[-۶,+\infty)$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{\underset{\text{اشتراک}}{\underset{\downarrow}{x\geq -۶ \ \text{و}}}\ \underbrace{\sqrt{x+۶}\in\mathbb{R}}_{\text{این بدیهی است!}}\}=[-۶,+\infty)$$
$$fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x+۶})=(\sqrt{x+۶})^{۲}-۵\xrightarrow[x\geq -۶]{\text{با فرض}} fog(x)=x+۶-۵=x+۱$$

ب

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳}\ ,\ g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}\to\begin{cases}D_f: ۲x-۳\geq ۰\to x\geq \frac{۳}{۲}\\ D_g: ۳x-۵\neq ۰\to x\neq \frac{۵}{۳}\end{cases}$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x\neq\frac{۵}{۳}\ ,\ \frac{۶}{۳x-۵}\in D_f\}$$

$\frac{۶}{۳x-۵}\in D_f$ یعنی حل نامعادلهٔ $\frac{۶}{۳x-۵}\geq\frac{۳}{۲}$ که معادل $\frac{۶}{۳x-۵}-\frac{۳}{۲}\geq ۰$ یا $\frac{۲۷-۹x}{۶x-۱۰}\geq ۰$ می‌باشد که بعد از تعیین علامت به جواب $(\frac{۵}{۳},۳]$ می‌رسیم.

$$\to D_{fog}=\{x\neq\frac{۵}{۳}\ ,\ x\in(\frac{۵}{۳},۳]\}=(\frac{۵}{۳},۳]$$
$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۶}{۳x-۵})=\sqrt{۲(\frac{۶}{۳x-۵})-۳}=\sqrt{\frac{۲۷-۹x}{۳x-۵}}$$

البته می‌توانستیم دامنهٔ fog را بعد از تشکیل ضابطهٔ آن نیز به‌دست آوریم.

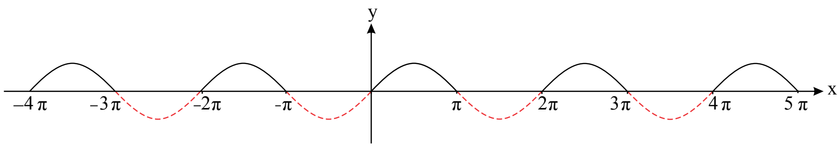
پ

$$f(x)=\sqrt{x+۲}\ ,\ g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}$$
$$D_f: x+۲\geq ۰\to x\geq -۲\ ,\ D_g: x^{۲}-۱۶\geq ۰\to |x|\geq ۴\to x\geq ۴ \text{ یا } x\leq -۴$$
$$gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x+۲})=\sqrt{(\sqrt{x+۲})^{۲}-۱۶}\ \overset{x\geq -۲\ \text{با فرض}}{=\!=\!=\!=}\ \sqrt{x-۱۴}$$
$$\xrightarrow[\text{دامنهٔ } gof]{\text{برای تعیین}} x-۱۴\geq ۰\to x\geq ۱۴\xrightarrow[x\geq -۲]{\text{اعمال شرط}} x\geq ۱۴\to D_{gof}=[۱۴,+\infty)$$

ت

$$f(x)=\sin x\ ,\ g(x)=\sqrt{x}$$
$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=x\geq ۰\to D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}\ ,\ \sin x\geq ۰\}=\{\text{تمام } x \text{ هایی که در نواحی ۱ و ۲ قرار می‌گیرند}\}$$
$$\overset{\text{مانند}}{=\!=\!=}\cdots\cup[-۴\pi,-۳\pi]\cup[-۲\pi,-\pi]\cup[۰,\pi]\cup[۲\pi,۳\pi]\cup[۴\pi,۵\pi]\cup\cdots$$

برای درک بهتر موضوع با توجه به نمودار $y=\sin x$ بازه‌هایی که $\sin x$ نامنفی است را می‌توانیم ببینیم:



۳۶. اگر قیمت هر دستگاه خودرو را x تومان در نظر بگیریم، با دو تابع زیر روبه‌رو خواهیم بود.

$$g(x)=x-\frac{۱۵}{۱۰۰}x\to g(x)=\frac{۸۵}{۱۰۰}x$$
$$f(x)=x-۲,۰۰۰,۰۰۰$$

حال با تشکیل fog و gof ببینیم کدام‌یک به نفع کوروش است:

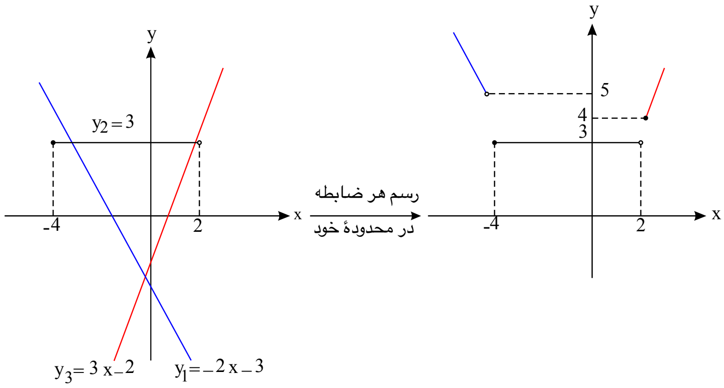
$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\frac{۸۵}{۱۰۰}x) = \frac{۸۵}{۱۰۰}x - ۲,۰۰۰,۰۰۰ \xrightarrow{x=۵۰,۰۰۰,۰۰۰} (fog)(x) = \frac{۸۵}{۱۰۰} \times ۵۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۲,۰۰۰,۰۰۰ = ۴۲,۵۰۰,۰۰۰ - ۲,۰۰۰,۰۰۰$$
$$\rightarrow (fog)(x) = ۴۰,۵۰۰,۰۰۰$$

یعنی اگر ابتدا از تخفیف ۱۵ درصدی استفاده کند، سپس تخفیف دو میلیونی بگیرد خودرو برایش چهل میلیون و پانصد هزار تومان تمام می‌شود.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x - ۲,۰۰۰,۰۰۰) = \frac{۸۵}{۱۰۰}(x - ۲,۰۰۰,۰۰۰) \xrightarrow{x=۵۰,۰۰۰,۰۰۰} (gof)(x) = ۴۰,۸۰۰,۰۰۰$$

یعنی اگر ابتدا تخفیف دو میلیونی را اخذ نماید سپس از تخفیف ۱۵ درصدی استفاده کند خودرویش چهل میلیون و هشتصد هزار تومان برایش تمام خواهد شد پس بهتر است ابتدا تخفیف ۱۵ درصدی، سپس تخفیف ۲ میلیونی را اخذ کند.

۳۷ . رسم نمودار تابع f به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم:



می‌بینیم که این نمودار در بازهٔ $(-\infty, -۴)$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[-۴, ۲)$ ثابت (که می‌توان آن را صعودی یا نزولی هم در نظر گرفت) و بالاخره در فاصلهٔ $[۲, +\infty)$ اکیداً صعودی است. براین اساس می‌توانیم ادعا کنیم که این تابع در فاصلهٔ $(-\infty, ۲)$ نزولی و در فاصلهٔ $[-۴, +\infty)$ صعودی است.

۳۸ . نکته: اگر f تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \geq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|۲x-۱|) - f(|x+۱|)} \Rightarrow f(|۲x-۱|) - f(|x+۱|) \geq ۰$$
$$\Rightarrow f(|۲x-۱|) \geq f(|x+۱|) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} |۲x-۱| \leq |x+۱|$$
$$\Rightarrow (۲x-۱)^۲ \leq (x+۱)^۲ \Rightarrow ۴x^۲ - ۴x + ۱ \leq x^۲ + ۲x + ۱ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x \leq ۰$$
$$\Rightarrow ۳x(x-۲) \leq ۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & ۰ & & ۲ & \\ \hline ۳x(x-۲) & + & ۰ & - & ۰ & + \end{array} \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲$$
$$\Rightarrow D_g = [۰, ۲]$$

۳۹ . برای هر $x_۱$ و $x_۲$ از دامنهٔ fog داریم:

$$x_۱ < x_۲ \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } g} g(x_۱) > g(x_۲) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} f(g(x_۱)) < f(g(x_۲))$$
$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow fog(x_۱) < fog(x_۲) \Rightarrow \text{اکیداً صعودی } fog$$
$$\text{می‌دانیم}: m^۲ + ۱ > m^۲ \Rightarrow fog(m^۲+۱) > fog(m^۲) \Rightarrow -a + ۴ > ۲a - ۱$$
$$\Rightarrow ۴ + ۱ > ۲a + a \Rightarrow ۳a < ۵ \Rightarrow \boxed{a < \frac{۵}{۳}}$$

۴۰ .

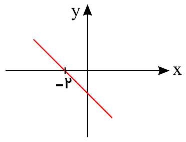
$$g(x) = \sqrt{(x^۲ - ۸۱)f(x)} \Rightarrow (x^۲ - ۸۱)f(x) \geq ۰$$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-2)=0$ است، داریم:

برای $x<-2$ تابع f مثبت است. $\Rightarrow x<-2 \Rightarrow f(x)>f(-2) \Rightarrow f(x)>0$

برای $x>-2$ تابع f منفی است. $\Rightarrow x>-2 \Rightarrow f(x)<f(-2) \Rightarrow f(x)<0$

نمودار f تقریباً به‌صورت مقابل است.



$x^2-81=0 \Rightarrow x=\pm 9$

x		-9		-2		9	
x^2-81	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$(x^2-81)f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow x\leq -9$ یا $-2\leq x\leq 9 \Rightarrow D_g=(-\infty,-9]\cup[-2,9]$

۴۱.

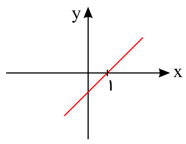
$g(x)=\sqrt{(x^2-3x)f(x)} \Rightarrow (x^2-3x)f(x)\geq 0$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(1)=0$ است، داریم:

برای $x<1$ تابع f منفی است. $\Rightarrow x<1 \Rightarrow f(x)<f(1) \Rightarrow f(x)<0$

برای $x>1$ تابع f مثبت است. $\Rightarrow x>1 \Rightarrow f(x)>f(1) \Rightarrow f(x)>0$

به‌طور تقریبی نمودار f به‌صورت مقابل است.



$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0\,,\ x=3$

x		0		1		3	
x^2-3x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(x^2-3x)f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow 0\leq x\leq 1$ یا $x\geq 3 \Rightarrow D_g=[0,1]\cup[3,+\infty)$

۴۲. نکته: اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(a)\leq f(b)$ باشد، آنگاه $a\leq b$.

$g(x)=\sqrt{f(|x-2|)-f(|x+1|)} \Rightarrow f(|x-2|)-f(|x+1|)\geq 0$

$\Rightarrow f(|x-2|)\geq f(|x+1|) \xrightarrow{f\ \text{اکیداً صعودی}} |x-2|\geq |x+1|$

برای حل این‌گونه نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$(x-2)^2\geq (x+1)^2 \Rightarrow x^2-4x+4\geq x^2+2x+1 \Rightarrow 4-1\geq 2x+4x$

$\Rightarrow 6x\leq 3 \Rightarrow x\leq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g=(-\infty,\frac{1}{2}]$

۴۳. نکته: اگر تابع f اکیداً نزولی باشد و $f(a)\leq f(b)$ آنگاه $a\geq b$.

$g(x)=\sqrt{f(|x-3|)-f(|x+2|)} \Rightarrow f(|x-3|)-f(|x+2|)\geq 0$

$\Rightarrow f(|x-3|)\geq f(|x+2|) \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} |x-3|\leq |x+2|$

$(x-3)^2\leq (x+2)^2 \Rightarrow x^2-6x+9\leq x^2+4x+4 \Rightarrow 9-4\leq 4x+6x$

$\Rightarrow ۱۰x \geq ۵ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_g = [\frac{۱}{۲}, +\infty)$

.۴۴

$f(x) = [-۲x] + ۱$

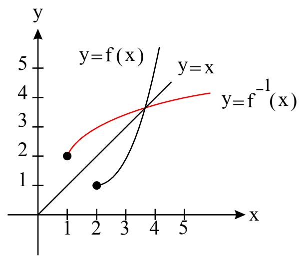
$x_۱ < x_۲ \Rightarrow -۲x_۱ > -۲x_۲ \Rightarrow [-۲x_۱] \geq [-۲x_۲] \Rightarrow [-۲x_۱] + ۱ \geq [-۲x_۲] + ۱$

$\Rightarrow f(x_۱) \geq f(x_۲)$ نزولی

۴۵ . تابع $f(x) = x^۲ - ۴x + ۵$ معرف سهمی $f(x) = (x-۲)^۲ + ۱$ با محور تقارن $x_s = ۲$ می‌باشدکه غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است.

حال اگر دامنهٔ تابع را به یکی از فاصله‌های $[x_s, +\infty) = [۲, +\infty)$ یا $(-\infty, x_s] = (-\infty, ۲]$ محدود کنیم تابع f یک‌به‌یک و وارون‌پذیر خواهد شد:

حالت اول:



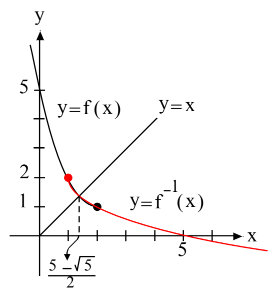
$$\begin{cases} f(x) = (x-۲)^۲ + ۱ \\ D_f = [۲, +\infty) \end{cases} \rightarrow y = (x-۲)^۲ + ۱$$

$$\rightarrow (x-۲)^۲ = y - ۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲| = \sqrt{y-۱}$$

$$\xrightarrow[x-۲\geq ۰]{D_f \text{ با توجه به}} x - ۲ = \sqrt{y-۱} \rightarrow x = \sqrt{y-۱} + ۲$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x-۱} + ۲$$

حالت دوم:



$$\begin{cases} f(x) = (x-۲)^۲ + ۱ \\ D_f = (-\infty, ۲] \end{cases} \rightarrow y = (x-۲)^۲ + ۱$$

$$\rightarrow (x-۲)^۲ = y - ۱ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۲| = \sqrt{y-۱}$$

$$\xrightarrow[x-۲\leq ۰]{D_f \text{ با توجه به}} -(x-۲) = \sqrt{y-۱} \rightarrow x - ۲ = -\sqrt{y-۱} \rightarrow x = -\sqrt{y-۱} + ۲$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x) = -\sqrt{x-۱} + ۲$$

۴۶ . باتوجه به رابطهٔ $f^{-۱}og(m) = f^{-۱}(g(m)) = ۲$، ابتدا مقدار $g(m)$ را (به‌صورت پارامتری) از روی ضابطهٔ g به‌دست می‌آوریم:

یعنی برای $m > ۰$، $g(m)$ برابر $m^۲ + ۱$ و برای $m \leq ۰$ برابر $m^۲ - ۱$ است.

$$g(m) = \begin{cases} m^۲ + ۱ & ; m > ۰ \\ m^۲ - ۱ & ; m \leq ۰ \end{cases}$$

درنتیجه آن رابطهٔ اولیه به‌صورت $f^{-۱}(m^۲+۱) = ۲$ (برای $m > ۰$) یا $f^{-۱}(m^۲-۱) = ۲$ (برای $m \leq ۰$) تبدیل خواهد شد. حال باتوجه به این نکته که «اگر $f^{-۱}(a) = b$، آن‌گاه $f(b) = a$ برقرار است.» داریم:

$$\begin{cases} m > ۰ \text{ برای} : f(۲) = m^۲ + ۱ \\ m \leq ۰ \text{ برای} : f(۲) = m^۲ - ۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۲,۰)\in f]{f \text{ از روی مجموعهٔ}} \begin{cases} m > ۰ \text{ برای} : m^۲ + ۱ = ۰ \rightarrow m^۲ = -۱ \rightarrow \text{فاقد جواب} \\ m \leq ۰ \text{ برای} : m^۲ - ۱ = ۰ \rightarrow m^۲ = ۱ \rightarrow m = \pm ۱ \xrightarrow{(m\leq ۰)} m = -۱ \checkmark \end{cases}$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول برای m همان -۱ بوده و داریم: $f^{-1}og(-۱) = ۲$

۴۷ . ابتدا اکیداً صعودی بودن fog را باتوجه به شرایط مسأله اثبات می‌کنیم. برای هر a و b از D_g، اگر $a > b$، آن‌گاه داریم:

$$a > b \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(a) > g(b) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(g(a)) > f(g(b))$$

$\rightarrow fog(a) > fog(b) \rightarrow$. fog اکیداً صعودی است.

سپس با فرض $h = fog$ و توجه به رابطهٔ $h^{-1} = (fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ و با درنظر گرفتن این نکته که معکوس هر تابع اکیداً صعودی خود نیز اکیداً صعودی است، اکیداً صعودی بودن $h^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ باتوجه به اکیداً صعودی بودن $h = fog$ به‌راحتی قابل توجیه خواهد بود.

همین روند را می‌توان درمورد تابع ترکیب و اکیداً صعودی $h = gof$ نیز انجام داد. تابع $h = gof$ به‌دلیل اکیداً صعودی بودن توابع f و g اکیداً صعودی بوده و معکوس آن یعنی $h^{-1} = (gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود.

۴۸ . برای تابع مرکب gof^{-1} نیاز به توابع f^{-1} و g داریم. تابع f^{-1} را می‌توانیم از روی تابع f و با جابه‌جا کردن جای مؤلفه‌های آن به‌دست آوریم:

$$f^{-1} = \{(-۱,۴),(۱,۳),(۲,۵)\} \ , \ g = \{(-۱,۲),(۴,۰),(۵,۳)\}$$

$$\begin{cases} gof^{-1}(-۱) = g(f^{-1}(-۱)) = g(۴) = ۰ \ (-۱ \xrightarrow{f^{-1}} ۴ \xrightarrow{g} ۰ : \ -۱ \xrightarrow{gof^{-1}} ۰) \\ gof^{-1}(۱) = g(f^{-1}(۱)) = g(۳) \ \times \ (\text{زیرا} : ۳ \notin D_g) \\ gof^{-1}(۲) = g(f^{-1}(۲)) = g(۵) = ۳ \ (۲ \xrightarrow{f^{-1}} ۵ \xrightarrow{g} ۳ : \ ۲ \xrightarrow{gof^{-1}} ۳) \end{cases}$$

$$\rightarrow gof^{-1} = \{(-۱,۰),(۲,۳)\}$$

و حالا برای تابع مرکب fog^{-1} داریم:

$$g^{-1} = \{(۲,-۱),(۰,۴),(۳,۵)\} \ , \ f = \{(۴,-۱),(۳,۱),(۵,۲)\}$$

$$\begin{cases} fog^{-1}(۲) = f(g^{-1}(۲)) = f(-۱) \ \times \ (-۱ \notin D_f) \\ fog^{-1}(۰) = f(g^{-1}(۰)) = f(۴) = -۱ \ (۰ \xrightarrow{g^{-1}} ۴ \xrightarrow{f} -۱ : \ ۰ \xrightarrow{fog^{-1}} -۱) \\ fog^{-1}(۳) = f(g^{-1}(۳)) = f(۵) = ۲ \ (۳ \xrightarrow{g^{-1}} ۵ \xrightarrow{f} ۲ : \ ۳ \xrightarrow{fog^{-1}} ۲) \end{cases}$$

$$\rightarrow fog^{-1} = \{(۰,-۱),(۳,۲)\}$$

۴۹ . برای یافتن تابع معکوس تابع $f(x) = ۱ - \dfrac{g(x-۱)}{۳}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \quad (۱)$$

$$y = ۱ - \frac{g(x-۱)}{۳} \Rightarrow ۱ - y = \frac{g(x-۱)}{۳} \Rightarrow ۳ - ۳y = g(x-۱) \Rightarrow g^{-1}(۳-۳y) = g^{-1}(g(x-۱)) \Rightarrow x - ۱ = g^{-1}(۳-۳y)$$

$$x = ۱ + g^{-1}(۳-۳y) \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\text{از ۱ و ۲}} f^{-1}(y) = ۱ + g^{-1}(۳-۳y) \Rightarrow f^{-1}(x) = ۱ + g^{-1}(۳-۳x)$$

۵۰ .

$$f(x_۱) = f(x_۲)$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}}\Rightarrow x_1\sqrt{x_2^2+1}=x_2\sqrt{x_1^2+1}$$

(*) دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم. $\Rightarrow x_1^2(x_2^2+1)=x_2^2(x_1^2+1)\Rightarrow x_1^2x_2^2+x_1^2=x_2^2x_1^2+x_2^2\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow |x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$ تابع یک به یک است.

توجه کنید چون دو کسر با هم مساوی‌اند و مخرج دو کسر علامت مثبت دارد پس صورت‌ها با هم، هم علامت هستند.

برای یافتن ضابطه تابع معکوس قرار می‌دهیم:

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow$ دو طرف به توان ۲

$y^2=\frac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow y^2x^2+y^2=x^2\Rightarrow y^2x^2-x^2=-y^2\Rightarrow x^2(y^2-1)=-y^2\Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2}\Rightarrow x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ x و y هم علامت‌اند

$\Rightarrow f^{-1}(x)=y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

۵۱ . ابتدا توجه کنید که اگر $g^{-1}(a)=0$، آن‌گاه $g(0)=a$ است. حال اگر شرط $(g^{-1}of^{-1}og^{-1})(-1)=0$ را به شکل $g^{-1}(f^{-1}og^{-1}(-1))=0$ نوشته و فرض کنیم $f^{-1}og^{-1}(-1)=a$ داریم:

$$g^{-1}(a)=0\to g(0)=a\xrightarrow[g(0)=-2]{g\text{ از ضابطهٔ }}a=-2\to f^{-1}og^{-1}(-1)=-2$$

حال اگر دوباره رابطهٔ $f^{-1}og^{-1}(-1)=-2$ به شکل $f^{-1}(g^{-1}(-1))=-2$ نوشته و فرض کنیم $g^{-1}(-1)=b$ است، داریم:

$$f^{-1}(b)=-2\to f(-2)=b\xrightarrow[f(-2)=-1]{f\text{ از ضابطهٔ }}b=-1\to g^{-1}(-1)=-1$$

$$\to g(-1)=-1\xrightarrow{g\text{ از ضابطهٔ }}1-m-2=-1\to m=0$$

۵۲ . باتوجه به رابطهٔ $f^{-1}(g^{-1}of^{-1}(0))=2$ و با فرض $a=g^{-1}of^{-1}(0)$ داریم:

$$f^{-1}(a)=2\to a=f(2)\xrightarrow{f\text{ از ضابطهٔ }}a=4-6=-2\to g^{-1}of^{-1}(0)=-2$$

اکنون باتوجه به رابطهٔ $g^{-1}(f^{-1}(0))=-2$ و با فرض $f^{-1}(0)=b$ داریم:

$$g^{-1}(b)=-2\to b=g(-2)\xrightarrow{g\text{ از ضابطهٔ }}b=4-2m\to f^{-1}(0)=4-2m\to f(4-2m)=0$$

$$\xrightarrow{f\text{ از ضابطهٔ }}(4-2m)^2-3(4-2m)=0\xrightarrow{(4-2m)\text{ فاکتور از }}(4-2m)(4-2m-3)=0$$

$$\to(4-2m)(1-2m)=0\xrightarrow{\text{ویژگی حاصلضرب صفر}}\begin{cases}4-2m=0\\ \text{یا}\\ 1-2m=0\end{cases}\to\begin{cases}m=2\\ \text{یا}\\ m=\frac{1}{2}\end{cases}$$

۵۳ . برای $fof^{-1}(a)$، a از دامنهٔ f^{-1} انتخاب می‌شود در حالی‌که برای $f^{-1}of(a)$، a از دامنهٔ f انتخاب می‌شود:

$$f=\{(2,-1),(1,3),(0,4)\}\quad,\quad f^{-1}=\{(-1,2),(3,1),(4,0)\}$$

$$\begin{cases}fof^{-1}(-1):\ -1\xrightarrow{f^{-1}}2\xrightarrow{f}-1:\ -1\xrightarrow{fof^{-1}}-1\\ fof^{-1}(3):\ 3\xrightarrow{f^{-1}}1\xrightarrow{f}3:\ 3\xrightarrow{fof^{-1}}3\\ fof^{-1}(4):\ 4\xrightarrow{f^{-1}}0\xrightarrow{f}4:\ 4\xrightarrow{fof^{-1}}4\end{cases}\Rightarrow fof^{-1}=\{(-1,-1),(3,3),(4,4)\}$$

$$\begin{cases} f^{-1}of(۲):\ ۲ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{f^{-1}} ۲:\ ۲ \xrightarrow{f^{-1}of} ۲ \\ f^{-1}of(۱):\ ۱ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{f^{-1}} ۱:\ ۱ \xrightarrow{f^{-1}of} ۱ \\ f^{-1}of(۰):\ ۰ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{f^{-1}} ۰:\ ۰ \xrightarrow{f^{-1}of} ۰ \end{cases} \Rightarrow f^{-1}of = \{(۲,۲),(۱,۱),(۰,۰)\}$$

همان‌طورکه می‌بینید توابع ترکیب fof^{-1} و $f^{-1}of$ هردو همانی بوده ولی باهم برابر نیستند.

. ۵۴

الف) $f(x) = \frac{-۸x+۳}{۲}\ :\ y = \frac{-۸x+۳}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲y = -۸x+۳ \xrightarrow{-۳} -۸x = ۲y-۳$

$$\xrightarrow{\div(-۸)} x = \frac{۲y-۳}{-۸} = \frac{-۱}{۴}y + \frac{۳}{۸} \xrightarrow{\text{حالا}} f^{-1}(x) = \frac{-۱}{۴}x + \frac{۳}{۸}$$

ب) $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x+۱}\ :\ y = -۵ - \sqrt{۳x+۱} \to y+۵ = -\sqrt{۳x+۱}$

$$\xrightarrow[\substack{\left(\substack{y+۵\le ۰ \\ y\le -۵}\right) \\ x\ge \frac{-۱}{۳}}]{\text{به توان ۲ برسان}} (y+۵)^۲ = (۳x+۱) \xrightarrow{-۱} (y+۵)^۲ - ۱ = ۳x \xrightarrow{\div ۳} x = \frac{۱}{۳}(y+۵)^۲ - \frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا}} g^{-1}(x) = \frac{۱}{۳}(x+۵)^۲ - \frac{۱}{۳}$$

که با توجه به شرایط $y \le -۵$ و $x \ge \frac{-۱}{۳}$ برای دامنه و برد تابع وارون، داریم:

$$D_{g^{-1}} = R_g = (-\infty, -۵]\ ,\ R_{g^{-1}} = D_g = [-\frac{۱}{۳}, +\infty)$$

. ۵۵ باید بدانیم که ترکیب هر تابع با معکوس خود برابر تابع همانی است. براین اساس داریم:

$$\begin{cases} fof^{-1}(a) = a \\ f^{-1}of(b) = b \end{cases} \to \begin{cases} fof^{-1}(۲x) = ۲x \\ f^{-1}of(x) = x \end{cases} \to fof^{-1}(۲x) - f^{-1}of(x) = ۲x - x = ۳x - ۸$$

$$\to x = ۳x - ۸ \to x - ۳x = -۸ \to -۲x = -۸ \xrightarrow{\div(-۲)} x = \frac{-۸}{-۲} \to x = ۴$$

همان‌طورکه می‌بینید ضابطهٔ تابع f اصلاً مورداستفاده قرار نگرفت. بلکه تنها کافی است که تابع f معکوس‌پذیر باشد که هست.

. ۵۶ در نگاه اول ممکن است باتوجه به وجود روابط $fof^{-1}(x) = x$ و $f^{-1}of(x) = x$ تصور کنیم که توابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ به‌دلیل همانی بودن، همواره باهم برابرند که البته تصور غلطی است. حقیقت در دامنهٔ این توابع نهان است.

$$D_{fof^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} | f^{-1}(x) \in D_f\}\ ,\ D_{f^{-1}of} = \{x \in D_f | f(x) \in D_{f^{-1}}\}$$

با دقت روی این دامنه‌ها درمی‌یابیم در رابطهٔ $fof^{-1}(x) = x$، x از دامنهٔ f^{-1} (به‌شرطی‌که $f^{-1}(x)$ متعلق به دامنهٔ f باشد) انتخاب می‌شود و درحالی‌که در رابطهٔ $f^{-1}of(x) = x$، x از دامنهٔ f (با این شرط که $f(x) \in D_{f^{-1}}$ است) انتخاب می‌شود. پس اگر دامنه و برد تابع وارون‌پذیر f باهم برابر باشند ($D_f = R_f$) توابع ترکیب fof^{-1} و $f^{-1}of$ نیز باهم برابر می‌شوند.
به‌عبارت دیگر اگر تابع f همانی باشد، تابع‌های fof^{-1} و $f^{-1}of$ باهم برابر خواهند بود. مثلاً برای $f = \{(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰)\}$ داریم:

$$f^{-1} = \{(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰)\} \to fof^{-1} = f^{-1}of = \{(۱,۱),(۲,۲),(۰,۰)\}$$

. ۵۷ ابتدا باید ضابطهٔ f^{-1} را به‌دست آوریم:

$$f(x) = x+۱ : y = x+۱ \to x = y-۱ \to f^{-1}(x) = x-۱$$

حال تابع ترکیب gof^{-1} را تشکیل داده و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} g(x)=۲x^۲-۳x \\ f^{-۱}(x)=x-۱ \end{cases} \to (gof^{-۱})(x)=g(f^{-۱}(x))=g(x-۱)=۲(x-۱)^۲-۳(x-۱)=۰$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور میگیریم.}]{\text{از } (x-۱)} (x-۱)(۲(x-۱)-۳)=۰ \to \begin{cases} x-۱=۰ \to x=۱ \\ \text{یا} \\ ۲(x-۱)-۳=۰ \to x-۱=\frac{۳}{۲} \to x=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

بنابراین $x=۱$ و $x=\frac{۵}{۲}$، صفرها یا ریشه‌های تابع $gof^{-۱}$ هستند.

۵۸ . ابتدا دقت کنید که ماشین $x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to x$ به این معناست که $gof(x)=x$ است. (زیرا طبق این ماشین تابع f، x را به $f(x)$ و تابع g، $f(x)$ را به x تبدیل می‌کند.)

بنابراین باتوجه به معکوس‌پذیر بودن تابع g، تابع‌های f و g وارون یکدیگر بوده و داریم:

$$\begin{cases} gof(۳)=۳ \\ g(a)=۳ \end{cases} \to \begin{cases} g(f(۳))=۳ \\ g(a)=۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{تابع } b \text{ ، یک‌به‌یک است.}} f(۳)=a \xrightarrow{\text{باتوجه به ضابطهٔ } f} a=f(۳)=\frac{۵(۳)+۶}{۲(۳)-۱}=\frac{۲۱}{۵}$$

۵۹ . بیایید ابتدا توابع $g=f^۲+f$ و $f^{-۱}$ را باتوجه به اعضای تابع f به‌دست آوریم:

$$g=f^۲+f=\{(-۱,۱^۲+۱),(۱,(-۱)^۲+(-۱)),(۲,۰^۲+۰),(۴,(-۲)^۲+(-۲))\}$$

$$=\{(-۱,۲),(۱,۰),(۲,۰),(۴,۲)\}\ ,\ f^{-۱}=\{(۱,-۱),(-۱,۱),(۰,۲),(-۲,۴)\}$$

اکنون با توجه به تعریف تابع ترکیب و نیز دامنه‌های $h=fog$ و $k=gof^{-۱}$، اعضای این توابع را به‌دست می‌آوریم:

$$D_h=D_{fog}=\{x\in D_g | g(x)\in D_f\}=\{-۱,۴\}\ ,\ D_k=D_{gof^{-۱}}=\{x\in D_{f^{-۱}} | f^{-۱}(x)\in D_g\}$$

$$=\{۱,-۱,۰,-۲\}$$

$$h=fog=\{(-۱,f(g(-۱)),(۴,f(g(۴))\}=\{(-۱,f(۲)),(۴,f(۲))\}=\{(-۱,۰),(۴,۰)\}$$

$$k=gof^{-۱}=\{(۱,gof^{-۱}(۱)),(-۱,gof^{-۱}(-۱)),(۰,gof^{-۱}(۰)),(-۲,gof^{-۱}(-۲))\}$$

$$=\{(۱,g(-۱)),(-۱,g(۱)),(۰,g(۲)),(-۲,g(۴))\}=\{(۱,۲),(-۱,۰),(۰,۰),(-۲,۲)\}$$

۶۰ . الف)

برای محاسبهٔ $(fog)^{-۱}(۵)$ دو راه پیش‌رو داریم. یکی اینکه تابع مرکب fog را محاسبه کرده و وارون آن را بیابیم و در نهایت به جای xهای آن ۵ قرار دهیم. دیگر اینکه از رابطهٔ $(fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)$ استفاده کرده و با توجه به تابع وارون‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$، تابع مرکب $g^{-۱}of^{-۱}$ را محاسبه کرده و به‌جای xهایش ۵ قرار دهیم. ما هردو راهکار را انجام می‌دهیم:

روش اول:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \\ g(x)=x^۳ \end{cases} \to fog(x)=f(g(x))=f(x^۳)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \to fog(x)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳$$

$$\xrightarrow{\text{حالا محاسبهٔ } (fog)^{-۱}} y=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \xrightarrow{+۳} \frac{۱}{۸}x^۳=y+۳ \xrightarrow{\times ۸} x^۳=۸y+۲۴$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم بگیر.}} x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴} \to (fog)^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴} \xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

حال، روش دوم را نیز امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \to y=\frac{۱}{۸}x-۳ \to \frac{۱}{۸}x=y+۳ \to x=۸y+۲۴ \to f^{-۱}(x)=۸x+۲۴ \\ g(x)=x^۳ \to y=x^۳ \to x=\sqrt[۳]{y} \to g^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا می‌نویسیم}} (fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}(f^{-۱}(x))=g^{-۱}(۸x+۲۴)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$$

$$\xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-۱}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

حال، با توجه به ضابطه‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ موارد (ب) و (پ) را به راحتی می‌توانیم محاسبه کنیم:

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)=f^{-۱}(f^{-۱}(۶)) \xrightarrow[f^{-۱}(۶)=۴۸+۲۴=۷۲]{f^{-۱}(x)=۸x+۲۴} f^{-۱}(۷۲)=۸(۷۲)+۲۴=۶۰۰$

پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)=g^{-۱}(f^{-۱}(۵)) \xrightarrow[f^{-۱}(۵)=۴۰+۲۴=۶۴]{f^{-۱}(x)=۸x+۲۴} g^{-۱}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

همانطور که می‌بینید جواب‌های موارد (الف) و (پ) یکی هستند!

۶۱ . در هر مورد وارون یکی از توابع را یافته (معمولاً آن تابعی که محاسبهٔ x برحسب y در آن ساده‌تر است) و نشان می‌دهیم که تابع وارون به‌دست آمده همان تابع دوم است.

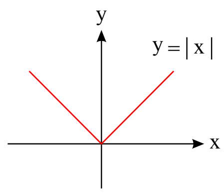
الف)
$$\begin{cases} f(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳ \\ g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷} \to y=-\frac{۲x+۶}{۷} \xrightarrow{\times(-۷)} -۷y=۲x+۶ \xrightarrow{-۶} ۲x=-۷y-۶ \\ \xrightarrow{\div ۲} x=\frac{-۷y-۶}{۲}=\frac{-۷}{۲}y-۳ \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-۱}(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳ \longrightarrow g^{-۱}(x)=f(x)\ \checkmark \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f(x)=-\sqrt{x-۸} \\ g(x)=۸+x^۲\ ;\ x\leq ۰ \to y=۸+x^۲ \xrightarrow{-۸} x^۲=y-۸ \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{y-۸} \\ \xrightarrow[|x|=-x]{\text{با توجه به } x\leq ۰} -x=\sqrt{y-۸} \to x=-\sqrt{y-۸} \xrightarrow{\text{حالا}} g^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۸}=f(x)\ \checkmark \end{cases}$$

۶۲ .

الف

با توجه به نمودار



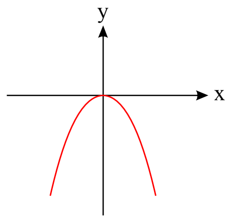
اگر دامنهٔ تابع را به یکی از دو فاصلهٔ $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$ محدود کنیم، آن‌گاه تابع مورد نظر یک‌به‌یک خواهد بود.

حالت اول: $\begin{cases} f(x)=|x| \\ x\geq 0 \end{cases} \to f(x)=x \to y=x \to x=y \to f^{-1}(x)=x$

حالت دوم: $\begin{cases} f(x)=|x| \\ x\leq 0 \end{cases} \to f(x)=-x \to y=-x \to x=-y \to f^{-1}(x)=-x$

ب

تابع $g(x)=-x^2$ که معرف سهمی



است که یک‌به‌یک نیست و با محدود کردن دامنهٔ آن به یکی از دو فاصلهٔ $[0,+\infty)$ یا $(-\infty,0]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر می‌شود.

حالت اول:

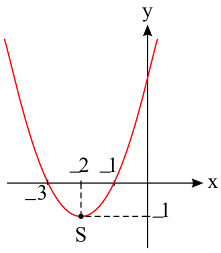
$$\begin{cases} g(x)=-x^2 \\ x\geq 0 \end{cases} \to y=-x^2 \to x^2=-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{-y} \xrightarrow[|x|=x]{x\geq 0} x=\sqrt{-y} \to g^{-1}(x)=\sqrt{-x}$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} g(x)=-x^2 \\ x\leq 0 \end{cases} \to y=-x^2 \to x^2=-y \xrightarrow{\text{جذر}} |x|=\sqrt{-y} \xrightarrow[|x|=-x]{x\leq 0} x=-\sqrt{-y} \to g^{-1}(x)=-\sqrt{-x}$$

پ

سهمی $h(x)=x^2+4x+3$ نیز که می‌شود آن را به صورت $h(x)=(x+2)^2-1$ نوشت نموداری به شکل



داشته و در کل دامنهٔ خود غیر یک‌به‌یک است.

حال اگر دامنهٔ آن را از $\mathbb{R}$ به $(-\infty,-2]$ یا $[-2,+\infty)$ محدود کنیم، آن‌گاه با یکی از دو شاخهٔ سهمی مواجه بوده و تابعی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر داریم:

حالت اول:

$$\begin{cases} h(x)=(x+2)^2-1 \\ D_h=[-2,+\infty) \end{cases} \to y=(x+2)^2-1 \to (x+2)^2=y+1 \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$|x+2|=\sqrt{y+1} \xrightarrow[x+2\geq 0]{x\geq -2} x+2=\sqrt{y+1} \to x=\sqrt{y+1}-2 \to h^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-2$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} h(x)=(x+2)^2-1 \\ D_h=(-\infty,-2] \end{cases} \to y=(x+2)^2-1 \to (x+2)^2=y+1 \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$|x+2|=\sqrt{y+1} \xrightarrow[x+2\leq 0]{x\leq -2} -(x+2)=\sqrt{y+1} \to x+2=-\sqrt{y+1} \to x=-\sqrt{y+1}-2 \to h^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}-2$$

۶۳ . باید معکوس هر کدام از ضابطهٔ را در محدودهٔ دامنهٔ خودشان پیدا کنیم:

$$y=4x-x^2-3 \Rightarrow -y=x^2-4x+3 \Rightarrow -y=(x^2-4x+4)-1 \Rightarrow -y+1=(x-2)^2 \to \sqrt{1-y}=|x-2| \xrightarrow{x<2} \sqrt{1-y}=-x+2$$

$$x=2-\sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x)=y=2-\sqrt{1-x}$$

$$y=x-2 \Rightarrow x=y+2 \Rightarrow f^{-1}(x)=y=x+2$$

پس ضابطهٔ تابع f^{-1} به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}۲-\sqrt{۱-x} & , \quad x<۱\\ x+۲ & , \quad x\geq ۰\end{cases}$$

اما همین‌طور که می‌دانیم دامنهٔ f^{-1}، برد تابع اصلی است پس باید برد را بیابیم:

دامنه ضابطهٔ اول $x<۱$ داشتیم : $\sqrt{۱-y}=-x+۲\Rightarrow ۱-y>۰\Rightarrow y<۱\Rightarrow x<۱$

توجه کنید: از آن‌جا که در دامنهٔ تابع اصلی $x<۲$ است عبارت $\sqrt{۱-y}$ نمی‌تواند برابر با صفر شود.

برای محاسبه برد ضابطهٔ دوم f، کافی است روی شرط دامنه‌اش، ضابطه را بسازیم.

$$x\geq ۲\Rightarrow x-۲\geq ۰\Rightarrow y\geq ۰\Rightarrow x\geq ۰$$

.۶۴

نکته: زوج $n\rightarrow ۰\leq \sin^n u\leq ۱$ و $۰\leq \cos^n u\leq ۱$

نکته: فرد $n\rightarrow -۱\leq \sin^n u\leq ۱$ و $-۱\leq \cos^n u\leq ۱$

الف) $f(x)=۲\sin^۴ x-۵$

$$۰\leq \sin^۴ x\leq ۱\xrightarrow{\times ۲} ۰\leq ۲\sin^۴ x\leq ۲\Rightarrow ۰-۵\leq ۲\sin^۴ x-۵\leq ۲-۵$$

$$\Rightarrow -۵\leq f(x)\leq -۳\Rightarrow min\ f=-۵ \quad \text{و} \quad max\ f=-۳$$

ب) $g(x)=-۳\sin^۵ ۲x+۱۰$

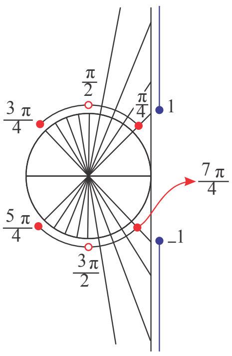
$$-۱\leq \sin^۵ ۲x\leq ۱\xrightarrow{\times(-۳)} ۳\geq -۳\sin^۵ ۲x\geq -۳\Rightarrow -۳+۱۰\leq -۳\sin^۵ ۲x+۱۰\leq ۳+۱۰$$

$$\Rightarrow ۷\leq g(x)\leq ۱۳\Rightarrow min\ g=۷ \quad \text{و} \quad max\ g=۱۳$$

.۶۵

$$f(x)=\sqrt{\tan^۲ x-۱}\Rightarrow \tan^۲ x-۱\geq ۰\Rightarrow \tan^۲ x\geq ۱\Rightarrow |\tan x|\geq ۱$$
$$\Rightarrow \tan x\leq -۱ \quad \text{یا} \quad \tan x\geq ۱$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل حدود x بصورت زیر است.



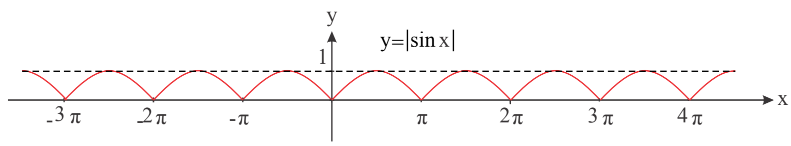
$$\frac{\pi}{۴}\leq x\leq \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad \frac{۵\pi}{۴}\leq x\leq \frac{۷\pi}{۴} \quad \text{و} \quad x\neq \frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{۳\pi}{۲}$$

در حالت کلی داریم:

$$۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\leq x\leq ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}\leq x\leq ۲k\pi+\frac{۷\pi}{۴} \quad \text{و} \quad x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

.۶۶ الف) با رسم $y=\sin x$ و قرینه کردن قسمت‌های زیر محور طول‌ها نسبت به این محور خواهیم داشت:

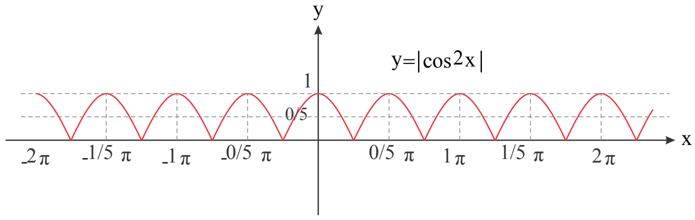
$$\begin{cases}T=\pi\\ \max=۱\\ \min=۰\end{cases}$$



ب) کافی است نمودار $y = \cos x$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده $(\cos ۲x)$ و سپس نقاط با عرض منفی را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم $|\cos ۲x|$ تا به نمودار زیر برسیم:

$$x = ۰,\ \frac{\pi}{۲},\ \pi,\ \frac{۳\pi}{۲},\ ۲\pi,\ \cdots \to y = ۱ \Rightarrow T = \frac{\pi}{۲}$$

$$\begin{cases} T = \frac{\pi}{۲} \\ \max = ۱ \\ \min = ۰ \end{cases}$$



.۶۷

$$۲T = \frac{۷\pi}{۲} - (-\frac{\pi}{۲}) = ۴\pi \to T = ۲\pi \to \frac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \to b = \pm ۱$$

$$c = \frac{۴ + (-۲)}{۲} = ۱$$

$$|a| = \frac{۴ - (-۲)}{۲} = ۳ \to a = -۳$$

.۶۸

$$-۱ \leq \cos ۲x \leq ۱ \Rightarrow -\pi \leq \pi \cos ۲x \leq \pi \Rightarrow -\pi - \frac{\pi}{۲} \leq \pi \cos ۲x - \frac{\pi}{۲} \leq \pi - \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{۳\pi}{۲} \leq \pi \cos ۲x - \frac{\pi}{۲} \leq \frac{\pi}{۲} \Rightarrow f(x) = [\pi \cos ۲x - \frac{\pi}{۲}] = -۵, -۴, \cdots, ۰, ۱$$

$$R_f = \{-۵, -۴, \cdots, ۰, ۱\}$$

.۶۹

در تابع $y = a\cos bx + c$ داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ \ \max = |a| + c\ ,\ \ \min = -|a| + c$$

$$f(x) = \sqrt{۲}\cos(\frac{۱}{۳}x) - ۱ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi$$

$$\max\ f = \sqrt{۲} - ۱\ \ ,\ \ \min\ f = -\sqrt{۲} - ۱$$

$$\frac{\max\ f}{\min\ f} = \frac{\sqrt{۲} - ۱}{-\sqrt{۲} - ۱} = \frac{۱ - \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} + ۱} \times \frac{\sqrt{۲} - ۱}{\sqrt{۲} - ۱} = \frac{\sqrt{۲} - ۲ - ۱ + \sqrt{۲}}{۲ - ۱} = -۳ + ۲\sqrt{۲}$$

.۷۰

$$\frac{T}{۴} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow T = ۲\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \Rightarrow |b| = ۱ \xrightarrow{b>۰} b = ۱$$

$$\left.\begin{matrix} max = |a| + c = ۴ \\ min = -|a| + c = -۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow |a| = ۳ \xrightarrow{a<۰} a = -۳$$

$$f(x) = -۳\sin x + ۱$$

.۷۱

$$\frac{T}{۲} = \frac{۴\pi}{۳} - ۰ \Rightarrow T = \frac{۸\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۸\pi}{۳} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{۳}{۴}$$

$$\left.\begin{matrix} max\ f = |a| + c = ۵ \\ min\ f = -|a| + c = -۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲c = ۳ \Rightarrow c = \frac{۳}{۲} \to |a| = \frac{۷}{۲} \xrightarrow{a>۰} a = \frac{۷}{۲}$$

$$f(x) = \frac{۷}{۲}\cos(\frac{۳}{۴}x) + \frac{۳}{۲}$$

.۷۲

تفاضل طول دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است، پس داریم:

$$\frac{T}{۲}=\frac{۵\pi}{۳}\Rightarrow T=\frac{۱۰\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{b>۰} b=\frac{۳}{۵}$$

$$\left.\begin{array}{l} max\ f=۰\Rightarrow |a|+c=۰ \\ min\ f=-۶\Rightarrow -|a|+c=-۶ \end{array}\right\}\Rightarrow ۲c=-۶\Rightarrow c=-۳\to |a|=۳$$

$$a<۰\Rightarrow a=-۳\Rightarrow f(x)=-۳\cos(\frac{۳}{۵}x)-۳$$

. ۷۳

در تابع $y=a\sin bx+c$ داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ \ max=|a|+c\ ,\ \ min=-|a|+c$$

$$f(x)=\sin(mx)+m\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{m}=۴\pi\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

$$f(x)=\sin(\frac{۱}{۲}x)+\frac{۱}{۲}\Rightarrow max\ f=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

. ۷۴

$$\frac{T}{۴}=۱\Rightarrow T=۴\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۴\Rightarrow |b|=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \max=|a|+c=۶ \\ \min=-|a|+c=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow ۲c=۶\Rightarrow c=۳\to |a|=۳\xrightarrow{a<۰} a=-۳$$

$$f(x)=-۳\sin(\frac{\pi}{۲}x)+۳$$

. ۷۵ تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است.

$$\frac{T}{۲}=۳\Rightarrow T=۶\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۶\Rightarrow |b|=\frac{\pi}{۳}\xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \max\ f=|a|+c=۲ \\ \min\ f=-|a|+c=-۴ \end{array}\right\}\Rightarrow ۲c=-۲\Rightarrow c=-۱\to |a|=۳\xrightarrow{a>۰} a=۳$$

$$f(x)=۳\cos(\frac{\pi}{۳}x)-۱$$

. ۷۶

نکته: زوج $n\to ۰\le \sin^n u\le ۱$ و $۰\le\cos^n u\le ۱$

نکته: فرد $n\to -۱\le \sin^n u\le ۱$ و $-۱\le\cos^n u\le ۱$

الف) $f(x)=۳\cos^۲ ۲x-۶$

$$۰\le\cos^۲ ۲x\le ۱\Rightarrow ۰\le ۳\cos^۲ ۲x\le ۳\Rightarrow -۶\le ۳\cos^۲ ۲x-۶\le ۳-۶$$

$\Rightarrow -۶\le f(x)\le -۳\Rightarrow min\ f=-۶$ و $max\ f=-۳$

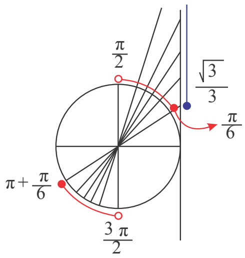
ب) $g(x)=-\pi\cos^۳ ۴x-\frac{\pi}{۲}$

$$-۱\le\cos^۳ ۴x\le ۱\xrightarrow{\times(-\pi)}\pi\ge -\pi\cos^۳ ۴x\ge -\pi\Rightarrow -\pi-\frac{\pi}{۲}\le -\pi\cos^۳ ۴x-\frac{\pi}{۲}\le \pi-\frac{\pi}{۲}$$

$\Rightarrow -\frac{۳\pi}{۲}\le g(x)\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow min\ g=-\frac{۳\pi}{۲}$ و $max\ g=\frac{\pi}{۲}$

. ۷۷ در دایرهٔ مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، که داریم:

$$\tan\alpha \geq \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۶} \leq \alpha < \frac{\pi}{۲} \quad \text{یا} \quad \frac{۷\pi}{۶} \leq \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$$



. ۷۸

نکته: $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin\alpha < \tan\alpha$

توجه کنید که در ناحیهٔ اول سینوس و تانژانت هر دو مثبت هستند، پس داریم:

$$۰ < \sin\alpha < ۱ \Rightarrow ۰ < ۲m - ۱ < ۱ \Rightarrow ۱ < ۲m < ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < m < ۱ \quad (۱)$$

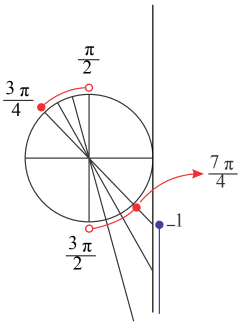
$$\tan\alpha > ۰ \Rightarrow m + ۱ > ۰ \Rightarrow m > -۱ \quad (۲)$$

$$\sin\alpha < \tan\alpha \Rightarrow ۲m - ۱ < m + ۱ \Rightarrow m < ۲ \quad (۳)$$

$$(۱) \cap (۲) \cap (۳) \Rightarrow \frac{۱}{۲} < m < ۱$$

۷۹ . در دایرهٔ مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آنها کوچک‌تر یا مساوی -۱ است.

$$\tan\alpha \leq -۱ \Rightarrow \frac{\pi}{۲} < \alpha \leq \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad \frac{۳\pi}{۲} < \alpha \leq \frac{۷\pi}{۴}$$



۸۰ . الف)

$$\pi \leq \theta < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow ۰ \leq \tan\theta < +\infty \Rightarrow ۴ + ۲m \geq ۰ \Rightarrow m \geq -۲$$

ب)

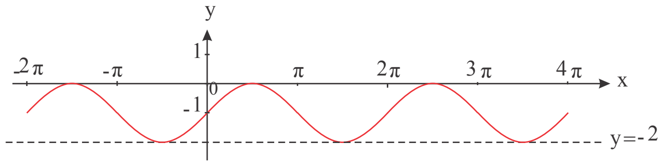
$$\frac{۳\pi}{۴} < \theta < \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow -۱ < \tan\theta < \frac{-\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow -۱ < ۲m - ۱ < -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow ۰ < ۲m < ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۰ < m < \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

. ۸۱

الف

از نمودار تابع نتیجه می‌گیریم که دورهٔ تناوب تابع برابر ۲π است؛ یعنی داریم:

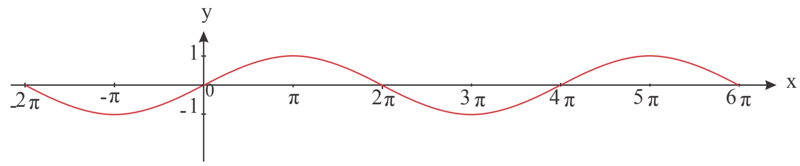


از روی نمودار معلوم می‌شود که $b=۱$ است (زیرا $x=\frac{\pi}{۲}\to y=۰$)؛ داریم:

$\frac{۲\pi}{|b|}=۲\pi\Rightarrow |b|=۱\to b=\pm۱$

$x=۰\to y=-۱\to c=-۱$

ب



از روی نمودار واضح است که:

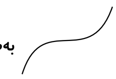
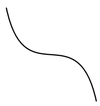
$T=۴\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\to b=\pm\frac{۱}{۲}$

از شکل نمودار معلوم می‌شود که $b=+\frac{۱}{۲}$ است و داریم:

$x=۰\to y=۰\Rightarrow c=۰$

۸۲ . گزینهٔ «۱»، دورهٔ تناوب $\tan x$، π هست پس دورهٔ تناوب $f(x)=\tan(a\pi x+\frac{\pi}{۲})$ برابر است با $T=\frac{\pi}{|a\pi|}=\frac{۱}{|a|}$. از روی نمودار هم دورهٔ تناوب برابر است با $T=\frac{۴}{۳}$ بنابراین:

$\frac{۱}{|a|}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow |a|=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=\pm\frac{۳}{۴}$

گه چون تابع tan،  به‌صورت  رسم شده یعنی نزولی است پس $a=-\frac{۳}{۴}$ مورد قبول است.

۸۳ .

$T=\frac{\pi}{۲}\quad f(x)=a\cos bx+c$

$\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow |b|=۴$

$max=۷=|a|+c$

$min=-۵=-|a|+c$

$c=\frac{۷+(-۵)}{۲}=۱\Rightarrow ۷=|a|+۱\Rightarrow |a|=۶$

باتوجه به نمودار a و b هردو مثبت‌اند پس:

$f(x)=۶\cos ۴x+۱$

۸۴ . می‌دانیم: $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

$\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\cos(\frac{۵\pi}{۸}-x)=۳\Rightarrow\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{۵\pi}{۸}-x))-۳=۰$

$\Rightarrow\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۸}+x)-۳=۰$

$$\Rightarrow \sin^2(x-\frac{\pi}{8}) + 2\sin(x-\frac{\pi}{8}) - 3 = 0\ ,\ \sin(x-\frac{\pi}{8}) = t$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1\ ,\ t = -3$$

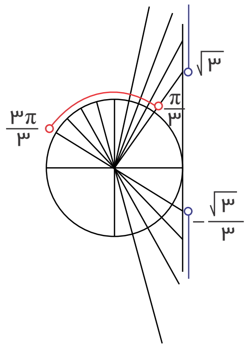
$$\sin(x-\frac{\pi}{8}) = -3 \text{ غ ق ق}\ ,\ \sin(x-\frac{\pi}{8}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8}$$

۸۵ .

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل داریم:

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{6}$$



$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan\alpha > \sqrt{3} \text{ یا } \tan\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{3} > \sqrt{3} \text{ یا } \frac{2m-1}{3} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 2m-1 > 3\sqrt{3} \text{ یا } 2m-1 < -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow m > \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \text{ یا } m < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

۸۶ .

الف

نکته: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ، $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

طبق نکتهٔ فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 2\cos 2x = 2 \Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = 2 - 2\cos 2x = 2(1-\cos 2x) \quad (*)$$

$$\Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = 2 \times 2\sin^2 x \Rightarrow 4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(4\sin^2 x + 4\sin x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 1)\ \ \sin x = 0 = \sin(0) \Rightarrow x = k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$2)\ \ 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \Rightarrow (2\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-3}{2} \rightarrow \text{ ناممکن است.} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ \ (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \ \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

۸۷ .

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v, \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$

$$\sin^3 \pi x + \cos^3 \pi x = 0 \Rightarrow \sin^3 \pi x = -\cos^3 \pi x \Rightarrow \sin \pi x = -\cos \pi x$$

$$\Rightarrow \cos \pi x = -\sin \pi x \Rightarrow \cos \pi x = \cos(\frac{\pi}{2} + \pi x) \Rightarrow \pi x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} + \pi x)$$

$$\begin{cases} \pi x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} + \pi x) \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \text{ جواب ندارد} \\ \pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \pi x \Rightarrow 2\pi x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k - \frac{1}{4} \end{cases}$$

۸۸ .

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v \ \ ,\ \ u = 2k\pi + \pi - v$

$$\sin 3x + \sin 5x = 0 \Rightarrow \sin 5x = -\sin 3x = \sin(-3x)$$

$$\left\{\begin{array}{l}5x = 2k\pi - 3x \Rightarrow 8x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \\ 5x = 2k\pi + \pi - (-3x) = 2k\pi + \pi + 3x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}\end{array}\right\} \xrightarrow{\cup} x = \frac{k\pi}{4}$$

.۸۹

نکته: $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha, \tan u = \tan v \rightarrow u = k\pi + v$

$$\tan 4x = \cot(\frac{\pi}{3} + 4x) \Rightarrow \tan 4x = \tan(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{3} + 4x))$$
$$\Rightarrow \tan 4x = \tan(\frac{\pi}{6} - 4x) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{6} - 4x$$
$$\Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{48}$$

.۹۰

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v \ , \ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$

$$\sin(\frac{x}{2}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0 \Rightarrow \cos(\frac{x}{2}) = -\sin(\frac{x}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2})$$

$$\frac{x}{2} = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \ \text{نادرست} \\ \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \ \text{جواب}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$ جوابهای واقع در بازهٔ $[0, 2\pi]$

.۹۱

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = 2k\pi \pm v$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{x}{4} + \pi) \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{x}{4} + \pi)$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{x}{4} + \pi \Rightarrow x - \frac{x}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3x}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{8k\pi}{3} + \pi \xrightarrow{0 \leqslant x \leqslant \pi} \boxed{x = \pi}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{x}{4} - \pi \Rightarrow \frac{5x}{4} = 2k\pi - \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{5\pi}{4}$$

$$x = \frac{8k\pi}{5} - \pi \xrightarrow{0 \leqslant x \leqslant \pi} x = \frac{8\pi}{5} - \pi = \frac{3\pi}{5} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{5}}$$

معادله در بازهٔ $[0, \pi]$ دارای ۲ جواب است.

۹۲ .

نکته: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \ , \ \cos u = 0 \Rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

نکته: $\sin u = \sin v \rightarrow u = 2k\pi + v \ , \ u = 2k\pi + \pi - v$

الف) $\sin 2x + 3\cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x + 3\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x + 3) = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}} \ , \ 2\sin x + 3 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{2}$ غ ق ق

ب) $4\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 1 \Rightarrow 2 \times 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 1 \Rightarrow 2\sin 2(\frac{x}{2}) = 1$

$$\Rightarrow ۲\sin x = ۱ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}},\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = \boxed{۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}}$$

۹۳.

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = ۲k\pi + u\ ,\ \ u = ۲k\pi + \pi - v$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

الف) $۲\sin^۲ x - \sqrt{۲}\sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\sin x - \sqrt{۲}) = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰\ ,\ \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow \boxed{x = k\pi}\ ,\ \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} = \boxed{۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}} \end{cases}$$

ب) $۲\cos^۲ x - \sqrt{۳}\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\cos x - \sqrt{۳}) = ۰ \Rightarrow \cos x = ۰\ ,\ \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$$\cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$

۹۴ . نکته: $\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

$$\cos(۴x + \frac{\pi}{۴}) + \sin ۳x = ۰ \Rightarrow \cos(۴x + \frac{\pi}{۴}) = -\sin ۳x = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۳x)$$

$$۴x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} + ۳x)$$

$$۴x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۳x \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

$$۴x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - ۳x \Rightarrow ۷x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi - \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۷} - \frac{۳\pi}{۲۸}$$

۹۵.

نکته: $\sin u = \sin v \Rightarrow u = ۲k\pi + u\ ,\ \ u = ۲k\pi + \pi - v$

$۴\sin^۲ x - ۲(\sqrt{۲} + ۱)\sin x + \sqrt{۲} = ۰\ ,\ \ \sin x = t$

$$۴t^۲ - ۲(\sqrt{۲} + ۱)t + \sqrt{۲} = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴(\sqrt{۲} + ۱)^۲ - ۱۶\sqrt{۲} = ۴(۲ + ۱ + ۲\sqrt{۲}) - ۱۶\sqrt{۲}$$

$$\Delta = ۱۲ + ۸\sqrt{۲} - ۱۶\sqrt{۲} = ۱۲ - ۸\sqrt{۲} = ۴(۳ - ۲\sqrt{۲}) = ۴(\sqrt{۲} - ۱)^۲$$

$$t = \frac{۲(\sqrt{۲}+۱) \pm ۲(\sqrt{۲}-۱)}{۸} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{۲\sqrt{۲}+۲+۲\sqrt{۲}-۲}{۸} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \\ t = \dfrac{۲\sqrt{۲}+۲-۲\sqrt{۲}+۲}{۸} = \dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}\ ,\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}\ ,\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

.۹۶

نکته: $\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha$

نکته: $\cos u = \cos v \Rightarrow u = ۲k\pi \pm v$

الف) $۲\cos^۲ ۳x + \cos ۳x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x(۲\cos ۳x + ۱) = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = ۰\ ,\ \cos ۳x = \dfrac{-۱}{۲}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۳x = ۰ \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ \cos ۳x = -\frac{۱}{۲} = -\cos\frac{\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow \cos ۳x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \pm \frac{۲\pi}{۹}$$

ب) $\sin ۵x + \cos ۳x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = -\sin ۵x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\dfrac{\pi}{۲} + ۵x)$

$۳x = ۲k\pi \pm (\dfrac{\pi}{۲} + ۵x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۵x \Rightarrow -۲x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۲} \Rightarrow x = -k\pi - \dfrac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - ۵x \Rightarrow ۸x = ۲k\pi - \dfrac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{۴} - \dfrac{\pi}{۱۶} \end{cases}$$

۹۷ . نکته: $\tan u = \tan v \Rightarrow u = k\pi + v$

$$\tan^۳ x - \tan^۲ x + ۱ - \tan x = ۰ \Rightarrow \tan^۲ x(\tan x - ۱) - (\tan x - ۱) = ۰$$

$$(\tan x - ۱)(\tan^۲ x - ۱) = ۰ \Rightarrow (\tan x - ۱)(\tan x - ۱)(\tan x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow (\tan x - ۱)^۲(\tan x + ۱) = ۰ \Rightarrow \tan x = ۱\ ,\ \tan x = -۱$$

$$\left.\begin{matrix} \tan x = ۱ = \tan\dfrac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{۴} \\ \tan x = -۱ = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = k\pi - \dfrac{\pi}{۴} \end{matrix}\right. \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

.۹۸

$$\sin x + \cos^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin x + ۱ - \sin^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x - \sin x - \frac{۳}{۴} = ۰$$

$$\Delta=۱+۳=۴\Rightarrow \sin x=\frac{۱\pm ۲}{۲}=\frac{۳}{۲},\frac{-۱}{۲}$$

$\sin x=\frac{۳}{۲}$ غیرقابل‌قبول

$$\sin x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\ (۱)\\ x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\ (۲)\end{cases}$$

$$(۱)\Rightarrow x=۲\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۱\pi}{۶}$$

$$(۲)\Rightarrow x=\frac{۷\pi}{۶}$$

۹۹ . می‌دانیم: $۱-\cos^۲ x=\sin^۲ x$

با جای‌گذاری در معادلهٔ اصلی سؤال داریم:

$$۲(۱-\cos^۲ x)+۹\cos x+۳=۰\Rightarrow ۲-۲\cos^۲ x+۹\cos x+۳=۰\Rightarrow -۲\cos^۲ x+۹\cos x+۵=۰$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{-۹\pm\sqrt{۸۱-۴(-۲)(۵)}}{۲(-۲)}\Rightarrow \cos x=\frac{-۹\pm ۱۱}{-۴}\to\begin{cases}\cos x=۵ & \text{غق}\\ \cos x=-\frac{۱}{۲} & \text{قق}\Rightarrow \cos x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow x=۲k\pi\pm ۲\frac{\pi}{۳}\ (k\in\mathbb{Z})$$

۱۰۰ .

نادرست– معادله را ساده‌تر می‌کنیم پس

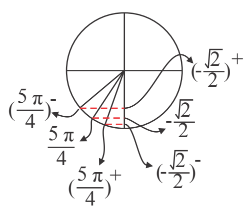
$\boxed{\text{الف}}$

$$\sqrt{۸}\cos x=\sqrt{۲}\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{c|ccc} k & ۰ & ۱ & -۱\\ \hline x & \frac{\pi}{۳},-\frac{\pi}{۳} & ✗\ ۲\pi+\frac{\pi}{۳} & ✓\ -۲\pi+\frac{\pi}{۳}\\ & ✓\ ✓ & ✗\ ۲\pi-\frac{\pi}{۳} & ✓\ -۲\pi-\frac{\pi}{۳}\end{array}$$

۱۰۱ . با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{حد چپ}=\lim\limits_{x\to(\frac{۵\pi}{۴})^-}\dfrac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱}=\dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\varepsilon)+۱}=\dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-۱+\sqrt{۲}\varepsilon+۱}\\ \qquad=\dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{+\sqrt{۲}\varepsilon}=\dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{۰^+}=+\infty\\ \text{حد راست}=\lim\limits_{x\to(\frac{۵\pi}{۴})^+}\dfrac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱}=\dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\varepsilon)+۱}=\dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-۱-\sqrt{۲}\varepsilon+۱}\\ \qquad=\dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{-\sqrt{۲}\varepsilon}=\dfrac{\frac{۵\pi}{۴}-۱}{۰^-}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



توجه کنید که $\frac{۵\pi}{۴}-۱$ عددی مثبت است.

۱۰۲ . با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$x\to\pi$

$$x-\pi=t \Rightarrow \begin{cases} x=\pi+t \\ t\to ۰ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{۱+\cos x}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(\pi+t)}{۱+\cos(\pi+t)}=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin t}{۱-\cos t}\times\frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}$$

* با توجه به این نکته که وقتی $t\to ۰$ میل کند، $sint\sim t$ داریم:

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin t(۱+\cos t)}{۱-\cos^۲ t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin t(۱+\cos t)}{\sin^۲ t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-(۱+\cos t)}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{-۱-\cos t}{\frac{\sin t}{t}\times t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-۱-\cos t}{t}=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-۱-\cos t}{t}=\frac{-۲}{۰^-}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{-۱-\cos t}{t}=\frac{-۲}{۰^+}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

۱۰۳.

با توجه به قاعده پرتوان داریم:

قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-1}+\cdots x\overset{\sim}{\longrightarrow}\pm\infty\ ax^n$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n+۳x^۴-x^۲+۱}{۲x^n-x^۴+۵}=\begin{cases} \xrightarrow{n<۴}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۴}{-x^۴}=-۳ \\ \xrightarrow{n=۴}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۴+۳x^۴}{۲x^۴-x^۴}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۴x^۴}{x^۴}=۴ \\ \xrightarrow{n>۴}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{۲x^n}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۱۰۴. باید نامعادله $f(x)>۱۰۰۰$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x)>۱۰۰۰\Rightarrow\frac{۱}{x-۳}>۱۰۰۰\xrightarrow[x-۳>۰]{x>۳}x-۳<\frac{۱}{۱۰۰۰}\Rightarrow x<۳+۰{,}۰۰۱$$

$$\Rightarrow x<۳{,}۰۰۱, x>۳\Rightarrow ۳<x<۳{,}۰۰۱$$

۱۰۵. باید نامعادلهٔ $f(x)<-۱۰۰۰$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x)<-۱۰۰۰\Rightarrow\frac{۱}{۴-x}<-۱۰۰۰\xrightarrow{\times(-۱)}\frac{۱}{x-۴}>۱۰۰۰$$

$$\xrightarrow[x-۴>۰]{x>۴}x-۴<\frac{۱}{۱۰۰۰}\Rightarrow x<۴+۰{,}۰۰۱\Rightarrow x<۴{,}۰۰۱, x>۴\Rightarrow ۴<x<۴{,}۰۰۱$$

۱۰۶. باید نامعادلهٔ $f(x)<-۱۰۰۰۰$ را حل کنیم، که داریم:

$$f(x)<-۱۰۰۰۰\Rightarrow\frac{۱}{x+۵}<-۱۰۰۰۰\xrightarrow[x+۵<۰]{x<-۵}x+۵>-\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$$

$$\Rightarrow x>-۵-۰{,}۰۰۰۱\Rightarrow x>-۵{,}۰۰۰۱, x<-۵\Rightarrow -۵{,}۰۰۰۱<x<-۵$$

۱۰۷.

هر چه x به ۲ از راست نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)=+\infty$

هر چه x به -۱ از راست نزدیک‌تر می‌شود. مقادیر $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند.

ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+}f(x)=-\infty$

با نزدیک‌تر شدن x به ۱ از چپ مقادیر $f(x)$ به $^-۲$ میل می‌کنند پس داریم:

ج) $\lim\limits_{x\to ۱^-} fof(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(f(x)) = f(۲^-) = \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = -\infty$

با نزدیک‌تر شدن x به ۰ از چپ مقادیر $f(x)$ به -۱^- میل می‌کنند پس داریم:

د) $\lim\limits_{x\to ۰^-} fof(x) = \lim\limits_{x\to ۰^-} f(f(x)) = f((-۱)^-) = \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x) = +\infty$

۱۰۸ .

با نزدیک‌تر شدن x به ۱ چه از چپ و چه از راست، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند. پس داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = -\infty$

با نزدیک‌تر شدن مقادیر x به -۲ از چپ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ میل می‌کند.

ب) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x) = -\infty$

هرچه x به -۱ نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به سمت -۲^+ میل می‌کنند. پس داریم:

ج) $\lim\limits_{x\to -۱} fof(x) = \lim\limits_{x\to -۱} f(f(x)) = f((-۲)^+) = \lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x) = +\infty$

۱۰۹ . حد صورت عددی منفی است و چون در هر دو حالت $x \to (-۳)^-$ و $x \to (-۳)^+$ حاصل حد برابر $-\infty$ است، پس $x=-۳$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد.

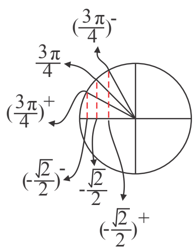
$x^۲ + mx + n = ۰ \Rightarrow$ ریشه مضاعف $x = -\dfrac{b}{۲a} = -\dfrac{m}{۲} = -۳ \Rightarrow m = ۶$

$\Delta = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴n = ۰ \Rightarrow ۳۶ - ۴n = ۰ \Rightarrow n = ۹$

روش دوم: چون ضریب $x^۲$ در عبارت $x^۲ + mx + n$ برابر یک است. یعنی این عبارت همان $(x+۳)^۲$ است، پس داریم:

$x^۲ + mx + n = (x+۳)^۲ = x^۲ + ۶x + ۹ \Rightarrow m = ۶, n = ۹$

۱۱۰ . با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\text{حدچپ} = \lim\limits_{x\to (\frac{۳\pi}{۴})^-} \dfrac{۱-x}{\sqrt{۲}\cos x+۱} = \dfrac{۱-\frac{۳\pi}{۴}}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\varepsilon)+۱} = \dfrac{۱-\frac{۳\pi}{۴}}{-۱+\sqrt{۲}\varepsilon+۱} = \dfrac{۱-\frac{۳\pi}{۴}}{۰^+} = -\infty \\ \text{حدراست} = \lim\limits_{x\to (\frac{۳\pi}{۴})^+} \dfrac{۱-x}{\sqrt{۲}\cos x+۱} = \dfrac{۱-\frac{۳\pi}{۴}}{\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\varepsilon)+۱} = \dfrac{۱-\frac{۳\pi}{۴}}{-۱-\sqrt{۲}\varepsilon+۱} = \dfrac{۱-\frac{۳\pi}{۴}}{۰^-} = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

توجه کنید که $۱ - \dfrac{۳\pi}{۴}$ عددی منفی است.

۱۱۱ . هرچه x به -۱ از چپ نزدیک‌تر می‌شود، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند پس:

الف) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} [\dfrac{-۱}{f(x)}] = [\dfrac{-۱}{+\infty}] = [۰^-] = -۱$

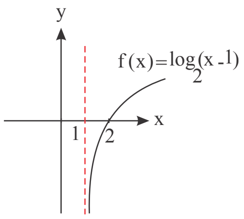
هرچه x به ۱ نزدیک‌تر می‌شود، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند پس:

ب) $\lim\limits_{x\to 1}[\frac{-1}{f(x)}] = [\frac{-1}{+\infty}] = [0^-] = -1$

هرچه x به ۱− از راست نزدیک‌تر می‌شود، $f(x)$ به $-\infty$ میل می‌کند پس:

ج) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}[\frac{x}{f(x)}] = [\frac{-1}{-\infty}] = [0^+] = 0$

۱۱۲ . با رسم نمودار تابع $f(x) = \log_2^{(x-1)}$ داریم:

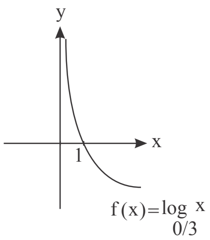


با توجه به اینکه هرچه x به سمت ۱ از راست نزدیک‌تر می‌شود، $f(x)$ به $-\infty$ میل می‌کند، داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \log_2^{(x-1)} = -\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\frac{x+2}{f(x)}) = \frac{1+2}{-\infty} = \frac{3}{-\infty} = 0$

۱۱۳ . با رسم نمودار تابع $f(x) = \log_{0/3}^{x}$ داریم:

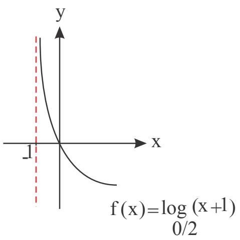


$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log_{0/3}^{x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} [\frac{x+2}{f(x)}] = [\frac{2}{+\infty}] = [0^+] = 0$$

۱۱۴ . با رسم نمودار تابع $f(x) = \log_{0/2}^{(x+1)}$ داریم:

با توجه به نمودار هرچه x از راست به -1 نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کنند.



$$\Rightarrow \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \log_{0/2}^{(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} [\frac{x-2}{f(x)}] = [\frac{-1-2}{+\infty}] = [\frac{-3}{+\infty}] = [0^-] = -1$$

۱۱۵ .

الف

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{[\cos 4x]}{\tan x} = \frac{[1^-]}{0^+} = \frac{0}{0^+} = 0$$

دقت کنید $\cos 4\pi = 1$ است و در مسائل حدی هرکجا سینوس و کسینوس یک شوند منظور 1^- است و $\tan\pi = 0$ است و π^+ در ناحیهٔ سوم است و در این ناحیه، تانژانت مثبت است یعنی $\tan\pi^+ = 0^+$ است.

ب

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{[\cos ۲x]}{\cos x}=\frac{[\cos\pi^+]}{\cos(\frac{\pi}{۲})^+}=\frac{[(-۱)^+]}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

توجه کنید که $\cos(\frac{\pi}{۲})=۰$ است و $(\frac{\pi}{۲})^+$ در ناحیهٔ دوم است و در این ناحیه کسینوس منفی است یعنی $\cos(\frac{\pi}{۲})^+=۰^-$ است و دقت کنید در مسائل حدی هرگاه سینوس و کسینوس (-۱) شدند منظور $(-۱)^+$ است.

پ

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos x}{۱-\sin x}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

پس: $$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos x}{۱-\sin x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos x(۱+\sin x)}{۱-\sin^۲ x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos x(۱+\sin x)}{\cos^۲ x}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}}_{\text{ناحیهٔ اول}}\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{۱+۱}{۰^+}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$$

ت

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-۶)(۲x-۷)(۴x+۱)}{۱۷x^۳+۵}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x)(۲x)(۴x)}{۱۷x^۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۸x^۳}{۱۷x^۳}=\frac{۸}{۱۷}$$

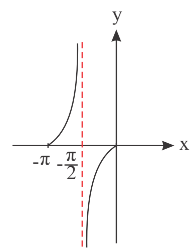
ث

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+۱)^۳-(x-۱)^۳}{(x+۲)^۲+(x-۲)^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۳+۳x^۲+۳x+۱-(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)}{x^۲+۴+۴x+x^۲+۴-۴x}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۶x^۲+۲}{۲x^۲+۸}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۶x^۲}{۲x^۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

.۱۱۶

با توجه به نمودار تابع $y=\tan x$ داریم:

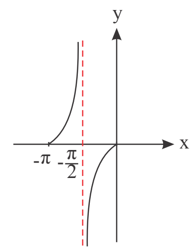


الف

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^-}\tan x=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^+}\tan x=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^-}[\frac{x+۱}{\tan x}]=[\frac{-\frac{\pi}{۲}+۱}{+\infty}]=[۰^-]=-۱$$

با توجه به نمودار تابع $y=\tan x$ داریم:



ب

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^-}\tan x=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^+}\tan x=-\infty$$

$$\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^+}[\frac{۲-x}{\tan x}]=[\frac{۲-(-\frac{\pi}{۲})}{-\infty}]=[\frac{۲+\frac{\pi}{۲}}{-\infty}]=[۰^-]=-۱$$

.۱۱۷

الف

با توجه به اینکه $cos۲x = ۱ - ۲sin^۲ x$ داریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x}{۱-\cos ۲x} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{x}{۱-\cos ۲x} = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{۲\sin^۲ x}$$

نکته وقتی $x \to ۰$ میل کند، $sinx \sim x$، پس داریم:

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{x}{۲(\frac{\sin x}{x} \times x)^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{۲x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{۲x} = \begin{Bmatrix} \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{۲x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty \\ \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{۲x} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty \end{Bmatrix} \Rightarrow$$ پس تابع در این نقطه حد ندارد

ب

با توجه به $cosx = ۱ - ۲sin^۲ \frac{x}{۲}$ داریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\tan ۲x}{۱-\cos x} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{\tan ۲x}{۱-\cos x} = \lim_{x\to ۰} \frac{\tan ۲x}{۲\sin^۲(\frac{x}{۲})} = \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{\tan ۲x}{۲x} \times ۲x}{۲(\frac{\sin(\frac{x}{۲})}{\frac{x}{۲}} \times \frac{x}{۲})^۲}$$

نکته وقتی $x \to ۰$ میل کند، $sinx \sim x$ پس داریم:

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{۲x}{۲ \times \frac{x^۲}{۴}} = \lim_{x\to ۰} \frac{۴}{x} = \begin{Bmatrix} \lim_{x\to ۰^-} \frac{۴}{x} = \frac{۴}{۰^-} = -\infty \\ \lim_{x\to ۰^+} \frac{۴}{x} = \frac{۴}{۰^+} = +\infty \end{Bmatrix} \Rightarrow$$ پس تابع در این نقطه حد ندارد

.۱۱۸

الف

با تجزیه صورت تابع داریم:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲+x-۱۲}{(x-۳)^۲} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۴)}{(x-۳)^۲} = \lim_{x\to ۳} \frac{x+۴}{x-۳}$$

حد چپ $= \lim_{x\to ۳^-} \frac{x+۴}{x-۳} = \frac{۳+۴}{۳-\varepsilon-۳} = \frac{۷}{۰^-} = -\infty$

حد راست $= \lim_{x\to ۳^+} \frac{x+۴}{x-۳} = \frac{۳+۴}{۳+\varepsilon-۳} = \frac{۷}{۰^+} = +\infty \rightarrow$ پس تابع در این نقطه حد ندارد

ب

با تجزیه صورت و مخرج تابع داریم:

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲-۴}{x^۲+۴x+۴} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x\to -۲} \frac{(x-۲)(x+۲)}{(x+۲)^۲} = \lim_{x\to -۲} \frac{x-۲}{x+۲}$$

حدچپ $= \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{x-۲}{x+۲} = \frac{-۲-۲}{-۲-\varepsilon+۲} = \frac{-۴}{۰^-} = +\infty$

حدراست $= \lim_{x\to(-۲)^+} \frac{x-۲}{x+۲} = \frac{-۲-۲}{-۲+\varepsilon+۲} = \frac{-۴}{۰^+} = -\infty$

$\Rightarrow$ پس تابع در این نقطه حد ندارد

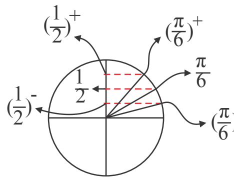
.۱۱۹

الف

با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

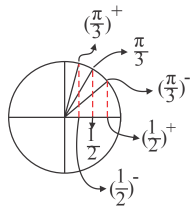
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} \frac{\cos x}{۲\sin x - ۱}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{حدچپ} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^-} \frac{\cos x}{2\sin x-1} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{2(\frac{1}{2}-\varepsilon)-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-2\varepsilon-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2\varepsilon} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = -\infty \\ \text{حدراست} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^+} \frac{\cos x}{2\sin x-1} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{2(\frac{1}{2}+\varepsilon)-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\varepsilon-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



ب با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد چپ} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^-} \frac{1-\sin x}{2\cos x-1} = \frac{1-\sin\frac{\pi}{3}}{2(\frac{1}{2}+\varepsilon)-1} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{+2\varepsilon} = +\infty \\ \text{حد راست} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{3})^+} \frac{1-\sin x}{2\cos x-1} = \frac{1-\sin\frac{\pi}{3}}{2(\frac{1}{2}-\varepsilon)-1} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2\varepsilon} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$

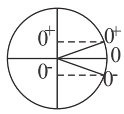


۱۲۰.

با استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

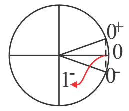
الف

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+3}{\sin x} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \text{حد چپ} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+3}{\sin x} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{پس تابع در این نقطه حد ندارد}$$



ب

با توجه به دایره مثلثاتی زیر اگر x از هر دو طرف به صفر میل کند، مقادیر $\cos x$ از پایین به یک میل می کنند و داریم:



$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱-x}{۱-\cos x} = \frac{۱-۰}{۱-(۱-\varepsilon)} = \frac{۱}{+\varepsilon} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

.۱۲۱

با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to ۴^+} [-x] = -۵$ داریم:

الف

$$\lim_{x\to ۴^+} \frac{۲x+[-x]}{x-۴} = \frac{۸+[-(۴+\varepsilon)]}{۴+\varepsilon-۴} = \frac{۸+[-۴-\varepsilon]}{+\varepsilon} = \frac{۸+(-۵)}{۰^+} = \frac{۳}{۰^+} = +\infty$$

ب

با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to ۳^-} [۲x] = ۵$ و همچنین وقتی x به ۳ از چپ نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $x^۲$ از پایین به ۹ میل می‌کنند، داریم:

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{[۲x]-۷}{۹-x^۲} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{[۲x]-۷}{(۳-x)(۳+x)} = \frac{[۲(۳-\varepsilon)]-۷}{(۳-(۳-\varepsilon))\times ۶} = \frac{[۶-۲\varepsilon]-۷}{+۶\varepsilon}$$
$$= \frac{۵-۷}{۰^+} = \frac{-۲}{۰^+} = -\infty$$

.۱۲۲

حد چپ و راست تابع را در $x \to ۳$ با تجزیه مخرج کسر بررسی می‌کنیم.

الف

$$\left.\begin{array}{l} \text{حدچپ } \lim_{x\to ۳^-} \frac{x+۲}{(x-۳)(x+۳)} = \frac{۳+۲}{(۳-\varepsilon-۳)\times ۶} = \frac{۵}{-۶\varepsilon} = \frac{۵}{۰^-} = -\infty \\ \text{حدراست } \lim_{x\to ۳^+} \frac{x+۲}{(x-۳)(x+۳)} = \frac{۳+۲}{(۳+\varepsilon-۳)\times ۶} = \frac{۵}{+۶\varepsilon} = \frac{۵}{۰^+} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تابع در این نقطه حد ندارد}$$

ب

با توجه به اینکه $(x+۲)^۲ \geq ۰$ و $\lim\limits_{x\to -۲} (x+۲)^۲ = ۰$ داریم:

$$\lim_{x\to -۲} \frac{x-۱}{(x+۲)^۲} = \frac{-۲-۱}{(-۲\pm\varepsilon+۲)^۲} = \frac{-۳}{(\pm\varepsilon)^۲} = \frac{-۳}{+\varepsilon^۲} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$$

۱۲۳ . با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots x \xrightarrow{\sim} \pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to -\infty} (mx^۳ - (x-۱)^۳ + x^۲ + ۲) = \lim_{x\to -\infty} (mx^۳ - x^۳ + ۳x^۲ - ۳x + ۱ + x^۲ + ۲)$$

$$= \lim_{x\to -\infty} ((m-۱)\,x^۳ + ۴x^۲ - ۳x + ۳) = +\infty$$

$$\text{حالت ۱ }) \ m = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} (۴x^۲ - ۳x + ۳) = \lim_{x\to -\infty} ۴x^۲ = ۴(-\infty)^۲ = ۴\,(+\infty) = +\infty \quad \text{قابل قبول}$$

$$\text{حالت ۲ }) \ m \neq ۱ \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} ((m-۱)\,x^۳ + ۴x^۲ - ۳x + ۳) = \lim_{x\to -\infty} (m-۱)\,x^۳ = (m-۱)\,(-\infty)^۳$$

$$\Rightarrow (m-۱)\,(-\infty) = +\infty \Rightarrow m-۱ < ۰ \Rightarrow m < ۱$$

در کل باید $m \leq ۱$ باشد.

۱۲۴ . با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots x \xrightarrow{\sim} \pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to -\infty} (x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ + mx^۳ - ۴x^۲ + ۲) = \lim_{x\to -\infty} ((m+۱)x^۳ - x^۲ + ۳x + ۳) = +\infty$$

$$\text{حالت ۱ }) \ m = -۱ \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} (-x^۲ + ۳x + ۳) = \lim_{x\to -\infty} (-x^۲)$$

$$= -(-\infty)^۲ = -(+\infty) = -\infty \quad \text{غیر قابل قبول}$$

$$\text{حالت ۲ }) \ m \neq -۱ \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} ((m+۱)x^۳ - x^۲ + ۳x + ۳) = \lim_{x\to -\infty} (m+۱)x^۳$$

$$\Rightarrow (m+۱)\,(-\infty)^۳ = (m+۱)\,(-\infty) = +\infty \Rightarrow m+۱ < ۰ \Rightarrow m < -۱$$

.۱۲۵

$\lim\limits_{x\to-\infty} mx^{۲}+x^{۲}+۴x+۴-۷x=\lim\limits_{x\to-\infty}((m+۱)x^{۲}-۳x+۴)=+\infty$

حالت ۱) $m=-۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(-۳x+۴)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-۳x)=-۳(-\infty)=+\infty$ قابل قبول است.

حالت ۲) $m\neq-۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}((m+۱)x^{۲}-۳x+۴)=\lim\limits_{x\to-\infty}(m+۱)x^{۲}=(m+۱)(-\infty)^{۲}$

$\Rightarrow(m+۱)(+\infty)=+\infty\Rightarrow m+۱>۰\Rightarrow m>-۱$

در کل باید $m\geq-۱$ باشد.

۱۲۶ . با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^{n}+bx^{n-۱}+\cdots x\xrightarrow{\sim}\pm\infty\ ax^{n}$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{n}+mx^{۳}+x^{۲}-۱}{۴x^{۳}+x^{۲}-۳}=-۲$$

حالت ۱) $n<۳\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{mx^{۳}}{۴x^{۳}}=\dfrac{m}{۴}=-۲\Rightarrow m=-۸\Rightarrow n<۳\ ,\ m=-۸$ جواب

حالت ۲) $n=۳\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲x^{۳}+mx^{۳}}{۴x^{۳}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(۲+m)x^{۳}}{۴x^{۳}}=\dfrac{۲+m}{۴}=-۲$

$\Rightarrow ۲+m=-۸\Rightarrow m=-۱۰\Rightarrow n=۳\ ,\ m=-۱۰$ جواب

حالت ۳) $n>۳\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲x^{n}}{۴x^{۳}}=\pm\infty\rightarrow$ غیرقابل‌قبول

۱۲۷ . می‌دانیم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-۲x+۱}{x-۲}=-۲$ ، حال باید ببینیم $\dfrac{-۲x+۱}{x-۲}$ چگونه به -۲ میل می‌کند. برای این کار -۲ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{-۲x+۱}{x-۲}]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{-۲x+۴-۳}{x-۲}]=\lim_{x\to\pm\infty}[\frac{-۲(x-۲)}{x-۲}+\frac{-۳}{x-۲}]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}[-۲+\frac{-۳}{x-۲}]$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}[-۲+\dfrac{-۳}{x-۲}]=[-۲+\dfrac{-۳}{+\infty}]=[-۲+۰^{-}]=[-۲-\varepsilon]=-۳\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[-۲+\dfrac{-۳}{x-۲}]=[-۲+\dfrac{-۳}{-\infty}]=[-۲+۰^{+}]=[-۲+\varepsilon]=-۲\end{cases}$$

۱۲۸ .

الف) می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳x+۱}{x+۲}=۳$ ، حال باید ببینیم کسر $\dfrac{۳x+۱}{x+۲}$ چگونه به ۳ میل می‌کند، برای این کار ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۱}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۶-۵}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳(x+۲)}{x+۲}-\frac{۵}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[۳-\frac{۵}{x+۲}]$$

$$=[۳-\frac{۵}{+\infty}]=[۳-۰^{+}]=[۳-\varepsilon]=۲$$

ب) می‌دانیم $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+۲}{x-۱}=۱$ ، حال باید ببینیم کسر $\dfrac{x+۲}{x-۱}$ چگونه به یک میل می‌کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty}[\frac{x+۲}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{x-۱+۳}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{x-۱}{x-۱}+\frac{۳}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[۱+\frac{۳}{x-۱}]$$

$$=[1+\frac{3}{-\infty}]=[1+0^-]=[1-\varepsilon]=0$$

۱۲۹ .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=-1$$

ناچاریم هر دو حالت $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{ax^2-x+2}=-1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{a\cancel{x^2}}=-1\Rightarrow\frac{1}{a}=-1\Rightarrow a=-1$$

لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{|x^2-4|}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to-2^+}\frac{-(x-2)\cancel{(x+2)}}{-\cancel{(x+2)}(x-1)}=\frac{4}{3}$$

حالت دوم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+4}{ax^2-x+2}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{ax^2}=\frac{-1}{a}=-1\Rightarrow a=1$$

پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{|x^2-4|}{x^2-x+2}=\lim_{x\to-2^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{x^2-x+2}=\frac{0}{8}=0$$

۱۳۰ . فاصلهٔ $f(x)$ تا خط $y=1$ برابر با $|f(x)-1|$ است، پس باید نامعادلهٔ $|f(x)-1|<\frac{1}{1000}$ را حل کنیم، که داریم:

$$|\frac{x-3}{x+1}-1|<\frac{1}{1000}\Rightarrow|\frac{x-3-x-1}{x+1}|<\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{4}{|x+1|}<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow\frac{|x+1|}{4}>1000\Rightarrow|x+1|>4000\Rightarrow x+1<-4000 \text{ یا } x+1>4000$$

$$\Rightarrow x<-4001 \text{ یا } x>3999\Rightarrow x\in(-\infty\,,\,4001)\cup(3999\,,\,+\infty)$$

۱۳۱ . با توجه به این که حاصل حد عدد ۵ شده و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج برابر ۴ است، پس باید بزرگ‌ترین درجهٔ صورت هم برابر ۴ باشد، داریم:

$$n=4\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^4-2x^3+1}{3x^4+x^3+7}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^4}{3x^4}=\frac{m}{3}=5\Rightarrow m=15$$

۱۳۲ . با توجه به اینکه $x\to+\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعدهٔ پرتوان خواهیم داشت:

قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-1}+\cdots x\overset{\sim}{\longrightarrow}\pm\infty\ ax^n$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|\overbrace{2x-3}^{\text{منفی}}|+mx}{m|\underbrace{x+2}_{\text{منفی}}|+4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-(2x-3)+mx}{-m(x+2)+4x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+3+mx}{-mx-2m+4x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(m-2)x}{(-m+4)x}=\frac{m-2}{4-m}=-3\Rightarrow m-2=-12+3m\Rightarrow 2m=10\Rightarrow m=5$$

۱۳۳ . با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

همچنین:

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{g(x)}]=[\frac{\lim_{x\to+\infty}f(x)}{\lim_{x\to+\infty}g(x)}]$$

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=-۲\times(+\infty)=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{g(x)}]=[\frac{-۲}{+\infty}]=[۰^-]=-۱$

۱۳۴.

الف

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(۴x+۳)^۲+(۳x-۱)^۲}{(۵x+۱۷)^۲}\xlongequal{\text{توان بیشتر}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱۶x^۲+۹x^۲}{۲۵x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲۵x^۲}{۲۵x^۲}=۱$$

ب

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۹x^۲+۱}+\sqrt{۴x^۲-x}}{\sqrt{۲۵x^۲+۹}+x}\xlongequal{\text{توان بیشتر}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۹x^۲}+\sqrt{۴x^۲}}{\sqrt{۲۵x^۲}+x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳|\overbrace{x}^{-}|+۲|\overbrace{x}^{-}|}{۵|\underbrace{x}_{-}|+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x-۲x}{-۵x+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۵x}{-۴x}=\frac{۵}{۴}$$

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۶x-\sqrt{۴x^۲+۱}}{۷x+\sqrt{۹x^۲+۸}}\xlongequal{\text{توان بیشتر}}\lim_{x\to-\infty}\frac{۶x-\sqrt{۴x^۲}}{۷x+\sqrt{۹x^۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۶x-۲|\overbrace{x}^{-}|}{۷x+۳|\underbrace{x}_{-}|}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۶x+۲x}{۷x-۳x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۸x}{۴x}=\frac{۸}{۴}=۲$$

ت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۴]{x}}{\sqrt{۲x+۱۷}}\xlongequal{\text{توان بیشتر}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۲x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{۲}\sqrt{x}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

ث

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-۱۷}{\sqrt{x^۳+۲}}\xlongequal{\text{توان بیشتر}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^۳}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=۱$$

۱۳۵.

الف

با توجه به اینکه وقتی $x\to+\infty$ می‌رود، $۳x-۱$ عددی مثبت است و همچنین با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x\xrightarrow{\sim}\pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x}}{\underbrace{|۳x-۱|}_{\text{مثبت}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۳x-۱+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۴x}=\frac{۱}{۲}$$

ب

با توجه به قاعده پرتوان: $an^n+bx^{n-۱}+\cdots\sim_{\pm\infty}ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x-\sqrt{x^۲+۱}}{\sqrt{۴x^۲+۳}+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x-\sqrt{x^۲}}{\sqrt{۴x^۲}+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x-|x|}{۲|x|+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x-|x|}{۲|x|+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x-x}{۲x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{۳x}=۱$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x-|x|}{۲|x|+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x-(-x)}{۲(-x)+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x}{-x}=-۵$$

. ۱۳۶

الف

با توجه به اینکه $x \to +\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعدهٔ پرتوان خواهیم داشت:

قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots \overset{\sim}{\underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow}} ax^n$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\overbrace{۳x-۱}^{\text{مثبت}}| - x}{|\underbrace{۲-x}_{\text{منفی}}| + ۳x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x-۱-x}{-(۲-x)+۳x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x}{۴x} = \frac{۱}{۲}$$

ب

با توجه به اینکه $x \to -\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعدهٔ پرتوان خواهیم داشت:

قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots \overset{\sim}{\underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow}} ax^n$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|\overbrace{۳x+۲}^{\text{منفی}}| + x}{|\underbrace{۵-x}_{\text{مثبت}}| + ۲x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(۳x+۲)+x}{۵-x+۲x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۳x-۲+x}{۵+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۲x}{x} = -۲$$

. ۱۳۷

الف

با توجه به اینکه $x \to +\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعدهٔ پرتوان خواهیم داشت:

قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots \overset{\sim}{\underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow}} ax^n$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x - |\overbrace{x+۲}^{\text{مثبت}}|}{|\underbrace{x-۳}_{\text{مثبت}}| + ۴x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x-(x+۲)}{x-۳+۴x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x-x-۲}{۵x-۳} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{۵x} = \frac{۱}{۵}$$

ب

با توجه به اینکه $x \to -\infty$ میل می‌کند، ابتدا مثبت یا منفی بودن داخل قدرمطلق‌ها را بررسی کرده و با استفاده از قاعدهٔ پرتوان خواهیم داشت:

قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots \overset{\sim}{\underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow}} ax^n$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|\overbrace{۲x-۱}^{\text{منفی}}| - ۳x}{۴x - |\underbrace{x-۲}_{\text{منفی}}|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(۲x-۱)-۳x}{۴x+x-۲} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۵x+۱}{۵x-۲} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۵x}{۵x} = -۱$$

. ۱۳۸

الف

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-۱} + \cdots \overset{\sim}{\underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow}} ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲(x+۱)^۵+x^۴}{(۲x-۱)^۳(x^۲+۱)^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲\times x^۵}{(۲x)^۳\times(x^۲)^۲}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۷}{۸x^۳\times x^۴}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۷}{۸x^۷}=\frac{۱}{۸}$$

ب

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x\overset{\sim}{\longrightarrow}\pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}+۱)^۲(x^۲+۲)^۲}{(۲-x)^۵}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x})^۲(x^۲)^۲}{(-x)^۵}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\times x^۴}{-x^۵}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۵}{-x^۵}=-۱$$

. ۱۳۹

الف

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x\overset{\sim}{\longrightarrow}\pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۶x^۳+x^۲+۴}{x^۵+x^۲-۹x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۶x^۳}{x^۵}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۶}{x^۲}=\frac{-۶}{(\pm\infty)^۲}=\frac{-۶}{+\infty}=۰$$

ب

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x\overset{\sim}{\longrightarrow}\pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+۱)^۳-x^۳+x^۲}{-۳x^۲+x-۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۳+۳x^۲+۳x+۱-x^۳+x^۲}{-۳x^۲+x-۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^۲+۳x+۱}{-۳x^۲+x-۱}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^۲}{-۳x^۲}=-\frac{۴}{۳}$$

. ۱۴۰

الف

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x\overset{\sim}{\longrightarrow}\pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۵-۲x^۲-۴}{x^۲+۳x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۵}{x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}x^۳=\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}x^۳=(+\infty)^۳=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}x^۳=(-\infty)^۳=-\infty\end{cases}$$

ب

با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x\overset{\sim}{\longrightarrow}\pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۶x^۴+۷x^۳+۹}{۲x^۴-x+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۶x^۴}{۲x^۴}=-۳$$

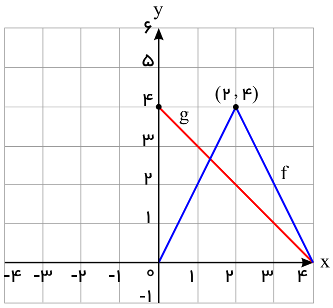
. ۱۴۱

$$f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}},\ f(۰)=۰$$
$$f'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}}{x}\times\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$
$$=\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۱-۱+x^۲}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to۰}\frac{|x|}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$
$$f'_-(۰)=\lim_{x\to۰^-}\frac{-x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to۰^-}\frac{-۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$$
$$f'_+(۰)=\lim_{x\to۰^+}\frac{x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\lim_{x\to۰^+}\frac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

تابع در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

. ۱۴۲

الف) توابع f و g توابع خطی هستند و باید ضابطهٔ آنها را بیابیم. برای تابع f باید خط گذرنده از نقاط $(\circ,\circ)$ و $(۲,۴)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(۲,۴)$ و $(۴,\circ)$ را بیابیم.



$$(\circ,\circ),(۲,۴) \Rightarrow m=\frac{۴-\circ}{۲-\circ}=۲ \Rightarrow y-\circ=۲(x-\circ) \Rightarrow y=۲x$$

$$(۲,۴),(۴,\circ) \Rightarrow m=\frac{۴-\circ}{۲-۴}=-۲ \Rightarrow y-\circ=-۲(x-۴) \Rightarrow y=-۲x+۸$$

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & \circ \le x \le ۲ \\ -۲x+۸ & ۲ < x \le ۴ \end{cases}$$

برای یافتن تابع g باید خط گذرنده از نقاط $(\circ,۴)$ و $(۴,\circ)$ را بیابیم.

$$(\circ,۴),(۴,\circ) \Rightarrow m=\frac{۴-\circ}{\circ-۴}=-۱ \Rightarrow y-\circ=-۱(x-۴) \Rightarrow y=-x+۴ \Rightarrow g(x)=-x+۴$$

$$h(x)=f(x)\cdot g(x) \Rightarrow h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

$$f(۱)=۲\ ,\ \circ<x<۲ \Rightarrow f(x)=۲x \Rightarrow f'(x)=۲ \Rightarrow f'(۱)=۲$$

$$g(۱)=۳\ ,\ g(x)=-x+۴ \Rightarrow g'(x)=-۱ \Rightarrow g'(۱)=-۱$$

$$h'(۱)=f'(۱)\cdot g(۱)+g'(۱)\cdot f(۱)=۲\times ۳+(-۱)\times ۲=۶-۲=۴$$

تابع f در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است زیرا:

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲x-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲(x-۲)}{x-۲}=۲$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۲x+۸-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۲(x-۲)}{x-۲}=-۲$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست بنابراین $h'(۲)$ نیز وجود ندارد.

$$f(۳)=۲\ ,\ f'(۳)=-۲\ ,\ g(۳)=۱\ ,\ g'(۳)=-۱$$

$$h'(۳)=f'(۳)\cdot g(۳)+g'(۳)\cdot f(۳)=-۲\times ۱+(-۱)\times ۲=-۴$$

ب)

$$k(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^۲(x)}$$

$$k'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)}{g^{۲}(۱)}$$

$$k'(۱) = \frac{۲ \times ۳ - (-۱) \times ۲}{۳^{۲}} = \frac{۶ + ۲}{۹} = \frac{۸}{۹}$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست پس $k'(۲)$ هم وجود ندارد.

$$k'(۳) = \frac{f'(۳)g(۳) - g'(۳)f(۳)}{g^{۲}(۳)} = \frac{(-۲) \times ۱ - (-۱) \times ۲}{۱^{۲}} = \frac{-۲ + ۲}{۱} = ۰$$

۱۴۳ . گزینهٔ «۲»

$$۴f(a) = ۲ \Rightarrow f(a) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \;,\; f'(a) = ۲$$

$$\left(f^{۲}(x) + \frac{۱}{f(x)}\right)' = ۲f(x)f'(x) - \frac{f'(x)}{f^{۲}(x)} \overset{x=a}{=} ۲f(a)f'(a) - \frac{f'(a)}{f^{۲}(a)} = \cancel{۲} \times \frac{۱}{\cancel{۲}} \times ۲ - \frac{۲}{(\frac{۱}{۲})^{۲}} = ۲ - ۸ = -۶$$

۱۴۴ .

$\boxed{\text{الف}}$

$$g'(x) = \frac{۴ \times ۲ \times (۲x - ۱)^{۳}(x^{۳} + ۸) - ۳x^{۲}(۲x - ۱)^{۴}}{(x^{۳} + ۸)^{۲}}$$

$\boxed{\text{ب}}$

$$f'(x) = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{(۲x + ۱)^{۲}}}$$

۱۴۵ .

$\boxed{\text{الف}}$

$$f'(x) = \left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)(x^{۴} - ۲x) + (۴x^{۳} - ۲)(۲\sqrt{x} + ۱)$$

$\boxed{\text{ب}}$

$$g'(x) = \frac{۳(x^{۵} - x + ۱) - (۵x^{۴} - ۱)(۳x + ۱)}{(x^{۵} - x + ۱)^{۲}}$$

۱۴۶ .

$$y + ۵x = ۸ \Rightarrow y = -۵x + ۸ \Rightarrow \text{شیب} = -۵$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط عمود} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow \text{شیب خط مماس بر منحنی داده‌شده} = \frac{۱}{۵}$$

$$y = \frac{۲x + ۳}{۱ - x} \Rightarrow y' = \frac{۲(۱ - x) - (-۱)(۲x + ۳)}{(۱ - x)^{۲}} = \frac{۲ - ۲x + ۲x + ۳}{(۱ - x)^{۲}}$$

$$y' = \frac{۵}{(۱ - x)^{۲}} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow (۱ - x)^{۲} = ۲۵ \Rightarrow ۱ - x = \pm ۵ \Rightarrow \begin{cases} x = -۴ \\ x = ۶ \end{cases}$$

$$x = -۴ \Rightarrow y = \frac{۲(-۴) + ۳}{۱ - (-۴)} = \frac{-۵}{۵} = -۱ \Rightarrow A(-۴, -۱)$$

$$x = ۶ \Rightarrow y = \frac{۲ \times ۶ + ۳}{۱ - ۶} = \frac{۱۵}{-۵} = -۳ \Rightarrow B(۶, -۳)$$

۱۴۷ .

$$f(x) = \frac{۲x + ۱}{x + ۲} \quad \text{و} \quad x_{۰} = -۱$$

$$\text{شیب خط مماس}: \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{\frac{۲x + ۱}{x + ۲} + ۱}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{\frac{۲x + ۱ + x + ۲}{x + ۲}}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{\frac{۳\cancel{(x + ۱)}}{x + ۲}}{\frac{\cancel{x + ۱}}{۱}} = \lim_{x \to -۱} \frac{۳}{x + ۲}$$

$$\text{معادلهٔ خط مماس}: y - y_{۰} = m(x - x_{۰}) \Rightarrow y + ۱ = ۳(x + ۱) \Rightarrow y = ۳x + ۲ = ۳$$

۱۴۸ .

$f'(x) = -۲x + ۶ \to f'(۲) = ۲$

$d : (۲,۳), (a, ۰) : ۲ = \frac{۰ - ۳}{a - ۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$

.۱۴۹

$g(x) = x^۳ + ۱ \Rightarrow g'(x) = ۳x^۲$

$(fog)(x) = x^۲ + ۲ \xrightarrow{\text{مشتق}} (fog)'(x) = ۲x \Rightarrow g'(x) \cdot f'(g(x)) = ۲x$

$۳x^۲ \times f'(x^۳ + ۱) = ۲x \xrightarrow{x=-۱} ۳f'(۰) = -۲ \Rightarrow f'(۰) = -\frac{۲}{۳}$

.۱۵۰

$f(x) = \frac{x^۲}{x + ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x(x + ۱) - x^۲}{(x + ۱)^۲} = \frac{x^۲ + ۲x}{(x + ۱)^۲}$

$f''(x) = \frac{(۲x + ۲)(x + ۱)^۲ - ۲(x + ۱)(x^۲ + ۲x)}{(x + ۱)^۴} = \frac{(x + ۱)((۲x + ۲)(x + ۱) - ۲(x^۲ + ۲x))}{(x + ۱)^۴}$

$f''(x) = \frac{(۲x + ۲)(x + ۱) - ۲(x^۲ + ۲x)}{(x + ۱)^۳} \Rightarrow f''(۱) = \frac{۴ \times ۲ - ۲ \times ۳}{۲^۳} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$

.۱۵۱

$f(x) = \sqrt{|x + ۲|}, f(-۲) = ۰$

$f'(-۲) = \lim_{x \to -۲} \frac{f(x) - f(-۲)}{x - (-۲)} = \lim_{x \to -۲} \frac{\sqrt{|x + ۲|} - ۰}{x + ۲} \times \frac{\sqrt{|x + ۲|}}{\sqrt{|x + ۲|}}$

$= \lim_{x \to -۲} \frac{|x + ۲|}{(x + ۲)\sqrt{|x + ۲|}}$

$f'_-(-۲) = \lim_{x \to (-۲)^-} \frac{-(x + ۲)}{(x + ۲)\sqrt{|x + ۲|}} = \lim_{x \to (-۲)^-} \frac{-۱}{\sqrt{|x + ۲|}} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$

$f'_+(-۲) = \lim_{x \to (-۲)^+} \frac{x + ۲}{(x + ۲)\sqrt{|x + ۲|}} = \lim_{x \to (-۲)^+} \frac{۱}{\sqrt{|x + ۲|}} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$

تابع در $x = -۲$ مشتق‌ناپذیر است.

.۱۵۲

الف

$f(x) = x\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} = x\sqrt{(x - ۲)^۲} = x|x - ۲|$

تابع $f(x)$ در $x_۰ = ۲$ پیوسته است. (حد راست = حد چپ = مقدار تابع = ۰)

$f'(x_۰) = \lim_{x \to x_۰} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰} = \lim_{x \to ۲} \frac{x|x - ۲| - \overbrace{f(۲)}^{۰}}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{x\overbrace{|x - ۲|}^{۰}}{x - ۲}$

$$\to \begin{cases} f'(۲^+) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x\overbrace{|x - ۲|}^{+}}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x(x - ۲)}{(x - ۲)} = \lim_{x \to ۲^+} x = ۲ \\ f'(۲^-) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{x\overbrace{|x - ۲|}^{-}}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{-x(x - ۲)}{(x - ۲)} = \lim_{x \to ۲^-} (-x) = -۲ \end{cases}$$

پس تابع در $x_۰ = ۲$ مشتق‌ناپذیر است.

ب

تابع $f(x)$ در $x_۰ = ۰$ پیوسته است. (حد راست = حد چپ = مقدار تابع = ۰)

$f'(x_۰) = \lim_{x \to x_۰} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}} - \overbrace{f(۰)}^{۰}}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}}{x} \times \frac{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱-۱+x^۲}}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim_{x\to ۰} \frac{|\overbrace{x}^{۰}|}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}}$$

$$\to \begin{cases} f'(۰^+) = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{|\overbrace{x}^{+}|}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} \\ f'(۰^-) = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{|\overbrace{x}^{-}|}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{-x}{x\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{-۱}{\sqrt{۱+\sqrt{۱-x^۲}}} = \dfrac{-۱}{\sqrt{۲}} \end{cases}$$

پس تابع در $x_۰ = ۰$ مشتق‌ناپذیر است.

پ

تابع $f(x)$ در $x_۰ = -۳$ پیوسته است. (حد راست = حد چپ = مقدار تابع = ۰)

$$f'(x_۰) = \lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} = \lim_{x\to -۳} \frac{\sqrt{|x+۳|} - \overbrace{f(-۳)}^{۰}}{x+۳}$$

$$= \lim_{x\to -۳} \frac{\sqrt{|x+۳|}}{x+۳} \times \frac{\sqrt{|x+۳|}}{\sqrt{|x+۳|}} = \lim_{x\to -۳} \frac{|x+۳|}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}}$$

$$\to \begin{cases} f'(-۳^+) = \lim\limits_{x\to (-۳)^+} \dfrac{|\overbrace{x+۳}^{+}|}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x\to (-۳)^+} \dfrac{(x+۳)}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x\to (-۳)^+} \dfrac{۱}{\sqrt{|x+۳|}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۰^+}} = +\infty \\ f'(-۳^-) = \lim\limits_{x\to (-۳)^-} \dfrac{|\overbrace{x+۳}^{-}|}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x\to (-۳)^-} \dfrac{-(x+۳)}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x\to (-۳)^-} \dfrac{-۱}{\sqrt{|x+۳|}} = \dfrac{-۱}{\sqrt{۰^+}} = -\infty \end{cases}$$

پس تابع در $x_۰ = -۳$ مشتق‌ناپذیر است.

۱۵۳ . تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x) = ۲x^۲ - |x|$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ - x & x \geq ۰ \\ ۲x^۲ + x & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۴x - ۱ & x > ۰ \\ ۴x + ۱ & x < ۰ \end{cases}$$

$$f'_-(۰) = ۴ \times ۰ + ۱ = ۱ \quad , \quad f'_+(۰) = ۴ \times ۰ - ۱ = -۱ \Rightarrow f'_-(۰) \neq f'_+(۰)$$

$x = ۰$ بحرانی است زیرا مشتق‌ناپذیر است.

$x > ۰ \Rightarrow f'(x) = ۴x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}$ قابل قبول $\Rightarrow$ بحرانی است

$x < ۰ \Rightarrow f'(x) = ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۴}$ قابل قبول $\Rightarrow$ بحرانی است

تابع سه نقطهٔ بحرانی $x = ۰ \ , \ x = \frac{۱}{۴} \ , \ x = -\frac{۱}{۴}$ دارد.

. ۱۵۴

$$f(x)=x^{۲}+|x+۱|=\begin{cases}x^{۲}+x+۱ & x\geq -۱\\ x^{۲}-x-۱ & x<-۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x>-۱\\ ۲x-۱ & x<-۱\end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقطهٔ $x=-۱$ به‌دست آوریم.

$f'_{+}(-۱)=-۱$

$f'_{-}(-۱)=-۳$

بنابراین در نقطهٔ $x=-۱$ مشتق‌پذیر نیست از طرفی ریشهٔ f' نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۲}$ و نقاط بحرانی تابع‌اند با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه به سادگی مینیمم مطلق مشخص می‌شود.

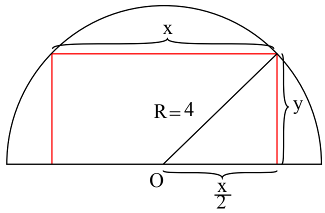
$f(-۱)=۱\rightarrow$ مینیمم مطلق

$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$

$f(-۲)=۴+۱=۵$

$f(۲)=۴+۳=۷\rightarrow$ ماکزیمم مطلق

. ۱۵۵



$$(\frac{x}{۲})^{۲}+y^{۲}=۴^{۲}\Rightarrow\frac{x^{۲}}{۴}+y^{۲}=۱۶$$

$$y^{۲}=۱۶-\frac{x^{۲}}{۴}=\frac{۶۴-x^{۲}}{۴}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^{۲}}$$

$S=xy=x\times\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^{۲}}\Rightarrow S(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴x^{۲}-x^{۴}}$

$y^{۲}\geq ۰\Rightarrow ۱۶-\frac{x^{۲}}{۴}\geq ۰\Rightarrow\frac{x^{۲}}{۴}\leq ۱۶\Rightarrow x^{۲}\leq ۶۴\Rightarrow -۸\leq x\leq ۸\quad (۱)$

$x\geq ۰\xrightarrow{(۱)} ۰\leq x\leq ۸\Rightarrow S(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴x^{۲}-x^{۴}}$ دامنه $=[۰,۸]$

$S'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۲۸x-۴x^{۳}}{۲\sqrt{۶۴x^{۲}-x^{۴}}}=۰\Rightarrow ۱۲۸x-۴x^{۳}=۰\Rightarrow ۴x(۳۲-x^{۲})=۰$

$\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm۴\sqrt{۲}$

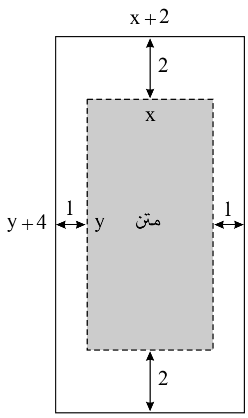
$x=۰\Rightarrow S(۰)=۰\ ,\ x=۴\sqrt{۲}\Rightarrow S(۴\sqrt{۲})=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴\times۳۲-۲۵۶\times۴}=۱۶$

$x=۸\Rightarrow S(۸)=۰$, مقدار ماکزیمم مساحت $=۱۶$

به‌ازای $x=۴\sqrt{۲}$، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را دارد. پس داریم:

$x=۴\sqrt{۲}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-۳۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲}=\frac{۱}{۲}\times۴\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$

. ۱۵۶



دومتغیره : $S=(x+۲)(y+۴)=xy+۴x+۲y+۸$

مساحت متن $=۳۲\rightarrow xy=۳۲\rightarrow y=\frac{۳۲}{x}$

پس: $S=x(\frac{۳۲}{x})+۴x+۲(\frac{۳۲}{x})+۸=۳۲+۴x+\frac{۶۴}{x}+۸$

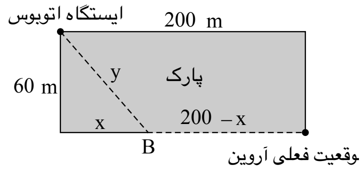
$=۴۰+۴x+\frac{۶۴}{x}$: یک‌متغیره $\xrightarrow{S'=۰} ۴-\frac{۶۴}{x^{۲}}=۰$

$\rightarrow\frac{۶۴}{x^{۲}}=۴\rightarrow x^{۲}=۱۶\rightarrow x=۴\xrightarrow{y=\frac{۳۲}{y}} y=۸$

بنابراین ابعاد صفحه باید ۶ و ۱۲ باشد

.۱۵۷

شکل مسئله بدین‌صورت است.



t_1 زمان رسیدن آروین از موقعیت فعلی به نقطهٔ B است پس:

$$t_1 = \frac{200 - x}{3}$$

t_2 زمان رسیدن آروین از نقطهٔ B به ایستگاه اتوبوس است پس:

$$t_2 = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3600 + x^2}}{2}$$

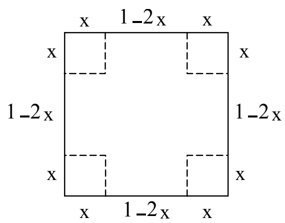
پس: $t = t_1 + t_2 = \frac{200}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{3600 + x^2}$: یک‌متغیره

$$\xrightarrow{t'=0} \frac{-1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{3600 + x^2}} = 0 \to \frac{x}{2\sqrt{3600 + x^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\to 3x = 2\sqrt{3600 + x^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9x = 4(3600 + x^2)$$

$$\to 5x^2 = 14400 \to x^2 = 2880 \to x = \sqrt{2^6 \times 3^2 \times 5} = 24\sqrt{5}$$

.۱۵۸

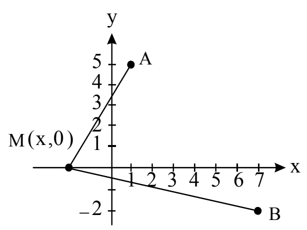


$\to V_{\text{جعبه}} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$

$$V = (1 - 2x)^2 \cdot x = (1 + 4x^2 - 4x)x = 4x^3 - 4x^2 + x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=0} 12x^2 - 8x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16} \begin{cases} x = \frac{8+4}{24} = \frac{1}{2} \ \text{غ ق ق} \\ x = \frac{8-4}{24} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

.۱۵۹



$$D = MA - MB$$

$$D = \sqrt{(x-1)^2 + 25} - \sqrt{(x-7)^2 + 4}$$

$$D' = \frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{(x-1)^2 + 25}} - \frac{\cancel{2}(x-7)}{\cancel{2}\sqrt{(x-7) + 4}}$$

$$D' = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 25}} = \frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2 + 4}} \Rightarrow (x-1)\sqrt{(x-7)^2 + 4} = (x-7)\sqrt{(x-1)^2 + 25}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cancel{(x-1)^2}\ \cancel{(x-7)^2} + 4(x-1)^2 = \cancel{(x-7)^2(x-1)^2} + 25(x+7)^2 \Rightarrow 2|x-1| = 5|x-7| \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 5x - 35 \Rightarrow x = 11 \\ 2x - 2 = -5x + 35 \Rightarrow x = \frac{37}{7} \end{cases}$$

.۱۶۰

$$h = \frac{۳۰۰}{r^{۲}} \quad S = \frac{۱۸۰۰}{r} + ۳r^{۲} \quad S' = \frac{-۱۸۰۰}{r^{۲}} + ۶r = ۰$$

$r = \sqrt[۳]{۳۰۰} \Rightarrow h = \sqrt[۳]{۳۰۰}$

۱۶۱ . برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$، مشتق اول آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y = x\sqrt{۴ - x^۲}$$

$$۴ - x^۲ \geq ۰ \to x^۲ \leq ۴ \to |x| \leq ۲ \to -۲ \leq x \leq ۲ \to \ D = [-۲, ۲]$$

$$y' = \sqrt{۴ - x^۲} + \frac{-۲x}{۲\sqrt{۴ - x^۲}} \times x$$

$$\to y' = \frac{۴ - x^۲ - x^۲}{\sqrt{۴ - x^۲}} = ۰ \to ۲x^۲ = ۴ \to x^۲ = ۲ \to x = \pm\sqrt{۲}$$

	-2		-√2		√2		2	
y′		-	0	+	0	-		
		↘		↗		↘		

تابع در بازهٔ $[-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$ صعودی است و در بازه‌های $[-۲, -\sqrt{۲}]$ و $[\sqrt{۲}, ۲]$ نزولی است.

۱۶۲ .

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۲۷ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۳$$

اکیداً صعودی $(-\infty, -۳], [۳, +\infty)$

x		-۳		۳	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

۱۶۳ .

$f(۰) = ۰$ ، حد چپ $= \lim\limits_{x \to ۰^-} (x^۳ + ۳x^۲) = ۰$ ، حد راست $= \lim\limits_{x \to ۰^+} (x^۲ - x) = ۰$

تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + ۶x & x < ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x + ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ x = -۲ \\ ۲x - ۶ & x > ۰ \Rightarrow ۲x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

$f'_-(۰) = ۰ \ , \ f'_+(۰) = ۰ - ۶ = -۶ \Rightarrow f'_-(۰) \neq f'_+(۰) \Rightarrow$ مشتق ناپذیر $x = ۰$

نقاط بحرانی عبارتند از: $x = ۰ \ , \ x = -۲ \ , \ x = ۳$

x	$-\infty$		-۲		۰		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−		−	۰	+	
		↗		↘		↘		↗	

$$x = -۲ \Rightarrow f(-۲) = -۸ + ۱۲ = ۴ \ , \ x = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۹ - ۱۸ = -۹$$

نقطهٔ $(-۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ $(۳, -۹)$ مینیمم نسبی است.

۱۶۴ .

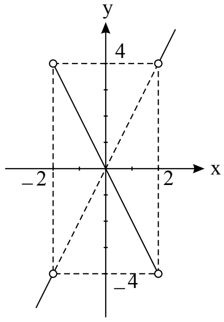
$$f'(۲) = ۰ \to f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx \to b = -۳$$

$$f(۲) = ۱ \to ۸ + (-۱۲) + d = ۱ \to d = ۵$$

۱۶۵ . تابع در $x = ۲$ و $x = -۲$ (ریشه‌های غیرمکرر داخل قدرمطلق) مشتق‌ناپذیر است.

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$x^۲ - ۴$		+	۰	−	۰	+	

$$\begin{cases} x<-۲ & \to f(x)=x^۲-۴ \\ -۲\le x\le ۲ & \to f(x)=-x^۲+۴ \\ x>۲ & \to f(x)=x^۲-۴ \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x & x<-۲ \\ -۲x & -۲<x<۲ \\ ۲x & x>۲ \end{cases}$$



۱۶۶ . تابع در $x=۲$ و $x=\circ$ (ریشه‌های غیرمکرر داخل قدرمطلق) مشتق‌ناپذیر است بدین علت:

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{|x(x-۲)|-\overbrace{f(\circ)}^{\circ}}{x-\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{|x(x-۲)|}{x}$$

$$\to\begin{cases} f'(\circ^+)=\lim\limits_{x\to\circ^+}\dfrac{|\overbrace{x(x-۲)}^{-}|}{x}=\lim\limits_{x\to\circ^+}\dfrac{-x(x-۲)}{x}=\lim\limits_{x\to\circ^+}-(x-۲)=۲ \\ f'(\circ^-)=\lim\limits_{x\to\circ^-}\dfrac{|\overbrace{x(x-۲)}^{+}|}{x}=\lim\limits_{x\to\circ^-}\dfrac{x(x-۲)}{x}=\lim\limits_{x\to\circ^-}(x-۲)=-۲ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x_\circ=\circ$ مشتق‌ناپذیر است.

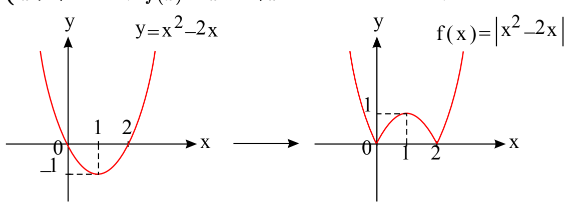
$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x(x-۲)|-\overbrace{f(۲)}^{\circ}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x(x-۲)|}{x-۲}$$

$$\to\begin{cases} f'(۲^+)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{|\overbrace{x(x-۲)}^{+}|}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x(x-۲)}{(x-۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^+}x=۲ \\ f'(۲^-)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{|\overbrace{x(x-۲)}^{-}|}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{-x(x-۲)}{(x-۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^-}-x=-۲ \end{cases}$$

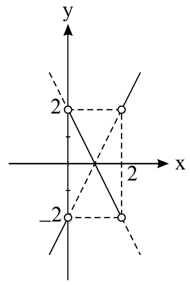
تابع $f(x)$ در $x_\circ=۲$ مشتق‌ناپذیر است.

x	$-\infty$		$\circ$		۲		$+\infty$
$x^۲-۲x$		$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	

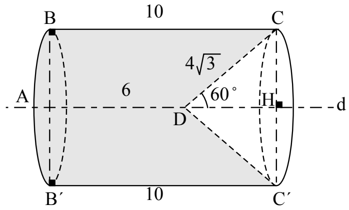
$$\begin{cases} x<\circ & \to f(x)=x^۲-۲x \\ \circ\le x\le ۲ & \to f(x)=-x^۲+۲x \\ x>۲ & \to f(x)=x^۲-۲x \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x<\circ \\ -۲x+۲ & \circ<x<۲ \\ ۲x-۲ & x>۲ \end{cases}$$



و نمودار f' به‌صورت مقابل است:



۱۶۷ . حجم حاصل مطابق شکل برابر است با:



$$D\overset{\triangle}{H}C : CH = \sin ۶۰^\circ \times DC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴\sqrt{۳} = ۶$$

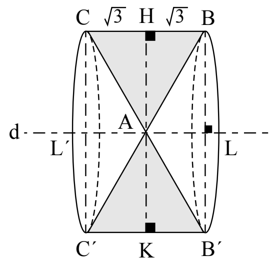
$$DH = \cos ۶۰^\circ \times DC = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}}$$

$$V = \pi \times ۶^۲ \times ۱۰ - \frac{۱}{۳}\pi \times ۶^۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۳۶۰\pi - ۲۴\sqrt{۳}\pi$$

نکته: حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع h برابر $\pi r^۲ h$ و حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h برابر $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ است.

۱۶۸ . حجم حاصل استوانه‌ای خالی از دو مخروط می‌باشد.



$$AH = \sin ۶۰^\circ \times AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۳$$

$$\Rightarrow BL = B'L = CL = C'L' = ۳$$

$$V = V_{\text{استوانه}} - ۲ \times V_{\text{مخروط}}$$

$$V = \pi \times ۳^۲ \times ۲\sqrt{۳} - ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi \times ۳^۲ \times \sqrt{۳} = ۱۸\sqrt{۳}\pi - ۶\sqrt{۳}\pi$$

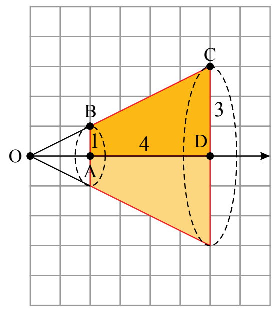
$$\Rightarrow V = ۱۲\sqrt{۳}\pi$$

نکته: حجم استوانه به شعاع r و ارتفاع h برابر با $\pi r^۲ h$ است و حجم مخروط به شعاع r و ارتفاع h برابر است با: $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

۱۶۹ . الف)

باید حجم یک مخروط ناقص (قسمت رنگی) را حساب کنیم. برای این کار ابتدا با قضیهٔ تالس مقدار x را پیدا می‌کنیم:

$$AB || CD \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{x}{x+۴} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = ۲$$

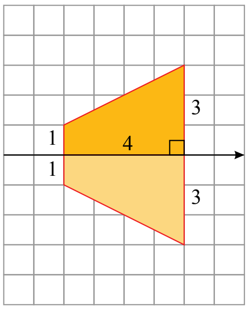


بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} \text{حجم مخروط بزرگ} = \dfrac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۶) = ۱۸\pi \\ \text{حجم مخروط کوچک} = \dfrac{۱}{۳}\pi(۱)^۲(۲) = \dfrac{۲\pi}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{حجم مخروط ناقص} = ۱۸\pi - \dfrac{۲\pi}{۳} = \dfrac{۵۲\pi}{۳}$$

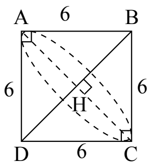
ب)

یک ذوزنقه به‌شکل روبه‌روست:



$$\Rightarrow \text{مساحت سطح مقطع} = \dfrac{(۲+۶)\times ۴}{۲} = ۱۶$$

۱۷۰ . شکل حاصل، دو مخروط یکسان است که از قاعده به هم چسبیده‌اند پس داریم:



$AC = BD = AB\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲} \Rightarrow R = AH = \dfrac{AC}{۲} = ۳\sqrt{۲}$ و $h = BH = ۳\sqrt{۲}$

$V_{\text{مخروط}} = \dfrac{۱}{۳}\pi R^۲ h$

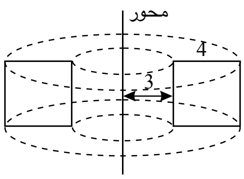
$V = \dfrac{۱}{۳}\pi \times (۳\sqrt{۲})^۲(۳\sqrt{۲})$

$V = \dfrac{\pi \times ۱۸ \times \cancel{۳}\sqrt{۲}}{\cancel{۳}} \Rightarrow V = ۱۸\pi\sqrt{۲}$ واحد حجم

پس حجم کل برابر است با:

$V_{\text{کل}} = ۲ \times ۱۸\pi\sqrt{۲} = ۳۶\pi\sqrt{۲}$

۱۷۱ . از دوران مربع مفروض حول محور، شکلی دیسک‌مانند حاصل می‌شود که برای یافتن حجم آن باید حجم استوانهٔ بیرونی را یافته، سپس حجم استوانهٔ درونی را از آن کم کنیم:



$V_{\text{استوانهٔ مربعی}} = \pi R^۲ h \xrightarrow[R=۴+۳=۷]{h=۴} C = \pi \times ۷^۲ \times ۴ \Rightarrow V = ۱۹۶\pi$ واحد حجم

$V_{\text{استوانهٔ درونی}} = \pi R^۲ h \xrightarrow[R=۳]{h=۴} V = \pi \times ۳^۲ \times ۴ \Rightarrow V = ۳۶\pi$ واحد حجم

$\text{حجم دیسک} = ۱۹۶\pi - ۳۶\pi = ۱۶۰\pi$ واحد حجم

۱۷۲ .

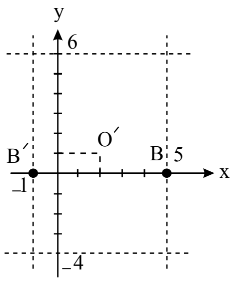
تعریف بیضی: $MF + MF' = ۲a \xrightarrow{\text{توان ۲}} (MF)^۲ + (MF')^۲ + ۲MF \cdot MF' = ۴a^۲$

$\xrightarrow{\overset{\triangle}{MFF'}:(FF')^۲=(MF)^۲+(MF')^۲} (FF')^۲ + ۲MF \cdot MF' = ۴a^۲$

$\xrightarrow{FF'=۲c} ۴c^۲ + ۲MF \cdot MF' = ۴a^۲ \to ۲MF \cdot MF' = ۴a^۲ - ۴c^۲$

$\to MF \cdot MF' = ۲a^۲ - ۲c^۲ = ۲(a^۲ - c^۲) \to MF \cdot MF' = ۲b^۲$

۱۷۳ . بیضی قائم است، چون اندازهٔ قطر عمودی‌اش ۱۰ واحد $(۱۰ = (-۴) - ۶)$ اما اندازهٔ قطر افقی‌اش ۶ واحد می‌باشد $(۶ = (-۱) - ۵)$.



از طرفی می‌دانیم، O' مرکز بیضی وسط B و B' و نیز A و A' است پس داریم:

$$x_{O'} = \frac{x_B + x_{B'}}{۲} = \frac{۵ - ۱}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

۱۷۴ . مرکز دایره و بیضی $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۸ \Rightarrow O(-۱, ۰)$

طول قطر دایره: $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ + ۰^۲ - ۴(-۸)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶} \Rightarrow R = ۳ \Rightarrow ۲R = ۶$

قطر بزرگ بیضی $AA' = ۶ + ۲ = ۸ \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$

قطر کوچک بیضی $BB' = ۶ - ۲ = ۴ \Rightarrow ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲$

فاصلهٔ کانونی بیضی : $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۱۶ = ۴ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۱۲ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow FF' = ۲c = ۴\sqrt{۳}$: از طرفی

از آن‌جا که بیضی افقی است داریم:

$$A\left|\begin{matrix}\alpha + a \\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}-۱ + ۴ \\ ۰\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۳ \\ ۰\end{matrix}\right.$$
$$A'\left|\begin{matrix}\alpha - a \\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}-۱ - ۴ \\ ۰\end{matrix}\right. \Rightarrow A\left|\begin{matrix}-۵ \\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$F\left|\begin{matrix}\alpha + c \\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow F\left|\begin{matrix}-۱ + ۲\sqrt{۳} \\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$F'\left|\begin{matrix}\alpha - c \\ \beta\end{matrix}\right. \Rightarrow F\left|\begin{matrix}-۱ - ۲\sqrt{۳} \\ ۰\end{matrix}\right.$$

$B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\right. \Rightarrow B\left|\begin{matrix}-۱\\ ۲\end{matrix}\right.$

$B'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}\right. \Rightarrow B'\left|\begin{matrix}-۱\\ -۲\end{matrix}\right.$

$e=\frac{c}{a}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$: خروج از مرکز بیضی

۱۷۵.

$AA'=۲a \to ۲a=۴-(-۴) \to ۲a=۸ \to a=۴$

طبق فرض : $۲b=\frac{۳}{۴}۲c \to b=\frac{۳}{۴}c \to ۳c=۴b \to c=\frac{۴}{۳}b$

$c^{۲}=a^{۲}-b^{۲} \to \frac{۱۶}{۹}b^{۲}=۱۶-b^{۲} \to \frac{۲۵}{۹}b^{۲}=۱۶$

$\to ۲۵b^{۲}=۹\times ۱۶ \to b^{۲}=\frac{۹\times ۱۶}{۲۵} \to b=\frac{۳\times ۴}{۵} \to b=\frac{۱۲}{۵}$

$\to ۲b=\frac{۲۴}{۵}$ **قطر کوچک**

$\xrightarrow{c=\frac{۴}{۳}b} c=\frac{۴}{۳}(\frac{۱۲}{۵}) \to c=\frac{۱۶}{۵} \to ۲c=\frac{۳۲}{۵}$ **فاصلهٔ کانونی**

ازطرفی: $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴}=\frac{۱۶}{۲۰}=\frac{۴}{۵}$

۱۷۶.

توجه کنید که $AF=a-c$ **و** $OB=b$ **و** $OA'=a$ **است.**

$S_{\overset{\triangle}{A'OB}}=۳S_{\overset{\triangle}{BAF}} \to \frac{۱}{۲}OB\cdot OA'=۳\times \frac{۱}{۲}OB\cdot AF$

$\to OA'=۳AF \to a=۳(a-c) \to a=۳a-۳c \to ۲a=۳c \to a=\frac{۳}{۲}c$

$e=\frac{c}{a} \to e=\frac{c}{\frac{۳}{۲}c} \to e=\frac{۲}{۳}$

طول قطر کوچک $=۴ \to ۲b=۴ \to b=۲$

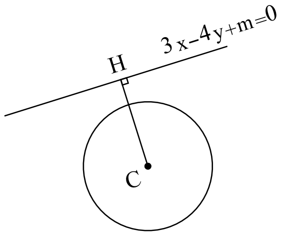
$c^{۲}=a^{۲}-b^{۲} \to c^{۲}=\frac{۹}{۴}c^{۲}-۴ \to ۴=\frac{۵}{۴}c^{۲} \to ۵c^{۲}=۱۶$

$$\to c^2=\frac{۱۶}{۵}\to c=\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}\xrightarrow{a=\frac{۳}{۲}c} a=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}=\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\to \text{قطر بزرگ}=۲a=\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$$

. ۱۷۷

باتوجه به شکل مقابل باید فاصلهٔ مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیش‌تر باشد.



$$x^2-۲x+y^2-۴y+۱=۰\to(x-۱)^2-۱+(y-۲)^2-۴+۱=۰$$

$$\to(x-۱)^2+(y-۲)^2=۴\to C\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.,\ R=۲$$

$$CH=\frac{|۳\times۱-۴\times۲+m|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{|۳-۸+m|}{۵}=\frac{|m-۵|}{۵}>R$$

$$\Rightarrow\frac{|m-۵|}{۵}>۲\Rightarrow|m-۵|>۱۰\Rightarrow m-۵<-۱۰\ \text{یا}\ m-۵>۱۰$$

$$\Rightarrow m<-۵\ \text{یا}\ m>۱۵$$

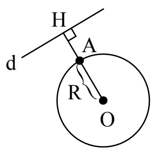
. ۱۷۸

$C: x^2+y^2-۲x+۴y=۴$
$d: ۳x+۴y=۱۵$

ابتدا باید شعاع دایره و فاصلهٔ مرکز دایره را از خط بیابیم تا وضعیت خط و دایره مشخص شود:

$$O(۱,-۲)\Rightarrow D=\frac{|۳(۱)+۴(-۲)-۱۵|}{\sqrt{۳^2+۴^2}}=\frac{|-۲۰|}{\sqrt{۹+۱۶}}\Rightarrow D=\frac{۲۰}{۵}=۴$$
$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^2+۴^2-۴(-۴)}\Rightarrow R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۱۶}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶}\Rightarrow R=۳$$

چون فاصلهٔ مرکز دایره از خط d بیشتر از طول شعاع دایره است پس خط و دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند.



از طرفی با توجه به شکل، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا خط d، برابر است با:

$$AH=OH-OA=۴-۳=۱$$

۱۷۹ .

$$x^۲+y^۲-۴x-۶y-۳=۰ \to \begin{cases} f'_x=۲x-۴=۰ \to x=۲ \\ f'_y=۲y-۶=۰ \to y=۳ \end{cases} \to C \begin{vmatrix} ۲:\alpha \\ ۳:\beta \end{vmatrix}$$

$$R^۲=\alpha^۲+\beta^۲-c=۴+۹+۳=۱۶ \to R=۴$$

$$C \begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix} , \ C' \begin{vmatrix} -۱ \\ -۱ \end{vmatrix} \to CC'=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

شرط مماس داخل: $CC'=|R-R'| \to ۵=|۴-R'| \to \begin{cases} ۴-R'=۵ \to R'=-۱ \ \text{غ‌ق‌ق} \\ ۴-R'=۵ \to R'=۹ \end{cases}$

پس: $\begin{cases} C' \begin{vmatrix} -۱ \\ -۱ \end{vmatrix} \\ R'=۹ \end{cases} \xrightarrow{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲} (x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۸۱$

۱۸۰ .

$$x^۲+y^۲-۴x-۶y+۴=۰ \to (x-۲)^۲-۴+(y-۳)^۲-۹+۴=۰$$

$$\to (x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۹ \to C \begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix} , \ R=۳$$

ازطرفی: $CC'=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۷-۳)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$

اگر دو دایره مماس خارج باشند، داریم:

$$CC'=R+R' \Rightarrow ۵=۳+R' \Rightarrow R'=۲ \Rightarrow (x-۵)^۲+(y-۷)^۲=۴$$

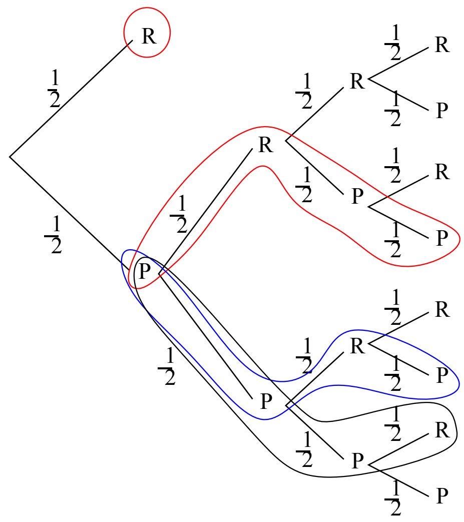
اگر دو دایره مماس داخل باشند، داریم:

$$CC'=|R'-R| \Rightarrow |R'-۳|=۵ \Rightarrow R'-۳=\pm۵ \Rightarrow R'=-۲ \ \text{غ‌ق‌ق} \ , \ R'=۸$$

$$\Rightarrow (x-۵)^۲+(y-۷)^۲=۶۴$$

۱۸۱ .

«رو» را با R و «پشت» را با P نشان می‌دهیم:



حالت مطلوب: $R\,,\ PRPP\,,\ PPRP\,,\ PPPR$

$\rightarrow$ احتمال مطلوب $= \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲})$

$= \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۱۶} = \frac{۱۱}{۱۶}$

. ۱۸۲

$\frac{1}{2}$ ظرف1 | 4 قرمز 2 آبی | $\longrightarrow$ دو توپ همرنگ نباشد $= \dfrac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$

$\frac{1}{2}$ ظرف2 | 5 قرمز 4 آبی | $\longrightarrow$ دو توپ همرنگ نباشد $= \dfrac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

$P($دو توپ همرنگ نباشند$) = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۸}{۱۵} + \frac{۵}{۹}) = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۲۴ + ۲۵}{۴۵}) = \frac{۴۹}{۹۰}$

. ۱۸۳

① | 4 معیوب 20سالم |

② | 3 معیوب 12سالم |

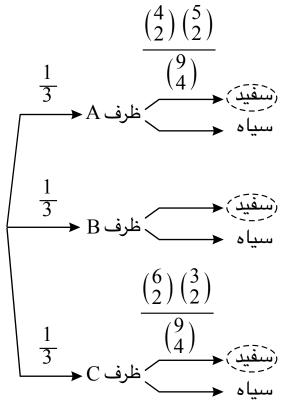
| 8 لامپ 6 لامپ |

$\frac{8}{14}$ از ظرف ① باشد $\longrightarrow$ معیوب بودن در ظرف ① $= \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

$\frac{6}{14}$ از ظرف ② باشد $\longrightarrow$ معیوب بودن در ظرف ② $= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$P($معیوب بودن$) = \frac{۴}{۷} \times \frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۱}{۵} = \frac{۲}{۲۱} + \frac{۳}{۳۵} = \frac{۱۰ + ۹}{۳ \times ۷ \times ۵} = \frac{۱۹}{۱۰۵}$

. ۱۸۴

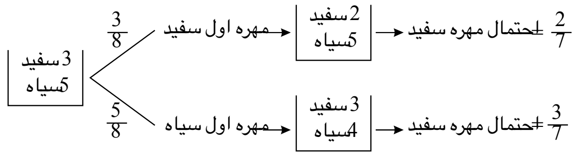


$$P(\text{مطلوب}) = \frac{۱}{۳} \times \frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۴}} + ۲ \times \frac{۱}{۳}\frac{\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۴}}$$

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{۱}{۳}(\frac{۶ \times ۱۰}{۹ \times ۲ \times ۷} + ۲ \times \frac{۱۵ \times ۳}{۹ \times ۲ \times ۷})$$

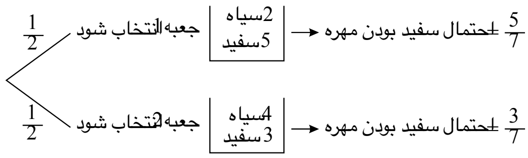
$$P(\text{مطلوب}) = \frac{۱}{۳}(\frac{۱۰}{۲۱} + \frac{۵}{۷}) = \frac{۱}{۳}(\frac{۱۰ + ۱۵}{۲۱}) = \frac{۲۵}{۶۳}$$

.۱۸۵



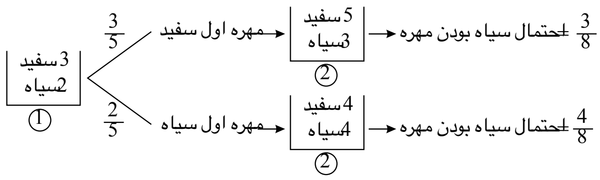
$$P(\text{سفیدبودن مهره دوم}) = \frac{۳}{۸} \times \frac{۲}{۷} + \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۶ + ۱۵}{۵۶} = \frac{۲۱}{۵۶}$$

.۱۸۶



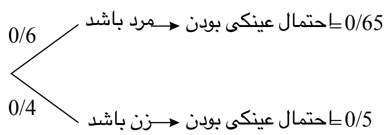
$$P(\text{سفیدبودن مهره}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۷} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۷} = \frac{۸}{۱۴} = \frac{۴}{۷}$$

.۱۸۷



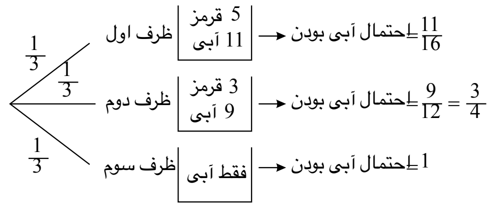
$$P(\text{سیاه‌بودن مهره}) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۳}{۸} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۴}{۸} = \frac{۹ + ۸}{۴۰} = \frac{۱۷}{۴۰}$$

.۱۸۸



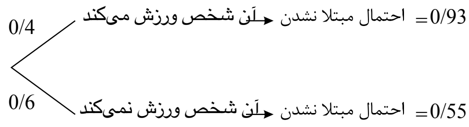
$P($عینکی بودن$) = ۰/۶ \times ۰/۶۵ + ۰/۴ \times ۰/۵ = ۰/۳۹ + ۰/۲ = ۰/۵۹$

۱۸۹.



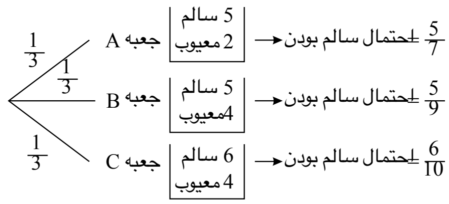
$P($آبی بودن$) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱۱}{۱۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۳} \times ۱ = \frac{۱۱}{۴۸} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۱ + ۱۲ + ۱۶}{۴۸} = \frac{۳۹}{۴۸}$

۱۹۰.



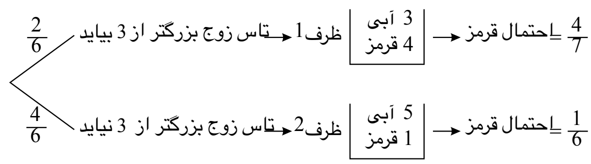
$P($مبتلا شدن$) = ۰/۴ \times ۰/۹۳ + ۰/۶ \times ۰/۵۵ = ۰/۳۷۲ + ۰/۳۳ = ۰/۷۰۲$

۱۹۱.



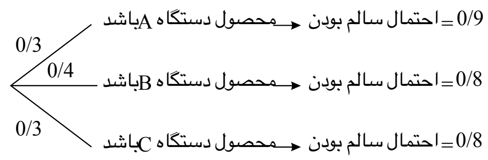
$P($سالم بودن لامپ$) = \frac{۱}{۳} \times (\frac{۵}{۷} + \frac{۵}{۹} + \frac{۶}{۱۰}) = \frac{۱}{۳} \times (\frac{۴۵۰ + ۳۵۰ + ۳۷۸}{۶۳۰}) = \frac{۱۱۷۸}{۱۸۹۰}$

۱۹۲.



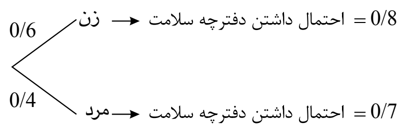
$P($قرمز بودن توپ$) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۴}{۷} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۴}{۲۱} + \frac{۱}{۹} = \frac{۱۲ + ۷}{۶۳} = \frac{۱۹}{۶۳}$

۱۹۳.



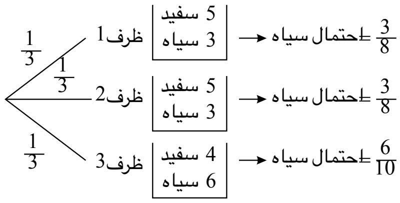
$P($سالم بودن$) = ۰/۳ \times ۰/۹ + ۰/۴ \times ۰/۸ + ۰/۳ \times ۰/۸ = ۰/۲۷ + ۰/۳۲ + ۰/۲۴ = ۰/۸۳$

۱۹۴.



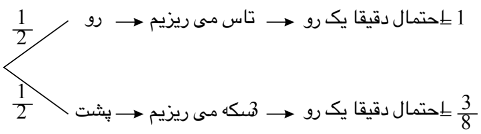
$P($داشتن دفترچه سلامت$) = ۰/۶ \times ۰/۸ + ۰/۴ \times ۰/۷ = ۰/۴۸ + ۰/۲۸ = ۰/۷۶$

۱۹۵.



$P(\text{سیاه بودن}) = \frac{۱}{۳}(\frac{۳}{۸} + \frac{۳}{۸} + \frac{۶}{۱۰}) = \frac{۱}{۳}(\frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۵}) = \frac{۱}{۳} \times (\frac{۱۵+۲۱}{۲۰}) = \frac{۹}{۲۰}$

.۱۹۶

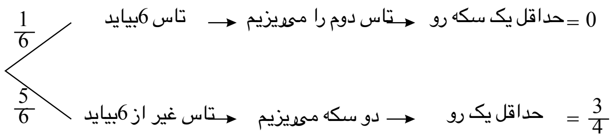


۳ سکه می‌ریزیم $\Rightarrow (-,-,-) \Rightarrow n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

دقیقاً یک رو $\to n(A) = ۳ \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۸}$

$P(\text{دقیقاً یک رو}) = (\frac{۱}{۲} \times ۱) + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۸}) = \frac{۸+۳}{۱۶} = \frac{۱۱}{۱۶}$

.۱۹۷

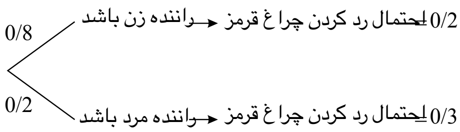


دو سکه می‌ریزیم $\Rightarrow n(S) = ۲^۲ = ۴$

حداقل یک رو $\to A = \{ \text{(رو، پشت) ، (پشت، رو) ، (رو، رو)} \} \Rightarrow \text{احتمال} = \frac{۳}{۴}$

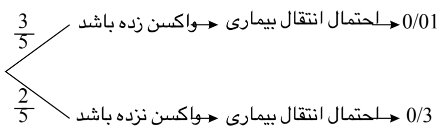
$P(\text{حداقل یک رو}) = \frac{۱}{۶} \times ۰ + \frac{۵}{۶} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۵}{۸}$

.۱۹۸



$P(\text{رد کردن چراغ قرمز}) = ۰/۸ \times ۰/۲ + ۰/۲ \times ۰/۳ = ۰/۱۶ + ۰/۰۶ = ۰/۲۲$

.۱۹۹



$P(\text{انتقال بیماری}) = \frac{۳}{۵} \times ۰/۰۱ + \frac{۲}{۵} \times ۰/۳ = ۰/۶ \times ۰/۰۱ + ۰/۴ \times ۰/۳ = ۰/۰۰۶ + ۰/۱۲ = ۰/۱۲۶$

.۲۰۰

$\frac{1}{2}$ جعبه 1: $\boxed{\begin{matrix}\text{4 آبی}\\ \text{2 قرمز}\end{matrix}}$ $\longrightarrow$ دو مهره آبی $= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}$ جعبه 2: $\boxed{\begin{matrix}\text{3 آبی}\\ \text{4 قرمز}\end{matrix}}$ $\longrightarrow$ دو مهره آبی $= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

$P(\text{دو مهره آبی}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۷}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۱۴+۵}{۳۵}) = \frac{۱۹}{۷۰}$

.۲۰۱

ظرف 1: $\boxed{\begin{matrix}\text{3 سفید}\\ \text{2 سیاه}\end{matrix}}$

$\frac{3}{5}$ مهره اول سفید $\longrightarrow$ ظرف 2: $\boxed{\begin{matrix}\text{5 سفید}\\ \text{1 سیاه}\end{matrix}}$ $\longrightarrow$ سفید $= \frac{5}{6}$

$\frac{2}{5}$ مهره اول سیاه $\longrightarrow$ ظرف 2: $\boxed{\begin{matrix}\text{4 سفید}\\ \text{2 سیاه}\end{matrix}}$ $\longrightarrow$ سفید $= \frac{4}{6}$

$P(\text{سفید}) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۶} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۱۵+۸}{۳۰} = \frac{۲۳}{۳۰}$