نام و نام خانوادگی: سهیل حاج کرم

نام آزمون: سخت ترین سوال های تشریحی ریاضی

دوازدهم تجربی نهایی

آموزشگاه پرسا

# دوازدهم

## فصل سوم: حد | حد در بی‌نهایت و رفع ابهام از $\infty/\infty$

سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

۱ اگر $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲} = -۱$ آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x=-۲$ چقدر است؟

### حد بی‌نهایت

۲ حاصل حد مقابل را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

$$\lim_{x\to \frac{۵\pi}{۴}} \frac{x-۱}{\sqrt{۲}\sin x+۱}$$

۳ حاصل $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## حد در بی‌نهایت و رفع ابهام از $\infty/\infty$

۴ حاصل $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\dfrac{-2x+1}{x-2}\right]$ را بیابید. ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.)

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۵ اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^n+mx^3+x^2-1}{4x^3+x^2-3}=-2$ ، آنگاه $m$ و $n$ را بیابید. $(n\in\mathbb{N})$

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۶ اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} (mx^{۲} + (x+۲)^{۲} - ۷x) = +\infty$ ، آنگاه حدود $m$ را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۷ اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} ((x+۱)^{۳} + mx^{۳} - ۴x^{۲} + ۲) = +\infty$ ، آنگاه حدود $m$ را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۸ اگر $\lim\limits_{x\to -\infty} (mx^{۳} - (x-۱)^{۳} + x^{۲} + ۲) = +\infty$ ، آنگاه حدود $m$ را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۹ حاصل حدهای زیر را بیابید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

سخت- منتا- ۱۳۹۸

الف

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۱}{x+۲}]$$

سخت- منتا- ۱۳۹۸

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

ب

سخت- منتا- ۱۳۹۸

$$\lim_{x\to-\infty}[\frac{x+۲}{x-۱}]$$

## حد بی‌نهایت

۱۰ حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n+۳x^۴-x^۲+۱}{۲x^n-x^۴+۵}$ را به‌ازای مقادیر مختلف $n$ $(n\in\mathbb{N})$ به دست آورید.

سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

## فصل دوم: مثلثات | معادلات مثلثاتی

۱۱ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

$$\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\cos(\frac{۵\pi}{۸}-x)=۳$$

۱۲) اگر $\frac{۵\pi}{۶} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$ و $\tan\alpha = \frac{۲m - ۱}{۳}$، آنگاه حدود $m$ را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۱۳) معادلات زیر را حل کنید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

الف

$\sin ۳x + ۲\cos ۲x = ۲$

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## فصل اول: تابع | انواع تابع

۱۴) صعودی و نزولی بودن تابع زیر را بررسی کنید.

$f(x) = [-۲x] + ۱$ سخت- منتا- ۱۳۹۱

۱۵) اگر $f$ روی $\mathbb{R}$ تابعی اکیداً صعودی باشد، دامنهٔ تابع $g$ را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

$g(x) = \sqrt{f(|x-۲|) - f(|x+۱|)}$

۱۶ اگر $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع $g$ را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

$$g(x) = \sqrt{f(|x-۳|) - f(|x+۲|)}$$

۱۷ اگر $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع $g$ را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

$$g(x) = \sqrt{f(|۲x-۱|) - f(|x+۱|)}$$

۱۸ اگر $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(۱) = ۰$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

$$g(x) = \sqrt{(x^۲ - ۳x)f(x)}$$

۱۹ اگر تابع $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-۲) = ۰$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

$$g(x) = \sqrt{(x^۲ - ۸۱)f(x)}$$

**۲۰** توابع $f$ و $g$ هردو اکیداً نزولی هستند و تابع $fog$ تعریف شده است. اگر $fog(m^{۲}) = ۲a - ۱$ و $fog(m^{۲}+۱) = -a+۴$ باشند، حدود $a$ را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## ترکیب توابع

**۲۱** نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع، صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

سخت- تمرین های کتاب- ۱۰

$$f(x) = \begin{cases} -۲x-۳ & x < -۴ \\ ۳ & -۴ \leq x < ۲ \\ ۳x-۲ & x \geq ۲ \end{cases}$$

**۲۲** اگر $f(x) = \dfrac{۲}{x-۱}$ و $g(x) = \dfrac{۳}{x}$، دامنه و ضابطهٔ توابع $fog$ و $fof$ را به‌دست آورید.

سخت- تمرین های کتاب- ۱۴

۲۳ اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$، توابع $fog$ و $gof$ را به‌دست آورید.

سخت- تمرین های کتاب- ۲۲

۲۴ موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

سخت- تمرین های کتاب- ۲۲

الف

$$f(x)=x^{۲}-۵ \quad ; \; g(x)=\sqrt{x+۶} \quad : \; D_{fog},(fog)(x)$$

سخت- تمرین های کتاب- ۲۲

ب

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳} \quad ; \; g(x)=\frac{۶}{۳x-۵} \quad : D_{fog},(fog)(x)$$

سخت- تمرین های کتاب- ۲۲

**پ**

$f(x)=\sqrt{x+۲}\quad ;\ g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶}\quad :\ D_{gof},(gof)(x)$

سخت- تمرین های کتاب- ۲۲

**ت**

$f(x)=\sin x\quad ;\ g(x)=\sqrt{x}\quad :\ D_{gof},(gof)(x)$

سخت- تمرین های کتاب- ۲۲

**۲۵** با توجه به ضابطه‌های توابع $f$ و $g$، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آن‌ها را حل کنید. سخت- تمرین های کتاب- ۲۳

الف) $f(x)=۲x-۵\quad ,\ g(x)=x^۲-۳x+۸\quad :\ (fog)(x)=۷$

ب) $f(x)=۳x^۲+x-۱\quad ,\ g(x)=۱-۲x\quad :\ (gof)(x)=-۵$

## انواع تابع

**۲۶** ضابطهٔ تابع وارون توابع یک به یک زیر را به‌دست آورید. سخت- تمرین های کتاب- ۲۹

الف) $f(x)=\dfrac{-۸x+۳}{۲}$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

سخت- تمرین های کتاب- ۲۹

۲۷ در مورد هریک از قسمت‌های زیر نشان دهید که $f$ و $g$ وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \frac{-۷}{۲}x - ۳ \quad , \quad g(x) = -\frac{۲x + ۶}{۷}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x - ۸} \quad , \quad g(x) = ۸ + x^{۲} \; ; \; x \leq ۰$

سخت- تمرین های کتاب- ۲۹

۲۸ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آن‌ها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف

$f(x) = |x|$

سخت- تمرین های کتاب- ۲۹

ب

$g(x) = -x^{۲}$

سخت- تمرین های کتاب- ۲۹

پ

$h(x) = x^{۲} + ۴x + ۳$

سخت- تمرین های کتاب- ۲۹

۲۹ با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۵$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد $f$ و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

سخت- تمرین های کتاب- ۲۹

سخت- تمرین های کتاب- ۲۹

۳۰ اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$ ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

## ترکیب توابع

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۳۱ ضابطهٔ تابع مرکب $gof$ را با فرض $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & ; x>۰ \\ x-۱ & ; x\leq ۰ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۳x-۲ & ; x>۰ \\ ۱-۴x & ; x\leq ۰ \end{cases}$ به‌دست آورید.

۳۲ ضابطهٔ تابع ترکیب $y = fog(x)$ را برای تابع‌های $f$ و $g$ با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۳ & ; x > ۰ \\ x^۲ - ۱ & ; x \leq ۰ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & ; x \geq ۲ \\ -۲\sqrt{x} & ; ۰ \leq x < ۲ \end{cases}$ به‌دست آورید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۳۳ برای تابع‌های $f(x) = x^۲ - x$ و $g(x) = ۲x + ۱$، ریشه‌های معادلهٔ $fog(x) = gof(x)$ را به‌دست آورید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## انواع تابع

۳۴ برای تابع $f = \{(-۱,۱),(۱,-۱),(۲,۰),(۴,-۲)\}$، تابع‌های ترکیب $h = fo(f^۲ + f)$ و $k = (f^۲ + f)of^{-۱}$ را با اعضایشان مشخص کنید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## ترکیب توابع

۳۵ اگر بدانیم: $f(x)=x+b$، $g(x)=ax^{۲}-bx+c$ و $gof(x)=-x^{۲}-۳x+۷$، مقدار پارامتر $c$ را به‌دست آورید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

۳۶ تابع $f=\{(-۱,۳),(۲,-۱),(۰,۲),(۶,۰)\}$ مفروض است. تابع ترکیب $h=(f^{۲}+f)of$ را با اعضایش مشخص کنید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

۳۷ تابع خطی $f$ در رابطهٔ $fof(x)=۲+۳x$ صدق می‌کند. ضابطهٔ تابع $f$ را به‌دست آورید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

۳۸ برای تابع $f(x)=\dfrac{-x}{x-۱}$، ضابطهٔ تابع مرکب $fof$ رابه‌دست آورید. دامنهٔ تابع $fof$ چگونه است؟ سخت- منتا- ۱۳۹۸

۳۹ با فرض $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ و $g=\{(۳,-۱),(۰,۲),(۴,۱),(۱,-۲)\}$، دامنه، برد و اعضای تابع ترکیب $fog$ را مشخص کنید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۴۰ با فرض $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ و $gof(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$، مقدار $g(۳)$ را به‌دست آورید.

## انواع تابع

۴۱ برای توابع $f=\{(۴,-۱),(۳,۱),(۵,۲)\}$ و $g=\{(-۱,۲),(۴,۰),(۵,۳)\}$، تابع‌های ترکیب $gof^{-۱}$ و $fog^{-۱}$ را به‌دست آورید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## ترکیب توابع

**۴۲** باتوجه به ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۱-۲x}$ و $g(x)=\dfrac{۱-۳x}{x+۲}$، دامنهٔ تابع مرکب $fog$ و ضابطهٔ آن را به‌دست آورید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## انواع تابع

**۴۳** برای تابع $f=\{(۲,-۱),(۱,۳),(۰,۴)\}$، تابع‌های ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید. آیا توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ باهم برابرند؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## ترکیب توابع

**۴۴** برای تابع‌های اکیداً صعودی $f$ و $g$ نشان دهید که تابع‌های ترکیبی $fog$ و $gof$ نیز اکیداً صعودی هستند. سخت- منتا- ۱۳۹۸

**۴۵** برای توابع اکیداً نزولی $f$ و $g$ نشان دهید تابع‌های ترکیبی $fog$ و $gof$ هردو صعودی اکید هستند. سخت- منتا- ۱۳۹۸

**۴۶** $f$ تابعی اکیداً صعودی و $g$ تابعی اکیداً نزولی است. نشان دهید تابع‌های ترکیب $fog$ و $gof$ هردو اکیداً نزولی هستند. سخت- منتا- ۱۳۹۸

**۴۷** تابع $h(x)=۹^{x}-۳^{x+۱}$ را به‌صورت ترکیب دو تابع دیگر بنویسید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

## انواع تابع

**۴۸** برای تابع‌های اکیداً صعودی $f$ و $g$ نشان دهید توابع ترکیب $g^{-۱}of^{-۱}$ و $f^{-۱}og^{-۱}$ نیز اکیداً صعودی هستند. سخت- منتا- ۱۳۹۸

## ترکیب توابع

**۴۹** تابع $h(x) = x - ۲$ را از ترکیب کدام دو تابع می‌توان به‌دست آورد؟ سخت- منتا- ۱۳۹۸

الف) $f(x) = x^{۲}\ ,\ g(x) = \sqrt{x - ۲}$ ب) $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ g(x) = (x - ۲)^{۲}$

## انواع تابع

**۵۰** هر گاه بدانیم: $f(x) = x^{۲} - ۳x$ ، $g(x) = x^{۲} + mx$ و $(f^{-۱}og^{-۱}of^{-۱})(۰) = ۲$، مقدارهای ممکن برای $m$ را به‌دست آورید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## ترکیب توابع

**۵۱** ترکیب تابع همانی $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ با خودش برابر تابع همانی شده است. رابطهٔ بین ضرایب $a$ و $d$ را به‌دست آورید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

**۵۲** برای تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{x + ۲}{x - ۱}$، ضابطهٔ تابع‌های ترکیب $fof(x)$ و $fofof(x)$ را به‌دست آورید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

## انواع تابع

۵۳) باتوجه به ماشین $x \to \boxed{g} \to \boxed{f} \to x$، اگر $f(x)=\frac{۵x+۶}{۲x-۱}$ و تابع $g$ معکوس‌پذیر باشد و داشته باشیم $g(a)=۳$، مقدار $a$ را به‌دست آورید.
سخت- منتا- ۱۳۹۸

۵۴) با فرض $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=x^۲+mx-۲$، اگر $(g^{-۱}of^{-۱}og^{-۱})(-۱)=۰$ باشد، مقدار $m$ را به‌دست آورید.
سخت- منتا- ۱۳۹۸

۵۵) با فرض $f(x)=x+۱$ و $g(x)=۲x^۲-۳x$، صفرهای تابع $y=(gof^{-۱})(x)$ را به‌دست آورید.
سخت- منتا- ۱۳۹۸

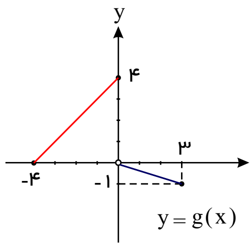
۵۶) برای تابع وارون‌پذیر $f$، تابع‌های ترکیب $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ چه زمانی باهم برابر می‌شوند؟
سخت- منتا- ۱۳۹۸

۵۷) جواب(های) معادلهٔ $fof^{-۱}(۲x)-f^{-۱}of(x)=۳x-۸$ را با فرض $f(x)=x^۳-۳x+۹$ به‌دست آورید.
سخت- منتا- ۱۳۹۸

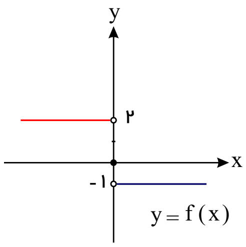
## ترکیب توابع

**۵۸** نمودار تابع‌های $f$ و $g$ مطابق شکل‌های زیر رسم شده‌اند. مقدار عبارت $fog(۳) + gof(۱)$ را به‌دست آورید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

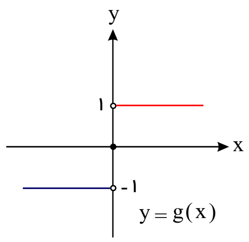



,




**۵۹** باتوجه به نمودار تابع $g$، ضابطهٔ تابع $gof$ را برای $f(x) = ۴ - x^۲$ به‌دست آورید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

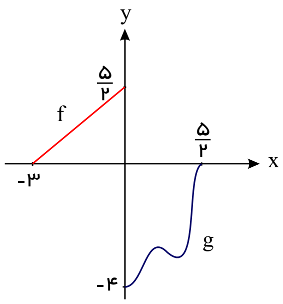


## انواع تابع

۶۰ اگر $f=\{(۳,۲),(۲,۰),(۰,-۳)\}$ و $g(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & ;x>۰ \\ x^۲-۱ & ;x\le ۰ \end{cases}$ بوده و تساوی $f^{-۱}og(m)=۲$ نیز برقرار باشد، مقدار $m$ را به‌دست آورید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

## ترکیب توابع

۶۱ نمودارهای توابع $f$ و $g$ در شکل رسم شده‌اند. دامنهٔ ترکیب $gof$ را به‌دست آورید. سخت- منتا- ۱۳۹۸




۶۲ اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $f=\{(x,۲x-۱),x\in A\}$ تابع $f(f(x))$ را با زوج‌های مرتب نمایش دهید. سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

۶۳ شرکت خودروسازی سایپا به مناسبت سالگرد پیروزی انقلاب اسلامی ایران خودروهایش را با تخفیف ۱۵ درصدی به معرض فروش گذاشته است. از طرفی هر سال در عید مبارک فطر، این شرکت به مشتریانش دو میلیون تومان تخفیف نقدی می‌دهد، کوروش می‌خواهد از این شرکت یک دستگاه خودرو پراید به قیمت ۵۰ میلیون تومان خریداری نماید. به کمک تابع مرکب، پیش‌بینی کنید که کدام‌یک بیشتر به سود کوروش خواهد بود ← ابتدا تخفیف دو میلیون تومانی را دریافت نموده سپس از تخفیف ۱۵ درصدی بهره ببرد یا برعکس ابتدا از تخفیف ۱۵ درصدی استفاده کند سپس دو میلیون تومان تخفیف بگیرد. (فرض کنید که در سال جاری، سالگرد پیروزی انقلاب با عید فطر مصادف شده است.)

سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

۶۴ دانش‌آموزی دامنهٔ تابع مرکب $y=\frac{۳x-۲}{-۲x+۳}$ را که از ترکیب دو تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ به دست آمده است از روی ضابطهٔ آن به صورت $x\neq +\frac{۳}{۲}$ تعیین نموده است، آیا پاسخ او درست است؟ در صورت اشتباه بودن، پاسخ درست و دلیل این اشتباه را تعیین نمائید.

سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

## انواع تابع

۶۵ تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}4x-x^2-3 & , \quad x<2\\ x-2 & , \quad x\geq 2\end{cases}$ مفروض است. ضابطهٔ تابع معکوس را به دست آورید. سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

۶۶ تحقیق کنید تابع مقابل یک به یک است و سپس ضابطهٔ تابع معکوس آن را بنویسید.

سخت- گل واژه- ۱۳۹۸ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

۶۷ با فرض معکوس‌پذیری توابع $f$ و $g$، معکوس تابع $f(x)=1-\dfrac{g(x-1)}{3}$ را تعیین کنید. سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

## فصل پنجم: کاربرد مشتق | بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق

۶۸ بازه‌هایی که تابع $y=x\sqrt{4-x^2}$ بر آنها صعودی یا نزولی است را تعیین کنید. سخت- سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۰

۶۹ در تابع $f(x) = x^{۳} + ۹x^{۲} + ۱$ جهت تقعر و نقطه‌ی عطف را در صورت وجود پیدا کنید. سخت- سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۰

## فصل چهارم: مشتق

### خط مماس بر منحنی

۷۰ نقاطی از منحنی $y = \frac{۲x+۳}{۱-x}$ را بیابید که مماس بر منحنی در آن نقاط بر خط $y + ۵x = ۸$ عمود باشد. سخت- منتا- ۱۳۹۸

### مشتق مراتب بالاتر

۷۱ در تابع $f(x) = \frac{x^{۲}}{x+۱}$ حاصل $f''(۱)$ را بیابید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

### تعریف مشتق و تعبیر هندسی مشتق

۷۲ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^{۲}}}$ را در $x = ۰$ بررسی کنید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

## بررسی مشتق پذیری

**۷۳** مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{|x+۲|}$ در نقطهٔ $x=-۲$ را بررسی کنید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

## فصل پنجم: کاربرد مشتق — نقاط بحرانی

**۷۴** نقاط بحرانی تابع $f(x)=۲x^۲-|x|$ را بیابید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

## اکسترمم‌های نسبی

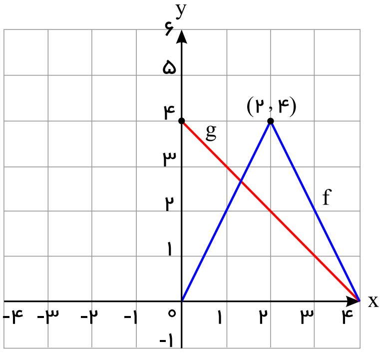
**۷۵** نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را تعیین کنید. سخت- منتا- ۱۳۹۸

$$f(x)=\begin{cases} x^۳+۳x^۲ & x\leq ۰ \\ x^۲-۶x & x>۰ \end{cases}$$

## فصل چهارم: مشتق | محاسبهٔ مشتق با استفاده از فرمول

سخت- تمرین های کتاب- ۱۰۰

**۷۶** نمودار توابع $f$ و $g$ را در شکل مقابل در نظر بگیرید.




**الف)** اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

**ب)** اگر $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

فصل پنجم: کاربرد مشتق | بهینه سازی

۷۷ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به‌دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

سخت- تمرین های کتاب- ۱۲۶

**۷۸** مشتق‌پذیری توابع زیر را در نقاط داده‌شده بررسی کنید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

**الف**

$$f(x) = x\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} \quad , \quad x_\circ = ۲$$

متوسط- منتا- ۱۳۹۸

**ب**

$$f(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}} \quad , \quad x_\circ = \circ$$

سخت- منتا- ۱۳۹۸

پ

$f(x)=\sqrt{|x+3|}\quad , \quad x_0=-3$

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## فصل پنجم: کاربرد مشتق | رابطه‌ی بین f و f'

۷۹ ضابطه و دامنهٔ مشتق تابع $f(x)=|x^2-4|$ را به‌دست آورید و سپس نمودار $f'$ را رسم کنید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

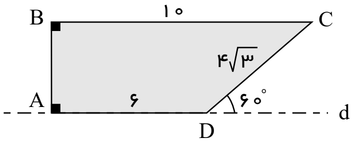
۸۰ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را در نقاط $x_0=0$ و $x_0=2$ بررسی کنید و سپس نمودار $f$ و $f'$ را رسم کنید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## فصل ششم: هندسه تفکر تجسمی

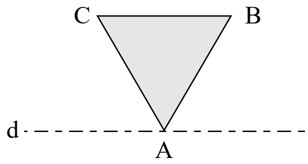
**۸۱** از دوران ذوزنقهٔ $ABCD$ حول $d$ شکلی با چه حجم به‌دست می‌آید؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸



**۸۲** مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۲\sqrt{۳}$ را حول خط $d$ دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸



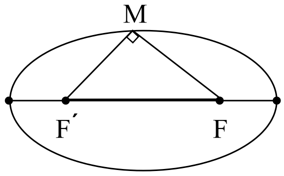

## بیضی

**۸۳** طول قطر کوچک، فاصلهٔ کانونی و خروج از مرکز یک بیضی را به‌دست آورید که نقاط $A\begin{vmatrix}۳\\۴\end{vmatrix}$ و $A'\begin{vmatrix}۳\\-۴\end{vmatrix}$ دو سر قطر بزرگ بیضی و طول قطر کوچک آن $\frac{۳}{۴}$ فاصلهٔ کانونی باشد.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

۸۴) نقطهٔ $M$ روی یک بیضی با کانون‌های $F$ و $F'$ به‌گونه‌ای قرار دارد که $MF$ و $MF'$ برهم عمودند نشان دهید که $MF \times MF' = ۲b^۲$ است.

سخت- منتا- ۱۳۹۸



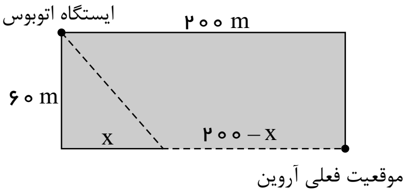

## فصل پنجم: کاربرد مشتق | بهینه سازی

۸۵) هر صفحهٔ مستطیل‌شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $۳۲cm^۲$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه $۲cm$ و حاشیه‌های کناری هرکدام یک سانتی‌متر درنظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

سخت- سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۸۶) آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰متری غرب و ۶۰متری شمال موقعیت فعلی او و بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متربرثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به‌سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲ $m/s$ عبور کند. باتوجه به شکل، مقدار $x$ را طوری تعیین کنید که او در کم‌ترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

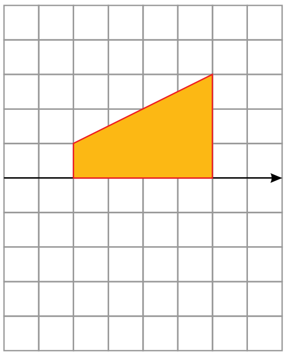
سخت- تمرین های کتاب- ۱۲۰



## فصل ششم: هندسه — تفکر تجسمی

۸۷ در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقهٔ قائمه را حول محور دوران دهیم. الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟ سخت- تمرین های کتاب- ۱۳۲



## دایره

سخت- تمرین های کتاب- ۱۴۲

**۸۸** معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right.$ و با دایرهٔ ۳ $x^۲+y^۲-۴x-۶y=$ مماس درون باشد.

## فصل هفتم: احتمال | قانون احتمال کل (نمودار درختی)

**۸۹** یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

سخت- سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۹۰ دو ظرف همانند داریم. اولی شامل ۴ توپ قرمز و ۲ توپ آبی و دومی شامل ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. به‌طور تصادفی از یکی از ظرف‌ها دو توپ باهم خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که توپ‌ها همرنگ نباشند چقدر است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

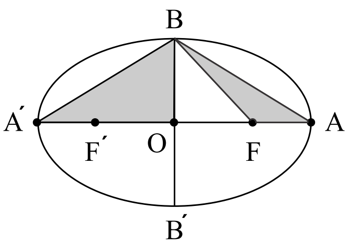
۹۱ در دو جعبه به‌ترتیب ۲۴ و ۱۵ عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبهٔ اول ۴ عدد و در جعبهٔ دوم ۳ عدد لامپ معیوب‌اند. از اولی ۸ لامپ و از دومی ۶ لامپ به‌تصادف برداشته و در یک جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## فصل ششم: هندسه بیضی

۹۲ در بیضی زیر اگر مساحت مثلث $BAF$ یک‌سوم مساحت مثلث $A'OB$ باشد و طول قطر کوچک بیضی ۴ باشد، خروج از مرکز و طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.

سخت- منتا- ۱۳۹۸



## دایره

**۹۳** حدود $m$ را چنان بیابید که خط $3x - 4y + m = 0$ دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ را قطع نکند.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

**۹۴** معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطهٔ $C' \left| \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix} \right.$ بوده و بر دایرهٔ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ مماس باشد.

سخت- منتا- ۱۳۹۸

## فصل پنجم: کاربرد مشتق | بهینه سازی

**۹۵** ورق فلزی مربع شکل به‌طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع $x$ برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ $x$ برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار $x$ چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

سخت- سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

## اکسترمم‌های مطلق

۹۶ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^{۲} + |x + ۱|$ را در بازهٔ $[-۲, ۲]$ بیابید. سخت- منتا- ۱۳۹۹

## فصل چهارم: مشتق | خط مماس بر منحنی

۹۷ مشتق تابع $g(x) = \dfrac{۲x + ۱}{x + ۲}$ را در نقطهٔ $-۱$ حساب کنید و به کمک آن معادلهٔ خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطهٔ $A(-۱, -۱)$ بنویسید. سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

## فصل پنجم: کاربرد مشتق | بهینه سازی

۹۸ نقطهٔ $M$ با کدام طول روی محور $x$ها انتخاب شود به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه $A(۱, ۵)$, $B(۷, -۲)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟ سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

## فصل ششم: هندسه

### تفکر تجسمی

۹۹ مربعی به ضلع ۶ واحد را حول قطرش دوران می‌دهیم. اندازهٔ حجم جسم حاصل چقدر است؟ سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

۱۰۰ مربعی به ضلع ۴ واحد را حول محوری موازی با یکی از اضلاع آن به فاصلهٔ ۳ واحد نزدیک‌تر، دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چقدر است؟ سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

### بیضی

۱۰۱ یک بیضی بر چهار خط $x=-1$ و $-4=$ و $y=-4$ و $y=6$ مماس است. مختصات کانون‌ها و مرکز تقارن بیضی را پیدا کنید. سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

## دایره

۱۰۲ فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادلهٔ $C: x^{۲} + y^{۲} - ۲x + ۴y = ۴$ از خط $d$ به معادلهٔ $۳x + ۴y = ۱۵$ چقدر است؟

سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

## بیضی

۱۰۳ یک بیضی افقی با دایرهٔ $C: x^{۲} + y^{۲} + ۲x = ۸$ هم‌مرکز است. اگر قطر بیضی دو واحد بزرگ تر از قطر دایره و قطر کوچک بیضی دو واحد کوچک‌تر از قطر دایره باشد، مختصات رئوس و کانون‌ها و مرکز بیضی و فاصلهٔ کانونی و اندازهٔ خروج از مرکز بیضی را بیابید. سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

فصل هفتم: احتمال | قانون احتمال کل (نمودار درختی)

۱۰۴ ظرف $A$ دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان $B$ و $C$ دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به تصادف یکی از ۳ ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده سفید است؟ سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

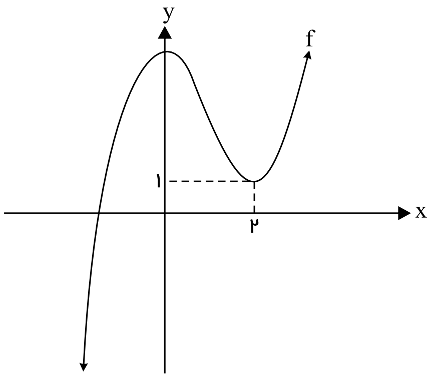
فصل چهارم: مشتق | محاسبهٔ مشتق با استفاده از فرمول

۱۰۵ اگر $f(a) = f'(a) = ۲$ مشتق $۴f^{۲}(x) + \frac{۱}{f(x)}$ در $x = a$ کدام است؟ سخت- گل واژه- ۱۳۹۸

۱) $-۴$
۲) $-۶$
۳) ۴
۴) ۶

۱۰۶ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۳} + bx^{۲} + d$ به‌صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر $b$ و $d$ را بیابید.

سخت- سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲



# پاسخنامه تشریحی

**۱**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=-1$$

ناچاریم هر دو حالت $x\to+\infty$ و $x\to-\infty$ را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{ax^2-x+2}=-1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{a\cancel{x^2}}=-1\Rightarrow\frac{1}{a}=-1\Rightarrow a=-1$$

لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{|x^2-4|}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to-2^+}\frac{-(x-2)(\cancel{x+2})}{-(\cancel{x+2})(x-1)}=\frac{4}{3}$$

حالت دوم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+4}{ax^2-x+2}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{ax^2}=\frac{-1}{a}=-1\Rightarrow a=1$$

پس خواهیم داشت:

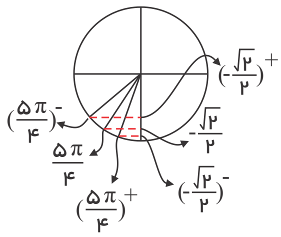
$$\lim_{x\to-2^+}\frac{|x^2-4|}{x^2-x+2}=\lim_{x\to-2^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{x^2-x+2}=\frac{0}{8}=0$$

**۲** با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to(\frac{5\pi}{4})^-}\frac{x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\varepsilon)+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{-1+\sqrt{2}\varepsilon+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{+\sqrt{2}\varepsilon}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{0^+}=+\infty$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to(\frac{5\pi}{4})^+}\frac{x-1}{\sqrt{2}\sin x+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\varepsilon)+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{-1-\sqrt{2}\varepsilon+1}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{-\sqrt{2}\varepsilon}=\frac{\frac{5\pi}{4}-1}{0^-}=-\infty$$

$\Rightarrow$ پس تابع در این نقطه حد ندارد




توجه کنید که $\frac{5\pi}{4}-1$ عددی مثبت است.

**۳** با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x\to\pi$$

$$x-\pi=t\Rightarrow\begin{cases}x=\pi+t\\ t\to 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi+t)}{1+\cos(\pi+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{1-\cos t}\times\frac{1+\cos t}{1+\cos t}$$

* با توجه به این نکته که وقتی $t\to 0$ میل کند، $sint\sim t$ داریم:

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t(1+\cos t)}{1-\cos^2 t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t(1+\cos t)}{\sin^2 t} = \lim_{t\to 0} \frac{-(1+\cos t)}{\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-1-\cos t}{\frac{\sin t}{t}\times t} = \lim_{t\to 0} \frac{-1-\cos t}{t} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-1-\cos t}{t} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1-\cos t}{t} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases}$$ ⇒ پس تابع در این نقطه حد ندارد

**۴** می‌دانیم $-2 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x+1}{x-2}$، حال باید ببینیم $\frac{-2x+1}{x-2}$ چگونه به $-2$ میل می‌کند. برای این کار $-2$ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} [\frac{-2x+1}{x-2}] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{-2x+4-3}{x-2}] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{-2(x-2)}{x-2} + \frac{-3}{x-2}]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} [-2 + \frac{-3}{x-2}]$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} [-2 + \frac{-3}{x-2}] = [-2 + \frac{-3}{+\infty}] = [-2 + 0^-] = [-2-\varepsilon] = -3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} [-2 + \frac{-3}{x-2}] = [-2 + \frac{-3}{-\infty}] = [-2 + 0^+] = [-2+\varepsilon] = -2 \end{cases}$$

**۵** با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \cdots x \xrightarrow{\sim} \pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^n + mx^3 + x^2 - 1}{4x^3 + x^2 - 3} = -2$$

حالت ۱) $n < 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{mx^3}{4x^3} = \frac{m}{4} = -2 \Rightarrow m = -8 \Rightarrow n < 3 \ ,\ m = -8$ جواب

حالت ۲) $n = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 + mx^3}{4x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(2+m)x^3}{4x^3} = \frac{2+m}{4} = -2$

$\Rightarrow 2 + m = -8 \Rightarrow m = -10 \Rightarrow n = 3 \ ,\ m = -10$ جواب

حالت ۳) $n > 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^n}{4x^3} = \pm\infty \rightarrow$ غیرقابل‌قبول

**۶**

$$\lim_{x\to-\infty} mx^2 + x^2 + 4x + 4 - 7x = \lim_{x\to-\infty} ((m+1)x^2 - 3x + 4) = +\infty$$

حالت ۱) $m = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x+4) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x) = -3(-\infty) = +\infty$ قابل قبول است.

حالت ۲) $m \neq -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ((m+1)x^2 - 3x + 4) = \lim\limits_{x\to-\infty} (m+1)x^2 = (m+1)(-\infty)^2$

$\Rightarrow (m+1)(+\infty) = +\infty \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1$

در کل باید $m \geq -1$ باشد.

**۷** با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \cdots x \xrightarrow{\sim} \pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + mx^3 - 4x^2 + 2) = \lim_{x\to-\infty} ((m+1)x^3 - x^2 + 3x + 3) = +\infty$$

حالت ۱) $m = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2 + 3x + 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2)$

$= -(-\infty)^2 = -(+\infty) = -\infty$ غیر قابل قبول

حالت ۲) $m \neq -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ((m+1)x^3 - x^2 + 3x + 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (m+1)x^3$

$\Rightarrow (m+1)(-\infty)^3 = (m+1)(-\infty) = +\infty \Rightarrow m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$

**۸** با توجه به قاعدهٔ پرتوان: $ax^n + bx^{n-1} + \cdots x \xrightarrow{\sim} \pm\infty\ ax^n$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(mx^۳-(x-۱)^۳+x^۲+۲)=\lim_{x\to-\infty}(mx^۳-x^۳+۳x^۲-۳x+۱+x^۲+۲)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}((m-۱)\,x^۳+۴x^۲-۳x+۳)=+\infty$$

حالت ۱) $m=۱\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}(۴x^۲-۳x+۳)=\lim_{x\to-\infty}۴x^۲=۴(-\infty)^۲=۴\,(+\infty)=+\infty$ قابل قبول

حالت ۲) $m\neq۱\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}((m-۱)\,x^۳+۴x^۲-۳x+۳)=\lim_{x\to-\infty}(m-۱)\,x^۳=(m-۱)\,(-\infty)^۳$

$$\Rightarrow(m-۱)\,(-\infty)=+\infty\Rightarrow m-۱<۰\Rightarrow m<۱$$

در کل باید $m\leq۱$ باشد.

۹

**الف**

می‌دانیم $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{۳x+۱}{x+۲}=۳$، حال باید ببینیم کسر $\dfrac{۳x+۱}{x+۲}$ چگونه به ۳ میل می‌کند، برای این کار ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۱}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳x+۶-۵}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۳\,(x+۲)}{x+۲}-\frac{۵}{x+۲}]=\lim_{x\to+\infty}[۳-\frac{۵}{x+۲}]$$

$$=[۳-\frac{۵}{+\infty}]=[۳-۰^+]=[۳-\varepsilon]=۲$$

**ب**

می‌دانیم $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+۲}{x-۱}=۱$، حال باید ببینیم کسر $\dfrac{x+۲}{x-۱}$ چگونه به یک میل می‌کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty}[\frac{x+۲}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{x-۱+۳}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[\frac{x-۱}{x-۱}+\frac{۳}{x-۱}]=\lim_{x\to-\infty}[۱+\frac{۳}{x-۱}]$$

$$=[۱+\frac{۳}{-\infty}]=[۱+۰^-]=[۱-\varepsilon]=۰$$

۱۰

با توجه به قاعده پرتوان داریم:

قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x\overset{\sim}{\to}\pm\infty\ ax^n$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n+۳x^۴-x^۲+۱}{۲x^n-x^۴+۵}=\begin{cases}\xrightarrow{n<۴}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{۳x^۴}{-x^۴}=-۳\\[2mm]\xrightarrow{n=۴}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^۴+۳x^۴}{۲x^۴-x^۴}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{۴x^۴}{x^۴}=۴\\[2mm]\xrightarrow{n>۴}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{۲x^n}=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$

۱۱ می‌دانیم: $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

$$\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\cos(\frac{۵\pi}{۸}-x)=۳\Rightarrow\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{۵\pi}{۸}-x))-۳=۰$$

$$\Rightarrow\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۸}+x)-۳=۰$$

$$\Rightarrow\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۲\sin(x-\frac{\pi}{۸})-۳=۰\ ,\ \sin(x-\frac{\pi}{۸})=t$$

$$\Rightarrow t^۲+۲t-۳=۰\Rightarrow t=۱\ ,\ t=-۳$$

$\sin(x-\frac{\pi}{۸})=-۳$ غ ق ق , $\sin(x-\frac{\pi}{۸})=۱\Rightarrow x-\frac{\pi}{۸}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

$$\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۸}$$

۱۲

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل داریم:

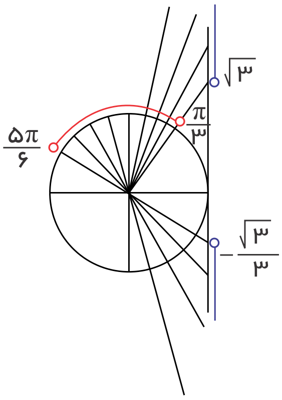
$$\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow\frac{\pi}{۳}<\alpha<\pi-\frac{\pi}{۶}$$

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan\alpha > \sqrt{3} \quad \text{یا} \quad \tan\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{3} > \sqrt{3} \quad \text{یا} \quad \frac{2m-1}{3} < -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 2m-1 > 3\sqrt{3} \quad \text{یا} \quad 2m-1 < -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow m > \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \quad \text{یا} \quad m < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$




**(۱۳)**

**الف**

**نکته:** $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ، $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

**طبق نکتهٔ فوق معادله را تغییر شکل می‌دهیم:**

$$3\sin x - 4\sin^3 x + 2\cos 2x = 2 \Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = 2 - 2\cos 2x = 2(1-\cos 2x) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = 2 \times 2\sin^2 x \Rightarrow 4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(4\sin^2 x + 4\sin x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 1)\ \sin x = 0 = \sin(0) \Rightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2)\ 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \Rightarrow (2\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-3}{2} \rightarrow & \text{ناممکن است.} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} & (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6} & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

**(۱۴)**

$$f(x) = [-2x] + 1$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow [-2x_1] \geq [-2x_2] \Rightarrow [-2x_1] + 1 \geq [-2x_2] + 1$$

$$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \ \text{نزولی}$$

**(۱۵)** **نکته:** اگر $f$ تابعی اکیداً صعودی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \leq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-2|) - f(|x+1|)} \Rightarrow f(|x-2|) - f(|x+1|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|x-2|) \geq f(|x+1|) \xrightarrow{f\ \text{اکیداً صعودی}} |x-2| \geq |x+1|$$

**برای حل این‌گونه نامعادلات، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.**

$$(x-2)^2 \geq (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \geq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 4 - 1 \geq 2x + 4x$$

$$\Rightarrow 6x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

**(۱۶)** **نکته:** اگر تابع $f$ اکیداً نزولی باشد و $f(a) \leq f(b)$ آنگاه $a \geq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|x-3|) - f(|x+2|)} \Rightarrow f(|x-3|) - f(|x+2|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|x-3|) \geq f(|x+2|) \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} |x-3| \leq |x+2|$$

$$(x-3)^2 \leq (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 \leq x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 9 - 4 \leq 4x + 6x$$

$$\Rightarrow 10x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow D_g = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

**(۱۷)** **نکته:** اگر $f$ تابعی اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ باشد، آنگاه $a \geq b$.

$$g(x) = \sqrt{f(|2x-1|) - f(|x+1|)} \Rightarrow f(|2x-1|) - f(|x+1|) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(|2x-1|) \geq f(|x+1|) \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} |2x-1| \leq |x+1|$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 \leq (x+1)^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 6x \leq 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-2) \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & 2 & \\ \hline 3x(x-2) & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 2]$$

۱۸

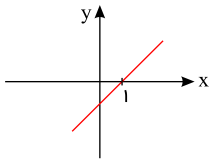
$g(x) = \sqrt{(x^{۲} - ۳x)f(x)} \Rightarrow (x^{۲} - ۳x)f(x) \geq ۰$

چون $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(۱) = ۰$ است، داریم:

برای $x < ۱$ تابع $f$ منفی است. $x < ۱ \Rightarrow f(x) < f(۱) \Rightarrow f(x) < ۰ \Rightarrow$

برای $x > ۱$ تابع $f$ مثبت است. $x > ۱ \Rightarrow f(x) > f(۱) \Rightarrow f(x) > ۰ \Rightarrow$

به‌طور تقریبی نمودار $f$ به‌صورت مقابل است.




$x^{۲} - ۳x = ۰ \Rightarrow x(x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \, , \, x = ۳$

| $x$ | | $۰$ | | $۱$ | | $۳$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^{۲} - ۳x$ | $+$ | $۰$ | $-$ | | $-$ | $۰$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | | $-$ | $۰$ | $+$ | | $+$ |
| $(x^{۲} - ۳x)f(x)$ | $-$ | $۰$ | $+$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ |

$\Rightarrow ۰ \leq x \leq ۱$ یا $x \geq ۳ \quad \Rightarrow \quad D_g = [۰, ۱] \cup [۳, +\infty)$

۱۹

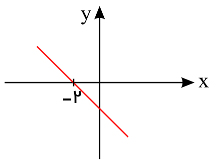
$g(x) = \sqrt{(x^{۲} - ۸۱)f(x)} \Rightarrow (x^{۲} - ۸۱)f(x) \geq ۰$

چون $f$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-۲) = ۰$ است، داریم:

برای $x < -۲$ تابع $f$ مثبت است. $x < -۲ \Rightarrow f(x) > f(-۲) \Rightarrow f(x) > ۰ \Rightarrow$

برای $x > -۲$ تابع $f$ منفی است. $x > -۲ \Rightarrow f(x) < f(-۲) \Rightarrow f(x) < ۰ \Rightarrow$

نمودار $f$ تقریباً به‌صورت مقابل است.




$x^{۲} - ۸۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۹$

| $x$ | | $-۹$ | | $-۲$ | | $۹$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^{۲} - ۸۱$ | $+$ | $۰$ | $-$ | | $-$ | $۰$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | | $+$ | $۰$ | $-$ | | $-$ |
| $(x^{۲} - ۸۱)f(x)$ | $+$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ | $۰$ | $-$ |

$\Rightarrow x \leq -۹$ یا $-۲ \leq x \leq ۹ \quad \Rightarrow \quad D_g = (-\infty, -۹] \cup [-۲, ۹]$

۲۰ برای هر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ از دامنهٔ $fog$ داریم:

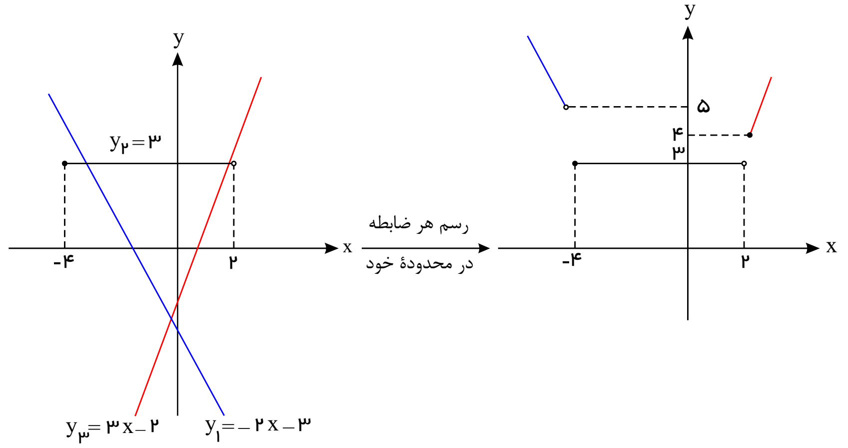
$x_{۱} < x_{۲} \xrightarrow{g \text{ اکیداً نزولی}} g(x_{۱}) > g(x_{۲}) \xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(g(x_{۱})) < f(g(x_{۲}))$

$x_{۱} < x_{۲} \Rightarrow fog(x_{۱}) < fog(x_{۲}) \Rightarrow$ $fog$ اکیداً صعودی

می‌دانیم : $m^{۲} + ۱ > m^{۲} \Rightarrow fog(m^{۲} + ۱) > fog(m^{۲}) \Rightarrow -a + ۴ > ۲a - ۱$

$\Rightarrow ۴ + ۱ > ۲a + a \Rightarrow ۳a < ۵ \Rightarrow \boxed{a < \frac{۵}{۳}}$

۲۱ رسم نمودار تابع $f$ به آسانی قابل درک است. چرا که در هر مرحله با یک تابع خطی روبرو هستیم:




می‌بینیم که این نمودار در بازهٔ $(-\infty,-۴)$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[-۴,۲)$ ثابت (که می‌توان آن را صعودی یا نزولی هم در نظر گرفت) و بالاخره در فاصلهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً صعودی است. براین اساس می‌توانیم ادعا کنیم که این تابع در فاصلهٔ $(-\infty,۲)$ نزولی و در فاصلهٔ $[-۴,+\infty)$ صعودی است.

**۲۲** با توجه به ضابطه‌های $f(x)=\dfrac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۳}{x}$، برای تعیین ضابطهٔ توابع مرکب $fog$ و $fof$ داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۳}{x})\xrightarrow[\frac{۳}{x}\text{ قرارمی‌دهیم}]{\text{به جای } x \text{ های } f}\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x}}=\frac{۲x}{۳-x}$$

البته دقت کنید که برای تعیین دامنهٔ این تابع در مرحلهٔ $\dfrac{۲}{\frac{۳-x}{x}}$ تأمل کرده و ریشه‌های مخرج‌ها (یعنی $x=۰$ و $x=۳$) را از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم. $D_{fog}=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{۲}{x-۱})\xrightarrow[\frac{۲}{x-۱}\text{ قرار بده}]{\text{به جای } x \text{ های } f}\frac{۲}{\frac{۲}{x-۱}-۱}=\frac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}=\frac{۲x-۲}{۳-x}$$

برای تعیین دامنهٔ این تابع نیز با توجه به مرحلهٔ سادهٔ نشدهٔ $\dfrac{۲}{\frac{۳-x}{x-۱}}$، می‌بایستی ریشه‌های مخرج (یعنی $x=۳$ و $x=۱$) را از $\mathbb{R}$ برداریم. لذا: $D_{fof}=\mathbb{R}-\{۱,۳\}$

**۲۳** با توجه به این نکته که «در $fog(a)$ ابتدا $a$ وارد ماشین $g$ شده و $g(a)$ بیرون می‌آید و سپس $g(a)$ وارد ماشین $f$ شده و $fog(a)$ بیرون می‌آید» داریم:

$$\begin{cases} f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\} \\ g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}\end{cases}$$

$$\to\begin{cases} fog=?\begin{cases} ۵\xrightarrow{g}۷\xrightarrow{f}۸: fog(۵)=۸ \\ ۳\xrightarrow{g}۵\xrightarrow{f}۳: fog(۳)=۳ \\ ۷\xrightarrow{g}۹\xrightarrow{f}۸: fog(۷)=۸ \\ ۹\xrightarrow{g}۱۱\xrightarrow{f}۴: fog(۹)=۴\end{cases} =\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\} \\ gof=?\begin{cases} ۷\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}\times \\ ۵\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{g}۵: gof(۵)=۵ \\ ۹\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}\times \\ ۱۱\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{g}\times\end{cases} =\{(۵,۵)\}\end{cases}$$

**۲۴**

**الف**

$f(x)=x^۲-۵\ ,\ g(x)=\sqrt{x+۶}$

$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g: x+۶\geq ۰\to x\geq -۶\to D_g=[-۶,+\infty)$

$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x\geq -۶\ \underset{\text{اشتراک}}{\underset{\downarrow}{\text{و}}}\ \underbrace{\sqrt{x+۶}\in\mathbb{R}}_{\text{این بدیهی است!}}\}=[-۶,+\infty)$

$fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x+۶})=(\sqrt{x+۶})^۲-۵\xrightarrow[x\geq -۶]{\text{با فرض}} fog(x)=x+۶-۵=x+۱$

**ب**

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳}\ ,\ g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}\to\begin{cases}D_f:۲x-۳\geq ۰\to x\geq\frac{۳}{۲}\\ D_g:۳x-۵\neq ۰\to x\neq\frac{۵}{۳}\end{cases}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x\neq\frac{۵}{۳}\ ,\ \frac{۶}{۳x-۵}\in D_f\}$$

$\frac{۶}{۳x-۵}\in D_f$ یعنی حل نامعادلهٔ $\frac{۶}{۳x-۵}\geq\frac{۳}{۲}$ که معادل $\frac{۶}{۳x-۵}-\frac{۳}{۲}\geq ۰$ یا $\frac{۲۷-۹x}{۶x-۱۰}\geq ۰$ می‌باشد که بعد از تعیین علامت به جواب $(\frac{۵}{۳},۳]$ می‌رسیم.

$$\to D_{fog}=\{x\neq\frac{۵}{۳}\ ,\ x\in(\frac{۵}{۳},۳]\}=(\frac{۵}{۳},۳]$$

$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{۶}{۳x-۵})=\sqrt{۲(\frac{۶}{۳x-۵})-۳}=\sqrt{\frac{۲۷-۹x}{۳x-۵}}$$

البته می‌توانستیم دامنهٔ $fog$ را بعد از تشکیل ضابطهٔ آن نیز به‌دست آوریم.

**پ**

$$f(x)=\sqrt{x+۲}\ ,\ g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶}$$

$D_f:x+۲\geq ۰\to x\geq -۲\ ,\ D_g:x^۲-۱۶\geq ۰\to |x|\geq ۴\to x\geq ۴$ یا $x\leq -۴$

$$gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x+۲})=\sqrt{(\sqrt{x+۲})^۲-۱۶}\ \overset{\text{با فرض } x\geq -۲}{=\!=\!=}\ \sqrt{x-۱۴}$$

$$\xrightarrow[\text{دامنهٔ } gof]{\text{برای تعیین}} x-۱۴\geq ۰\to x\geq ۱۴\xrightarrow[x\geq -۲]{\text{اعمال شرط}} x\geq ۱۴\to D_{gof}=[۱۴,+\infty)$$

**ت**

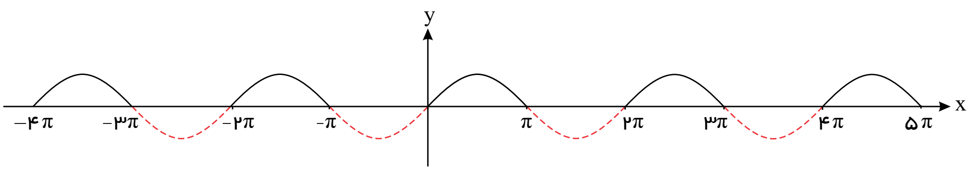
$$f(x)=\sin x\ ,\ g(x)=\sqrt{x}$$

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=x\geq ۰\to D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}$$

$=\{x\in\mathbb{R}\ ,\ \sin x\geq ۰\}=\{$تمام $x$ هایی که در نواحی ۱ و ۲ قرار می‌گیرند$\}$

$$\overset{\text{مانند}}{=\!=\!=}\cdots\cup[-۴\pi,-۳\pi]\cup[-۲\pi,-\pi]\cup[۰,\pi]\cup[۲\pi,۳\pi]\cup[۴\pi,۵\pi]\cup\cdots$$

برای درک بهتر موضوع با توجه به نمودار $y=\sin x$ بازه‌هایی که $\sin x$ نامنفی است را می‌توانیم ببینیم:




**۲۵**

الف)

$$\begin{cases}f(x)=۲x-۵\\ g(x)=x^۲-۳x+۸\end{cases}\to fog(x)=f(g(x))=f(x^۲-۳x+۸)=۲(x^۲-۳x+۸)-۵=۷$$

$\Rightarrow ۲x^۲-۶x+۱۱=۷\xrightarrow{\text{مرتب کن}}۲x^۲-۶x+۴=۰\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب، صفر است.}}x=۱$ یا $x=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۲}=۲$

ب)

$$\begin{cases}f(x)=۳x^۲+x-۱\\ g(x)=۱-۲x\end{cases}\to gof(x)=g(f(x))=g(۳x^۲+x-۱)=۱-۲(۳x^۲+x-۱)=-۵$$

$\Rightarrow -۶x^۲-۲x+۳=-۵\xrightarrow{\text{مرتب کن}}-۶x^۲-۲x-۸=۰\xrightarrow{\times(-۱)}۶x^۲+۲x+۸=۰\xrightarrow{\text{حل از }\Delta}\Delta=(۲)^۲-۴(۶)(۸)<۰\to$ فاقد جواب

**۲۶**

الف) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}\ :\ y=\frac{-۸x+۳}{۲}\xrightarrow{\times ۲}۲y=-۸x+۳\xrightarrow{-۳}-۸x=۲y-۳$

$$\xrightarrow{\div(-۸)}x=\frac{۲y-۳}{-۸}=\frac{-۱}{۴}y+\frac{۳}{۸}\xrightarrow{\text{حالا}}f^{-۱}(x)=\frac{-۱}{۴}x+\frac{۳}{۸}$$

ب) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}\ :\ y=-5-\sqrt{3x+1}\to y+5=-\sqrt{3x+1}$

$$\xrightarrow[\substack{\left(\substack{y+5\le 0\\ y\le -5}\right)\\ x\ge \frac{-1}{3}}]{\text{به توان ۲ برسان}}(y+5)^2=(3x+1)\xrightarrow{-1}(y+5)^2-1=3x\xrightarrow{\div 3}x=\frac{1}{3}(y+5)^2-\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا}}g^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x+5)^2-\frac{1}{3}$$

که با توجه به شرایط $y\le -5$ و $x\ge \frac{-1}{3}$، برای دامنه و برد تابع وارون، داریم:

$$D_{g^{-1}}=R_g=(-\infty,-5]\ ,\ R_{g^{-1}}=D_g=[-\frac{1}{3},+\infty)$$

**۲۷** در هر مورد وارون یکی از توابع را یافته (معمولاً آن تابعی که محاسبهٔ $x$ برحسب $y$ در آن ساده‌تر است) و نشان می‌دهیم که تابع وارون به‌دست آمده همان تابع دوم است.

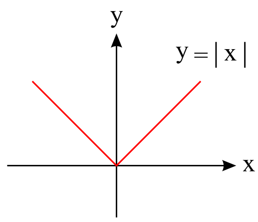
الف)
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-7}{2}x-3\\ g(x)=-\dfrac{2x+6}{7}\to y=-\dfrac{2x+6}{7}\xrightarrow{\times(-7)}-7y=2x+6\xrightarrow{-6}2x=-7y-6\\ \xrightarrow{\div 2}x=\dfrac{-7y-6}{2}=\dfrac{-7}{2}y-3\xrightarrow{\text{حالا}}g^{-1}(x)=\dfrac{-7}{2}x-3\to g^{-1}(x)=f(x)\ \checkmark\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f(x)=-\sqrt{x-8}\\ g(x)=8+x^2\ ;\ x\le 0\to y=8+x^2\xrightarrow{-8}x^2=y-8\xrightarrow{\text{جذر}}|x|=\sqrt{y-8}\\ \xrightarrow[|x|=-x]{\text{با توجه به } x\le 0}-x=\sqrt{y-8}\to x=-\sqrt{y-8}\xrightarrow{\text{حالا}}g^{-1}(x)=-\sqrt{x-8}=f(x)\ \checkmark\end{cases}$$

**۲۸**

**الف**

با توجه به نمودار



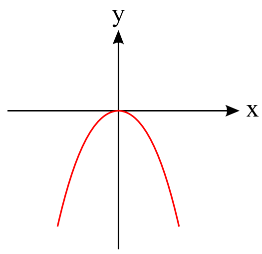

اگر دامنهٔ تابع را به یکی از دو فاصلهٔ $(-\infty,0]$ یا $[0,+\infty)$ محدود کنیم، آن‌گاه تابع مورد نظر یک‌به‌یک خواهد بود.

حالت اول: $\begin{cases} f(x)=|x|\\ x\ge 0\end{cases}\to f(x)=x\to y=x\to f^{-1}(x)=x$

حالت دوم: $\begin{cases} f(x)=|x|\\ x\le 0\end{cases}\to f(x)=-x\to y=-x\to x=-y\to f^{-1}(x)=-x$

**ب**

تابع $g(x)=-x^2$ که معرف سهمی




است که یک‌به‌یک نیست و با محدود کردن دامنهٔ آن به یکی از دو فاصلهٔ $[0,+\infty)$ یا $(-\infty,0]$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر می‌شود.

حالت اول:

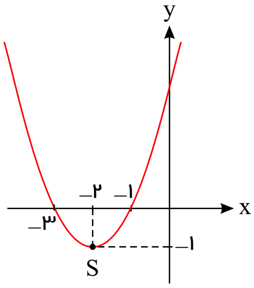
$$\begin{cases} g(x)=-x^2\\ x\ge 0\end{cases}\to y=-x^2\to x^2=-y\xrightarrow{\text{جذر}}|x|=\sqrt{-y}\xrightarrow[|x|=x]{x\ge 0}x=\sqrt{-y}\to g^{-1}(x)=\sqrt{-x}$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} g(x)=-x^2\\ x\le 0\end{cases}\to y=-x^2\to x^2=-y\xrightarrow{\text{جذر}}|x|=\sqrt{-y}\xrightarrow[|x|=-x]{x\le 0}x=-\sqrt{-y}\to g^{-1}(x)=-\sqrt{-x}$$

**پ**

سهمی $h(x)=x^2+4x+3$ نیز که می‌شود آن را به صورت $h(x)=(x+2)^2-1$ نوشت نموداری به شکل




داشته و در کل دامنهٔ خود غیر یک‌به‌یک است.

حال اگر دامنهٔ آن را از $\mathbb{R}$ به $[-2,+\infty)$ یا $(-\infty,-2]$ محدود کنیم، آن‌گاه با یکی از دو شاخهٔ سهمی مواجه بوده و تابعی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر داریم:

حالت اول:

$$\begin{cases} h(x)=(x+2)^2-1 \\ D_h=[-2,+\infty) \end{cases} \rightarrow y=(x+2)^2-1 \rightarrow (x+2)^2=y+1 \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$|x+2|=\sqrt{y+1} \xrightarrow[x+2\geq 0]{x\geq -2} x+2=\sqrt{y+1} \rightarrow x=\sqrt{y+1}-2 \rightarrow h^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-2$$

حالت دوم:

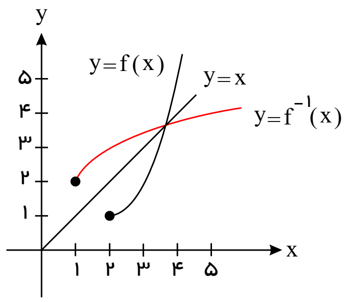
$$\begin{cases} h(x)=(x+2)^2-1 \\ D_h=(-\infty,-2] \end{cases} \rightarrow y=(x+2)^2-1 \rightarrow (x+2)^2=y+1 \xrightarrow{\text{جذر}}$$

$$|x+2|=\sqrt{y+1} \xrightarrow[x+2\leq 0]{x\leq -2} -(x+2)=\sqrt{y+1} \rightarrow x+2=-\sqrt{y+1} \rightarrow x=-\sqrt{y+1}-2 \rightarrow h^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}-2$$

**۲۹** تابع $f(x)=x^2-4x+5$ معرف سهمی $f(x)=(x-2)^2+1$ با محور تقارن $x_s=2$ می‌باشد که غیر یک‌به‌یک و وارون‌ناپذیر است.

حال اگر دامنهٔ تابع را به یکی از فاصله‌های $[x_s,+\infty)=[2,+\infty)$ یا $(-\infty,x_s]=(-\infty,2]$ محدود کنیم تابع $f$ یک‌به‌یک و وارون‌پذیر خواهد شد:

حالت اول:



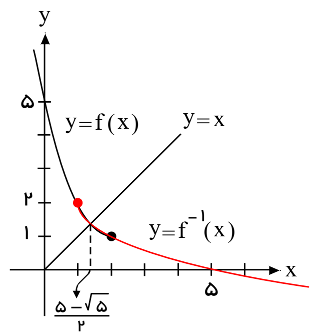

$$\begin{cases} f(x)=(x-2)^2+1 \\ D_f=[2,+\infty) \end{cases} \rightarrow y=(x-2)^2+1$$

$$\rightarrow (x-2)^2=y-1 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-2|=\sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow[x-2\geq 0]{\text{با توجه به } D_f} x-2=\sqrt{y-1} \rightarrow x=\sqrt{y-1}+2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$$

حالت دوم:




$$\begin{cases} f(x)=(x-2)^2+1 \\ D_f=(-\infty,2] \end{cases} \rightarrow y=(x-2)^2+1$$

$$\rightarrow (x-2)^2=y-1 \xrightarrow{\text{جذر}} |x-2|=\sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow[x-2\leq 0]{\text{با توجه به } D_f} -(x-2)=\sqrt{y-1} \rightarrow x-2=-\sqrt{y-1} \rightarrow x=-\sqrt{y-1}+2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}+2$$

**۳۰** الف)

برای محاسبهٔ $(fog)^{-1}(5)$ دو راه پیش‌رو داریم. یکی اینکه تابع مرکب $fog$ را محاسبه کرده و وارون آن را بیابیم و در نهایت به جای $x$های آن ۵ قرار دهیم. دیگر اینکه از رابطهٔ $(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$ استفاده کرده و با توجه به تابع وارون‌های $f^{-1}$ و $g^{-1}$، تابع مرکب $g^{-1}of^{-1}$ را محاسبه کرده و به‌جای $x$هایش ۵ قرار دهیم. ما هردو راهکار را انجام می‌دهیم:

روش اول:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \\ g(x)=x^۳ \end{cases} \to fog(x)=f(g(x))=f(x^۳)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \to fog(x)=\frac{۱}{۸}x^۳-۳$$

$$\xrightarrow{\text{حالا محاسبه } (fog)^{-1}} y=\frac{۱}{۸}x^۳-۳ \xrightarrow{+۳} \frac{۱}{۸}x^۳=y+۳ \xrightarrow{\times ۸} x^۳=۸y+۲۴$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم بگیر.}} x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴} \to (fog)^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴} \xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-1}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

حال، روش دوم را نیز امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳ \to y=\frac{۱}{۸}x-۳ \to \frac{۱}{۸}x=y+۳ \to x=۸y+۲۴ \to f^{-1}(x)=۸x+۲۴ \\ g(x)=x^۳ \to y=x^۳ \to x=\sqrt[۳]{y} \to g^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حالا می‌نویسیم}} (fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))=g^{-1}(۸x+۲۴)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$$

$$\xrightarrow[x=۵]{\text{قرار بده}} (fog)^{-1}(۵)=\sqrt[۳]{۴۰+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

حال، با توجه به ضابطه‌های $f^{-1}$ و $g^{-1}$ موارد (ب) و (پ) را به راحتی می‌توانیم محاسبه کنیم:

ب) $(f^{-1}of^{-1})(۶)=f^{-1}(f^{-1}(۶)) \xrightarrow[f^{-1}(۶)=۴۸+۲۴=۷۲]{f^{-1}(x)=۸x+۲۴} f^{-1}(۷۲)=۸(۷۲)+۲۴=۶۰۰$

پ) $(g^{-1}of^{-1})(۵)=g^{-1}(f^{-1}(۵)) \xrightarrow[f^{-1}(۵)=۴۰+۲۴=۶۴]{f^{-1}(x)=۸x+۲۴} g^{-1}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

همانطور که می‌بینید جواب‌های موارد (الف) و (پ) یکی هستند!

**۳۱** ضابطهٔ $gof$ را به شکل $y=gof(x)=g(f(x))=\begin{cases} ۳f(x)-۲ & ; f(x)>۰ \\ ۱-۴f(x) & ; f(x)\le ۰ \end{cases}$ نوشته و با توجه به ضابطهٔ $f$، به‌دنبال $x$هایی می‌گردیم که حالت‌های $f(x)>۰$ و $f(x)\le ۰$ برقرار باشد. با اندکی تأمل درمی‌یابیم که حالت $f(x)>۰$ تنها برای $x>۱$ و حالت $f(x)\le ۰$ یک‌بار برای $۰<x\le ۱$ و بار دیگر برای $x\le ۰$ رخ می‌دهد. از این‌رو می‌بایستی در ضابطهٔ $gof$، برای $x>۱$ از $f(x)=x^۲-۱$، برای $۰<x\le ۱$ نیز از $f(x)=x^۲-۱$ و بالاخره برای $x\le ۰$ از $f(x)=x-۱$ استفاده کنیم. در این صورت داریم:

$$y=gof(x)=\begin{cases} ۳(x^۲-۱)-۲ & ; x>۱ \\ ۱-۴(x^۲-۱) & ; ۰<x\le ۱ \\ ۱-۴(x-۱) & ; x\le ۰ \end{cases}=\begin{cases} ۳x^۲-۵ & ; x>۱ \\ -۴x^۲+۵ & ; ۰<x\le ۱ \\ -۴x+۵ & ; x\le ۰ \end{cases}$$

**۳۲** باتوجه به تعریف تابع ترکیب $fog$، ضابطهٔ $fog$ را به شکل $y=fog(x)=f(g(x))=\begin{cases} ۲g(x)-۳ & ; g(x)>۰ \\ (g(x))^۲-۱ & ; g(x)\le ۰ \end{cases}$ می‌نویسیم.

حال در ضابطهٔ $g$ بررسی می‌کنیم ببینیم در چه بازه‌ای از $x$، $g(x)>۰$ و در چه بازه‌ای $g(x)\le ۰$ است. این تابع برای $x\ge ۲$ در شرط $g(x)=x^۲+۱>۰$ و برای $۰\le x<۲$ در شرط $g(x)=-۲\sqrt{x}\le ۰$ صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$y=fog(x)=f(g(x))=\begin{cases} ۲g(x)-۳ & ; g(x)>۰ \\ (g(x))^۲-۱ & ; g(x)\le ۰ \end{cases}=\begin{cases} ۲(x^۲+۱)-۳ & ; x\ge ۲ \\ (-۲\sqrt{x})^۲-۱ & ; ۰\le x<۲ \end{cases}$$

$$=\begin{cases} ۲x^۲-۱ & ; x\ge ۲ \\ ۴x-۱ & ; ۰\le x<۲ \end{cases}$$

**۳۳** براساس تعریف توابع مرکب داریم:

$$\begin{cases} fog(x)=f(g(x))=f(۲x+۱)=(۲x+۱)^۲-(۲x+۱)=۴x^۲+۴x+۱-۲x-۱=۴x^۲+۲x \\ gof(x)=g(f(x))=g(x^۲-x)=۲(x^۲-x)+۱=۲x^۲-۲x+۱ \end{cases}$$

$$fog(x)=gof(x) \to ۴x^۲+۲x=۲x^۲-۲x+۱ \xrightarrow{\text{مرتب می‌کنیم.}} ۲x^۲+۴x-۱=۰$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله درجه ۲ از روش دلتا}} \Delta=b^۲-۴ac=(۴)^۲-۴(۲)(-۱)=۱۶+۸=۲۴$$

$$\to x_{1,۲}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۴\pm\sqrt{۲۴}}{۲(۲)}=\frac{-۴\pm ۲\sqrt{۶}}{۴}=\frac{-۲\pm\sqrt{۶}}{۲}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-۲+\sqrt{۶}}{۲} \\ \text{یا} \quad (\text{ریشه‌های معادله}) \\ x_2 = \dfrac{-۲-\sqrt{۶}}{۲} \end{cases}$$

**۳۴** بیایید ابتدا توابع $g = f^۲ + f$ و $f^{-۱}$ را باتوجه به اعضای تابع $f$ به‌دست آوریم:

$$g = f^۲ + f = \{(-۱, ۱^۲+۱), (۱, (-۱)^۲ + (-۱)), (۲, ۰^۲ + ۰), (۴, (-۲)^۲ + (-۲))\}$$

$$= \{(-۱, ۲), (۱, ۰), (۲, ۰), (۴, ۲)\}\ ,\ f^{-۱} = \{(۱, -۱), (-۱, ۱), (۰, ۲), (-۲, ۴)\}$$

اکنون با توجه به تعریف تابع ترکیب و نیز دامنه‌های $h = fog$ و $k = gof^{-۱}$، اعضای این توابع را به‌دست می‌آوریم:

$$D_h = D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{-۱, ۴\}\ ,\ D_k = D_{gof^{-۱}} = \{x \in D_{f^{-۱}} | f^{-۱}(x) \in D_g\}$$

$$= \{۱, -۱, ۰, -۲\}$$

$$h = fog = \{(-۱, f(g(-۱))), (۴, f(g(۴)))\} = \{(-۱, f(۲)), (۴, f(۲))\} = \{(-۱, ۰), (۴, ۰)\}$$

$$k = gof^{-۱} = \{(۱, gof^{-۱}(۱)), (-۱, gof^{-۱}(-۱)), (۰, gof^{-۱}(۰)), (-۲, gof^{-۱}(-۲))\}$$

$$= \{(۱, g(-۱)), (-۱, g(۱)), (۰, g(۲)), (-۲, g(۴))\} = \{(۱, ۲), (-۱, ۰), (۰, ۰), (-۲, ۲)\}$$

**۳۵** ابتدا باتوجه به ضابطه‌های $f$ و $g$، ضابطهٔ تابع ترکیب $gof$ را می‌یابیم و سپس مرتب‌شدهٔ آن را با عبارت معادل‌اش، یعنی $-x^۲ - ۳x + ۷$، برابر قرار می‌دهیم. داریم:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x+b) = a(x+b)^۲ - b(x+b) + c$$

$$= ax^۲ + ۲abx + ab^۲ - bx - b^۲ + c = ax^۲ + (۲ab - b)x + (ab^۲ - b^۲ + c)$$

$$\xrightarrow{\text{حال باید}} ax^۲ + (۲ab-b)x + (ab^۲ - b^۲ + c) = -x^۲ - ۳x + ۷ \rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ ۲ab - b = -۳ \\ ab^۲ - b^۲ + c = ۷ \end{cases}$$

روند محاسبهٔ پارامترهای $b$ و $c$ اینگونه است:

$$a = -۱ \xrightarrow{۲ab-b=-۳} -۲b - b = -۳ \rightarrow -۳b = -۳ \rightarrow b = ۱$$

$$\begin{cases} a = -۱ \\ b = ۱ \end{cases} \xrightarrow{ab-b^۲+c=۷} -۱ - ۱ + c = ۷ \rightarrow c = ۹$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۱ \\ c = ۹ \end{cases}$$

**۳۶** ابتدا باید تابع $g = f^۲ + f$ را به‌دست آوریم. دامنهٔ این تابع همان دامنهٔ $f$ می‌باشد. (زیرا: $D_{f^۲} = D_f$ و $D_g = D_{f^۲} \cap D_f = D_f$)

$$g = f^۲ + f = \{(-۱, f^۲(-۱) + f(-۱)), (۲, f^۲(۲) + f(۲)), (۰, f^۲(۰) + f(۰)), (۶, f^۲(۶) + f(۶))\}$$

$$= \{(-۱, ۱۲), (۲, ۰), (۰, ۶), (۶, ۰)\}$$

در ادامه تابع ترکیب $h = gof$ را باتوجه به تعریف و دامنهٔ تابع $gof$ محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$D_h = D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{۲, ۰, ۶\}$$

$$h = gof = ? \begin{cases} gof(۲) = g(f(۲)) = g(-۱) = ۱۲ (۲ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{g} ۱۲ : ۲ \xrightarrow{gof} ۱۲) \\ gof(۰) = g(f(۰)) = g(۲) = ۰ (۰ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} ۰ : ۰ \xrightarrow{gof} ۰) \\ gof(۶) = g(f(۶)) = g(۰) = ۶ (۶ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{g} ۶ : ۶ \xrightarrow{gof} ۶) \end{cases}$$

بنابراین تابع $h$ به‌صورت $h = \{(۲, ۱۲), (۰, ۰), (۶, ۶)\}$ است.

حتماً درک کرده‌اید که:

$$gof(-۱) = g(f(-۱)) = g(۳) = x \xrightarrow{\text{زیرا}} ۳ \notin D_g$$

**۳۷** از آن‌جایی‌که از تابع $f$ به‌جز خطی بودن اطلاع دیگری در دست نیست می‌بایستی ضابطهٔ آن را به‌صورت $f(x) = ax + b$ درنظر گرفته و تابع ترکیب $fof(x)$ را به‌دست آوریم:

$$fof(x) = f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b) + b = a^۲x + ab + b$$

حال باید این تابع را با تابع خطی $y = ۲ + ۳x$ مساوی قرار داده و ضرایب $a$ و $b$ را به‌دست آوریم؛ داریم:

$$a^۲x + ab + b = ۳x + ۲ \xrightarrow[\text{اعداد ثابت باهم مساوی‌اند.}]{\text{ضریب } x \text{ ها باهم و}} \begin{cases} a^۲ = ۳ \rightarrow a = \sqrt{۳} \text{ یا } -\sqrt{۳} \\ ab + b = ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\sqrt{۳}\to\sqrt{۳}b+b=۲\to b(\sqrt{۳}+۱)=۲\to b=\dfrac{۲}{۱+\sqrt{۳}} \\ \text{یا} \\ a=-\sqrt{۳}\to-\sqrt{۳}b+b=۲\to b(-\sqrt{۳}+۱)=۲\to b=\dfrac{۲}{۱-\sqrt{۳}} \end{cases}$$

درنتیجه ضابطهٔ تابع خطی $f$ می‌تواند به‌صورت $f(x)=\sqrt{۳}x+\dfrac{۲}{۱+\sqrt{۳}}$ یا $f(x)=-\sqrt{۳}x+\dfrac{۲}{۱-\sqrt{۳}}$ باشد.

**۳۸** برای از بین بردن علامت منفی در صورت کسر ضابطهٔ $f$، ابتدا ضابطهٔ آن را به فرم $f(x)=\dfrac{x}{۱-x}$ نوشته و سپس باتوجه به تعریف $fof(x)=f(f(x))$ ضابطهٔ تابع مرکب $fof$ را به‌دست می‌آوریم:

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{x}{۱-x})=\frac{(\frac{x}{۱-x})}{۱-(\frac{x}{۱-x})}=\frac{\frac{x}{۱-x}}{\frac{۱-x-x}{۱-x}}=\frac{\frac{x}{۱-x}}{\frac{۱-۲x}{۱-x}}$$

$$\xrightarrow[\text{صورت و مخرج را در } (۱-x) \text{ ضرب می‌کنیم.}]{\text{باتوجه به شرط } ۱-x\neq ۰\ (x\neq ۱)} fof(x)=\frac{x}{۱-۲x}$$

و اما درمورد دامنهٔ تابع $fof$، باتوجه به ضابطهٔ به‌دست آمده می‌بایستی $۱-۲x\neq ۰$ و درنتیجه $x\neq\dfrac{۱}{۲}$ باشد و البته با درنظر گرفتن آن شرط $x\neq ۱$ به این نتیجه می‌رسیم که دامنهٔ $fof$ به‌صورت $x\neq ۱,\dfrac{۱}{۲}$ یا $D_{fof}=\mathbb{R}-\{۱,\dfrac{۱}{۲}\}$ می‌باشد.

**۳۹** ابتدا توجه داریم که: $R_g=\{-۱,۲,۱,-۲\}$ و $D_g=\{۳,۰,۴,۱\}$ و $D_f=\mathbb{R}-\{-۲\}$

اکنون با توجه به تعریف‌های $fog(x)=f(g(x))$ و $D_{fog}=\{x\in D_g|g(x)\in D_f\}$، درمی‌یابیم که تابع $fog$ روی آن‌دسته از دامنه‌های $g$ اثر می‌کند که برد متناظر با آن دامنه متعلق به دامنهٔ تابع $f$ بوده باشد. براین اساس داریم:

$$fog(۳)=f(g(۳))=f(-۱)\overset{\text{ضابطهٔ } f}{=\!=\!=}\frac{۲(-۱)-۱}{-۱+۲}=-۳(۳\xrightarrow{g}-۱\xrightarrow{f}-۳:۳\xrightarrow{fog}-۳)$$

$$fog(۰)=f(g(۰))=f(۲)\overset{\text{ضابطهٔ } f}{=\!=\!=}\frac{۲(۲)-۱}{۲+۲}=\frac{۳}{۴}(۰\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}\frac{۳}{۴}:۰\xrightarrow{fog}\frac{۳}{۴})$$

$$fog(۴)=f(g(۴))=f(۱)\overset{\text{ضابطهٔ } f}{=\!=\!=}\frac{۲(۱)-۱}{۱+۲}=\frac{۱}{۳}(۴\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}\frac{۱}{۳}:۴\xrightarrow{fog}\frac{۱}{۳})$$

$$fog(۱)=f(g(۱))=f(-۲)=\frac{۲(-۲)-۱}{-۲+۲}=\frac{-۵}{۰}\ \times\ (-۲\notin D_f)$$

بنابراین می‌بینیم که $D_{fog}=\{۳,۰,۴\}$، $R_{fog}=\{-۳,\dfrac{۳}{۴},\dfrac{۱}{۳}\}$ و لذا $fog=\{(۳,-۳),(۰,\dfrac{۳}{۴}),(۴,\dfrac{۱}{۳})\}$ می‌باشد.

**۴۰** برای رسیدن به مقدار $g(۳)$، باید ضابطهٔ $g(x)$ را به‌دست آوریم. برای این منظور باتوجه به تعریف $gof(x)=g(f(x))$ و شرایط موجود داریم:

$$g(f(x))=x^۲+\frac{۱}{x^۲}\xrightarrow{f(x)=x+\frac{۱}{x}}g(x+\frac{۱}{x})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}\quad(\star)$$

حال اگر اتحاد $(x+\dfrac{۱}{x})^۲=x^۲+\dfrac{۱}{x^۲}+۲$ را به‌کار بگیریم، داریم:

$$x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲\xrightarrow{(\star)}g(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲$$

حال دیگر معلوم است که با فرض $x+\dfrac{۱}{x}=t$، ضابطهٔ $g$ به‌صورت $g(t)=t^۲-۲$ یا $g(x)=x^۲-۲$ بوده و برای $g(۳)$ داریم:

$$g(۳)=(۳)^۲-۲=۹-۲=۷$$

**۴۱** برای تابع مرکب $gof^{-۱}$ نیاز به توابع $f^{-۱}$ و $g$ داریم. تابع $f^{-۱}$ را می‌توانیم از روی تابع $f$ و با جابه‌جا کردن جای مؤلفه‌های آن به‌دست آوریم:

$$f^{-۱}=\{(-۱,۴),(۱,۳),(۲,۵)\}\ ,\ g=\{(-۱,۲),(۴,۰),(۵,۳)\}$$

$$\begin{cases} gof^{-۱}(-۱)=g(f^{-۱}(-۱))=g(۴)=۰\ (-۱\xrightarrow{f^{-۱}}۴\xrightarrow{g}۰:\ -۱\xrightarrow{gof^{-۱}}۰) \\ gof^{-۱}(۱)=g(f^{-۱}(۱))=g(۳)\ \times\ (\text{زیرا}:\ ۳\notin D_g) \\ gof^{-۱}(۲)=g(f^{-۱}(۲))=g(۵)=۳\ (۲\xrightarrow{f^{-۱}}۵\xrightarrow{g}۳:\ ۲\xrightarrow{gof^{-۱}}۳) \end{cases}$$

$$\to gof^{-۱}=\{(-۱,۰),(۲,۳)\}$$

و حالا برای تابع مرکب $fog^{-۱}$ داریم:

$g^{-1} = \{(۲,-۱),(۰,۴),(۳,۵)\}\ ,\ f = \{(۴,-۱),(۳,۱),(۵,۲)\}$

$$\begin{cases} fog^{-1}(۲) = f(g^{-1}(۲)) = f(-۱)\ \times\ (-۱ \notin D_f) \\ fog^{-1}(۰) = f(g^{-1}(۰)) = f(۴) = -۱\ (۰ \xrightarrow{g^{-1}} ۴ \xrightarrow{f} -۱ :\ ۰ \xrightarrow{fog^{-1}} -۱) \\ fog^{-1}(۳) = f(g^{-1}(۳)) = f(۵) = ۲\ (۳ \xrightarrow{g^{-1}} ۵ \xrightarrow{f} ۲ :\ ۳ \xrightarrow{fog^{-1}} ۲) \end{cases}$$

$\rightarrow fog^{-1} = \{(۰,-۱),(۳,۲)\}$

۴۲ یک روش برای یافتن دامنهٔ تابع ترکیب $fog$ استفاده از رابطهٔ $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$ است. برای استفاده از این روش ابتدا باید دامنهٔ توابع $f$ و $g$ را به‌دست آوریم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f : ۱ - ۲x \geq ۰ \rightarrow ۲x \leq ۱ \rightarrow x \leq \frac{۱}{۲} \rightarrow D_f = (-\infty, \frac{۱}{۲}] \\ g : x + ۲ \neq ۰ \rightarrow x \neq -۲ \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-۲\} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{-۲\} | \frac{۱ - ۳x}{x + ۲} \leq \frac{۱}{۲}\} = ?$$

حالا در این مرحله مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{۱-۳x}{x+۲} \leq \frac{۱}{۲}$ را یافته و اشتراک آن با $\mathbb{R} - \{-۲\}$ را به‌عنوان دامنهٔ $fog$ معرفی می‌کنیم. داریم:

$$\frac{۱ - ۳x}{x + ۲} - \frac{۱}{۲} \leq ۰ \rightarrow \frac{۲ - ۶x - x - ۲}{۲x + ۴} \leq ۰ \rightarrow \frac{-۷x}{۲x + ۴} \leq ۰$$

| $x$ | | $-۲$ | | $۰$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{-۷x}{۲x+۴}$ | $-$ | ت.ن | $+$ | | $-$ |

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $= x \geq ۰\ ,\ x < -۲$

$$\xrightarrow[\mathbb{R}-\{-۲\}]{\text{اشتراک با}} D_{fog} = (-\infty, -۲) \cup [۰, +\infty)$$

۴۳ برای $fof^{-1}(a)$، $a$ از دامنهٔ $f^{-1}$ انتخاب می‌شود در حالی‌که برای $f^{-1}of(a)$، $a$ از دامنهٔ $f$ انتخاب می‌شود:

$f = \{(۲,-۱),(۱,۳),(۰,۴)\}\quad ,\quad f^{-1} = \{(-۱,۲),(۳,۱),(۴,۰)\}$

$$\begin{cases} fof^{-1}(-۱) :\ -۱ \xrightarrow{f^{-1}} ۲ \xrightarrow{f} -۱ :\ -۱ \xrightarrow{fof^{-1}} -۱ \\ fof^{-1}(۳) :\ ۳ \xrightarrow{f^{-1}} ۱ \xrightarrow{f} ۳ :\ ۳ \xrightarrow{fof^{-1}} ۳ \\ fof^{-1}(۴) :\ ۴ \xrightarrow{f^{-1}} ۰ \xrightarrow{f} ۴ :\ ۴ \xrightarrow{fof^{-1}} ۴ \end{cases} \Rightarrow fof^{-1} = \{(-۱,-۱),(۳,۳),(۴,۴)\}$$

$$\begin{cases} f^{-1}of(۲) :\ ۲ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{f^{-1}} ۲ :\ ۲ \xrightarrow{f^{-1}of} ۲ \\ f^{-1}of(۱) :\ ۱ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{f^{-1}} ۱ :\ ۱ \xrightarrow{f^{-1}of} ۱ \\ f^{-1}of(۰) :\ ۰ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{f^{-1}} ۰ :\ ۰ \xrightarrow{f^{-1}of} ۰ \end{cases} \Rightarrow f^{-1}of = \{(۲,۲),(۱,۱),(۰,۰)\}$$

همان‌طورکه می‌بینید توابع ترکیب $fof^{-1}$ و $f^{-1}of$ هردو همانی بوده ولی باهم برابر نیستند.

۴۴ تابع $f$ اکیداً صعودی است. بنابراین برای هر $a$ و $b$ از دامنهٔ $f$، اگر $a > b$ باشد می‌توان نوشت:

$$a > b \rightarrow f(a) > f(b) \xrightarrow{\text{حال اکیداً صعودی بودن } g \text{ را اعمال می‌کنیم.}} g(f(a)) > g(f(b))$$

$$\xrightarrow{\text{براساس تعریف تابع ترکیب } gof} gof(a) > gof(b) \rightarrow$$ $gof$ اکیداً صعودی است.

این‌بار اکیداً صعودی بودن را با $g$ آغاز می‌کنیم. برای هر $a$ و $b$ از دامنهٔ $g$، اگر $a > b$ باشد می‌توان نوشت:

$$a > b \rightarrow g(a) > g(b) \xrightarrow{\text{حال اکیداً صعودی بودن } f \text{ را اعمال می‌کنیم.}} f(g(a)) > f(g(b))$$

$$\xrightarrow{\text{براساس تعریف تابع ترکیب } fog} fog(a) > fog(b) \rightarrow$$ $fog$ اکیداً صعودی است.

۴۵ $f$ اکیداً نزولی است. بنابراین برای هر $a$ و $b$ از دامنهٔ $f$، اگر $a > b$، آن‌گاه داریم:

$$a > b \rightarrow f(a) < f(b) \xrightarrow{\text{حالا اکیداً نزولی بودن } g \text{ را اعمال می‌کنیم.}} g(f(a)) > g(f(b))$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به تعریف تابع ترکیب } gof} gof(a) > gof(b)$$

از $a > b$ به $gof(a) > gof(b)$ رسیدیم و این یعنی $gof$ اکیداً صعودی است.

این‌بار کار را با اکیداً نزولی بودن $g$ شروع می‌کنیم. برای هر $a$ و $b$ از دامنهٔ $g$، اگر $a > b$، آن‌گاه:

$$a>b \rightarrow g(a)<g(b) \xrightarrow{\text{حال اکیداً نزولی بودن } f \text{ را اعمال می‌کنیم.}} f(g(a))>f(g(b)) \xrightarrow{\text{براساس تعریف تابع ترکیب } fog} fog(a)>fog(b)$$

از $a>b$ به $fog(a)>fog(b)$ رسیدیم و این یعنی $fog$ صعودی اکید است.

**۴۶** $f$ تابعی اکیداً صعودی است. لذا برای هر $a$ و $b$ از $D_f$ داریم:

$$a>b \rightarrow f(a)>f(b) \xrightarrow{g \text{ تابعی اکیداً نزولی است.}} g(f(a))<g(f(b)) \xrightarrow{\text{باتوجه به تعریف } g(f(x))=gof(x)} gof(a)<gof(b) \rightarrow$$ تابع $gof$ اکیداً نزولی است.

حال این‌بار فرض می‌کنیم $g$ تابعی اکیداً نزولی است. بنابراین برای هر $a$ و $b$ از $D_f$ داریم:

$$a>b \rightarrow g(a)<g(b) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی است.}} f(g(a))<f(g(b)) \xrightarrow{\text{باتوجه به تعریف } f(g(x))=fog(x)} fog(a)<fog(b) \rightarrow$$ تابع $fog$ اکیداً نزولی است.

از این مسأله نتیجه می‌گیریم که اگر بین دو تابع $f$ و $g$، یکی صعودی اکید و دیگری نزولی اکید باشد تابع‌های ترکیب $fog$ و $gof$ هردو نزولی اکید خواهند بود.

**۴۷** اگر تابع $h$ را به شکل $h(x)=۹^x-۳^{x+۱}=(۳^x)^۲-۳\times ۳^x$ بازنویسی کنیم به روشنی می‌توانیم ببینیم که با فرض $f(x)=x^۲-۳x$ و $g(x)=۳^x$، تابع ترکیب $fog(x)$ همان تابع $h(x)$ خواهد بود.:

$$\begin{cases} f(x)=x^۲-۳x \\ g(x)=۳^x \end{cases} \rightarrow fog(x)=f(g(x))=f(۳^x)=(۳^x)^۲-۳(۳^x)$$

$$=(۳^۲)^x-۳^{۱+x}=۹^x-۳^{x+۱}=h(x)$$

**۴۸** ابتدا اکیداً صعودی بودن $fog$ را باتوجه به شرایط مسأله اثبات می‌کنیم. برای هر $a$ و $b$ از $D_g$، اگر $a>b$، آن‌گاه داریم:

$$a>b \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(a)>g(b) \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(g(a))>f(g(b)) \rightarrow fog(a)>fog(b) \rightarrow$$ $fog$ اکیداً صعودی است.

سپس با فرض $h=fog$ و توجه به رابطهٔ $h^{-۱}=(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$ و با درنظر گرفتن این نکته که معکوس هر تابع اکیداً صعودی خود نیز اکیداً صعودی است، اکیداً صعودی بودن $h^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$ باتوجه به اکیداً صعودی بودن $h=fog$ به‌راحتی قابل توجیه خواهد بود.

همین روند را می‌توان درمورد تابع ترکیب و اکیداً صعودی $h=gof$ نیز انجام داد. تابع $h=gof$ به‌دلیل اکیداً صعودی بودن توابع $f$ و $g$ اکیداً صعودی بوده و معکوس آن یعنی $h^{-۱}=(gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱}$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود.

**۴۹** در هر حالت تابع‌های ترکیب $fog$ و $gof$ را به‌دست آورده و باتوجه به دامنهٔ مربوطه ساده می‌کنیم تا معلوم شود در کدام مورد تابع $h$ به‌دست می‌آید:

الف) $$\begin{cases} fog(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-۲})=(\sqrt{x-۲})^۲ \overset{(x\geq ۲)}{=\!=} x-۲=h(x) \\ gof(x)=g(f(x))=g(x^۲)=\sqrt{x^۲-۲}\neq h(x) \end{cases}$$

ب) $$\begin{cases} fog(x)=f(g(x))=f((x-۲)^۲)=\sqrt{(x-۲)^۲} \overset{\sqrt{u^۲}=|u|}{=\!=} |x-۲|\neq h(x) \\ gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x}-۲)^۲ \overset{(x\geq ۰)}{=\!=} x-۴\sqrt{x}+۴\neq h(x) \end{cases}$$

بنابراین تابع $h(x)=x-۲$ را می‌توان از ترکیب توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ به‌صورت $h(x)=fog(x)$ به‌دست آورد.

**۵۰** باتوجه به رابطهٔ $f^{-۱}(g^{-۱}of^{-۱}(۰))=۲$ و با فرض $a=g^{-۱}of^{-۱}(۰)$ داریم:

$$f^{-۱}(a)=۲ \rightarrow a=f(۲) \xrightarrow{\text{از ضابطهٔ } f} a=۴-۶=-۲ \rightarrow g^{-۱}of^{-۱}(۰)=-۲$$

اکنون باتوجه به رابطهٔ $g^{-۱}(f^{-۱}(۰))=-۲$ و با فرض $f^{-۱}(۰)=b$ داریم:

$$g^{-۱}(b)=-۲ \rightarrow b=g(-۲) \xrightarrow{\text{از ضابطهٔ } g} b=۴-۲m \rightarrow f^{-۱}(۰)=۴-۲m \rightarrow f(۴-۲m)=۰$$

$$\xrightarrow{\text{از ضابطهٔ } f} (۴-۲m)^۲-۳(۴-۲m)=۰ \xrightarrow{\text{فاکتور از } (۴-۲m)} (۴-۲m)(۴-۲m-۳)=۰$$

$$\rightarrow (۴-۲m)(۱-۲m)=۰ \xrightarrow{\text{ویژگی حاصل‌ضرب صفر}} \begin{cases} ۴-۲m=۰ \\ \text{یا} \\ ۱-۲m=۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ \text{یا} \\ m=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

**۵۱** کار را با محاسبه و ساده کردن تابع ترکیب $fof$ آغاز می‌کنیم:

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{ax+b}{cx+d})=\frac{a(\frac{ax+b}{cx+d})+b}{c(\frac{ax+b}{cx+d})+d}=\frac{\frac{a^2x+ab+bcx+bd}{cx+d}}{\frac{acx+bc+cdx+d^2}{cx+d}}$$

$$=\frac{\frac{(a^2+bc)x+(a+d)b}{cx+d}}{\frac{(a+d)cx+bc+d^2}{cx+d}}\xrightarrow{cx+d\neq 0} fof(x)=\frac{(a^2+bc)x+(a+d)b}{(a+d)cx+bc+d^2}\overset{\text{قرار است که}}{=\!=\!=}x$$

با درنگی کوتاه روی تساوی اخیر، اگر $a+d=0$ (یا $a=-d$) باشد، آن‌گاه ضابطهٔ ساده‌شدهٔ $fof(x)$ برابر تابع همانی $x$ می‌شود:

$$a+d=0 \text{ یا } a=-d\to fof(x)=\frac{(a^2+bc)x}{bc+a^2}=x$$

بنابراین اگر در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، رابطهٔ $a+d=0$ (یا $a=-d$) برقرار باشد ترکیب تابع با خودش برابر تابع همانی می‌شود. مثلاً برای $f(x)=\frac{x}{x-1}$ داریم: $fof(x)=x$

(۵۲) ابتدا تابع $fof$ را به‌دست می‌آوریم:

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{x+2}{x-1})=\frac{(\frac{x+2}{x-1})+2}{(\frac{x+2}{x-1})-1}=\frac{\frac{x+2+2x-2}{x-1}}{\frac{x+2-x+1}{x-1}}=\frac{\frac{3x}{x-1}}{\frac{3}{x-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت و مخرج را در } (x-1) \text{ ضرب می‌کنیم. } (x\neq 1)} fof(x)=\frac{3x}{3}=x$$

می‌بینیم که تابع $fof(x)$ یک تابع همانی است. به همین دلیل هم محاسبهٔ ضابطهٔ تابع $fofof$ به‌راحتی قابل انجام خواهد بود؛ داریم:

$$fofof(x)=f(\underbrace{fof(x)}_{\text{برابر } x})=f(x)=\frac{x+2}{x-1}$$

درنتیجه برای هر تابع مانند $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ که شرط $fof(x)=x$ را داراست، حاصل تابع ترکیبی $\underbrace{fofof\cdots of(x)}_{k \text{ مرتبه}}$ برای $k$های زوج برابر تابع همانی $x$ و برای $k$های فرد برابر خود $f(x)$ خواهد بود.

(۵۳) ابتدا دقت کنید که ماشین $x\to\boxed{f}\to\boxed{g}\to x$ به این معناست که $gof(x)=x$ است. (زیرا طبق این ماشین تابع $f$، $x$ را به $f(x)$ و تابع $g$، $f(x)$ را به $x$ تبدیل می‌کند.)

بنابراین باتوجه به معکوس‌پذیر بودن تابع $g$، تابع‌های $f$ و $g$ وارون یکدیگر بوده و داریم:

$$\begin{cases} gof(3)=3 \\ g(a)=3\end{cases}\to\begin{cases} g(f(3))=3 \\ g(a)=3\end{cases}\xrightarrow{\text{تابع } b \text{ یک‌به‌یک است.}} f(3)=a\xrightarrow{\text{باتوجه به ضابطهٔ } f} a=f(3)=\frac{5(3)+6}{2(3)-1}=\frac{21}{5}$$

(۵۴) ابتدا توجه کنید که اگر $g^{-1}(a)=0$، آن‌گاه $g(0)=a$ است. حال اگر شرط $(g^{-1}of^{-1}og^{-1})(-1)=0$ را به شکل $g^{-1}(f^{-1}og^{-1}(-1))=0$ نوشته و فرض کنیم $f^{-1}og^{-1}(-1)=a$ داریم:

$$g^{-1}(a)=0\to g(0)=a\xrightarrow[g(0)=-2]{\text{از ضابطهٔ } g} a=-2\to f^{-1}og^{-1}(-1)=-2$$

حال اگر دوباره رابطهٔ $f^{-1}og^{-1}(-1)=-2$ به شکل $f^{-1}(g^{-1}(-1))=-2$ نوشته و فرض کنیم $g^{-1}(-1)=b$ است، داریم:

$$f^{-1}(b)=-2\to f(-2)=b\xrightarrow[f(-2)=-1]{\text{از ضابطهٔ } f} b=-1\to g^{-1}(-1)=-1$$

$$\to g(-1)=-1\xrightarrow{\text{از ضابطهٔ } g} 1-m-2=-1\to m=0$$

(۵۵) ابتدا باید ضابطهٔ $f^{-1}$ را به‌دست آوریم:

$$f(x)=x+1: y=x+1\to x=y-1\to f^{-1}(x)=x-1$$

حال تابع ترکیب $gof^{-1}$ را تشکیل داده و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} g(x)=2x^2-3x \\ f^{-1}(x)=x-1\end{cases}\to (gof^{-1})(x)=g(f^{-1}(x))=g(x-1)=2(x-1)^2-3(x-1)=0$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم.}]{\text{از } (x-1)} (x-1)(2(x-1)-3)=0\to\begin{cases} x-1=0\to x=1 \\ \text{یا} \\ 2(x-1)-3=0\to x-1=\frac{3}{2}\to x=\frac{5}{2}\end{cases}$$

بنابراین $x=1$ و $x=\frac{5}{2}$، صفرها یا ریشه‌های تابع $gof^{-1}$ هستند.

(۵۶) در نگاه اول ممکن است باتوجه به وجود روابط $fof^{-1}(x)=x$ و $f^{-1}of(x)=x$ تصور کنیم که توابع $fof^{-1}$ و $f^{-1}of$ به‌دلیل همانی بودن، همواره باهم برابرند که البته تصور غلطی است. حقیقت در دامنهٔ این توابع نهان است.

$$D_{fof^{-1}}=\{x\in D_{f^{-1}}|f^{-1}(x)\in D_f\}\ ,\ D_{f^{-1}of}=\{x\in D_f|f(x)\in D_{f^{-1}}\}$$

با دقت روی این دامنه‌ها درمی‌یابیم در رابطهٔ $fof^{-1}(x)=x$، $x$ از دامنهٔ $f^{-1}$ (به‌شرطی‌که $f^{-1}(x)$ متعلق به دامنهٔ $f$ باشد) انتخاب می‌شود و درحالی‌که در رابطهٔ $f^{-1}of(x)=x$، $x$ از دامنهٔ $f$ (با این شرط که $f(x)\in D_{f^{-1}}$ است) انتخاب می‌شود. پس اگر دامنه و برد تابع وارون‌پذیر $f$ باهم برابر باشند $(D_f=R_f)$ توابع ترکیب $fof^{-1}$ و $f^{-1}of$ نیز باهم برابر می‌شوند. به‌عبارت دیگر اگر تابع $f$ همانی باشد، تابع‌های $fof^{-1}$ و $f^{-1}of$ باهم برابر خواهند بود. مثلاً برای $f=\{(1,1),(2,2),(0,0)\}$ داریم:

$$f^{-1}=\{(1,1),(2,2),(0,0)\}\to fof^{-1}=f^{-1}of=\{(1,1),(2,2),(0,0)\}$$

**۵۷** باید بدانیم که ترکیب هر تابع با معکوس خود برابر تابع همانی است. براین اساس داریم:

$$\begin{cases} fof^{-1}(a)=a \\ f^{-1}of(b)=b \end{cases}\to\begin{cases} fof^{-1}(2x)=2x \\ f^{-1}of(x)=x \end{cases}\to fof^{-1}(2x)-f^{-1}of(x)=2x-x=3x-8$$

$$\to x=3x-8\to x-3x=-8\to -2x=-8\xrightarrow{\div(-2)} x=\frac{-8}{-2}\to x=4$$

همان‌طورکه می‌بینید ضابطهٔ تابع $f$ اصلاً مورداستفاده قرار نگرفت. بلکه تنها کافی است که تابع $f$ معکوس‌پذیر باشد که هست.

**۵۸** از روی نمودارها به‌راحتی می‌توانیم ضابطه‌های $f$ و $g$ را به‌دست آوریم. پس ابتدا همین کار را انجام می‌دهیم:

$$f:\begin{cases} x<0 & ;y=2 \\ x=0 & ;y=0 \\ x>0 & ;y=-1 \end{cases}\to f(x)=\begin{cases} 2 & ;x<0 \\ 0 & ;x=0 \\ -1 & ;x>0 \end{cases}$$

$$g:\begin{cases} -4\le x\le 0:(-4,0),(0,4)\to y-0=\dfrac{4-0}{0+4}(x+4)\to y=x+4 \\ 0<x\le 3:(0,0),(3,-1)\to y-0=\dfrac{0+1}{0-3}(x-0)\to y=\dfrac{-1}{3}x \end{cases}$$

$$\to g(x)=\begin{cases} x+4 & ;-4\le x\le 0 \\ \dfrac{-x}{3} & ;0<x\le 3 \end{cases}$$

حالا دیگر می‌توانیم حاصل عبارت را باتوجه به تعریف تابع ترکیب به‌دست آوریم. داریم:

$$\begin{cases} fog(3)=f(g(3))\xlongequal{g(3)=\frac{-3}{3}=-1}f(-1)=2 \\ gof(1)=g(f(1))\xlongequal{f(1)=-1}g(-1)=-1+4=3 \end{cases}\to fog(3)+gof(1)=2+3=5$$

**۵۹** ابتدا ضابطهٔ تابع $g$ را از روی نمودار آن به‌دست می‌آوریم:

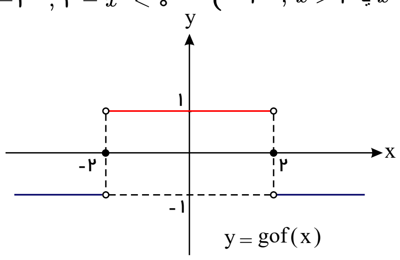
از نمودار پیداست که مقدار تابع برای تمام $x$های مثبت برابر $g(x)=1$، برای تمام $x$های منفی برابر $g(x)=-1$ و برای $x=0$ برابر $g(x)=0$ می‌باشد.

$$g(x)=\begin{cases} 1 & ;x>0 \\ 0 & ;x=0 \\ -1 & ;x<0 \end{cases}$$

حال باتوجه به تعریف تابع ترکیب $gof$ داریم:

$$gof(x)=g(f(x))=g(4-x^2)=\begin{cases} 1 & ;4-x^2>0 \\ 0 & ;4-x^2=0 \\ -1 & ;4-x^2<0 \end{cases}=\begin{cases} 1 & ;-2<x<2 \\ 0 & ;x=2 \text{ یا } -2 \\ -1 & ;x>2 \text{ یا } x<-2 \end{cases}$$

نمودار تابع ترکیب $gof$ هم به این شکل است:




اگر در حل نامعادله‌های $4-x^2>0$ و $4-x^2<0$ مشکلی دارید دقت کنید که:

$$\begin{cases} 4-x^2>0\to x^2<4\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x^2}<\sqrt{4}\to |x|<2\to -2<x<2 \\ 4-x^2<0\to x^2>4\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x^2}>\sqrt{4}\to |x|>2\to x>2 \text{ یا } x<-2 \end{cases}$$

**۶۰** باتوجه به رابطهٔ $f^{-1}og(m)=f^{-1}(g(m))=2$، ابتدا مقدار $g(m)$ را (به‌صورت پارامتری) از روی ضابطهٔ $g$ به‌دست می‌آوریم:

یعنی برای $m>0$، $g(m)$ برابر $m^2+1$ و برای $m\le 0$ برابر $m^2-1$ است.

$$g(m)=\begin{cases} m^2+1 & ;m>0 \\ m^2-1 & ;m\le 0 \end{cases}$$

درنتیجه آن رابطهٔ اولیه به‌صورت $f^{-1}(m^2+1)=2$ (برای $m>0$) یا $f^{-1}(m^2-1)=2$ (برای $m\le 0$) تبدیل خواهد شد. حال باتوجه به این نکته که «اگر $f^{-1}(a)=b$، آن‌گاه $f(b)=a$ برقرار است.» داریم:

$$\begin{cases} m>0 \text{ برای }:\ f(2)=m^2+1 \\ m\le 0 \text{ برای }:\ f(2)=m^2-1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(۲,۰)\in f]{\text{از روی مجموعهٔ } f} \begin{cases} m > ۰ \text{ برای } : m^۲ + ۱ = ۰ \to m^۲ = -۱ \to \text{فاقد جواب} \\ m \leq ۰ \text{ برای } : m^۲ - ۱ = ۰ \to m^۲ = ۱ \to m = \pm ۱ \xrightarrow{(m \leq ۰)} m = -۱ \checkmark \end{cases}$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول برای $m$ همان $-۱$ بوده و داریم: $f^{-۱}og(-۱) = ۲$

(۶۱) دامنهٔ تابع $gof$ باتوجه به تعریف $gof(x) = g(f(x))$ از دستور $D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$ به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر دامنهٔ $gof$، آن قسمت از دامنهٔ $f$ را شامل می‌شود که به‌ازای آن‌ها، $f(x)$ متعلق به دامنهٔ $g$ باشد. در این‌جا باتوجه به نمودار داریم:

$$D_f = [-۳, ۰] \ , \ R_f = [۰, \frac{۵}{۲}] \ , \ D_g = [۰, \frac{۵}{۲}]$$

$$D_{gof} = \{x \in [-۳, ۰] | f(x) \in [۰, \frac{۵}{۲}]\} = [-۳, ۰]$$

دامنهٔ $gof$ همان دامنهٔ $f$ و برابر $[-۳, ۰]$ است. زیرا به‌ازای تمام اعضای این بازه، مقادیر تابع $f$ متعلق به $D_g = [۰, \frac{۵}{۲}]$ می‌باشد. مقادیر $f$ همان $R_f = [۰, \frac{۵}{۲}]$ است.

(۶۲)

$A = \{ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \}$

$f = \{ (x, ۲x - ۱) | x \in A \}$

$x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۱ \Rightarrow (۱, ۱) \in f$

$x = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۳ \Rightarrow (۲, ۳) \in f$

$x = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۵ \Rightarrow (۳, ۵) \in f$

$x = ۴ \Rightarrow f(۴) = ۷ \Rightarrow (۴, ۷) \in f$

$x = ۵ \Rightarrow f(۵) = ۹ \Rightarrow (۵, ۹) \in f$

$\Rightarrow f = \{ (۱, ۱), (۲, ۳), (۳, ۵), (۴, ۷), (۵, ۹) \}$

$x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۱ \Rightarrow f(f(۱)) = f(۱) = ۱ \Rightarrow (۱, ۱) \in fof$

$x = ۲ \Rightarrow f(۲) = ۳ \Rightarrow f(f(۲)) = f(۳) = ۵ \Rightarrow (۲, ۵) \in fof$

$x = ۳ \Rightarrow f(۳) = ۵ \Rightarrow f(f(۳)) = f(۵) = ۹ \Rightarrow (۳, ۹) \in fof$

$x = ۴ \Rightarrow f(۴) = ۷ \Rightarrow f(f(۴)) = f(۷) =$ تعریف نشده

$x = ۵ \Rightarrow f(۵) = ۹ \Rightarrow f(f(۵)) = f(۹) =$ تعریف نشده

پس تابع $f(f(x))$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$f(f(x)) = \{ (۱, ۱), (۲, ۵), (۳, ۹) \}$

(۶۳) اگر قیمت هر دستگاه خودرو را $x$ تومان در نظر بگیریم، با دو تابع زیر روبه‌رو خواهیم بود.

$g(x) = x - \frac{۱۵}{۱۰۰}x \to g(x) = \frac{۸۵}{۱۰۰}x$

$f(x) = x - ۲,۰۰۰,۰۰۰$

حال با تشکیل $fog$ و $gof$ ببینیم کدام‌یک به نفع کوروش است:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\frac{۸۵}{۱۰۰}x) = \frac{۸۵}{۱۰۰}x - ۲,۰۰۰,۰۰۰ \xrightarrow{x=۵۰,۰۰۰,۰۰۰} (fog)(x) = \frac{۸۵}{۱۰۰} \times ۵۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۲,۰۰۰,۰۰۰ = ۴۲,۵۰۰,۰۰۰ - ۲,۰۰۰,۰۰۰$$

$\to (fog)(x) = ۴۰,۵۰۰,۰۰۰$

یعنی اگر ابتدا از تخفیف ۱۵ درصدی استفاده کند، سپس تخفیف دو میلیونی بگیرد خودرو برایش چهل میلیون و پانصد هزار تومان تمام می‌شود.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x - ۲,۰۰۰,۰۰۰) = \frac{۸۵}{۱۰۰}(x - ۲,۰۰۰,۰۰۰) \xrightarrow{x=۵۰,۰۰۰,۰۰۰} (gof)(x) = ۴۰,۸۰۰,۰۰۰$$

یعنی اگر ابتدا تخفیف دو میلیونی را اخذ نماید سپس از تخفیف ۱۵ درصدی استفاده کند خودرویش چهل میلیون و هشتصد هزار تومان برایش تمام خواهد شد پس بهتر است ابتدا تخفیف ۱۵ درصدی، سپس تخفیف ۲ میلیونی را اخذ کند.

(۶۴) پاسخ او اشتباه است زیرا وقتی دو تابع $f$ و $g$ را ترکیب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{x-۱}) = \frac{\frac{x}{x-۱} + ۲}{\frac{x}{x-۱} - ۳} \to (fog)(x) = \frac{\frac{x + ۲x - ۲}{\cancel{x-۱}}}{\frac{x - ۳x + ۳}{\cancel{x-۱}}} \Rightarrow (fog)(x) = \frac{۳x - ۲}{-۲x + ۳}$$

همانطور که می‌بینید هنگام ساده کردن عبارت $x - ۱$ دچار این اشتباه می‌شویم که یکی از محدودیت‌های دامنه را بی‌دلیل حذف می‌نمائیم در واقع علت اصلی ارتکاب این اشتباه آن است که دامنهٔ $fog$ یا $gof$ را نباید از روی ضابطه‌شان تعیین کرد بلکه همواره باید از رابطهٔ مربوط به آن‌ها، استفاده کنیم در این سؤال داریم:

$D_{fog} = \{ x \in D_{fog} | g(x) \in D_f \}$

$D_{fog} = \{ x \neq 1 | g(x) \neq 3 \} \to x \neq 1 \quad (1)$ و $\frac{x}{x-1} \neq 3 \quad (2) \to x \neq 3x - 3 \to 2x \neq 3 \to x \neq \frac{3}{2} \quad (*) \xrightarrow{(1)\cap(*)} D_{fog} = \mathbb{R} - \left\{ 1, \frac{3}{2} \right\}$

**۶۵** باید معکوس هر کدام از ضابطهٔ را در محدودهٔ دامنهٔ خودشان پیدا کنیم:

$y = 4x - x^2 - 3 \Rightarrow -y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow -y = (x^2 - 4x + 4) - 1 \Rightarrow -y + 1 = (x-2)^2 \to \sqrt{1-y} = |x-2| \xrightarrow{x<2} \sqrt{1-y} = -x + 2$

$x = 2 - \sqrt{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = y = 2 - \sqrt{1-x}$

$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = y = x + 2$

پس ضابطهٔ تابع $f^{-1}$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{1-x} & , \quad x < 1 \\ x + 2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

اما همین‌طور که می‌دانیم دامنهٔ $f^{-1}$، برد تابع اصلی است پس باید برد را بیابیم:

دامنه ضابطهٔ اول $\sqrt{1-y} = -x + 2 \Rightarrow 1 - y > 0 \Rightarrow y < 1 \Rightarrow x < 1$ : داشتیم

توجه کنید: از آن‌جا که در دامنهٔ تابع اصلی $x < 2$ است عبارت $\sqrt{1-y}$ نمی‌تواند برابر با صفر شود.

برای محاسبه برد ضابطهٔ دوم $f$، کافی است روی شرط دامنه‌اش، ضابطه را بسازیم.

$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

**۶۶**

$f(x_1) = f(x_2)$

$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}} \Rightarrow x_1\sqrt{x_2^2+1} = x_2\sqrt{x_1^2+1}$

(*) دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم. $\Rightarrow x_1^2(x_2^2+1) = x_2^2(x_1^2+1) \Rightarrow x_1^2x_2^2 + x_1^2 = x_2^2x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$ تابع یک به یک است.

**توجه** کنید چون دو کسر با هم مساوی‌اند و مخرج دو کسر علامت مثبت دارد پس صورت‌ها با هم، هم علامت هستند.

برای یافتن ضابطهٔ تابع معکوس قرار می‌دهیم:

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$ دو طرف به توان ۲

$y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow y^2x^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow y^2x^2 - x^2 = -y^2 \Rightarrow x^2(y^2-1) = -y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ $x$ و $y$ هم علامت‌اند

$\Rightarrow f^{-1}(x) = y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

**۶۷** برای یافتن تابع معکوس تابع $f(x) = 1 - \frac{g(x-1)}{3}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \quad (1)$

$y = 1 - \frac{g(x-1)}{3} \Rightarrow 1 - y = \frac{g(x-1)}{3} \Rightarrow 3 - 3y = g(x-1) \Rightarrow g^{-1}(3-3y) = g^{-1}(g(x-1)) \Rightarrow x - 1 = g^{-1}(3-3y)$

$x = 1 + g^{-1}(3-3y) \quad (2)$

$\xrightarrow{\text{از ۱ و ۲}} f^{-1}(y) = 1 + g^{-1}(3-3y) \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + g^{-1}(3-3x)$

**۶۸** برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$، مشتق اول آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$y = x\sqrt{4-x^2}$

$4 - x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 4 \to |x| \leq 2 \to -2 \leq x \leq 2 \to \quad D = [-2, 2]$

$y' = \sqrt{4-x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \times x$

$\to y' = \frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \to 2x^2 = 4 \to x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$

| | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | ○ | $+$ | ○ | $-$ | |
| | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

تابع در بازهٔ $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ صعودی است و در بازه‌های $[-2, -\sqrt{2}]$ و $[\sqrt{2}, 2]$ نزولی است.

۶۹ برای تعیین جهت تقعر و نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$، باید مشتق دوم آن را تعیین علامت کنیم.

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 1 \to f'(x) = 3x^2 + 18x$$
$$\to f''(x) = 6x + 18 = 0 \to x = -3$$

| | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\cap$ | | $\cup$ |

نقطه‌ی $I = (-3, 1)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع است.

۷۰

$$y + 5x = 8 \Rightarrow y = -5x + 8 \Rightarrow \text{شیب} = -5$$
$$\Rightarrow \text{شیب خط عمود} = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{شیب خط مماس بر منحنی داده‌شده} = \frac{1}{5}$$
$$y = \frac{2x+3}{1-x} \Rightarrow y' = \frac{2(1-x) - (-1)(2x+3)}{(1-x)^2} = \frac{2 - 2x + 2x + 3}{(1-x)^2}$$
$$y' = \frac{5}{(1-x)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow (1-x)^2 = 25 \Rightarrow 1 - x = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 6 \end{cases}$$
$$x = -4 \Rightarrow y = \frac{2(-4)+3}{1-(-4)} = \frac{-5}{5} = -1 \Rightarrow A(-4, -1)$$
$$x = 6 \Rightarrow y = \frac{2 \times 6 + 3}{1 - 6} = \frac{15}{-5} = -3 \Rightarrow B(6, -3)$$

۷۱

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)((2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x))}{(x+1)^4}$$
$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x)}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{4 \times 2 - 2 \times 3}{2^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۷۲

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}, f(0) = 0$$
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} \times \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - 1 + x^2}}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$
$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تابع در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

۷۳

$$f(x) = \sqrt{|x+2|}, f(-2) = 0$$
$$f'(-2) = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{|x+2|} - 0}{x + 2} \times \frac{\sqrt{|x+2|}}{\sqrt{|x+2|}}$$
$$= \lim_{x \to -2} \frac{|x+2|}{(x+2)\sqrt{|x+2|}}$$
$$f'_-(-2) = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{-(x+2)}{(x+2)\sqrt{|x+2|}} = \lim_{x \to (-2)^-} \frac{-1}{\sqrt{|x+2|}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
$$f'_+(-2) = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{x+2}{(x+2)\sqrt{|x+2|}} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{1}{\sqrt{|x+2|}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

تابع در $x=-2$ مشتق‌ناپذیر است.

(۷۴) تابع $f$ در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=2x^2-|x|$$

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-x & x\geq 0\\ 2x^2+x & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}4x-1 & x>0\\ 4x+1 & x<0\end{cases}$$

$$f'_-(0)=4\times 0+1=1\quad,\quad f'_+(0)=4\times 0-1=-1\Rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0)$$

$x=0$ بحرانی است زیرا مشتق‌ناپذیر است.

$x>0\Rightarrow f'(x)=4x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$ قابل قبول $\Rightarrow$ بحرانی است

$x<0\Rightarrow f'(x)=4x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{4}$ قابل قبول $\Rightarrow$ بحرانی است

تابع سه نقطهٔ بحرانی $x=0$ , $x=\frac{1}{4}$ , $x=-\frac{1}{4}$ دارد.

(۷۵)

$f(0)=0$ , حد چپ $=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3+3x^2)=0$ , حد راست $=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-x)=0$

تابع در $x=0$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+6x & x<0\Rightarrow 3x^2+6x=0\Rightarrow 3x(x+2)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=-2\\ 2x-6 & x>0\Rightarrow 2x-6=0\Rightarrow x=3\end{cases}$$

$f'_-(0)=0$ , $f'_+(0)=0-6=-6\Rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0)\Rightarrow$ $x=0$ مشتق ناپذیر

نقاط بحرانی عبارتند از: $x=0$ , $x=-2$ , $x=3$

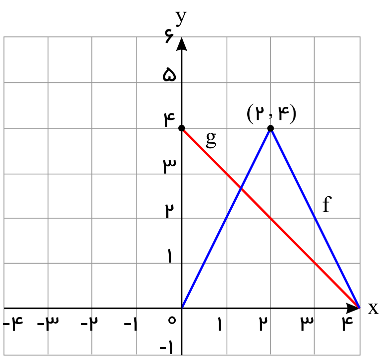
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

$$x=-2\Rightarrow f(-2)=-8+12=4\ ,\ x=3\Rightarrow f(3)=9-18=-9$$

نقطهٔ $(-2,4)$ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ $(3,-9)$ مینیمم نسبی است.

(۷۶)

الف) توابع $f$ و $g$ توابع خطی هستند و باید ضابطهٔ آنها را بیابیم. برای تابع $f$ باید خط گذرنده از نقاط $(0,0)$ و $(2,4)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(2,4)$ و $(4,0)$ را بیابیم.




$$(0,0),(2,4)\Rightarrow m=\frac{4-0}{2-0}=2\Rightarrow y-0=2(x-0)\Rightarrow y=2x$$
$$(2,4),(4,0)\Rightarrow m=\frac{4-0}{2-4}=-2\Rightarrow y-0=-2(x-4)\Rightarrow y=-2x+8$$

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\leq x\leq 2\\ -2x+8 & 2<x\leq 4\end{cases}$$

برای یافتن تابع $g$ باید خط گذرنده از نقاط $(0,4)$ و $(4,0)$ را بیابیم.

$$(0,4),(4,0)\Rightarrow m=\frac{4-0}{0-4}=-1\Rightarrow y-0=-1(x-4)\Rightarrow y=-x+4\Rightarrow g(x)=-x+4$$

$h(x)=f(x)\cdot g(x)\Rightarrow h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$

$f(۱)=۲\ ,\ ۰<x<۲\Rightarrow f(x)=۲x\Rightarrow f'(x)=۲\Rightarrow f'(۱)=۲$

$g(۱)=۳\ ,\ g(x)=-x+۴\Rightarrow g'(x)=-۱\Rightarrow g'(۱)=-۱$

$h'(۱)=f'(۱)\cdot g(۱)+g'(۱)\cdot f(۱)=۲\times ۳+(-۱)\times ۲=۶-۲=۴$

تابع $f$ در $x=۲$ مشتق‌ناپذیر است زیرا:

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲x-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{۲(x-۲)}{x-۲}=۲$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۲x+۸-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۲(x-۲)}{x-۲}=-۲$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست بنابراین $h'(۲)$ نیز وجود ندارد.

$f(۳)=۲\ ,\ f'(۳)=-۲\ ,\ g(۳)=۱\ ,\ g'(۳)=-۱$

$h'(۳)=f'(۳)\cdot g(۳)+g'(۳)\cdot f(۳)=-۲\times ۱+(-۱)\times ۲=-۴$

ب)

$$k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^۲(x)}$$

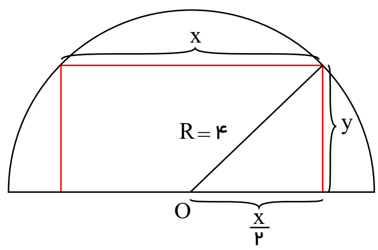
$$k'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}$$

$$k'(۱)=\frac{۲\times ۳-(-۱)\times ۲}{۳^۲}=\frac{۶+۲}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

چون $f'(۲)$ موجود نیست پس $k'(۲)$ هم وجود ندارد.

$$k'(۳)=\frac{f'(۳)g(۳)-g'(۳)f(۳)}{g^۲(۳)}=\frac{(-۲)\times ۱-(-۱)\times ۲}{۱^۲}=\frac{-۲+۲}{۱}=۰$$

**۷۷**




$$(\frac{x}{۲})^۲+y^۲=۴^۲\Rightarrow \frac{x^۲}{۴}+y^۲=۱۶$$
$$y^۲=۱۶-\frac{x^۲}{۴}=\frac{۶۴-x^۲}{۴}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^۲}$$

$$S=xy=x\times\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^۲}\Rightarrow S(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴x^۲-x^۴}$$

$$y^۲\geq ۰\Rightarrow ۱۶-\frac{x^۲}{۴}\geq ۰\Rightarrow \frac{x^۲}{۴}\leq ۱۶\Rightarrow x^۲\leq ۶۴\Rightarrow -۸\leq x\leq ۸\quad (۱)$$

$$x\geq ۰\xrightarrow{(۱)}۰\leq x\leq ۸\Rightarrow S(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴x^۲-x^۴}\quad \text{دامنه}=[۰,۸]$$

$$S'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۲۸x-۴x^۳}{۲\sqrt{۶۴x^۲-x^۴}}=۰\Rightarrow ۱۲۸x-۴x^۳=۰\Rightarrow ۴x(۳۲-x^۲)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm ۴\sqrt{۲}$$

$$x=۰\Rightarrow S(۰)=۰\ ,\ x=۴\sqrt{۲}\Rightarrow S(۴\sqrt{۲})=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴\times ۳۲-۲۵۶\times ۴}=۱۶$$

$x=۸\Rightarrow S(۸)=۰$ , مقدار ماکزیمم مساحت $=۱۶$

به‌ازای $x=۴\sqrt{۲}$، مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را دارد. پس داریم:

$$x=۴\sqrt{۲}\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-x^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴-۳۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲}=\frac{۱}{۲}\times ۴\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}$$

۷۸

الف

$$f(x) = x\sqrt{x^{۲} - ۴x + ۴} = x\sqrt{(x-۲)^{۲}} = x|x-۲|$$

تابع $f(x)$ در $x_{\circ} = ۲$ پیوسته است. (حد راست $=$ حد چپ $=$ مقدار تابع $= \circ$)

$$f'(x_{\circ}) = \lim_{x \to x_{\circ}} \frac{f(x) - f(x_{\circ})}{x - x_{\circ}} = \lim_{x \to ۲} \frac{x|x-۲| - \overbrace{f(۲)}^{\circ}}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{x\overbrace{|x-۲|}^{\circ}}{x-۲}$$

$$\to \begin{cases} f'(۲^{+}) = \lim\limits_{x \to ۲^{+}} \dfrac{x\overbrace{|x-۲|}^{+}}{x-۲} = \lim\limits_{x \to ۲^{+}} \dfrac{x(x-۲)}{(x-۲)} = \lim\limits_{x \to ۲^{+}} x = ۲ \\ f'(۲^{-}) = \lim\limits_{x \to ۲^{-}} \dfrac{x\overbrace{|x-۲|}^{-}}{x-۲} = \lim\limits_{x \to ۲^{-}} \dfrac{-x(x-۲)}{(x-۲)} = \lim\limits_{x \to ۲^{-}} (-x) = -۲ \end{cases}$$

پس تابع در $x_{\circ} = ۲$ مشتق‌ناپذیر است.

ب

تابع $f(x)$ در $x_{\circ} = \circ$ پیوسته است. (حد راست $=$ حد چپ $=$ مقدار تابع $= \circ$)

$$f'(x_{\circ}) = \lim_{x \to x_{\circ}} \frac{f(x) - f(x_{\circ})}{x - x_{\circ}} = \lim_{x \to \circ} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^{۲}}} - \overbrace{f(\circ)}^{\circ}}{x - \circ} = \lim_{x \to \circ} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^{۲}}}}{x} \times \frac{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}}$$

$$= \lim_{x \to \circ} \frac{\sqrt{۱ - ۱ + x^{۲}}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}} = \lim_{x \to \circ} \frac{\overbrace{|x|}^{\circ}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}}$$

$$\to \begin{cases} f'(\circ^{+}) = \lim\limits_{x \to \circ^{+}} \dfrac{\overbrace{|x|}^{+}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}} = \lim\limits_{x \to \circ^{+}} \dfrac{x}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}} = \lim\limits_{x \to \circ^{+}} \dfrac{۱}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} \\ f'(\circ^{-}) = \lim\limits_{x \to \circ^{-}} \dfrac{\overbrace{|x|}^{-}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}} = \lim\limits_{x \to \circ^{-}} \dfrac{-x}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}} = \lim\limits_{x \to \circ^{-}} \dfrac{-۱}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}} = \dfrac{-۱}{\sqrt{۲}} \end{cases}$$

پس تابع در $x_{\circ} = \circ$ مشتق‌ناپذیر است.

پ

تابع $f(x)$ در $x_{\circ} = -۳$ پیوسته است. (حد راست $=$ حد چپ $=$ مقدار تابع $= \circ$)

$$f'(x_{\circ}) = \lim_{x \to x_{\circ}} \frac{f(x) - f(x_{\circ})}{x - x_{\circ}} = \lim_{x \to -۳} \frac{\sqrt{|x+۳|} - \overbrace{f(-۳)}^{\circ}}{x + ۳}$$

$$= \lim_{x \to -۳} \frac{\sqrt{|x+۳|}}{x+۳} \times \frac{\sqrt{|x+۳|}}{\sqrt{|x+۳|}} = \lim_{x \to -۳} \frac{|x+۳|}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}}$$

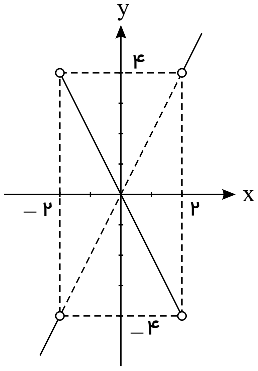
$$\to \begin{cases} f'(-۳^{+}) = \lim\limits_{x \to (-۳)^{+}} \dfrac{\overbrace{|x+۳|}^{+}}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x \to (-۳)^{+}} \dfrac{(x+۳)}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x \to (-۳)^{+}} \dfrac{۱}{\sqrt{|x+۳|}} = \dfrac{۱}{\sqrt{\circ^{+}}} = +\infty \\ f'(-۳^{-}) = \lim\limits_{x \to (-۳)^{-}} \dfrac{\overbrace{|x+۳|}^{-}}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x \to (-۳)^{-}} \dfrac{-(x+۳)}{(x+۳)\sqrt{|x+۳|}} = \lim\limits_{x \to (-۳)^{-}} \dfrac{-۱}{\sqrt{|x+۳|}} = \dfrac{-۱}{\sqrt{\circ^{+}}} = -\infty \end{cases}$$

پس تابع در $x_{\circ} = -۳$ مشتق‌ناپذیر است.

۷۹ تابع در $x = ۲$ و $x = -۲$ (ریشه‌های غیرمکرر داخل قدرمطلق) مشتق‌ناپذیر است.

| $x$ | $-\infty$ | | $-۲$ | | $۲$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲-۴$ | | $+$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ | |

$$\begin{cases} x<-۲ & \to f(x)=x^۲-۴ \\ -۲\le x\le ۲ & \to f(x)=-x^۲+۴ \\ x>۲ & \to f(x)=x^۲-۴ \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x & x<-۲ \\ -۲x & -۲<x<۲ \\ ۲x & x>۲ \end{cases}$$




۸۰) تابع در $x=۲$ و $x=۰$ (ریشه‌های غیرمکرر داخل قدرمطلق) مشتق‌ناپذیر است بدین علت:

$$f'(x_۰)=\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{|x(x-۲)|-\overbrace{f(۰)}^{۰}}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{|x(x-۲)|}{x}$$

$$\to\begin{cases} f'(۰^+)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\overbrace{|x(x-۲)|}^{-}}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{-x(x-۲)}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}-(x-۲)=۲ \\ f'(۰^-)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{\overbrace{|x(x-۲)|}^{+}}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x(x-۲)}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}(x-۲)=-۲ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x_۰=۰$ مشتق‌ناپذیر است.

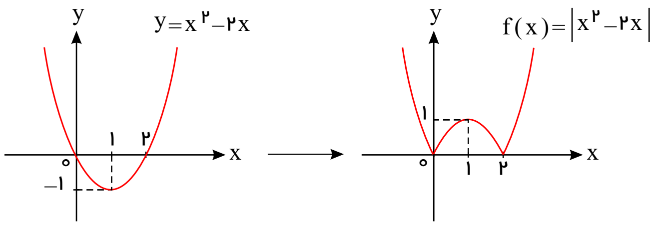
$$f'(x_۰)=\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x(x-۲)|-\overbrace{f(۲)}^{۰}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x(x-۲)|}{x-۲}$$

$$\to\begin{cases} f'(۲^+)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{\overbrace{|x(x-۲)|}^{+}}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x(x-۲)}{(x-۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^+}x=۲ \\ f'(۲^-)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{\overbrace{|x(x-۲)|}^{-}}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-x(x-۲)}{(x-۲)}=\lim\limits_{x\to ۲^-}-x=-۲ \end{cases}$$

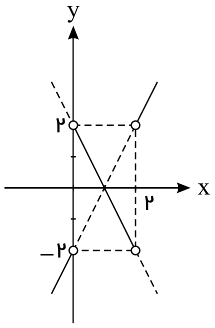
تابع $f(x)$ در $x_۰=۲$ مشتق‌ناپذیر است.

| $x$ | $-\infty$ | | $۰$ | | $۲$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲-۲x$ | | $+$ | $۰$ | $-$ | $۰$ | $+$ | |

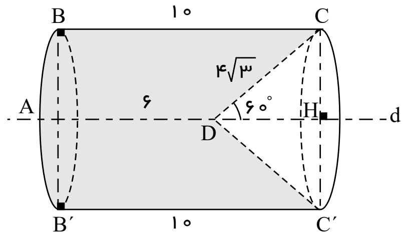
$$\begin{cases} x<۰ & \to f(x)=x^۲-۲x \\ ۰\le x\le ۲ & \to f(x)=-x^۲+۲x \\ x>۲ & \to f(x)=x^۲-۲x \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & x<۰ \\ -۲x+۲ & ۰<x<۲ \\ ۲x-۲ & x>۲ \end{cases}$$



و نمودار $f'$ به‌صورت مقابل است:




**۸۱** حجم حاصل مطابق شکل برابر است با:




$$D\overset{\triangle}{H}C : CH = \sin ۶۰^\circ \times DC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴\sqrt{۳} = ۶$$

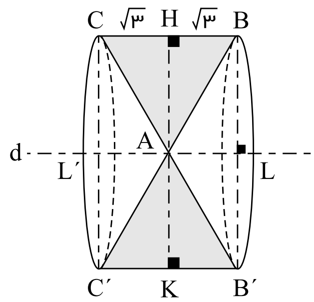
$$DH = \cos ۶۰^\circ \times DC = \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

$$V = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}}$$

$$V = \pi \times ۶^۲ \times ۱۰ - \frac{۱}{۳}\pi \times ۶^۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۳۶۰\pi - ۲۴\sqrt{۳}\pi$$

نکته: حجم استوانه به شعاع $r$ و ارتفاع $h$ برابر $\pi r^۲ h$ و حجم مخروط به شعاع $r$ و ارتفاع $h$ برابر $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ است.

**۸۲** حجم حاصل استوانه‌ای خالی از دو مخروط می‌باشد.




$$AH = \sin ۶۰^\circ \times AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۲\sqrt{۳} = ۳$$

$$\Rightarrow BL = B'L = CL = C'L' = ۳$$

$$V = V_{\text{استوانه}} - ۲ \times V_{\text{مخروط}}$$

$$V = \pi \times ۳^۲ \times ۲\sqrt{۳} - ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi \times ۳^۲ \times \sqrt{۳} = ۱۸\sqrt{۳}\pi - ۶\sqrt{۳}\pi$$

$$\Rightarrow V = ۱۲\sqrt{۳}\pi$$

نکته: حجم استوانه به شعاع $r$ و ارتفاع $h$ برابر با $\pi r^۲ h$ است و حجم مخروط به شعاع $r$ و ارتفاع $h$ برابر است با: $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

**۸۳**

$$AA' = ۲a \to ۲a = ۴ - (-۴) \to ۲a = ۸ \to a = ۴$$

$$\text{طبق فرض} : ۲b = \frac{۳}{۴}۲c \to b = \frac{۳}{۴}c \to ۳c = ۴b \to c = \frac{۴}{۳}b$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \to \frac{۱۶}{۹}b^۲ = ۱۶ - b^۲ \to \frac{۲۵}{۹}b^۲ = ۱۶$$

$$\to ۲۵b^۲ = ۹ \times ۱۶ \to b^۲ = \frac{۹ \times ۱۶}{۲۵} \to b = \frac{۳ \times ۴}{۵} \to b = \frac{۱۲}{۵}$$

$$\to ۲b = \frac{۲۴}{۵} \text{ قطر کوچک}$$

$$\xrightarrow{c=\frac{۴}{۳}b} c = \frac{۴}{۳}\left(\frac{۱۲}{۵}\right) \to c = \frac{۱۶}{۵} \to ۲c = \frac{۳۲}{۵} \text{ فاصلهٔ کانونی}$$

ازطرفی: $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{16}{5}}{4}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$

**۸۴**

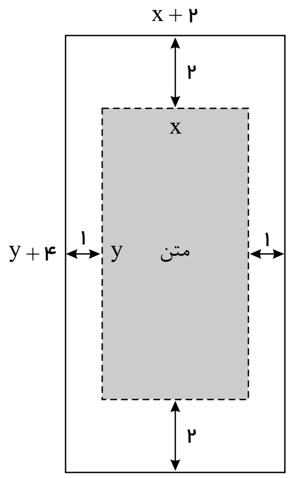
تعریف بیضی: $MF+MF'=2a \xrightarrow{\text{توان ۲}} (MF)^2+(MF')^2+2MF\cdot MF'=4a^2$

$\xrightarrow{\overset{\triangle}{MFF'}:(FF')^2=(MF)^2+(MF')^2} (FF')^2+2MF\cdot MF'=4a^2$

$\xrightarrow{FF'=2c} 4c^2+2MF\cdot MF'=4a^2 \rightarrow 2MF\cdot MF'=4a^2-4c^2$

$\rightarrow MF\cdot MF'=2a^2-2c^2=2(a^2-c^2)\rightarrow MF\cdot MF'=2b^2$

**۸۵**




دومتغیره: $S=(x+2)(y+4)=xy+4x+2y+8$

مساحت متن $=32 \rightarrow xy=32 \rightarrow y=\frac{32}{x}$

پس: $S=x(\frac{32}{x})+4x+2(\frac{32}{x})+8=32+4x+\frac{64}{x}+8$

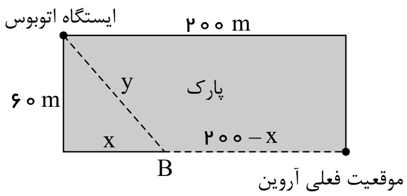
$=40+4x+\frac{64}{x}$ :یک‌متغیره $\xrightarrow{S'=0} 4-\frac{64}{x^2}=0$

$\rightarrow \frac{64}{x^2}=4 \rightarrow x^2=16 \rightarrow x=4 \xrightarrow{y=\frac{32}{y}} y=8$

بنابراین ابعاد صفحه باید ۶ و ۱۲ باشد

**۸۶**

شکل مسئله بدین‌صورت است.




$t_1$ زمان رسیدن آروین از موقعیت فعلی به نقطهٔ $B$ است پس:

$$t_1=\frac{200-x}{3}$$

$t_2$ زمان رسیدن آروین از نقطهٔ $B$ به ایستگاه اتوبوس است پس:

$$t_2=\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{3600+x^2}}{2}$$

پس: $t=t_1+t_2=\frac{200}{3}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\sqrt{3600+x^2}$ :یک‌متغیره

$\xrightarrow{t'=0} \frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2x}{2\sqrt{3600+x^2}}=0 \rightarrow \frac{x}{2\sqrt{3600+x^2}}=\frac{1}{3}$

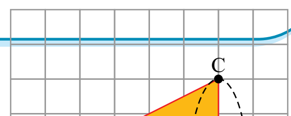
$\rightarrow 3x=2\sqrt{3600+x^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9x=4(3600+x^2)$

$\rightarrow 5x^2=14400 \rightarrow x^2=2880 \rightarrow x=\sqrt{2^6\times 3^2\times 5}=24\sqrt{5}$

**۸۷** الف)

باید حجم یک مخروط ناقص (قسمت رنگی) را حساب کنیم. برای این کار ابتدا با قضیهٔ تالس مقدار $x$ را پیدا می‌کنیم:

$AB||CD \Rightarrow \frac{OA}{OD}=\frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{x}{x+4}=\frac{1}{3} \Rightarrow x=2$



۸۸

$x^۲+y^۲-۴x-۶y-۳=۰ \to \begin{cases} f'_x=۲x-۴=۰ \to x=۲ \\ f'_y=۲y-۶=۰ \to y=۳ \end{cases} \to C\left|\begin{matrix} ۲:\alpha \\ ۳:\beta \end{matrix}\right.$

$R^۲=\alpha^۲+\beta^۲-c=۴+۹+۳=۱۶ \to R=۴$

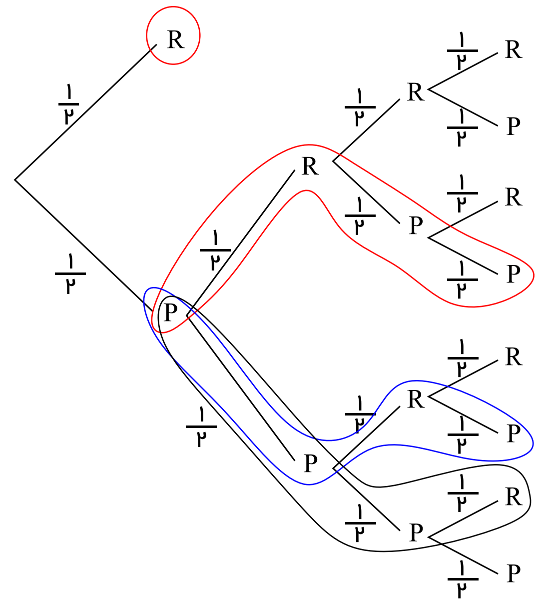
$C\left|\begin{matrix} ۲ \\ ۳ \end{matrix}\right. ,\ C'\left|\begin{matrix} -۱ \\ -۱ \end{matrix}\right. \to CC'=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$

شرط مماس داخل: $CC'=|R-R'| \to ۵=|۴-R'| \to \begin{cases} ۴-R'=۵ \to R'=-۱ & \text{غ‌ق‌ق} \\ ۴-R'=۵ \to R'=۹ \end{cases}$

پس: $\begin{cases} C'\left|\begin{matrix} -۱ \\ -۱ \end{matrix}\right. \\ R'=۹ \end{cases} \xrightarrow{(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲} (x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۸۱$

۸۹

«رو» را با $R$ و «پشت» را با $P$ نشان می‌دهیم:




حالت مطلوب: $R,\ PRPP,\ PPRP,\ PPPR$

$\to$ احتمال مطلوب $=\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})$

$=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$

۹۰

$\frac{۱}{۲}$ ظرف۱ | ۴ قرمز، ۲ آبی | $\longrightarrow$ دو توپ همرنگ نباشد $=\dfrac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}}=\frac{۸}{۱۵}$

$\frac{۱}{۲}$ ظرف۲ | ۵ قرمز، ۴ آبی | $\longrightarrow$ دو توپ همرنگ نباشد $=\dfrac{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$

$P($دو توپ همرنگ نباشند$)=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۸}{۱۵}+\frac{۵}{۹})=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۲۴+۲۵}{۴۵})=\frac{۴۹}{۹۰}$

۹۱

$$\to OA' = ۳AF \to a = ۳(a-c) \to a = ۳a - ۳c \to ۲a = ۳c \to a = \frac{۳}{۲}c$$

$$e = \frac{c}{a} \to e = \frac{c}{\frac{۳}{۲}c} \to e = \frac{۲}{۳}$$

$$\text{طول قطر کوچک} = ۴ \to ۲b = ۴ \to b = ۲$$

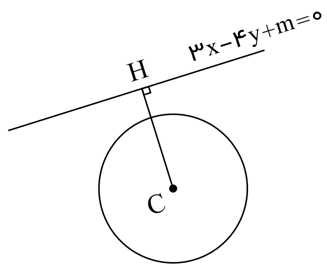
$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \to c^۲ = \frac{۹}{۴}c^۲ - ۴ \to ۴ = \frac{۵}{۴}c^۲ \to ۵c^۲ = ۱۶$$

$$\to c^۲ = \frac{۱۶}{۵} \to c = \frac{۴}{\sqrt{۵}} = \frac{۴\sqrt{۵}}{۵} \xrightarrow{a=\frac{۳}{۲}c} a = \frac{۳}{۲} \times \frac{۴\sqrt{۵}}{۵} = \frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\to \text{قطر بزرگ} = ۲a = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$$

۹۳

باتوجه به شکل مقابل باید فاصلهٔ مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیش‌تر باشد.




$$x^۲ - ۲x + y^۲ - ۴y + ۱ = ۰ \to (x-۱)^۲ - ۱ + (y-۲)^۲ - ۴ + ۱ = ۰$$

$$\to (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴ \to C \left| \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix} \right. , \ R = ۲$$

$$CH = \frac{|۳ \times ۱ - ۴ \times ۲ + m|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۳ - ۸ + m|}{۵} = \frac{|m-۵|}{۵} > R$$

$$\Rightarrow \frac{|m-۵|}{۵} > ۲ \Rightarrow |m-۵| > ۱۰ \Rightarrow m - ۵ < -۱۰ \ \text{یا} \ m - ۵ > ۱۰$$

$$\Rightarrow m < -۵ \ \text{یا} \ m > ۱۵$$

۹۴

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y + ۴ = ۰ \to (x-۲)^۲ - ۴ + (y-۳)^۲ - ۹ + ۴ = ۰$$

$$\to (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۹ \to C \left| \begin{matrix} ۲ \\ ۳ \end{matrix} \right. , \ R = ۳$$

$$\text{ازطرفی:} \ CC' = \sqrt{(۵-۲)^۲ + (۷-۳)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

اگر دو دایره مماس خارج باشند، داریم:

$$CC' = R + R' \Rightarrow ۵ = ۳ + R' \Rightarrow R' = ۲ \Rightarrow (x-۵)^۲ + (y-۷)^۲ = ۴$$

اگر دو دایره مماس داخل باشند، داریم:

$$CC' = |R' - R| \Rightarrow |R' - ۳| = ۵ \Rightarrow R' - ۳ = \pm ۵ \Rightarrow R' = -۲ \ \text{غ‌ق‌ق} \ , \ R' = ۸$$

$$\Rightarrow (x-۵)^۲ + (y-۷)^۲ = ۶۴$$

۹۵

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۱۲x^۲-۸x+۱=۰ \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴۸=۱۶} \begin{cases} x=\dfrac{۸+۴}{۲۴}=\dfrac{۱}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x=\dfrac{۸-۴}{۲۴}=\dfrac{۱}{۶} \end{cases}$$

**۹۶**

$$f(x)=x^۲+|x+۱|=\begin{cases} x^۲+x+۱ & x\geq -۱ \\ x^۲-x-۱ & x<-۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x>-۱ \\ ۲x-۱ & x<-۱ \end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقطهٔ $x=-۱$ به‌دست آوریم.

$f'_+(-۱)=-۱$

$f'_-(-۱)=-۳$

بنابراین در نقطهٔ $x=-۱$ مشتق‌پذیر نیست از طرفی ریشهٔ $f'$ نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۲}$ و نقاط بحرانی تابع‌اند با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه به سادگی مینیمم مطلق مشخص می‌شود.

$f(-۱)=۱ \rightarrow$ مینیمم مطلق

$f(-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$

$f(-۲)=۴+۱=۵$

$f(۲)=۴+۳=۷ \rightarrow$ ماکزیمم مطلق

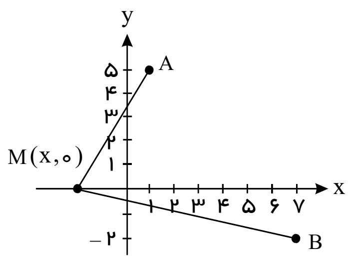
**۹۷**

$f(x)=\dfrac{۲x+۱}{x+۲}$ و $x_۰=-۱$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۲x+۱}{x+۲}+۱}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۲x+۱+x+۲}{x+۲}}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\frac{۳\cancel{(x+۱)}}{x+۲}}{\frac{\cancel{x+۱}}{۱}}=\lim_{x\to -۱}\frac{۳}{x+۲}$$ : شیب خط مماس

$y-y_۰=m(x-x_۰)\Rightarrow y+۱=۳(x+۱)\Rightarrow y=۳x+۲=۳$ : معادلهٔ خط مماس

**۹۸**




$D=MA-MB$

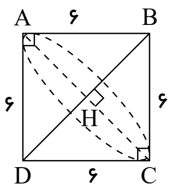
$D=\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}-\sqrt{(x-۷)^۲+۴}$

$$D'=\frac{\cancel{۲}(x-۱)}{\cancel{۲}\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}}-\frac{\cancel{۲}(x-۷)}{\cancel{۲}\sqrt{(x-۷)+۴}}$$

$$D'=۰\Rightarrow \frac{x-۱}{\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}}=\frac{x-۷}{\sqrt{(x-۷)^۲+۴}}\Rightarrow (x-۱)\sqrt{(x-۷)^۲+۴}=(x-۷)\sqrt{(x-۱)^۲+۲۵}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cancel{(x-۱)^۲}\ \cancel{(x-۷)^۲}+۴(x-۱)^۲=\cancel{(x-۷)^۲(x-۱)^۲}+۲۵(x+۷)^۲\Rightarrow ۲|x-۱|=۵|x-۷|\Rightarrow \begin{cases} ۲x-۲=۵x-۳۵\Rightarrow x=۱۱ \\ ۲x-۲=-۵x+۳۵\Rightarrow x=\frac{۳۷}{۷} \end{cases}$$

**۹۹** شکل حاصل، دو مخروط یکسان است که از قاعده به هم چسبیده‌اند پس داریم:

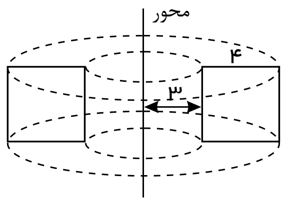



$AC=BD=AB\sqrt{۲}=۶\sqrt{۲}\Rightarrow R=AH=\dfrac{AC}{۲}=۳\sqrt{۲}$ و $h=BH=۳\sqrt{۲}$

$V_{\text{مخروط}}=\dfrac{۱}{۳}\pi R^۲h$

$V=\dfrac{۱}{۳}\pi\times(۳\sqrt{۲})^۲(۳\sqrt{۲})$

**۱۰۰** از دوران مربع مفروض حول محور، شکلی دیسک‌مانند حاصل می‌شود که برای یافتن حجم آن باید حجم استوانهٔ بیرونی را یافته، سپس حجم استوانهٔ درونی را از آن کم کنیم:

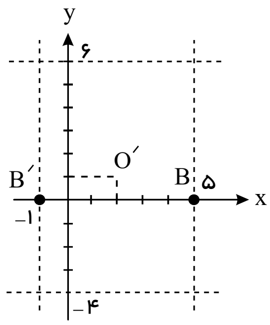



استوانهٔ مربعی $V = \pi R^۲ h \xrightarrow[R=۴+۳=۷]{h=۴} C = \pi \times ۷^۲ \times ۴ \Rightarrow V = ۱۹۶\pi$ واحد حجم

استوانهٔ درونی $V = \pi R^۲ h \xrightarrow[R=۳]{h=۴} V = \pi \times ۳^۲ \times ۴ \Rightarrow V = ۳۶\pi$ واحد حجم

حجم دیسک $= ۱۹۶\pi - ۳۶\pi = ۱۶۰\pi$ واحد حجم

**۱۰۱** بیضی قائم است، چون اندازهٔ قطر عمودی‌اش ۱۰ واحد $(۱۰ = (-۴) - ۶)$ اما اندازهٔ قطر افقی‌اش ۶ واحد می‌باشد $(۶ = (-۱) - ۵)$.




از طرفی می‌دانیم، $O'$ مرکز بیضی وسط $B$ و $B'$ و نیز $A$ و $A'$ است پس داریم:

$$x_{O'} = \frac{x_B + x_{B'}}{۲} = \frac{۵ - ۱}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

**۱۰۲**

$C : x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴$

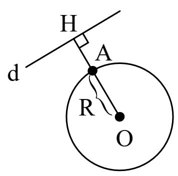
$d : ۳x + ۴y = ۱۵$

ابتدا باید شعاع دایره و فاصلهٔ مرکز دایره را از خط بیابیم تا وضعیت خط و دایره مشخص شود:

$$O(۱, -۲) \Rightarrow D = \frac{|۳(۱) + ۴(-۲) - ۱۵|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{|-۲۰|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} \Rightarrow D = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + ۴^۲ - ۴(-۴)} \Rightarrow R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۱۶ + ۱۶} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶} \Rightarrow R = ۳$$

چون فاصلهٔ مرکز دایره از خط $d$ بیشتر از طول شعاع دایره است پس خط و دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند.




از طرفی با توجه به شکل، فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا خط $d$، برابر است با:

$AH = OH - OA = ۴ - ۳ = ۱$

**۱۰۳** مرکز دایره و بیضی $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۸ \Rightarrow O(-۱, ۰)$

طول قطر دایره: $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ + ۰^۲ - ۴(-۸)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶} \Rightarrow R = ۳ \Rightarrow ۲R = ۶$

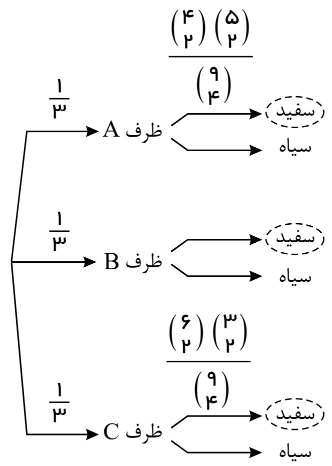
قطر بزرگ بیضی $AA' = ۶ + ۲ = ۸ \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$

قطر کوچک بیضی $BB' = ۶ - ۲ = ۴ \Rightarrow ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲$

از طرفی : $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۱۶ = ۴ + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۱۲ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow FF' = ۲c = ۴\sqrt{۳}$ : فاصلهٔ کانونی بیضی

خروج از مرکز بیضی : $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰۴




$$P(\text{مطلوب})=\frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}}{\binom{9}{4}}+2\times\frac{1}{3}\frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}}$$

$$P(\text{مطلوب})=\frac{1}{3}\left(\frac{6\times 10}{9\times 2\times 7}+2\times\frac{15\times 3}{9\times 2\times 7}\right)$$

$$P(\text{مطلوب})=\frac{1}{3}\left(\frac{10}{21}+\frac{5}{7}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{10+15}{21}\right)=\frac{25}{63}$$

۱۰۵ گزینهٔ «۲»

$$4f(a)=2\Rightarrow f(a)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ ,\ f'(a)=2$$

$$\left(f^2(x)+\frac{1}{f(x)}\right)'=2f(x)f'(x)-\frac{f'(x)}{f^2(x)}\overset{x=a}{=}2f(a)f'(a)-\frac{f'(a)}{f^2(a)}=\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times 2-\frac{2}{(\frac{1}{2})^2}=2-8=-6$$

۱۰۶

$$f'(2)=0\rightarrow f'(x)=3x^2+2bx\rightarrow b=-3$$

$$f(2)=1\rightarrow 8+(-12)+d=1\rightarrow d=5$$