منبع:

۱ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی می‌شوند که در هر دسته، بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک بزرگ‌ترین عضو دسته و عضو دیگری از دسته، برابر ۳ است. اختلاف میانه و میانگین دستهٔ ششم کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵

۳) ۱ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ اگر واریانس داده‌های ۵، ۱ و $3a$، برابر $\frac{8}{3}$ باشد، میانگین این داده‌ها کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵

۳) ۴ ۴) ۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ اگر انحراف معیار داده‌های مثبت ۳، $2a$ و a، برابر $\sqrt{14}$ باشد، مقدار $\frac{a}{3}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲

۳) ۳/۵ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ برای داده‌های زیر، چارک اول و سوم به ترتیب برابر ۹ و ۳۹ است. اگر میانگین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم برابر ۲۶ باشد، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم کدام است؟

$$18, 23, 39, 1, 3, 42, a, a, 2a+1, 23, 9$$

۱) ۲۰ ۲) ۲۱/۸

۳) ۴۵ ۴) ۵۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می‌کنیم به طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸

۳) ۶ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۶ در یک دسته ۷تایی از اعداد طبیعی متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد طبیعی دیگری را اضافه می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین دسته آخر، مکعب انحراف معیار باشد. اختلاف کوچک‌ترین عضو دسته اول و دسته آخر، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ انحراف معیار شش دادهٔ آماری ۲ و اختلاف آن‌ها از میانگین برابر $۳, -۱, b, -۱, ۰, a$ است. اگر $a > ۰$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) -۲
۴) -۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ چارک دوم تعدادی دادهٔ آماری برابر ۳ است. قرینهٔ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه، ۶ واحد کوچک‌تر از میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۶
۲) ۴/۵
۳) ۳
۴) ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ کوچک‌ترین ضریب تغییرات دسته‌های سه‌تایی از اعداد زوج متوالی دورقمی با رقم دهگان یکسان، کدام است؟

۱) $\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}$
۲) $\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$
۳) $\frac{۱}{۱۲\sqrt{۶}}$
۴) $\frac{۱}{۲۴\sqrt{۶}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

۱) گروه اول
۲) گروه دوم
۳) یکسان
۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱ داده‌های جمع‌آوری‌شده در یک مطالعهٔ آماری اعداد طبیعی متوالی هستند. اگر به همهٔ داده‌ها ۲ واحد بیافزاییم، اختلاف میانه و میانگین داده‌های جدید چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۲ ۹ دادهٔ آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت دادهٔ آماری، از میانگین برابر ۱+ یا ۱- و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده‌ها، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۳ داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟ $\left(\sqrt{\frac{۲}{۷}} \simeq ۰/۵۳۴\right)$

۱) ۰/۱۵
۲) ۰/۲۰
۳) ۰/۲۵
۴) ۰/۳۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴ ضریب تغییرات داده‌های آماری به‌صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴

۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۱۷
۴) ۰/۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۵ نمرات مهارت برای کارگر (A) : ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳ و ۱۲ و برای کارگر (B) : ۱۶/۵، ۱۶، ۱۵/۵، ۱۳ و ۱۱/۵ بوده است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

۱) A
۲) B
۳) یکسان
۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۴

دسته‌بندی، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}, \{۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲\}, \ldots$$

اما همهٔ دسته‌ها، جملات متوالی طبیعی‌اند؛ بنابراین میانه و میانگین آن‌ها باهم برابرند، پس اختلاف، صفر خواهد شد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ گزینه ۱

$$\overline{x} = \frac{۳a + ۱ + ۵}{۳} = a + ۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{x=۱}^{n}(x_i - \overline{x})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{(۳a - a - ۲)^۲ + (۱ - a - ۲)^۲ + (۵ - a - ۲)^۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow (۲a - ۲)^۲ + (a + ۱)^۲ + (۳ - a)^۲ = ۸$$

$$\Rightarrow ۶a^۲ - ۱۲a + ۶ = ۰ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow \overline{x} = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ گزینه ۲

$$\overline{x} = \frac{a + ۲a + ۳}{۳} = a + ۱$$

$$\sigma = \sqrt{۱۴} \Rightarrow \sigma^۲ = ۱۴$$

$$\Rightarrow \frac{(a + ۱ - a)^۲ + (a + ۱ - ۲a)^۲ + (a + ۱ - ۳)^۲}{۳} = ۱۴$$

$$\Rightarrow ۱ + (۱ - a)^۲ + (a - ۲)^۲ = ۴۲$$

$$\Rightarrow ۱ + a^۲ - ۲a + ۱ + a^۲ - ۴a + ۴ = ۴۲$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ - ۶a - ۳۶ = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۳a - ۱۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۶ \\ a = -۳ \end{cases}$$

$a = ۶$ قابل‌قبول است؛ پس $\frac{a}{۳} = ۲$.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۴ گزینه ۴

چارک اول $Q_۱ = ۹$ و چارک سوم $Q_۳ = ۳۹$ است، بنابراین داده‌های بین چارک‌های اول و سوم $a, a, ۲۳, ۲۳, ۱۸$ خواهد بود.

$$\frac{a + a + ۲۳ + ۲۳ + ۱۸}{۵} = ۲۶ \Rightarrow ۲a + ۶۴ = ۱۳۰$$

$$\Rightarrow ۲a = ۶۶ \Rightarrow a = ۳۳$$

داده‌ها به‌صورت زیر مرتب می‌شود.

۱ ۳ [۹] ۱۸ ۲۳ [۲۳] ۳۳ ۳۳ [۳۹] ۴۲ ۶۴

$Q_۱$ $Q_۲$ $Q_۳$

میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۴۲ + ۶۷}{۲} = \frac{۱۰۹}{۲} = ۵۴/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ گزینه ۲

دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی را به شکل زیر نشان می‌دهیم (دسته اول):

$$۲k, ۲k + ۲, ۲k + ۴, ۲k + ۶, ۲k + ۸, ۲k + ۱۰, ۲k + ۱۲$$

اعداد متوالی و تعدادشان فرد است، پس میانگین برابر عدد وسط است یعنی $۲k + ۶$

$$\bar{x} = ۲k + ۶$$

از همه اعداد موجود در دسته $۲k$ را کم می‌کنیم و مطمئن هستیم که انحراف معیار دسته ایجاد شده با انحراف معیار دسته قبلی برابر است:

دسته جدید : ۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲

$$\sigma = ۴$$

در سؤال گفته شده در دسته اول میانگین دو برابر انحراف معیار است پس: $\bar{x} = ۸$.

$$\bar{x} = ۲k + ۶ = ۸ \Rightarrow ۲k = ۲ \Rightarrow k = ۱$$

میانگین دسته آخر، مجذور انحراف معیار است، پس:

دسته اول : داده وسط = میانگین = ۸

دسته آخر : داده وسط $= \sigma^۲ = ۱۶$

اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر برابر اختلاف داده‌های وسط دو دسته است: $۱۶ - ۸ = ۸$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۶ گزینه ۲

نکته: واریانس n دادهٔ آماری که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d می‌دهند برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{n^۲ - ۱}{۱۲} \times d^۲$$

انحراف معیار ۷ عدد طبیعی متوالی برابر است با: $\sigma = \sqrt{\frac{۷^۲ - ۱}{۱۲}} = ۲$

اگر ۷ دادهٔ اول را $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ فرض کنیم، میانگین برابر ۴ دارند و انحراف معیار ۲ که نصف میانگین است. دسته‌ای که میانگین (داده وسطی) آن $\sigma^۳ = ۸$ است، دستهٔ $۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱$ می‌باشد. کوچک‌ترین عضو دسته اول برابر ۱ و کوچک‌ترین عضو دسته آخر برابر ۵ است. پس اختلاف آن‌ها $۵ - ۱ = ۴$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ گزینه ۴

$$\sigma = ۲ \Rightarrow \sigma^۲ = ۴ \Rightarrow ۴ = \frac{۳^۲ + (-۱)^۲ + b^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲ + a^۲}{۶}$$

$$a^۲ + b^۲ + ۱۱ = ۲۴ \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۱۳ \quad (۱)$$

ازطرفی می‌دانیم جمع انحرافات از میانگین همواره صفر است یعنی:

$$۳ + (-۱) + b + (-۱) + ۰ + a = ۰ \Rightarrow a + b = -۱ \quad (۲)$$

$$a^۲ + b^۲ = (a + b)^۲ - ۲ab \xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۳ = ۱ - ۲ab \Rightarrow ab = -۶$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ = b \\ x = ۲ = a \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ گزینه ۳

$$\text{زوج } n : x_۱ \ , \ x_۲ \ , \ \dots \ , \ x_{\frac{n}{۲}} \ , \ x_{\frac{n}{۲}+۱} \ , \ \dots \ , \ x_n$$

$$-\left(\frac{x_۱ + x_۲ + \dots + x_{\frac{n}{۲}}}{\frac{n}{۲}}\right) = \left(\frac{x_{\frac{n}{۲}+۱} + \dots + x_n}{\frac{n}{۲}}\right) - ۶$$

$$\Rightarrow \frac{x_۱ + x_۲ + \dots + x_n}{\frac{n}{۲}} = ۶ \Rightarrow ۲\left(\frac{x_۱ + \dots + x_n}{n}\right) = ۶ \Rightarrow ۲\bar{x} = ۶ \Rightarrow \bar{x} = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۴

سه عدد زوج متوالی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$x-۲, x, x+۲ \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{(-۲)^۲ + ۰^۲ + ۲^۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

میانگین هر سه عدد زوج متوالی عدد وسط است و چون در محاسبه ضریب تغییرات، میانگین در مخرج قرار دارد، بنابراین برای یافتن کوچک‌ترین ضریب تغییرات بزرگ‌ترین میانگین را انتخاب می‌کنیم که متعلق به سه‌تایی $\{۹۴, ۹۶, ۹۸\}$ می‌باشد: $\overline{X} = ۹۶$

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}}{۹۶} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳} \times ۴۸} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲۴\sqrt{۶}}$$

نکته: واریانس سه عدد زوج متوالی برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{d^۲}{۱۲}(N^۲ - ۱) = \frac{۴}{۱۲}(۹ - ۱) = \frac{۱}{۳} \times ۸ = \frac{۸}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۲

در گروه اول $\overline{X}_۱ = ۸۰$ و $\sigma_۱ = ۵$ و در گروه دوم $\overline{X}_۲ = ۷۲$ و $\sigma_۲ = ۴$ است. برای دو گروه، ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV_۱ = \frac{\sigma_۱}{\overline{X}_۱} = \frac{۵}{۸۰} = \frac{۱}{۱۶}$$

$$CV_۲ = \frac{\sigma_۲}{\overline{X}_۲} = \frac{۴}{۷۲} = \frac{۱}{۱۸}$$

چون $CV_۱ > CV_۲$ است، پس گروه دوم بهتر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۱

نکته: در داده‌هایی که به صورت دنبالهٔ حسابی هستند، میانه و میانگین برابرند.
داده‌های آماری اعداد طبیعی متوالی هستند، پس جملات دنباله‌ای حسابی می‌باشند. بنابراین طبق نکته میانگین و میانه برابر است. با افزودن ۲ واحد به تمام داده‌ها، همچنان دنباله‌ای حسابی می‌باشد، بنابراین اختلاف میانه و میانگین برابر با صفر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۲ گزینه ۴

می‌دانیم مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر با صفر است، بنابراین اختلاف چهار داده از میانگین برابر با ۱ و اختلاف چهار داده از میانگین نیز برابر با ۱- می‌باشد.

$$\sigma^۲ = \frac{۴(۱)^۲ + ۴(-۱)^۲ + ۰}{۹} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \sigma = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۳ گزینه ۲

راه‌حل اول: ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{x_۱ + x_۲ + ... + x_n}{n} = \frac{۵ + ۷ + ۳ \times ۸ + ۲ \times ۱۰}{۷} = \frac{۱۲ + ۲۴ + ۲۰}{۷} = \frac{۵۶}{۷} = ۸$$

سپس انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

واریانس:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \overline{x})^۲ + (x_۲ - \overline{x})^۲ + ... + (x_n - \overline{x})^۲}{n}$$

$$= \frac{(۵ - ۸)^۲ + (۷ - ۸)^۲ + ۳ \times (۸ - ۸)^۲ + ۲ \times (۱۰ - ۸)^۲}{۷}$$

$$= \frac{۹ + ۱ + ۰ + ۸}{۷} = \frac{۱۸}{۷}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} : \sigma = \sqrt{\frac{۱۸}{۷}} = ۳\sqrt{\frac{۲}{۷}}$$

حال ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{۳\sqrt{\frac{۲}{۷}}}{۸} = \frac{۳}{۸} \times ۰/۵۳۴ \simeq ۰/۲۰$$

راه‌حل دوم: برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۸ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$-۳, -۱, ۰, ۰, ۰, ۲, ۲$$

$$\overline{x}_{\text{جدید}} = \frac{-۳ - ۱ + ۲ + ۲}{۷} = ۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{۲ \times ۲^۲ + (-۱)^۲ + (-۳)^۲}{۷} = \frac{۱۸}{۷} \quad \Rightarrow \sigma = ۳\sqrt{\frac{۲}{۷}}$$

$$\overline{x}_{\text{اصلی}} = \overline{x}_{\text{جدید}} + ۸ = ۰ + ۸ = ۸$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\overline{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{۳\sqrt{\frac{۲}{۷}}}{۸} \simeq ۰/۲۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۴ گزینه ۲

راه‌حل اول:

ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{۵ \times ۱۰ + ۴ \times ۱۱ + ۷ \times ۱۴}{۱۶} = \frac{۵۰ + ۴۴ + ۹۸}{۱۶} = \frac{۱۹۲}{۱۶} = ۱۲$$

سپس انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{واریانس } \sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

$$= \frac{۵ \times (۱۰ - ۱۲)^2 + ۴ \times (۱۱ - ۱۲)^2 + ۷ \times (۱۴ - ۱۲)^2}{۱۶}$$

$$= \frac{۵ \times ۴ + ۴ \times ۱ + ۷ \times ۴}{۱۶} = \frac{۲۰ + ۴ + ۲۸}{۱۶} = \frac{۵۲}{۱۶} = \frac{۱۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{\frac{۱۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

حالت ضریب تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}{۱۲} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲۴} \simeq ۰/۱۵$$

راه‌حل دوم:

برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۱۰ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$\text{داده‌ها} : \underbrace{۰, ۰, ..., ۰}_{\text{۵ تا}} , \underbrace{۱, ..., ۱}_{\text{۴ تا}} , \underbrace{۴, ۴, ..., ۴}_{\text{۷ تا}}$$

$$\overline{x}_{\text{کوچک}} = \frac{۰ + ۴(۱) + ۷(۴)}{۱۶} = \frac{۳۲}{۱۶} = ۲$$

$$\sigma^2 = \frac{۵(-۲)^2 + ۴(-۱)^2 + ۷(۲)^2}{۱۶} = \frac{۵۲}{۱۶} = \frac{۱۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{۱۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$\overline{x}_{\text{اصلی}} = \overline{x}_{\text{کوچک}} + ۱۰ = ۲ + ۱۰ = ۱۲$$

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}{۱۲} \simeq ۰/۱۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۵ گزینه ۱

$$A: ۱۲ \quad ۱۳ \quad ۱۴ \quad ۱۵ \quad ۱۶ \Rightarrow \bar{x}_A = ۱۴$$
$$B: ۱۱/۵ \quad ۱۳ \quad ۱۵/۵ \quad ۱۶ \quad ۱۶/۵ \Rightarrow \bar{x}_B = ۱۴/۵$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} \quad , \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$\sigma_A^۲ = \frac{(۱۲-۱۴)^۲ + (۱۳-۱۴)^۲ + ۰ + (۱۵-۱۴)^۲ + (۱۶-۱۴)^۲}{۵} = \frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\Rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{۲}}{۱۴}$$

$$\sigma_B^۲ = \frac{(۱۱/۵-۱۴/۵)^۲ + (۱۳-۱۴/۵)^۲ + (۱۵/۵-۱۴/۵)^۲ + (۱۶-۱۴/۵)^۲ + (۱۶/۵-۱۴/۵)^۲}{۵}$$
$$= \frac{۹+۲/۲۵+۱+۲/۲۵+۴}{۵} = \frac{۱۸/۵}{۵} = ۳/۷ \Rightarrow CV_B = \frac{\sqrt{۳/۷}}{۱۴/۵}$$

CV_A کوچک‌تر است، پس کارگر A دقت بیشتری دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ سه ظرف یکسان داریم که هرکدام به‌ترتیب حاوی ۱۶، ۱۵ و ۱۴ مهره هستند. تعداد مهره‌های قرمز سه ظرف، به‌ترتیب ۴، ۶ و ۵ مهره است. احتمال انتخاب هر ظرف متناسب با تعداد مهره‌های آن ظرف است. یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و مهره‌ای بیرون می‌کشیم، با کدام احتمال، مهرهٔ انتخابی قرمز است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳۱}{۵۶۰}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۲۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ دو نمایندهٔ فوتبال ایران در لیگ قهرمانان آسیا، در بازی نخست مقابل نمایندگان یک کشور دیگر، صف‌آرایی می‌کنند. احتمال برنده شدن نمایندگان ایران در این بازی، به ترتیب ۰/۸ و ۰/۳ است. با کدام احتمال فقط یکی از تیم‌های ایرانی برندهٔ بازی است؟

۱) ۰/۸۶ ۲) ۰/۷۲

۳) ۰/۶۲ ۴) ۰/۵۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ در پرتاب دو تاس با کدام احتمال عدد ظاهرشدهٔ یک تاس کمتر از دیگری است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۴ احتمال کسب مدال دو ورزشکار یک تیم ملی در المپیک، به ترتیب ۰/۶ و ۰/۴ است. احتمال اینکه فقط یکی از این دو ورزشکار مدال کسب کند، چقدر است؟

۱) ۰/۵۲ ۲) ۰/۷۶

۳) ۰/۴۸ ۴) ۰/۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ دو تاس را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال یکی از اعداد ظاهرشده، بزرگ‌تر از دیگری است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۶ جعبهٔ A شامل ۶ مهرهٔ آبی، ۴ مهرهٔ سبز و ۵ مهرهٔ قرمز است و جعبهٔ B شامل ۵ مهرهٔ آبی، ۳ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ قرمز است. از جعبهٔ A به‌تصادف یک مهره انتخاب کرده، در جعبهٔ B قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از جعبهٔ B انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال مهرهٔ خارج‌شده از جعبهٔ B آبی است؟

۱) ۰/۳۶ ۲) ۰/۳۲

۳) ۰/۲۸ ۴) ۰/۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ دو تاس را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد ظاهرشده متوالی و برابر نیستند؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۸ سه عدد را به طور متوالی و بدون جایگذاری از میان اعداد ۱ تا n انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد سوم ۱۰ باشد، برابر $\frac{۱}{۱۵}$ است. در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان همین اعداد، با کدام احتمال فقط عدد سوم مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱۵}{۹۱}$ ۴) $\frac{۵}{۵۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار kاُم "رو" ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{k}{k+۵}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب k بار سکه "رو" بیاید. کدام مقدار می‌تواند $n+k$ باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۹

۳) ۸ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، ۰/۴، ۰/۳۵ و ۰/۲۵ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، با احتمال ۰/۲۵، ۰/۳ و ۰/۳۵ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

۱) ۲۰/۵۵ ۲) ۲۹/۵۵

۳) ۲۰/۲۵ ۴) ۲۹/۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۱ یک سکه را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار mاُم "رو" ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{m}{m+۳}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب m بار سکه "رو" بیاید. کدام مقدار می‌تواند nm باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۵

۳) ۴۰ ۴) ۳۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۲ احتمال اینکه پارسا یکی از سه رشته A، B و C را در دانشگاه انتخاب کند، به ترتیب، ۰/۴۵، ۰/۲ و ۰/۳۵ است. اگر او یکی از سه رشته A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب با احتمال ۰/۲، ۰/۲۵ و ۰/۳ در آن رشته پذیرفته می‌شود. پارسا با کدام احتمال در رشته مورد علاقه‌اش پذیرفته می‌شود؟

۱) ۰/۲۴۵ ۲) ۰/۲۴

۳) ۰/۱۹۵ ۴) ۰/۱۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۳ دو سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو سکه "رو" یا هر دو "پشت" ظاهر شوند، یک سکه دیگر می‌اندازیم، در غیراینصورت دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. در مجموع با کدام احتمال، دقیقاً دو سکه به "پشت" ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ احتمال اینکه یک کشتی‌گیر رقیب اصلی خود را ببرد $\frac{۱}{۵}$ و احتمال کسب مدال طلا برای او $\frac{۱}{۳}$ بوده و درصورتی‌که اصلی‌ترین رقیب خود را ببرد به $\frac{۱}{۲}$ افزایش خواهد یافت. با کدام احتمال، این کشتی‌گیر قهرمان می‌شود یا رقیب اصلی خود را می‌برد؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۰}$

۳) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۵ احتمال شیوع یک بیماری در جامعه‌ای برابر ۰/۰۸ و احتمال بهبود یافتن فرد مبتلا به این بیماری برابر ۰/۵ است. احتمال اینکه فردی از این جامعه به این بیماری مبتلا شود و بهبود یابد، چند درصد است؟

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۴

۳) ۲ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در دورهٔ بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دوبار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن‌که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می‌گیرد) (با تغییر)

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۷ احتمال اینکه یک دانش‌آموز در یک امتحان نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۹ و در دو امتحان متوالی نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۸۵ است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال اینکه در امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۸۵}{۹۴}$

۳) $\frac{۱۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴۵}{۴۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۸ با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به‌کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عضو انتخاب‌شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (با تغییر)

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۹ پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$

۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۰ ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم، سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$

۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۲۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۲ با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در هر عضو آن، رقم تکراری به‌کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب‌شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۶۶}{۲۰۵}$ ۲) $\frac{۶۷}{۲۰۵}$

۳) $\frac{۱۶۸}{۳۲۵}$ ۴) $\frac{۱۷۷}{۳۲۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۳ احتمال موفقیت فردی در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶

۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۴ احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{۷}{۹}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۹}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۵ بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بستهٔ ریاضی، ۷ بستهٔ تجربی و ۶ بستهٔ علوم انسانی، به‌تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده‌شدن در هر بستهٔ این دروس به ترتیب ۰/۷، ۰/۸ و ۰/۹ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می‌شود؟

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$
۲) $\frac{۲۹}{۳۶}$
۳) $\frac{۳۰}{۳۶}$
۴) $\frac{۳۱}{۳۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۱

$$۱۴x + ۱۵x + ۱۶x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴۵}$$

$$P(A) = \frac{۱۴}{۴۵} \times \frac{۵}{۱۴} + \frac{۱۵}{۴۵} \times \frac{۶}{۱۵} + \frac{۱۶}{۴۵} \times \frac{۴}{۱۶} = \frac{۵ + ۶ + ۴}{۴۵} = \frac{۱۵}{۴۵} = \frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۳

دو تیم موردنظر را A و B در نظر می‌گیریم.

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - ۲P(A)P(B)$$
$$= ۰/۸ + ۰/۳ - ۲ \times ۰/۲۴ = ۰/۶۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ گزینه ۴

متمم این احتمال، "اعداد روشدهٔ برابر" است.

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۶}{۳۶} = \frac{۵}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۴ گزینه ۱

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - ۲P(A)P(B)$$
$$= ۰/۶ + ۰/۴ - ۲(۰/۶)(۰/۴) = ۰/۵۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

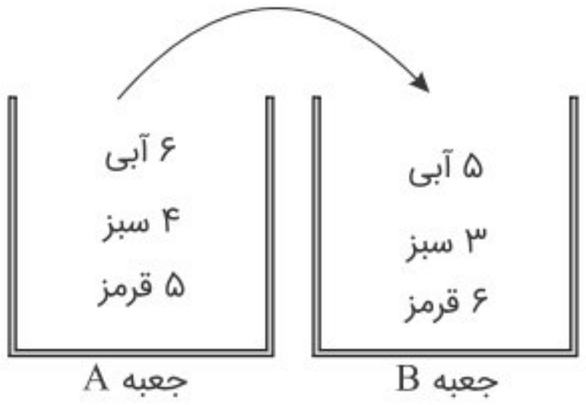
۵ گزینه ۴

احتمال خواسته‌شده، متمم حالاتی است که اعداد روشده باهم برابر باشند.

$$P(A) = ۱ - \frac{۶}{۳۶} = \frac{۵}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶ گزینه ۱



احتمال آبی بودن را $P(C)$ در نظر می‌گیریم. احتمال آبی بودن مهره انتخابی از جعبه B برابر است با:

$$P(C) = \frac{۶}{۱۵} \times \frac{۶}{۱۵} + \frac{۹}{۱۵} \times \frac{۵}{۱۵} = \frac{۸۱}{۲۲۵} = ۰/۳۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ گزینه ۲

تعداد زوج‌هایی که باهم برابر و متوالی‌اند را در جدول زیر مشخص می‌کنیم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	×	×				
۲	×	×	×			
۳		×	×	×		
۴			×	×	×	
۵				×	×	×
۶					×	×

بنابراین:

$$P(A) = ۱ - \frac{۱۶}{۳۶} = ۱ - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۸ گزینه ۳

طبق اطلاعات مسئله پیشامد "عدد سوم ۱۰ باشد" را با A نمایش می‌دهیم.

معنی این جمله این است که عدد انتخابی اول و دوم ۱۰ نمی‌باشند و عدد سوم ۱۰ است.

$$P(A) = \frac{n-۱}{n} \times \frac{n-۲}{n-۱} \times \frac{۱}{n-۲} = \frac{۱}{n} = \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow n = ۱۵$$

حال از بین اعداد ۱ تا ۱۵ احتمال آن را حساب می‌کنیم که عدد اول و دوم مضرب ۳ نباشد و فقط عدد سوم مضرب ۳ باشد. توجه داشته باشید که مضارب ۳ عبارتند از $\{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵\}$.

$$P(B) = \frac{۱۰}{۱۵} \times \frac{۹}{۱۴} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۵}{۹۱}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ گزینه ۲

پیشامد اینکه در n بار پرتاب دقیقاً بار kام "رو" ظاهر شود مانند این است که تمام $k-۱$ بار قبلی در $n-۱$ پرتاب پشت ظاهر شده باشد:

$$\binom{n-۱}{k-۱} = \frac{k}{k+۵}\binom{n}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!} = \frac{k}{k+۵}\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{k}{k+۵}\frac{n}{k} \Rightarrow ۱ = \frac{n}{k+۵} \Rightarrow n = k+۵ \xrightarrow{+k} n+k = ۲k+۵$$

$n+k$ باید عددی فرد و بزرگتر از ۷ باشد. تنها گزینه با این ویژگی‌ها گزینهٔ ۲ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۴

$$۰/۴ \times ۰/۲۵ + ۰/۳۵ \times ۰/۳ + ۰/۲۵ \times ۰/۳۵ = ۰/۱ + ۰/۱۰۵ + ۰/۰۸۷۵ = ۰/۲۹۲۵$$

۲۹/۲۵ درصد احتمال دارد امیر در رشته پزشکی قبول شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۱ گزینه ۳

در پرتاب nاُم، mاُمین "رو" ظاهر شود، یعنی در $n-1$ پرتاب قبلی $m-1$ بار "رو" ظاهر شده باشد.

$$\Rightarrow \frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^n} = \frac{m}{m+3} \times \frac{\binom{n}{m}}{2^n}$$
$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-m+1)!} = \frac{m}{m+3} \times \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(m-1)!} = \frac{m}{m+3} \times \frac{n!}{m!}$$
$$\Rightarrow 1 = \frac{m}{m+3} \times \frac{n}{m} \Rightarrow n = m+3$$
$$\Rightarrow nm = m(m+3) \xrightarrow{m=5} nm = 5 \times 8 = 40$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۱

با استفاده از فرمول احتمال کل داریم:

$$P = 0/45 \times 0/2 + 0/2 \times 0/25 + 0/35 \times 0/3 = 0/245$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۳ گزینه ۴

پرتاب دو سکه:
- جفت رو: $\frac{1}{4}$ ⇒ یک سکه می‌اندازیم $\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}$ صفر
- (رو, پشت): $\frac{1}{4}$ ⇒ دو سکه می‌اندازیم $\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}$ $\frac{1}{2}$: یکی پشت و یکی رو می‌خواهیم
- (پشت, رو): $\frac{1}{4}$ ⇒ دو سکه می‌اندازیم $\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}$ $\frac{1}{2}$: یکی پشت و یکی رو می‌خواهیم
- جفت پشت: $\frac{1}{4}$ ⇒ یک سکه می‌اندازیم $\xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}}$ $\frac{1}{2}$: یک رو ظاهر شود

در کل: $\frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۳

پیشامد "بردن رقیب اصلی" را با A و پیشامد "کسب مدال طلا" را با B نمایش می‌دهیم.

$$P(A) = \frac{1}{5} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{3}$$
$$P(B|A) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{10}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{6+10-3}{30} = \frac{13}{30}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۵ گزینه ۴

$$P(\text{ابتلا}) = ۰/۰۸\ ,\ P(\text{ابتلا}|\text{بهبود}) = ۰/۵$$

$$\Rightarrow P(\text{ابتلا} \cap \text{بهبود}) = P(\text{ابتلا}) \times P(\text{ابتلا}|\text{بهبود})$$
$$= ۰/۰۸ \times ۰/۵ = ۰/۰۴$$

$$\Rightarrow ۰/۰۴ \times ۱۰۰ = ۴\,\%$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۴

A: متولد شدن خرگوش نر در اولین بارداری

B: متولد شدن خرگوش نر در دومین بارداری

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۶}{۰/۷} = \frac{۶}{۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۷ گزینه ۳

A: قبولی در امتحان اول

B: قبولی در امتحان دوم

$$P(B) = ۰/۹ \quad , \quad P(A \cap B) = ۰/۸۵$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۸۵}{۰/۹} = \frac{۱۷}{۱۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۸ گزینه ۱

$$n(S) = \overset{\text{یک‌رقمی}}{۵} + \overset{\text{دورقمی}}{۴ \times ۵} + \overset{\text{سه‌رقمی}}{۳ \times ۴ \times ۵} + \overset{\text{چهاررقمی}}{۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵} + \overset{\text{پنج‌رقمی}}{۵!}$$

$$n(A) = \underset{\downarrow}{۱}_{۴} + \underset{(۱۲,۲۴,۳۲,۵۲)}{۴} + ۳ \times ۴ + ۲ \times ۳ \times ۴ + ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$$

$$\Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۹ گزینه ۳

۳ کتاب انگلیسی ۵ کتاب فارسی

$$n(S) = ۸!$$

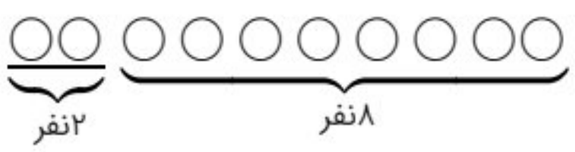
$$n(A) = ۵! \times ۳! \times ۲$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵! \times ۳! \times ۲}{۸!} = \frac{۳ \times ۲ \times ۲}{۸ \times ۷ \times ۶} = \frac{۱}{۲۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۰ گزینه ۳

برای محاسبهٔ احتمال اینکه دو فرد موردنظر در کنار هم نباشند، احتمال اینکه هر دو فرد در کنار هم باشند را محاسبه می‌کنیم و از احتمال کل کم می‌کنیم.



دو نفر در کنار هم باشند:

$$P(A') = \frac{۲!۹!}{۱۰!} = \frac{۱}{۵}$$

دو نفر در کنار هم نباشند:

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ گزینه ۲

مهرهٔ اول در حل مسئله تأثیری ندارد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}} = \frac{\frac{۵ \times ۴}{۲}}{\frac{۱۱ \times ۱۰}{۲}} = \frac{۲}{۱۱}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۲ گزینه ۴

حالت مختلف فضای نمونه‌ای را می‌نویسیم:

۱) یک رقمی‌ها: ۵ تا

۲) دورقمی‌ها: $\mathrm{P}(۵,۲) = ۲۰$

۳) سه رقمی‌ها: $\mathrm{P}(۵,۳) = ۶۰$

۴) چهاررقمی‌ها: $\mathrm{P}(۵,۴) = ۱۲۰$

۵) پنج رقمی‌ها: $۵! = ۱۲۰$

کل حالت‌ها برابر ۳۲۵ حالت است.

حال اعداد بخش‌پذیر بر ۳ را می‌نویسیم:

۱) در یک رقمی‌ها فقط عدد ۳ است.

۲) در دو رقمی‌ها ۸ تای آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیرند.

۱۲, ۲۱, ۱۵, ۵۱, ۲۴, ۴۲, ۴۵, ۵۴

۳) در سه رقمی‌ها دسته‌بندی می‌کنیم:

$\underline{۱۲۳}$, ۱۲۴ , ۱۲۵ , ۱۳۴ , $\underline{۱۳۵}$, ۱۴۵ , $\underline{۲۳۴}$, ۲۳۵ , ۲۴۵ , $\underline{۳۴۵}$

تعداد سه‌رقمی‌هایی که بر ۳ بخش‌پذیرند $(۴ \times ۳! = ۲۴)$ تا است.

۴) در چهاررقمی‌ها فقط اعدادی که بدون حضور عدد ۳ ساخته می‌شوند بر ۳ بخش پذیرند که تعداد آن‌ها $۴! = ۲۴$ می‌شود.

۵) همه پنج‌رقمی‌ها ساخته‌شده بر ۳ بخش‌پذیرند، یعنی $(۵! = ۱۲۰)$ تاست.

$$\mathrm{P} = \frac{۱ + ۸ + ۲۴ + ۲۴ + ۱۲۰}{۵ + ۲۰ + ۶۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰} = \frac{۱۷۷}{۳۲۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۳ گزینه ۱

احتمال قبولی در آزمون اول را $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ و احتمال قبولی در آزمون دوم را $\mathrm{P}(\mathrm{B})$ فرض می‌کنیم.

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = ۰/۷ \ , \ \mathrm{P}(\mathrm{B}) = ۰/۶ \ , \ \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = ۰/۸$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) = ۰/۷ \times ۰/۸ = ۰/۵۶$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = ۰/۷ + ۰/۶ - ۰/۵۶$$
$$= ۱/۳ - ۰/۵۶ = ۰/۷۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۴ گزینه ۴

$$P(A) = ۲P(B) = ۲x$$

$$P(A \cup B) = \frac{۷}{۹} \Rightarrow P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A)P(B)} = \frac{۷}{۹}$$

$$\Rightarrow ۲x + x - ۲x(x) = \frac{۷}{۹} \Rightarrow ۳x - ۲x^۲ = \frac{۷}{۹}$$

$$\xrightarrow{\times ۹} ۲۷x - ۱۸x^۲ = ۷ \Rightarrow ۱۸x^۲ - ۲۷x + ۷ = ۰$$

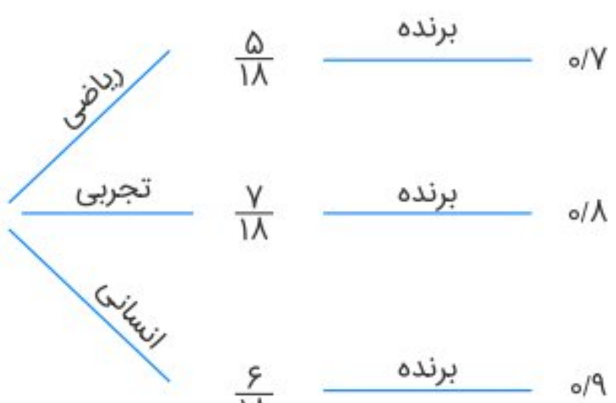
$$\Rightarrow (۳x - ۱)(۶x - ۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} & ✓ \\ x = \frac{۷}{۶} & \times \end{cases}$$

بنابراین $P(A) = ۲x = \frac{۲}{۳}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۵ گزینه ۲

فرض کنید A پیشامد برنده‌شدن بهروز باشد، پس:



$$P(A) = \frac{۵}{۱۸} \times ۰/۷ + \frac{۷}{۱۸} \times ۰/۸ + \frac{۶}{۱۸} \times ۰/۹$$
$$= \frac{۳۵}{۱۸۰} + \frac{۵۶}{۱۸۰} + \frac{۵۴}{۱۸۰} = \frac{۱۴۵}{۱۸۰} = \frac{۲۹}{۳۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ اول مربع جملهٔ دوم و جملهٔ چهارم برابر ۵ است. جملهٔ اول کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۵}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ سوم جذر جملهٔ چهارم و جملهٔ پنجم برابر ۲۷ است. جملهٔ اول دنباله، چقدر از $\frac{۱}{۲}$ کمتر است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که در هر دسته، کوچک‌ترین عضو، $\frac{۱}{۳}$ بزرگ‌ترین عضو دسته است. میانگین اعضای دستهٔ پنجم، کدام است؟

۱) ۲۴۰
۲) ۲۴۰/۵
۳) ۲۴۲
۴) ۲۴۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ با اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم یک دنبالهٔ حسابی، جملات اول و دوم دنبالهٔ حسابی جدید ساخته می‌شود. اختلاف جملهٔ nاُم دو دنباله کدام است؟

۱) ۴
۲) ۸
۳) ۲
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ اگر $n(A-B)=۳n(B-A)=۴n(A\cap B)$ و $n(A\cup B)=۵۷$ باشد، تعداد اعضای مجموعهٔ A کدام است؟

۱) ۳۳
۲) ۳۶
۳) ۴۵
۴) ۴۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

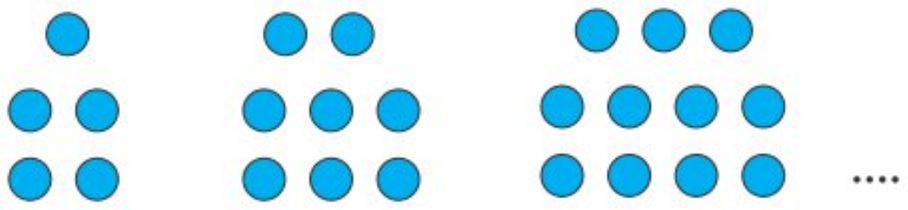
۶ اعداد ۱۴ و ۱۷/۲ به ترتیب جملات پنجم و هفتم یک دنبالهٔ درجه دوم هستند. اگر ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ جملهٔ عمومی، برابر $\frac{۱}{۷۰}$ قرینهٔ جملهٔ پنجم باشد، جملهٔ پانزدهم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) ۲
۲) ۲/۴
۳) ۴/۶
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۷ در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل دوازدهم کدام است؟



۱) ۳۴

۲) ۳۶

۳) ۳۸

۴) ۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸ در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d، تساوی $۶a_۴^۲ = ۵a_۳a + ۳a_۲a$ برقرار است. نسبت جملهٔ چهارم دنباله به d، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۳/۵

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = ۱۴$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

۱) ۸

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = ۵$ و تعداد اعضای مجموعهٔ $A \cup B$ برابر ۱۱ باشد، کمترین مقدار ممکن برای m کدام است؟

۱) ۶

۲) ۷

۳) ۸

۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۱ در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند)

۱) ۱۰۰

۲) ۱۳۵

۳) ۲۳۵

۴) ۲۷۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ جمله‌های چهارم و هشتم یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب جملهٔ دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جملهٔ دهم الگوی خطی باشد، جملهٔ پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$

۲) $\frac{۸}{۵}$

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

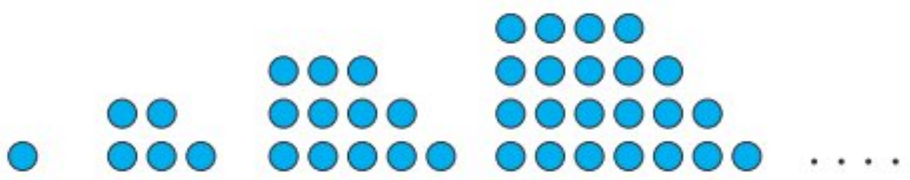
Scanned with CamScanner

۱۳ جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی، هستند. قدر نسبت (نسبت مشترک) دنبالهٔ هندسی، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۹}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴ در الگوی زیر، تعداد دایره‌ها در شکل نهم کدام است؟



۱) ۱۱۷
۲) ۱۲۰
۳) ۱۲۳
۴) ۱۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۵ اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جملهٔ شانزدهم کدام است؟

۱) ۱۱/۶
۲) ۹/۶
۳) ۲/۴
۴) ۱/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{۱\}, \{۲, ۳, ۴\}, \ldots$. در دستهٔ نهم واسطهٔ حسابی بین دو عدد اول و آخر، کدام است؟

۱) ۷۱
۲) ۷۲
۳) ۷۳
۴) ۷۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۱

$$t_۱ = t_۲^۲ \Rightarrow t_۱ = t_۱^۲ q^۲ \Rightarrow t_۱ q^۲ = ۱ \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{q^۲}$$

$$t_۴ = ۵ \Rightarrow t_۱ q^۳ = ۵ \Rightarrow \frac{۱}{q^۲} \times q^۳ = ۵ \Rightarrow q = ۵ \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{۲۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

$$a_۳ = \sqrt{a_۴} \Rightarrow a_۳^۲ = a_۴ \Rightarrow a_۱^۲ q^۴ = a_۱ q^۳ \Rightarrow a_۱ q = ۱$$

$$a_۵ = ۲۷ \Rightarrow a_۱ q^۴ = ۲۷ \xrightarrow{a_۱ q = ۱} ۱ \times q^۳ = ۲۷ \Rightarrow q = ۳ \Rightarrow a_۱ = \frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۱}{۲} - a_۱ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳

اعداد طبیعی، به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند.

$$\{۱, ۲, ۳\}, \{۴, ۵, \ldots, ۱۲\}, \{۱۳, ۱۴, \ldots, ۳۹\}, \{۴۰, ۴۱, \ldots, ۱۲۰\}, \{۱۲۱, ۱۲۲, \ldots, ۳۶۳\}$$

میانگین اعضای دستهٔ پنجم برابر است با:

$$\frac{۱۲۱ + ۳۶۳}{۲} = ۲۴۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ گزینه ۱

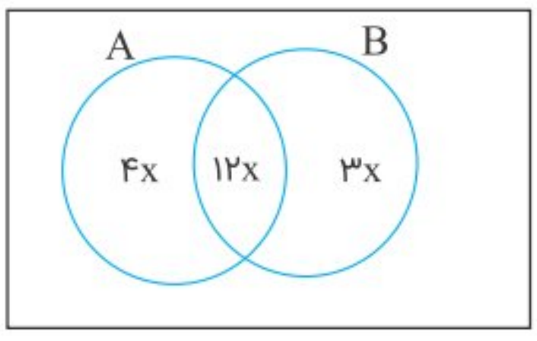
به همه جملات ۴ واحد اضافه می‌شود، بنابراین اختلاف جملات برابر ۴ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۵ گزینه ۴

با فرض $n(A \cap B) = ۱۲x$ داریم:



$$n(A \cup B) = ۵۷ \Rightarrow ۱۹x = ۵۷ \Rightarrow x = ۳$$

$$n(A) = ۱۶x = ۱۶ \times ۳ = ۴۸$$

۶ گزینه ۴

$$a_n = an^۲ + bn + c$$

$$a = \frac{۱}{۷۰}(-a_۵) = -\frac{۱}{۵}$$

$$a_۵ = ۱۴ \Rightarrow -\frac{۱}{۵}(۲۵) + ۵b + c = ۱۴ \Rightarrow -۵ + ۵b + c = ۱۴$$

$$a_۷ = ۱۷/۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۵}(۴۹) + ۷b + c = ۱۷/۲ \Rightarrow -\frac{۴۹}{۵} + ۷b + c = ۱۷/۲$$

از حل دو معادله دو مجهول داریم:

$$b = ۴\,,\, c = -۱$$

$$a_n = \frac{-۱}{۵}n^۲ + ۴n - ۱$$

$$a_{۱۵} = -۴۵ + ۶۰ - ۱ = ۱۴$$

$$a_۱ = -\frac{۱}{۵} + ۴ - ۱ = \frac{۱۴}{۵}$$

$$\frac{a_{۱۵}}{a_۱} = \frac{۱۴}{\frac{۱۴}{۵}} = ۵$$

Scanned with CamScanner

۷ گزینه ۳

راه‌حل اول:

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد دایره ها	۵	۸	۱۱

(+۳ بین ۵ و ۸، +۳ بین ۸ و ۱۱)

تعداد دایره‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، بنابراین داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{12} = 5 + 11 \times 3 = 38$$

راه‌حل دوم:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 + 2 \times 2 \\ a_2 &= 2 + 2 \times 3 \\ a_3 &= 3 + 2 \times 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = n + 2 \times (n+1) = 3n + 2$$

بنابراین با یک الگوی خطی با جملهٔ عمومی $a_n = 3n + 2$ مواجه هستیم. جملهٔ دوازدهم الگو برابر است با:

$$a_{12} = 3(12) + 2 = 38$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸ گزینه ۱

$$a, a+d, a+2d, \ldots$$

$$6(a+d)^2 = 5(a+2d)a + 3(a+d)a$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 12ad + 6d^2 = 5a^2 + 10ad + 3a^2 + 3ad$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 6d^2 + ad = 0 \quad , \quad \frac{a}{d} = x \Rightarrow a = dx$$

$$\Rightarrow 2d^2x^2 - 6d^2 + d^2x = 0 \Rightarrow d^2(2x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = -2$$

$$\frac{a_4}{d} = \frac{a+3d}{d} = \frac{a}{d} + 3 = x + 3 : \begin{cases} x = -2 : x + 3 = 1 \\ x = \frac{3}{2} : x + 3 = 4/5 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۴

$$n(A) = m \quad , \quad n(B) = k$$

$$m - k = n(A) - n(B) = ۱۴$$

$$\Rightarrow n(A - B) + n(A \cap B) - (n(B - A) + n(A \cap B)) = ۱۴$$

$$\Rightarrow n(A - B) - n(B - A) = ۱۴ \ \ (I)$$

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = ۲۰$$

$$\Rightarrow n(A - B) + n(B - A) = ۲۰ \ \ (II)$$

$$\xrightarrow{I,II} \begin{cases} n(A - B) - n(B - A) = ۱۴ \\ n(A - B) + n(B - A) = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow n(B - A) = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۳

برای اینکه تعداد عضوهای A کمترین شود باید اشتراک A و B به حداقل برسد، یعنی: $n(A \cap B) = ۰$

$$n(A) = m \quad , \quad n(B) = k$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۱۱ \xrightarrow{n(A \cap B) = ۰} n(A) + n(B) = ۱۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - k = ۵ \\ m + k = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow ۲m = ۱۶ \Rightarrow m = ۸$$

توجه کنید که اگر تعداد اعضای اشتراک A و B عددی بزرگتر از صفر باشد، مقداری که برای m به دست می‌آید از ۸ بزرگ‌تر می‌شود. امتحان کنید!

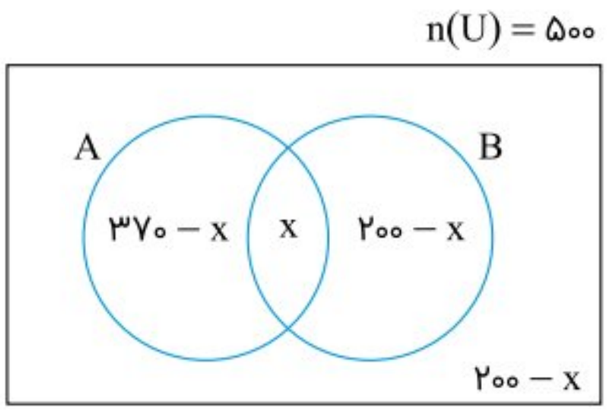
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۱ گزینه ۳

مجموعهٔ A: مزرعه‌داران چای

مجموعهٔ B: شالیزارداران

در نمودار وِن زیر تعداد اعضای هر کدام را نوشته‌ایم:



$$(۳۷۰ - x) + (x) + (۲۰۰ - x) + (۲۰۰ - x) = ۵۰۰ \Rightarrow x = ۱۳۵$$

$$n(A - B) = ۳۷۰ - ۱۳۵ = ۲۳۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۲ گزینه ۴

دنبالهٔ حسابی را t_n با قدرنسبت d و الگوی خطی را a_n با قدرنسبت d' نمایش دهیم:

$$t_۸ - t_۴ = a_۷ - a_۲ \Rightarrow ۴d = ۵d' \Rightarrow \frac{d'}{d} = \frac{۴}{۵}$$

$$a_{۱۰} = ۰ \Rightarrow a_۱ + ۹d' = ۰ \Rightarrow a_۱ = -۹d'$$

$$\frac{a_{۱۵}}{d} = \frac{a_۱ + ۱۴d'}{d} = \frac{-۹d' + ۱۴d'}{d} = ۵\frac{d'}{d} = ۵ \times \frac{۴}{۵} = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۳ گزینه ۴

راه‌حل اول:

جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت (اختلاف مشترک) d و جملهٔ اول $a_۱$ برابر است با:

$$\underbrace{a_۱ + ۲d}_{t_۱}, \underbrace{a_۱ + ۶d}_{t_۲}, \underbrace{a_۱ + ۱۵d}_{t_۳}$$

$t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی هستند، پس داریم:

$$t_۲^۲ = t_۱t_۳ \Rightarrow (a_۱ + ۶d)^۲ = (a_۱ + ۲d)(a_۱ + ۱۵d)$$

$$\Rightarrow \cancel{a_۱^۲} + ۱۲a_۱d + ۳۶d^۲ = \cancel{a_۱^۲} + ۱۷a_۱d + ۳۰d^۲$$

$$\Rightarrow ۶d^۲ - ۵a_۱d = ۰ \Rightarrow d(۶d - ۵a_۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = ۰ \Rightarrow r = ۱ & \text{(در گزینه‌ها نیست)} \\ ۶d - ۵a_۱ = ۰ \Rightarrow d = \frac{۵}{۶}a_۱ & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$t_۱ = a_۱ + ۲d = a_۱ + ۲\left(\frac{۵}{۶}a_۱\right) = \frac{۸}{۳}a_۱$$

$$t_۲ = a_۱ + ۶d = a_۱ + ۶\left(\frac{۵}{۶}a_۱\right) = ۶a_۱$$

درنتیجه قدر نسبت (نسبت مشترک) دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$r = \frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۶a_۱}{\frac{۸}{۳}a_۱} = \frac{۱۸}{۸} = \frac{۹}{۴}$$

راه‌حل دوم:

نکته: اگر جملات a_n، a_m و a_k از یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، قدر نسبت (نسبت مشترک) دنبالهٔ هندسی برابر است با: $r = \frac{k-m}{m-n}$

$a_۳$، $a_۷$ و $a_{۱۶}$ جملات یک دنبالهٔ هندسی هستند، پس طبق نکته داریم:

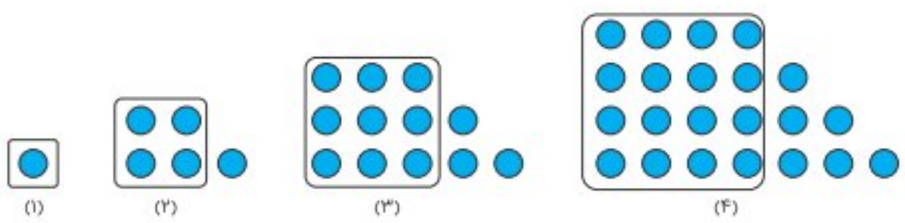
$$r = \frac{۱۶ - ۷}{۷ - ۳} = \frac{۹}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۴ گزینه ۱

الگوی داده‌شده را به‌صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:



طبق شکل داریم:

$$a_۱ = ۱^۲ + ۰ \quad , \quad a_۲ = ۲^۲ + (۰+۱) \quad , \quad a_۳ = ۳^۲ + (۰+۱+۲) \quad , \quad \ldots$$
$$\Rightarrow a_n = n^۲ + (۰+۱+۲+\ldots+(n-۱))$$

بنابراین در شکل نهم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$۹^۲ + (۰+۱+۲+۳+\ldots+۸) = ۸۱ + \frac{۸\times۹}{۲} = ۸۱ + ۳۶ = ۱۱۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۵ گزینه ۴

$$t_n = an + b$$

$$\begin{cases} t_۵ = ۸ \\ t_{۱۰} = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵a + b = ۸ \\ ۱۰a + b = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۵a = -۳ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۵} = -۰/۶$$

$$۵a + b = ۸ \xrightarrow{a=-۰/۶} -۳ + b = ۸ \Rightarrow b = ۱۱$$

$$t_{۱۶} = ۱۶a + b = ۱۶(-۰/۶) + ۱۱ = ۱/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۶ گزینه ۳

دستهٔ اول : $\{۱\}$

دستهٔ دوم : $\{\underbrace{۲}_{۱+۱}, ۳, \underbrace{۴}_{۲^۲}\}$

دستهٔ سوم : $\{\underbrace{۵}_{۲^۲+۱}, ۶, ۷, ۸, \underbrace{۹}_{۳^۲}\}$

$\vdots$

دستهٔ هشتم : $\left\{\underbrace{۵۰}_{۷^۲+۱}, \dots, \underbrace{۶۴}_{۸^۲}\right\}$

دستهٔ نهم : $\left\{\underbrace{۶۵}_{۸^۲+۱}, \dots, \underbrace{۸۱}_{۹^۲}\right\}$

$$\Rightarrow \text{واسطهٔ حسابی} = \frac{۸۱+۶۵}{۲} = \frac{۱۴۶}{۲} = ۷۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

کلاس های آنلاین

کنکور-نهایی

ریاضی تجربی،حسابان

(خصوصی،گروهی)

جهت هماهنگی پیامک کنید

09120726440

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

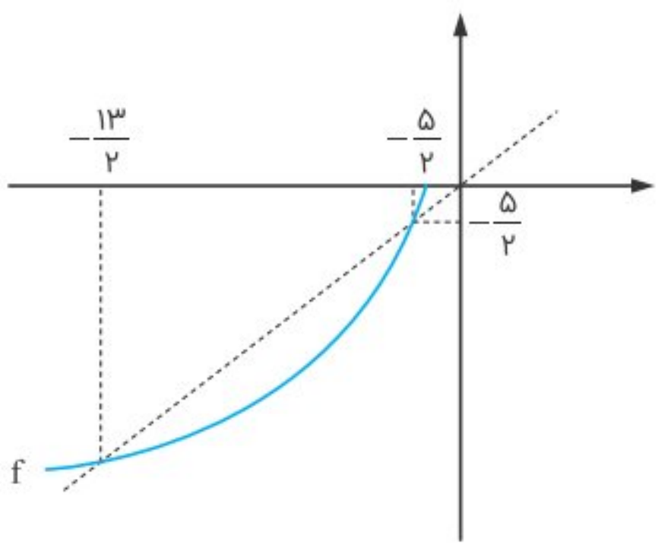
منبع:

۱ حداقل چند عضو از مجموعه $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z}\,,\,x=\frac{۷۲}{y^{۲}-۱}\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ شکل زیر، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{\frac{f^{-۱}(x)}{x-f^{-۱}(x)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ بازهٔ $(۰,\frac{۱}{۲})$، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار تابع $y=۲x^{۲}+\frac{۳}{۲}x+c$، پایین نمودار تابع $y=\frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $-\frac{۳}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ اگر نقطهٔ $(-۱,\frac{۱}{۴})$ روی تابع وارون تابع $y=\frac{ax}{۱+|x|}$ باشد، مقدار a، کدام است؟

۱) -۳
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۵ بازهٔ $(۰,-\frac{۵}{۴})$، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار تابع $y=-۲x^{۲}-\frac{۳}{۲}x+c$، بالای نمودار تابع $y=\frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

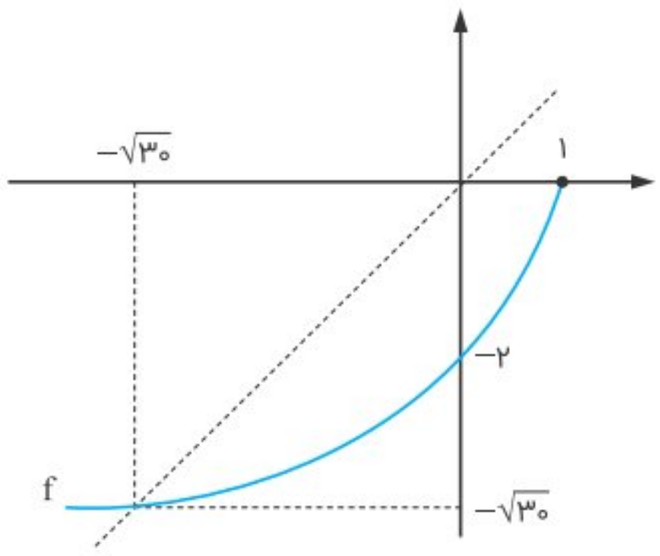
Scanned with CamScanner

۶ برد تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$، برابر $[b, c]$ است. اگر $k = a^۲ - ۳a + ۳$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر a کدام است؟

۱) ۲
۲) -۲
۳) ۳
۴) -۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۷ شکل زیر، نمودار تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{-x + f^{-۱}(x)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۷
۲) بیش از ۷
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۸ رابطهٔ $f = \{(۲, ۳n^۲ - ۱), (۱, ۱), (۳, \frac{۱}{n}), (۲, ۲n), (n, ۲)\}$ تابع است. مقدار تابع f در ۳، کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) -۳
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۹ دامنهٔ تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$، برابر $[b, c]$ است. اگر $k = ۲a^۲ - a - ۵$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر a کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) $-۲/۵$
۴) $۲/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۰ رابطهٔ $f = \{(۷, ۱ - ۳n^۲), (۱, -۱), (۲, n), (۷, -۲n), (\frac{۱}{n}, ۲)\}$ تابع است. مقدار تابع f در ۲، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) -۱
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۱ اگر نقطهٔ $(-\frac{۳}{۵}, -\frac{۱}{۸})$ روی تابع وارون تابع $y = \frac{x}{a + a|x|}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲۷}$
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۱۲ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳}+۲a & ;|x|\le ۱\\ ax^۲+۵ & ;|x|\ge ۱\end{cases}$، ضابطهٔ تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۴۶
۲) ۳۲
۳) ۲۵
۴) ۱۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۳ اگر $y=\frac{x+۲}{۴}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۲}$ ضابطهٔ تابع وارون $y=ax+a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۴ تابع $y=(x-۱)|x|$ در بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۵ به‌ازای چند مقدار طبیعی از دامنهٔ تابع $y=-\frac{۱}{۳-x}$، نمودار این تابع بالای $y=-۴$ و پایین $y=۰$ قرار دارد؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۶ اگر $g(x)=-|x|\sqrt{x}\,,\ f=\{(\frac{۱}{۹},-۱),(\frac{۱}{۳},۱),(-\frac{۱}{۴},۳),(\frac{۱}{۴},-۳)\}$ و $fog^{-۱}(a)=-۳$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $-\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۷ ریشه‌های معادله $۲x^۲-ax+b=۰$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $۲ax^۲+ax-۶=۰$ بیشتر است. مقدار $[\frac{ab}{۴}]$ کدام است؟

۱) -۴
۲) -۳
۳) -۲
۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۸ تابع $f(x) = \begin{cases} ۲ - ۳x & ; ۲x + ۳ \leq ۰ \\ ۲ + ۲mx - x^۲ & ; ۲x + ۳ > ۰ \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱۹)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

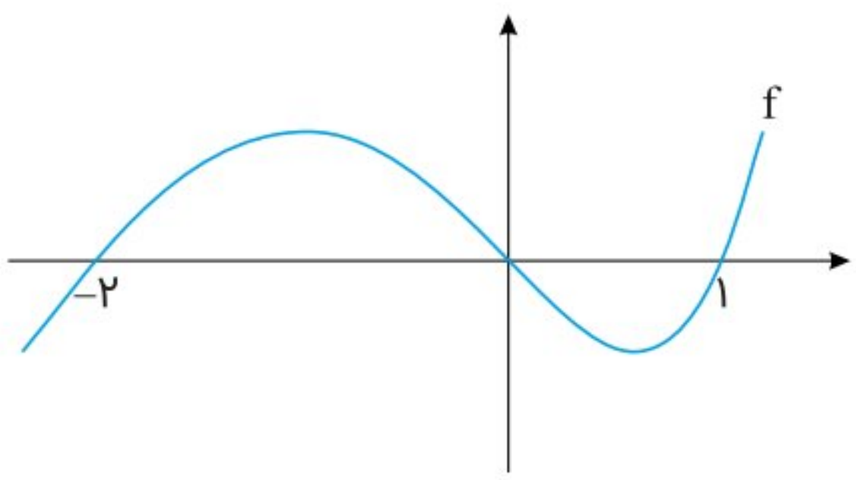
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۹ نمودار تابع $y = ۲^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم، تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۰ نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲ + x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۱ اگر $f(x) = \left((\frac{۱}{۲})^x + \log_{۰/۵} x \right)^۳$ باشد، مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(۲^{-۳x})$ زیرمجموعهٔ کدام بازه است؟ (با تغییر)

۱) $(۱, \frac{۱۱}{۸})$
۲) $(۱, +\infty)$
۳) $(\frac{۱۱}{۸}, +\infty)$
۴) $(۰, ۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲۲ اگر $f(x) = (x + \log x)^۵$ باشد، مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(x^۵)$ زیرمجموعهٔ کدام بازه است؟ (با تغییر)

۱) $(۱, ۵)$
۲) $(۰, ۱)$
۳) $(۵, +\infty)$
۴) $(۱, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۳ تابع $f(x) = mx^۲ - nx - k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعهٔ زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟

$$\{(m, n-۱), (۰, k), (n-۱, m^۲ + ۲m - ۱), (۳k + ۲, ۲k + ۱)\}$$

۱) -۱
۲) $-\sqrt{۵}$
۳) ۱
۴) $\sqrt{۵}$

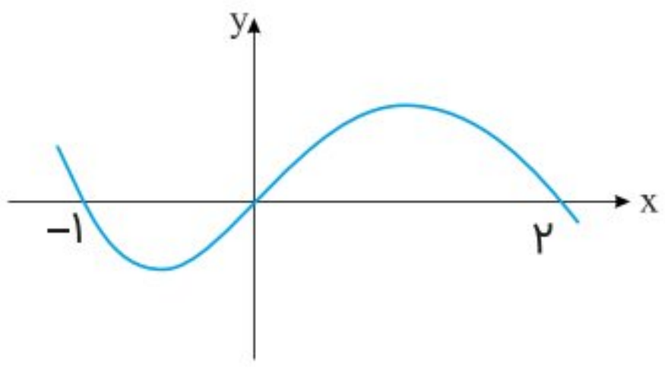
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۴ اگر $f(x) = ۲[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{۵}{۳})$، کدام است؟

۱) ۴
۲) -۴
۳) -۶
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۵ شکل زیر، نمودار $f(x-۲)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) صفر
۴) بیش از ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲۶ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} & ; ۲x - ۵ \geq ۰ \\ -۲x^۲ + ax - ۲۱ & ; ۲x - ۵ < ۰ \end{cases}$ روی دامنهٔ تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به ازای بزرگ‌ترین مقدار صحیح a باشد، مقدار $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲۷ اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = f([x - f(x)])$ باشد، $fog(-\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) -۴
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲۸ حداقل چند عضو از مجموعهٔ $\{f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{۳۰}{۱ + |y|}\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۹ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۱۲) + g(۶)$، کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۱
۳) ۱۳
۴) ۱۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۰ قرینهٔ نمودار تابع $y = ۲ + \sqrt{x - ۱}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) -۲
۴) -۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۱ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{۱ - ۲x}{x + ۱}$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟

۱) $[-۱, ۱)$
۲) $(-۱, ۱]$
۳) $[۱, +\infty)$
۴) $(-\infty, ۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۲ فرض کنید $g(x) = \begin{cases} ۱ & ; x > ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \\ -۱ & ; x < ۰ \end{cases}$ و $f(x) = ۱ - x^۲$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۴x - x^۲$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۴ اگر $g(x)$ وارون تابع $x \geq ۱$، $f(x) = ۱ + x - ۲\sqrt{x}$ باشد، $(gog)(۱)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۹
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۳۵ نمودار $\frac{۱}{f}$ را در امتداد محور xها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{۱}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a)=۳$ کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۲}$
۲) ۲
۳) $۲-\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳۶ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\frac{۱}{۲x}$ بر دامنهٔ $(۰,+\infty)$ مفروض است. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۴}$
۳) -۱
۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۷ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۴}\left(|x^{۲}-۲|-x\right)$، کدام است؟

۱) $(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(۲,+\infty)$
۲) $(-\infty,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$
۳) $[-۱,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$
۴) $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۸ باتوجه‌به نمودارهای f و g در شکل زیر، حاصل $gof^{-۱}(-۲)\times gog(۰)$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۴
۳) -۴
۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۹ اگر $f(x)=(ax+۲)(b-x)-۷x^{۲}$ ضابطهٔ یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۷}$
۲) $\frac{۲}{۷}$
۳) $-\frac{۴}{۷}$
۴) $\frac{۴}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۰ اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^{۳}+x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$ کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۴۱ وارون تابع $y = x^۳ - x + ۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(-۱, -۲)$
۲) $(\frac{۵}{۸}, \frac{۱}{۲})$
۳) $(۱, ۲)$
۴) $(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱۱}{۸})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۲ وارون تابع $y = -۳x^۳ + ۲x - ۱۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(۹, -۲)$
۲) $(۲, -۳۱)$
۳) $(-۱, ۱۰)$
۴) $(-۱۲, -۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۳ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(۳) = ۰$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^۲ f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۴ اگر $\frac{۱ - ۳x}{x + ۱} > -۲$ باشد، مجموعه مقادیر $[\frac{x}{۲}]$ چند عضو دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۵ معادلهٔ $\frac{x - ۱}{\sqrt{x - ۱}} = \frac{\sqrt{x + ۱}}{۳ - \sqrt{x - ۱}} - \frac{\sqrt{x + ۱}}{\sqrt{x - ۱} + ۳}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۶ اگر $\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱} \geq ۰$ باشد، مجموعهٔ مقادیر $[۳x]$ چند عضو دارد؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۷ تابع $f(x) = (-۹ + k^۲)x^۳ + ۵$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k، چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۴۸ اگر $gof(x) = ۵x^۲ + ۱۱$ و $f(x) = ۲x$ باشد، کمترین مقدار $g(x - ۷)$ چقدر است؟

۱) ۳
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۹ دو تابع $f(x) = b - ۳ax$ و $g(x) = c - (۳b - ۳)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = ۵$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

۱) -۶
۲) -۴
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵۰ نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور xها را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۵۱ تابع $y = ۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور xها در جهت منفی و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۷}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲x \; ; (x > ۱)$، مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور xها را ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$
۲) $۶\sqrt{۲}$
۳) $۵\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۳ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + ۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۳) + g(۱۵)$، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۱
۳) ۱۰
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۴ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x - \frac{۲}{x}$ در دامنهٔ $D_f = (-\infty, ۰)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

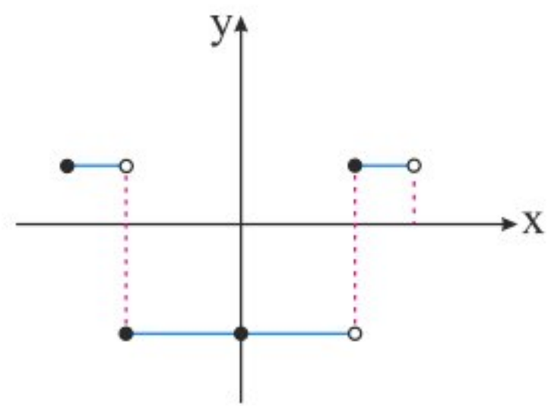
Scanned with CamScanner

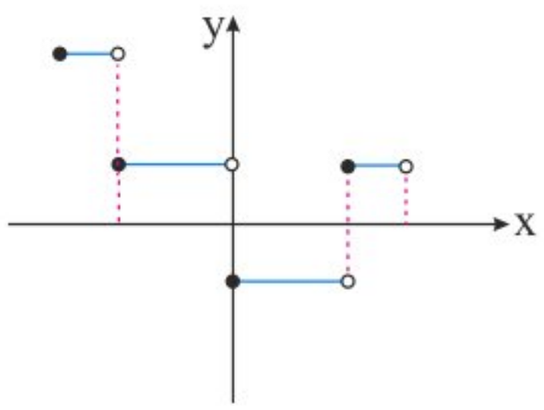
۵۵ اگر $x \geq ۱$; $f(x) = x^۲ - ۲x - ۳$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x) = \frac{x - ۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

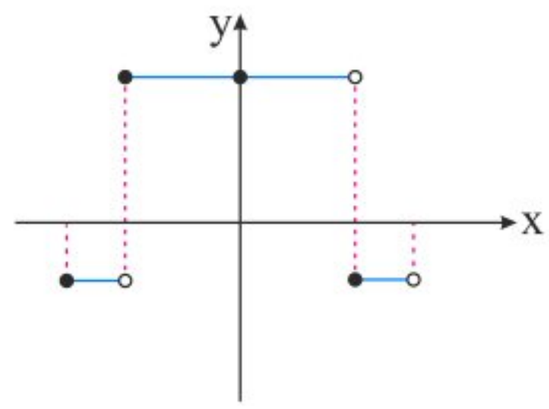
۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۸
۴) ۲۱

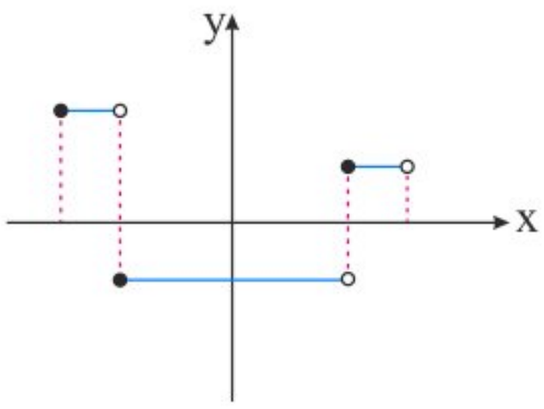
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۶ نمودار تابع $y = ۲|[۳x]| - ۱$ به‌ازای $-\frac{۱}{۲} \leq x < \frac{۱}{۲}$، کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵۷ فرض کنید $f(x) = x(۱ - x^۲)$ و $g(x) = \begin{cases} ۱ & ; x > ۰ \\ ۰ & ; x = ۰ \\ -۱ & ; x < ۰ \end{cases}$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(fof)og$، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵۸ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۵}$
۲) $۶\sqrt{۷}$
۳) $۴\sqrt{۱۷}$
۴) $۶\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵۹ اگر $f(x) = ۲x - [۲x]$ و $g(x) = -x^۲ + ۴x$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟

۱) $[۰, ۲)$
۲) $[۰, ۳)$
۳) $[۰, ۴)$
۴) $[۱, ۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۶۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۲| + |x-۱|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty, -۲)$ ۲) $(-\infty, ۱)$

۳) $(-۲, ۱)$ ۴) $(۱, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۶۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۱| - |x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty, ۲)$ ۲) $(-۱, +\infty)$

۳) $(-۱, ۲)$ ۴) $(۲, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۲

چون x عدد صحیح است پس ۷۲ باید بر $y^۲ - ۱$ بخش‌پذیر باشد از طرفی y هم باید عدد صحیح باشد:

$$y^۲ = ۰, ۴, ۹, ۲۵ \Rightarrow y = ۰, \pm ۲, \pm ۳, \pm ۵$$

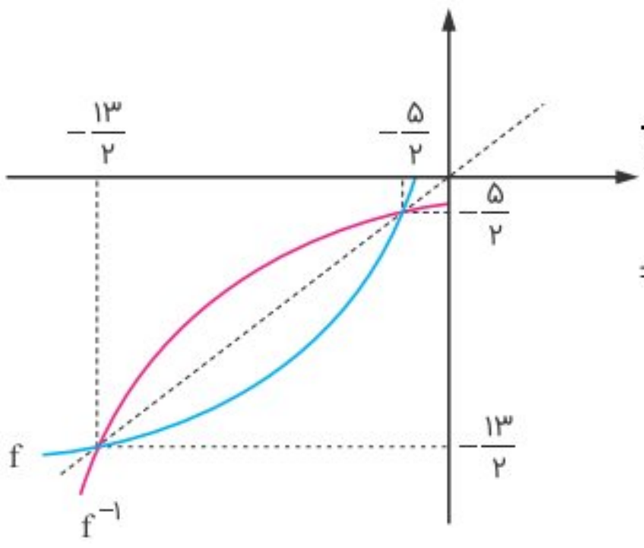
$$\Rightarrow f = \{(-۷۲, ۰), (۲۴, ۲), (۲۴, -۲), (۹, ۳), (۹, -۳), (۳, ۵), (۳, -۵)\}$$

با حذف حداقل ۳ عضو تابع خواهیم داشت.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۳

معادلهٔ خط داده‌شده، $y = x$ است؛ بنابراین نمودار تابع $f^{-۱}$، به‌صورت زیر است.
تابع $f^{-۱}(x)$، همواره زیر محور xها است؛ بنابراین $f^{-۱}(x)$ همواره منفی است.



$$\frac{f^{-۱}(x)}{x - f^{-۱}(x)} \geq ۰ \xrightarrow{f^{-۱}(x) < ۰} x - f^{-۱}(x) < ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x) > x$$

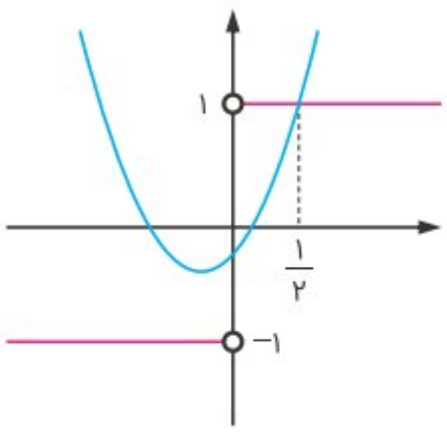
$$\Rightarrow x \in (-\frac{۱۳}{۲}, \frac{-۵}{۲}) \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{-۶, -۵, -۴, -۳\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۳ گزینه ۳

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} ۱ & ;x > ۰ \\ -۱ & ;x < ۰ \end{cases}$$



طبق داده‌های مسئله، باید داشته باشیم:

$$۱)\ f(۰) \geq -۱ \Rightarrow c \geq -۱$$

$$۲)\ f(\frac{۱}{۲}) = ۱ \Rightarrow ۲(\frac{۱}{۴}) + \frac{۳}{۲}(\frac{۱}{۲}) + c = ۱ \Rightarrow c = -\frac{۱}{۴}$$

جواب به‌دست‌آمده، قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ گزینه ۳

اگر نقطهٔ $(-۱, \frac{۱}{۴})$ روی وارون تابع قرار گیرد، آنگاه نقطهٔ $(\frac{۱}{۴}, -۱)$ روی خود تابع قرار می‌گیرد.

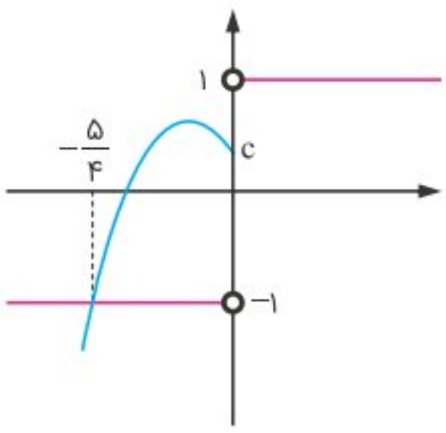
$$\frac{۱}{۴} = \frac{-a}{۱+۱} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۵ گزینه ۳

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} ۱ & ;x > ۰ \\ -۱ & ;x < ۰ \end{cases}$$



$$f(۰) \geq -۱ \Rightarrow c \geq -۱$$

$$f(-\frac{۵}{۴}) = -۱ \Rightarrow -۲ \times \frac{۲۵}{۱۶} - \frac{۳}{۲} \times (-\frac{۵}{۴}) + c = -۱$$

$$\Rightarrow -\frac{۲۵}{۸} + \frac{۱۵}{۸} + c = -۱$$

$$\Rightarrow c = -۱ + \frac{۱۰}{۸} = -۱ + \frac{۵}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۶ گزینه ۱

اگر $k = ۱$ باشد، برد دو تابع باهم برابر خواهند بود.

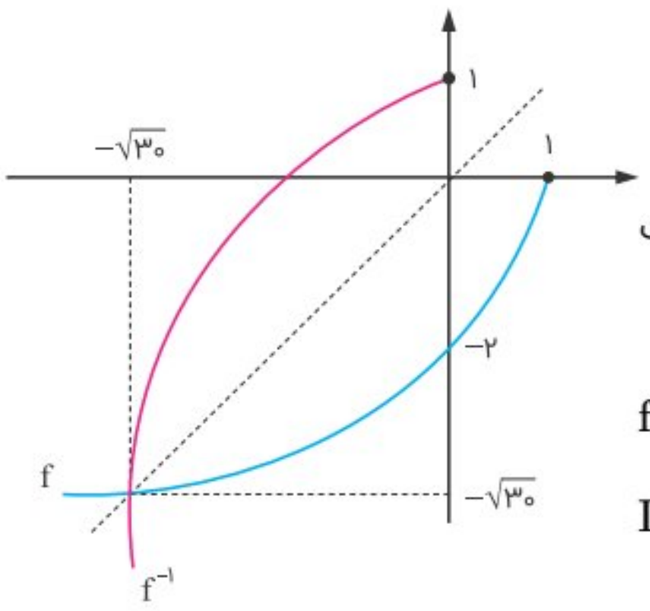
$$k = a^۲ - ۳a + ۳ \xrightarrow{k=۱} a^۲ - ۳a + ۲ = ۰ \Rightarrow a_۱ a_۲ = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۷ گزینه ۲

نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم.



دامنهٔ تابع، جواب نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{f^{-1}(x)-x} \geq ۰$ است. $f(x) \leq ۰$ است و f تنها در یک نقطه برابر صفر است $(f(۱)=۰)$. پس کافی است که:

$$f^{-1}(x)-x<۰ \Rightarrow f^{-1}(x)<x \Rightarrow x<-\sqrt{۳۰}$$

$$D_y=(-\infty,-\sqrt{۳۰})\cup\{۱\}$$

بنابراین بی‌شمار عدد صحیح در دامنهٔ تابع صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۸ گزینه ۳

$$\begin{cases}(۲,۳n^۲-۱)\in f\\(۲,۲n)\in f\end{cases} \Rightarrow ۳n^۲-۱=۲n \Rightarrow ۳n^۲-۲n-۱=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}n=۱\\n=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

به ازای $n=۱$، f تابع نیست؛ اما به ازای $n=-\frac{۱}{۳}$، f تابع است.

$$f(۳)=\frac{۱}{n}=\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}}=-۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۹ گزینه ۱

از برابری دامنهٔ $f(x)$ و $f(kx)$، $k=۱$ نتیجه می‌شود.

$$۱=۲a^۲-a-۵ \Rightarrow ۲a^۲-a-۶=۰ \Rightarrow a_۱a_۲=\frac{-۶}{۲}=-۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۱۰ گزینه ۱

$$\begin{cases}(۷,۱-۳n^۲)\\(۷,-۲n)\end{cases} \Rightarrow -۲n=۱-۳n^۲ \Rightarrow ۳n^۲-۲n-۱=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}n=۱ \Rightarrow f=\{(۷,-۲),\underline{(۱,-۱)},(۲,۱),(۷,-۲),\underline{(۱,۲)}\} & \times\\ n=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow f=\{(۷,\frac{۲}{۳}),(۱,-۱),(۲,-\frac{۱}{۳}),(۷,\frac{۲}{۳}),(-۳,۲)\} & \checkmark\end{cases}$$

به ازای $n=۱$ رابطه تابع نیست؛ پس فقط $n=-\frac{۱}{۳}$ قابل‌قبول است. بنابراین:

$$f(۲)=-\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۱ گزینه ۳

نقطهٔ $(-\frac{۱}{۸},-\frac{۳}{۵})$ روی تابع $y=\frac{x}{a+a|x|}$ قرار می‌گیرد. بنابراین:

$$\frac{-\frac{۳}{۵}}{a+a(\frac{۳}{۵})}=-\frac{۱}{۸} \Rightarrow \frac{-۳}{۵a+۳a}=-\frac{۱}{۸} \Rightarrow ۸a=۲۴$$

$$\Rightarrow a=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۲ گزینه ۲

به ازای $x=۱$ و $x=-۱$ دو ضابطه را برابر قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{۱+۳}+۲a=a+۵ \Rightarrow a=۳$$

$$f(a)=f(۳)=۳(۳)^۲+۵=۳۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۳ گزینه ۳

چون دو تابع وارون یکدیگرند، بنابراین با یک نقطه می‌توانیم a را حساب کنیم.

$$y=\frac{x+۲}{۴}-\frac{\sqrt{x+۱}}{۲} \xrightarrow{x=۳} y=\frac{۵}{۴}-۱=\frac{۱}{۴} \Rightarrow (۳,\frac{۱}{۴})$$

بنابراین نقطهٔ $(\frac{۱}{۴},۳)$ روی تابع $y=ax+a\sqrt{x}$ قرار دارد.

$$۳=\frac{a}{۴}+\frac{a}{۲} \Rightarrow a=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

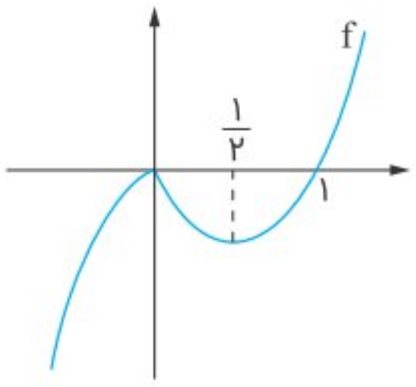
Scanned with CamScanner

۱۴ گزینه ۲

(تذکر: صورت سوال ایراد دارد. باتوجه‌به اینکه کلید سنجش گزینهٔ "۲" است، شکل درست آن به این صورت باید باشد:
تابع $y = (x - ۱)|x|$ در بزرگ‌ترین بازهٔ $[a, b]$ اکیداً نزولی است. مقدار $a + b$ کدام است؟)

$$y = (x - ۱)|x| = \begin{cases} x^۲ - x & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ + x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع f در بزرگ‌ترین بازهٔ $[۰, \frac{۱}{۲}]$ اکیداً نزولی است، بنابراین:

$$a + b = \frac{۱}{۲}$$

۱۵ گزینه ۳

$$\text{دامنه} = \mathbb{R} - \{۳\}$$

$$-۴ < -\frac{۱}{۳ - x} < ۰ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۳ - x} < ۴$$

$$x = ۱ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۲} < ۴$$

$$x = ۲ \Rightarrow ۰ < ۱ < ۴$$

فقط همین دو عدد طبیعی در نامعادله صدق می‌کند. ضمناً برای $x > ۳$ عبارت $\frac{۱}{۳ - x}$ منفی است.

۱۶ گزینه ۳

$$(fog^{-۱})(a) = -۳ \Rightarrow f(g^{-۱}(a)) = -۳ \Rightarrow g^{-۱}(a) = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a = g(\frac{۱}{۴}) = -\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۸}$$

Scanned with CamScanner

۱۷ گزینه ۳

ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + b = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم و ریشه‌های $2ax^2 + ax - 6 = 0$ را α' و β' در نظر می‌گیریم:

$$\alpha = \alpha' + \frac{1}{2} \ , \ \beta = \beta' + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \alpha' + \beta' + 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-a}{2a} + 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

$$a = 1 : 2ax^2 + ax - 6 = 2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \alpha' = -2 \ , \ \beta' = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \ , \ \beta = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$\alpha\beta = \frac{b}{2} = (-\frac{3}{2})(2) = -3 \Rightarrow b = -6$$

$$[\frac{ab}{4}] = [\frac{1 \times (-6)}{4}] = [-\frac{6}{4}] = -2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۸ گزینه ۱

f برد ضابطه اول : $R_1 = [\frac{13}{2}, +\infty)$

f ضابطه دوم : $y_2 = -x^2 + 2mx + 2 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{-2} = m$

$\Rightarrow x_S = m$ رأس سهمی

برای اینکه $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، نباید رأس سهمی در دامنه تعریف ضابطه دوم باشد، یعنی:

$$x_S = m \leq -\frac{3}{2} \, , \, m^2 + 2 < \frac{13}{2} \Rightarrow m = -2 (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow y_2 = -x^2 - 4x + 2$$

$$f^{-1}(-19) = ? \Rightarrow -x^2 - 4x + 2 = -19 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow x = 3 \, , \, x = -7$$

چون $x > -\frac{3}{2}$ مورد قبول است پس $x = 3$ پاسخ سؤال است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۹ گزینه ۳

$$y = ۲^{|\sin x|} \xrightarrow{\text{سمت راست } \frac{\pi}{۲}} y = ۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|} = ۲^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{۳}{۲}} y = ۲^{|\cos x|} - \frac{۳}{۲}$$

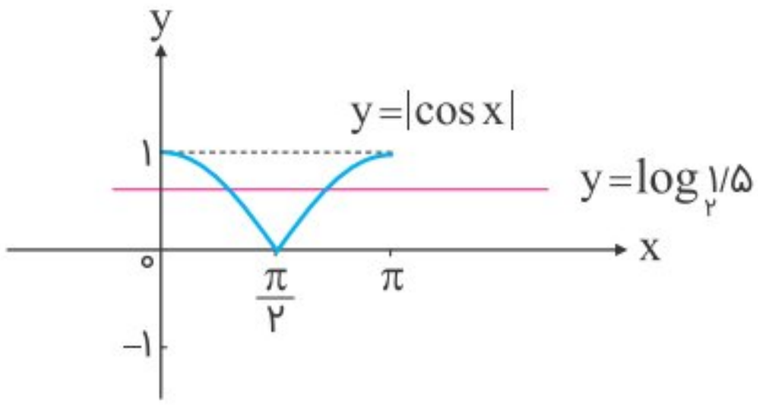
تعداد محل تقاطع نمودار با محور xها را می‌خواهیم، بنابراین تابع حاصل را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$y = ۲^{|\cos x|} - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲^{|\cos x|} = \frac{۳}{۲}$$

حال از دو طرف $\log_۲$ می‌گیریم، درنتیجه:

$$|\cos x| = \log_۲ \frac{۳}{۲}$$

تابع $\log_۲ x$ صعودی است و $\log_۲ ۲ = ۱$ می‌باشد، بنابراین $\log_۲(۱/۵) < ۱$ و $\log_۲(۱/۵) < ۰$ است. حال نمودار $|\cos x|$ و $\log_۲(۱/۵)$ را رسم می‌کنیم:



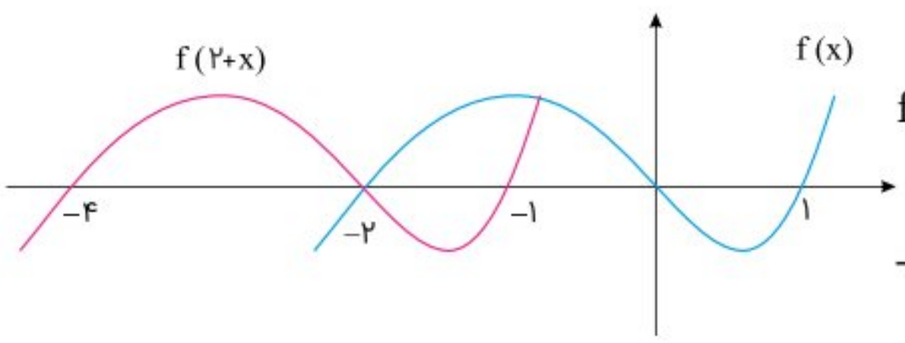
پس معادلهٔ $|\cos x| = \log_۲ \frac{۳}{۲}$ در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ دو جواب دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۰ گزینه ۱

$$g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲+x)}} \Rightarrow -\frac{f(x)}{f(۲+x)} \geq ۰ \Rightarrow \frac{f(x)}{f(۲+x)} \leq ۰$$

$$f(x) = ۰; \quad x = -۲, ۰, ۱$$



$$f(x+۲) = ۰; \quad x = -۴, -۲, -۱$$

x		-۴		-۲		-۱		۰		۱	
f(x)	−		−	۰	+		+	۰	−	۰	+
f(x+۲)	−	۰	+	۰	−	۰	+		+		+
$\frac{f(x)}{f(x+۲)}$	+	ت ت	−	ت ت	−	ت ت	+	۰	−	۰	+

$D_g = (-۴, -۲) \cup (-۲, -۱) \cup [۰,$

دامنهٔ تابع شامل اعداد صحیح ۳-، ۰ و ۱ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۱ گزینه ۴

توابع $(\frac{۱}{۲})^{x}$ و $\log_{۰/۵} x$ هر دو اکیداً نزولی هستند، پس مجموع آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع $x^{۳}$ اکیداً صعودی است، پس ترکیب این تابع با $(\frac{۱}{۲})^{x} + \log_{۰/۵} x$ اکیداً نزولی خواهد بود. یعنی تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است. حال داریم:

$$(fof)(x) < f(۲^{-۳x}) \Rightarrow f(f(x)) < f((۲^{-x})^{۳})$$

$$\xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x) > (۲^{-x})^{۳}$$

$$\Rightarrow ((\frac{۱}{۲})^{x} + \log_{۰/۵} x)^{۳} > (۲^{-x})^{۳} = ((\frac{۱}{۲})^{x})^{۳}$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{x} + \log_{۰/۵} x > (\frac{۱}{۲})^{x} \Rightarrow \log_{۰/۵} x > ۰$$

$\log_{۰/۵} x$ در بازهٔ $(۰, ۱)$ مثبت است، بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(۲^{-۳x})$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(۰, ۱)$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲۲ گزینه ۲

x و $\log x$ دو تابع اکیداً صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها یعنی $x + \log x$ اکیداً صعودی است.
تابع $x^{۵}$ نیز اکیداً صعودی است و همچنین می‌دانیم ترکیب دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی می‌باشد، بنابراین $f(x)$ اکیداً صعودی است.

$$(fof)(x) = f(f(x)) < f(x^{۵}) \Rightarrow f(x) < x^{۵} \Rightarrow (x + \log x)^{۵} < x^{۵}$$

$$\Rightarrow x + \log x < x \Rightarrow \log x < ۰$$

$\log x$ در بازهٔ $(۰, ۱)$ منفی است، بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(x^{۵})$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(۰, ۱)$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۳ گزینه ۳

منظور سؤال این است که $f(x)$ تابع ثابت است، پس $m = n = ۰$ است. حال تابع داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

$$g = \{(۰, -۱), (۰, k), (-۱, -۱), (۳k + ۲, ۲k + ۱)\}$$

زوج مرتب‌های $(۰, -۱)$ و $(۰, k)$ مولفهٔ اول برابر دارند، برای تابع بودن باید مولفهٔ دوم نیز برابر باشد. بنابراین برای آنکه g تابع باشد باید $k = -۱$ باشد. تابع g به‌صورت زیر در می‌آید:

$$g = \{(۰, -۱), (-۱, -۱)\}$$

$f(x) = -k = ۱$ خواهد بود و درنتیجه $f(\sqrt{۵}) = ۱$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۴ گزینه ۳

$$gof(-\frac{۵}{۳}) = g(f(\frac{-۵}{۳})) = ?$$

$$f(-\frac{۵}{۳}) = ۲[-\frac{۵}{۳}] - (-\frac{۵}{۳}) = ۲(-۲) + \frac{۵}{۳} = -۴ + \frac{۵}{۳} = -\frac{۷}{۳}$$

$$f(-\frac{۷}{۳}) = ۲[-\frac{۷}{۳}] - (-\frac{۷}{۳}) = -۶ + \frac{۷}{۳} = -\frac{۱۱}{۳}$$

$$g(f(-\frac{۵}{۳})) = g(-\frac{۷}{۳}) = f([-\frac{۷}{۳} + f(-\frac{۷}{۳})]) = f([-\frac{۷}{۳} - \frac{۱۱}{۳}])$$

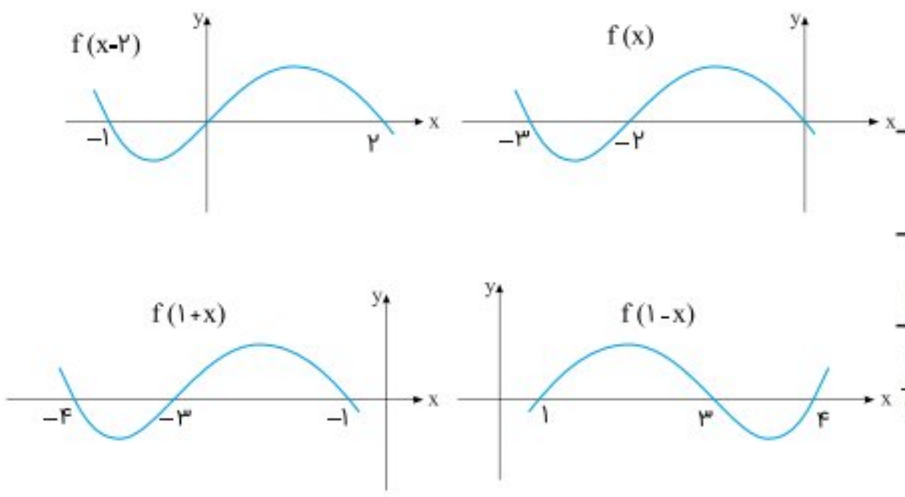
$$= f(-۶) = ۲[-۶] + ۶ = -۱۲ + ۶ = -۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۵ گزینه ۱

$$g(x) = \sqrt{\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}} \Rightarrow \frac{f(۱-x)}{f(x+۱)} \geq ۰$$

باتوجه‌به نمودار $f(x-۲)$، توابع $f(۱-x)$ و $f(x+۱)$ را رسم می‌کنیم:



حال داریم:

بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)$ به‌صورت زیر است:

$$[۳,۴] \cup (-۱,۱] \cup (-۳,-۴)$$

x	$-\infty$		-۴		-۳		-۱		۱		۳		۴		$+\infty$
$f(۱-x)$	−		−		−		−		۰	+	۰	−	۰	+	
$f(x+۱)$	+		۰	−	۰	+	۰	−		−		−		−	
$\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}$	−	ت ن	+	ت ن	−	ت ن	+	۰	−	۰	+	۰	−		

اعداد صحیح قابل‌قبول عبارتند از:

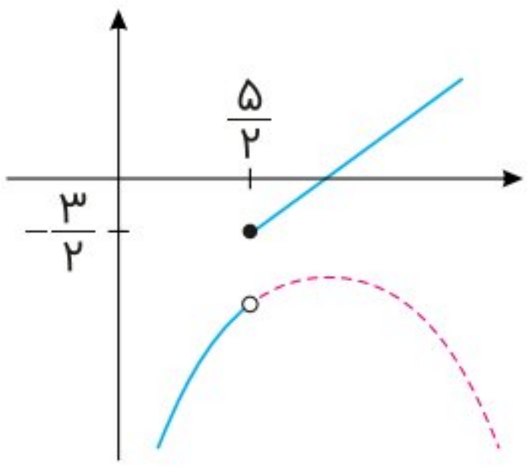
$$x = ۰, x = ۱, x = ۳, x = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۶ گزینه ۱

توابع یک‌به‌یک، وارون‌پذیرند. طول رأس تابع درجهٔ دوم باید از $x = \frac{۵}{۲}$ کمتر نباشد تا یک‌به‌یک شود.



$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b'}{۲a'} \geq \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{-a}{-۴} = \frac{a}{۴} \geq \frac{۵}{۲} \Rightarrow a \geq ۱۰$$

مقدار تابع درجهٔ دوم را در $x = \frac{۵}{۲}$ محاسبه می‌کنیم که عرض رأس سهمی و بیشترین مقدار سهمی است:

$$-۲(\frac{۵}{۲})^۲ + \frac{۵}{۲}a - ۲۱ < \frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۲}) - \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}a < ۳۲ + \frac{۵}{۴} \Rightarrow a < ۱۳/۳$$

پس بزرگ‌ترین مقدار صحیح a، ۱۳ است.

$$f^{-۱}(-۳) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -۳$$

باتوجه‌به شکل، $f(\alpha) = -۳$ در ضابطهٔ پایینی اتفاق می‌افتد، بنابراین:

$$-۲\alpha^۲ + ۱۳\alpha - ۲۱ = -۳ \Rightarrow ۲\alpha^۲ - ۱۳\alpha + ۱۸ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۴/۵ \ , \ \alpha = ۲$$

α باید از $\frac{۵}{۲} = ۲/۵$ کمتر باشد، پس $\alpha = ۲$ مورد قبول است.

۲۷ گزینه ۴

$$fog(-\frac{۱}{۳}) = f(g(-\frac{۱}{۳}))$$

$$g(-\frac{۱}{۳}) = f([-\frac{۱}{۳} - f(-\frac{۱}{۳})]) = f([-\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳}]) = f([\frac{۳}{۳}]) = f(۱) = ۲$$

$$f(-\frac{۱}{۳}) = -\frac{۱}{۳} + (-۱) = -\frac{۴}{۳}$$

$$f(g(-\frac{۱}{۳})) = f(۲) = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۸ گزینه ۱

برای اینکه x عددی صحیح باشد باید ۳۰ بر $|y|+۱$ بخش‌پذیر باشد و y هم عددی صحیح باشد:

$$۱+|y| = ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰$$
$$\Rightarrow |y| = ۰, ۱, ۲, ۴, ۵, ۹, ۱۴, ۲۹$$
$$\Rightarrow y = \pm ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۴, \pm ۵, \pm ۹, \pm ۱۴, \pm ۲۹$$

$$f = \{(۳۰, ۰), (۱۵, \pm ۱), (۱۰, \pm ۲), (۶, \pm ۴), (۵, \pm ۵), (۳, \pm ۹), (۲, \pm ۱۴), (۱, \pm ۲۹)\}$$

برای اینکه f تابع باشد، باید حداقل ۷ عضو از f را حذف کنیم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲۹ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-۱}(x)$$
$$g(۶) = f^{-۱}(۶) = a \Rightarrow f(a) = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} - ۶ = ۰$$
$$\Rightarrow (\sqrt{a} - ۲)(\sqrt{a} + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \\ \sqrt{a} = -۳ \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۶) = ۴$$
$$g(۱۲) = f^{-۱}(۱۲) = b \Rightarrow f(b) = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} - ۱۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (\sqrt{b} + ۴)(\sqrt{b} - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = -۴ \text{ غ ق ق} \\ \sqrt{b} = ۳ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow g(۱۲) = ۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۶) + g(۱۲) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۰ گزینه ۳

منظور سوال از قرینهٔ نمودار تابع نسبت به خط $y = x$ وارون تابع است:

$$y = ۲ + \sqrt{x - ۱} \Rightarrow y - ۲ = \sqrt{x - ۱} \Rightarrow (y - ۲)^۲ = x - ۱ \Rightarrow x = (y - ۲)^۲ + ۱$$
$$f^{-۱}(x) = (x - ۲)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} (x - ۴)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} (x - ۴)^۲ + ۱ - ۳ = (x - ۴)^۲ - ۲$$
$$g(۴) = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۳۱ گزینه ۳

نکته:

$$۰ \leq x - [x] < ۱$$

ابتدا $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{۱-۲x}{x+۱} = \frac{۱-۲x+۲-۲}{x+۱} = \frac{-۲x-۲}{x+۱} + \frac{۱+۲}{x+۱} = -۲ + \frac{۳}{x+۱}$$

اکنون تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = -۲ + \frac{۳}{[x]-x+۱}$$

طبق نکته داریم:

$$۰ \leq x - [x] < ۱ \xrightarrow{\text{در } (-۱) \text{ ضرب می‌کنیم}} -۱ < [x] - x \leq ۰$$

$$\xrightarrow{+۱} ۰ < [x] - x + ۱ \leq ۱ \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} ۱ \leq \frac{۱}{[x]-x+۱}$$

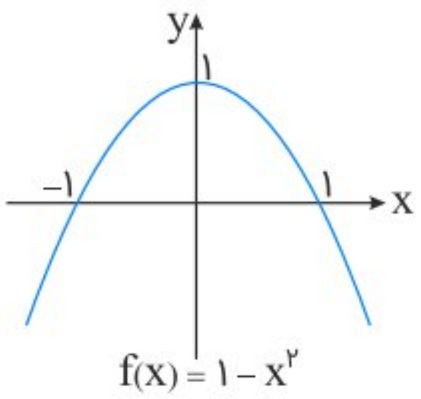
$$\xrightarrow{\times ۳} ۳ \leq \frac{۳}{[x]-x+۱} \xrightarrow{-۲} ۱ \leq \frac{۳}{[x]-x+۱} - ۲$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \geq ۱ \Rightarrow R_{gof} = [۱, +\infty)$$

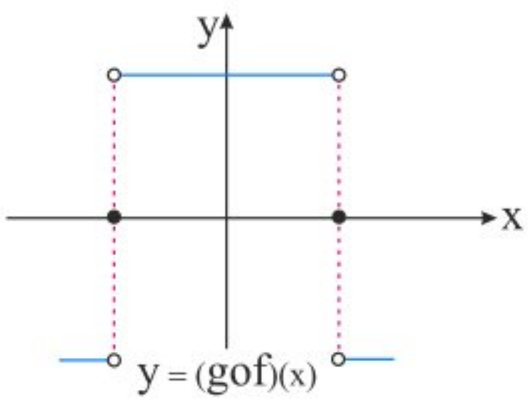
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۳۲ گزینه ۳



$$-۱ < x < ۱ \Rightarrow f(x) > ۰ \Rightarrow g(f(x)) = ۱$$
$$|x| > ۱ \Rightarrow f(x) < ۰ \Rightarrow g(f(x)) = -۱$$
$$\begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow g(f(x)) = ۰$$
$$(gof)(x) = \begin{cases} ۱ & ; |x| < ۱ \\ -۱ & ; |x| > ۱ \\ ۰ & ; |x| = ۱ \end{cases}$$



gof در دو نقطهٔ $x = ۱$ و $x = -۱$ ناپیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۳ گزینه ۴

$$f(x) = ۴x - x^۲$$
$$\xrightarrow[\text{منفی انتقال می‌دهیم}]{\text{۲ واحد در جهت}} f(x+۲) = ۴(x+۲) - (x+۲)^۲ = -x^۲ + ۴$$

$$f(x) = f(x+۲) \Rightarrow ۴x - x^۲ = -x^۲ + ۴ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(x) = ۴x - x^۲ \xrightarrow{x=۱} f(۱) = ۳ \Rightarrow A(۱, ۳)$$ نقطهٔ برخورد

$$OA = \sqrt{۱^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۳۴ گزینه ۳

$$f(x) = y = (\sqrt{x} - ۱)^۲ \Rightarrow |\sqrt{x} - ۱| = \sqrt{y} \xrightarrow{x \geq ۱} \sqrt{x} - ۱ = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + ۱ \Rightarrow x = (\sqrt{y} + ۱)^۲$$

$$\Rightarrow g(x) = f^{-۱}(x) = (\sqrt{x} + ۱)^۲$$

$$(gog)(۱) = g(g(۱)) = g(۴) = ۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳۵ گزینه ۳

چون f تابع همانی است، پس $f(x) = x$ می‌باشد. اکنون تغییرات داده‌شده را اعمال می‌کنیم:

$$|\frac{۱}{f(x-a)}| - ۲ = \frac{۱}{|f(x)|} \Rightarrow |\frac{۱}{x-a}| - ۲ = |\frac{۱}{x}| \xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \frac{۱}{|\frac{\sqrt{۲}}{۲} - a|} - ۲ = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{|\sqrt{۲} - ۲a|} = ۲ + \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{۲} - ۲a| = \frac{۲}{۲ + \sqrt{۲}} \times \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۲ - \sqrt{۲}} = ۲ - \sqrt{۲} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{۲} - ۲a = ۲ - \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} - ۲a = \sqrt{۲} - ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{۲} - ۱ \\ a = ۱ \end{cases}$$

$$f(x+a) = ۳ \xrightarrow{a=۱} x + ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲$$

$$f(x+a) = ۳ \xrightarrow{a=\sqrt{۲}-۱} x - ۱ + \sqrt{۲} = ۳ \Rightarrow x = ۴ - \sqrt{۲}$$

$$\text{اختلاف مقادیر} = ۴ - \sqrt{۲} - ۲ = ۲ - \sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳۶ گزینه ۴

نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ دوم را قطع می‌کند، پس:

$$\text{نیمساز ناحیهٔ دوم} : y = -x \ ; \ x < ۰$$

$$f^{-۱}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{۱}{۲x} = x \Rightarrow \frac{۱}{۲x} = ۲x \Rightarrow ۴x^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x<۰} x = -\frac{۱}{۲}$$

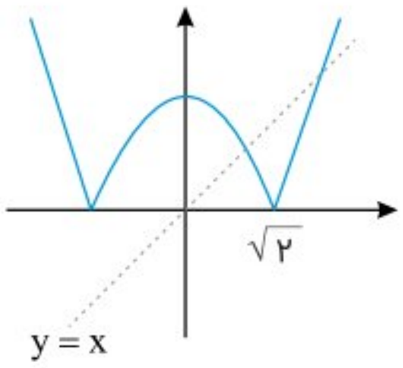
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۳۷ گزینه ۴

$$|x^۲ - ۲| - x > ۰ \Rightarrow |x^۲ - ۲| > x \quad (۱)$$

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که یک برخورد در بازهٔ $(۰, \sqrt{۲})$ و یک برخورد در بازهٔ $(\sqrt{۲}, +\infty)$ است:

$$۰ < x < \sqrt{۲} \ : \ |x^۲ - ۲| = ۲ - x^۲$$
$$\Rightarrow ۲ - x^۲ = x \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \xrightarrow{۰<x<\sqrt{۲}} x = ۱$$
$$x > \sqrt{۲} \ : \ |x^۲ - ۲| = x^۲ - ۲$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۲ = x \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \xrightarrow{x>\sqrt{۲}} x = ۲$$

پس جواب نامعادلهٔ (۱) که همان دامنهٔ تابع است به‌صورت زیر خواهد بود:

$$D = (-\infty, ۱) \cup (۲, +\infty)$$

Scanned with CamScanner

۳۸ گزینه ۲

$$gog(۰) = g(g(۰)) = g(۲) = ۳$$
$$gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲))$$

برای پیدا کردن $f^{-۱}(-۲)$، ابتدا باید ضابطهٔ تابع f را بیابیم:

$$\begin{cases} f(۰) = -۳ \\ f(۲) = ۰ \end{cases} \Rightarrow m = \frac{۰-(-۳)}{۲-۰} = \frac{۳}{۲}$$

$$y - ۰ = \frac{۳}{۲}(x-۲) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f^{-۱}(-۲) = a \Rightarrow f(a) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) \quad (*)$$

حال به بررسی ضابطهٔ g برای $x \leq ۱$ می‌پردازیم:

$$g(۰) = ۲ , g(۱) = ۱ \Rightarrow m = \frac{۱-۲}{۱-۰} = -۱$$
$$y - ۱ = -۱(x-۱) \Rightarrow y - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۲ ; x \leq ۱$$
$$\Rightarrow g(\frac{۲}{۳}) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳} \quad (**)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*),(**)} gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) = \frac{۴}{۳}$$

$$gof^{-۱}(-۲) \times gog(۰) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

۳۹ گزینه ۳

در تابع ثابت هر ورودی‌ای به x دهیم، خروجی یکسانی تحویل می‌گیریم:

$$f(۰) = ۲b$$

$$f(b) = -۷b^{۲} \Rightarrow ۲b = -۷b^{۲} \Rightarrow \begin{cases} b = ۰ \Rightarrow ۲b = ۰ \\ b = -\frac{۲}{۷} \Rightarrow ۲b = -\frac{۴}{۷} \end{cases}$$

برد تابع همان $f(۰)$ است و چون صفر در گزینه‌ها نیست، پس $-\frac{۴}{۷}$ را می‌پذیریم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۴۰ گزینه ۴

$$g(x) = x^{۳} + x \quad , \quad f(x) = \frac{۲}{۵}x - ۴$$

اول $f^{-۱}(۸)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}x - ۴ = ۸ \Rightarrow \frac{۲}{۵}x = ۱۲ \Rightarrow x = ۳۰ \Rightarrow f^{-۱}(۸) = ۳۰$$

حال داریم:

$$g^{-۱}\left(f^{-۱}(۸)\right) = g^{-۱}(۳۰)$$
$$g(x) = ۳۰ \Rightarrow x^{۳} + x = ۳۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow g^{-۱}(۳۰) = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۱ گزینه ۲

$$(a, b) \in f(x) \Rightarrow (b, a) \in f^{-۱}(x)$$

بنابراین کافی است مؤلفه‌های هر نقطه را جابه‌جا کنیم و در تابع $y = x^{۳} - x + ۱$ صدق دهیم.

گزینهٔ ۱ : $(-۲)^{۳} - (-۲) + ۱ \neq -۱$ ×

گزینهٔ ۲ : $(\frac{۱}{۲})^{۳} - (\frac{۱}{۲}) + ۱ = \frac{۵}{۸}$ ✓

گزینهٔ ۳ : $۲^{۳} - ۲ + ۱ \neq ۱$ ×

گزینهٔ ۴ : $(-\frac{۱۱}{۸})^{۳} - (-\frac{۱۱}{۸}) + ۱ \neq -\frac{۱}{۲}$ ×

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۲ گزینه ۱

اگر $(-۲, ۹)$ روی وارون تابع باشد، $(۹, -۲)$ روی خود تابع قرار دارد:

$$-۳(-۲)^{۳} + ۲(-۲) - ۱۱ = ۲۴ - ۴ - ۱۱ = ۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۴۳ گزینه ۴

جدول تعیین علامت g به صورت زیر است.

x		۰		۳	
$x^۲$	+	۰	+		+
f(x)	+		+	۰	−
$\sqrt{x^۲f(x)}$	+		+		−

$$\Rightarrow D_{\sqrt{x^۲f(x)}} = (-\infty, ۳]$$

$$x = ۰, ۱, ۲, ۳$$

اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ پذیرفته هستند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۴۴ گزینه ۲

$$\frac{۱ - ۳x}{x + ۱} < ۰$$

		-۱		$\frac{۱}{۳}$	
	−		+		−

$$x \in (-\infty, -۱) \cup (\frac{۱}{۳}, +\infty)$$

$$-۲ < \frac{۱ - ۳x}{x + ۱} \Rightarrow ۰ < \frac{۱ - ۳x}{x + ۱} + ۲ \Rightarrow ۰ < \frac{۱ - ۳x + ۲x + ۲}{x + ۱} \Rightarrow ۰ < \frac{-x + ۳}{x + ۱}$$

		-۱		۳	
	−		+		−

$$x \in (-۱, ۳)$$

از اشتراک جواب‌ها به $x \in (\frac{۱}{۳}, ۳)$ می‌رسیم:

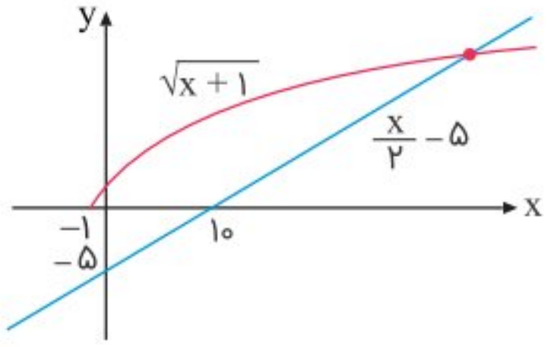
$$\frac{۱}{۳} < x < ۳ \Rightarrow \frac{۱}{۶} < \frac{x}{۲} < \frac{۳}{۲} \Rightarrow [\frac{x}{۲}] = \{۰, ۱\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۴۵ گزینه ۲

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3}-\frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+1}(3-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-3)}{3^2-(\sqrt{x-1})^2}=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$
$$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{10-x}=\sqrt{x-1}\Rightarrow -2\sqrt{x+1}=10-x$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{x}{2}-5$$



بنابراین تنها یک ریشهٔ مثبت دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۶ گزینه ۴

$$\frac{4-2x}{3x+1}\geq 0\Rightarrow \begin{cases}4-2x=0\Rightarrow x=2\\ 3x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

x		$-\frac{1}{3}$		2	
$4-2x$	+		+	○	−
$3x+1$	−	○	+		+
$\frac{4-2x}{3x+1}$	−	ت ن	+	○	−

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}<x\leq 2\xrightarrow{\times 3}-1<3x\leq 6$$
$$\Rightarrow [3x]=-1,0,1,2,3,4,5,6\Rightarrow \text{۸ عضو}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۷ گزینه ۱

تابع f اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب x^3 منفی باشد:

$$-9+k^2<0\Rightarrow k^2<9\Rightarrow -3<k<3$$
$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0,\pm 1,\pm 2\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } k=0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۴۸ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x) = ۵(\frac{x}{۲})^۲ + ۱۱ = \frac{۵}{۴}x^۲ + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x-۷) = \frac{۵}{۴}(x-۷)^۲ + ۱۱ \Rightarrow g(x-۷) \text{ حداقل} = ۱۱$$

راه‌حل دوم: برای رسیدن از ضابطهٔ $g(۲x)$ به $g(x-۷)$، تنها دامنه تغییر می‌کند و برد ثابت می‌ماند. بنابراین کمترین مقدار $g(x-۷)$ برابر با کمترین مقدار $g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱$ است. پس برابر با ۱۱ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴۹ گزینه ۳

$$\begin{cases} f(x) = b - ۳ax \xrightarrow{\text{ثابت } f} ۳a = ۰ \Rightarrow a = ۰ \\ g(x) = c - (۳b-۳)x \xrightarrow{\text{ثابت } g} ۳b - ۳ = ۰ \Rightarrow b = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ \quad , \quad g(x) = c$$

$$f + g = ۵ \Rightarrow ۱ + c = ۵ \Rightarrow c = ۴$$

$$bc = ۱ \times ۴ = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵۰ گزینه ۴

$$\frac{۱}{x} \xrightarrow[\text{راست}]{\text{۱ واحد به سمت}} \frac{۱}{x-۱} \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} \frac{-۱}{x-۱} \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۲ واحد رو به}} \frac{-۱}{x-۱} - ۲$$

$$\text{حالا : } \frac{۱}{x} = \frac{-۱}{x-۱} - ۲ \Rightarrow \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x-۱} = -۲ \Rightarrow \frac{x-۱+x}{x^۲-x} = -۲$$

$$-۲x^۲ + ۲x = ۲x - ۱ \Rightarrow ۲x^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه برخورد}} \begin{cases} (\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \sqrt{۲}) \\ (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\sqrt{۲}) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}} \sqrt{(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۰)^۲ + (\sqrt{۲} - ۰)^۲}$$

$$= \sqrt{\frac{۱}{۲} + ۲} = \sqrt{\frac{۵}{۲}} = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۵۱ گزینه ۱

$$۲^{x+۳+|x+۳|} - ۲ = ۰ \Rightarrow ۲^{x+۳+|x+۳|} = ۲$$

$$\Rightarrow x + ۳ + |x + ۳| = ۱ \Rightarrow |x + ۳| = -x - ۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ۳ = -x - ۲ \Rightarrow x = \dfrac{-۵}{۲} \\ x + ۳ = x + ۲ \Rightarrow \text{فاقد جواب} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵۲ گزینه ۱

$$y = x^۲ - ۲x \xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\left(x^۲ - ۲x\right) = -x^۲ + ۲x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور y ها}]{\text{۱۶ واحد انتقال در جهت}} y_۱ = -x^۲ + ۲x + ۱۶$$

حال معادلهٔ جدید را با معادلهٔ قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطهٔ برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x = -x^۲ + ۲x + ۱۶ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \quad \text{ق.ق} \\ x = -۲ \quad (x > ۱ \text{ زیرا غ.ق.ق}) \end{cases}$$

$$x = ۴ \Rightarrow y = ۸ \Rightarrow A(۴, ۸)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{۱۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۶(۱ + ۴)} = ۴\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۳ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-۱}(x)$$

$$g(۳) = f^{-۱}(۳) = a \Rightarrow f(a) = ۳ \Rightarrow a + ۲\sqrt{a} = ۳ \Rightarrow a + ۲\sqrt{a} - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - ۱)(\sqrt{a} + ۳) = ۰ \begin{cases} \sqrt{a} = ۱ \Rightarrow a = ۱ \\ \sqrt{a} = -۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۳) = ۱$$

$$g(۱۵) = f^{-۱}(۱۵) = b \Rightarrow f(b) = ۱۵ \Rightarrow b + ۲\sqrt{b} = ۱۵ \Rightarrow b + ۲\sqrt{b} - ۱۵ = ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b} - ۳)(\sqrt{b} + ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = ۳ \Rightarrow b = ۹ \\ \sqrt{b} = -۵ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۱۵) = ۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۳) + g(۱۵) = ۱ + ۹ = ۱۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۵۴ گزینه ۲

نیمساز ناحیهٔ چهارم : $y = -x \;;\; x > ۰$

نمودار $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع می‌کند، بنابراین:

$$f^{-۱}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{۲}{x} = x \Rightarrow ۲x = \frac{۲}{x}$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow{x>۰} x = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵۵ گزینه ۴

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = y \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = y + ۴$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ = y + ۴ \xrightarrow{\text{جذر}} |x-۱| = \sqrt{y+۴}$$

$$\xrightarrow{x \geq ۱} x - ۱ = \sqrt{y+۴} \Rightarrow x = \sqrt{y+۴} + ۱ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x+۴} + ۱$$

حال $f^{-۱}$ را با g قطع می‌دهیم:

$$\sqrt{x+۴} + ۱ = \frac{x-۹}{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{x+۴} = x - ۱۱ \quad (۱)$$

با امتحان کردن گزینه‌ها به راحتی معلوم می‌شود که $x = ۲۱$ در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۶ گزینه ۲

$$-\frac{۱}{۲} \leq x < -\frac{۱}{۳} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} \leq ۳x < -۱ \Rightarrow [۳x] = -۲ \Rightarrow y = ۳$$

$$-\frac{۱}{۳} \leq x < ۰ \Rightarrow -۱ \leq ۳x < ۰ \Rightarrow [۳x] = -۱ \Rightarrow y = ۱$$

$$۰ \leq x < \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۰ \leq ۳x < ۱ \Rightarrow [۳x] = ۰ \Rightarrow y = -۱$$

$$\frac{۱}{۳} \leq x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ \leq ۳x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow [۳x] = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵۷ گزینه ۱

به راحتی می‌توانیم $(fof)og$ را بسازیم، کافی است ورودی و خروجی‌ها را کنترل کنیم.

$$(x > ۰) \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$

$$(x = ۰) \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$

$$(x < ۰) \xrightarrow{g} -۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{f} ۰$$

در واقع $((fof)og)(x) = ۰$ است و همواره پیوسته خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۵۸ گزینه ۳

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{مثبت محور } x \text{ ها}]{\text{۱۲ واحد در جهت}} y=\sqrt{x-۱۲}\xrightarrow[\text{مثبت محور } y \text{ ها}]{\text{۲ واحد در جهت}} y=\sqrt{x-۱۲}+۲$$

حال منحنی حاصل را با $f(x)=\sqrt{x}$ برابر قرار می‌دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x-۱۲}+۲=\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x-۱۲}=\sqrt{x}-۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۱۲=x+۴-۴\sqrt{x}\Rightarrow ۴\sqrt{x}=۱۶\Rightarrow x=۱۶$$

$x=۱۶$ را در $f(x)=\sqrt{x}$ جایگذاری می‌کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(۱۶)=\sqrt{۱۶}=۴\ \Rightarrow A(۱۶,۴)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=\sqrt{۱۶(۱۶+۱)}=۴\sqrt{۱۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵۹ گزینه ۲

نکته: $۰\le x-[x]<۱$

ابتدا تابع $g(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=-x^۲+۴x=-x^۲+۴x-۴+۴$$

$$=-(x^۲-۴x+۴)+۴=-(x-۲)^۲+۴$$

اکنون تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=-(۲x-[۲x]-۲)^۲+۴$$

طبق نکته داریم:

$$۰\le ۲x-[۲x]<۱\xrightarrow{-۲}-۲\le ۲x-[۲x]-۲<-۱$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱<(۲x-[۲x]-۲)^۲\le ۴$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)}\ -۴\le -(۲x-[۲x]-۲)^۲<-۱$$

$$\xrightarrow{+۴}\ ۰\le -(۲x-[۲x]-۲)^۲+۴<۳$$

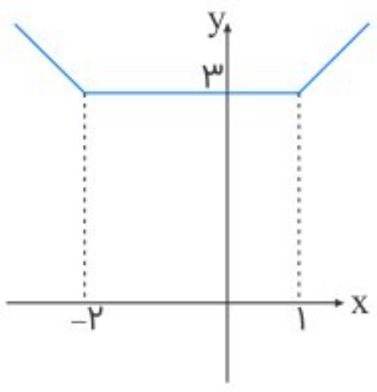
$$\Rightarrow\ ۰\le gof(x)<۳\Rightarrow R_{gof}=[۰,۳)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۶۰ گزینه ۱

$$f(x)=|x+۲|+|x-۱|=\begin{cases}۲x+۱ & ;x>۱\\ ۳ & ;-۲\le x\le ۱\\ -۲x-۱ & ;x<-۲\end{cases}$$



باتوجه‌به نمودار تابع گلدانی $y=|x+۲|+|x-۱|$، در فاصلهٔ $(-\infty,-۲)$ تابع نزولی اکید است.

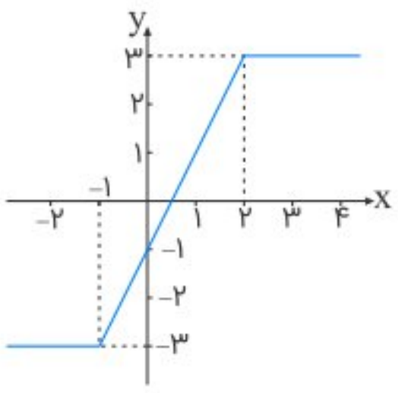
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۶۱ گزینه ۳

x		-۱		۲	
x+۱	-	۰	+		+
x-۲	-		-	۰	+

$$x\le -۱: f(x)=-x-۱+x-۲=-۳$$
$$-۱<x\le ۲: f(x)=x+۱+x-۲=۲x-۱$$
$$x>۲: f(x)=x+۱-x+۲=۳$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصلهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

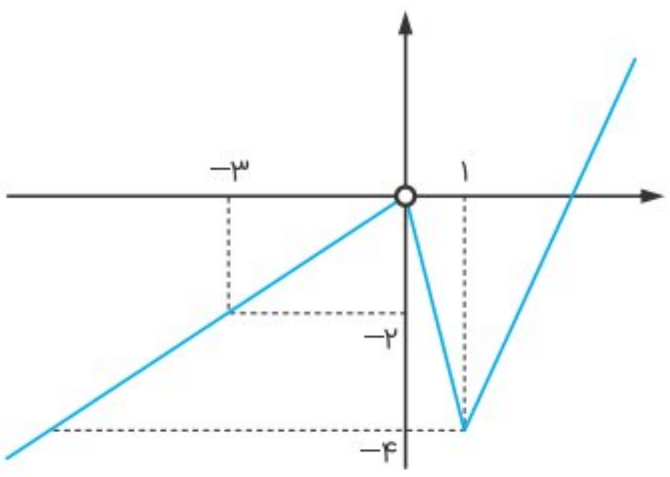
منبع:

۱ اگر $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^+}\frac{a+۳[-x]}{۱-۲x}=-\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}[\frac{x}{a}-x]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -۲
۳) ۱
۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ شکل زیر، نمودار تابع f است. مقدار $\lim\limits_{x\to۰^+}\frac{f(x)}{|x|}+\lim\limits_{x\to۰^-}\frac{|x|}{f(x)}$ کدام است؟



۱) $-۵/۵$
۲) $-۴/۲۵$
۳) $-۳/۷۵$
۴) $-۲/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ اگر $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{f(x)}{\cos x}=+\infty$ باشد، کدام مورد می‌تواند ضابطهٔ تابع f باشد؟

۱) $۲[\frac{x}{\pi}]+۱$
۲) $[\frac{۲x}{\pi}]-۱$
۳) $[\frac{۳x}{\pi}]-۲$
۴) $۳[\frac{x}{\pi}]+۲$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۴ تابع غیرصفر $f(x)=a[x+۱]+b[x+[a+۱]]$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\frac{a[a]}{f(a)}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۲
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۵ تابع غیرصفر $f(x)=a[x]+b[x+۱]$، در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\frac{f(a)}{a}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۶ اگر $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{f(x)}{\sin x}=-\infty$ باشد، کدام مورد می‌تواند ضابطهٔ f باشد؟

۱) $-\left[\dfrac{۲x}{\pi}\right]-۱$

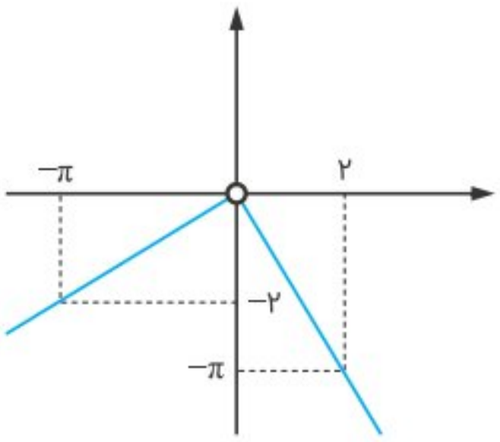
۲) $\left[\dfrac{x}{\pi}\right]+۱$

۳) $۲\left[\dfrac{x}{\pi}\right]+۳$

۴) $-\left[\dfrac{۳x}{\pi}\right]-۳$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ شکل زیر، نمودار تابع f است. مقدار $\lim\limits_{x\to(-\frac{\pi}{۲})^+}\dfrac{|f(x)|}{\sin x}+\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\dfrac{\sin x}{|f(x)|}$ کدام است؟



۱) $۱-\dfrac{۴}{\pi^۲}$

۲) $\dfrac{۴}{\pi^۲}-۱$

۳) $۴\pi-\dfrac{۱}{\pi^۲}$

۴) $۴\pi+\dfrac{۱}{\pi^۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۸ تابع ناصفر $f(x)=b[x^۲-ax]-۲a$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\dfrac{a}{f(b)}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۲}$

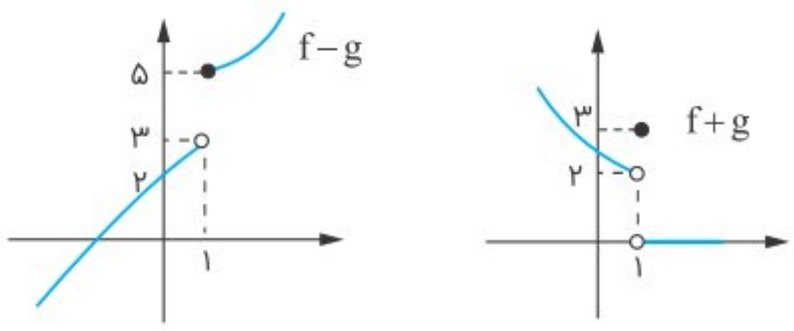
۲) $-\dfrac{۱}{۴}$

۳) ۱

۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۹ شکل‌های زیر، نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ هستند. مقدار $\lim\limits_{x\to۱}f(x)$ کدام است؟



۱) حد ندارد.

۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۰ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۳x^۲+(m-۱)x+(m-۴)}}{|x^۳+((m-۷)x+a)^۲|} & :x\neq a\\ \dfrac{۲\sin b}{\sqrt[۳]{x+۲}} & :x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\dfrac{\pi}{۳}$

۲) $\dfrac{\pi}{۶}$

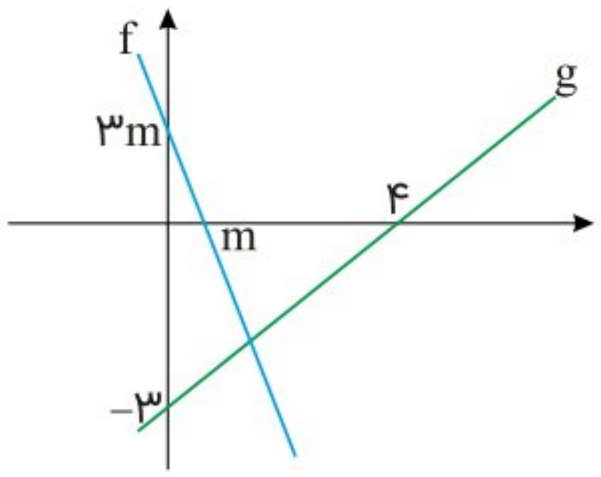
۳) $\dfrac{۵\pi}{۳}$

۴) $\dfrac{۵\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۱ شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



۱) -۳

۲) ۳

۳) -۴

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to۸}\frac{b\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲b}{ax-b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$

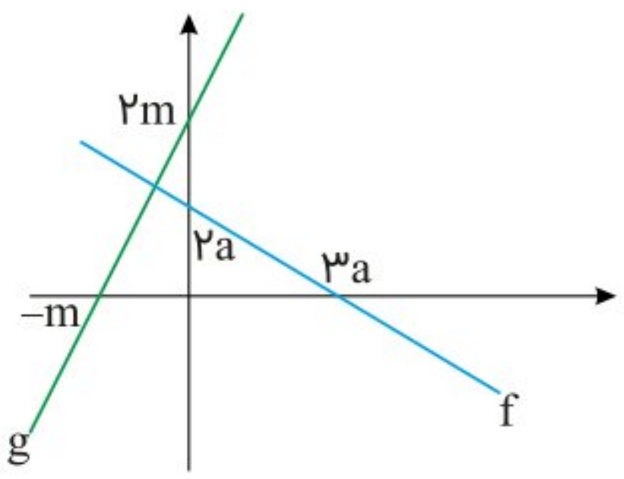
۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۴۸}$

۴) $\frac{۱}{۲۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۳ شکل زیر، نمودار توابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{|f(x)|}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) -۳

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۴ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۶x^۲+(m+۳)x+\frac{m}{۲}}}{|۲x^۳+(m-۳)x^۲+a^۲|} & ;x\neq a\\ \frac{۲\tan b}{\sqrt{-x}} & ;x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کدام مورد می‌تواند مقدار b باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{\pi}{۳}$

۳) $\frac{۲\pi}{۳}$

۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۵ مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to۱}\frac{b\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-b}{ax+b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $-\frac{۱}{۶}$

۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۶ حد عبارت $\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}$، وقتی $x \to ۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۷ اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+} \frac{ax+b}{a\cos x-\sin x} = -\infty$ باشد، کمترین مقدار صحیح b کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳

۳) -۲ ۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۸ تابع $f(x) = \begin{cases} \tan\frac{(۲x+۱)\pi}{۴} & ;x \le ۱ \\ \frac{|x^۲+x-۲|}{a(۱-x)} & ;۱ < x < ۵ \\ b(x-[-x]) & ;x \ge ۵ \end{cases}$ روی بازهٔ $[۱,۵]$ پیوسته است، مقدار ab کدام است؟

۱) $-۰/۷$ ۲) $-۰/۵$

۳) $۰/۷$ ۴) $۰/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۹ اگر در ریشه‌ای از معادلهٔ $۵x^۲-ax+b=۰$، حد تابع $f(x)=\frac{x^۲+ax+b}{x-۱}$ موجود بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $[\frac{b-۲a}{۳}]$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲

۳) ۱ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۰ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x+|x|}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to۰^-} f(x) = +\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to۰^-} f(x) = -\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to۰^+} f(x) = +\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to۰^+} f(x) = -\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۱ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$، بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۴x^n-۶x^۲+۱}{ax^۳+۷x^۲-۲}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=۲$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۱۷}$
۲) $-\frac{۶}{۱۷}$
۳) $-\frac{۵}{۱۲}$
۴) $-\frac{۶}{۱۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ حاصل $\lim\limits_{x\to-۱^+}\frac{|x+۱|+[x]}{x-[-x]}$ کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) صفر
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۴ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۲\sin^۲x-\sin x-۱}{\cos^۲x} & ;\ x\neq\frac{\pi}{۲}\\ a & ;\ x=\frac{\pi}{۲}\end{cases}$، در $x=\frac{\pi}{۲}$، پیوسته است؟

۱) ۱/۵
۲) ۱
۳) -۱
۴) $-۱/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۵ مقدار $\sqrt{x}(\sqrt{\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x}}-\sqrt{\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۲+۱}})$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۶ حاصل $\lim\limits_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) ۱
۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۷ اگر $f(x)=x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to۰}\frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۷}$
۴) $\frac{۳}{۱۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۲۸ اگر $g(x)=\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+}(۴-[x])g(x)=۶$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۹ اگر $f(x)=\sqrt{ax^۲+x+۱}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+۲}=\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-۱^-}[\frac{۱}{x}]f(x)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۰ اگر $f(x)=x-\sqrt{۴x^۲+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۱ حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}$ ، کدام است؟

۱) $-\infty$
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|} & ;x\neq ۲\\ ۲ & ;x=۲\end{cases}$، از نظر پیوستگی در $x=۲$ چگونه است؟

۱) از چپ پیوسته
۲) پیوسته
۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته
۴) از راست پیوسته

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۸+x^۳}{|x+۲|} & ;x\neq -۲\\ a & ;x=-۲\end{cases}$، در نقطهٔ $x=-۲$ فقط از چپ پیوسته است؟

۱) -۱۲
۲) -۶
۳) ۶
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

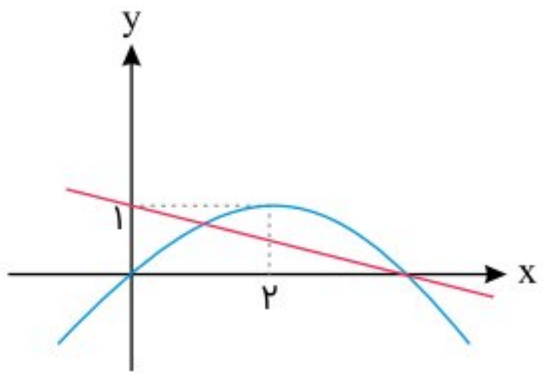
Scanned with CamScanner

۳۴ مقدار $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۶})^-} [۲\sin x - ۱]$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است)

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۵ نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim_{x\to۴^-} \frac{f(x)+g(x)}{۴-x}$ ، کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۵}{۴}$
۳) $\frac{۵}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۶ مقدار $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}+\sqrt{x^۲+۱}-x^۲}{x}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۱
۳) صفر
۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۷ فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$، کدام است؟

۱) ۷
۲) ۱
۳) صفر
۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x^n-۱۲}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{۱}{۶}$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to۳} f(x)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۴}$
۲) $\frac{۱}{۱۸}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۵}{۳۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۹ حد عبارت $\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}$ وقتی $x\to-۸$، کدام است؟

۱) -۲۴
۲) -۱۸
۳) -۱۲
۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۴۰ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{۲\pi}{۳}^+} f(x) = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to \frac{۲\pi}{۳}^+} f(x) = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x \to \frac{۲\pi}{۳}^-} f(x) = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to \frac{۴\pi}{۳}} f(x) = +\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۱ اگر $f(x) = ۲x + \sqrt{۴x^۲ + x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -۱

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$

۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} \frac{a+۳[-x]}{۱-۲x} = -\infty \Rightarrow \frac{a-۳}{۰^{-}} = -\infty \Rightarrow a-۳>۰ \Rightarrow a>۳$$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} [\frac{x}{a}-x] = [\frac{۱}{۲a}-\frac{۱}{۲}]$$

$$a>۳ \Rightarrow ۰<\frac{۱}{a}<\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} ۰<\frac{۱}{۲a}<\frac{۱}{۶}$$

$$\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}} -\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۲a}-\frac{۱}{۲}<-\frac{۱}{۳} \Rightarrow [\frac{۱}{۲a}-\frac{۱}{۲}] = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۱

در همسایگی راست $x=۰$، ضابطهٔ تابع $f(x)=-۴x$ و در همسایگی چپ $x=۰$، ضابطهٔ تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x$ است.

$$\lim_{x\to۰^{+}} \frac{f(x)}{|x|} + \lim_{x\to۰^{-}} \frac{|x|}{f(x)} = \lim_{x\to۰^{+}} \frac{-۴x}{x} + \lim_{x\to۰^{-}} \frac{-x}{\frac{۲}{۳}x}$$

$$= -۴ - \frac{۳}{۲} = -\frac{۱۱}{۲} = -۵/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۳ گزینه ۳

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{f(x)}{\cos x}=+\infty\Rightarrow\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}f(x)}{۰^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}f(x)<۰$$

اکنون گزینه‌ها را با شرط به‌دست‌آمده مقایسه می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که گزینهٔ "۳"، با شرط به‌دست‌آمده مطابقت دارد.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\left(\left[\frac{۳x}{\pi}\right]-۲\right)=[\frac{۳}{۲}^+]=۱-۲=-۱$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ "۱":

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\left(۲\left[\frac{x}{\pi}\right]+۱\right)=۲[\frac{۱}{۲}^+]+۱=۰+۱=۱$$

گزینهٔ "۲":

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\left(\left[\frac{۲x}{\pi}\right]-۱\right)=[۱^+]-۱=۱-۱=۰$$

گزینهٔ "۴":

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\left(۳\left[\frac{x}{\pi}\right]+۲\right)=۳[\frac{۱}{۲}^+]+۲=۰+۲=۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۴ گزینه ۲

$$f(x)=a[x]+a+b[x]+b[a+۱]$$

$$f(x)=(a+b)[x]+a+b+b[a]$$

اگر $f(x)$، در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، $a+b=۰$؛ یعنی $a=-b$ است. در این صورت:

$$f(x)=-a[a]$$

$$\frac{a[a]}{f(a)}=\frac{a[a]}{-a[a]}=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۵ گزینه ۲

$$f(x)=a[x]+b[x]+b=(a+b)[x]+b$$

برای آنکه $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید $a+b=۰$؛ یعنی $a=-b$ باشد. در این صورت $f(x)=b$ خواهد شد. بنابراین:

$$\frac{f(a)}{a}=\frac{b}{-b}=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۶ گزینه ۴

اگر $x \to \pi^-$، در این صورت $\sin x \to ۰^+$ خواهد بود. بنابراین $f(x)$ در همسایگی چپ π، باید عددی منفی باشد. مشاهده می‌شود که ضابطهٔ گزینهٔ "۴"، این خصوصیت را دارد.

$$\lim_{x \to \pi^-} \left(\left[\frac{۳x}{\pi} \right] - ۳ \right) = [۳^-] - ۳ = ۲ - ۳ = -۱$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ "۱":

$$\lim_{x \to \pi^-} \left(\left[\frac{۲x}{\pi} \right] - ۱ \right) = [۲^-] - ۱ = ۱ - ۱ = ۰$$

گزینهٔ "۲":

$$\lim_{x \to \pi^-} \left(۳ \left[\frac{x}{\pi} \right] + ۱ \right) = ۳[۱^-] + ۱ = ۰ + ۱ = ۱$$

گزینهٔ "۳":

$$\lim_{x \to \pi^-} \left(۲ \left[\frac{x}{\pi} \right] + ۳ \right) = ۲[۱^-] + ۳ = ۰ + ۳ = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ گزینه ۲

برای $x > ۰$، معادلهٔ $f(x)$ به‌صورت $f(x) = -\frac{\pi}{۲}x$، و برای $x < ۰$، به‌صورت $f(x) = \frac{۲}{\pi}x$ می‌باشد. بنابراین:

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۲})^-} \frac{\sin x}{\left| -\frac{\pi}{۲}x \right|} + \lim_{x \to (-\frac{\pi}{۲})^+} \frac{\left| \frac{۲}{\pi}x \right|}{\sin x} = \frac{۱}{\frac{\pi^۲}{۴}} + \frac{۱}{-۱} = \frac{۴}{\pi^۲} - ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۸ گزینه ۱

تابع $[x^۲ - ax]$ روی $\mathbb{R}$ ناپیوسته است، برای آنکه تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید $b = ۰$ شود. در این صورت $f(x) = -۲a$ خواهد بود.

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(۰)} = \frac{a}{-۲a} = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۳

$$(f+g)+(f-g)=۲f \Rightarrow f=\frac{۱}{۲}((f+g)+(f-g))$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to ۱^+}(f+g)+\lim\limits_{x\to ۱^+}(f-g)}{۲}=\frac{۰+۵}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to ۱^-}(f+g)+\lim\limits_{x\to ۱^-}(f-g)}{۲}=\frac{۲+۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=\frac{۵}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۰ گزینه ۱

چون در پیوستگی، باید مقدار حد چپ و راست با هم برابر باشد پس زیر رادیکال باید ریشه مضاعف داشته باشیم:

$$\sqrt{۳x^۲+(m-۱)x+(m-۴)}=\sqrt{(x+۱)(۳x+m-۴)} \Rightarrow m-۴=۳ \Rightarrow m=۷$$

$$m=۷ : |x^۳+((m-۷)x+a)^۲|=|x^۳+a^۲|$$

$x=a$ ریشه صورت و مخرج است، پس: $a=-۱$

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{۳(x+۱)^۲}}{|x^۳+۱|}=\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{۳}|x+۱|}{|x+۱|(x^۲-x+۱)}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$x=-۱ : f(-۱)=\frac{۲\sin b}{۳\sqrt{-۱+۲}}=\frac{۲\sin b}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin b=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow b=\frac{\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۱ گزینه ۳

$$\begin{matrix} f(x)=-۳x \\ f(x)=\frac{۳}{۴}x \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{|-۳x|}{\frac{۳}{۴}x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۳x}{\frac{۳}{۴}x}=-۴$$

دقت کنید وقتی $x\to -\infty$، $-۳x\to \infty$ پس: $|-۳x|=-۳x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۲ گزینه ۲

با جاگذاری $x = ۸$ در صورت کسر به صفر می‌رسیم ولی پاسخ حد باید مقداری غیرصفر باشد، پس باید مخرج هم صفر شود که رفع ابهام کسر صفر صفرم داشته باشیم:

$$۸a - b = ۰ \Rightarrow ۸a = b$$

$$\lim_{x\to ۸} \frac{b(\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲)}{b(\frac{x}{۸}-۱)} \times \frac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲} = \lim_{x\to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x}+۲-۴}{\frac{x}{۲}-۴}$$

$$= \lim_{x\to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{\frac{x}{۲}-۴} \times \frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴} = \lim_{x\to ۸} \frac{x-۸}{۶x-۴۸} = \lim_{x\to ۸} \frac{x-۸}{۶(x-۸)} = \frac{۱}{۶}$$

۱۳ گزینه ۳

$$(۳a, ۰), (۰, ۲a) \in f \Rightarrow \text{شیب خط} = m = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow f(x) = -\frac{۲}{۳}x + ۲a$$

$$(-m, ۰), (۰, ۲m) \in g \Rightarrow \text{شیب خط} = m' = ۲ \Rightarrow g(x) = ۲x + ۲m$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{۲x+m}{|-\frac{۲}{۳}x + ۲a|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{۲x}{-\frac{۲}{۳}x} = -۳$$

$$x \to -\infty : -\frac{۱}{۳}x \to +\infty \Rightarrow |-\frac{۱}{۳}x + a| = -\frac{۱}{۳}x + a$$

۱۴ گزینه ۱

a باید ریشهٔ مضاعف زیر رادیکال باشد تا پیوستگی برقرار شود. ازطرفی ریشهٔ مخرج هم باشد.

$$\Delta = (m+۳)^۲ - ۴(۶)(\frac{m}{۲}) = m^۲ + ۶m + ۹ - ۱۲m = m^۲ - ۶m + ۹ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

$$x = a = \frac{-(m+۳)}{۲ \times ۶} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶(x+\frac{۱}{۲})^۲}}{|۲x^۳ + \frac{۱}{۴}|} = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x^۳ + \frac{۱}{۸}|}$$

$$= \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x+\frac{۱}{۲}||x^۲ + \frac{۱}{۴} - \frac{x}{۲}|} = \frac{\sqrt{۶}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۲\tan b}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \sqrt{۲}\tan b = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow b = \frac{\pi}{۶}$$

Scanned with CamScanner

۱۵ گزینه ۴

صورت کسر به ازای $x = ۱$ صفر می‌شود، پس باید مخرج هم به ازای $x = ۱$ صفر شود تا حالت $\frac{۰}{۰}$ و رفع ابهام داشته باشیم.

$$a + b = ۰ \Rightarrow a = -b$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-a\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + a}{ax - a} = \lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{x - ۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{x - ۱} \times \frac{\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱ - ۲ + \sqrt[۳]{x}}{(x - ۱)(۱ + \sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۱}{۲(x - ۱)} \times \frac{(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)}{۲(x - ۱)(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x - ۱}{۲(x - ۱) \times ۳} = \frac{۱}{۶}$$

از قاعدهٔ هوپیتال هم می‌توان برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ استفاده کرد:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{x - ۱} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۱} \frac{-\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{\frac{۲\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}}}{۱}} = \frac{۱}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۶ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x + ۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x + ۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \lim_{x\to ۲} \frac{۸ - (۳x + ۲)}{(۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶)(۴ + ۲\sqrt[۳]{۳x + ۲} + \sqrt[۳]{(۳x + ۲)^۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{-۳(x - ۲)}{۱۲(x - ۲)(۵x - ۸)} = \frac{-۱}{۸}$$

راه‌حل دوم:

$$\text{HOP} : \lim_{x\to ۲} \frac{۰ - \frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x + ۲)^۲}}}{۱۰x - ۱۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{-۱}{(۱۰x - ۱۸)\sqrt[۳]{(۳x + ۲)^۲}}$$

$$= \frac{-۱}{۲(۴)} = \frac{-۱}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۱۷ گزینه ۴

$x = \frac{\pi}{۳}$ ریشه مخرج است.

$$\frac{a}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۰ \Rightarrow a = \sqrt{۳} \Rightarrow f(x) = \frac{x\sqrt{۳} + b}{\sqrt{۳}\cos x - \sin x}$$

چون x از راست به $\frac{\pi}{۳}$ نزدیک می‌شود آن‌گاه $\sqrt{۳}\cos x < \sin x$ است پس مخرج از چپ به صفر نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۳})^+} \frac{x\sqrt{۳} + b}{\sqrt{۳}\cos x - \sin x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}\pi}{۳} + b}{۰^-} = -\infty \Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{۳}} + b > ۰$$

$$\Rightarrow b > \frac{-\pi}{\sqrt{۳}} \simeq -۱/۸۱ \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} \min(b) = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۸ گزینه ۱

تابع در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد:

$$f(۱) = \tan \frac{۳\pi}{۴} = -۱$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{|x^۲ + x - ۲|}{a(۱ - x)} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{|(x-۱)(x+۲)|}{a(۱-x)}$$

$$= \lim_{x \to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۲)}{-a(x-۱)} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{x+۲}{-a} = \frac{-۳}{a}$$

$$\frac{-۳}{a} = -۱ \Rightarrow a = ۳$$

در $x = ۵$ پیوستگی چپ دارد:

$$f(۵) = b(۵ - [-۵]) = ۱۰b$$

$$\lim_{x \to ۵^-} f(x) = \lim_{x \to ۵^-} \frac{|x^۲ + x - ۲|}{a(۱ - x)} = \frac{۲۸}{-۴a} = \frac{-۷}{a}$$

$$f(۵) = \lim_{x \to ۵^-} f(x) \Rightarrow \frac{-۷}{a} = ۱۰b \Rightarrow ab = \frac{-۷}{۱۰} = -۰/۷$$

توجه: در حل سؤال بالا نیازی به محاسبه مقدار a نبود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۹ گزینه ۱

تابع f فقط در $x = ۱$ ناپیوسته است:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ + ax + b}{x - ۱} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow ۱ + a + b = ۰ \Rightarrow a + b = -۱$$

$$۵x^۲ - ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۵ - a + b = ۰ \Rightarrow -a + b = -۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -۱ \\ -a + b = -۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲b = -۶ \Rightarrow b = -۳ , a = ۲$$

$$[\frac{b - ۲a}{۳}] = [\frac{-۳ - ۴}{۳}] = [\frac{-۷}{۳}] = -۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۰ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲ - ۱}{x + |x|} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x^۲ - ۱}{x + x} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲ - ۱}{x + |x|} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲ - ۱}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف‌نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۲

چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲ - ۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^۲ - ۱$ برابر صفر است.

$$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱ , -۱$$

بنابراین داریم:

$$p(۱) = ۰ , p(-۱) = ۰ \quad (*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x - ۲$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - ۱) + p(۱ - x)$$

$$\xrightarrow{x=۲} Q(۲) = p(۲ - ۱) + p(۱ - ۲) = p(۱) + p(-۱)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(۲) = ۰ + ۰ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۲ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۴x^n - ۶x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۷x^۲ - ۲} = ۲$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجهٔ صورت و مخرج کسر یکی باشد. بنابراین $n = ۳$ است. همچنین طبق قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{۴x^۳}{ax^۳} = \frac{۴}{a} = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

حال $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x) = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}(۴x^۲ - ۴x - ۲)}{\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}(۲x^۲ + ۸x + ۴)} = \frac{-۳}{\frac{۱۷}{۲}} = -\frac{۶}{۱۷}$$

$$\begin{array}{r|l} ۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱ & x - \frac{۱}{۲} \\ \hline -۴x^۳ + ۲x^۲ & ۴x^۲ - ۴x - ۲ \\ \hline -۴x^۲ + ۱ & \\ ۴x^۲ - ۲x & \\ \hline -۲x + ۱ & \\ ۲x - ۱ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲ & x - \frac{۱}{۲} \\ \hline -۲x^۳ + x^۲ & ۲x^۲ + ۸x + ۴ \\ \hline ۸x^۲ - ۲ & \\ -۸x^۲ + ۴x & \\ \hline ۴x - ۲ & \\ -۴x + ۲ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

روش دوم: هوپیتال

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۱۲x^۲ - ۱۲x}{۶x^۲ + ۱۴x} = \frac{۳ - ۶}{\frac{۱۷}{۲}} = \frac{-۶}{۱۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۳ گزینه ۴

$$x \to -۱^+ \Rightarrow [x] = -۱\ ,\ [-x] = ۰\ ,\ x+۱ > ۰ \Rightarrow |x+۱| = x+۱$$

$$\lim_{x \to -۱^+} \frac{|x+۱| + [x]}{x - [-x]} = \lim_{x \to -۱^+} \frac{x+۱+(-۱)}{x-۰} = \lim_{x \to -۱^+} \frac{x}{x} = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۴ گزینه ۴

تابع در $x = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} f(x) = f(\frac{\pi}{۲}) = a$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۲\sin^۲ x - \sin x - ۱}{\cos^۲ x} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۲\sin^۲ x - \sin x - ۱}{\cos^۲ x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{(۲\sin x + ۱)(\sin x - ۱)}{(۱ - \sin^۲ x)}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{(۲\sin x + ۱)\cancel{(\sin x - ۱)}}{-\cancel{(\sin x - ۱)}(\sin x + ۱)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} (-\frac{۲\sin x + ۱}{\sin x + ۱}) = -\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۵ گزینه ۴

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۱}{x+۱} + \frac{۱}{x}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{x^۲+۱}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+x+۱}{x(x+۱)}} - \sqrt{\frac{x^۲+۱-x^۲}{x^۲(x^۲+۱)}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x^۲+x}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۴+x^۲}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{۲x+۱}{x+۱}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۳+x}}\right) = \sqrt{۲} - ۰ = \sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۶ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - [x^۳]} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - ۸} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - ۸} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ - ۴}{x^۳ - ۸} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{۲x}{۳x^۲} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۲۷ گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳}{x}=\lim_{x\to ۰}(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳=(\sqrt{\frac{۱}{۹}})^۳=\frac{۱}{۲۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۸ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۱^+}(۴-[x])g(x)=۶\Rightarrow\lim_{x\to ۱^+}۳g(x)=۶$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۱^+}g(x)=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}=۲$$

جواب حد یک عدد است و مخرج به ازای $x=۱$ صفر است، بنابراین باید صورت کسر نیز به ازای آن صفر باشد، حال داریم:

$$ax^۲+bx+c=a(x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{a(x-۱)^۲}}{|x-۱|}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{a}|x-۱|}{|x-۱|}=۲$$

$$\Rightarrow a=۴$$

$$\lim_{x\to +\infty}g(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{۴}|x-۱|}{|x-۱|}=۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۹ گزینه ۱

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{ax^۲+x+۱}}{x+۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{پر توان}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{a}|x|}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{a}x}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to (-۱)^-}[\frac{۱}{x}]\times\sqrt{\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱}=-۱\times\sqrt{\frac{۱}{۴}(-۱)^۲+(-۱)+۱}=-۱\times\sqrt{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۰ گزینه ۴

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+x}}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x-|۲x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{x+۲x}{x}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۳۱ گزینه ۳

$$\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\frac{\overbrace{[(-۲)^-]}^{-۳}+۳}{(-۲)^-+۲}=\frac{۰}{۰^-}=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۲ گزینه ۴

$$\text{حد راست}:\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}\frac{x^۲-۴}{-۲(x-۲)}=\lim_{x\to۲^-}\frac{x+۲}{-۲}=-۲$$

$$f(۲)=۲$$

$$\Rightarrow f(۲)=\lim_{x\to۲^+}f(x)$$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ گزینه ۱

$$\text{مقدار تابع}: f(-۲)=a$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{۸+x^۳}{|x+۲|}=\lim_{x\to(-۲)^-}\frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{-(x+۲)}$$

$$=-\lim_{x\to(-۲)^-}(x^۲-۲x+۴)=-(۴+۴+۴)=-۱۲$$

برای پیوستگی چپ، باید $a=-۱۲$ باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۴ گزینه ۱

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۶})^-}[۲\sin x-۱]=[۲(\frac{۱}{۲})^-]-۱=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۳۵ گزینه ۳

معادلهٔ سهمی و خط را می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x-۰)(x-۴) = ax(x-۴)$$
$$f(۲) = ۱ \Rightarrow -۴a = ۱ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۴}$$
$$g(x) = \frac{-x}{۴} + ۱ = \frac{-۱}{۴}(x-۴)$$

$$\lim_{x\to ۴^-} \frac{f(x)+g(x)}{۴-x} = \lim_{x\to ۴^-} \frac{-\frac{۱}{۴}x(x-۴) - \frac{۱}{۴}(x-۴)}{۴-x}$$
$$= \lim_{x\to ۴^-} \frac{-\frac{۱}{۴}(x-۴)(x+۱)}{-(x-۴)} = \lim_{x\to ۴^-} \frac{۱}{۴}(x+۱) = \frac{۵}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۶ گزینه ۴

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^۴ - x^۲ + ۱} + \sqrt{x^۲ + ۱} - x^۲}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x^۲| + |x| - x^۲}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x} = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۷ گزینه ۱

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۴$ برابر ۳ است، پس $p(۴) = ۳$.
باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$ برابر ۱ است، پس $p(-۲) = ۱$.
حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲) + ۴p(-x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم، بنابراین $x = ۲$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^۲) + ۴p(-x) = p(۲^۲) + ۴p(-۲)$$
$$= p(۴) + ۴p(-۲) = ۳ + ۴ \times ۱ = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۳۸ گزینه ۱

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{4x^n}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow n=1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{4x}=\frac{a}{4}=\frac{1}{6}\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\frac{0}{0}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}\times\frac{\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2}{\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\frac{8}{27}x^3-x^2+1}{(4x-12)\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}\left(\frac{8}{27}x^2-\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\right)}{4\cancel{(x-3)}\left(\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2\right)}$$

$$=\frac{\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{4\times(4+2\times2+4)}=\frac{2}{48}=\frac{1}{24}$$

$$\begin{array}{r|l}\frac{8}{27}x^3-x^2+1 & x-3\\ \hline -\frac{8}{27}x^3+\frac{8}{9}x^2 & \frac{8}{27}x^2-\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\\ \hline -\frac{1}{9}x^2+1 & \\ +\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x & \\ \hline -\frac{1}{3}x+1 & \\ +\frac{1}{3}x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(2x)(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}}{4}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}-2\times\frac{1}{4}}{4}=\frac{\frac{4-3}{6}}{4}=\frac{1}{24}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۳۹ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -۸} \frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۶(۲ + \sqrt[۳]{x})} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to -۸} \frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۶(۲ + \sqrt[۳]{x})} = \lim_{x\to -۸} \frac{(x+۸)(x+۲)(۴ - ۲\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲})}{۶(۲ + \sqrt[۳]{x})(۴ - ۲\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲})}$$

$$= \lim_{x\to -۸} \frac{(x+۸)(x+۲)(۴ - ۲\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲})}{۶(x+۸)}$$

$$= \lim_{x\to -۸} \frac{(x+۲)(۴ - ۲\sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲})}{۶} = \frac{-۶ \times ۱۲}{۶} = -۱۲$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\text{HOP} : \lim_{x\to -۸} \frac{۲x + ۱۰}{۶ \times \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}} = \frac{-۱۶ + ۱۰}{۶ \times \frac{۱}{۳ \times ۴}} = -۶ \times ۲ = -۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۰ گزینه ۱

می‌دانیم $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ و $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ و $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$. حال داریم:

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^-} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^-} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^+} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{۴\pi}{۳}^\pm} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^\pm} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^\pm} = \pm\infty$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۴۱ گزینه ۳

راه‌حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۴x^۲+x}) = \lim_{x\to-\infty}(۲x+۲\left|x+\frac{۱}{۸}\right|)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x-۲(x+\frac{۱}{۸})) = -\frac{۱}{۴}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۴x^۲+x}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(۲x+\sqrt{۴x^۲+x})(۲x-\sqrt{۴x^۲+x})}{۲x-\sqrt{۴x^۲+x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{۴x^۲-(۴x^۲+x)}{۲x-\sqrt{۴x^۲}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۲x-|۲x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۴x} = -\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ صفرهای تابع $y = ۲x^۲ - (m+۲)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^۲ - mx + ۱$ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ برای چند مقدار مختلف a، بیشترین مقدار سهمی $y = ax^۲ + x + ۲a$، برابر $-\frac{۱}{۲}$ است؟ (با تغییر)

۱) ۳
۲) هیچ مقدار a
۳) ۲
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ برای چند مقدار مختلف a، کمترین مقدار سهمی $y = ax^۲ + ۳x + a$، برابر $\frac{۷}{۸}$ است؟ (با تغییر)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۴ اگر α و β صفرهای سهمی $y = ۲۵\alpha x^۲ + ۴x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x = x^۲ - ۴$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $\frac{۱}{x_۲} + x_۱^۳$ و $\frac{۱}{x_۱} + x_۲^۳$، است؟

۱) $۴x^۲ = ۵۱x + ۲۲۱$
۲) $۴x^۲ + ۵۱x = ۲۲۱$
۳) $۴x^۲ = ۵۱x + ۱۹۷$
۴) $۴x^۲ + ۵۱x = ۱۹۷$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۶ فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x = ۵ - x^۲$ باشند. $\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}$ و $\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $۱۲۵x^۲ + ۱۶x = ۱$
۲) $۱۲۵x^۲ = ۱۶x + ۱$
۳) $۱۲۵x^۲ = ۱۲x + ۱$
۴) $۱۲۵x^۲ + ۱۲x = ۱$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۷ صفرهای تابع $y = mx^۲ - ۴x - (m + ۴)$ و نقطهٔ تقاطع آن با محور yها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر ۳ باشد، اختلاف طول رأس سهمی‌های رسم‌شده توسط مقادیر مختلف m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۸ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a + ۱)x + a = ۰$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (۳a + ۱)x + b = ۰$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۲۱

۳) ۱۳ ۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a، تساوی $\frac{a_۲}{a^۲} + \frac{a_۶}{a_۲{}^۳} = ۲$ برقرار است. نسبت $a^۲$ به جملهٔ دوم کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲ ۲) ۲

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۰ فرض کنید نقاط $(-۲, ۵)$، $(۵ , ۰)$ و $(۱۱ , ۱)$، بر سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام‌یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(-۱, ۳)$ ۲) $(-۱, ۴)$

۳) $(۲, ۹)$ ۴) $(۲, ۱۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱ محور تقارن سهمی‌های $y = x^۲ + ax - ۲$ و $y = -x^۲ - ۲x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y = ۱$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟

۱) -۸ ۲) -۴

۳) ۸ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ خط $۲mx + (m^۲ - ۱)y = ۳$، به‌ازای دو مقدار m با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد. اختلاف مقادیر m کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۳ کوتاه‌ترین فاصلهٔ سهمی $y^۲ = ۴x$ از نقطهٔ $M\ (۳, ۰)$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۴ رأس سهمی $y = -ax^۲ + ax + ۲$ روی سهمی $y = ۲bx^۲ - bx - ۱$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b - a$ چقدر است؟

۱) -۶
۲) ۶
۳) -۱۸
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ به ازای چند مقدار a، سهمی $y = ax^۲ + (۳ + ۲a)x$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) هیچ مقدار a
۲) تمام مقادیر a
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲ - ax + ۴ = ۰$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۶
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷ اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a^۲ + b^۲ - ۱۲)x + a + b - ۱ = ۰$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸ فرض کنید $a, b, c \in \{۱, ۲, ..., ۹\}$. چند معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^۲ + bx - c = ۰$ می‌توان نوشت که فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله، دو واحد باشد؟

۱) ۲۴
۲) ۲۸
۳) ۳۲
۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۹ فرض کنید $a, b, c \in \{۱, ۲, ..., ۹\}$. چند معادلهٔ درجه دوم به‌صورت $ax^۲ + bx - c = ۰$ می‌توان تشکیل داد، به‌طوری‌که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل‌ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۰ فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱)(\sqrt[۳]{x^۲} + ۱ + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}) = ۲\sqrt[۳]{x}$ باشند. مقدار $x_۲ + x_۱$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۲۱ مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آنگاه حاصل‌ضرب پول‌های باقی‌ماندهٔ آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیهٔ اکرم، کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۵
۳) ۸۵
۴) ۹۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۲ معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟

۱) $(-۴, ۰)$
۲) $(-۴, -۲)$
۳) $(-۶, ۰)$
۴) $(-۶, -۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ فرض کنید $A(-۱, ۹)$ رأس سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ گذرا بر نقطهٔ $(۳, ۱)$ باشد. این سهمی از کدام‌یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

۱) $(۵, -۷)$
۲) $(۵, -۹)$
۳) $(۲, ۵)$
۴) $(۱, ۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۴ معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲ + (۲m - ۱)x + ۲ - m = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) ۳
۳) -۱
۴) $-\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۴

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، اگر $a + b + c = ۰$، آنگاه $x = ۱$ و $x = \frac{c}{a}$ است. مجموع ضرایب در معادلهٔ درجهٔ دوم داده‌شده برابر صفر است، پس:

$$۲x^۲ - (m + ۲)x + m = ۰ \Rightarrow x = ۱,\ x = \frac{m}{۲}$$

$x = ۰ : y = m$ تقاطع با محور عرض‌ها

$$\Rightarrow S = \left|\frac{m(\frac{m}{۲} - ۱)}{۲}\right| = \frac{۳}{۴} \Rightarrow |m(m-۲)| = ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^۲ - ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۳ \end{cases} \\ m^۲ - ۲m + ۳ = ۰ \text{ ریشه ندارد} \end{cases}$$

به ازای $m = -۱, ۳$ تابع $y = ۲x^۲ - (m + ۲)x + m$ دو ریشه دارد، بنابراین هر دو مقدار قابل‌قبول است. حال داریم:

$$y = x^۲ - mx + ۱ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ : y = x^۲ + x + ۱ \Rightarrow x_S = \frac{-۱}{۲} \\ m = ۳ : y = x^۲ - ۳x + ۱ \Rightarrow x_S = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

در گزینه‌ها فقط $x = \frac{-۱}{۲}$ موجود است، پس گزینهٔ "۴" درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۴

اگر $a < ۰$ و عرض رأس سهمی $-\frac{۱}{۲}$ باشد، داریم:

$$-\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \Delta = ۲a \Rightarrow ۱ - ۸a^۲ = ۲a$$

$$\Rightarrow ۸a^۲ + ۲a - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{۱}{۲} \\ a = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

باتوجه‌به علامت a، $a = -\frac{۱}{۲}$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۳ گزینه ۱

$$-\frac{\Delta}{۴a}=\frac{۷}{۸}\Rightarrow-\frac{۹-۴a^{۲}}{a}=\frac{۷}{۲}\Rightarrow-۱۸+۸a^{۲}=۷a$$

$$\Rightarrow ۸a^{۲}-۷a-۱۸=۰\Rightarrow a=\frac{۷\pm ۲۵}{۱۶}\xrightarrow{a>۰}a=۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۴ گزینه ۱

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow\alpha\beta=\frac{\beta}{۲۵\alpha}\Rightarrow\alpha^{۲}=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow\alpha=\pm\frac{۱}{۵}$$

α ریشهٔ معادله است و دو حالت رخ می‌دهد:

$$\alpha=\frac{۱}{۵}\Rightarrow ۲۵\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۲۵}+\frac{۴}{۵}+\beta=۰\Rightarrow\beta=-۱<\alpha\quad\times$$

$$\alpha=-\frac{۱}{۵}\Rightarrow ۲۵\times\frac{-۱}{۵}\times\frac{۱}{۲۵}-\frac{۴}{۵}+\beta=۰\Rightarrow\beta=۱>\alpha\quad\checkmark$$

بنابراین $\alpha=-\frac{۱}{۵}$ و $\beta=۱$ قابل‌قبول است.

$$y=-۵x^{۲}+۴x+۱$$

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۲}{۵}\quad,\quad y_S=-۵(\frac{۲}{۵})^{۲}+۴(\frac{۲}{۵})+۱=\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow S(\frac{۲}{۵},\frac{۹}{۵})$$

بنابراین S در ناحیهٔ اول قرار دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۵ گزینه ۱

$$x^۲ - x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = x_۱ + x_۲ = ۱ \\ P = x_۱x_۲ = -۴ \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ جدید را α و β می‌نامیم. داریم:

$$S_{new} = \alpha + \beta = (x_۲^{۳} + \frac{۱}{x_۱}) + (x_۱^{۳} + \frac{۱}{x_۲}) = x_۱^{۳} + x_۲^{۳} + \frac{x_۱ + x_۲}{x_۱x_۲}$$
$$= S^{۳} - ۳SP + \frac{S}{P} = ۱ - ۳(-۴) - \frac{۱}{۴} = ۱۳ - \frac{۱}{۴} = \frac{۵۱}{۴}$$
$$P_{new} = (x_۲^{۳} + \frac{۱}{x_۱})(x_۱^{۳} + \frac{۱}{x_۲}) = (x_۱x_۲)^{۳} + x_۲^{۲} + x_۱^{۲} + \frac{۱}{x_۱x_۲}$$
$$= P^{۳} + S^{۲} - ۲P + \frac{۱}{P} = (-۴)^{۳} + (۱)^{۲} - ۲(-۴) + \frac{۱}{-۴}$$
$$= -۶۴ + ۱ + ۸ - \frac{۱}{۴} = -۵۵ - \frac{۱}{۴} = \frac{-۲۲۱}{۴}$$

با S_{new} و P_{new} به دست آمده معادلهٔ جدید را می‌سازیم:

$$x^۲ - S_{new}x + P_{new} = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۵۱}{۴}x - \frac{۲۲۱}{۴} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ = ۵۱x + ۲۲۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۶ گزینه ۱

$$x^۲ + x - ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = -۱ \\ x_۱x_۲ = -۵ \end{cases}$$

ابتدا معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $x_۱ + ۱$ و $x_۲ + ۱$ باشد برای این منظور کافی است از xها یک واحد کم کنیم:

$$(x - ۱)^۲ + (x - ۱) - ۵ = ۰ \Rightarrow x^۲ - x - ۵ = ۰$$

اگر ریشه‌ها α و β باشد:

$$(\alpha + \beta) = ۱ \quad , \quad \alpha\beta = -۵$$

حال معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha^{۳}}$ و $\frac{۱}{\beta^{۳}}$ باشد:

$$S_{New} = \frac{۱}{\alpha^{۳}} + \frac{۱}{\beta^{۳}} = \frac{\alpha^{۳} + \beta^{۳}}{(\alpha\beta)^{۳}} = \frac{(\alpha + \beta)^{۳} - ۳(\alpha + \beta)(\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^{۳}}$$
$$= \frac{(۱)^{۳} - ۳(۱)(-۵)}{-۱۲۵} = -\frac{۱۶}{۱۲۵}$$
$$P_{New} = \frac{۱}{\alpha^{۳}} \times \frac{۱}{\beta^{۳}} = \frac{۱}{(\alpha\beta)^{۳}} = -\frac{۱}{۱۲۵}$$
$$\Rightarrow x^۲ - (-\frac{۱۶}{۱۲۵})x - \frac{۱}{۱۲۵} \Rightarrow ۱۲۵x^۲ + ۱۶x - ۱ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۷ گزینه ۳

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر $a + c = b$، آنگاه $x = -۱$ و $x = -\frac{c}{a}$ است.

$$y = mx^۲ - ۴x - (m + ۴) \Rightarrow x = -۱, x = \frac{m + ۴}{m}$$

$$f(۰) = -(m + ۴)$$

$$|\frac{m + ۴}{m} - (-۱)| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|m|} = \frac{\sqrt{۱۶ + ۴m^۲ + ۱۶m}}{|m|} = \frac{۲|m + ۲|}{|m|}$$

$$S = \frac{|\frac{m + ۴}{m} - (-۱)| \times |-(m + ۴)|}{۲} = \frac{|\frac{۲(m + ۲)}{m} \times (m + ۴)|}{۲} = ۳$$

$$\Rightarrow m^۲ + ۶m + ۸ = ۳|m|$$

m باید کوچک‌تر از صفر باشد، زیرا برای mهای مثبت، معادلهٔ فوق جواب ندارد. پس داریم:

$$\xrightarrow{m<۰} m^۲ + ۹m + ۸ = -۳m \Rightarrow m^۲ + ۹m + ۸ = ۰ \Rightarrow m = -۱, m = -۸$$

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{۲a} = \frac{۴}{۲m} \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \Rightarrow x_{\text{رأس}} = -۲ \\ m = -۸ \Rightarrow x_{\text{رأس}} = -\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow |-۲ + \frac{۱}{۴}| = \frac{۷}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۸ گزینه ۲

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر مجموع ضرایب صفر باشد، یکی از ریشه‌ها $x = ۱$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است:

$$x^۲ - (a + ۱)x + a = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = a \end{cases} \Rightarrow a = ۳$$

$$x^۲ - (۳a + ۱)x + b = ۰ \xrightarrow{a=۳} x^۲ - ۱۰x + b = ۰$$

مجموع ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده برابر $S = -\frac{-۱۰}{۱} = ۱۰$ است و ریشه‌ها باید دو عدد زوج متوالی باشند، پس: $x = ۴$ و $x = ۶$

$$|(۱ \times ۳) - (۴ \times ۶)| = ۲۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ گزینه ۴

$$a_n = ar^{n-۱}$$

$$\frac{a_۶}{a_۲^۳} + \frac{a_۲}{a^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{ar^۵}{a^۳r^۳} + \frac{ar}{a^۲} = ۲ \Rightarrow (\frac{r}{a})^۲ + \frac{r}{a} - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{a} = ۱ \\ \frac{r}{a} = -۲ \end{cases}$$

$$\frac{a^۲}{a_۲} = \frac{a^۲}{ar} = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{a}{r} = ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{a}{r} = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۰ گزینه ۱

سه نقطهٔ داده‌شده را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} (۰,۵) : c = ۵ \\ (-۲,۵) : ۴a - ۲b + ۵ = ۵ \Rightarrow ۴a - ۲b = ۰ \Rightarrow ۲a - b = ۰ \\ (۱,۱۱) : a + b + ۵ = ۱۱ \Rightarrow a + b = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a - b = ۰ \\ a + b = ۶ \end{cases} \Rightarrow a = ۲, b = ۴$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ۲x^۲ + ۴x + ۵$ است. هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند جواب مسئله است:

گزینهٔ ۱ : $(-۱,۳) \Rightarrow ۲(-۱)^۲ + ۴(-۱) + ۵ = ۳$ ✓

گزینهٔ ۲ : $(-۱,۴) \Rightarrow ۲(-۱)^۲ + ۴(-۱) + ۵ \neq ۴$ ×

گزینهٔ ۳ : $(۲,۹) \Rightarrow ۲(۲)^۲ + ۴(۲) + ۵ \neq ۹$ ×

گزینهٔ ۴ : $(۲,۱۵) \Rightarrow ۲(۲)^۲ + ۴(۲) + ۵ \neq ۱۵$ ×

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱ گزینه ۳

محور تقارن‌های دو سهمی با هم برابرند:

$$\frac{-a}{۲ \times ۱} = \frac{۲}{۲ \times (-۱)} \Rightarrow a = ۲$$

دو سهمی در نقطه‌ای به عرض ۱ یکدیگر را قطع می‌کنند (طول یکسان دارند)، پس:

$$۱ = x^۲ + ۲x - ۲ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۳ \end{cases}$$

$$۱ = -x^۲ - ۲x + b \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow b = ۴ \\ x = -۳ \Rightarrow b = ۴ \end{cases}$$

بنابراین $ab = ۸$ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۴

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{-۲m}{m^۲ - ۱} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{-۲m}{m^۲ - ۱} \Rightarrow \sqrt{۳}m^۲ + ۲m - \sqrt{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow |m_۱ - m_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۴ + ۱۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۳ گزینه ۳

برای yهای مثبت داریم $y = ۲\sqrt{x}$ و نقاط روی آن را $N(x\,,\,۲\sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم:

$$MN = \sqrt{(x-۳)^۲ + (۲\sqrt{x}-۰)^۲} = \sqrt{x^۲ - ۲x + ۹}$$

$$\min(MN) = \sqrt{\frac{-\Delta}{۴a}} = \sqrt{-\frac{۴-۳۶}{۴}} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۴ گزینه ۲

طول رأس سهمی $y = -ax^۲ + ax + ۲$ برابر است با:

$$x_S = \frac{-a}{-۲a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۲ + \frac{a}{۴}$$

طول رأس سهمی $y = ۲bx^۲ - bx - ۱$ برابر است با:

$$x_S = \frac{b}{۴b} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow y = -۱ - \frac{b}{۸}$$

$(\frac{۱}{۲}, ۲ + \frac{a}{۴})$ را در تابع دیگر صدق می‌دهیم:

$$(\frac{۱}{۲}, ۲ + \frac{a}{۴}) \Rightarrow ۲ + \frac{a}{۴} = \frac{b}{۲} - \frac{b}{۲} - ۱ \Rightarrow a = -۱۲$$

$(\frac{۱}{۴}, -۱ - \frac{b}{۸})$ را در تابع دیگر صدق می‌دهیم:

$$(۱۲) \times \frac{۱}{۱۶} + (-۱۲)(\frac{۱}{۴}) + ۲ = -۱ - \frac{b}{۸} \Rightarrow b = -۶$$

$$b - a = -۶ - (-۱۲) = ۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

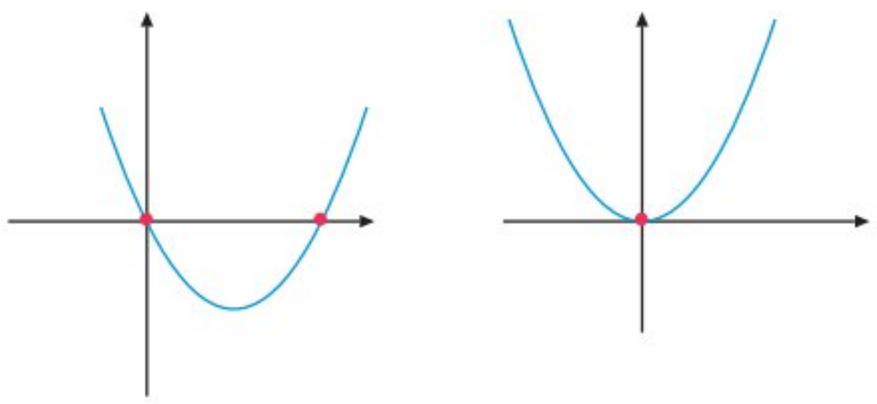
Scanned with CamScanner

۱۵ گزینه ۱

$$y = ax^۲ + (۳ + ۲a)x = x(ax + ۳ + ۲a) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ax + ۳ + ۲a = ۰ \Rightarrow x = -\dfrac{۳ + ۲a}{a} \end{cases}$$

سهمی از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند، بنابراین به‌صورت شکل‌های زیر می‌تواند باشد:



سهمی روبه‌بالا $\Rightarrow a > ۰$ $(*)$

ریشهٔ غیر صفر $> ۰ \Rightarrow -\dfrac{۳ + ۲a}{a} > ۰ \Rightarrow \dfrac{۳ + ۲a}{a} < ۰$

$$\xrightarrow{a>۰} ۳ + ۲a < ۰ \Rightarrow a < -\frac{۳}{۲}$$

بنابراین طبق $(*)$ برای a مقداری یافت نشد.

۱۶ گزینه ۳

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{۳} \xrightarrow{\beta = ۳\alpha} \alpha + ۳\alpha = \frac{a}{۳} \Rightarrow ۴\alpha = \frac{a}{۳} \Rightarrow a = ۱۲\alpha$$

$$\alpha.\beta = \frac{۴}{۳} \xrightarrow{\beta = ۳\alpha} \alpha.۳\alpha = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{۲}{۳}$$

$$a = ۱۲\alpha = ۱۲(\pm\frac{۲}{۳}) = \pm ۸ \Rightarrow ۸ - (-۸) = ۱۶$$

Scanned with CamScanner

۱۷ گزینه ۲

$$S=\frac{-(-(a^۲+b^۲-۱۲))}{۱}\Rightarrow a+b=a^۲+b^۲-۱۲$$

$$a+b=(a+b)^۲-۲ab-۱۲(I)$$

از طرفی : $P=\frac{a+b-۱}{۱}\Rightarrow ab=(a+b)-۱$

$$\xrightarrow[(I)]{\text{جایگذاری در رابطهٔ}} a+b=(a+b)^۲-۲(a+b)+۲-۱۲$$

$$\Rightarrow (a+b)^۲-۳(a+b)-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{۳+\sqrt{۴۹}}{۲}\Rightarrow a+b=۵ & \checkmark \text{ قابل‌قبول} \\ a+b=\frac{۳-\sqrt{۴۹}}{۲}\Rightarrow a+b=-۲ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸ گزینه ۳

$$|-\frac{b}{a}-(-\frac{c}{a})|=۲\Rightarrow |-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}|=۲\Rightarrow |c-b|=۲a\Rightarrow \begin{cases} c-b=۲a \\ \text{یا} \\ c-b=-۲a\Rightarrow b-c=۲a \end{cases}$$

ابتدا حالتی که $c-b=۲a$ باشد را بررسی می‌کنیم، حالت دوم نیز مشابه است.

چون a یک رقم طبیعی است پس $۲a$ زوج و مثبت است. حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

۱) اگر $c-b=۲$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ وجود دارد. (۷ حالت)

۲) اگر $c-b=۴$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ وجود دارد. (۵ حالت)

۳) اگر $c-b=۶$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۷,۸,۹\}$ وجود دارد. (۳ حالت)

۴) اگر $c-b=۸$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۹\}$ وجود دارد. (۱ حالت)

بنابراین کل حالت‌ها برابر است با:

$$۲(۱+۳+۵+۷)=۲\times ۱۶=۳۲$$

تذکر: باتوجه‌به اینکه به ازای $a,b,c\in\{۱,۲,...,۹\}$ دلتا همواره مثبت است، بنابراین کل حالات به‌دست‌آمده قابل‌قبول می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۹ گزینه ۳

$$-\frac{b}{a} = -\frac{c}{a} + ۲ \Rightarrow b = c - ۲a \Rightarrow ۲a = c - b$$
$$۲ \le ۲a \le ۱۸ \Rightarrow ۲ \le c - b \le ۱۸$$

چون $c - b$ برابر با $۲a$ است، پس عددی زوج است:
اگر $c - b = ۲$ باشد، ۷ حالت وجود دارد
اگر $c - b = ۴$ باشد، ۵ حالت وجود دارد.
اگر $c - b = ۶$ باشد، ۳ حالت وجود دارد.
اگر $c - b = ۸$ باشد، ۱ حالت وجود دارد.
پس در کل ۱۶ حالت داریم.

۲۰ گزینه ۴

$$\left(\sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱\right) = ۲\sqrt[۳]{x}$$
$$\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۴} + \sqrt[۳]{x^۲} + ۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱\right) = ۲\sqrt[۳]{x}$$
$$\xrightarrow{\times \sqrt[۳]{x^۲}} \left(\underbrace{\sqrt[۳]{x^۴}}_{a^۲} + \underbrace{\sqrt[۳]{x^۲}}_{ab} + \underbrace{۱}_{b^۲}\right)\left(\underbrace{\sqrt[۳]{x^۲}}_{a} - \underbrace{۱}_{b}\right) = ۲x$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۱ = ۲x \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$$

جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ است: $\frac{-b}{a} = ۲$

۲۱ گزینه ۳

پول علی و اکرم را به‌ترتیب x و y در نظر می‌گیریم:

$$x + y = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰ - y$$
$$(x - ۱۰)(y + ۱۰) = ۴۷۵ \xrightarrow{x=۱۰۰-y} (۱۰۰ - y - ۱۰)(y + ۱۰) = ۴۷۵$$
$$\Rightarrow y^۲ - ۸۰y - ۴۲۵ = ۰ \Rightarrow (y - ۸۵)(y + ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۸۵ \\ y = -۵ \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

۲۲ گزینه ۴

برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ مثبت باشد باید $\Delta > ۰$، $p > ۰$ و $s > ۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱)\ \Delta > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴ \times ۲ \times (m + ۶) = m^۲ - ۸m - ۴۸ > ۰$$

$$\Rightarrow \underbrace{(m - ۱۲)(m + ۴)}_{p} > ۰$$

x	$-\infty$		-۴		۱۲		$+\infty$
p(x)		+ ج	۰	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow m < -۴ \ \text{یا} \ m > ۱۲$$

$$۲)p > ۰ \Rightarrow p = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{۲} > ۰ \Rightarrow m < ۰$$

$$۳)s > ۰ \Rightarrow s = \frac{c}{a} = \frac{m + ۶}{۲} > ۰ \Rightarrow m > -۶$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، درنتیجه داریم:

$$m \in (-۶, -۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۳ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\text{رأس سهمی} : A(-۱,۹) \Rightarrow x_s = \frac{-b}{۲a} = -۱ \Rightarrow b = ۲a \quad (*)$$

حال نقاط $A(-۱,۹)$ و $(۳,۱)$ را در معادلهٔ سهمی جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} A(-۱,۹) : a - b + c = ۹ \xrightarrow{(*)} a - ۲a + c = ۹ \Rightarrow -a + c = ۹ \\ (۳,۱) : ۹a + ۳b + c = ۱ \xrightarrow{(*)} ۹a + ۶a + c = ۱ \Rightarrow ۱۵a + c = ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + c = ۹ \\ ۱۵a + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱۶a = -۸ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(*)} b = -۱$$

$$a - b + c = ۹ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} + ۱ + c = ۹ \Rightarrow c = \frac{۱۷}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$y = -\frac{۱}{۲}x^۲ - x + \frac{۱۷}{۲}$$

هرکدام از گزینه‌ها که در معادلهٔ سهمی صدق کند، جواب مسئله است:
گزینه ۱:

$$(۵,-۷) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(۲۵) - ۵ + \frac{۱۷}{۲} \neq -۷ \quad \times$$

گزینه ۲:

$$(۵,-۹) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(۲۵) - ۵ + \frac{۱۷}{۲} = -۹ \quad \checkmark$$

گزینه ۳:

$$(۲,۵) \Rightarrow -\frac{۱}{۲}(۴) - ۲ + \frac{۱۷}{۲} \neq ۵ \quad \times$$

گزینه ۴:

$$(۱,۵) \Rightarrow -\frac{۱}{۲} - ۱ + \frac{۱۷}{۲} \neq ۵ \quad \times$$

راه‌حل دوم: حالت کلی معادلهٔ سهمی به رأس (α,β) به‌صورت زیر است:

$$y = k(x - \alpha)^۲ + \beta$$

بنابراین داریم:

$$\text{رأس سهمی} : A(-۱,۹) \Rightarrow y = k(x + ۱)^۲ + ۹$$

اکنون نقطهٔ $(۳,۱)$را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$k(۳ + ۱)^۲ + ۹ = ۱ \Rightarrow k = -\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}(x + ۱)^۲ + ۹$$

با جایگذاری گزینه‌ها در معادلهٔ سهمی، فقط نقطهٔ گزینهٔ (۲) در معادله صدق می‌کند.

$$y(۵) = -۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۴ گزینه ۱

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \ , \ p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s = \frac{۱}{p} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۱}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{۲m - ۱}{۳} = \frac{۱}{\frac{(۲ - m)}{۳}} \Rightarrow \frac{-۲m + ۱}{۳} = \frac{۳}{۲ - m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -۴m + ۲m^۲ + ۲ - m = ۹ \Rightarrow ۲m^۲ - ۵m - ۷ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} m = -۱ \\ m = -\frac{c}{a} = \frac{۷}{۲} \end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادلهٔ داده‌شده دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس باید $\Delta > ۰$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} m = -۱ \Rightarrow ۳x^۲ + (-۲ - ۱)x + ۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳x + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ m = \frac{۷}{۲} \Rightarrow ۳x^۲ + (۲ \times \frac{۷}{۲} - ۱)x + ۲ - \frac{۷}{۲} = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۶x - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰ \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین $m = \frac{۷}{۲}$ است.

Scanned with CamScanner

کلاس های آنلاین

کنکور-نهایی

ریاضی تجربی،حسابان

(خصوصی،گروهی)

جهت هماهنگی پیامک کنید

09120726440

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ چند تابع ثابت با ۵ زوج مرتب می‌توان نوشت، به‌طوری‌که دامنهٔ آن اعداد طبیعی یک‌رقمی و برد آن‌ها اعداد زوج نامنفی کمتر از ۱۰ باشند

۱) ۵۰۴ ۲) ۶۳۰

۳) ۱۰۰۸ ۴) ۱۲۶۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ چند تابع ثابت با ۴ زوج مرتب می‌توان نوشت، به‌طوری‌که دامنهٔ آن اعداد طبیعی یک‌رقمی و بُرد آن اعداد زوج نامنفی یک‌رقمی باشند؟

۱) ۱۰۵۰ ۲) ۸۴۰

۳) ۶۳۰ ۴) ۵۰۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ با حروف کلمهٔ "آهنگری" چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که حروف کلمهٔ "گنه" کنار هم باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲

۳) ۱۴۴ ۴) ۲۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ چند عدد یازده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت به طوری که مضرب ۶ باشند؟

۱) ۱۳۱ ۲) ۲۲۱

۳) ۳۴۱ ۴) ۴۳۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ چند عدد چهارده‌رقمی با ارقام ۷ و ۸ می‌توان نوشت به‌طوری‌که مضرب ۶ بوده و از هر دو طرف (سمت چپ و راست) یکسان خوانده شوند؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲

۳) ۶ ۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ در یک جلسهٔ آموزشی میز گردی شامل ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ یازدهم و ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان در صندلی‌ها بنشینند، به‌طوری‌که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم‌پایه قرار نگیرد؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۸۸

۳) ۲۷۶ ۴) ۱۱۵۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۷ ۷ کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست هم جزو آن‌ها است، در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود و اگر فیزیک انتخاب شود، زیست انتخاب نشود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۱۵ ۴) ۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ ۴ کتاب متمایز با موضوع ریاضی و ۲ کتاب متمایز با موضوع آمار را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد، به‌طوری‌که موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (بجز کتاب اول و آخر)، متفاوت باشد؟

۱) ۹۶ ۲) ۷۲

۳) ۴۸ ۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخهٔ مختلف موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰

۳) ۱۵۴ ۴) ۱۶۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۰ از هر ۵ مدرسهٔ نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد، به‌طوری‌که هیچ دو نفر انتخاب‌شده از یک مدرسه نباشند؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۲۷۰

۳) ۳۲۰ ۴) ۶۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۱ به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر آنان، نخواهند باهم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷

۳) ۹۱ ۴) ۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۲ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۵

۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۳ به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به‌طوری‌که افراد هم تیمی کنار هم باشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴

۳) ۲۱۶ ۴) ۴۳۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۲

تابع موردنظر را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f = \{(a, b), (c, b), (d, b), (e, b), (g, b)\}$$

طول نقاط اعداد طبیعی یک‌رقمی و عرض آن‌ها ثابت و اعداد زوج نامنفی کمتر از ۱۰ است.

$$D_f = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

$$R_f = \{۰, ۲, ۴, ۶, ۸\}$$

بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\binom{۹}{۵} \times ۵ = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} \times ۵ = ۶۳۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ گزینه ۳

تابع f را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f = \{(a_۱, k), (a_۲, k), (a_۳, k), (a_۴, k)\}$$

$$D_f = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

$$R_f = \{۰, ۲, ۴, ۶, ۸\}$$

برای مؤلفهٔ اول، انتخاب ۴ عدد از ۹ عدد یک‌رقمی طبیعی خواهیم داشت و برای مؤلفهٔ دوم، ۵ انتخاب داریم. پس کل حالات برابر است با:

$$\binom{۹}{۴} \times ۵ = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۶۳۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳

حروف گ، ن، هـ را یک دسته در نظر می‌گیریم.

ی ر آ | گ ن هـ |

پس تعداد کلمات $۴! \times ۳!$ یعنی ۱۴۴تا است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۴ گزینه ۳

چون عدد بر ۶ بخش‌پذیر است، پس رقم یکان فقط ۲ می‌تواند باشد و علاوه بر آن مجموع ارقام باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

$$\underbrace{_____}_{\text{(n) تا ۱ و (۱۰−n) تا ۲}}_۲$$

n حداکثر می‌تواند ۱۰ باشد.

$$\text{مجموع ارقام} = ۲(۱۰-n)+n+۲ = ۲۲-n$$

$$\xrightarrow{\text{بخش‌پذیر بر ۳ باشد}} n = ۱, ۴, ۷, ۱۰$$

n مقدار دیگری نمی‌تواند بپذیرد، چون در این صورت مجموع ارقام مضرب ۳ نمی‌شود.

$$\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۷}+\binom{۱۰}{۱۰} = ۱۰+۲۱۰+۱۲۰+۱ = ۳۴۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۱

رقم یکان باید حتماً ۸ باشد تا زوج بودن عدد برقرار شود. ازطرفی مجموع ارقام باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد و عدد نیز متقارن شود. پس رقم چهاردهم هم ۸ است. برای برقراری تقارن ارقام ۷ باید زوج تا باشند.
حال از بین ۱۲ رقم باقی‌مانده، اگر ۷تا n باشد، $۱۲-n$ تا ۸ وجود دارد. پس مجموع ارقام برابر است با:

$$۱۶+۷n+۸(n-۱) = ۱۶+۷n+۹۶-۸n = ۱۱۲-n$$

و این مجموع باید بر ۳ بخش پذیر باشد. همچنین به دلیل تقارن ارقام، باید n زوج باشد.
با بررسی تمامی حالات، متوجه می‌شویم n می‌تواند اعداد ۴ و ۷ باشد. یعنی فقط حالت داشتن ۴ رقم ۷ و ۱۰ رقم ۷ می‌تواند درست باشد.
الف) ۴ رقم ۷ و ۱۰ رقم ۸ داریم. عدد ۱۴ رقم را از وسط نصف می‌کنیم. جای یکی از ارقام مهم که از قبل مشخص شده است، پس برای ۶ جای باقی‌مانده، ۲ تا ۷ و ۴ تا ۸ قرار می‌دهیم:

$$\underline{۸}\ \underbrace{\underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۷}}\ \underbrace{\underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۸}}\ \underline{۸}$$

$$\text{تعداد حالات} = \binom{۶}{۲} = ۱۵$$

ب) ۱۰ رقم ۷ و ۴ رقم ۸ داریم. دوباره عدد را نصف می‌کنیم. جای یکی از ارقام از قبل تعیین شده است، برای ۶ جای باقی‌مانده ۵ رقم ۷ و ۱ رقم ۸ قرار می‌دهیم:

$$\underline{۸}\ \underbrace{\underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}}\ \underbrace{\underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۸}}\ \underline{۸}$$

$$\text{تعداد حالات} = \binom{۶}{۵} = ۶$$

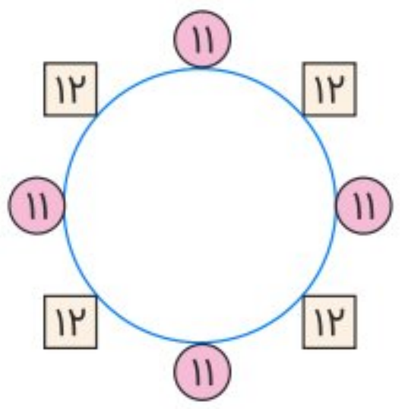
بنابراین $۱۵+۶ = ۲۱$ عدد با این شرایط می‌توان ساخت.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۶ گزینه ۱

دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم اول به $(۱-۴)! = ۶$ طریق دور میز می‌نشینند.
حالا ۴ دانش‌آموز دوازدهم به $۴!$ طریق در ۴ جایگاه بین آن‌ها قرار می‌گیرند.



جواب : $۶ \times ۴! = ۱۴۴$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۷ گزینه ۳

حالت‌های انتخاب ۴ کتاب از ۷ کتاب به‌صورت زیر است:

تعداد حالت‌ها	زیست	فیزیک	ریاضی
$\binom{۴}{۲}\binom{۱}{۱}\binom{۱}{۱} = ۶$	✓	×	✓
$\binom{۴}{۳}\binom{۱}{۱} = ۴$	×	✓	×
$\binom{۴}{۳}\binom{۱}{۱} = ۴$	✓	×	×
$\binom{۴}{۴} = ۱$	×	×	×

تعداد کل حالت‌ها $= ۶ + ۴ + ۴ + ۱ = ۱۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ گزینه ۳

ازآنجایی‌که ۲ کتاب آمار داریم، این دو کتاب نمی‌توانند در ابتدا و انتها قرار گیرند، پس تنها حالت زیر اتفاق می‌افتد (R کتاب ریاضی - A کتاب آمار):

$\mathrm{R\ R\ A\ A\ R\ R} \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۴! \times ۲! = ۴۸$

توجه: دقت کنید که در صورت سؤال عنوان شده ۲ کتاب مجاور هر کتاب، این حالت با حالتی که دو کتاب مجاور متفاوت باشند، تفاوت دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۳

تعداد انتخاب‌ها به‌صورت زیر است:

$$\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}=\frac{۸!}{۴!۴!}+\frac{۸!}{۵!۳!}+\frac{۸!}{۶!۲!}$$
$$=\frac{۸\times۷\times۶\times۵}{۴\times۳\times۲\times۱}+\frac{۸\times۷\times۶}{۶}+\frac{۸\times۷}{۲}=۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۰ گزینه ۴

اول ۳تا از مدرسه‌ها را به $\binom{۵}{۳}$ طریق انتخاب می‌کنیم. بعد از هر مدرسه ۱ نفر برمی‌داریم.

$$\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۰\times۴\times۴\times۴=۶۴۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۳

برای اینکه دو نفر مشخص باهم در مهمانی نباشند دو حالت زیر را داریم:
۱) از آن دو نفر فقط یکی در مهمانی باشد.
۲) هیچ‌کدام از آن دو نفر در مهمانی نباشند.
بنابراین داریم:

$$\underbrace{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴}}_{\text{حالت اول}}+\underbrace{\binom{۲}{۰}\binom{۷}{۵}}_{\text{حالت دوم}}=۲\times\frac{۷!}{۴!۳!}+۱\times\frac{۷!}{۵!۲!}$$
$$۲\times\frac{۷\times\cancel{۶}\times۵}{\cancel{۶}}+\frac{۷\times\cancel{۶}^{۳}}{\cancel{۲}}=۷۰+۲۱=۹۱$$

$\underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{۲ نفر}}\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{\text{۷ نفر}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۲ گزینه ۴

برای توزیع کتاب دو حالت زیر را داریم:

۱) یک نفر فقط یک کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام دو کتاب داشته باشند:

ابتدا دو نفر از سه نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام دو کتاب می‌دهیم. سپس یک کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.

یک کتاب دو کتاب دو کتاب

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱} = ۳ \times \frac{۵!}{۲!۳!} \times ۳ \times ۱ = ۹۰$$

۲) یک نفر سه کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام یک کتاب داشته باشند:

ابتدا دو نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام یک کتاب می‌دهیم. سپس سه کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.

یک کتاب یک کتاب سه کتاب

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳} = ۳ \times ۵ \times ۴ \times ۱ = ۶۰$$

در انتها تعداد حالت‌های به‌دست‌آمده را باهم جمع می‌کنیم:

$$۹۰ + ۶۰ = ۱۵۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۳ گزینه ۲

تعداد حالت‌های قرارگرفتن برابر است با:

$$(۲!)(۳!)(۲!)(۳!) = ۱۴۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ اگر $\sqrt{x-۴}+\sqrt{x-a}=۴$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x-۴}+\sqrt{x-a}-۱$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{۲}$
۲) $\frac{a}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۳]{۳\sqrt{۲۷}}\times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}}\times ۸۱^{-\frac{۳}{۴}}}$ کدام است؟

۱) ۲۷
۲) ۸۱
۳) $۲۷\sqrt[۳]{۳}$
۴) $۸۱\sqrt[۳]{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ اگر $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-۴}=۲$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-۴}-۲$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{a}{۴}$
۴) $\frac{a}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۸}}}{\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}\times ۱۶^{-\frac{۳}{۴}}}$ کدام است؟

۱) $۱۶\sqrt{۲}$
۲) $۱۶\sqrt[۳]{۲}$
۳) $۸\sqrt{۲}$
۴) $۸\sqrt[۳]{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ اگر $B=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۲}}+\sqrt{۱۴}}{\frac{۸}{\sqrt{۲}}+\sqrt{۱۴}}$ باشد، حاصل $۳B+۱$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۷}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۶ ریشهٔ هفتم عدد مثبت a مساوی ۲۷ برابر عدد a با توان $\frac{۱۵}{۷}$ است. $(۳ - \frac{۱}{a})$ چند برابر $(\sqrt{۳} + ۱)$ است؟

۱) $۶ - ۳\sqrt{۳}$
۲) ۳
۳) ۶
۴) $۶ + ۳\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۷ حاصل عبارت $(\sqrt{۳ + \sqrt{۵}} - \sqrt{۳ - \sqrt{۵}})(\frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰} + ۲})$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $-\sqrt{۲}$
۳) ۱
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $\{\frac{۱}{۱۲۸} > ۸^{-\frac{۲}{۳}m} \times ۴^{-n} + ۴^{-m} \times ۸^{-\frac{۲}{۳}n}, m, n \in \mathbb{N}\}$، $A = \{m^۳ + n^۲ | m, n \in \mathbb{N}\}$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۹
۳) ۵
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ حاصل عبارت $\sqrt{۱ + \sqrt{۷}}\sqrt{(۴ + \sqrt{۷})^{-۱}}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt[۴]{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt[۴]{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۰ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۸} + \sqrt{۲۷}}{۵ - \sqrt{۶}} - ۲\left(\sqrt[۴]{۹} - ۱\right)^{-۱}$، کدام است؟

۱) $۱ + \sqrt{۳}$
۲) $-۱ + \sqrt{۲}$
۳) $۱ - \sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱ فرض کنید $a = \sqrt[۴]{\sqrt{۶} - ۲}$ و $b = \sqrt[۴]{\sqrt{۶} + ۲}$. مقدار $(a^۲ + b^۲ - ۲ab)^۲(a^۲ + b^۲ + ۲ab)^۲$، کدام است؟

۱) $۴(۲ + \sqrt{۳})$
۲) $۴(۲ - \sqrt{۳})$
۳) $۱۶(۲ + \sqrt{۳})$
۴) $۱۶(۲ - \sqrt{۳})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۲ فرض کنید $a = \sqrt[۴]{۷ - ۴\sqrt{۳}}$. مقدار $\left(a + \frac{۱}{a} + \sqrt{۲}\right)^۲\left(a + \frac{۱}{a} - \sqrt{۲}\right)^۲$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۶
۳) ۲۵
۴) ۴۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۳ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}$، کدام است؟

۱) $۱+۲\sqrt{۳}$

۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) $۱+\sqrt{۳}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۲

$$(\sqrt{x-۴}+\sqrt{x-a})(\sqrt{x-۴}-\sqrt{x-a})=a-۴$$

$$\Rightarrow ۴(\sqrt{x-۴}-\sqrt{x-a})=a-۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-۴}-\sqrt{x-a}=\frac{a}{۴}-۱$$

$$\Rightarrow ۱-\sqrt{x-a}+\sqrt{x-۴}=\frac{a}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

$$\frac{\sqrt[۳]{۳\sqrt{۲۷}}\times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۳}}\times ۸۱^{-\frac{۳}{۴}}}=\frac{(۳\times ۳^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۱}{۳}}}{۳^{\frac{۱}{۶}}\times ۳^{-۳}}=\frac{۳^{\frac{۵}{۲}\times\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳}}}{۳^{\frac{۱}{۶}-۳}}=\frac{۳^{\frac{۷}{۶}}}{۳^{-\frac{۱۷}{۶}}}$$

$$=۳^{\frac{۷}{۶}+\frac{۱۷}{۶}}=۳^{\frac{۲۴}{۶}}=۳^{۴}=۸۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ گزینه ۴

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x-۴}=۲$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+a}-\sqrt{x-۴})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-۴})=۲(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-۴})$$

$$\Rightarrow a+۴=۲(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-۴})$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+a}+\sqrt{x-۴}-۲=\frac{a+۴}{۲}-۲=\frac{a}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ گزینه ۴

$$\frac{\sqrt[۳]{۲\times ۲^{\frac{۳}{۲}}}}{\sqrt[۳]{۲\times ۲^{\frac{۱}{۲}}}\times ۲^{-۳}}=\frac{۲^{\frac{۵}{۶}}}{۲^{-\frac{۵}{۲}}}=۲^{\frac{۵}{۶}+\frac{۵}{۲}}=۲^{\frac{۲۰}{۶}}=۲^{۳+\frac{۱}{۳}}=۸\sqrt[۳]{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۵ گزینه ۲

$$B=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۲}}+\sqrt{۱۴}}{\frac{۸}{\sqrt{۲}}+\sqrt{۱۴}}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۱۴}}{۴\sqrt{۲}+\sqrt{۱۴}}=\frac{\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۷})}{\sqrt{۲}(۴+\sqrt{۷})}=\frac{۱+\sqrt{۷}}{۴+\sqrt{۷}}$$

$$B=\frac{(۱+\sqrt{۷})(۴-\sqrt{۷})}{(۴+\sqrt{۷})(۴-\sqrt{۷})}=\frac{-۳+۳\sqrt{۷}}{۱۶-۷}=\frac{۳(\sqrt{۷}-۱)}{۹}$$

$$\Rightarrow ۳B+۱=\sqrt{۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶ گزینه ۱

$$\sqrt[۷]{a}=۲۷\times a^{\frac{۱۵}{۷}}\Rightarrow a^{\frac{۱۵}{۷}-\frac{۱}{۷}}=\frac{۱}{۲۷}\Rightarrow a^{۲}=\frac{۱}{۲۷}\xrightarrow{a>۰}a=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow \frac{۱}{a}-۳=۳(\sqrt{۳}-۱)$$

$$\frac{\frac{۱}{a}-۳}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۳(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}+۱}\times\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{۳(۴-۲\sqrt{۳})}{۲}=۳(۲-\sqrt{۳})=۶-۳\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۷ گزینه ۱

قرار می‌دهیم:

$$A=\sqrt{۳-\sqrt{۵}}-\sqrt{۳+\sqrt{۵}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} A^{۲}=۳-\sqrt{۵}+۳+\sqrt{۵}-۲\sqrt{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})}=۲$$

$$\xrightarrow{A<۰} A=-\sqrt{۲}$$

خواستهٔ سوال برابر است با:

$$(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۱۰}+۲})\times(-\sqrt{۲})=-\frac{۲+\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}+۲}=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۸ گزینه ۲

$$۸^{-\frac{۲}{۳}m} \times ۴^{-n} + ۴^{-m} \times ۸^{-\frac{۲}{۳}n} > \frac{۱}{۱۲۸}$$

$$۲^{-۲m} \times ۲^{-۲n} + ۲^{-۲m} \times ۲^{-۲n} > ۲^{-۷} \Rightarrow ۲ \times ۲^{-۲(m+n)} > ۲^{-۷}$$

$$\Rightarrow ۲^{m+n} < ۲^{۴} \Rightarrow m + n < ۴$$

چون m و n اعداد طبیعی‌اند، پس بیشترین مقدار $m^{۳} + n^{۲}$ زمانی رخ می‌دهد که $m = ۲$ و $n = ۱$ باشد.

$$\max(m^{۳} + n^{۲}) = ۲^{۳} + ۱^{۲} = ۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ گزینه ۲

$$\sqrt[۴]{(۴ + \sqrt{۷})^{-۱}}\sqrt{(۱ + \sqrt{۷})} = \sqrt[۴]{\frac{۱}{۴ + \sqrt{۷}}}\sqrt[۴]{(۱ + \sqrt{۷})^{۲}}$$

$$= \sqrt[۴]{\frac{۱}{۴ + \sqrt{۷}}}\sqrt[۴]{۸ + ۲\sqrt{۷}} = \sqrt[۴]{\frac{۸ + ۲\sqrt{۷}}{۴ + \sqrt{۷}}} = \sqrt[۴]{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۰ گزینه ۲

ابتدا هر عبارت را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۸} + \sqrt{۲۷}}{۵ - \sqrt{۶}} = \frac{۲\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۳}}{۵ - \sqrt{۶}} = \frac{۲\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۳}}{۵ - \sqrt{۶}} \times \frac{۵ + \sqrt{۶}}{۵ + \sqrt{۶}}$$

$$= \frac{۱۰\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۳} + ۱۵\sqrt{۳} + ۹\sqrt{۲}}{۲۵ - ۶} = \frac{۱۹\left(\sqrt{۲} + \sqrt{۳}\right)}{۱۹} = \sqrt{۲} + \sqrt{۳} \quad (۱)$$

$$۲\left(\sqrt[۴]{۹} - ۱\right)^{-۱} = \frac{۲}{\sqrt[۴]{۹} - ۱} = \frac{۲}{\sqrt{۳} - ۱} = \frac{۲}{\sqrt{۳} - ۱} \times \frac{\sqrt{۳} + ۱}{\sqrt{۳} + ۱}$$

$$= \frac{۲\left(\sqrt{۳} + ۱\right)}{۲} = \sqrt{۳} + ۱ \quad (۲)$$

بنابراین طبق (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sqrt{۸} + \sqrt{۲۷}}{۵ - \sqrt{۶}} - ۲\left(\sqrt[۴]{۹} - ۱\right)^{-۱} = \sqrt{۲} + \sqrt{۳} - \left(\sqrt{۳} + ۱\right) = \sqrt{۲} - ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۱ گزینه ۴

$$(a^۲+b^۲-۲ab)^۲(a^۲+b^۲+۲ab)^۲$$
$$=(a-b)^۴(a+b)^۴=(a^۲-b^۲)^۴=(a^۴+b^۴-۲a^۲b^۲)^۲$$
$$=(\sqrt{۶}-۲+\sqrt{۶}+۲-۲\sqrt{۶-۴})^۲=(۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۲})^۲$$
$$=(۲\sqrt{۲})^۲(\sqrt{۳}-۱)^۲=۸(۳+۱-۲\sqrt{۳})=۱۶(۲-\sqrt{۳})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۲ گزینه ۲

$$(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲=((a+\frac{۱}{a})^۲-۲)^۲=(a^۲+\frac{۱}{a^۲})^۲$$
$$=a^۴+\frac{۱}{a^۴}+۲=۷-۴\sqrt{۳}+\frac{۱}{۷-۴\sqrt{۳}}+۲=۷-۴\sqrt{۳}+۷+۴\sqrt{۳}+۲=۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۳ گزینه ۱

ابتدا هر عبارت را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}\times\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}-۹-۴+\sqrt{۳}}{۱۶-۳}$$
$$=\frac{۱۳\sqrt{۳}-۱۳}{۱۳}=\sqrt{۳}-۱\quad(۱)$$

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}\quad(۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\sqrt{۳}-۱+۲+\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}+۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ اگر بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن بر محور xها و دو رأس دیگر آن، یکی بر $y=\sqrt{x}$ و دیگری بر $y=\sqrt{a-x}$ واقع است برابر $\sqrt{۲}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (با تغییر)

۱) ۶
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ بیشترین مساحت مستطیلی که دو رأس آن، بر محور xها و دو رأس دیگر آن، یکی بر $y=\sqrt{x+۱}$ و دیگری بر $y=\sqrt{۲-x}$ قرار دارد، کدام است؟ (با تغییر)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۲}$

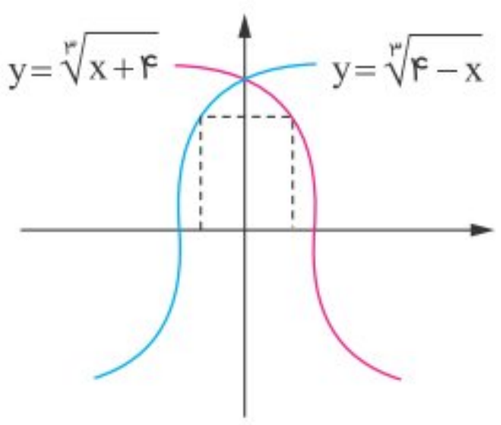
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ محاط می‌شود، کدام است؟

۱) ۳۲π
۲) ۶۴π
۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$
۴) $\frac{۵۱۲\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴ مساحت بزرگ‌ترین مستطیل واقع در ناحیه‌های اول و دوم که دو رأس آن بر محور xها و دو رأس دیگر آن بر نمودارهای داده‌شده در شکل زیر قرار دارد، کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

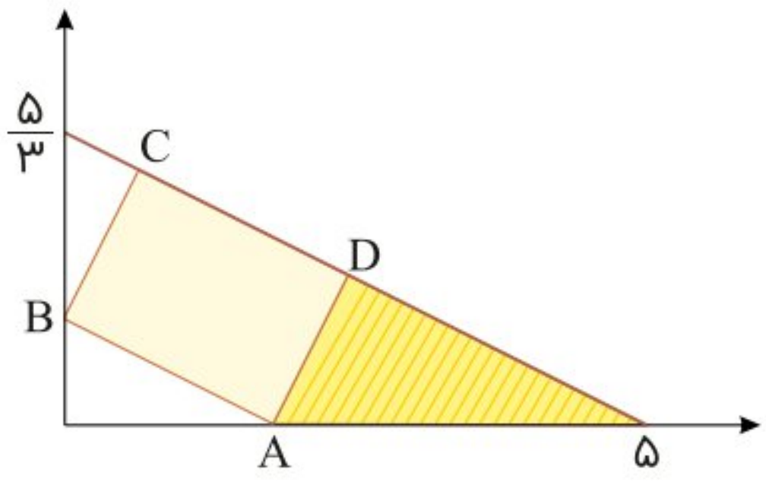
۵ مقدار مینیمم نسبی تابع $y=x^۳-۱۲x+۲$ کدام است؟

۱) -۱۴
۲) -۱۱
۳) -۹
۴) -۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۶ در شکل زیر، مساحت مستطیل $ABCD$ ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشورخورده چقدر است؟



۱) $\frac{۱۵}{۸}$

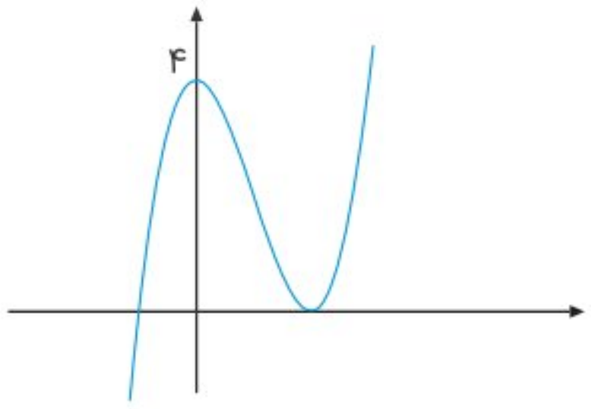
۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$

۴) $\frac{۲۵}{۲۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۷ نمودار تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ به‌صورت زیر است. طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

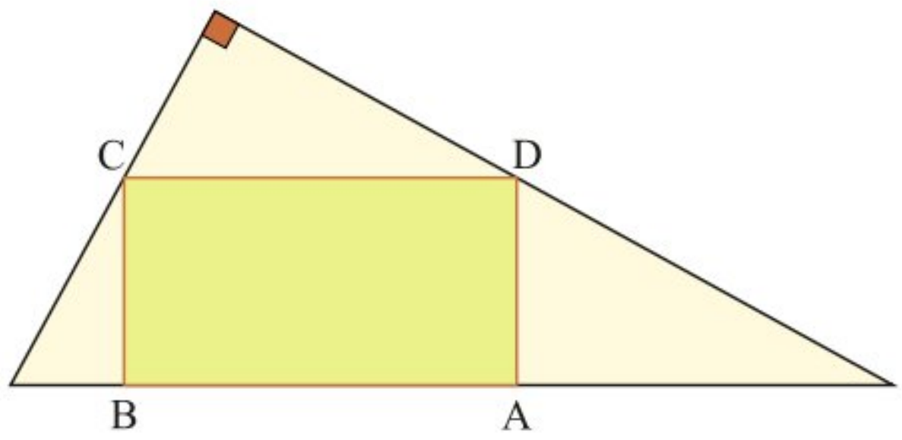
۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ در شکل زیر، یکی از اضلاع قائمه مثلث بزرگ نصف دیگری است. اگر مساحت مستطیل $ABCD$ ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟



۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۲

۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ حاصل‌ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a - ۲x}$ برابر $\sqrt{۱۲}$ است. اگر $a > ۰$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ نمودار تابع $y = x^۳ + ax^۲ - ۲bx - ۴$ در نقاطی به طول صفر و ۲- دارای اکسترمم نسبی است. فاصله بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع، چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$

۲) $۲\sqrt{۱۱}$

۳) $۲\sqrt{۱۵}$

۴) $۲\sqrt{۱۰۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۱ قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x) = x^۲$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA'، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۲ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ - ۱}|x^۲ - ۴|$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۳ کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵, ۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۲x + ۷}$، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۵
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴ فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{۴x - x^۲}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۵ در ساخت قوطی‌های حلبی در باز به شکل مکعب‌مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده‌شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۲
۳) ۱۰
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۶ از بین مخروط‌های حاصل که از دوران کامل پاره‌خط AB با اندازهٔ $۳\sqrt{۳}$ حول خط L به دست می‌آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطهٔ A روی خط L واقع است)

۱) ۶
۲) ۳
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷ مینیمم مطلق تابع $f(x) = x|۳ - x^۲|$ در بازهٔ $[-۱/۵, \sqrt{۳}]$، کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۴}$
۲) -۲
۳) $-\sqrt{۳}$
۴) $-\frac{۹}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۸ قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[۳]{-x}$ را در دامنهٔ $[۰, ۱]$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم صفحهٔ مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA'، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳\sqrt{۶}}$
۲) $\frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$
۳) $\frac{۲}{۳\sqrt{۲}}$
۴) $\frac{۴}{۳\sqrt{۲}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۹ مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۲ + ۲x - ۳}{x^۲ + ۱}$، کدام است؟

۱) $-۱ + \sqrt{۵}$
۲) $۱ + \sqrt{۵}$
۳) $-۱ + \sqrt{۳}$
۴) $۱ + \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۰ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x - ۴|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۲ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۱۲ - x}$ در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) $۸\sqrt{۳}$
۳) ۱۶
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۳ بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۲۷
۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x| - ۲x$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

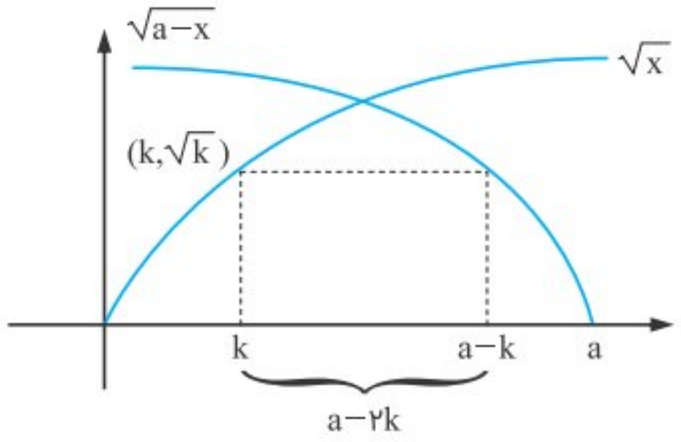
۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۳\sqrt{۲}$
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۳



$$S = \sqrt{k}(a - ۲k) \Rightarrow S' = \frac{۱}{۲\sqrt{k}}(a - ۲k) - ۲\sqrt{k} = ۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲\sqrt{k}} a - ۲k - ۴k = ۰ \Rightarrow k = \frac{a}{۶}$$

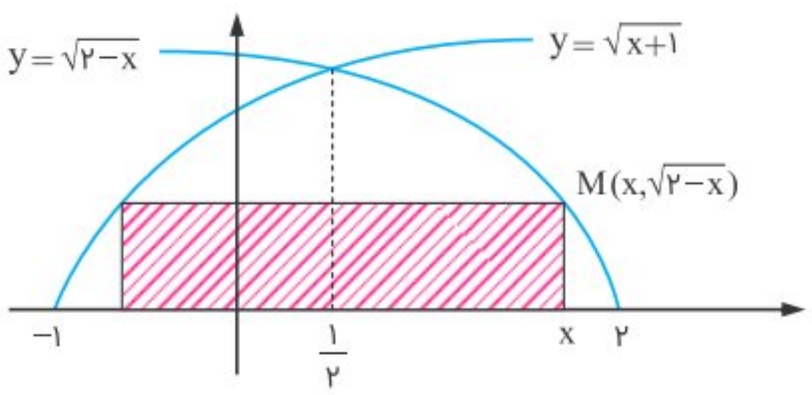
$$S_{max} = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{۶}}(a - \frac{a}{۳}) = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{۶}}(\frac{۲a}{۳}) = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۶}(\frac{۴a^{۲}}{۹}) = ۲ \Rightarrow a^{۳} = ۲۷ \Rightarrow a = ۳$$

Scanned with CamScanner

۲ گزینه ۴

طول برخورد دو تابع، $x = \frac{۱}{۲}$ است. نقطهٔ M را به مختصات $(x, \sqrt{۲-x})$، در نظر می‌گیریم. طول مستطیل، $۲(x - \frac{۱}{۲})$، یعنی $۲x - ۱$ خواهد بود.



اکنون مساحت مستطیل را ماکزیمم می‌کنیم.

$$S = (۲x - ۱)\sqrt{۲-x}\ ,\ -۱ \le x \le ۲$$

$$S' = ۲\sqrt{۲-x} - \frac{۲x-۱}{۲\sqrt{۲-x}} = ۰$$

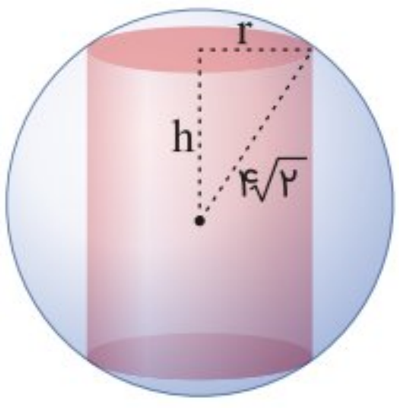
$$\Rightarrow ۴(۲-x) = ۲x - ۱ \Rightarrow ۸ - ۴x = ۲x - ۱$$

$$۶x = ۹ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$S_{max} = (۲ \times \frac{۳}{۲} - ۱)\sqrt{۲ - \frac{۳}{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

Scanned with CamScanner

۳ گزینه ۲



$$h^۲ + r^۲ = ۳۲ \Rightarrow h = \sqrt{۳۲ - r^۲}$$

$$\text{مساحت جانبی} : f = ۲\pi r \times ۲h = ۴\pi r\sqrt{۳۲ - r^۲} = ۴\pi\sqrt{۳۲r^۲ - r^۴}$$

$$f' = ۴\pi \times \frac{۶۴r - ۴r^۳}{۲\sqrt{۳۲r^۲ - r^۴}} = ۰ \quad \begin{cases} r = ۰ & \text{نادرست} \\ r = ۴ & \text{درست} \end{cases}$$

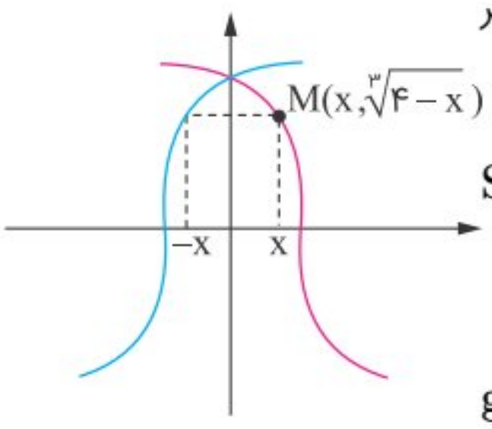
اگر $r = ۴$ باشد $h = ۴$ است.

$$\max(S) = ۴\pi(۴)(۴) = ۶۴\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴ گزینه ۴

نقطهٔ M را به‌صورت پارامتری روی تابع $y = \sqrt[۳]{۴ - x}$ انتخاب می‌کنیم. مساحت مستطیل را تابعی از x در نظر می‌گیریم.



$$S(x) = ۲x\sqrt[۳]{۴ - x} = ۲\sqrt[۳]{۴x^۳ - x^۴}$$

کافی است $۴x^۳ - x^۴$ را ماکزیمم کنیم.

$$g(x) = ۴x^۳ - x^۴ \Rightarrow g'(x) = ۱۲x^۲ - ۴x^۳ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۳$$

$$S_{max} = S(۳) = ۲ \times ۳\sqrt[۳]{۴ - ۳} = ۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۵ گزینه ۱

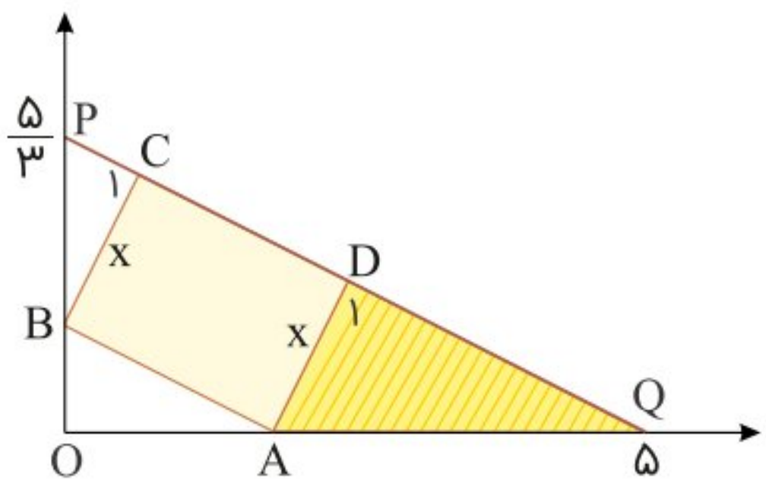
$$y = x^۳ - ۱۲x + ۲ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲$$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		↗	۱۸	↘	-۱۴	↗	

بنابراین مقدار مینیمم نسبی برابر -۱۴ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶ گزینه ۲



$$\begin{cases} C_۱ = O = ۹۰^\circ \\ \hat{P} = \hat{P} \end{cases} \Rightarrow P\overset{\triangle}{B}C \sim O\overset{\triangle}{P}Q \Rightarrow \frac{PC}{OP} = \frac{BC}{OQ}$$

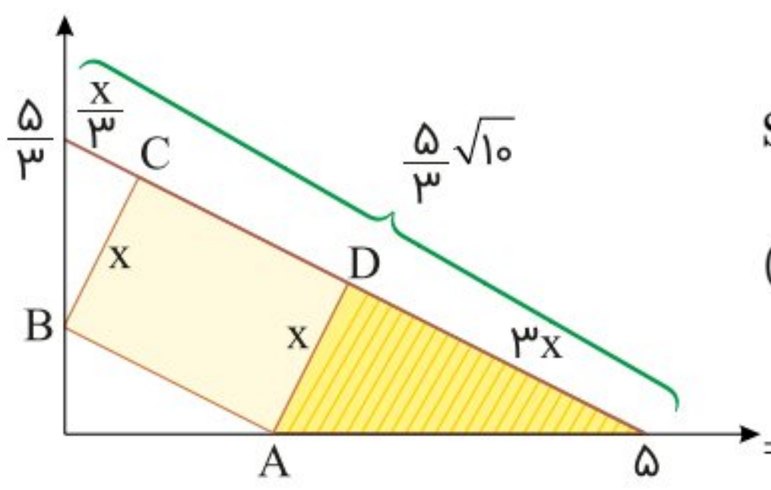
$$\Rightarrow PC = OP \times \frac{BC}{OQ} = \frac{۵}{۳} \times \frac{x}{۵} = \frac{x}{۳}$$

$$\begin{cases} D_۱ = O = ۹۰^\circ \\ \hat{Q} = \hat{Q} \end{cases} \Rightarrow A\overset{\triangle}{D}Q \sim O\overset{\triangle}{P}Q \Rightarrow \frac{DQ}{OQ} = \frac{AD}{OP}$$

$$\Rightarrow DQ = OQ \times \frac{AD}{OP} = ۵ \times \frac{x}{\frac{۵}{۳}} = ۳x$$

$$PQ = \sqrt{۲۵ + \frac{۲۵}{۹}} = \sqrt{\frac{۱۰ \times ۲۵}{۹}} = \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}$$

$$CD = \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰} - \frac{x}{۳} - ۳x$$



$$S_{ABCD} = x \times CD = x(\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰} - \frac{x}{۳} - ۳x) = -\frac{۱۰}{۳}x^۲ + \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}x$$

$$(S_{ABCD})' = -\frac{۲۰}{۳}x + \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰} \Rightarrow -\frac{۲۰}{۳}x + \frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰} = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}}{-\frac{۲۰}{۳}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

حداکثر S در $x = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$ رخ می‌دهد، پس مساحت هاشورخورده برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}x \times ۳x = \frac{۳}{۲}x^۲ = \frac{۳}{۲} \times \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۷ گزینه ۲

$$f(۰) = ۴ \Rightarrow c = ۴$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(۰) = ۰ \Rightarrow b = ۰ \\ f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲ax = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{۲a}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

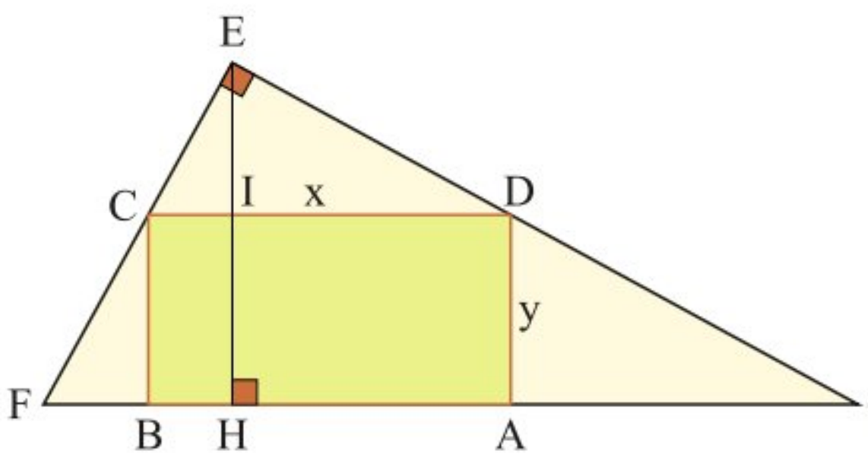
$$f(-\frac{۲a}{۳}) = ۰ \Rightarrow (-\frac{۲a}{۳})^۳ + a(-\frac{۲a}{۳})^۲ + ۴ = ۰$$

$$-\frac{۸a^۳}{۲۷} + \frac{۴a^۳}{۹} + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴a^۳}{۲۷} = -۴ \Rightarrow a^۳ = -۲۷$$

$$\Rightarrow a = -۳ \Rightarrow x_{min} = -\frac{۲a}{۳} = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ گزینه ۴



$$EF = a\,,\, EG = ۲a$$

$$\Rightarrow FG = \sqrt{a^۲ + ۴a^۲} = \sqrt{۵}a$$

$$\Rightarrow EF \times EG = EH \times FG \Rightarrow EH = \frac{۲a \times a}{\sqrt{۵}a} = \frac{۲a}{\sqrt{۵}}$$

$$\frac{CD}{FG} = \frac{EI}{EH} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{۵}a} = \frac{\frac{۲a}{\sqrt{۵}} - y}{\frac{۲a}{\sqrt{۵}}} \Rightarrow \frac{۲x}{۵} = \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - y \Rightarrow y = \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۲x}{۵}$$

$$S = xy = x(\frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۲x}{۵}) = \frac{۲ax}{\sqrt{۵}} - \frac{۲x^۲}{۵}$$

$$S' = ۰ \Rightarrow \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۴x}{۵} = ۰ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۵}}{۲}a \Rightarrow y = \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۲(\frac{\sqrt{۵}}{۲}a)}{۵} = \frac{a}{\sqrt{۵}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۲}a}{\frac{a}{\sqrt{۵}}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۲

دامنهٔ تابع $D_f = [۰, \frac{a}{۲}]$ است.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۲}{۲\sqrt{a-۲x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x}} = \frac{۲}{\sqrt{a-۲x}} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۴}{a-۲x}$$

$$\Rightarrow ۴x = a - ۲x \Rightarrow x = \frac{a}{۶} \in [۰, \frac{a}{۲}]$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{۰, \frac{a}{۶}, \frac{a}{۲}\}$ می‌باشد. اکنون مقادیر نقاط بحرانی را حساب می‌کنیم.

$$f(۰) = \sqrt{a}\ ,\ f(\frac{a}{۶}) = \sqrt{\frac{a}{۶}} + \sqrt{a - \frac{a}{۳}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} + \frac{۲\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} = \frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$$

$$f(\frac{a}{۲}) = \sqrt{\frac{a}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$$

بنابراین $\max f(x) = \frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$ و $\min f(x) = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$ است. پس:

$$\frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} = \sqrt{۱۲} \Rightarrow \frac{۳a\sqrt{۳}}{۶} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow [a] = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۱

ریشه‌های مشتق تابع باید ۲- و صفر باشد.

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax - ۲b$$

پس:

$$\xrightarrow{(۰,۰)} b = ۰$$

$$\xrightarrow{(-۲,۰)} ۳(-۲)^۲ + ۲a(-۲) = ۰ \Rightarrow ۱۲ - ۴a = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

حال ریشه‌های مشتق را در تابع اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$y = x^۳ + ۳x^۲ - ۴$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=۰} (۰, -۴) \\ \xrightarrow{x=-۲} (-۲, ۰) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله}} \sqrt{(-۲-۰)^۲ + (۰+۴)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۱ گزینه ۳

A نقطه : $(a, a^۲)$

A' نقطه : $(a^۲, a)$

$$y = x \text{ با } f \text{ تقاطع} \Rightarrow x^۲ = x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases} \Rightarrow a \in (۰, ۱)$$

$$AA' = \sqrt{(a^۲ - a)^۲ + (a - a^۲)^۲} = \sqrt{۲}\,|a^۲ - a|$$

$$\xrightarrow{a \in (۰,۱)} \sqrt{۲}\,(a - a^۲) = -\sqrt{۲}a^۲ + \sqrt{۲}a$$

$$\xrightarrow{\max} \frac{-\Delta}{۴a} = -\frac{\sqrt{۲}^۲ - ۰}{۴(-\sqrt{۲})} = \frac{۲}{-۴\sqrt{۲}} = -\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

چون طول پاره‌خط مدنظر است، پس مثبت درنظر می‌گیریم.

تذکر: با استفاده از مشتق AA' نیز می‌توان به جواب رسید.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۲ گزینه ۲

$$g(x) = \frac{x^۲(x^۲ - ۴)}{x^۲ - ۱} = \frac{x^۴ - ۴x^۲}{x^۲ - ۱}$$

$$g'(x) = \frac{(۴x^۳ - ۸x)(x^۲ - ۱) - ۲x(x^۴ - ۴x^۲)}{(x^۲ - ۱)^۲}$$

$$= \frac{۲x[(۲x^۲ - ۴)(x^۲ - ۱) - x^۴ + ۴x^۲]}{(x^۲ - ۱)^۲} = \frac{۲x(x^۴ - ۲x^۲ + ۴)}{(x^۲ - ۱)^۲}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & ; |x| \geq ۲ \\ -g(x) & ; |x| < ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & ; |x| > ۲ \\ -g'(x) & ; |x| < ۲ \end{cases}$$

تابع f' در سه نقطهٔ $x = ۲$، $x = -۲$ و $x = ۰$ تغییر علامت می‌دهد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۳ گزینه ۱

نقطهٔ $B(x, \sqrt{۲x + ۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵, ۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x - ۵)^۲ + (\sqrt{۲x + ۷} - ۰)^۲}$$

$$= \sqrt{x^۲ - ۱۰x + ۲۵ + ۲x + ۷} = \sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{۲x - ۸}{۲\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}} = \frac{x - ۴}{\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}}$$

$$(AB)' = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow B(۴, \sqrt{۱۵})$$

کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. درنتیجه داریم:

$$A(۵, ۰), B(۴, \sqrt{۱۵}) \Rightarrow AB = \sqrt{(۵ - ۴)^۲ + (۰ - \sqrt{۱۵})^۲} = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۴ گزینه ۱

$$f'(x) = ۱ + \frac{۴ - ۲x}{۲\sqrt{۴x - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow -\frac{۲ - x}{\sqrt{۴x - x^۲}} = ۱ \Rightarrow \sqrt{۴x - x^۲} = x - ۲ \ (*)$$

باتوجه‌به معادله باید $x - ۲ \geq ۰$ باشد، یعنی: $x \geq ۲$

حال معادلهٔ (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۴x - x^۲ = x^۲ - ۴x + ۴ \Rightarrow ۲x^۲ - ۸x + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ - ۸ = ۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۴ + ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ + \sqrt{۲} & \text{قابل‌قبول} \\ x = \frac{۴ - ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲ - \sqrt{۲} & (x \geq ۲ \text{ زیرا غیرقابل‌قبول}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(۲ + \sqrt{۲}) = ۲ + \sqrt{۲} + \sqrt{۴(۲ + \sqrt{۲}) - (۲ + \sqrt{۲})^۲}$$

$$= ۲ + \sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۲ + ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow A(۲ + \sqrt{۲}, ۲ + ۲\sqrt{۲}) \quad \text{ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = ۰$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۲ + \sqrt{۲} - ۲ - ۲\sqrt{۲}|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۵ گزینه ۲

طول ضلع قاعده را a و ارتفاع را h می‌نامیم، داریم:

$$V = a^۲h = ۴ \Rightarrow h = \frac{۴}{a^۲}$$

مقدار حلب برابر $۴ah + a^۲$ است:

$$S = ۴ah + a^۲ = \frac{۱۶}{a} + a^۲$$

مشتق می‌گیریم و برابر صفر می‌گذاریم:

$$S = \frac{۱۶}{a} + a^۲ \Rightarrow S' = \frac{-۱۶}{a^۲} + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow h = ۱$$

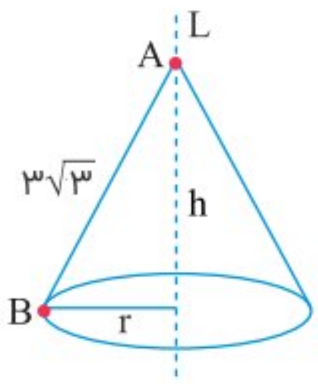
$$S = ۸ + ۴ = ۱۲$$

پس مقدار حلب برابر ۱۲ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۶ گزینه ۲



$$r^۲ + h^۲ = (۳\sqrt{۳})^۲ = ۲۷ \Rightarrow r^۲ = ۲۷ - h^۲$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{\pi}{۳}(۲۷ - h^۲)h = \frac{\pi}{۳}(۲۷h - h^۳)$$

$$V' = ۰ \Rightarrow ۲۷ - ۳h^۲ = ۰ \Rightarrow h^۲ = ۹ \Rightarrow h = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷ گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع $f(x) = x|۳ - x^۲|$ را حساب می‌کنیم:

$$۳ - x^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \in D \\ x = -\sqrt{۳} \notin D \end{cases}$$

$$(x(۳ - x^۲))' = ۰ \Rightarrow (۳x - x^۳)' = ۰ \Rightarrow ۳ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \in D \\ x = -۱ \in D \end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-۱, ۱, \sqrt{۳}, -۱/۵\}$ خواهد بود.

$$f(۱) = ۲ \ , \ f(-۱) = -۲ \ , \ f(\sqrt{۳}) = ۰$$
$$f(-۱/۵) = f(-\frac{۳}{۲}) = -\frac{۳}{۲}|۳ - \frac{۹}{۴}| = \frac{-۳}{۲} \times \frac{۳}{۴} = \frac{-۹}{۸}$$

کمترین مقدار تابع -۲ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۸ گزینه ۲

نقطهٔ A را $A(x, \sqrt[۳]{-x})$ با فرض $x \in [۰,۱]$ در نظر می‌گیریم، دراین‌صورت $A'(\sqrt[۳]{x}, -x)$ خواهد بود.

$$AA' = \sqrt{(x - \sqrt[۳]{x})^۲ \times ۲} = \sqrt{۲}|\underbrace{x - \sqrt[۳]{x}}_{g(x)}|$$

$$g(x) = x - \sqrt[۳]{x}\ ,\ x \in [۰,۱]$$

حال بیشترین مقدار $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$g'(x) = ۱ - \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = ۰ \Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x^۲} = ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲۷} \Rightarrow x = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$g(۰) = g(۱) = ۰\ ,\ g(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}) = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}} - \sqrt[۳]{\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}} = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-۲}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\max(AA') = \sqrt{۲}|\frac{-۲}{۳\sqrt{۳}}| = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۹ گزینه ۱

$$f'(x) = \frac{(۲x+۲)(x^۲+۱) - ۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow (۲x+۲)(x^۲+۱) - ۲x(x^۲+۲x-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \cancel{۲x^۳} + ۲x + ۲x^۲ + ۲ - \cancel{۲x^۳} - ۴x^۲ + ۶x = ۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۲ + ۸x + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۲۰ \Rightarrow x = \frac{۴ \pm ۲\sqrt{۵}}{۲} = ۲ \pm \sqrt{۵}$$

x	$-\infty$	$۲-\sqrt{۵}$	$۲+\sqrt{۵}$	$+\infty$
f'	$-$	$+$		$-$
f	$\searrow$	min $\nearrow$	max	$\searrow$

$$f(۲+\sqrt{۵}) = \frac{(۲+\sqrt{۵})^۲ + ۴ + ۲\sqrt{۵} - ۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲ + ۱}$$

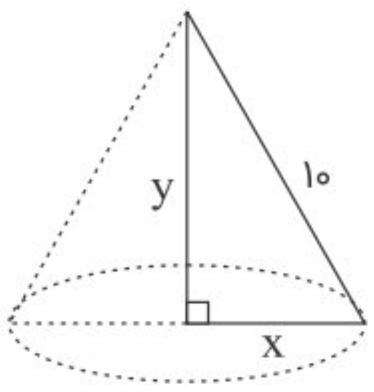
$$= \frac{۹ + ۴\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} + ۱}{۹ + ۴\sqrt{۵} + ۱} = \frac{۱۰ + ۶\sqrt{۵}}{۱۰ + ۴\sqrt{۵}} = \frac{۵ + ۳\sqrt{۵}}{۵ + ۲\sqrt{۵}} \times \frac{۵ - ۲\sqrt{۵}}{۵ - ۲\sqrt{۵}} = -۱ + \sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۰ **گزینه ۴**

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^۲ + y^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^۲ y \xrightarrow{(*)} V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - y^۲)y = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰y - y^۳)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) \Rightarrow \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ - ۳y^۲ = ۰ \Rightarrow y^۲ = \frac{۱۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۳۰۰ - ۱۰۰}{۳} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

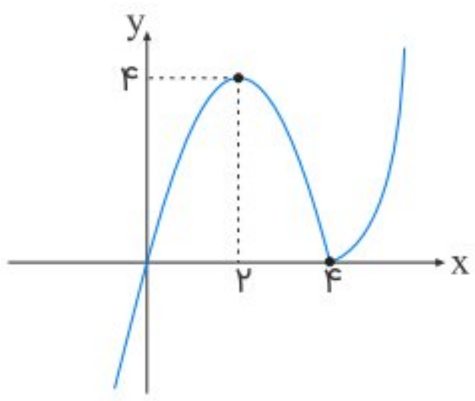
$$\Rightarrow \frac{x^۲}{y^۲} = \frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}} = ۲ \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{۲}$$

Scanned with CamScanner

۲۱ گزینه ۴

$$f(x) = x|x-۴| = \begin{cases} x^۲ - ۴x & ; x \geq ۴ \\ ۴x - x^۲ & ; x < ۴ \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



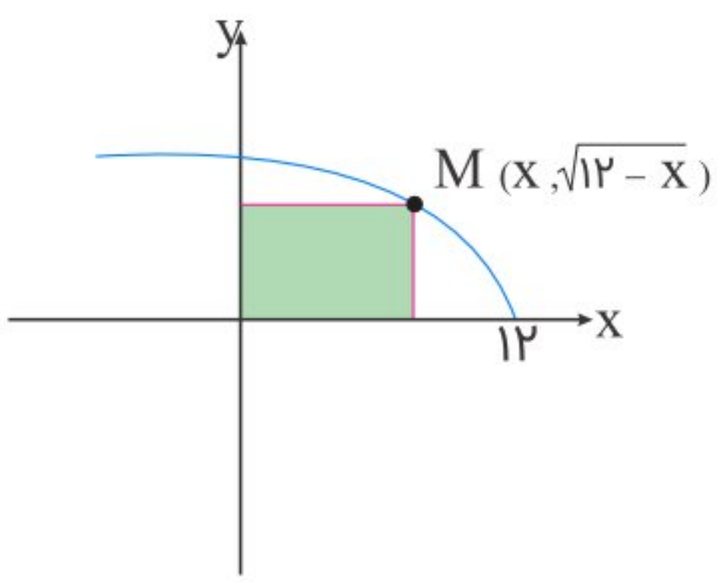
این تابع در $(۴, ۰)$ مینیمم نسبی و در $(۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(۲-۴)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۲ گزینه ۳

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته‌شده برابر $S(x) = x\sqrt{۱۲-x}$ است.

$$S' = \sqrt{۱۲-x} - \frac{x}{۲\sqrt{۱۲-x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۲(۱۲-x)-x}{۲\sqrt{۱۲-x}} = ۰$$

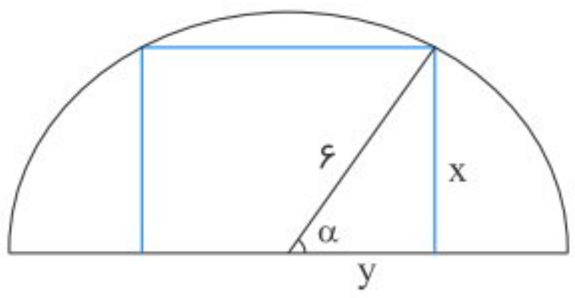
$$۲۴ - ۲x - x = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow S_{max} = ۸\sqrt{۱۲-۸} = ۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۳ گزینه ۴

راه‌حل اول:

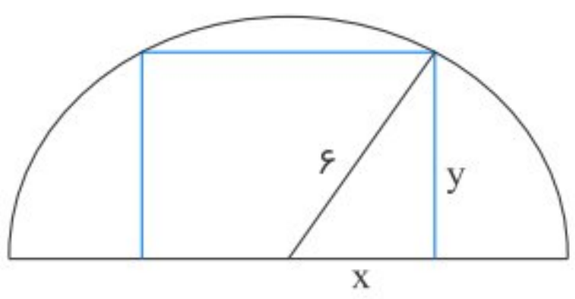


$$\sin\alpha = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۶\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{y}{۶} \Rightarrow y = ۶\cos\alpha$$

مساحت مستطیل : $S = x(۲y) = ۲(۳۶)\sin\alpha\cos\alpha = ۳۶\sin ۲\alpha$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin ۲\alpha = ۱$ باشد. بنابراین: $S_{max} = ۳۶$

راه‌حل دوم:



$$x^۲ + y^۲ = ۳۶ \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S = ۲xy = ۲x\sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S' = ۲\sqrt{۳۶ - x^۲} + \frac{-۴x^۲}{۲\sqrt{۳۶ - x^۲}} = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$
$$S_{max} = ۲ \times ۳\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۳۶$$

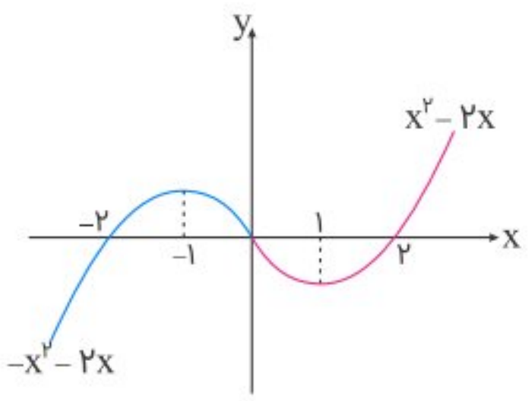
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۴ گزینه ۱

$$f(x) = x|x| - ۲x = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ - ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq ۰ : f'(x) = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x < ۰ : f'(x) = -۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

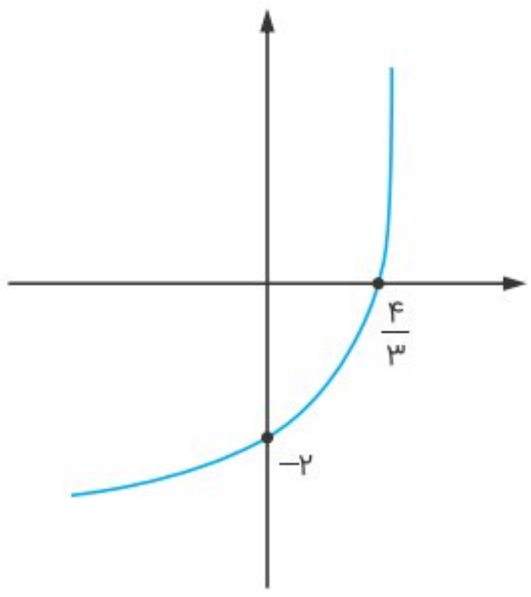
باتوجه‌به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(۱, -۱)$ و $(-۱, ۱)$ است، پس فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

فاصله : $\sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۱+۱)^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

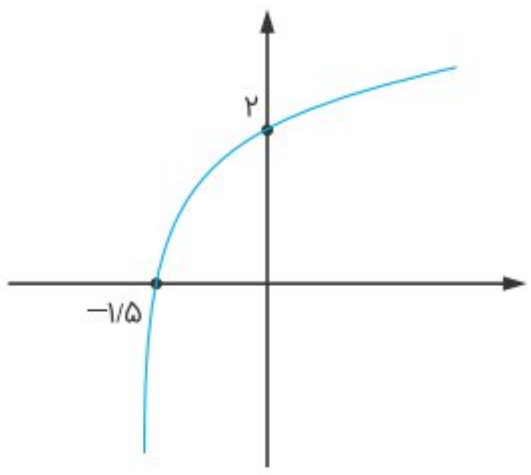
۱ شکل زیر، نمودار تابع $y = -۱ + \log_c(ax + b)$ است. اگر $b - c = \frac{۸}{۳}$ باشد، حاصل $(a + c)b$ کدام است؟



۱) -۵
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) -۳
۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ - \log_c(ax - b)$ است. اگر $b + c = -\frac{۳}{۲}$ باشد، حاصل $(a + c)b$ کدام است؟



۱) $-۳/۵$
۲) -۳
۳) $-۲/۵$
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ اگر $A = \{\log_۹ x + ۳\log_{x^۲} ۳ : x > ۱\}$ باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ A کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\sqrt{۶}$
۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

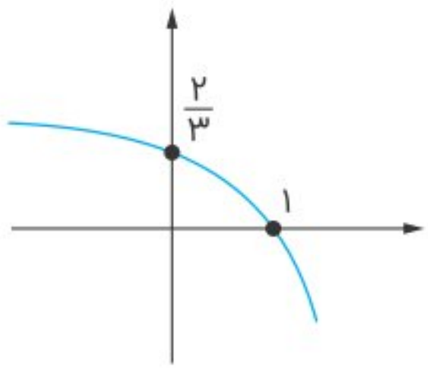
۴ اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $x^۲(\log ۳۰) + ۲x(\log ۶) - \log \frac{۵}{۶} = ۰$ چقدر است؟

۱) $۰/۷$
۲) $۰/۵$
۳) $۱/۴$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۵ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = ۱ + c \times ۳^{ax+b}$ است. مقدار $f(-۱)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۰}{۹}$

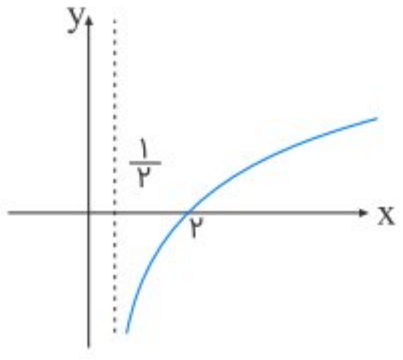
۲) $\frac{۸}{۹}$

۳) $\frac{۵}{۳}$

۴) $\frac{۷}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶ شکل زیر، نمودار تابع $y = -۱ + \log_b^{(۲x+a)}$ است. این منحنی خط $y = ۱$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟



۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷ اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $(\log \frac{۵}{۳})x^۲ + (\log ۹)x - \log ۱۵ = ۰$ چقدر است؟

۱) $\frac{۲۶}{۳}$

۲) $\frac{۱۴}{۳}$

۳) $\frac{۱۴}{۱۱}$

۴) $\frac{۲۶}{۱۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۸ اگر $A = \{\frac{۱}{\sqrt{\log_۸ x + ۴\log_{x^۳} ۲}} : x > ۱\}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ A کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\sqrt{۶}$

۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ دامنهٔ $f(x) = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{۱}{۲}} x}}$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ اگر $\frac{۳^{x+۵} + ۳^{x+۴} + ۳^{x+۳} + ۳^{x+۲} + ۳^{x+۱} + ۳^x}{۲^{x+۳} + ۲^{x+۲} + ۲^{x+۱} + ۲^x + ۲^{x-۱} + ۲^{x-۲}} = ۵۲$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۱ مقدار $\log_n m = a$ و مقدار $\log_{mn} m^۲ n = b$ است. اگر $a > ۰$ باشد، حاصل $[b]$ چقدر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ - ۸x + ۴ = ۰$ هستند. اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های $\alpha\beta^۲$ و $\alpha^۲\beta$، برابر باشند، مقدار $\log_{\sqrt{۲}} a$ کدام است؟ $(a > ۰)$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۳ اگر $۸۱^x = ۳^{x^۲ - ۲}$ باشد، $\log_۶^{(x-۲)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۴ اگر $\log_۲ ۳ = a$ و $\log_۸ b = \frac{۲}{۳}(۱ + a)$ باشد، مقدار $\log(۳b - ۸)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ اگر $\log_۸ ۱۸ = m$ باشد، حاصل $\log_۴ ۱۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}(m + ۱)$
۲) $\frac{۳m + ۱}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}(m - ۱)$
۴) $\frac{۳m - ۱}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ تابع $f(x) = \sqrt[۳]{۲^{ax+b}}$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ عبور می‌کند. اگر $f^{-۱}(۸) = ۵$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

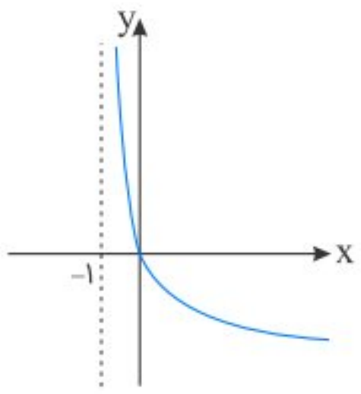
۱۷ اگر تساوی $\log_x y - ۲\log_y x = ۱$ به ازای $x, y > ۱$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

۱) $y = x^۲$
۲) $y = x^۳$
۳) $y = \sqrt{x}$
۴) $xy = ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۸ شکل زیر، نمودار تابع $y = \log_{۲} U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟



۱) $x + ۱$

۲) $(x + ۱)^{-۱}$

۳) $x - ۱$

۴) $۱ - x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۹ تابع $f(x) = a + b(\frac{۱}{۲})^{x}$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند. اگر $f^{-۱}(-۱) = -۱$ باشد، حاصل $a - b$ چقدر است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۰ اگر در معادلهٔ $۲\log_{x}a + \log_{a}\sqrt{x} = ۲$ مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۳

۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۲۱ اگر $(\frac{۱۲۵}{۸})^{x^{۲}} = (۰/۴)^{۲x-۱}$ باشد، $\log_{۸}^{(۹x+۱)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۲۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\log_{۴}(x^{۲} - x - ۲)}{\sqrt{x^{۲} - ۱} + ۱}$، کدام است؟

۱) $(-\infty, -۱) \cup (۲, +\infty)$

۲) $(-۱, ۲)$

۳) $(-\infty , -۲) \cup (۱, +\infty)$

۴) $(-۲, ۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۳ فرض کنید در دامنهٔ $(۰, +\infty]$، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۲^{x} + \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}}{۲}$، مفروض باشد. $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟

۱) $\log_{۲}^{(۲-\sqrt{۳})}$

۲) $\log_{۲}^{(\sqrt{۳}-۱)}$

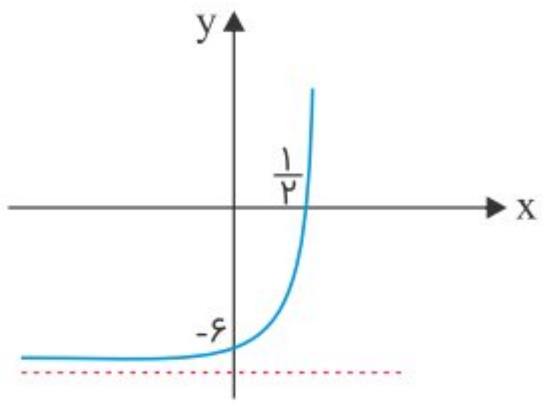
۳) $\log_{۲}^{(۱+\sqrt{۳})}$

۴) $\log_{۲}^{(۲+\sqrt{۳})}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۴ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -۹ + (\frac{۱}{۳})^{ax+b}$ است. $f(۲)$، کدام است؟



۱) ۲۳۴

۲) ۱۰۸

۳) ۷۲

۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۵ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۲^x - (\frac{۱}{۲})^x}{۲}$ را در نظر بگیرید. $f^{-۱}(۲)$، کدام است؟

۱) $\log_۲^{(-۱+\sqrt{۵})}$

۲) $\log_۲^{(۱+\sqrt{۵})}$

۳) $\log_۲^{(۲+\sqrt{۵})}$

۴) $\log_۲^{(۳+\sqrt{۵})}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۶ اگر $\frac{۵}{۸} = \log_۳^۲$ باشد، آنگاه $\log_{۱۸}^۸$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۲}$

۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۸}{۱۱}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷ اگر $\log_۴^۳ = ۰/۸$ باشد، مقدار $\log_{۱۲}^۶$، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۱۸}$

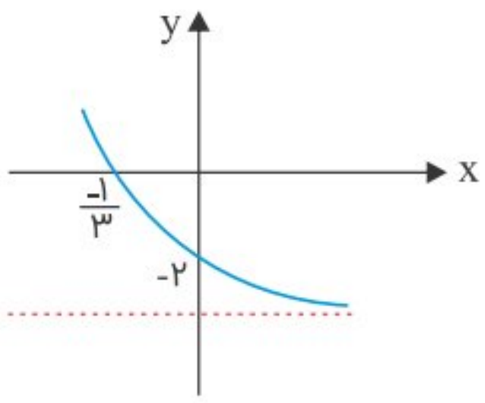
۲) $\frac{۸}{۱۱}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۷}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۸ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -۴ + ۲^{ax+b}$ است. $f(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟



۱) ۵۴

۲) ۶۰

۳) ۴۸

۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱ گزینه ۱

طبق نمودار $f(\frac{۴}{۳}) = ۰$ و $f(۰) = -۲$:

$$f(۰) = -۱ + \log_c b = -۲ \Rightarrow \log_c b = -۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{c} \Rightarrow bc = ۱$$

$$\begin{cases} bc = ۱ \\ b - c = \frac{۸}{۳} \end{cases} \Rightarrow b - \frac{۱}{b} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \begin{cases} b = ۳ \\ b = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$b = ۳ \Rightarrow c = \frac{۱}{۳}$$

$$b = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow c = -۳$$

$c > ۰$ است؛ بنابراین $c = \frac{۱}{۳}$ قابل‌قبول است.

$$f(\frac{۴}{۳}) = ۰ \Rightarrow -۱ + \log_{\frac{۱}{۳}}(\frac{۴a}{۳} + b) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۴a}{۳} + ۳ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = -۲$$

$$(a + c)b = (-۲ + \frac{۱}{۳})(۳) = -۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۲ گزینه ۲

$$f(۰) = ۲ \Rightarrow ۱ - \log_c(-b) = ۲ \Rightarrow \log_c(-b) = -۱$$

$$\Rightarrow -b = \frac{۱}{c} \Rightarrow bc = -۱$$

$$f(-۱/۵) = ۰ \Rightarrow ۱ - \log_c(-\frac{۳}{۲}a - b) = ۰$$

$$\Rightarrow \log_c(-\frac{۳}{۲}a - b) = ۱$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲}a - b = c \Rightarrow -\frac{۳}{۲}a = b + c \Rightarrow a = ۱$$

حال b و c را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} b + c = -\frac{۳}{۲} \\ bc = -۱ \end{cases} \Rightarrow b - \frac{۱}{b} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow b^۲ + \frac{۳}{۲}b - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -۲ \Rightarrow c = \frac{۱}{۲} \\ b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow c = -۲ \end{cases}$$

باتوجه‌به دامنهٔ تابع، $b = -۲$ و $c = \frac{۱}{۲}$ قابل‌قبول است ($c > ۰$). بنابراین:

$$(a + c)b = (۱ + \frac{۱}{۲})(-۲) = -۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۴

$$\log_۹ x + ۳\log_{x^۲} ۳ = \frac{\log x}{\log ۹} + \frac{۳\log ۳}{۲\log x}$$

$$\underbrace{\frac{\log x}{\log ۹}}_{a} \times \underbrace{\frac{۳\log ۳}{۲\log x}}_{b} = \frac{۳}{۴} \quad , \quad ab = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \min(a + b) = ?$$

$$\Rightarrow a = b = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \min(a + b) = \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۴ گزینه ۴

$$x^۲(\log ۳۰) + ۲x(\log ۶) - \log \frac{۵}{۶} = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲(\log ۵ + \log ۶) + ۲x(\log ۶) - (\log ۵ - \log ۶) = ۰$$

$$\Rightarrow (\log ۵ + \log ۶)x^۲ + (۲\log ۶)x + (\log ۶ - \log ۵) = ۰$$

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ که $a + c = b$ یکی از ریشه‌های $x = -۱$ و دیگری $x = \frac{-c}{a}$ است.

$$\xrightarrow{a+c=b} x = -۱,\ x = \frac{\log ۵ - \log ۶}{\log ۵ + \log ۶} \simeq ۰$$

تفاضل ریشه‌ها $\simeq |-۱ - ۰| = ۱$

برای محاسبهٔ $\log ۵$ و $\log ۶$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\log ۲ \simeq ۰/۳ \Rightarrow \log ۵ = ۱ - \log ۲ \simeq ۰/۷$$

$$\log ۳ \simeq ۰/۴,\ \log ۲ \simeq ۰/۳ \Rightarrow \log ۶ = \log ۲ + \log ۳ \simeq ۰/۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۲

$$f(۰) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۱ + c \times ۳^a = \frac{۲}{۳} \Rightarrow c \times ۳^a = -\frac{۱}{۳}$$

$$f(۱) = ۰ \Rightarrow ۱ + c \times ۳^{a+b} = ۰ \Rightarrow ۱ + c \times ۳^a \times ۳^b = ۰$$

$$\xrightarrow{c \times ۳^a = -\frac{۱}{۳}} ۱ + (-\frac{۱}{۳})(۳^b) = ۰ \Rightarrow ۳^b = ۳ \Rightarrow b = ۱$$

$$f(-۱) = ۱ + c \times ۳^{a-b} = ۱ + c \times ۳^a \times ۳^{-b} = ۱ + (-\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۳}) = \frac{۸}{۹}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۶ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$y = -۱ + \log_b^{(۲(x+\frac{a}{۲}))}$$

تابع به اندازهٔ $+\frac{۱}{۲}$ نسبت به نمودار $y = \log x$ انتقال افقی به سمت راست داشته است. پس:

$$\frac{a}{۲} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۱$$
$$y = -۱ + \log_b^{(۲x-۱)}$$

به‌علاوه مقدار تابع در $x = ۲$ صفر است:

$$y(۲) = -۱ + \log_b^{۳} = ۰ \Rightarrow \log_b^{۳} = ۱ \Rightarrow b = ۳$$
$$y = -۱ + \log_۳^{(۲x-۱)} \xrightarrow{\text{برخورد با } y=۱} -۱ + \log_۳^{(۲x-۱)} = ۱$$
$$\Rightarrow \log_۳^{(۲x-۱)} = ۲ \Rightarrow ۲x - ۱ = ۹ \Rightarrow x = ۵$$

راه‌حل دوم: (برای به دست آوردن a و b)

$$y = -۱ + \log_b^{(۲x+a)}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲x + a > ۰ \Rightarrow x > -\frac{a}{۲} \\ \text{طبق نمودار} : x > \frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow a = -۱$$

$$(۲, ۰) \Rightarrow -۱ + \log_b^{۳} = ۰ \Rightarrow b = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۷ گزینه ۲

$$\log ۵ = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲ \simeq ۰/۷$$
$$\log ۹ = \log ۳^۲ = ۲ \log ۳ \simeq ۰/۸$$

$$\log ۱۵ = \log ۵ + \log ۳ \simeq ۱/۱$$
$$\log \frac{۵}{۳} = \log ۵ - \log ۳ \simeq ۰/۳$$

$$(\log \frac{۵}{۳})x^۲ + (\log ۹)x - \log ۱۵ = ۰ \Rightarrow ۰/۳x^۲ + ۰/۸x - ۱/۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} x_۱ = ۱, x_۲ = -\frac{۱/۱}{۰/۳}$$
$$\Rightarrow |x_۱ - x_۲| = ۱ + \frac{۱/۱}{۰/۳} = ۱ + \frac{۱۱}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۸ گزینه ۲

$$\log_{۸}x + ۴\log_{x^۳}۲ = \frac{۱}{۳}\log_{۲}x + \frac{۴}{۳}\log_{x}۲ \geq ۲\sqrt{\frac{۱}{۳} \times \frac{۴}{۳}} = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}\log_{۲}x + \frac{۴}{۳}\log_{x}۲ \geq \frac{۴}{۳} \Rightarrow \sqrt{\frac{۱}{۳}\log_{۲}x + \frac{۴}{۳}\log_{x}۲} \geq \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{\log_{۸}x + ۴\log_{x^۳}۲}} \leq \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

نکته ۱: دو عدد معکوس با ضرایب a و b که هر دو مثبت هستند، رابطهٔ زیر را دارند:

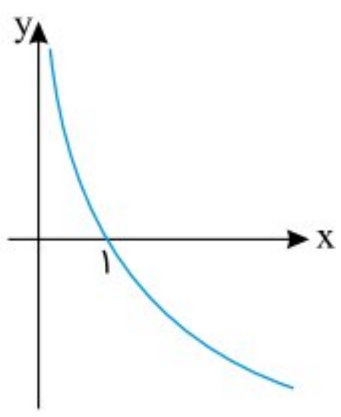
$$ax + \frac{b}{x} \geq ۲\sqrt{ab}$$

نکته ۲: $\log_n m$ و $\log_m n$ معکوس هم هستند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ گزینه ۱

نمودار تابع $g(x) = \log_{\frac{۱}{۲}}x$ به‌صورت زیر است:



برای آنکه $\frac{x}{g(x)} \geq ۰$ باشد باید x و $g(x)$ هم‌علامت باشند. xهایی که در ناحیه اول است، انتخاب می‌کنیم. بنابراین $۰ < x < ۱$ است و در این بازه هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۲

$$\frac{۳^x(۱ + ۳ + ۳^۲ + ۳^۳ + ۳^۴ + ۳^۵)}{۲^x(۲^{-۲} + ۲^{-۱} + ۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳)} = ۵۲$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۳}{۲}\right)^x = \frac{۵۲ \times ۱۵/۷۵}{۳۶۴} = \frac{۸۱۹}{۳۶۴} = ۲/۲۵ \Rightarrow x = ۲$$

نکته:

$$۱ + ۳ + ۳^۲ + ۳^۳ + ۳^۴ + ۳^۵ = \frac{۱(۱ - ۳^۶)}{۱ - ۳} = ۳۶۴$$

$$۲^{-۲} + ۲^{-۱} + ۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ = \frac{\frac{۱}{۴}(۱ - ۲^۶)}{۱ - ۲} = \frac{۶۳}{۴} = ۱۵/۷۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۱ گزینه ۱

$$\log_{mn}(m^۲n) = \frac{۲\log m + \log n}{\log m + \log n} = \frac{۲(\log_n m)+۱}{(\log_n m)+۱} = b \Rightarrow b = \frac{۲a+۱}{a+۱}$$

$$\Rightarrow [b] = [\frac{۲a+۱}{a+۱}] = [\frac{a+۱}{a+۱} + \frac{a}{a+۱}] \Rightarrow [b] = ۱ + [\frac{a}{a+۱}]$$

چون $a > ۰$ پس $\frac{a}{a+۱} < ۱$ است. بنابراین $[\frac{a}{a+۱}] = ۰$ و درنتیجه $[b] = ۱$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۲

$$ax^۲ - ۸x + ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{۸}{a} \\ \alpha\beta = \frac{۴}{a} \end{cases}$$

$$(\alpha^۲\beta)(\beta^۲\alpha) = \alpha^۲\beta + \beta^۲\alpha \Rightarrow (\alpha\beta)^۳ = \alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow (\frac{۴}{a})^۳ = \frac{۸}{a} \times \frac{۴}{a} \Rightarrow \frac{۶۴}{a^۳} = \frac{۳۲}{a^۲} \Rightarrow a = ۲$$

$$\log_{\sqrt{۲}} a = \log_{\sqrt{۲}} ۲ = \log_{۲^{\frac{۱}{۴}}} ۲ = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۳ گزینه ۳

$$۳^{x^۲-۲} = ۸۱^x \Rightarrow ۳^{x^۲-۲} = ۳^{۴x} \Rightarrow x^۲ - ۲ = ۴x$$

$$x^۲ - ۴x = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = ۶ \Rightarrow (x-۲)^۲ = ۶ \Rightarrow x - ۲ = \sqrt{۶}$$

حاصل $\log_۶^{(x-۲)}$ را می‌خواهیم:

$$\log_۶^{(x-۲)} = \log_۶^{\sqrt{۶}} = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۳

$$\log_۲ ۳ = a \Rightarrow ۲^a = ۳ \Rightarrow ۲^{۲a} = ۹ (*)$$

$$\log_۸ b = \frac{۲}{۳}(۱+a) \Rightarrow b = ۸^{\frac{۲}{۳}(۱+a)} \xrightarrow{۸=۲^۳} b = ۲^{۲(۱+a)} \Rightarrow b = ۲^۲ \times ۲^{۲a}$$

$$\xrightarrow{(*)} b = ۲^۲ \times ۹ \Rightarrow b = ۳۶$$

$$\log(۳b - ۸) = \log(۳(۳۶) - ۸) = \log(۱۰۸ - ۸) = \log ۱۰۰ = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۵ گزینه ۱

$$\log_{۸}۱۸ = \log_{۲^۳}۱۸ = \frac{۱}{۳}\log_{۲}(۳^۲ \times ۲) = \frac{۱}{۳}(۲\log_{۲}۳ + \log_{۲}۲)$$

$$= \frac{۱}{۳}(۲\log_{۲}۳ + ۱) = m \Rightarrow ۲\log_{۲}۳ + ۱ = ۳m$$

$$\Rightarrow ۲\log_{۲}۳ = ۳m - ۱ \Rightarrow \log_{۲}۳ = \frac{۳m - ۱}{۲}$$

$$\log_{۴}۱۲ = \log_{۲^۲}۱۲ = \frac{۱}{۲}\log_{۲}(۲^۲ \times ۳) = \frac{۱}{۲}(\log_{۲}۲^۲ + \log_{۲}۳)$$

$$= \frac{۱}{۲}(۲ + \log_{۲}۳) = \frac{۱}{۲}(۲ + \frac{۳m - ۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۳m + ۳}{۲}) = \frac{۳}{۴}(m + ۱)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۱

$$f(\frac{۱}{۲}) = ۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۱ = \sqrt[۳]{۲^{\frac{a}{۲}+b}} \Rightarrow ۲^{\frac{a}{۲}+b} = ۱ \Rightarrow \frac{a}{۲} + b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۲}(*)$$

$$f^{-۱}(۸) = ۵ \Rightarrow f(۵) = ۸ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۸ = \sqrt[۳]{۲^{۵a+b}}$$

$$۲^{۵a+b} = ۲^۹ \Rightarrow ۵a + b = ۹ \xrightarrow{(*)} ۵a - \frac{a}{۲} = ۹ \Rightarrow \frac{۹a}{۲} = ۹ \Rightarrow a = ۲ \xrightarrow{(*)} b = -۱$$

در آخر داریم:

$$a - b = ۲ - (-۱) = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۷ گزینه ۱

فرض می‌کنیم $\log_y x = t$ باشد:

$$\frac{۱}{t} - ۲t = ۱ \Rightarrow ۱ - ۲t^۲ = t \Rightarrow ۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = -۱, \frac{۱}{۲}$$

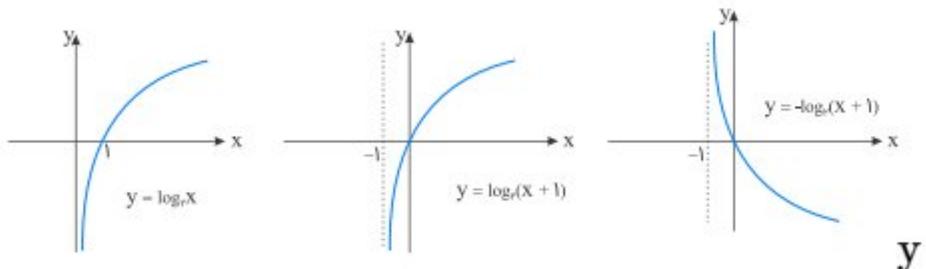
$$\xrightarrow{x,y>۱} \log_y x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x^۲ = y$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۸ گزینه ۲

به کمک انتقال و قرینهٔ نمودار تابع $\log_۲ x$، به راحتی به جواب می‌رسیم.



$$y = -\log_۲(x+۱) = \log_۲(x+۱)^{-۱} \Rightarrow U(x) = (x+۱)^{-۱}$$

۱۹ گزینه ۳

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow a + b(\frac{۱}{۲})^{۰} = ۰ \Rightarrow a + b = ۰ \quad (۱)$$

$$f^{-۱}(-۱) = -۱ \Rightarrow f(-۱) = -۱ \Rightarrow a + b(\frac{۱}{۲})^{-۱} = -۱$$
$$\Rightarrow a + ۲b = -۱ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۰ \\ a + ۲b = -۱ \end{cases} \Rightarrow b = -۱,\ a = ۱$$

$$a - b = ۱ - (-۱) = ۲$$

۲۰ گزینه ۳

بافرض $x = ۹$ و تغییر متغیر $\log_a ۹ = t$ معادله را تنظیم می‌کنیم:

$$۲ \times \frac{۱}{t} + \frac{۱}{۲}t = ۲ \Rightarrow \frac{۲}{t} + \frac{t}{۲} = ۲ \Rightarrow \frac{t}{۲} = ۱ \Rightarrow t = ۲$$
$$\Rightarrow \log_a ۹ = ۲ \Rightarrow ۹ = a^{۲} \xrightarrow{a>۰} a = ۳$$

Scanned with CamScanner

۲۱ گزینه ۱

$$(۰/۴)^{۲x-۱} = (\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲}$$

$$\Rightarrow (\frac{۱۲۵}{۸})^{x^۲} = ((\frac{۵}{۲})^۳)^{x^۲} = (\frac{۵}{۲})^{۳x^۲} = (\frac{۲}{۵})^{-۳x^۲} = (\frac{۴}{۱۰})^{-۳x^۲}$$

$$\Rightarrow (\frac{۴}{۱۰})^{۲x-۱} = (\frac{۴}{۱۰})^{-۳x^۲} \Rightarrow -۳x^۲ = ۲x - ۱$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ & \text{غ.ق.ق} \\ x = \frac{۱}{۳} & \text{ق.ق} \end{cases}$$

به ازای $x = -۱$ عبارت $\log_{۸}^{(۹x+۱)}$ تعریف‌نشده است.

برای $x = \frac{۱}{۳}$ داریم:

$$\log_{۸}^{(۹x+۱)} = \log_{۸}^{(۹\times\frac{۱}{۳}+۱)} = \log_{۸}^{۴} = \log_{۲^۳}^{۲^۲} = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۲۲ گزینه ۱

$$x^۲ - x - ۲ > ۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۲) > ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, -۱) \cup (۲, +\infty) \quad (۱)$$
$$x^۲ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq ۱ \Rightarrow x \in (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty) \quad (۲)$$

اشتراک جواب‌های به‌دست‌آمده $(-\infty, -۱) \cup (۲, +\infty)$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۳ گزینه ۴

$$f(x) = \frac{۲^x + (\frac{۱}{۲})^x}{۲} \xrightarrow{f^{-۱}(۲)=?} \frac{۲^x + (\frac{۱}{۲})^x}{۲} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲^x + (\frac{۱}{۲})^x = ۴ \Rightarrow ۲^x + \frac{۱}{۲^x} = ۴ \xrightarrow{t=۲^x} t + \frac{۱}{t} = ۴$$

$$\Rightarrow t^۲ + ۱ = ۴t \Rightarrow t^۲ - ۴t + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{۴ + ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ + \sqrt{۳} \\ t = \frac{۴ - ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲ - \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$t = ۲^x \Rightarrow x = \log_{۲}^{t} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_{۲}^{(۲+\sqrt{۳})} \\ x = \log_{۲}^{(۲-\sqrt{۳})} < ۰ \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

جواب $x = \log_{۲}^{(۲-\sqrt{۳})}$ غیرقابل‌قبول است، زیرا دامنه $[۰, +\infty)$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۴ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ و $(۰, -۶)$ در تابع $f(x)$ صدق می‌کنند؛ بنابراین:

$$(۰,-۶) : f(۰) = -۶ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۰+b} = -۶ \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^{b} = ۳$$

$$\Rightarrow ۳^{-b} = ۳ \Rightarrow -b = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

$$\left(\frac{۱}{۲}, ۰\right) : f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۰ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۹$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}a-۱} = ۳^{۲} \Rightarrow ۳^{-\frac{۱}{۲}a+۱} = ۳^{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}a + ۱ = ۲$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = -۲$$

مقادیر a و b را در تابع f جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲x-۱} \Rightarrow f(۲) = -۹ + \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۴-۱} = -۹ + ۳^{۵}$$

$$= -۹ + ۲۴۳ = ۲۳۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۵ گزینه ۳

$$f(x) = \frac{۲^{x} - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}}{۲} \xrightarrow{f^{-۱}(۲)=?} \frac{۲^{x} - \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}}{۲} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲^{x} - \frac{۱}{۲^{x}} = ۴ \xrightarrow{t=۲^{x}} t - \frac{۱}{t} = ۴ \Rightarrow t^{۲} - ۱ = ۴t$$

$$\Rightarrow t^{۲} - ۴t - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۰ \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{۴ + ۲\sqrt{۵}}{۲} = ۲ + \sqrt{۵} \\ t = \frac{۴ - ۲\sqrt{۵}}{۲} = ۲ - \sqrt{۵} \end{cases}$$

$$t = ۲^{x} \Rightarrow x = \log_{۲}^{t} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_{۲}^{(۲+\sqrt{۵})} \\ x = \log_{۲}^{(۲-\sqrt{۵})} < ۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

جواب $x = \log_{۲}^{(۲-\sqrt{۵})}$ غیرقابل‌قبول است، زیرا $۲ - \sqrt{۵} < ۰$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۶ گزینه ۲

نکته:

$$۱)\ \log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}(x>۰, x\neq ۱)$$

$$۲)\ \log_a^{b^n} = n\log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_{۱۸}^{۸} = \frac{\log_۳^{۸}}{\log_۳^{۱۸}} = \frac{\log_۳^{۲^۳}}{\log_۳^{۲}+\log_۳^{۹}} = \frac{۳\log_۳^{۲}}{\log_۳^{۲}+\log_۳^{۳^۲}}$$

$$= \frac{۳\log_۳^{۲}}{\log_۳^{۲}+۲\underbrace{\log_۳^{۳}}_{۱}} = \frac{۳\left(\frac{۵}{۸}\right)}{\frac{۵}{۸}+۲} = \frac{\frac{۱۵}{\cancel{۸}}}{\frac{۲۱}{\cancel{۸}}} = \frac{۱۵}{۲۱} = \frac{۵}{۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷ گزینه ۱

نکته:

$$۱)\ \log_b^a = \frac{\log a}{\log b}$$

$$۲)\ \log_a^{b^n} = n\log_a^b$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\log_۴^۳ = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۴} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۲^۲} = ۰/۸$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\frac{\log ۳}{\log ۲} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{\log ۳}{\log ۲} = ۱/۶ \Rightarrow \log ۳ = ۱/۶\log ۲ \quad (*)$$

سپس باتوجه‌به (*) مقدار $\log_{۱۲}^{۶}$ را به دست می‌آوریم:

$$\log_{۱۲}^{۶} = \frac{\log ۶}{\log ۱۲} = \frac{\log ۲\times ۳}{\log ۲^۲\times ۳} = \frac{\log ۲+\log ۳}{\log ۲^۲+\log ۳} = \frac{\log ۲+\log ۳}{۲\log ۲+\log ۳}$$

$$= \frac{\log ۲+۱/۶\log ۲}{۲\log ۲+۱/۶\log ۲} = \frac{(۱+۱/۶)\log ۲}{(۲+۱/۶)\log ۲} = \frac{۲/۶}{۳/۶} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

توجه کنید که برای به دست آوردن رابطهٔ (*)، می‌توانستیم به صورت زیر عمل کنیم:

نکته: $\log_{a^m}^{b^n} = \frac{n}{m}\log_a^b$

$$\log_۴^۳ = \log_{۲^۲}^۳ = \frac{۱}{۲}\log_۲^۳ = ۰/۸ \Rightarrow \log ۳ = ۱/۶\log ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۸ گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، دو نقطهٔ $(۰, -\frac{۱}{۳})$ و $(-۲, ۰)$ در تابع f صدق می‌کنند. بنابراین:

$$(۰,-۲) : f(۰) = -۲ \Rightarrow -۴ + ۲^{b} = -۲ \Rightarrow ۲^{b} = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$(-\frac{۱}{۳}, ۰) : f(-\frac{۱}{۳}) = ۰ \Rightarrow -۴ + ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۰ \Rightarrow ۲^{-\frac{۱}{۳}a+۱} = ۴ = ۲^{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳}a + ۱ = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۳}a = ۱ \Rightarrow a = -۳$$

با جایگذاری مقادیر a و b در تابع f داریم:

$$f(x) = -۴ + ۲^{-۳x+۱}$$

$$f(-\frac{۵}{۳}) = -۴ + ۲^{-۳\times(-\frac{۵}{۳})+۱} = -۴ + ۲^{۵+۱} = -۴ + ۲^{۶} = ۶۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱ در یک مستطیل، جذر مساحت، نصف طول قطر است. اگر B و C دو زاویهٔ ایجادشده در یک طرف قطر باشند، مقدار تانژانت $(B - C)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$
۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ دورهٔ تناوب x تابع $f(x) = \frac{۱}{۲} - ۳\sin\frac{\pi}{a}x$، برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. دورهٔ تناوب تابع $-۳f(۲x)$، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) π
۴) $\frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ دورهٔ تناوب $f(x) = \frac{۱}{۲} - \sin\frac{۲x}{a}$، برابر $\frac{\pi}{۳}$ است. دورهٔ تناوب $y = \cos ax$ کدام است؟

۱) ۳π
۲) ۴π
۳) ۶π
۴) ۱۲π

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲ x = \sin x + ۱$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۵ در یک لوزی، اندازهٔ هر ضلع، برابر جذر حاصل‌ضرب طول قطرها است. اگر A و B دو زاویهٔ مجاور لوزی باشند، مقدار مثبت تانژانت $(\frac{A - B}{۲})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶ اگر $\frac{۱}{\sqrt{\cos^۲\alpha}} - \frac{۱}{\cot\alpha} = \frac{۱ - \sin\alpha}{|\cos\alpha|}$ و $\cot\alpha = -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha}}$ باشد، انتهای کمان α، در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۱) چهارم
۲) سوم
۳) دوم
۴) اول

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۷ حاصل عبارت $\frac{۳\cos(۲۴۸^\circ) - ۲\sin(۱۵۸^\circ)}{\sin(۲۰۲^\circ) - \cos(۲۹۲^\circ)}$ کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) $-۰/۵$
۳) $-۲/۵$
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۸ اختلاف جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x = ۳\sin x - ۱$ که در بازهٔ $[۰, \pi]$ قرار دارند، کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۶}$
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) $\frac{\pi}{۶}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

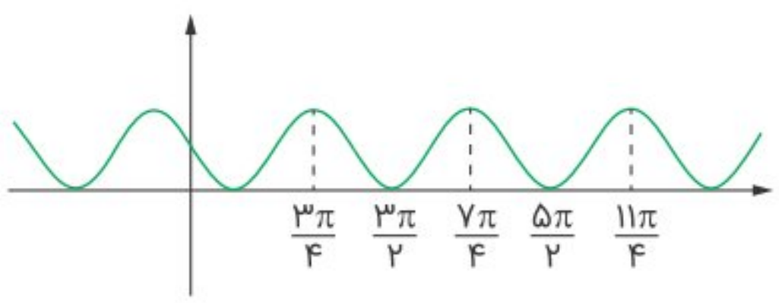
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۹ اگر $\frac{۱}{\sqrt{\cos^۲ \alpha}} - \text{tg}\,\alpha = \frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$ و $\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = -\frac{۱}{\cot\alpha}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟

۱) چهارم
۲) سوم
۳) دوم
۴) اول

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۰ شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + \sin ax$ است. دورهٔ تناوب $y = ۳\cos(\frac{x}{a})$ کدام است؟



۱) ۴π
۲) ۶π
۳) ۳π
۴) ۲π

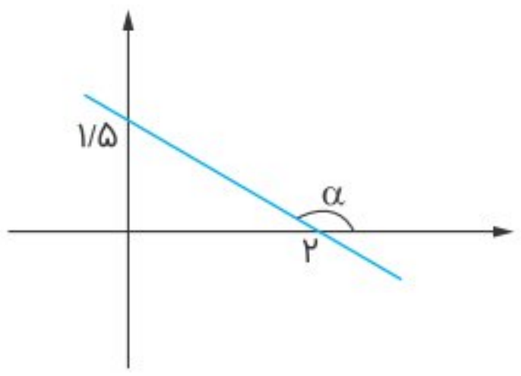
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۱ معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x - ۴\sin^۲ x \cos x = ۰$ چند جواب در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ دارد؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۲ در شکل زیر، زاویهٔ α مشخص شده است. مقدار $\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ کدام است؟

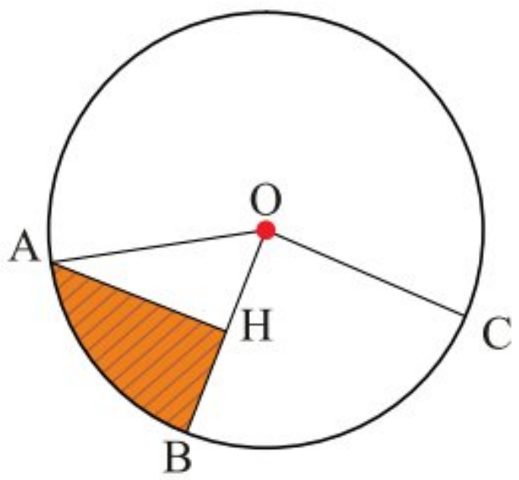


۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۱۳ مطابق شکل زیر، دایره به محیط ۲π و AH عمودمنصف OB است. محیط قسمت هاشورخورده چقدر از محیط مثلث OAH بزرگ‌تر است؟



۱) $\frac{۲\pi - ۱}{۳}$

۲) $\frac{۲\pi - ۳}{۶}$

۳) $\frac{\pi - ۱}{۶}$

۴) $\frac{\pi - ۳}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۴ خطوط $x + ۲y = ۳$ و $۲x + ay = ۶$، یکدیگر را در نقطهٔ A و خط $x + y = ۰$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیهٔ دوم واقع باشد، مقدار $\cot(B - C)$ در مثلث ABC کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۳}$

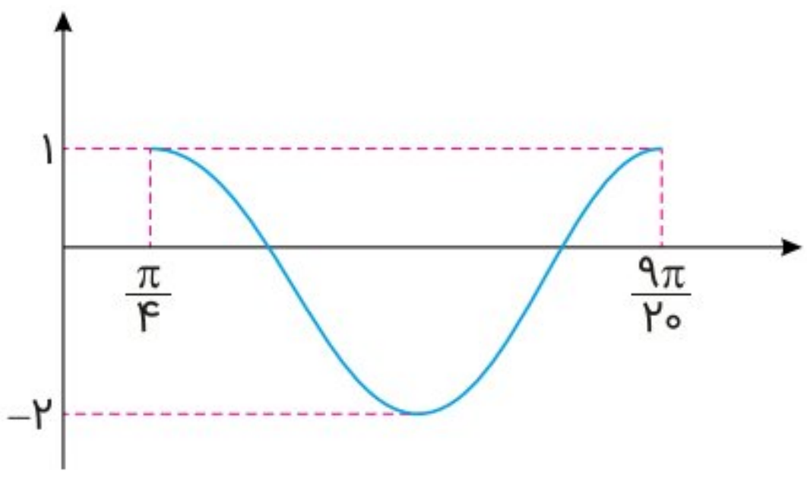
۲) $-\frac{۳}{۴}$

۳) $-\frac{۳}{۵}$

۴) $-\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۵ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\cos^۲(bx - \frac{\pi}{۴}) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۱) ۱۵

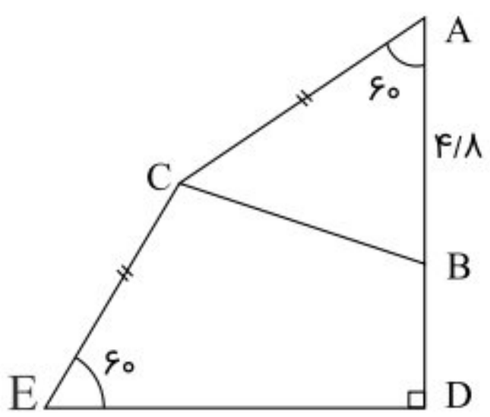
۲) -۱۵

۳) ۷/۵

۴) −۷/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۶ در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $۷/۲\sqrt{۳}$ است. فاصلهٔ D از C کدام است؟



۱) $۶\sqrt{۶}$

۲) $۳\sqrt{۶}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۷ اگر $\tan x + \cot x = -۳$ و $۳\pi < ۴x < ۴\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\cos^۳ x + \sin^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۵\sqrt{۶}$

۲) $۰/۷۵\sqrt{۳}$

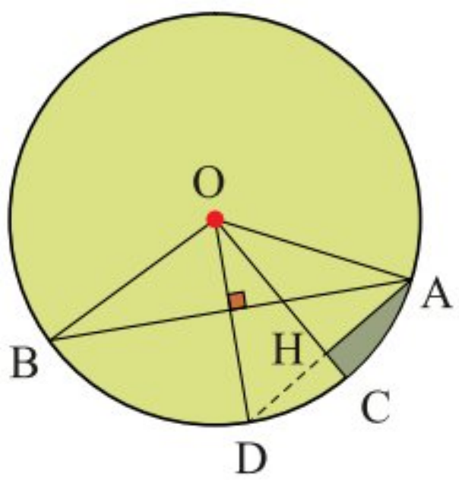
۳) $-۰/۷۵\sqrt{۳}$

۴) $۰/۵\sqrt{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۸ مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π، $A\widehat{O}B = ۱۲۰^\circ$ و OH عمودمنصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟



۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$

۲) $\sqrt{۲} - \frac{\pi}{۶}$

۳) $\pi - \sqrt{۳}$

۴) $\pi - \sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۹ خطوط $۳y + x = -۹$ و $ax - y = ۳$، یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = ۰$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC، مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۰ اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{۱}{\sin(\frac{\pi + ۴x}{۲})} + \frac{۱}{\cos(\frac{\pi + ۸x}{۲})} = ۰$ در بازه $[۰, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(۲\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

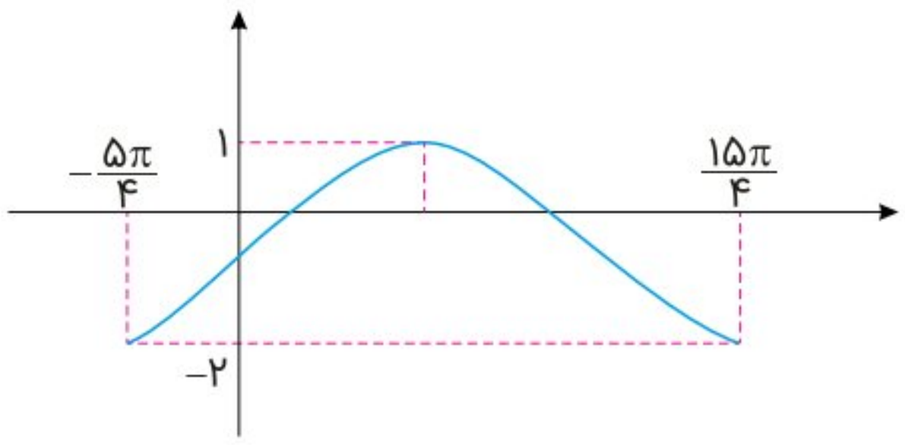
۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) $-\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۱ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin^۲(\frac{\pi}{۴} - bx) + c$ در یک بازهٔ تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۱) $-۰/۳$

۲) $۰/۳$

۳) $-۰/۶$

۴) $۰/۶$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲۲ اگر اختلاف جواب‌های غیرصفر معادلهٔ $\cot(\frac{\pi + ۴x}{۲}) = \cos(\frac{\pi + ۸x}{۲})$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}]$ برابر α باشد، مقدار $\cos(۳\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۲) $-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۴) $-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۳ اگر $\tan x + \cot x = ۴$ و $۴x < ۶\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۸\sqrt{۲}$
۲) $۰/۸\sqrt{۲}$
۳) $-\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$
۴) $\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲۴ کمترین فاصلهٔ بین دو مقدار از جواب‌های معادلهٔ $\frac{\cos x}{۱+\sin x} = \frac{۱+\sin x}{\cos x}$ کدام است؟

۱) ۲π
۲) π
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۵ اگر $\sin\alpha = ۲\cos\alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟ (با تغییر)

۱) $-\frac{۲\sqrt{۵}}{۱۰}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$
۳) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$
۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$

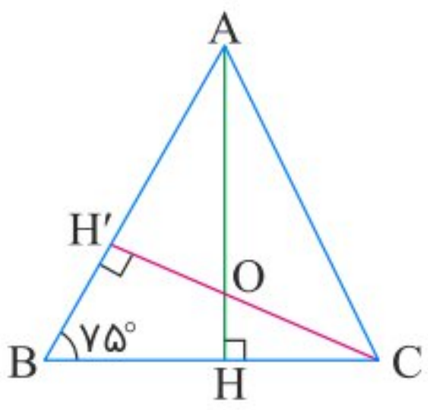
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۶ تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & ;۰ \le x \le ۱ \\ ۲ - x & ;۱ < x \le ۲ \end{cases}$ را که دورهٔ تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیهٔ محصور به منحنی f و محور xها در بازهٔ $[-۰/۷۵, ۳/۲۵]$، کدام است (دامنه تابع اعداد حقیقی است)؟ (با تغییر)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۷ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC کدام است؟ (با تغییر)



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$
۴) $\frac{۹}{۷+۴\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

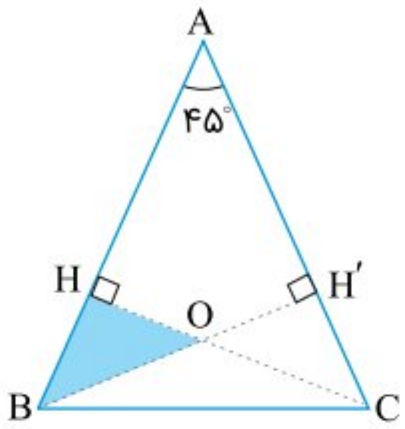
۲۸ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$، با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$
۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$
۳) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$
۴) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۹ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB، کدام است؟



۱) $\frac{۶}{۲+\sqrt{۳}}$

۲) $\frac{۸}{۲+\sqrt{۳}}$

۳) $\frac{۱۲}{۳+۲\sqrt{۲}}$

۴) $\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۰ اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha)=\frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(۲\alpha-\frac{\pi}{۲})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(۲\alpha)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۹۶}{۱۷۵}$

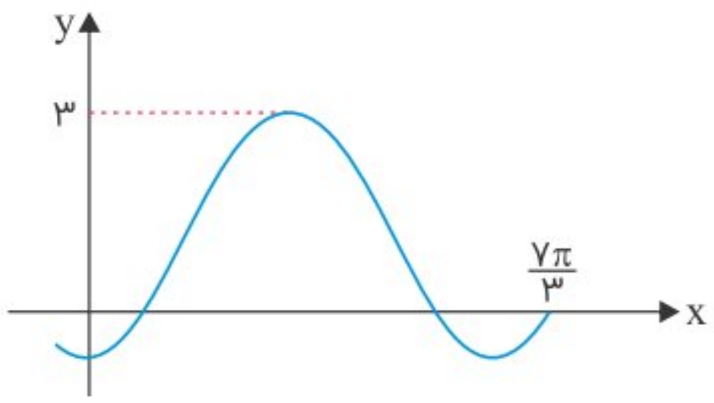
۲) $\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

۳) $\frac{۹۶}{۱۷۵}$

۴) $-\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۱ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ است. مقدار b، کدام است؟



۱) ۲

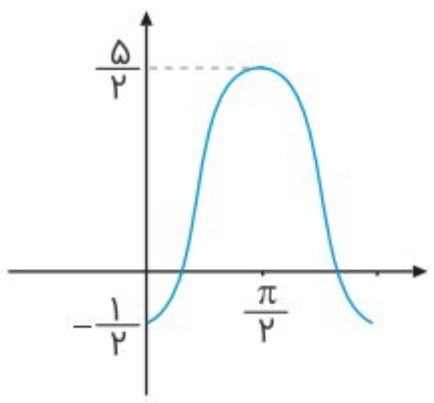
۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y=c+a\cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار ac کدام است؟



۱) -۵

۲) -۳

۳) $-\frac{۵}{۲}$

۴) $-\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۳ اگر $۶\sqrt{۵}=۱۰(\sin x+\cos x)$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$

۲) -۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۳۴ تعداد جواب‌های معادله $\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(x-\frac{\pi}{۳})=۱$ در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۵ اگر $-\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{۵\pi}{۱۲}$ و $\sin ۲x=\frac{m-۱}{۴}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۱,۵)$
۲) $(-۱,۵]$
۳) $(-۱,۱)$
۴) $(-۱,۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۶ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۸\cos x-\tan^۲x=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

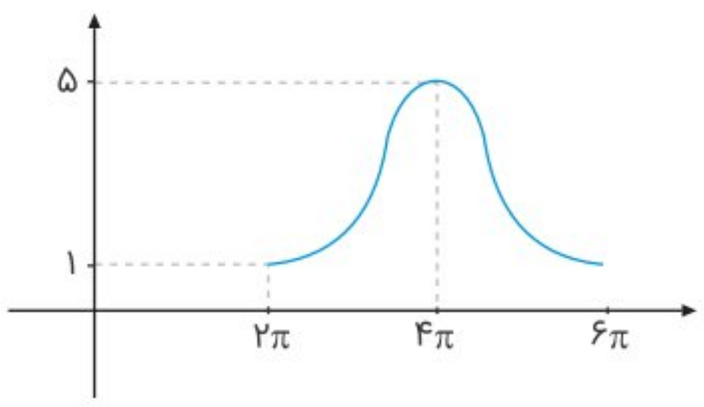
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۷ اگر $-\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۴}$ و $\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\frac{۱-m}{۲+m}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۲,۱)$
۲) $(-۲,۱]$
۳) $(-۱,۲]$
۴) $(-۱,۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۸ شکل زیر، نمودار تابع $y=c+a\cos bx$ را در یک دورهٔ تناوب، نشان می‌دهد. مقدار c کدام است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۹ اگر $۲\sin^۲x+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}$ باشد، حاصل $\tan^۲x$ کدام است؟ $(x\neq ۰)$

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۴۰ حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰) + \tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند)

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

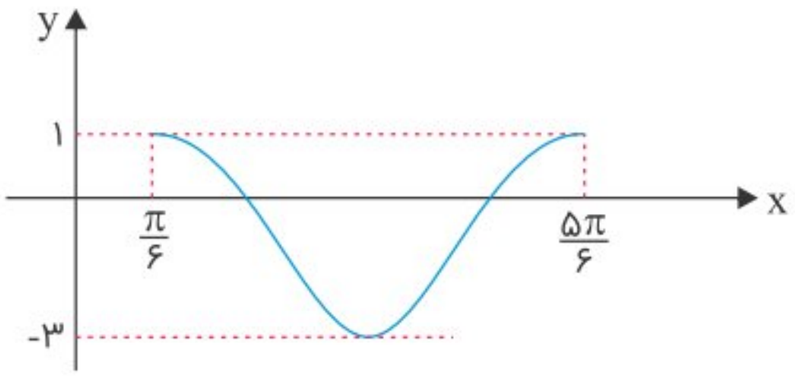
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۴۱ اگر $f(x) = ۳۲\cos^۲(x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$
۲) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۱۶}$
۳) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۱۶}$
۴) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۳۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$، در یک بازهٔ تناوب است. مقادیر b و c، کدام‌اند؟



۱) $b = ۳, c = -۱$
۲) $b = ۳, c = -۲$
۳) $b = \frac{۳}{۲}, c = -۲$
۴) $b = \frac{۳}{۲}, c = -۱$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۳ فرض کنید زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right) - \sin(\alpha-\pi)}{\left|\tan^۲(\alpha) - ۱\right|}$، کدام است؟

۱) $\frac{۴\left(۲+\sqrt{۵}\right)}{۳}$
۲) $\frac{۴\left(-۲+\sqrt{۵}\right)}{۳}$
۳) $\frac{۴\left(۲-\sqrt{۵}\right)}{۳}$
۴) $-\frac{۴\left(۲+\sqrt{۵}\right)}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۴ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin x \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = ۱$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) ۳π
۳) ۴π
۴) ۵π

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۵ جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$، با شرط $\cos x \neq ۰$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۴۶ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۵\sin^۲(x) + ۲\cos(۳x) = -۲$ در فاصلهٔ $[-\pi, \pi]$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۵
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۷ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲(x) - \sin^۲(x)\cos(۳x) = ۱$، در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴۸ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin(۳x)\cos(۳x) = ۱$، در بازهٔ $\left[۰ , \frac{\pi}{۲}\right]$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

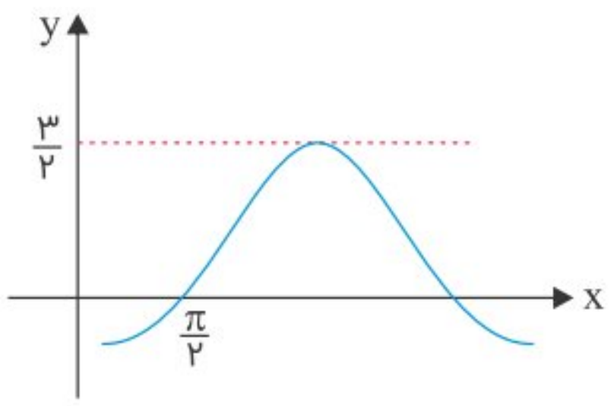
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۹ اگر $f(x) = ۱۶\cos^۲(۳x)\cos^۲(۶x)\cos^۲(۱۲x)\cos^۲(۲۴x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۳۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{۶ - ۳\sqrt{۳}}{۱۶}$
۲) $\frac{۶ - \sqrt{۳}}{۱۶}$
۳) $\frac{۶ + \sqrt{۳}}{۱۶}$
۴) $\frac{۶ + ۳\sqrt{۳}}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵۰ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. مقدار a، کدام است؟



۱) -۱
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

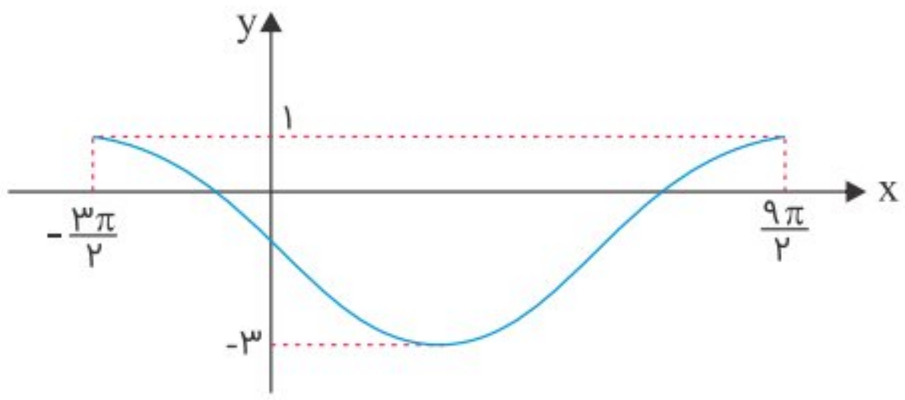
۵۱ حاصل عبارت $\sin(۱۰۹۵)\cos(۲۵۵) - \tan(۲۸۵)\tan(-۱۶۵)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند.)

۱) $\sin^۲(۱۵)$
۲) $\cos^۲(۱۵)$
۳) $-\sin^۲(۱۵)$
۴) $-\cos^۲(۱۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۵۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



۱) -۲

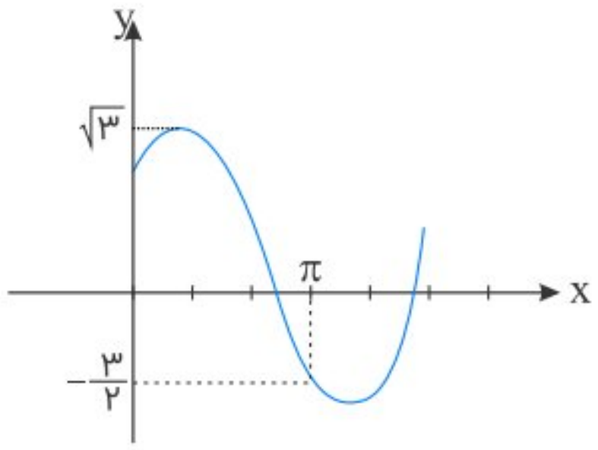
۲) -۳

۳) -۴

۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵۳ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام اسـت؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

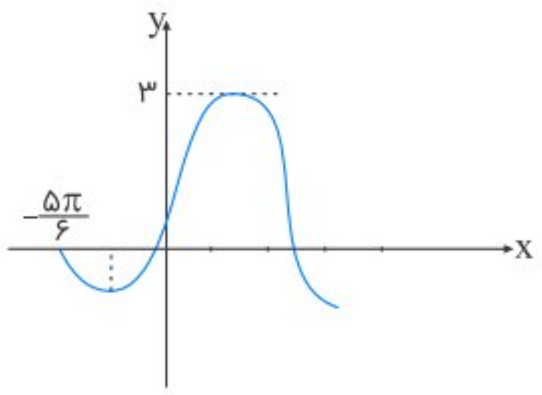
۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۴ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) $۱+\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۵ اگر $\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha)\cos(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{۳\pi}{۲})$$

۱) -۱/۲۳

۲) -۰/۵۲

۳) ۰/۲۷

۴) ۰/۴۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۶ اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}(\frac{۱}{\sin x} - \sin x)$، کدام است؟

۱) $-\cos^۲ x$

۲) $-\cos x$

۳) $\cos^۲ x$

۴) $\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۵۷ حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۸ اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، حاصل $\sqrt{۱+\tan^۲x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲x)$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$

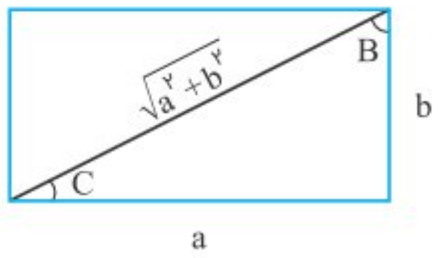
۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۱ گزینه ۴

با فرض $a > b$، شکل زیر را در نظر می‌گیریم.



$$\sqrt{ab} = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲} \Rightarrow ۴ab = a^۲+b^۲$$

$$\sin B = \frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \quad , \quad \cos B = \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$\Rightarrow \sin B \cos B = \frac{ab}{a^۲+b^۲} \Rightarrow \sin B \cos B = \frac{ab}{۴ab}$$

$$\Rightarrow \sin B \cos B = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲\sin B \cos B = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۲B = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲B = ۳۰^\circ \text{ ی } ۱۵۰^\circ \Rightarrow ۲B = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۱۵^\circ$$

$$\tan(B-C) = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

$$T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{۴}$$

$$f(x) = \frac{۱}{۲} - ۳\sin\frac{\pi}{a}x \Rightarrow -۳f(۲x) = -\frac{۳}{۲} + ۹\sin\frac{۲\pi}{a}x$$

دورهٔ تناوب تابع $-۳f(۲x)$، برابر است با:

$$T' = \frac{۲\pi}{\left|\frac{۲\pi}{a}\right|} = |a| = \frac{\pi}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۳ گزینه ۳

$$\frac{۲\pi}{\left|\frac{۲}{a}\right|} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \pi|a| = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow |a| = \frac{۱}{۳}$$

$$y = \cos ax \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|a|} = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = ۶\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ گزینه ۲

$$۲\cos^۲ x - ۱ = \sin x \Rightarrow \cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۲} - x)$$

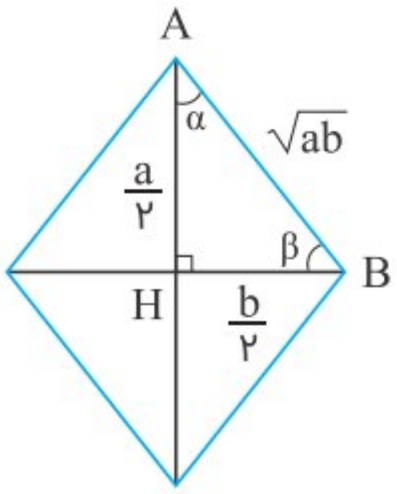
$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

جواب‌های مربوط به این دسته جواب‌ها، $\{\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲}\}$ می‌باشند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۵ گزینه ۱

قطرهای لوزی را به‌ترتیب a و b در نظر می‌گیریم.



$$\sin\alpha = \frac{b}{۲\sqrt{ab}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{a}{۲\sqrt{ab}} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{ab}{۴ab}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۲\alpha = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\alpha = ۳۰^\circ \text{ یا } ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{A - B}{۲}) = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۶ گزینه ۱

$$\frac{۱}{\sqrt{\cos^۲\alpha}} - \frac{۱}{\cot\alpha} = \frac{۱}{|\cos\alpha|} - \frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cot\alpha} = \frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|} \Rightarrow \cos\alpha > ۰$$

$$\cot\alpha = -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}} \Rightarrow \cot\alpha = -\frac{\cos\alpha}{|\sin\alpha|} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$$

$$\Rightarrow |\sin\alpha| = -\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha < ۰$$

چون $\cos\alpha > ۰$ و $\sin\alpha < ۰$ است، بنابراین α در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۷ گزینه ۴

$$\frac{۳\cos(۲۴۸^\circ) - ۲\sin(۱۵۸^\circ)}{\sin(۲۰۲^\circ) - \cos(۲۹۲^\circ)} = \frac{۳\cos(۲۷۰^\circ - ۲۲^\circ) - ۲\sin(۱۸۰^\circ - ۲۲^\circ)}{\sin(۱۸۰^\circ + ۲۲^\circ) - \cos(۲۷۰^\circ + ۲۲^\circ)}$$

$$= \frac{-۳\sin ۲۲^\circ - ۲\sin ۲۲^\circ}{-\sin ۲۲^\circ - \sin ۲۲^\circ} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۸ گزینه ۴

$$\cos ۲x = ۳\sin x - ۱ \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲ x = ۳\sin x - ۱$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x + ۳\sin x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶} \\ \sin x = -۲ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

اختلاف جواب‌های به‌دست‌آمده، برابر است با:

$$\frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۲

$$\frac{۱}{\sqrt{\cos^۲\alpha}} - \tg\alpha = \frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} \Rightarrow \frac{۱}{|\cos\alpha|} - \frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \tg\alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow -\frac{۱}{|\cos\alpha|} = \frac{۱}{\cos\alpha}$$

$\Rightarrow \cos\alpha < ۰ \Rightarrow$ α در ناحیهٔ دوم یا سوم قرار دارد (۱)

$$\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = -\frac{۱}{\cot\alpha} \Rightarrow \frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow |\sin\alpha| = -\sin\alpha$$

$\Rightarrow \sin\alpha < ۰ \Rightarrow$ α در ناحیهٔ سوم یا چهارم قرار دارد (۲)

باتوجه‌به (۱) و (۲)، زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم قرار دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۰ گزینه ۱

$$T_{۱+\sin ax} = \frac{۷\pi}{۴} - \frac{۳\pi}{۴} = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = ۲$$

$$y = ۳\cos(\frac{x}{a}) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{a}|} = ۲\pi|a| = ۴\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۱ گزینه ۲

$$\sin ۲x - ۴\sin^۲x\cos x = ۰ \Rightarrow \sin ۲x - ۲\sin x\sin ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow \sin ۲x(۱ - ۲\sin x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

جواب‌هایی که در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ قرار دارند عبارتند از: $\{۰, \frac{\pi}{۲}, \frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۲ گزینه ۴

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{۱/۵}{۲} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{۳}{۴}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = -\frac{۴}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۱۳ گزینه ۴

$$P = ۲\pi r \Rightarrow ۲\pi r = ۲\pi \Rightarrow r = ۱$$

$$OH = \frac{۱}{۲}OA = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\hat{A}H = ۳۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow AH = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow |\overset{\frown}{AB}| = \frac{۱}{۶}(۲\pi) = \frac{\pi}{۳}$$

$$(\cancel{AH} + \cancel{BH} + \overset{\frown}{AB}) - (OA + \cancel{AH} + \cancel{OH}) = \frac{\pi}{۳} - ۱ = \frac{\pi - ۳}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۴ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$x = ۳ - ۲y \Rightarrow ۶ - ۴y + ay = ۶ \Rightarrow y(a - ۴) = ۰$$

$$\begin{cases} y = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ a = ۴ \quad \times \end{cases} \Rightarrow A(۳, ۰)$$

$$\begin{cases} y = -x \\ x + ۲y = ۳ \end{cases} \Rightarrow B(-۳, ۳) \quad , \quad \begin{cases} y = -x \\ ۲x + ay = ۶ \end{cases} \Rightarrow C(\frac{۶}{۲ - a}, \frac{۶}{a - ۲})$$

مرکز دایره : $O(\alpha, -\alpha) \Rightarrow |\overline{OA}| = |\overline{OB}|$

$$\Rightarrow ۲(\alpha + ۳)^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲ \Rightarrow \alpha = -\frac{۱}{۲}$$

$$r^۲ = |OA| = (-\frac{۱}{۲} - ۳)^۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۲}$$

$$\Rightarrow |OC| = (-\frac{۱}{۲} - \frac{۶}{۲ - a})^۲ + (\frac{۱}{۲} - \frac{۶}{a - ۲})^۲ = \frac{۲۵}{۲}$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۳a - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \ \checkmark \\ a = ۴ \quad \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(۲, -۲)$$

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$$

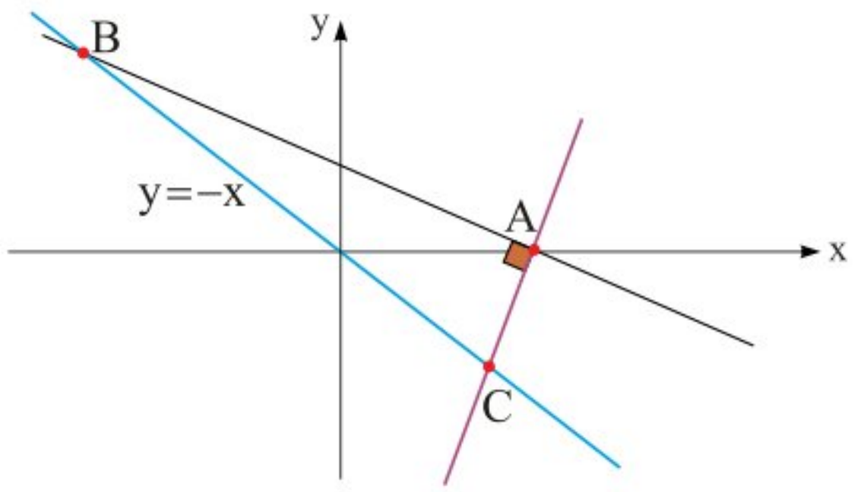
بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه است و زاویهٔ A قائمه می‌باشد.

$$\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} - \hat{C} = ۹۰^\circ - \hat{C} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = ۹۰^\circ - ۲\hat{C}$$

$$\cot(B - C) = \cot(۹۰^\circ - ۲C) = \tan(۲C)$$

$$= \frac{۲\tan C}{۱ - \tan^۲ C} = \frac{۲(۳)}{۱ - (۳)^۲} = \frac{۶}{-۸} = -\frac{۳}{۴}$$

راه‌حل دوم: چون مرکز روی خط $y = -x$ است و دو خط دیگر با این خط متقاطع هستند، پس A زاویهٔ محاطی رو به قطر و درنتیجه ۹۰ درجه است. چون A قائمه است دو خط داده‌شده بر هم عمودند:



$$m = -\frac{۱}{۲}, m' = \frac{-۲}{a}, mm' = -۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

$$\begin{cases} x + ۲y = ۳ \\ ۲x - y = ۶ \end{cases} \Rightarrow A(۳, ۰)$$

$$\begin{cases} x + ۲y = ۳ \\ y + x = ۰ \end{cases} \Rightarrow B(-۳, ۳)$$

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} ۲x - y = ۶ \\ x + y = ۰ \end{cases} \Rightarrow C(۲, -۲)$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۴۵}} = \frac{۱}{۳} \ , \ \tan C = ۳$$

$$\tan(B - C) = \frac{\tan B - \tan C}{۱ + \tan B \tan C} = \frac{\frac{۱}{۳} - ۳}{۱ + \frac{۱}{۳} \times ۳} = \frac{-\frac{۸}{۳}}{۲} = -\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \cot(B - C) = -\frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۵ گزینه ۱

$$T = \frac{۹\pi}{۲۰} - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۵} \ , \ T = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۵ \Rightarrow b = \pm ۵$$

اگر $b = ۵$ باشد:

$$x = \frac{\pi}{۴} : y = a\cos^۲(\frac{۵\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow a + c = ۱$$

$$x = \frac{۷\pi}{۲۰} : y = a\cos^۲(\frac{۷\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow ۰ + c = -۲ \Rightarrow c = -۲$$

$$\xrightarrow{c=-۲} a - ۲ = ۱ \Rightarrow a = ۳$$

$$a.b = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

اگر $b = -۵$ باشد:

$$x = \frac{\pi}{۴} : y = a\cos^۲(-\frac{۵\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow c = ۱$$

$$x = \frac{۷\pi}{۲۰} : y = a\cos^۲(-\frac{۷\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow a + c = -۲ \Rightarrow a = -۳$$

$$a.b = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

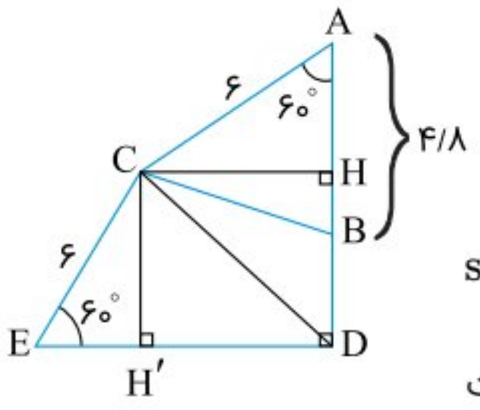
Scanned with CamScanner

۱۶ گزینه ۲

$$\frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \sin ۶۰^\circ = ۷/۲ \times \sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{۲} \times AC \times ۴/۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۷/۲ \times \sqrt{۳} \Rightarrow AC = ۶ \Rightarrow EC = ۶$$

در مثلث AHC داریم:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{CH}{۶} \Rightarrow CH = ۳\sqrt{۳}$$

دو مثلث CEH' و ACH هم‌نهشت‌اند، پس درنتیجه $CH' = ۳\sqrt{۳}$. بنابراین چهارضلعی $HCH'D$ مربع است و داریم:

$$DC = ۳\sqrt{۳} \times \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۷ گزینه ۳

$$\tan x + \cot x = -۳ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -۳$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x \cos x} = \frac{۱}{\sin x \cos x} = -۳ \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-۱}{۳}$$

$$(\sin x + \cos x)^۲ = ۱ + ۲ \sin x \cos x = ۱ + (۲ \times (\frac{-۱}{۳})) = \frac{۱}{۳}$$

$$(\sin x + \cos x) = \pm\sqrt{\frac{۱}{۳}} \xrightarrow{\frac{۳\pi}{۴} < x < \pi} \sin x + \cos x = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۱}{\sin^۳ x + \cos^۳ x} = \frac{۱}{(\sin x + \cos x)(۱ - \sin x \cos x)}$$

$$= \frac{۱}{(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}) \times \frac{۴}{۳}} = -\frac{۳}{۴}\sqrt{۳} = -۰/۷۵\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۸ گزینه ۱

مساحت دایره $= \pi r^۲ = \pi \Rightarrow r = ۱$

$|OA| = |OB| = ۱\ ,\ |AH| = \frac{۱}{۲}$

ارتفاع OH در AOD : $|OH| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$A\widehat{O}D = ۶۰^\circ \Rightarrow A\widehat{O}C = ۳۰^\circ \Rightarrow |\overset{\frown}{AC}| = \frac{۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۶}$

$|HC| = ۱ - |OH| = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

محیط مثلث AOH $= |OH| + |HA| + |OA| = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳ + \sqrt{۳}}{۲}$

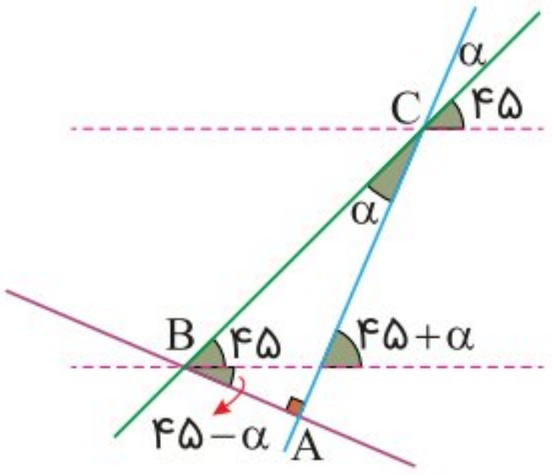
محیط قسمت رنگی : $|HC| + |AH| + |\overset{\frown}{AC}| = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۳ - \sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۶}$

محیط‌ها را از هم کم می‌کنیم : $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۹ گزینه ۲

چون مرکز دایره روی خط $y = x$ و در واقع روی BC قرار دارد و دایره از هر سه نقطه A و B و C باید بگذرد پس A هم روی محیط دایره و زاویه A، زاویه محاطی رو به قطر است؛ درنتیجه $\hat{A} = ۹۰^\circ$.



اگر $\hat{A} = ۹۰^\circ$ پس دو خط $y = -\frac{۱}{۳}x - ۳$ و $y = ax - ۳$ بر هم عمودند؛ درنتیجه $a = ۳$

$\tan(۴۵ + \alpha) = ۳ \Rightarrow \tan(۹۰ + ۲\alpha) = \frac{۲ \times ۳}{۱ + ۳^۲} = \frac{-۳}{۴}$

$\Rightarrow -\cot ۲\alpha = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow \cot ۲\alpha = \frac{۳}{۴}$

$\widehat{B} - \widehat{C} = ۹۰ - \alpha - \alpha = ۹۰ - ۲\alpha \Rightarrow \tan(B - C) = \cot ۲\alpha = \frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۰ گزینه ۴

$$\sin(\frac{\pi + ۴x}{۲}) = \sin(\frac{\pi}{۲} + ۲x) = \cos ۲x$$

$$\cos(\frac{\pi + ۸x}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۴x) = -\sin ۴x$$

$$\frac{۱}{\cos ۲x} - \frac{۱}{\sin ۴x} = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \sin ۴x$$

$$\Rightarrow ۲\sin ۲x \cos ۲x = \cos ۲x \xrightarrow{\cos ۲x = ۰} ۲\sin ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{[۰,\pi]} ۲x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۱۲}, \frac{۵\pi}{۱۲}$$

$$\alpha = \frac{۵\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \tan ۲\alpha = \tan \frac{۲\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۱ گزینه ۳

$$\sin^۲(\frac{\pi}{۴} - bx) = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos(۲(\frac{\pi}{۴} - bx)))$$
$$= \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲bx) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\sin(۲bx)$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{۲} - \frac{a}{۲}\sin(۲bx) + c \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{max} = \frac{a}{۲} + c + |-\frac{a}{۲}| = ۱ \\ y_{min} = \frac{a}{۲} + c - |-\frac{a}{۲}| = -۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲|\frac{a}{۲}| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

$$T = \frac{۱۵\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۴} = \frac{۲۰\pi}{۴} = ۵\pi$$
$$T = \frac{۲\pi}{|۲b|} = ۵\pi \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۵} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۵}$$

$$ab = \pm\frac{۳}{۵} \xrightarrow{ab<۰} ab = -\frac{۳}{۵} = -۰/۶$$

نکته: با توجه به نمودار مشخص است که تابع در همسایگی $x = ۰$ صعودی است، بنابراین در $(*)$ باید $-a$ و b هم‌علامت باشند، یعنی $(-a)(b) > ۰$، پس $ab < ۰$.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۲ گزینه ۲

$$\cot(\frac{\pi+۴x}{۲}) = \cos(\frac{\pi+۸x}{۲})$$

$$\cot(\frac{\pi+۴x}{۲}) = \cot(\frac{\pi}{۲}+۲x) = -\tan ۲x$$

$$\cos(\frac{\pi+۸x}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲}+۴x) = -\sin ۴x$$

$$\Rightarrow -\tan ۲x = -\sin ۴x \Rightarrow \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} = ۲\sin ۲x\cos ۲x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin ۲x(۱-۲\cos^۲ ۲x)}{\cos ۲x} = ۰ \Rightarrow \sin ۲x = ۰,\ \cos^۲ ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۲x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} : \begin{cases} \cos ۲x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \text{در بازهٔ موردنظر نیست} \\ \cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۲x = \pm\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{۸} & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۸}+\frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\cos(۳\alpha) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}) = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲۳ گزینه ۱

$$\tan x + \cot x = ۴ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x} = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin x\cos x} = ۴ \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{۱}{۴}$$

$$۵\pi < ۴x < ۶\pi \xrightarrow{\div ۴} \frac{۵\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \sin x < \cos x < ۰ \Rightarrow \sin x - \cos x < ۰$$

$$(\sin x-\cos x)^۲ = \sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x$$
$$= ۱-۲\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \sin x-\cos x = -\sqrt{۱-۲\sin x\cos x} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \sin^۳ x-\cos^۳ x = (\sin x-\cos x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x+\sin x\cos x)$$

$$= -\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱+\frac{۱}{۴}) = -\frac{۵}{۴\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin^۳ x-\cos^۳ x} = -۰/۸\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۲۴ گزینه ۲

$$\frac{\cos x}{۱+\sin x}=\frac{۱+\sin x}{\cos x}\Rightarrow \cos^۲x=۱+۲\sin x+\sin^۲x$$

$$\Rightarrow ۱-\sin^۲x=۱+۲\sin x+\sin^۲x\Rightarrow \sin^۲x+\sin x=۰$$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi,\dots\\ \sin x=-۱\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۲},\dots\end{cases}$$ غ ق ق

کمترین فاصلهٔ بین جواب‌ها π واحد است.

نکته: ریشه‌های مخرج غیر قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۵ گزینه ۱

$$\sin\alpha=۲\cos\alpha\Rightarrow \tan\alpha=۲\Rightarrow \tan^۲\alpha=۴\Rightarrow ۱+\tan^۲\alpha=۵$$

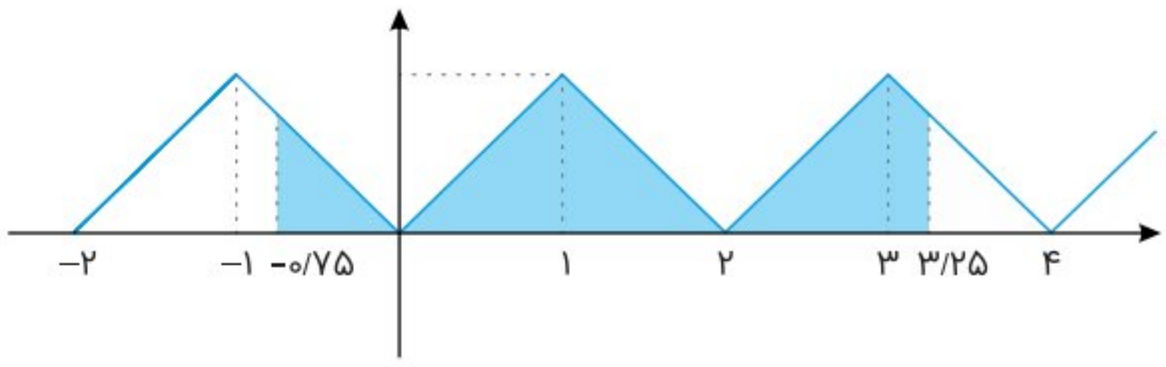
$$\Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۵\Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۱}{۵}$$

$$\xrightarrow{\cos\alpha<۰}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۵}}{۵}=-\frac{۲\sqrt{۵}}{۱۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۶ گزینه ۱

نمودار تابع به‌صورت زیر خواهد بود:



$$S=۲\times\frac{۱\times۲}{۲}=۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۲۷ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\overset{\Delta}{AHC}: \cos\hat{C} = \frac{HC}{۶} \Rightarrow HC = ۶\cos ۷۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OHC}: \tan ۱۵^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = ۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ$$

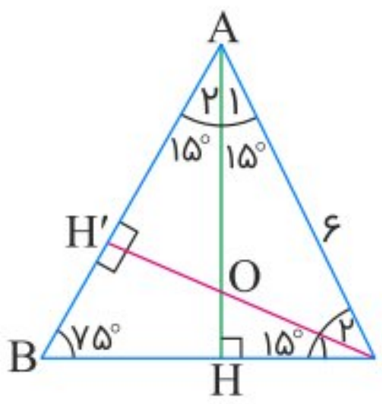
$$S_{OHC} = \frac{۱}{۲} \times (۶\cos ۷۵^\circ)(۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ) = ۱۸\cos^۲ ۷۵^\circ (۲ - \sqrt{۳})$$

$$= ۱۸ \times \frac{۱ + \cos ۱۵۰^\circ}{۲}(۲ - \sqrt{۳}) = ۹(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲})(۲ - \sqrt{۳})$$

$$= \frac{۹}{۲}(۲ - \sqrt{۳})^۲ = \frac{۹}{۲}(۷ - ۴\sqrt{۳}) = \frac{۹}{۲(۷ + ۴\sqrt{۳})}$$

راه‌حل دوم:

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $AB = AC$ و داریم:



$$\hat{C} = \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{CBH'C}: \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۱۵^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{OHC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{OHC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}} = \left(\frac{HC}{AH}\right)^۲ = \tan^۲ ۱۵^\circ$$

$$= \left(۲ - \sqrt{۳}\right)^۲ = ۷ - ۴\sqrt{۳} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OHC}} = \left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right) S_{\overset{\Delta}{AHC}} \quad (*)$$

$$S_{\overset{\Delta}{AHC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\left(\underbrace{AB}_{۶}\right)\left(\underbrace{AC}_{۶}\right)\left(\underbrace{\sin\hat{A}}_{\frac{۱}{۲}}\right)\right) = \frac{۹}{۲}$$

$$(*) \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OHC}} = \left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right) \times \frac{۹}{۲} = \frac{۹\left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right)}{۲}$$

تذکر: برای یافتن مقدار تانژانت می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد:

$$۱)\ \tan ۱۵^\circ = \tan(۶۰^\circ - ۴۵^\circ) = \frac{\tan ۶۰^\circ - \tan ۴۵^\circ}{۱ + \tan ۶۰^\circ \tan ۴۵^\circ} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۱ + \sqrt{۳}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$۲)\ \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}}{۲} \quad (\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱)$$

$$\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲} \quad (\sin ۲x = ۲ \sin x . \cos x)$$

$$\Rightarrow \tan ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

Scanned with CamScanner

۲۸ گزینه ۴

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow \sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۴}))$$

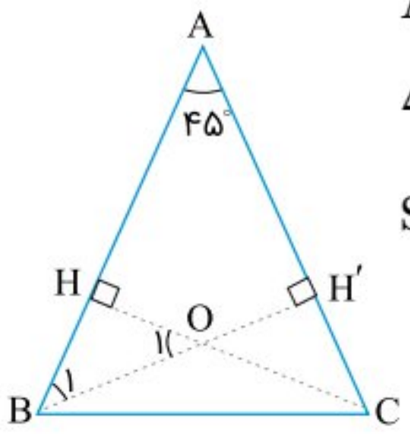
$$\Rightarrow \sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶} \\ ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}+x\Rightarrow x=۲k\pi+\pi \quad (x\neq k\pi \text{ زیرا غیرقابل‌قبول}) \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۹ گزینه ۴



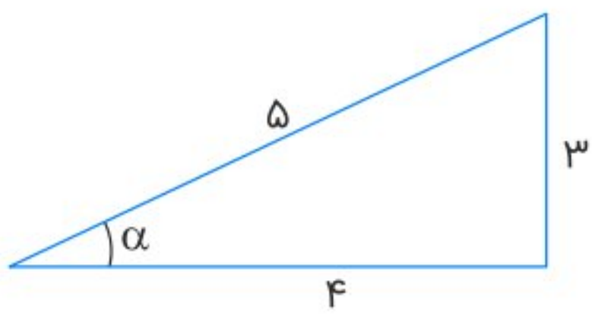
$$\hat{A}=۴۵^\circ\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{B}_۱=۴۵$$

$$\Delta AHC: AH=\frac{AC}{\sqrt{۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}\Rightarrow HB=HO=۸-۴\sqrt{۲}$$

$$S_{OHB}=\frac{۱}{۲}(۸-۴\sqrt{۲})^۲=\frac{۱}{۲}\times ۱۶(۲-\sqrt{۲})^۲=۸(۶-۴\sqrt{۲})=۱۶(۳-۲\sqrt{۲})=\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۰ گزینه ۲



$$\tan\alpha=\frac{۳}{۴}\quad,\quad \cot\alpha=\frac{۴}{۳}\quad,\quad \sin\alpha=-\frac{۳}{۵}\quad,\quad \cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{\cos\left(۲\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)+\cos(\alpha+\pi)}{\cot ۲\alpha}=\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\underline{\cot\alpha-\tan\alpha}}=\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{\underline{\cot\alpha-\tan\alpha}}$$

$$=\frac{۲\left(-\frac{۳}{۵}\right)\left(-\frac{۴}{۵}\right)+\frac{۴}{۵}}{\frac{\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۴}}{۲}}=\frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۶}{۵}+۱\right)}{\frac{۱۶-۹}{۲۴}}=\frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۱۱}{۵}\right)}{\frac{۷}{۲۴}}=\frac{۴(۱۱)(۲۴)}{۵(۵)(۷)}=\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

$$\cot ۲\alpha=\frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}=\frac{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}{۲\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۳۱ گزینه ۴

$$y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x) = a + b\cos x$$

باتوجه‌به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = ۳ \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = ۳ \quad (۱)$$

$$(\frac{۷\pi}{۳}, ۰) : ۰ = a + b\cos(\frac{۷\pi}{۳}) = a + b\cos(۲\pi + \frac{\pi}{۳}) = a + b(\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} a - b = ۳ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۳a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۲ گزینه ۴

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = \frac{۵}{۲} \\ y_{min} = -|a| + c = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{۳}{۲} \ , \ c = ۱$$

$$\Rightarrow y = ۱ + a\cos bx \ ; \ y(۰) = ۱ + a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

پس تابع به صورت $y = ۱ - \frac{۳}{۲}\cos bx$ می‌باشد و حاصل ac برابر است با:

$$ac = \frac{-۳}{۲} \times ۱ = \frac{-۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۳ گزینه ۳

$$\sin x + \cos x = \frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۵} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^۲x + \cos^۲x + ۲\sin x\cos x = \frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱ + \sin ۲x = \frac{۹}{۵} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۴}{۵}$$

$$\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲x} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲x}$$

$$\Rightarrow ۴ + ۴\tan^۲x = ۱۰\tan x \Rightarrow ۴(۱ + \tan^۲x) = ۱۰\tan x$$

$$\Rightarrow ۱ + \tan^۲x = \frac{۵}{۲}\tan x \xrightarrow{\times ۲} ۲\tan^۲ - ۵\tan x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۹} \begin{cases} \tan x = ۲ \\ \tan x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۳۴ گزینه ۲

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶})\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۳}-x))=۱$$

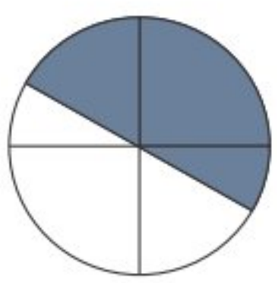
$$\sin^۲(x+\frac{\pi}{۶})=۱\Rightarrow \begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}\\ \sin(x+\frac{\pi}{۶})=-۱\Rightarrow x=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۵ گزینه ۲

$$-\frac{\pi}{۱۲}<x<\frac{۵\pi}{۱۲}\Rightarrow \frac{-\pi}{۶}<۲x<\frac{۵\pi}{۶}$$

حداقل مقدار سینوس در این بازه $-\frac{۱}{۲}$ و حداکثر آن ۱ است.



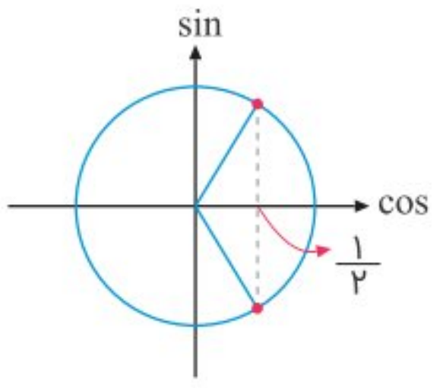
$$-\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۴}\leq ۱\xrightarrow{\times ۴}-۲<m-۱\leq +۴\Rightarrow -۱<m\leq ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۳۶ گزینه ۴

$$۸\cos x-\tan^۲x=۱\Rightarrow ۸\cos x=۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$$

$$\Rightarrow \cos^۳x=\frac{۱}{۸}\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}$$



$x\in[۰,۲\pi]\Rightarrow$ دو جواب دارد

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۳۷ گزینه ۱

$$-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} < -x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۰ < \frac{\pi}{۴} - x < \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۴} - x) > ۰ \Rightarrow \frac{۱-m}{۲+m} > ۰$$

m		-۲		۱	
$۱-m$	$+$		$+$	۰	$-$
$۲+m$	$-$	۰	$+$		$+$
$\frac{۱-m}{۲+m}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow -۲ < m < ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۸ گزینه ۳

$$\begin{cases} max = |a| + c = ۵ \\ min = -|a| + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow c = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳۹ گزینه ۳

$$۲\sin^۲x + \cos^۲x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \sin^۲x + \underbrace{\sin^۲x + \cos^۲x}_{۱} = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin^۲x + ۱ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \sin^۲x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \cos^۲x = ۱ - \sin^۲x = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\tan^۲x = \frac{\sin^۲x}{\cos^۲x} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۴۰ گزینه ۲

$$\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰)+\tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$$
$$=\tan(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)+\tan(۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ)\sin(۷۲۰^\circ+۱۲۰^\circ)$$
$$=\tan(-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)+\tan(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)$$
$$=(-\tan(۶۰^\circ))(-\cos(۳۰^\circ))+(-\tan(۶۰^\circ))\sin(۶۰^\circ)$$
$$=(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۴۱ گزینه ۱

طرفین تابع را در $\sin^۲x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲x=۳۲\sin^۲x\cos^۲x\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$=۸\sin^۲(۲x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$=۲\sin^۲(۴x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$=\frac{۱}{۳۲}\sin^۲(۳۲x)\Rightarrow f(x)=\frac{\sin^۲(۳۲x)}{۳۲\sin^۲x}$$

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\sin^۲\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۳۲\sin^۲(\frac{\pi}{۱۲})}$$
$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\frac{۳}{۴}}{۳۲\times\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}$$
$$=\frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲}=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۴۲ گزینه ۱

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T = \frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶} = \frac{۴\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳} \\ T = \frac{۲\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۳ \Rightarrow b = \pm ۳$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} max : |a| + c = ۱ \\ min : -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -۳,\ c = -۱ \\ b = ۳,\ c = -۱ \end{cases}$$

فقط حالت $b = ۳, c = -۱$ را در گزینه‌ها داریم، پس گزینهٔ ۱ صحیح است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴۳ گزینه ۳

$\cos\alpha = \frac{۲}{۳}$ و α در ناحیهٔ چهارم است:

$$\sin\alpha = -\sqrt{۱ - \frac{۴}{۹}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۳} \quad , \quad \tan^۲\alpha = \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{\frac{۵}{۹}}{\frac{۴}{۹}} = \frac{۵}{۴}$$

$$\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{۲}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^۲\alpha - ۱|} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\frac{۵}{۴} - ۱} = \frac{\frac{۲ - \sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۴(۲ - \sqrt{۵})}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۴۴ گزینه ۴

$$۴\sin x\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱\Rightarrow ۴\sin x(-\cos x)=۱$$

$$\Rightarrow -۴\times\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۱\Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\quad(۱)\\ x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\quad(۲)\end{cases}$$

تعداد جواب‌ها را در دسته‌های مختلف به دست می‌آوریم:

(۱)

k	۱	۲
x	$\pi-\frac{\pi}{۱۲}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}$

(۲)

k	۰	۱
x	$\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\pi-\frac{\pi}{۱۲}+۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۷\pi}{۱۲}+\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}=۴\pi+\pi=۵\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۵ گزینه ۲

$$\cos ۳x+\cos x=۰\Rightarrow\cos ۳x=-\cos x\Rightarrow\cos ۳x=\cos(\pi-x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow ۴x=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\\ ۳x=۲k\pi-\pi+x\Rightarrow ۲x=۲k\pi-\pi\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cos x\neq ۰} x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۴۶ گزینه ۲

$$۲\cos(۳x) = -۲ - ۵\sin^۲x$$

اگر برد دو طرف تساوی را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$-۲ \le ۲\cos(۳x) \le ۲ \quad , \quad -۷ \le -۲ - ۵\sin^۲x \le -۲$$

پس دو طرف تساوی فقط به ازای -۲ برقرار خواهد بود.

$$\begin{cases} ۲\cos(۳x) = -۲ \Rightarrow \cos(۳x) = -۱ \Rightarrow ۳x = (۲k-۱)\pi \Rightarrow x = (۲k-۱)\frac{\pi}{۳} \quad , k \in \mathbb{Z} \\ -۲ - ۵\sin^۲x = -۲ \Rightarrow \sin^۲x = ۰ \Rightarrow x = k'\pi \quad , k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های مشترک دو معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\{-\pi, \frac{-\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}, \pi\} \cap \{-\pi, ۰, \pi\} = \{-\pi, \pi\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۷ گزینه ۳

$$(۱ - \cos^۲x) + \sin^۲x\cos ۳x = ۰ \Rightarrow \sin^۲x(۱ + \cos ۳x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \cos ۳x = -۱ \Rightarrow ۳x = (۲k+۱)\pi \Rightarrow x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

جواب‌های بازه $[۰, ۲\pi]$ برابر $\{۰, \pi, ۲\pi, \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}\}$ است که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۴۸ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱\Rightarrow ۲\sin(۳x)\cos(۳x)=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۶x)=\frac{۱}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶}\Rightarrow \begin{cases} k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳۶} \\ k=۱\Rightarrow x=\frac{۱۳\pi}{۳۶} \end{cases} \\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶}\Rightarrow \begin{cases} k=۰\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۳۶} \\ k=۱\Rightarrow x=\frac{۱۷\pi}{۳۶} \end{cases} \end{cases}$$

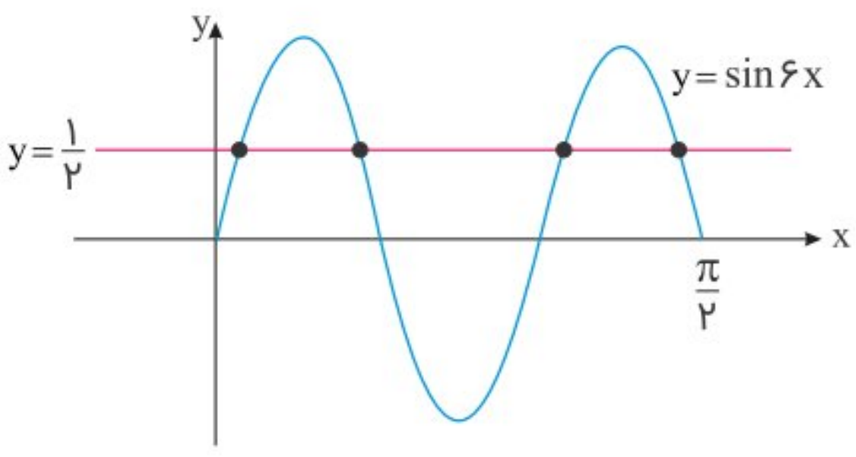
بنابراین معادله چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱\Rightarrow \sin(۶x)=\frac{۱}{۲}$$

$$۰\le x\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۰\le ۶x\le ۳\pi$$

باتوجه‌به شکل معادله چهار جواب دارد:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۴۹ گزینه ۴

طرفین رابطه را در $\sin^۲ ۳x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲ ۳x = ۱۶\sin^۲ ۳x\cos^۲ ۳x\cos^۲ ۶x\cos^۲ ۱۲x\cos^۲ ۲۴x$$
$$\Rightarrow f(x)\sin^۲ ۳x = ۴\sin^۲ ۶x\cos^۲ ۶x\cos^۲ ۱۲x\cos^۲ ۲۴x$$
$$= \sin^۲ ۱۲x\cos^۲ ۱۲x\cos^۲ ۲۴x$$
$$= \frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲۴x\cos^۲ ۲۴x = \frac{۱}{۱۶}\sin^۲ ۴۸x$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^۲ ۴۸x}{۱۶\sin^۲ ۳x}$$
$$f(\frac{\pi}{۳۶}) = \frac{\sin^۲ \frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin^۲ \frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^۲ (\frac{\pi}{۳})}{۱۶\sin^۲ \frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۱-\cos\frac{\pi}{۶})}$$
$$= \frac{۳}{۴\times ۸\times (۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})} = \frac{۳}{۱۶(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۱۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵۰ گزینه ۳

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = \frac{۳}{۲} \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = \frac{۳}{۲}$$
$$\left(\frac{\pi}{۲}, ۰\right) : f\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + b\cos(\frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{۲}b = ۰$$
$$\Rightarrow ۲a + b = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = \frac{۳}{۲} \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۳a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۵۱ گزینه ۴

$$\tan(۲۸۵^\circ) = \tan(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) = -\cot(۱۵^\circ)$$
$$\tan(-۱۶۵^\circ) = -\tan(۱۶۵^\circ) = -\tan(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = \tan(۱۵^\circ)$$
$$\sin(۱۰۹۵^\circ) = \sin(۱۰۸۰^\circ + ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ$$
$$\cos(۲۵۵^\circ) = \cos(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\sin(۱۵^\circ)$$
$$\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ) - \sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ) = -\cot(۱۵^\circ)\tan(۱۵^\circ) + \sin^۲(۱۵^\circ)$$
$$= -۱ + \sin^۲(۱۵^\circ) = -\cos^۲(۱۵^\circ)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۵۲ گزینه ۴

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{۹\pi}{۲} - (-\frac{۳\pi}{۲}) = \frac{۱۲\pi}{۲} = ۶\pi$$

$$\Rightarrow T = ۶\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۳}$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} max : |a| + c = ۱ \\ min : -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

طبق نمودار، تابع در حوالی $x = ۰$ نزولی است، بنابراین $ab < ۰$، پس داریم:

$$\begin{cases} a = -۲ \\ b = \frac{۱}{۳} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۲ \\ b = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۵۳ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار $f(\pi) = -\frac{۳}{۲}$ است، پس:

$$-\frac{۳}{۲} = a + b\sin(\pi + \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow a + b(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = -\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \quad (۱)$$

باتوجه‌به نمودار تابع $b > ۰$ است و همچنین چون ماکزیمم تابع $\sqrt{۳}$ است، پس:

$$a + |b| = \sqrt{۳} \xrightarrow{b>۰} a + b = \sqrt{۳} \quad (۲)$$

با حل دستگاه داریم:

$$-۲ \begin{cases} a + b = \sqrt{۳} \\ ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - ۲b = -۲\sqrt{۳} \\ ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} -b(۲ + \sqrt{۳}) = -(۳ + ۲\sqrt{۳}) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{۳}(۲ + \sqrt{۳})}{۲ + \sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۵۴ گزینه ۲

$$y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = a + b\sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{۵\pi}{۶}$ صفر است. پس:

$$y(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b\sin(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b(-\frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow b = ۲a$$

بنابراین: $y = a + ۲a\sin x$. به‌علاوه باتوجه‌به اینکه $y(۰) > ۰$ می‌باشد، پس $a > ۰$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = ۱$ باشد.

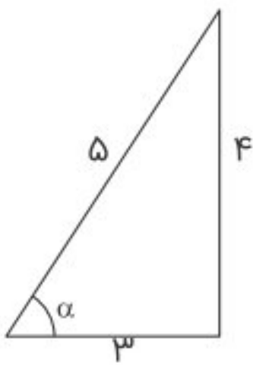
$$\max = ۳ \Rightarrow a + ۲a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$
$$\Rightarrow y = ۱ + ۲\sin x$$
$$y(\frac{\pi}{۶}) = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۵ گزینه ۳

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(\alpha - \frac{۳\pi}{۲}) = -\tan(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\cot\alpha$$

اگر $\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ باشد، با رسم مثلث سایر نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا می‌کنیم:



$$\tan\alpha = \frac{۴}{۳} \ , \cot\alpha = \frac{۳}{۴}$$
$$\sin\alpha = -\frac{۴}{۵} \ , \cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$$

حاصل : $\cos\alpha(-\sin\alpha) - (-\cot\alpha) = -\frac{۳}{۵}(\frac{۴}{۵}) + \frac{۳}{۴}$

$$= -\frac{۱۲}{۲۵} + \frac{۳}{۴} = \frac{-۴۸ + ۷۵}{۱۰۰} = \frac{۲۷}{۱۰۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۵۶ گزینه ۱

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲ x}}(\frac{۱}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}}(\frac{۱-\sin^۲ x}{\sin x})$$

$$=\frac{\frac{\tan x}{۱}}{\frac{۱}{|\cos x|}}\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times|\cos x|\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}$$

اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ باشد آنگاه $\cos x<۰$ است، پس $|\cos x|=-\cos x$ است. بنابراین:

$$\frac{\sin x}{\cos x}\times(-\cos x)\times\frac{\cos^۲ x}{\sin x}=-\cos^۲ x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵۷ گزینه ۳

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۳}=\sin(\frac{۱۸\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})=\sin(۶\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin(-\frac{\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۸\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶})=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})$$

$$=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})=\tan(\frac{۲۰\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$$

$$\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})=-\sin\frac{۱۱\pi}{۶}=-\sin(\frac{۱۲\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۵۸ گزینه ۴

$$A=\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲ x)=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}\left(۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-\sin^۲ x\right)$$

$$=\frac{۱}{|\cos x|}(۲\times\frac{۱}{۲}-\sin^۲ x)=\frac{۱-\sin^۲ x}{|\cos x|}=\frac{\cos^۲ x}{|\cos x|}$$

چون $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$ است، یعنی x در ناحیهٔ سوم قرار دارد و درنتیجه $|\cos x|=-\cos x$ است. پس:

$$A=\frac{\cos^۲ x}{-\cos x}=-\cos x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ خط مماس بر منحنی $f(x)=\frac{a}{2x-1}$، از نقاط $(2/5,6)$ و $(-12,-0/5)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ سهمی $y=ax^2+7x+16a$ در نقطهٔ A، بر نیمساز ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات، مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) ۱ ۴) -1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ سهمی $y=2ax^2-5x+18a$ در نقطهٔ A بر نیمساز ناحیهٔ سوم محورهای مختصات، مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ خط مماس بر منحنی $f(x)=\sqrt{ax-1}$ در نقطهٔ A، از نقاط $(-1,1)$ و $(2,2)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) $\frac{\sqrt{23}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{32}}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ اگر $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{1}{x^3-|x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱ ۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=(x^2+1)^3(ax+1)$ در بازهٔ $[-1,0]$ برابر -11 است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطهٔ $x=-2a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1

۳) ۸ ۴) -8

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۷ خط $۷y - x = ۵$ در ناحیهٔ اول صفحه مختصات بر منحنی $y = \frac{ax - ۱}{۳x + ۱}$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) $\frac{۴}{۷}$
۴) $\frac{۹}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۸ فرض کنید $g(x) = ax^۲ + bx + c$، $(a \neq ۰)$ و $f(x) = \begin{cases} g(x) & ; x \geq k \\ g'(x) & ; x < k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b + c = a$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ اگر $f(x) = -\frac{۱}{\sqrt[۵]{x + |x|}}$ و $g(x) = \frac{۱}{x^۵ + |x^۵|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) -۱
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۰ اگر $g(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱}$ و $(fog)'(۲) = ۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱ خط d در نقطهٔ $(-۱, ۵)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{۱}{۲}$ و $g(x) = \sqrt[۳]{x}f(x)$ باشد، مقدار $g'(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۶}$
۴) $\frac{۱۳}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ اگر $y = ۲x + b$ بر نمودار $y = \frac{x + a}{ax + ۱}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۳ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۵-۲x} & ;x\le -۲\\ -\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c & ;x>-۲\end{cases}$، در $x=-۲$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴ اگر $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{۲x^۲+x-۱}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y=\frac{x^۲+mx+۱}{x+۳}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به‌صورت $۴y-۳x=n$ است. مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۸}{ax+b} & ;x>۲\\ -x^۳+۶x & ;x\le ۲\end{cases}$، اگر $f'(۲)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۷ مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}$ در نقطهٔ $x=-۳$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۸ فرض کنید $f(x)=(x[x^۲+\frac{۱}{۲}])^۲+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}$، چندبرابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است؟

۱) -۴
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۹ فرض کنید $g(x)=ax^۲+۵x+b$ اگر $f(x)=\begin{cases} g(x) & ;x\le ۲ \\ g'(x) & ;x>۲ \end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$
۲) $-\frac{۵}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۱۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۰ فرض کنید $f(x)=(x[x])^۳$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$، مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ چندبرابر $(-۴۸\sqrt{۵})$ است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$ را در نظر بگیرید، شیب خط مماس بر منحنی $f^{-۱}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۸
۳) -۸
۴) -۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۲ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳$، در نقطهٔ $x=۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۵}{۴}$
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۳ مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)^۲}$ در نقطهٔ $x=-۲$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۴ خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^۲+bx$، در نقطهٔ $x=۲$، مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۱۲}$
۳) $\frac{۷}{۱۲}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x-۱} & ;x\geq ۲\\ -x^۲+ax+b & ;x<۲\end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۵
۳) ۰/۴۵
۴) ۰/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}$ و دامنهٔ $[۰,۸]$، خط مماس بر نمودار آن، موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۲
۲) -۱/۵
۳) -۱
۴) -۰/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۱

معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $(۲/۵, ۶)$ و $(-۰/۵, -۱۲)$ را می‌نویسیم:

$$y - ۶ = \frac{۶ + ۱۲}{۲/۵ + ۰/۵}(x - ۲/۵) \Rightarrow y = ۶x - ۹$$

معادلهٔ برخورد را تشکیل می‌دهیم و از آن، ریشهٔ مضاعف می‌گیریم:

$$\frac{a}{۲x - ۱} = ۶x - ۹ \Rightarrow ۱۲x^۲ - ۱۸x - ۶x + ۹ = a$$

$$\Rightarrow ۱۲x^۲ - ۲۴x + ۹ - a = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow ۲۴^۲ - ۴ \times ۱۲(۹ - a) = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

$$f(۵) = \frac{-۳}{۹} = -\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

سهمی را با خط $y = -x$ قطع می‌دهیم.

$$ax^۲ + ۷x + ۱۶a = -x \Rightarrow ax^۲ + ۸x + ۱۶a = ۰ \quad (۱)$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow ۸^۲ - ۴a \times ۱۶a = ۰ \Rightarrow ۶۴ = ۶۴a^۲ \Rightarrow a = \pm ۱$$

معادلهٔ (۱)، باید ریشهٔ مضاعف با طول مثبت داشته باشد.

$$x_۱ = x_۲ = -\frac{۸}{۲a} = -\frac{۴}{a} > ۰ \Rightarrow a < ۰ \Rightarrow a = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ گزینه ۲

$$۲ax^۲ - ۵x + ۱۸a = x \Rightarrow ۲ax^۲ - ۶x + ۱۸a = ۰$$

$$\Rightarrow ax^۲ - ۳x + ۹a = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۰} ۹ - ۳۶a^۲ = ۰ \Rightarrow a = \pm \frac{۱}{۲}$$

طول نقطهٔ تماس، برابر $\frac{۳}{۲a}$ و در ناحیهٔ سوم قرار دارد؛ بنابراین $a < ۰$ قابل قبول است. پس $a = -\frac{۱}{۲}$ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۴ گزینه ۱

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-۱,۱)$ و $(۲,۲)$ می‌گذرد، به‌صورت زیر است:

$$y-۱=\frac{۱}{۳}(x+۱)\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}$$

این خط، وقتی بر تابع $f(x)=\sqrt{ax-۱}$ مماس است که معادلهٔ زیر، ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\sqrt{ax-۱}=\frac{۱}{۳}x+\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۹(ax-۱)=x^۲+۸x+۱۶$$

$$\Rightarrow x^۲+(۸-۹a)x+۲۵=۰\xrightarrow{\Delta=۰}(۸-۹a)^۲-۱۰۰=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۸-۹a=۱۰\Rightarrow a=-\frac{۲}{۹}\\ ۸-۹a=-۱۰\Rightarrow a=۲\end{cases}$$

$a=-\frac{۲}{۹}$ قابل قبول نیست؛ زیرا در این صورت $f(۵)$ تعریف نمی‌شود.

$$a=۲\Rightarrow f(۵)=\sqrt{۱۰-۱}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ گزینه ۳

$$g'f'(g)=(fog)'$$

$$D_g(-\infty,۰)\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{x^۳+x^۳}=\frac{۱}{۲x^۳}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲x^۳}-\left|\frac{۱}{۲x^۳}\right|}}\overset{g<۰}{=}\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲x^۳}+\frac{۱}{۲x^۳}}}=\sqrt[۳]{x^۳}=x$$

$$(fog)'(x)=(x)'=۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۳

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=-۱۱\Rightarrow\frac{f(۰)-f(-۱)}{۰-(-۱)}=-۱۱\Rightarrow ۱-۸(۱-a)=-۱۱$$

$$\Rightarrow ۸(۱-a)=۱۲\Rightarrow ۱-a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

$$f(x)=(x^۲+۱)^۳(۱-\frac{x}{۲})$$

$$f'(x)=۳(۲x)(x^۲+۱)^۲(۱-\frac{x}{۲})-\frac{۱}{۲}(x^۲+۱)^۳$$

$$f'(-۲a)=f'(۱)=۳\times۲\times۴\times\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\times۸=۱۲-۴=۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۷ گزینه ۲

$$۷y - x = ۵ \Rightarrow y = \frac{x+۵}{۷}$$

$$\frac{ax-۱}{۳x+۱} = \frac{x+۵}{۷} \Rightarrow ۳x^۲ + ۱۵x + x + ۵ = ۷ax - ۷$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + (۱۶ - ۷a)x + ۱۲ = ۰ \quad (۱)$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (۱۶ - ۷a)^۲ - ۱۲^۲ = ۰ \Rightarrow (۱۶ - ۷a)^۲ = ۱۲^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱۶ - ۷a = ۱۲ \\ ۱۶ - ۷a = -۱۲ \end{cases}$$

باید معادلهٔ (۱) ریشهٔ مضاعف مثبت داشته باشد، بنابراین $۱۶ - ۷a < ۰$ است.

$$۱۶ - ۷a = -۱۲ \Rightarrow ۷a = ۲۸ \Rightarrow a = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۸ گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx + a - b & ; x \geq k \\ ۲ax + b & ; x < k \end{cases}$$

$$\lim_{x \to k} f(x) = f(k) \Rightarrow ak^۲ + bk + a - b = ۲ak + b$$

$$\Rightarrow ak^۲ + (b - ۲a)k + a - ۲b = ۰ \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax + b & ; x \geq k \\ ۲a & ; x < k \end{cases}$$

$$f'_+(k) = f'_-(k) \Rightarrow ۲ak + b = ۲a \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) : ak^۲ + (۲a - ۲ak - ۲a)k + a - ۲(۲a - ۲ak) = ۰$$

$$\Rightarrow ak^۲ - ۲ak^۲ + a - ۴a + ۴ak = ۰$$

$$\Rightarrow -ak^۲ + ۴ak - ۳a = ۰ \Rightarrow -k^۲ + ۴k - ۳ = ۰ \Rightarrow k = ۱, ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ گزینه ۳

$$g'(x)f'(g(x)) = (fog)'(x)$$

$$x > ۰ : g(x) = \frac{۱}{۲x^۵} \quad , \quad x > ۰ : f(x) = \frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) \overset{x>۰}{=} -\frac{۱}{\sqrt[۵]{۲(\frac{۱}{۲x^۵})}} = -x$$

$$(fog)'(x) = -۱ \Rightarrow (fog)'(\sqrt[۵]{۳}) = g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳})) = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۰ گزینه ۱

$$y = fog(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۲} y'(۲) = g'(۲)f'(g(۲)) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(\frac{۴+۱}{۲-۱}) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(۵) \quad (۱)$$

$$g(x) = \frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow g'(x) = \frac{۲(x-۱)-(۲x+۱)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow g'(۲) = -۳$$

$$(۱) : ۶ = -۳f'(۵) \Rightarrow f'(۵) = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۴

اطلاعات مسئله نشان می‌دهد که $f(-۱) = ۵$ و $f'(-۱) = -\frac{۱}{۲}$ است.

$$g(x) = \sqrt[۳]{x}f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}f(x) + \sqrt[۳]{x}f'(x)$$

$$g'(-۱) = \frac{۱}{۳}f(-۱) - f'(-۱) = \frac{۱}{۳} \times ۵ + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۳}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۳

$x = ۱$، عرض دو تابع را مقدار یکسانی قرار می‌دهد:

$$۲ + b = \frac{۱+a}{a+۱} = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

پس توابع به صورت $y = ۲x - ۱$ و $y = \frac{x+a}{ax+۱}$ هستند و در $x = ۱$ مشتق یکسانی دارند.

$$y' = ۲$$

$$y' = \frac{۱-a^۲}{(ax+۱)^۲} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱-a^۲}{(a+۱)^۲}$$

حال داریم:

$$\frac{۱-a^۲}{(a+۱)^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{۱-a}{(a+۱)} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲a + ۲ = ۱ - a \Rightarrow ۳a = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۳}$$

$$a - b = -\frac{۱}{۳} + ۱ = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۳ گزینه ۳

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱) در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = f(-۲)$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} \sqrt{۵-۲x} = \sqrt{۵-۲(-۲)} = ۳$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} (-\frac{۱}{۲}x^۲ + bx + c) = -\frac{۱}{۲}(-۲)^۲ + b(-۲) + c = -۲ - ۲b + c$$

$$f(-۲) = \sqrt{۵-۲(-۲)} = ۳$$

$$\Rightarrow -۲ - ۲b + c = ۳ \Rightarrow -۲b + c = ۵ \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(-۲) = f'_+(-۲)$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = \dfrac{-۲}{۲\sqrt{۵-۲x}} \Rightarrow f'_-(-۲) = \dfrac{-۲}{۲\times ۳} = -\dfrac{۱}{۳} \\ f'_+(x) = -x + b \Rightarrow f'_+(-۲) = ۲ + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳} = ۲ + b \Rightarrow b = -\frac{۷}{۳} \xrightarrow{(*)} -۲(-\frac{۷}{۳}) + c = ۵$$

$$\Rightarrow c = ۵ - \frac{۱۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

۱۴ گزینه ۲

$$\lim_{x\to۱} \frac{۲f(x)-۱}{۲(x-۱)} = \lim_{x\to۱} \frac{۲(\frac{۱}{۲})-۱}{۲(۱-۱)} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to۱} \frac{۲f'(x)}{۲} = \lim_{x\to۱} f'(x)$$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{۲x^۲ + x - ۱} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{\frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}(۲x^۲ + x - ۱) - (۴x+۱)(x^{\frac{۳}{۲}})}{(۲x^۲ + x - ۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۱} f'(۱) = \frac{\frac{۳}{۲}(۲ + ۱ - ۱) - (۴ + ۱)(۱)}{(۲ + ۱ - ۱)^۲} = \frac{-۲}{۴} = \frac{-۱}{۲}$$

Scanned with CamScanner

۱۵ گزینه ۴

$$y' = \frac{(۲x + m)(x + ۳) - (x^۲ + mx + ۱)}{(x + ۳)^۲}$$

$$\Rightarrow y'(۱) = \frac{(۲ + m)(۴) - (m + ۲)}{۱۶} = \frac{۳m + ۶}{۱۶} \quad (۱)$$

$$۴y - ۳x = n \Rightarrow y = \frac{۳}{۴}x + \frac{n}{۴} \Rightarrow y'(۱) = \frac{۳}{۴} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{۳m + ۶}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۳m + ۶ = ۱۲ \Rightarrow ۳m = ۶ \Rightarrow m = ۲$$

$$y(۱) = \frac{m + ۲}{۴} \xrightarrow{m=۲} y(۱) = ۱$$

$$y - ۱ = \frac{۳}{۴}(x - ۱) \Rightarrow ۴y - ۳x = ۱ \Rightarrow n = ۱$$

$$\Rightarrow m + n = ۲ + ۱ = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۳

تابع باید در $x = ۲$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{۸}{ax + b} = \frac{۸}{۲a + b}$$
$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} (-x^۳ + ۶x) = -۸ + ۱۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۸}{۲a + b} = ۴ \Rightarrow ۲a + b = ۲$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-۸a}{(ax + b)^۲} & ; x > ۲ \\ -۳x^۲ + ۶ & ; x \leq ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(۲) = \frac{-۸a}{(۲a + b)^۲} = \frac{-۸a}{۲^۲} = -۲a \\ f'_-(۲) = -۱۲ + ۶ = -۶ \end{cases} \Rightarrow -۲a = -۶ \Rightarrow a = ۳ \quad , \quad b = -۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۷ گزینه ۲

$$f(x) = x\sqrt[۳]{\frac{۳x + ۱}{x + ۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{\frac{۳x + ۱}{x + ۲}} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۳(x + ۲) - (۳x + ۱)}{(x + ۲)^۲} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۳x + ۱}{x + ۲})^۲}} \times x$$

$$= \sqrt[۳]{\frac{۳x + ۱}{x + ۲}} + \frac{۵x}{۳(x + ۲)^۲ \sqrt[۳]{(\frac{۳x + ۱}{x + ۲})^۲}} \xrightarrow{x=-۳} ۲ - \frac{۵}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۱۸ گزینه ۴

می‌دانیم: $(fog(x))' = g'(x)\,f'(g(x))$

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}}{\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}} = \frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{-۲ \times \frac{۳}{\sqrt{۸}}}{۳\sqrt[۳]{(\frac{۹}{۸}-۱)^۴}} = \frac{\frac{-۶}{\sqrt{۸}}}{۳ \times \frac{۱}{۱۶}} = \frac{-۶ \times ۱۶}{۳\sqrt{۸}} = \frac{-۱۶}{\sqrt{۲}} = -۸\sqrt{۲}$$

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۹}{۸}-۱}} = ۲$$

حال باید $f'(۲)$ را حساب کنیم. در همسایگی $x = ۲$ حاصل براکت ۴ می‌شود.

$$f(x) = ۱۶x^۲ + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۳۲x \Rightarrow f'(۲) = ۶۴$$

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = -۸\sqrt{۲} \times ۶۴ = (-۱۲۸\sqrt{۲}) \times ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۹ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + ۵x + b & ; x \le ۲ \\ ۲ax + ۵ & ; x > ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲ax + ۵ & ; x \le ۲ \\ ۲a & ; x > ۲ \end{cases}$$

$$f'_+(۲) = f'_-(۲) \Rightarrow ۴a + ۵ = ۲a \Rightarrow a = \frac{-۵}{۲}$$

$$f(۲) = \lim_{x \to ۲} f(x) \Rightarrow ۴a + ۱۰ + b = ۴a + ۵ \Rightarrow b = -۵$$

$$a + b = \frac{-۵}{۲} - ۵ = \frac{-۱۵}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۲۰ گزینه ۴

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}\Rightarrow g'(x)=\frac{۰-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲-۱}}}{x^۲-۱}=\frac{-x}{(x^۲-۱)\sqrt{x^۲-۱}}$$

$$g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{\frac{-\sqrt{۵}}{۲}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}}=-۴\sqrt{۵}$$

در حالتی که f' وجود داشته باشد، داریم:

$$f(x)=(x[x])^۳\Rightarrow f'(x)=۳(x[x])^۲[x]$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$x\to(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-\Rightarrow g(x)=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۵}{۴}^- -۱}}=\frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱}{۴})^-}}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲})^-}=۲^+$$

$$y=(fog)(x)\Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$y'((\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)=g'(\frac{\sqrt{۵}}{۲})f'(g(\frac{\sqrt{۵}}{۲})^-)=(-۴\sqrt{۵})f'(۲^+)=(-۴\sqrt{۵})\times۳(۴)^۲\times۲=(-۴۸\sqrt{۵})(۸)$$

۲۱ گزینه ۴

راه‌حل اول: وارون تابع را حساب می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}\Rightarrow y\sqrt{x}-y=\sqrt{x}+۱\Rightarrow\sqrt{x}(y-۱)=y+۱\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{y+۱}{y-۱}$$

$$\Rightarrow x=(\frac{y+۱}{y-۱})^۲\Rightarrow f^{-۱}(x)=(\frac{x+۱}{x-۱})^۲=g(x)$$

$$g'(x)=۲(\frac{x+۱}{x-۱})\times\frac{-۲}{(x-۱)^۲}\Rightarrow g'(۲)=۲\times۳\times\frac{-۲}{۱}=-۱۲$$

راه‌حل دوم: اگر نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر $f^{-۱}$ باشد، آنگاه متناظر با آن نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر f خواهد بود.

$$۲=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}\Rightarrow۲\sqrt{x}-۲=\sqrt{x}+۱\Rightarrow x=۹$$

پس نقطهٔ $A(۹,۲)$ روی f قرار دارد.

$$f'(x)=\frac{-۲}{(\sqrt{x}-۱)^۲}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۹)=\frac{-۲}{۴}\times\frac{۱}{۶}=\frac{-۱}{۱۲}$$

پس شیب خط مماس بر $f^{-۱}$ در نقطهٔ $A'(۲,۹)$ برابر -۱۲ است.

Scanned with CamScanner

۲۲ گزینه ۴

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳=\frac{x^۲+۲x}{(x^۲-x)^۳}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{(x^۲+۲x)'(x^۲-x)^۳-((x^۲-x)^۳)'(x^۲+۲x)}{(x^۲-x)^۶}$$

$$=\frac{(۲x+۲)(x^۲-x)^۳-(۳(۲x-۱)(x^۲-x)^۲)(x^۲+۲x)}{(x^۲-x)^۶}$$

$$f'(۲)=\frac{۶\times ۸-۳\times ۳\times ۴\times ۸}{۶۴}=-\frac{۱۵}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۳ گزینه ۴

$$f(x)=\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)^{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{(۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲)}{(۳x+۵)^۲}\right)$$

$$\Rightarrow f'(-۲)=\frac{۲}{۳}\left(\frac{-۴-۴}{-۶+۵}\right)^{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۶(-۱)-۳(-۴-۴)}{(-۶+۵)^۲}\right)$$

$$=\frac{۲}{۳}(۸)^{-\frac{۱}{۳}}(-۶+۲۴)=\frac{۲\times ۱۸}{۳\sqrt[۳]{۸}}=۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۴ گزینه ۴

$$\begin{cases}f(۲)=\frac{۲+۲}{۲-۱}=۴\\ g(۲)=۴a+۲b\end{cases}\xrightarrow{f(۲)=g(۲)}۴a+۲b=۴\quad(۱)$$

$$\begin{cases}f'(x)=\frac{x-۱-(x+۲)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}\Rightarrow f'(۲)=-۳\\ g'(x)=۲ax+b\Rightarrow g'(۲)=۴a+b\end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=g'(۲)}۴a+b=-۳\quad(۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}۴a+۲b=۴\\ ۴a+b=-۳\end{cases}\Rightarrow b=۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۲۵ گزینه ۳

$\lim\limits_{x\to۴}\dfrac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ برابر $f'(۴)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to۴}\dfrac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ کافی است $f'(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)+۲(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(۵-۸)+۲(۱+۲)}{(۵-۸)^{۲}}=\frac{-\frac{۳}{۴}+۶}{۹}=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۶ گزینه ۲

زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که در $x=۲$ مشتق داشته باشد.

بنابراین باید f در $x=۲$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(۲)=\lim_{x\to۲^{-}}f(x)=\lim_{x\to۲^{+}}f(x)\Rightarrow -۴+۲a+b=۱\Rightarrow ۲a+b=۵\quad(۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{(x-۱)^{۲}} & ;x\geq ۲\\ -۲x+a & ;x<۲\end{cases}$$

$$f'_{-}(۲)=f'_{+}(۲)\Rightarrow -۴+a=-۱\Rightarrow a=۳$$

$$(۱):۶+b=۵\Rightarrow b=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۷ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=x+\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f'(۲)=۲+\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

آهنگ تغییر متوسط : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\dfrac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\dfrac{\frac{۳۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۳}=\dfrac{۱۱}{۴}$

اختلاف : $\dfrac{۱۱}{۴}-\dfrac{۹}{۴}=\dfrac{۲}{۴}=۰/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۸ گزینه ۳

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=-۵\\ f(۸)=\frac{۲۷}{۹}=۳\end{cases}\Rightarrow m=\frac{۳-(-۵)}{۸-۰}=۱$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x)=\frac{۴(x+۱)-(۴x-۵)}{(x+۱)^۲}\Rightarrow\frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱\Rightarrow(x+۱)^۲=۹$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۳\Rightarrow x=۲ & \text{ق.ق}\\ x+۱=-۳\Rightarrow x=-۴ & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x=۲$ بر منحنی مماس است:

$$f(۲)=\frac{۳}{۳}=۱\Rightarrow(۲,۱),m=۱$$

$$y-۱=۱(x-۲)\xrightarrow{x=۰}y=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۹ گزینه ۳

حاصل $f'(\frac{۱}{۴})$ را می‌خواهیم:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}}\frac{-\frac{۱}{۲}-۱(-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ سهمی $y = -mx^2 + mx + 1$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

۱) $0/3 + \sqrt{5}$ ۲) $0/2(1 + \sqrt{5})$

۳) $0/6 + 0/2\sqrt{5}$ ۴) $0/4(1 + \sqrt{5})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ از تقسیم اندازهٔ قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

۳) $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ معادلهٔ $\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2-x}+2}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۵ معادلهٔ $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2-x}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ در بازهٔ (a, b) عبارت $15x^2 + 73x + 14$ منفی و عبارت $|\frac{x-1}{2} - 1|$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{23}{3}$

۳) $\frac{4}{15}$ ۴) $\frac{67}{15}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۷ مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۱ < \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳$، کدام است؟

۱) $(۰,+\infty)$
۲) $(۴,+\infty)$
۳) $\mathbb{R}-[-۴,۰]$
۴) $\mathbb{R}-[-۴,-۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۲} > \frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}$، به‌صورت بازه، کدام است؟

۱) $(-۴,۲)\cup(۲,۳)$
۲) $(۲,۴)$
۳) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$
۴) $(-۱,۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹ در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع $y=(x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار تابع $y=۴x^۴$ است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱ پرنده‌ای فاصلهٔ یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت‌وبرگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۲/۵
۳) ۱۳/۵
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $۲y=x^۲$ و $x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۱۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۳ در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\left|۲x^۲-۴\right|$ در زیر خط $y=۲x$ واقع است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۴ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x+1}{2x-1} < 3 < 1$، کدام است؟

۱) $(0/6, 1/5)$
۲) $(0/8, 1/2)$
۳) $(1, 2)$
۴) $(0/8, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۵ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{2x-3}{x+1} < 3 < 1$ به کدام صورت است؟

۱) $\mathbb{R} - [-6, 4]$
۲) $\mathbb{R} - [-4, 6]$
۳) $x > 4$
۴) $x < -6$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ اگر $\sqrt{2a^2 + 4a} + 3a = 2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲/۵
۳) ۳/۵
۴) ۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۷ اگر $\sqrt{3a + 16} + 2a = 1$ باشد، عدد $4a + 9$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۱۵
۴) ۲۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۴

$$-mx^۲ + mx + ۱ = -m - x \Rightarrow mx^۲ - (۱+m)x - m - ۱ = ۰$$

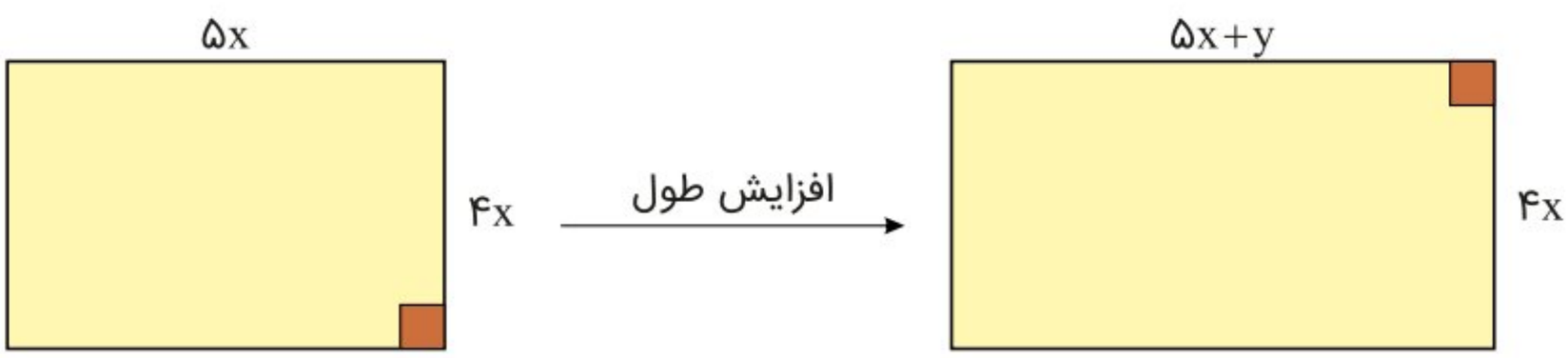
$$\Delta < ۰ \Rightarrow (۱+m)^۲ + ۴m(m+۱) < ۰ \Rightarrow (۱+m)(۱+۵m) < ۰$$

$$\Rightarrow -۱ < m < -\frac{۱}{۵} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} \text{هیچ مقدار}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

عدد طلایی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است.



$$\frac{۵x+y}{۴x} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow ۵x + y = ۲x(۱+\sqrt{۵})$$

پس طول مستطیل طلایی را می‌توان $۲x(۱+\sqrt{۵})$ در نظر گرفت:

$$\frac{S_۲}{S_۱} = \frac{(۴x)(۲x(۱+\sqrt{۵}))}{(۴x)(۵x)} = \frac{۲(۱+\sqrt{۵})}{۵} = ۰/۴(۱+\sqrt{۵})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۳

به $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ عدد طلایی می‌گوییم. در مستطیل به طول و عرض a و b، قطر برابر $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.

$$\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} \frac{a^۲+b^۲}{a^۲} = \frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱ + (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴} \Rightarrow (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۲+۲\sqrt{۵}}{۴}$$

$$\Rightarrow (\frac{a}{b})^۲ = \frac{۴}{۲+۲\sqrt{۵}} = \frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۴ گزینه ۱

در سمت چپ مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{۲\sqrt{۲-x}}{-x-۲}=\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}$$

با طرفین وسطین داریم:

$$۱۰(۲-x)=(۲-x)(-x-۲)$$

$x-۲$ را خط می‌زنیم و جواب $x=۲$ حاصل می‌شود، اما چون ریشهٔ مخرج معادلهٔ اولیه است آن را نمی‌پذیریم.

$$-x-۲=۱۰\Rightarrow x=-۱۲$$

هیچ جواب مثبتی در کار نیست.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۵ گزینه ۴

دامنهٔ معادله فقط $x=۲$ است، بنابراین جواب معادله یا $x=۲$ است و یا اینکه جواب حقیقی ندارد. $x=۲$ را امتحان می‌کنیم:

$$x=۲\Rightarrow \sqrt{۴-۳}=\sqrt{۲+۰}-\sqrt{۲-۲}\Rightarrow ۱=\sqrt{۲}$$

پس $x=۲$ جواب معادله نیست و درنتیجه معادله جواب حقیقی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۱

$$۱۵x^{۲}+۷۳x+۱۴<۰\Rightarrow (۵x+۱)(۳x+۱۴)<۰\Rightarrow \frac{-۱۴}{۳}<x<\frac{-۱}{۵}\quad (۱)$$

$$|\frac{x-۱}{۲}-۱|>۳\Rightarrow |\frac{x-۳}{۲}|>۳\Rightarrow \begin{cases}\frac{x-۳}{۲}>۳\\ \text{یا}\\ \frac{x-۳}{۲}<-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x>۹\\ \text{یا}\\ x<-۳\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-۳)\cup(۹,+\infty)\quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر است با:

$$-\frac{۱۴}{۳}<x<-۳\Rightarrow \max(b-a)=\frac{۱۴}{۳}-۳=\frac{۵}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۷ گزینه ۳

$$-۱ < \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱) -۱ < \frac{۲x-۱}{x+۱} \\ ۲) \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \end{cases}$$

هر دو معادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۱) \frac{۲x-۱}{x+۱} > -۱ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱} + ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱+x+۱}{x+۱} > ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{۳x}{x+۱}}_{p(x)} > ۰$$

x	-∞		-۱		۰		+∞
p(x)		+ ج	ت‌ن |	−	۰	+ ج	

$$\Rightarrow x < -۱ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \quad (I)$$

$$۲) \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱-۳x-۳}{x+۱} < ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-۴}{x+۱}}_{q(x)} < ۰$$

x	-∞		-۴		-۱		+∞
q(x)		− ج	۰	+	ت‌ن |	− ج	

$$\Rightarrow x < -۴ \quad \text{یا} \quad x > -۱ \quad (II)$$

حال اشتراک دو جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} x < -۴ \ \text{یا} \ x > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-۴, ۰]$$

راه‌حل تستی: (عددگذاری)

حذف گزینهٔ "۴":

$$x = ۰ \Rightarrow -۱ < \frac{-۱}{۱} < ۳ \quad \times$$

حذف گزینه‌های "۱" و "۲" (عدد ۵- در این دو گزینه وجود ندارد):

$$x = -۵ \Rightarrow -۱ < \frac{-۱۱}{-۴} < ۳ \Rightarrow -۱ < \frac{۱۱}{۴} < ۳ \ \checkmark$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۸ گزینه ۳

راه‌حل تستی:

$$x = ۳ \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} \frac{۱۳}{۴} > ۳ \quad ✓$$

$x = ۳$ در نامعادله صدق می‌کند، پس گزینه‌های ۱ و ۴ حذف می‌شوند.

$$x = ۰ \xrightarrow{\text{جایگذاری در نامعادله}} ۴ > ۰ \Rightarrow \text{گزینهٔ ۲ هم حذف می‌شود}$$

راه‌حل تشریحی:

$$\frac{۷x - ۸}{(x-۲)(x+۱)} - \frac{x}{x-۲} > ۰ \Rightarrow \frac{(۷x-۸) - x(x+۱)}{(x-۲)(x+۱)} > ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-x^۲ + ۶x - ۸}{(x-۲)(x+۱)} = \frac{-(x-۲)(x-۴)}{(x-۲)(x+۱)} = -\frac{x-۴}{x+۱} > ۰$$

x		-۱		۲		۴	
$-\frac{x-۴}{x+۱}$	$-$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$-$

$$\Rightarrow x \in (-۱, ۲) \cup (۲, ۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۲

نمودار $y = (x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار $y = ۴x^۴$ قرار دارد، پس:

$$(x-۱)^۲ > ۴x^۴ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} |x-۱| > ۲x^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱)\, x-۱ > ۲x^۲ \\ \text{یا} \\ ۲)\, x-۱ < -۲x^۲ \end{cases}$$

دو نامعادلهٔ فوق را حل می‌کنیم:

$$۱)\ x-۱ > ۲x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - x + ۱ < ۰ \xrightarrow{a>۰, \Delta<۰} \text{غ‌ق‌ق}$$

$$۲)\, x-۱ < -۲x^۲ \Rightarrow \underbrace{۲x^۲ + x - ۱}_{p(x)} < ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ \Rightarrow x = -۱\ ,\ \frac{۱}{۲}$$

x	-∞		-۱		$\frac{۱}{۲}$		+∞
p(x)		+	۰	− (ج)	۰	+	

$$\Rightarrow x \in (-۱, \frac{۱}{۲})$$

برای اینکه $b-a$ بیشترین مقدار باشد باید $(a,b) = \left(-۱, \frac{۱}{۲}\right)$، درنتیجه:

$$b-a = \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ گزینه ۳

در مسیر رفت و برگشت، به خاطر حرکت آب رودخانه به اندازهٔ سرعت آب (v) از سرعت قایق کم و به آن اضافه می‌شود، پس زمان رفت $\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v}$ و زمان برگشت $\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v}$ است و اختلاف آن‌ها باید ۵ باشد.

$$\frac{۱۲۰۰}{۱۰۰-v} - \frac{۱۲۰۰}{۱۰۰+v} = ۵ \xrightarrow{\div ۵} ۲۴۰(\frac{۱}{۱۰۰-v} - \frac{۱}{۱۰۰+v}) = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴۰ \times ۲v}{(۱۰۰-v)(۱۰۰+v)} = ۱ \Rightarrow ۱۰۰^۲ - v^۲ = ۴۸۰v$$

$$\Rightarrow v^۲ + ۴۸۰v - ۱۰۰۰۰ = ۰ \Rightarrow (v-۲۰)(v+۵۰۰) = ۰ \xrightarrow{v>۰} v = ۲۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۱۱ گزینه ۴

فرض کنید سرعت پرواز پرونده v باشد. در این صورت سرعت رفت $v+۵$ و سرعت برگشت $v-۵$ خواهد بود و داریم:

$$t_۱=\frac{x_۱}{v_۱}\Rightarrow t_۱=\frac{۱}{۵+v}$$
$$t_۲=\frac{x_۲}{v_۲}\Rightarrow t_۲=\frac{۱}{v-۵}$$

$$t_۱+t_۲=۹\ (\min)=\frac{۹}{۶۰}\ (h)\Rightarrow \frac{۹}{۶۰}=\frac{۱}{۵+v}+\frac{۱}{v-۵}$$

$$\frac{۳}{۲۰}=\frac{۱}{۵+v}+\frac{۱}{v-۵}\xrightarrow{\times ۲۰(v^۲-۲۵)}۳(v^۲-۲۵)=۲۰(v-۵)+۲۰(v+۵)$$
$$\Rightarrow ۳v^۲-۷۵=۲۰v-۱۰۰+۲۰v+۱۰۰$$
$$\Rightarrow ۳v^۲-۴۰v-۷۵=۰\Rightarrow (۳v+۵)(v-۱۵)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v=۱۵ & \checkmark \\ v=-\frac{۵}{۳} & \times \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۴

$$x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}\Rightarrow x^۲=y+۳+y-۳-۲\sqrt{y^۲-۹}$$
$$\xrightarrow{۲y=x^۲}\sqrt{y^۲-۹}=۰\xrightarrow{y\geq ۳}y=۳\Rightarrow x=\sqrt{۶}$$

نقطهٔ تلاقی $A(\sqrt{۶},۳)$ است:

$$|AO|=\sqrt{۶+۹}=\sqrt{۱۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱۳ گزینه ۱

نمودار $y = |۲x^۲ - ۴|$ در زیر خط $y = ۲x$ قرار دارد، بنابراین:

$$|۲x^۲ - ۴| < ۲x$$

$$\Rightarrow -۲x < ۲x^۲ - ۴ < ۲x \xrightarrow{\div ۲} -x < x^۲ - ۲ < x$$

سپس هرکدام از نامعادلات $x^۲ - ۲ < -x$ و $x^۲ - ۲ < x$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲ > -x \Rightarrow \underbrace{x^۲ + x - ۲}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
p(x)		+	۰	−	۰	+	
		ج				ج	

$$\Rightarrow x < -۲ \text{ یا } x > ۱ \quad (۱)$$

$$x^۲ - ۲ < x \Rightarrow \underbrace{x^۲ - x - ۲}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
q(x)		+	۰	−	۰	+	
				ج			

$$\Rightarrow -۱ < x < ۲ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow ۱ < x < ۲ \Rightarrow (a, b) = (۱, ۲)$$

بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$۲ - ۱ = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۴ گزینه ۴

$$۱ < \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱) \ \frac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \\ ۲) \ \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \end{cases}$$

ابتدا هردو نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۱) \ \frac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۲x+۱}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-x+۲}{۲x-۱}}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۲		$+\infty$
p(x)		−	ت.ن	+	ج	−	

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < x < ۲ \quad (I)$$

$$۲) \ \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۶x+۳}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-۵x+۴}{۲x-۱}}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۴}{۵}$		$+\infty$
q(x)		− ج	ت.ن	+	ج	−	

$$\Rightarrow x < \frac{۱}{۲} \text{ یا } x > \frac{۴}{۵} \quad (II)$$

حال اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} \frac{۴}{۵} < x < ۲ \Rightarrow x \in (۰/۸, ۲)$$

راه تستی (عددگذاری):

حذف گزینهٔ "۳":

$$x = ۱ \Rightarrow ۱ < \frac{۲}{۱} < ۳$$

حذف گزینهٔ "۱" و "۲":

$$x = ۱/۵ \Rightarrow ۱ < \frac{۲/۵}{۲} < ۳$$

Scanned with CamScanner

۱۵ گزینه ۱

دو طرف نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۳<۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-۶}{x+۱}}_{p(x)}<۰$$

x	$-\infty$	-۶	-۱	$+\infty$
$p(x)$	$-$	۰	$+$ ت.ن	$-$

$$p(x)<۰ \Rightarrow x<-۶ \text{ یا } x>-۱ \quad (۱)$$

$$\frac{۲x-۳}{x+۱}>۱ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱}-۱>۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{x-۴}{x+۱}}_{q(x)}>۰$$

x	$-\infty$	-۱	۴	$+\infty$
$q(x)$	$+$	ت.ن	$-$ ۰	$+$

$$q(x)>۰ \Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۴ \quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب مسئله است که اجتماع دو بازهٔ $(-\infty,-۶)$ و $(۴,+\infty)$ می‌باشد که به‌صورت $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ گزینه ۴

$$۳a+\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲ \Rightarrow \sqrt{۲a^۲+۴a}=۲-۳a$$

$$\begin{cases} ۲-۳a\geq ۰ \Rightarrow a\leq \frac{۲}{۳} \\ ۲a^۲+۴a\geq ۰ \Rightarrow ۲a(a+۲)\geq ۰ \Rightarrow a\in[۰,+\infty)\cup(-\infty,-۲] \end{cases} \xrightarrow{\cap} (-\infty,-۲]\cup[۰,\frac{۲}{۳}]$$

$$\sqrt{۲a^۲+۴a}=۲-۳a \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲a^۲+۴a=۴-۱۲a+۹a^۲ \Rightarrow ۷a^۲-۱۶a+۴=۰$$

$$\Delta=۱۶^۲-۴\times۷\times۴=۱۶(۱۶-۷)=۱۶\times۹$$

$$a=\frac{۱۶\pm۱۲}{۱۴} \Rightarrow \begin{cases} a_۱=\frac{۱۶+۱۲}{۱۴}=۲ \\ a_۲=\frac{۱۶-۱۲}{۱۴}=\frac{۲}{۷} \end{cases}$$

بنابراین $a=\frac{۲}{۷}$ قابل‌قبول است.

$$\frac{a+۱}{a}=\frac{\frac{۲}{۷}+۱}{\frac{۲}{۷}}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۱۷ گزینه ۱

$$\sqrt{۳a+۱۶}=۱-۲a \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۳a+۱۶=۱-۴a+۴a^۲$$

$$\Rightarrow ۴a^۲-۷a-۱۵=۰ \Rightarrow (۴a+۵)(a-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ a=\dfrac{-۵}{۴} \end{cases}$$

همچنین داریم:

$$\begin{cases} ۱-۲a\geq ۰ \Rightarrow a\leq \dfrac{۱}{۲} \\ ۳a+۱۶\geq ۰ \Rightarrow a\geq -\dfrac{۱۶}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\cap} a\in[-\frac{۱۶}{۳},\frac{۱}{۲}]$$

پس $a=۳$ در معادلهٔ اولیهٔ صدق نمی‌کند، بنابراین $a=-\frac{۵}{۴}$ است.

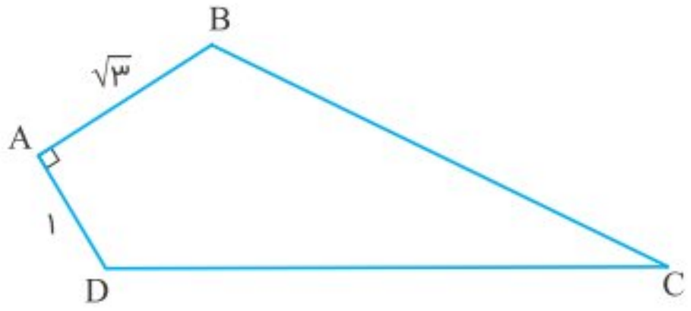
$$۴a+۹=۴(-\frac{۵}{۴})+۹=-۵+۹=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ در شکل زیر، از نقاط B و D، به ترتیب دو پاره‌خط موازی اضلاع AD و AB چنان رسم می‌کنیم که یکدیگر را در نقطهٔ E، درون چهارضلعی قطع کنند. اگر $C\hat{D}E = ۳۰^\circ$ و فاصلهٔ نقطهٔ E تا وسط ضلع BC برابر ۱/۵ باشد، طول ضلع DC کدام است؟



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، فاصلهٔ پای ارتفاع وارد بر وتر تا رأس C، برابر ۹ است. اگر طول وتر ۲۴ باشد، نسبت طول اضلاع قائمه، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

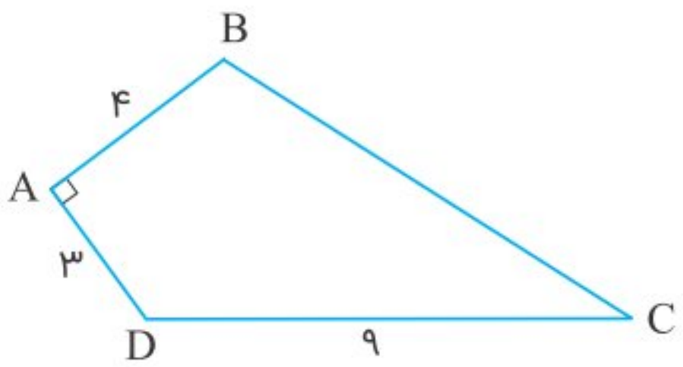
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ نقاط M و N، به ترتیب روی اضلاع AC و BC مثلث ABC، انتخاب شده‌اند. اگر $۵AM = ۳CM$ و مساحت مثلث ABC، ۲ برابر مساحت مثلث CMN باشد، مقدار $\frac{BN}{CN}$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵
۲) ۰/۷۵
۳) ۰/۸
۴) ۰/۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۴ در چهارضلعی $ABCD$، از نقاط B و D دو پاره‌خط به ترتیب موازی AD و AB طوری رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M (درون چهارضلعی) قطع کنند. اگر $B\hat{D}C = ۲B\hat{D}M$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ M از وسط ضلع BC چقدر است؟



۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۵ نقاط M و N، به ترتیب روی اضلاع AB و BC در مثلث ABC انتخاب شده‌اند. اگر $۲BN = ۳NC$ و مساحت مثلث ABC، ۳ برابر مساحت مثلث BMN باشد، مقدار $\frac{BM}{AM}$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵
۲) ۰/۸
۳) ۱/۲۵
۴) ۱/۴

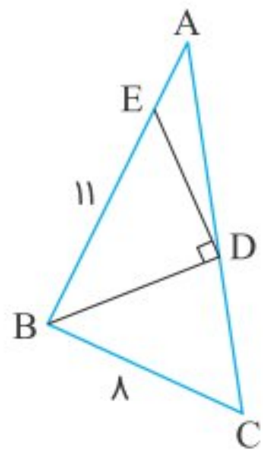
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، نقطهٔ H، نقطهٔ تلاقی ارتفاع وارد بر وتر است. اگر طول وتر ۲۰ و کمترین فاصلهٔ H از رأس‌های مجاورش ۴ باشد، نسبت طول اضلاع قائمهٔ این مثلث کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

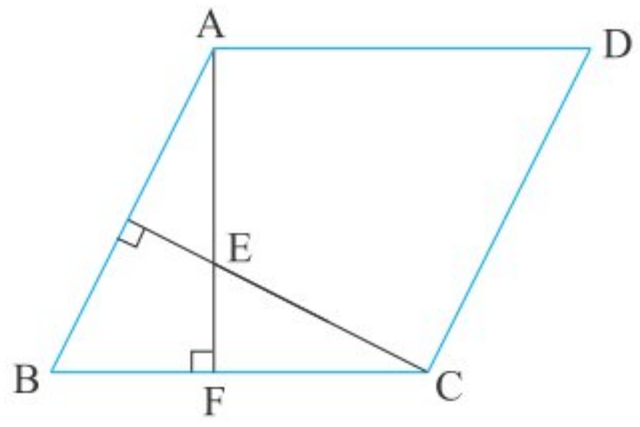
۷ در شکل زیر، BD نیمساز است. اگر در مثلث BDE ارتفاع وارد بر ضلع BE موازی BC باشد، طول AE کدام است؟



۱) ۶/۶
۲) ۵/۴
۳) ۳/۶
۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

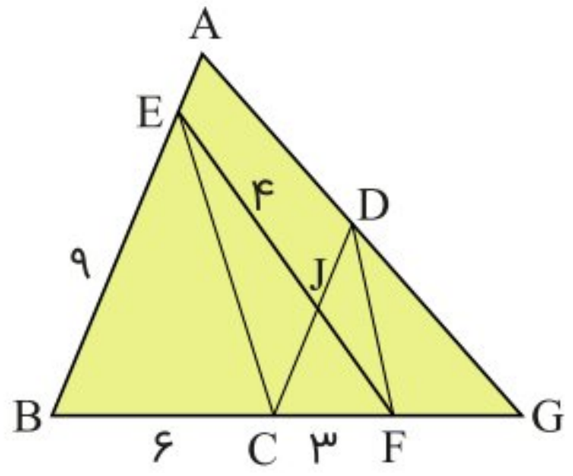
۸ در متوازی‌الاضلاع شکل زیر، $AD = ۱۴$، $BF = ۶$ و $AE = ۸$ است. اندازهٔ ارتفاع AF کدام است؟



۱) ۱۶
۲) ۱۴
۳) ۱۲
۴) ۱۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۹ در شکل زیر، $AB||CD$ و $EC||DF$ است. اندازه DF چقدر است؟

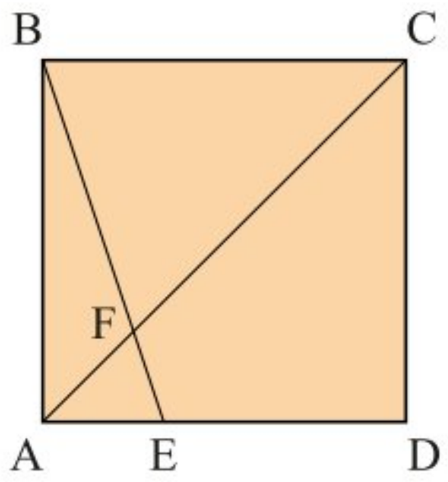


۱) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۴}$
۲) $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳۳}}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۱۰ در مربع شکل زیر، اندازه ED دو برابر AE است. طول EF چند برابر AF است؟



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

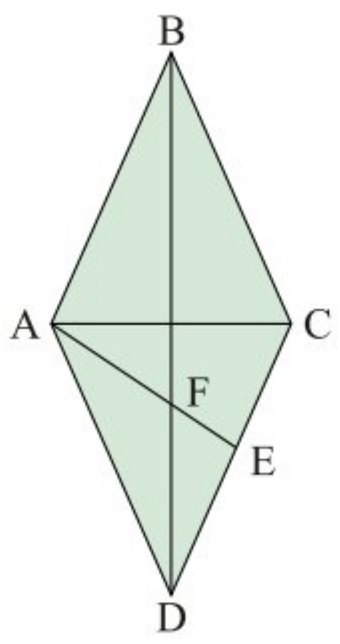
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

۱۱ در لوزی شکل زیر، E وسط ضلع CD است. اگر قطر بزرگ لوزی ۳ برابر قطر کوچک باشد، طول EF چندبرابر AB است؟



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

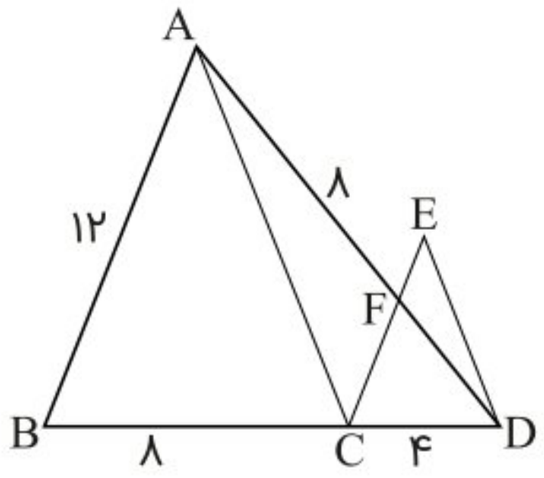
۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$

۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$

۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$

۱۲ در شکل زیر، $AB||CE$ و $AC||ED$ است. اندازهٔ ED چقدر است؟



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

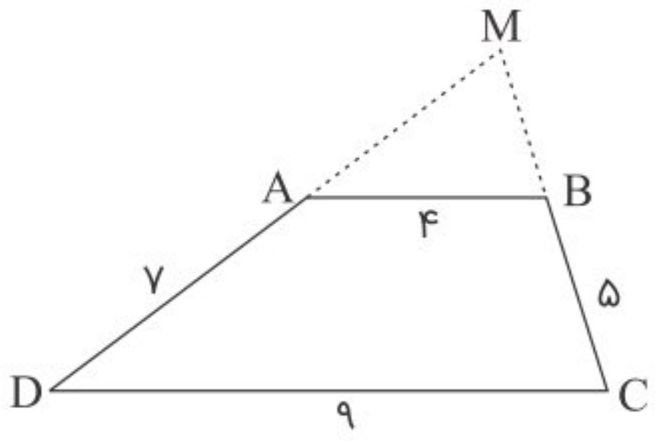
۱) $\sqrt{۲۹}$

۲) $\sqrt{۳۳}$

۳) $۲\sqrt{۷}$

۴) $۳\sqrt{۵}$

۱۳ اندازهٔ اضلاع ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB، کدام است؟



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱) ۱۳/۲

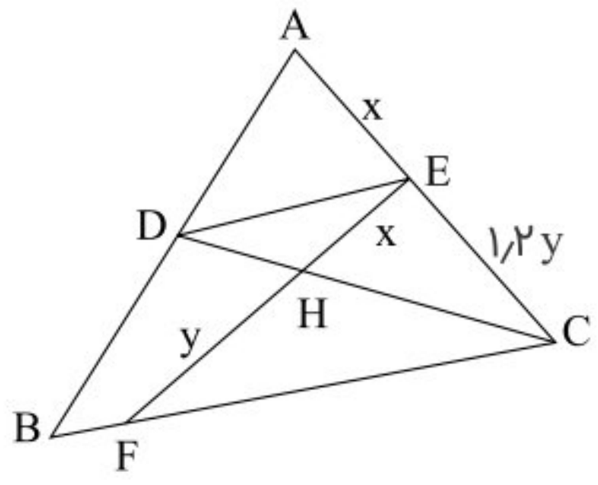
۲) ۱۳/۶

۳) ۱۴/۴

۴) ۱۴/۸

Scanned with CamScanner

۱۴ در شکل زیر، $DE||BC$ و $۳y = ۵x$ است. اگر $BF = ۳$ باشد، اندازهٔ BC کدام است؟



۱) ۶/۷۵

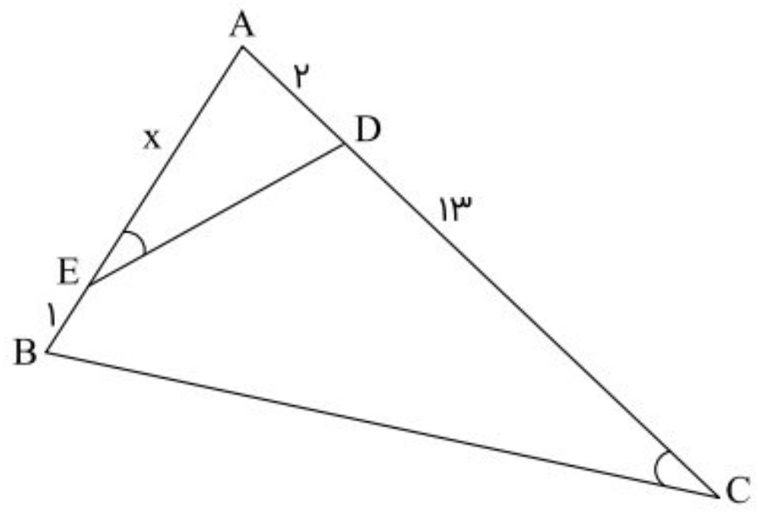
۲) ۶/۲۵

۳) ۵/۷۵

۴) ۵/۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۵ در شکل زیر، $A\hat{E}D = A\hat{C}B$ است. مقدار x کدام است؟



۱) ۷

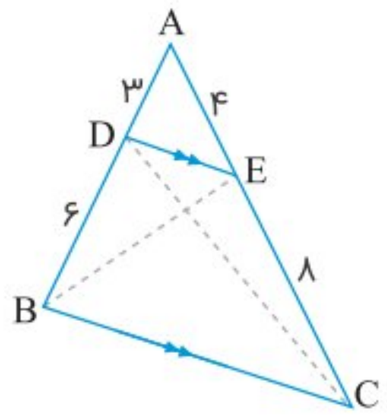
۲) ۶

۳) ۵

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۶ در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث BDE کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

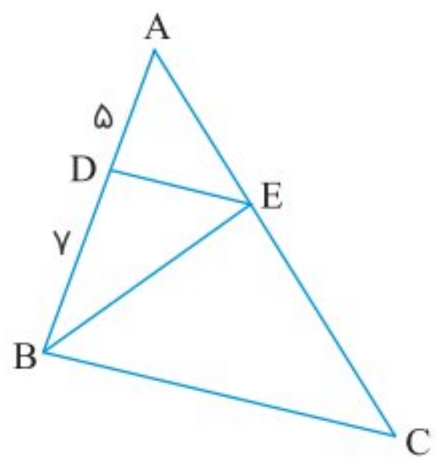
۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۷ در مثلث ABC، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟



۱) ۱/۵

۲) ۱/۷

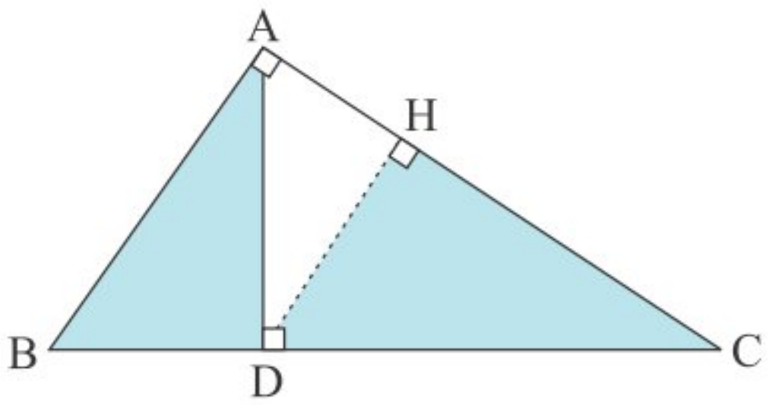
۳) ۲/۱

۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۸ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{۳}$ و $AC = ۲$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HCD و ABD، کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۷}$

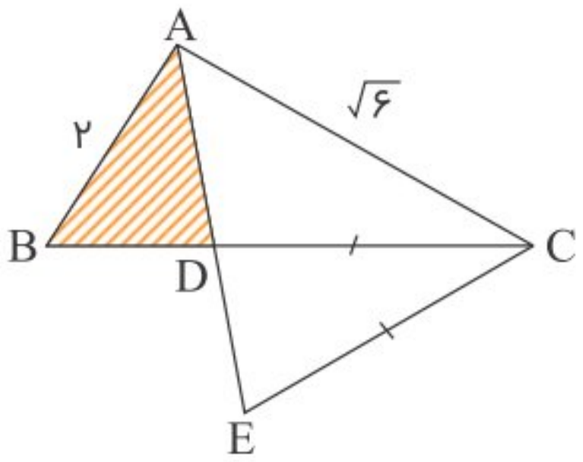
۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۱}$

۴) $\frac{۸}{۹}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۹ در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

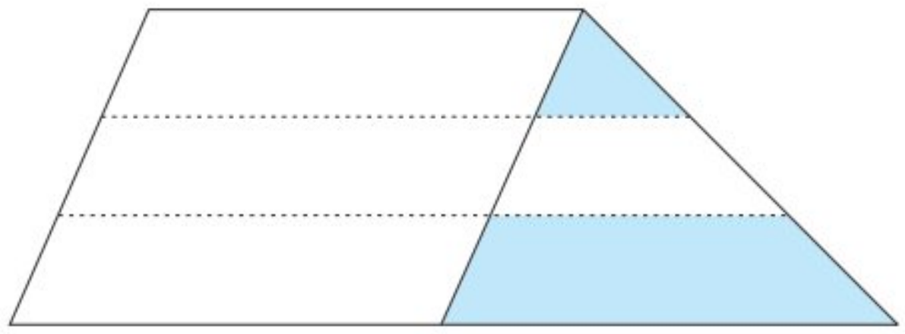
۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۰ یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره‌خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیهٔ رنگی، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۱ در مثلث ABC، اضلاع $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۷$ است. از رأس C خطی موازی میانهٔ AM رسم شده و امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کرده است. اندازهٔ BD، کدام است؟

۱) ۷/۵

۲) ۸

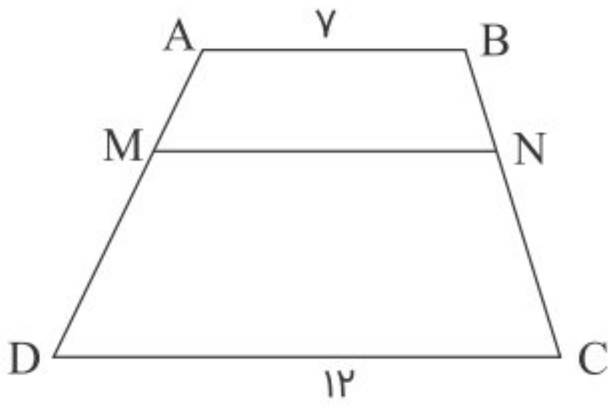
۳) ۸/۵

۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۲ در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{۲}{۳}$ است. اندازهٔ MN، کدام است؟



۱) ۸

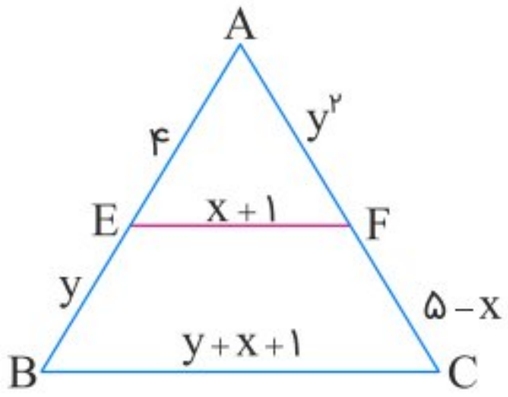
۲) ۸/۷۵

۳) ۹

۴) ۹/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y - ۲x$ کدام است؟



۱) -۴

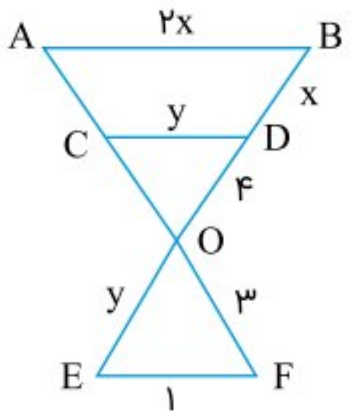
۲) -۳

۳) ۲

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۴ در شکل زیر AB، CD و EF موازی‌اند. طول پاره خط AC، کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$

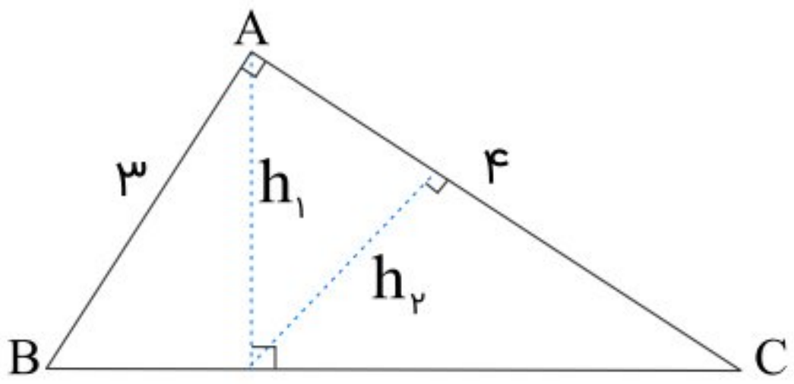
۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۵ در شکل زیر، $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_۲}{h_۱}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۶ در یک ذوزنقه، پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۷ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اضلاع قائم $AB = ۳\sqrt{۵}$ و $AC = ۶$، ارتفاع AH و میانهٔ AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC، چندبرابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲

۳) ۱۵ ۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۸ در مستطیل $ABCD$ به طول $AB = ۱۷$، از نقطهٔ A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = ۱۵$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

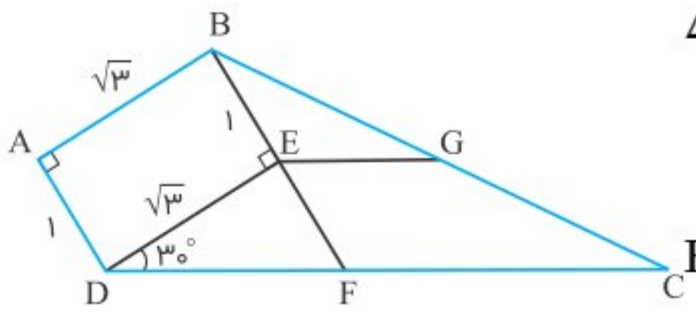
۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۳



$$\Delta EFD : \tan ۳۰^\circ = \frac{EF}{DE} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{EF}{\sqrt{۳}} \Rightarrow EF = ۱$$

در مثلث BFC، نقاط E و G، به‌ترتیب وسط اضلاع BF و BC است. بنابراین:

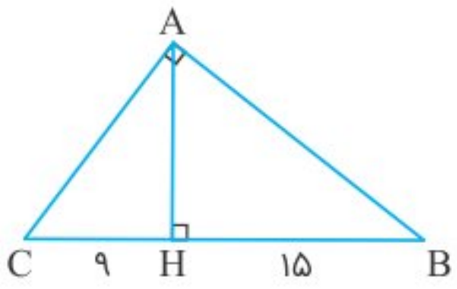
$$FC = ۲EG = ۲ \times ۱/۵ = ۳$$

$$\Delta DEF : DF^۲ = \sqrt{۳}^۲ + ۱^۲ = ۴ \Rightarrow DF = ۲$$

$$DC = DF + FC = ۲ + ۳ = ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲



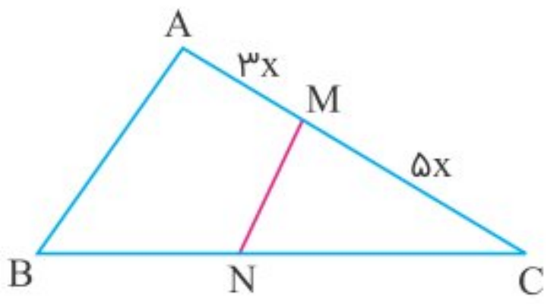
طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\frac{AB^۲}{AC^۲} = \frac{BH \times BC}{CH \times BC} \Rightarrow \frac{AB^۲}{AC^۲} = \frac{۱۵ \times ۲۴}{۹ \times ۲۴} = \frac{۱۵}{۹} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۳ گزینه ۱



$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = ۲ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲} \times (BN + NC) \times ۸x \times \sin \hat{C}}{\frac{۱}{۲} \times CN \times ۵x \times \sin \hat{C}} = ۲$$

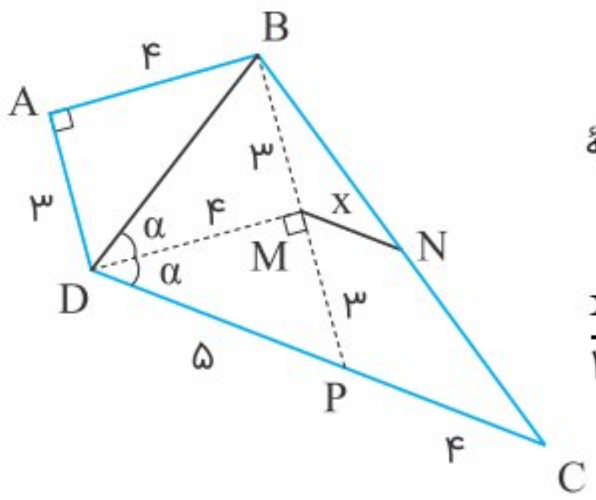
$$\Rightarrow \frac{BN + NC}{CN} = \frac{۵ \times ۲}{۸} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{BN}{CN} + ۱ = \frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{BN}{CN} = ۰/۲۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۴ گزینه ۲

در مثلث BDP زاویهٔ M قائمه است. ازطرفی DM نیمساز زاویهٔ BDP می‌باشد. بنابراین دو مثلث BDM و DMP هم‌نهشت هستند. درنتیجه $BD = DP = ۵$ و $PC = ۴$ است و M وسط BP قرار دارد.



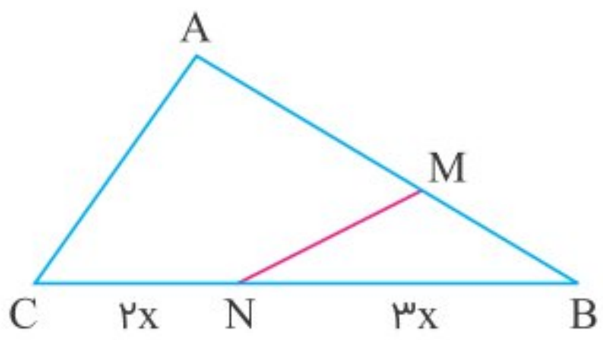
حال باتوجه‌به اینکه N نیز وسط BC قرار دارد، $MN \| PC$ است. بنابراین در مثلث BPC، تعمیم قضیهٔ تالس را اعمال می‌کنیم.

$$\frac{x}{۴} = \frac{۳}{۶} \Rightarrow x = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۵ گزینه ۳



$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNB}} = ۳ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}AB \times ۵x \times \sin B}{\frac{۱}{۲}MB \times (۳x) \times \sin B} = ۳$$

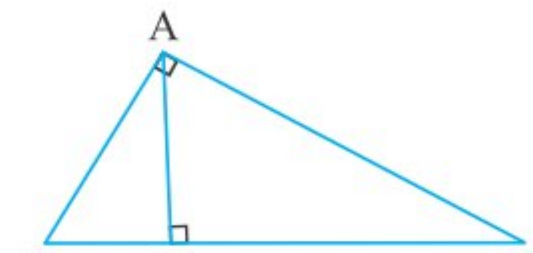
$$\Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{AM + MB}{MB} = \frac{۹}{۵} \Rightarrow \frac{AM}{MB} + ۱ = \frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{MB}{AM} = ۱/۲۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶ گزینه ۱



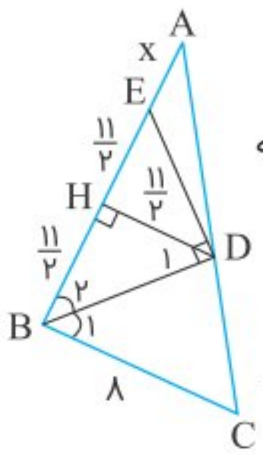
طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\frac{AB^۲}{AC^۲} = \frac{BH \times BC}{CH \times BC} \Rightarrow \frac{AB^۲}{AC^۲} = \frac{۱۶ \times ۲۰}{۴ \times ۲۰} = ۴ \Rightarrow \frac{AB}{AC} = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۷ گزینه ۱



عمود DH را رسم می‌کنیم. چون $DH||BC$ و همچنین BD نیمساز زاویه B است بنابراین $\hat{B} = ۹۰^\circ$ و درنتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = ۴۵^\circ$ خواهد بود، پس DH ارتفاع و میانه وارد بر وتر است و درنتیجه $DH = BH = EH = \frac{۱۱}{۲}$

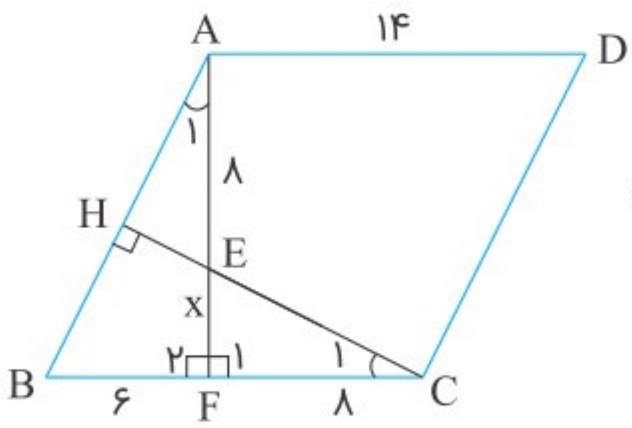
اکنون قضیه تالس را در مثلث ABC اعمال می‌کنیم.

$$\frac{\frac{۱۱}{۲}}{۸} = \frac{x + \frac{۱۱}{۲}}{x + ۱۱} \Rightarrow \frac{۱۱}{۸} = \frac{۲x + ۱۱}{x + ۱۱} \Rightarrow ۱۱x + ۱۲۱ = ۱۶x + ۸۸$$

$$\Rightarrow ۵x = ۳۳ \Rightarrow x = ۶/۶$$

۸ گزینه ۳

دو زاویهٔ $C_۱$ و $A_۱$ باهم برابرند. تشابه دو مثلث EFC و ABF را می‌نویسیم.



$$\begin{cases} \hat{C}_۱ = \hat{A}_۱ \\ F_۱ = F_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow \Delta EFC \sim \Delta ABF \\ \hat{E} = \hat{B} \end{cases}$$

نسبت تشابه عبارتند از:

$$\frac{CF}{AF} = \frac{EF}{BF} \Rightarrow \frac{۸}{۸ + x} = \frac{x}{۶} \Rightarrow x^۲ + ۸x = ۴۸$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۸x - ۴۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x + ۱۲) = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

$$AF = x + ۸ = ۱۲$$

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۴

راه اول:

مثلث‌های FDC و CEB متشابه هستند:

$$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{EC}} = \frac{۳}{۶} \Rightarrow \mathrm{EC} = ۲\mathrm{x}$$

مثلث‌های JDF و JEC متشابه هستند:

$$\frac{۲\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \frac{۴}{\mathrm{JF}} \Rightarrow \mathrm{JF} = ۲$$

مثلث‌های CJF و BEF متشابه هستند:

$$\frac{\mathrm{CJ}}{۹} = \frac{۳}{۹} \Rightarrow \mathrm{CJ} = ۳$$

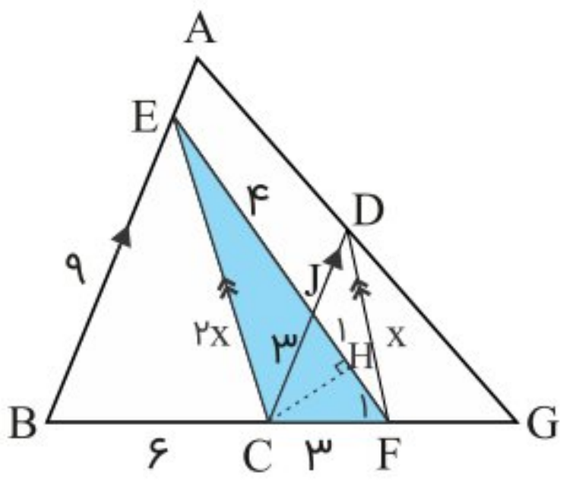
بنابراین مثلث CJF متساوی‌الساقین است و CH ارتفاع وارد بر IF می‌باشد. بنابراین $\mathrm{JH} = ۱$ و درنتیجه:

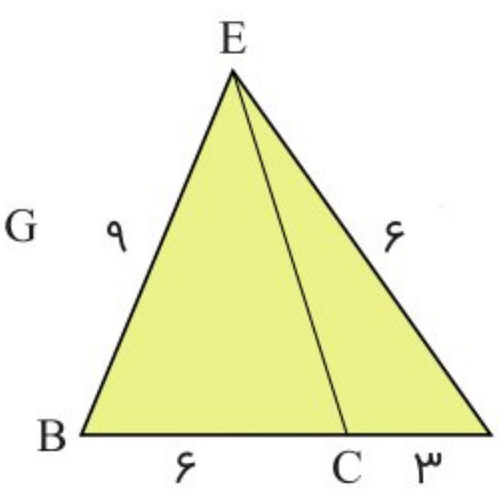
$$\mathrm{CH} = \sqrt{۹ - ۱} = ۲\sqrt{۲}$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ECH داریم:

$$(۲\mathrm{x})^۲ = ۲۵ + ۸ \Rightarrow \mathrm{x}^۲ = \frac{۳۳}{۴} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$$

راه دوم:





$$\mathrm{B\overset{\Delta}{C}E} \sim \mathrm{C\overset{\Delta}{F}D} \ , \ \mathrm{k} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \mathrm{DF} = \frac{۱}{۲}\mathrm{CE}$$

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{FJ}}{\mathrm{JE}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \mathrm{FJ} = \frac{۱}{۲} \times ۴ = ۲$$

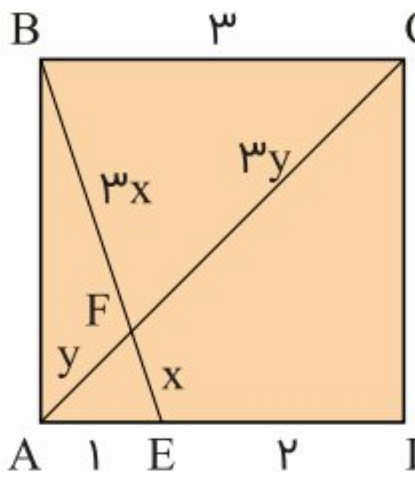
به کمک قضیه استوارت: (ویژهٔ دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی)

$$\mathrm{CE}^۲ = \frac{۶ \times ۳۶ + ۳ \times ۸۱}{۹} - ۳ \times ۶ = ۳۳ \Rightarrow \mathrm{CE} = \sqrt{۳۳}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{DF} = \frac{۱}{۲}\mathrm{CE}} \mathrm{DF} = \frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$$

Scanned with CamScanner

۱۰ گزینه ۱



$$\frac{AE}{AD}=\frac{۱}{۳}=\frac{AE}{BC}=\frac{AF}{FC}=\frac{EF}{FB}$$

$$\frac{EF}{AF}=\frac{x}{y}=\frac{BE}{AC}=\frac{۴x}{۴y}$$

$$BE^۲=۹+۱=۱۰\Rightarrow BE=\sqrt{۱۰}$$

$$AC^۲=۹+۹=۱۸\Rightarrow AC=۳\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AF}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

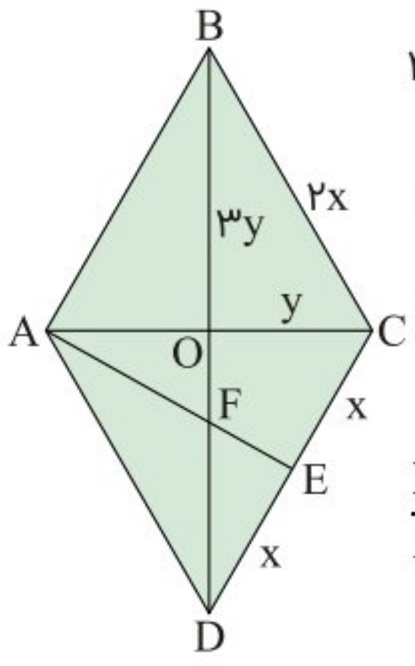
۱۱ گزینه ۱

$$(BC)^۲=(۲x)^۲=y^۲+۹y^۲=۱۰y^۲\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}y$$

در هر مثلث برای طول میانه m_a با اضلاع a، b و c داریم: $۲m_a{}^۲+\frac{a^۲}{۲}=b^۲+c^۲$

میانه‌ها به نسبت ۱ به ۲ یکدیگر را قطع می‌کنند. در مثلث ACD، AE و DO میانه هستند، پس یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند. بنابراین:

$$EF=\frac{۱}{۳}AE$$



$$۲AE^۲+\frac{DC^۲}{۲}=AC^۲+AD^۲\Rightarrow ۲AE^۲+\frac{۴x^۲}{۲}=۴y^۲+۴x^۲$$

$$\Rightarrow ۲AE^۲=۴y^۲+۲x^۲\xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}y}۲AE^۲=۴y^۲+۵y^۲=۹y^۲$$

$$\Rightarrow AE=\frac{۳}{\sqrt{۲}}y\xrightarrow{EF=\frac{۱}{۳}AE}EF=\frac{۱}{\sqrt{۲}}y$$

$$\frac{EF}{AB}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲}}y}{۲x}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲}}y}{۲\times\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}y}=\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$$

Scanned with CamScanner

۱۲ گزینه ۳

$$CF \,||AB : \frac{CF}{۱۲} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{DF}{DF + ۸} \Rightarrow CF = ۴ , DF = ۴$$

پس مثلث‌های ABD و FCD متساوی‌الاضلاع هستند.

$$AC^{۲} = AB^{۲} + CB^{۲} - ۲AB.CB.\cos ۶۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow AC^{۲} = ۱۲^{۲} + ۸^{۲} - ۲ \times ۱۲ \times ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۱۱۲ \Rightarrow AC = ۴\sqrt{۷}$$

$$\overset{\Delta}{ACF} \sim \overset{\Delta}{DFE} \Rightarrow \frac{ED}{AC} = \frac{FD}{AF} \Rightarrow \frac{ED}{۴\sqrt{۷}} = \frac{۴}{۸} \Rightarrow ED = ۲\sqrt{۷}$$

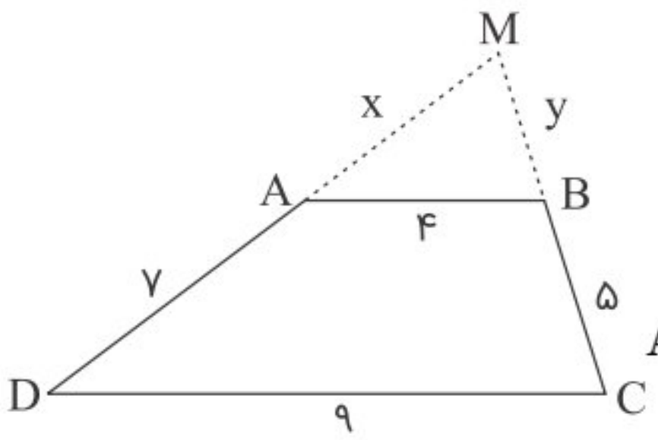
نکته (قضیهٔ کسینوس‌ها): در مثلث دلخواه ABC داریم:

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos\hat{A} \ , \ \ b^{۲} = a^{۲} + c^{۲} - ۲ac\cos\hat{B} \ , \ \ c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos\hat{C}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۳ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقهٔ $ABCD$، دو قاعدهٔ AB و DC باهم موازی هستند، بنابراین طبق قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، دو مثلث AMB و MDC متشابه هستند.



بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{AMB} \sim \overset{\Delta}{MDC} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x + ۷} = \frac{y}{y + ۵} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x + ۷} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x = ۴x + ۲۸ \Rightarrow ۵x = ۲۸ \Rightarrow x = \frac{۲۸}{۵} \\ \frac{y}{y + ۵} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y = ۴y + ۲۰ \Rightarrow ۵y = ۲۰ \Rightarrow y = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \end{cases}$$

حال محیط را به دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{AMB} \text{ محیط} = x + y + ۴ = \frac{۲۸}{۵} + ۴ + ۴ = ۸ + \frac{۲۸}{۵} = \frac{۴۰ + ۲۸}{۵} = \frac{۶۸}{۵} = ۱۳/۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۴ گزینه ۱

$$۳y = ۵x \Rightarrow y = \frac{۵}{۳}x$$

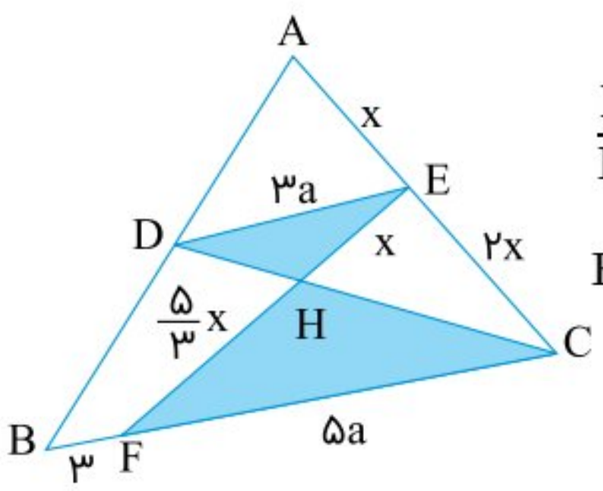
$$EC = ۱/۲y = \frac{۱۲}{۱۰} \times \frac{۵}{۳}x = ۲x$$

$$FH = y = \frac{۵}{۳}x$$

دو مثلث DHE و HFC با هم متشابه‌اند، پس:

$$\frac{FH}{HE} = \frac{FC}{DE} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{DE}{FC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \begin{cases} DE = ۳a \\ FC = ۵a \end{cases}$$

در مثلث ABC قضیهٔ تالس را اعمال می‌کنیم:



$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{۳a}{۳ + ۵a} = \frac{x}{۳x} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۹a = ۳ + ۵a \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

$$BC = ۳ + ۵a = ۳ + ۵ \times \frac{۳}{۴} = ۳ + \frac{۱۵}{۴} = ۳ + ۳/۷۵ = ۶/۷۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۵ گزینه ۳

دو مثلث AED و ABC به حالت دو زاویه متشابه‌اند، زیرا: $\hat{A} = \hat{A}\,,\ \hat{C} = A\hat{E}D$

حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۱۵} = \frac{۲}{x + ۱} \Rightarrow x^۲ + x = ۳۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۳۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (x + ۶)(x - ۵) = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

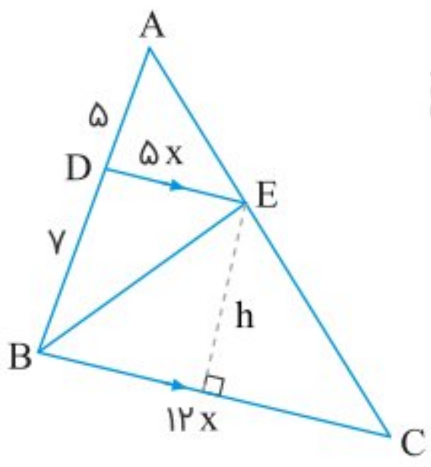
۱۶ گزینه ۴

قاعدهٔ هر دو مثلث DE است و ارتفاع هر دو یکسان است، پس مساحت‌های برابر دارند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۷ گزینه ۴

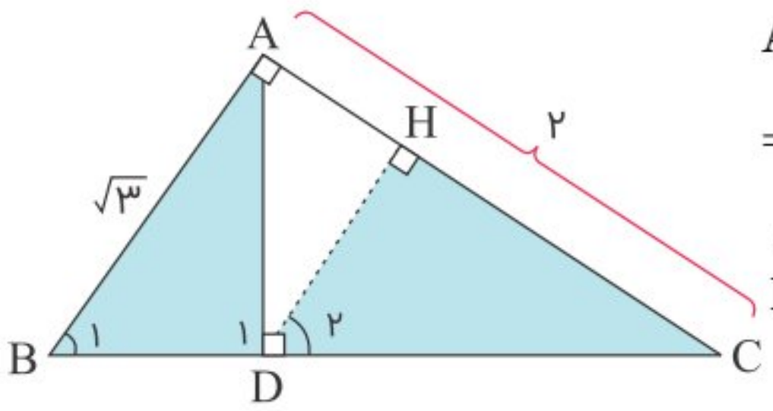


$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BCE}}}{S_{\overset{\Delta}{BDE}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times h \times BC}{\frac{۱}{۲} \times h \times DE} = \frac{BC}{DE} = \frac{۱۲x}{۵x} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۸ گزینه ۳

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:



$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

$$\Rightarrow ۳ + ۴ = BC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۷}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DH \text{ , مورب } BC \Rightarrow \widehat{D_۲} = \widehat{B_۱} \\ \hat{D}_۱ = \widehat{H} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{HCD}$$

طبق روابط طولی در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نتیجه می‌گیریم:

$$AC^۲ = BC \times CD$$

$$\Rightarrow ۴ = \sqrt{۷} \times CD \Rightarrow CD = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

بنابراین نسبت تشابه دو مثلث ABD و HCD برابر است با:

$$K = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۲۱}}$$

می‌دانیم که نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر است با مجذور نسبت تشابه، پس داریم:

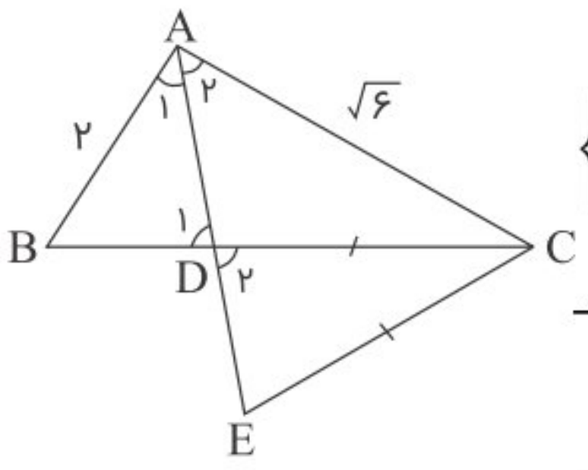
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{HCD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = K^۲ = \left(\frac{۴}{\sqrt{۲۱}}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۲۱}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۱۹ گزینه ۲

طبق شکل داریم:



$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ & \text{نیمساز AD} \\ \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ & \text{متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{DC=CE} \hat{D}_۱ = \hat{E}$$

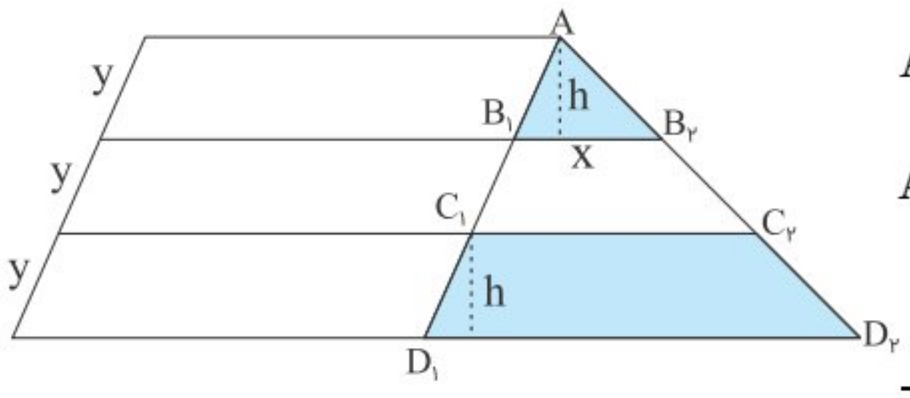
$$\xrightarrow{zz} \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{AEC} \qquad (k = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{\sqrt{۶}})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACE}}} = k^۲ = \left(\frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)^۲ = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۰ گزینه ۲

فرض کنید $B_۱B_۲ = x$ باشد. در این صورت داریم:



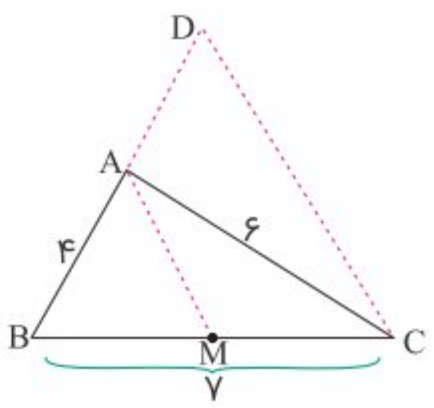
$$\overset{\Delta}{AC_۱C_۲} : \frac{AB_۱}{AC_۱} = \frac{x}{C_۱C_۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x}{C_۱C_۲} \Rightarrow C_۱C_۲ = ۲x$$

$$\overset{\Delta}{AD_۱D_۲} : \frac{AB_۱}{AD_۱} = \frac{x}{D_۱D_۲} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{D_۱D_۲} \Rightarrow D_۱D_۲ = ۳x$$

$$\frac{S_{AB_۱B_۲}}{S_{C_۱C_۲D_۲D_۱}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times x \times h}{\frac{۱}{۲}(۲x + ۳x)h} = \frac{۱}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۱ گزینه ۲



در مثلث BDC می‌دانیم $AM \| CD$ است. به کمک رابطهٔ تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

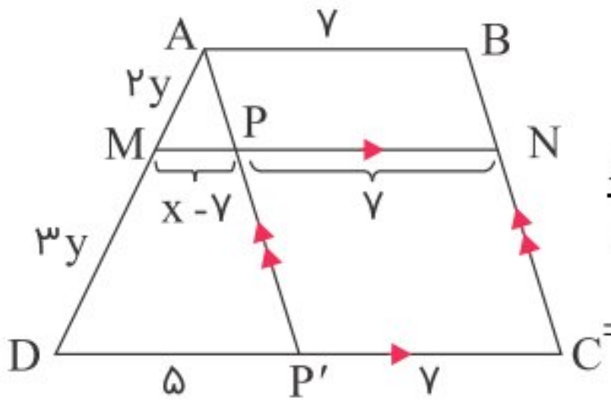
$$\frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{BD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow BD = ۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۲ گزینه ۳

در ذوزنقهٔ $ABCD$ از نقطهٔ A خطی موازی با خط BC رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با MN و DC به ترتیب P و P' می‌نامیم.



با استفاده از تعمیم تالس در مثلث ADP' داریم:

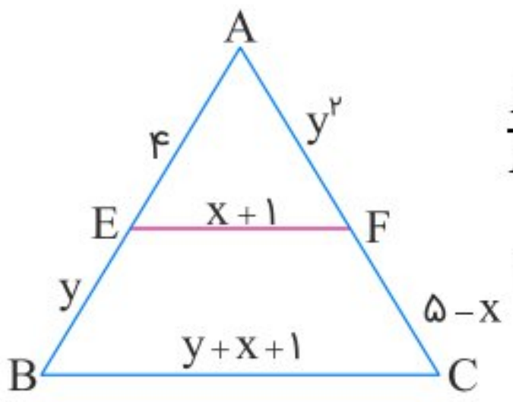
$$\frac{AM}{AD}=\frac{MP}{DP'}$$

$$\Rightarrow \frac{۲y}{۲y+۳y}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{x-۷}{۵}\Rightarrow x=۹=MN$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۳ گزینه ۱

چون $EF \parallel BC$، طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC}\Rightarrow \frac{x+۱}{y+x+۱}=\frac{۴}{y+۴}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{x+۱}{y}=\frac{۴}{y}\Rightarrow x+۱=۴\Rightarrow x=۳\quad (*)$$

$$\text{تالس}: \frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\xrightarrow{(*)}\frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۲}\Rightarrow y^۳=۸\Rightarrow y=۲\Rightarrow y-۲x=۲-۶=-۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۴ گزینه ۳

$$\Delta OCD\sim\Delta OEF\Rightarrow\frac{۳}{OC}=\frac{y}{۴}=\frac{۱}{y}\Rightarrow\begin{cases}y=۲\\OC=۶\end{cases}$$

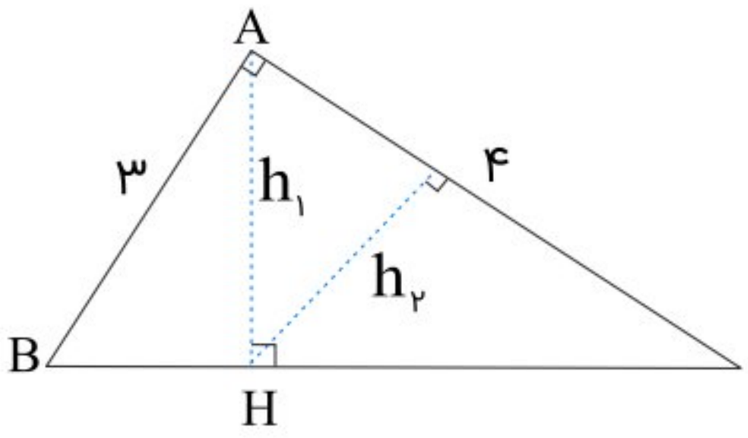
$$\Delta OAB:\frac{y}{۲x}=\frac{۴}{x+۴}\xrightarrow{y=۲}\frac{۲}{۲x}=\frac{۴}{x+۴}\Rightarrow ۴x=x+۴\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

$$\Delta OAB:\frac{y}{۲x}=\frac{OC}{OC+AC}\Rightarrow\frac{۲}{\frac{۸}{۳}}=\frac{۶}{۶+AC}\Rightarrow ۶+AC=۸\Rightarrow AC=۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۲۵ گزینه ۲



$$BC = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

راه‌حل اول:

$$\begin{cases} \hat{C} \text{ مشترک} \\ A\hat{H}C = \hat{A} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHC} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{AC}{BC} = \frac{۴}{۵}$$

راه‌حل دوم:

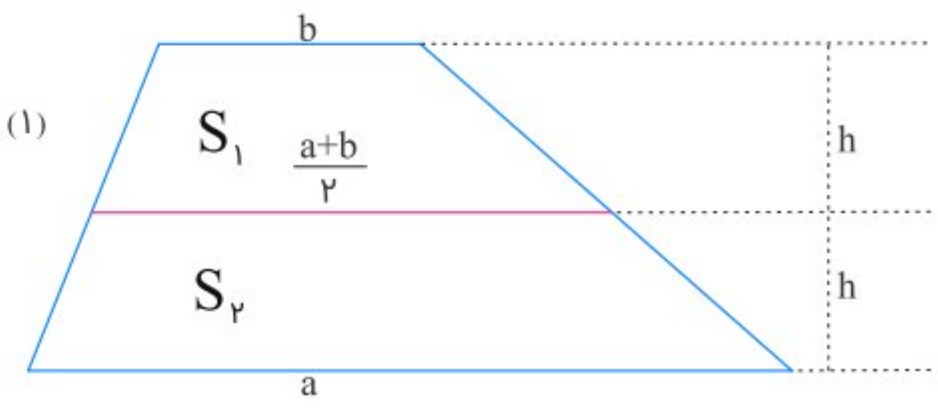
$$\overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} h_۱ \times BC = AB \times AC \Rightarrow ۵h_۱ = ۳ \times ۴ \Rightarrow h_۱ = \frac{۱۲}{۵} \\ AC^۲ = HC \times BC \Rightarrow ۱۶ = ۵HC \Rightarrow HC = \frac{۱۶}{۵} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: h_۲ \times AC = h_۱ \times HC \Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴} = \frac{۴}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۶ گزینه ۲

پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر است با میانگین طول دو قاعده. بنابراین طول پاره‌خط وسط برابر $\frac{a+b}{۲}$ است.



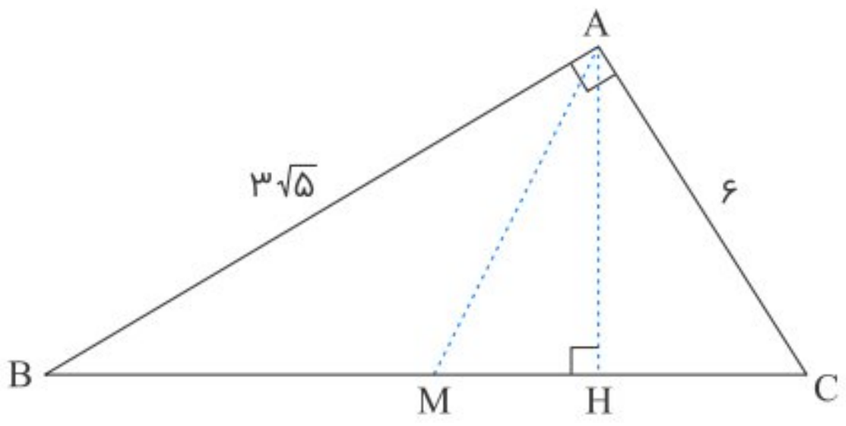
$$S_۲ = ۲S_۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}h(a + \frac{a+b}{۲}) = ۲ \times \frac{۱}{۲}h(b + \frac{a+b}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{۳a+b}{۲} = ۳b + a \Rightarrow ۳a + b = ۶b + ۲a \Rightarrow a = ۵b \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۲۷ گزینه ۴



$$BC^{۲} = AC^{۲} + AB^{۲} \Rightarrow BC = \sqrt{۶^{۲} + (۳\sqrt{۵})^{۲}} = ۹ \Rightarrow MC = MB = ۴/۵$$

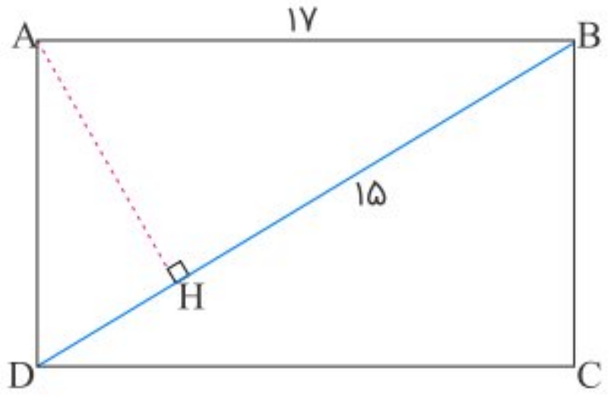
$$\overset{\Delta}{ABC} : AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۴۵ = BH \times ۹$$

$$\Rightarrow BH = ۵ \Rightarrow HM = BH - MB = ۵ - ۴/۵ = ۰/۵$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHM}}} = \frac{\frac{AH \times BC}{۲}}{\frac{AH \times HM}{۲}} = \frac{\frac{AH \times ۹}{۲}}{\frac{AH \times \frac{۱}{۲}}{۲}} = ۱۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۸ گزینه ۱



$$AB^{۲} = BH \times BD$$

$$۱۷^{۲} = ۱۵ \times BD \Rightarrow BD = \frac{۱۷^{۲}}{۱۵}$$

میزان اختلاف طول قطر از عدد ۱۹ را می‌خواهیم:

$$\frac{۱۷^{۲}}{۱۵} - ۱۹ = \frac{۱۷^{۲} - ۱۵ \times ۱۹}{۱۵} = \frac{۲۸۹ - ۲۸۵}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ نقطهٔ $(a, ۰)$ و مبدأ مختصات، کانون‌های یک بیضی بوده و $(-۳, ۰)$، یک نقطهٔ واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ باشد، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

۱) $۶\sqrt{۶}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۲ نقاط $F(۰, ۰)$ و $F'(a, ۰)$ کانون‌های یک بیضی و $A(۰, -۱)$ یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟ (با تغییر)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$

۳) $۵\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ خط $۳y + ۲x = ۹$ در نقطهٔ $(۰, ۳)$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۳x + ay = c$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) $۳/۵$ ۲) $-۳/۵$

۳) $۱/۵$ ۴) $-۱/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-۱, ۲/۵)$ در دایره $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۶x - ۱۰y + ۱ = ۰$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۷}$

۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ نقطه‌های M و N به ترتیب روی دو دایرهٔ متخارج $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = a$ و $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y + ۶a = ۰$ قرار دارند. اگر بیشترین فاصلهٔ M و N برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $۲/۵$ ۲) ۲

۳) $۱/۵$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۶ دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۳$ مفروض است. معادلهٔ دایره‌ای که با دایرهٔ قبلی مماس داخل بوده و از نقطهٔ $(۰, -۳)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایرهٔ اصلی برابر باشد، کدام است؟ (با تغییر)

۱) $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۳$
۲) $x^۲ + y^۲ - ۴y + ۳ = ۰$
۳) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۰$
۴) $x^۲ + y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ دو دایره $x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲y = ۲$، نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

۱) مماس بیرون
۲) متقاطع
۳) متخارج
۴) متداخل

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ طول وتری از دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۱$ که روی خط $۲y + x = a$ قرار دارد، برابر ۳ است. اختلاف مقادیر a چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳۵}$
۲) $\sqrt{۳۸}$
۳) $۳\sqrt{۶}$
۴) $۵\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ نقطهٔ $(۱۲, ۰-)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدأ مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟

۱) ۰/۶
۲) ۰/۸
۳) ۱/۴
۴) ۱/۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۰ دایره‌های $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۳$ متقاطع‌اند. معادلهٔ وتر مشترک این دو دایره کدام است؟

۱) $x = y$
۲) $x = ۱ + y$
۳) $x = -y$
۴) $x = ۱ - y$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۱ در یک بیضی به کانون‌های $(۱-, ۲)$ و $(۲, ۷)$، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) ۰/۶
۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۲ نقطهٔ $A(-۱, ۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x - ۳y + ۱ = ۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = ۲$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $۳ ،-۵$
۲) $۲ ،-۴$
۳) $-۱ \pm \sqrt{۲}$
۴) $-۱ \pm \sqrt{۳}$

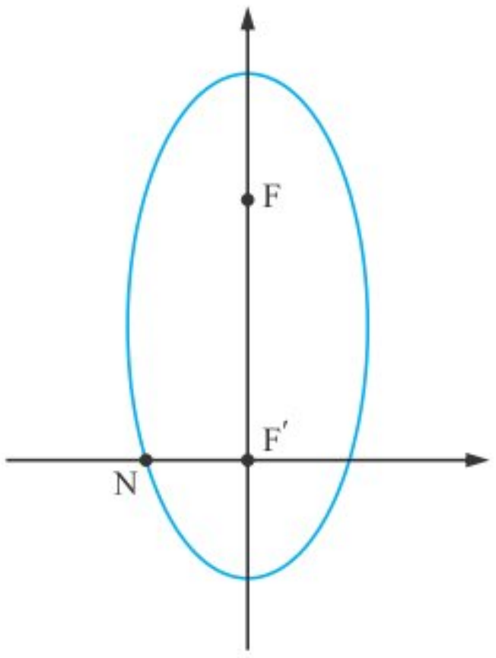
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

منبع:

۱ گزینه ۲

حروف داده‌شده را عوض می‌کنیم و کانون‌ها را $F(۰,x)$ و $F'(۰,۰)$ در نظر می‌گیریم. طبق دادهٔ مسئله، $N(-۳,۰)$ است. پس:



$$\frac{b^۲}{a} = |NF'| = ۳ \Rightarrow b^۲ = ۳a$$

$$FF' = ۲c = m \Rightarrow c = \frac{m}{۲}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow a = c\sqrt{۲}$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲c^۲ = ۳a + c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۳c\sqrt{۲} \Rightarrow c = ۳\sqrt{۲}$$

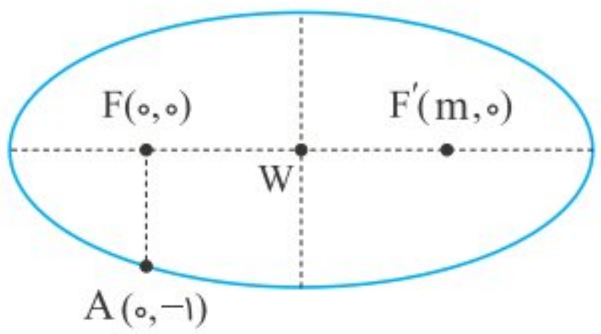
$$\Rightarrow a = ۶ \Rightarrow b^۲ = ۱۸ \Rightarrow b = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow ۲b = ۶\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۲ گزینه ۴

اسامی داده‌شده را تغییر داده‌ایم.



$$FA = \frac{b^۲}{a} = ۱ \Rightarrow b^۲ = a$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲} = \frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱ - \frac{b^۲}{a^۲} = \frac{۴}{۵} \xrightarrow{b^۲=a} ۱ - \frac{۱}{a} = \frac{۴}{۵}$$

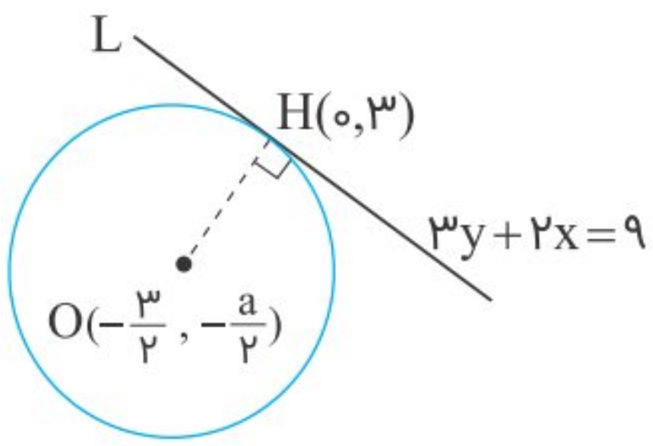
$$\Rightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow a = ۵$$

$$۲c = m \Rightarrow c = \frac{m}{۲} \Rightarrow \frac{\frac{m^۲}{۴}}{۲۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow m^۲ = ۵ \times ۱۶$$

$$\Rightarrow m = ۴\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۴



OH بر خط L عمود است.

$$\frac{-\frac{a}{۲} - ۳}{\frac{۳}{۲}} \times \frac{-۲}{۳} = -۱$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{۲} + ۳}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۲} + ۳ = \frac{۹}{۴} \xrightarrow{\times ۴}$$

$$۲a + ۱۲ = ۹ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲} = -۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۴ گزینه ۲

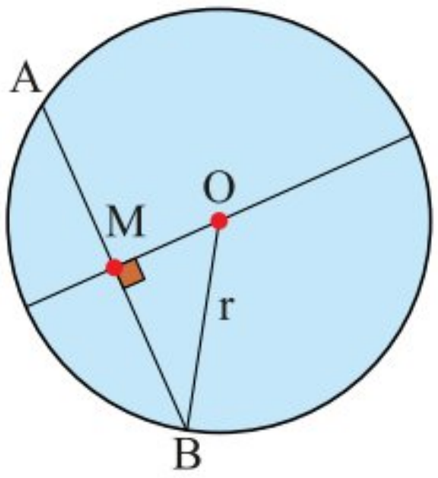
$$x^۲ + y^۲ - ۳x - ۵y + \frac{۱}{۲} = ۰$$

نقطه $(-۱, \frac{۵}{۲})$ را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم:

$$(-۱)^۲ + (\frac{۵}{۲})^۲ - ۳(-۱) - ۵(\frac{۵}{۲}) + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{۲۵}{۴} + ۳ - \frac{۲۵}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{-۷}{۴}$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = ۲\sqrt{\frac{۷}{۴}} = \sqrt{۷}$$

برای به دست آوردن طول کوتاه‌ترین وتر از روش دیگری نیز می‌توان استفاده کرد:



$$O(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}), M(-۱, \frac{۵}{۲}) \Rightarrow OM = \frac{۵}{۲}$$

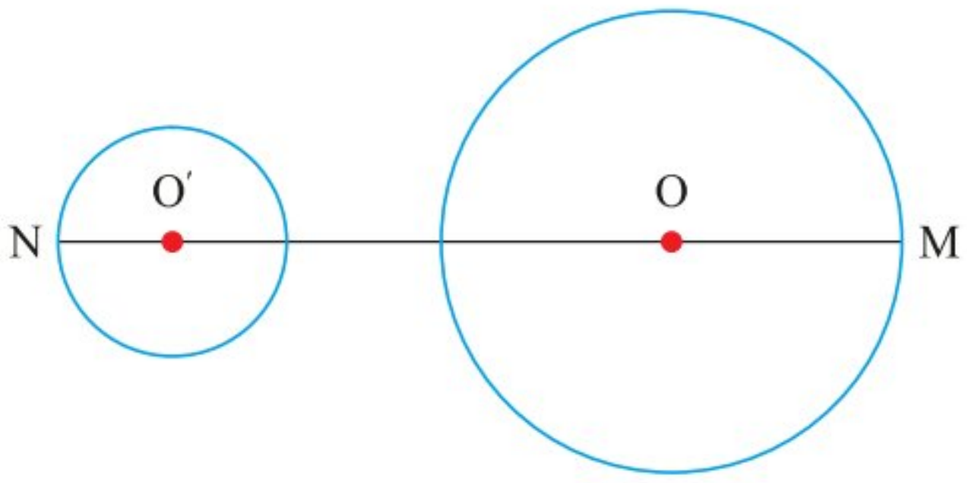
$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۹ + ۲۵ - ۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲} \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

$$\Rightarrow AB = ۲ \times \frac{\sqrt{۷}}{۲} = \sqrt{۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۵ گزینه ۲



$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y - a = ۰ \Rightarrow O(۱, -۱)\ ,\ r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ + ۴a} = \sqrt{۲ + a}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y + ۶a = ۰$$

$$\Rightarrow O'(-۲, ۳)\ ,\ r' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ - ۲۴a} = \sqrt{۱۳ - ۶a}$$

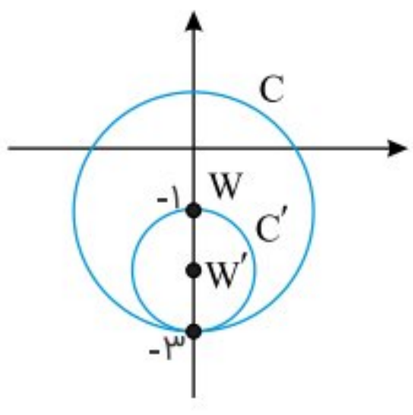
$$OO' = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

$$MN = ۵ + \sqrt{۲ + a} + \sqrt{۱۳ - ۶a} = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ گزینه ۴

$$C : x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow W(۰, -۱)\ ,\ r = ۲$$



درواقع چون دایرهٔ C از $(۰, -۳)$ عبور می‌کند، اگر دایرهٔ جدید بخواهد با دایرهٔ قبلی مماس داخل باشد و از این نقطه نیز بگذرد تنها حالت آن است که نقطهٔ تماس همین نقطه باشد. درنتیجه $W'(۰, -۲)$ و $r' = ۱$ خواهد بود.

$$C' : (x - ۰)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۷ گزینه ۲

دایرهٔ اول:

$$x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۵$$

$$O_۱(۲,-۱) \quad , \quad r_۱ = \sqrt{۵}$$

دایرهٔ دوم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۲ \Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۳$$

$$O_۲(۰,۱) \quad , \quad r_۲ = \sqrt{۳}$$

$$O_۱O_۲ = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow O_۱O_۲ \simeq ۲/۸$$

$$r_۱ + r_۲ \simeq ۳/۹$$

$$|r_۱ - r_۲| = ۰/۵$$

$$\Rightarrow ۰/۵ < O_۱O_۲ < ۳/۹$$

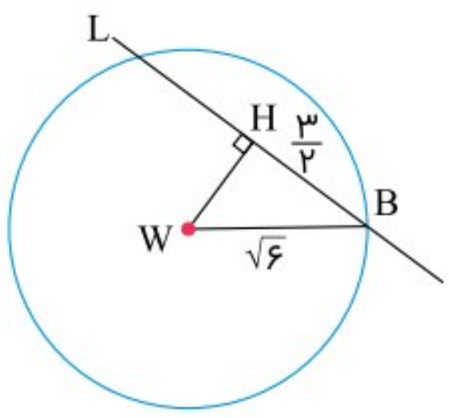
پس دو دایره متقاطع‌اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ گزینه ۴

مرکز و شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

$$W(۲,-۱) \quad , \quad r = \sqrt{۴+۱+۱} = \sqrt{۶}$$



$$|WH| = \frac{|-۲+۲-a|}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{|a|}{\sqrt{۵}}$$

$$\overset{\Delta}{WHB} : ۶ = \frac{۹}{۴} + \frac{a^۲}{۵} \Rightarrow \frac{a^۲}{۵} = \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow a^۲ = \frac{۷۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \\ a_۲ = -\frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \end{cases} \Rightarrow |a_۱ - a_۲| = ۵\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۲

$$\begin{cases} c = ۱۲ \\ ۲b = ۱۸ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵$$

$$\Rightarrow a = ۱۵ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۰ گزینه ۱

معادلهٔ گستردهٔ دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادلهٔ وتر مشترک به دست آید:

$$\left(x^۲ + y^۲ + ۲x - ۳\right) - \left(x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳\right) = ۰ \quad : \text{وتر مشترک}$$

$$\Rightarrow \text{وتر مشترک} : ۲x - ۲y = ۰ \Rightarrow \text{وتر مشترک} : x = y$$

معادلهٔ درجه اولی که از کم کردن معادلهٔ دو دایره به دست می‌آید، حتما معادلهٔ وتر مشترک است، چون هم یک معادلهٔ درجه اول است و هم (x, y) این خط در هر دو دایره صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۱ گزینه ۴

فاصلهٔ کانون‌های $F'(۲, -۱)$ و $F(۲, ۷)$ برابر $۲c$ است.

$$۲c = |FF'| = |۷ - (-۱)| = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

در بیضی رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.

$$a^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

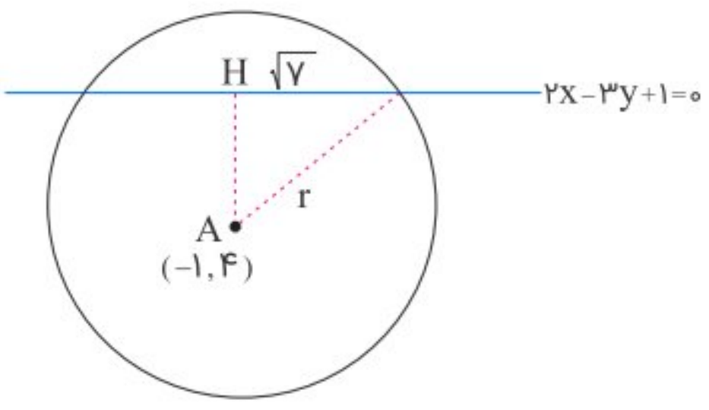
$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۱۲ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH = \frac{|۲(-۱) - ۳(۴) + ۱|}{\sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^۲ = AH^۲ + \sqrt{۷}^۲ \Rightarrow r^۲ = ۱۳ + ۷ = ۲۰$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x+۱)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲۰ \xrightarrow{y=۲} (x+۱)^۲ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۱۶$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۵ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Scanned with CamScanner

۱ نقطهٔ $A(-۵, -۱)$ یک رأس مثلثی است که یک ضلع آن روی خط $x - ۲y = ۱$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع، برابر فاصلهٔ رأس A از این خط بوده و نقطهٔ $(-۴, -۲)$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۴/۲
۳) ۶
۴) ۶/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ نقطهٔ $A(۴, ۰)$، یک رأس مثلثی است که دو رأس دیگر آن، روی خط $x - ۳y = ۱$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع، برابر فاصلهٔ رأس A از این خط بوده و نقطهٔ $(\frac{۷}{۲}, \frac{۱}{۲})$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیهٔ اول محورهای مختصات، کدام است؟

۱) $۰/۶\sqrt{۰/۶}$
۲) $۰/۹\sqrt{۰/۹}$
۳) ۱/۶۵
۴) ۱/۳۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

۳ نقاط $A(۲, ۰)$ و $C(۰, -۱)$ دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

۱) $(۰, \frac{۳}{۲})$
۲) $(\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲})$
۳) $(\frac{۳}{۴}, -\frac{۵}{۴})$
۴) $(\frac{۵}{۴}, \frac{۱}{۴})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ نقاط $A(-۱, ۴)$، $B(۳, ۱)$، $C(x, y)$ و $D(-۱ - x, y + ۳)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۱۳
۲) ۱۴
۳) ۱۵
۴) ۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ نقاط $A(x, y)$، $B(-۱ - x, y - ۳)$، $C(۰, -۳)$ و $D(-۴, ۰)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های A و B مجاور باشند، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۵/۵
۳) ۱۵
۴) ۱۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۶ دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادلهٔ $y - ax = ۱$ و $ay - x = a - ۱$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطهٔ $(۱, ۲)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) $۲/۵$
۲) $۳/۵$
۳) $\sqrt{۴۶}$
۴) $۲\sqrt{۳۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۷ نقاط B، C و $M(۳, ۲)$ روی خط $x + ۲y = ۷$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازهٔ میانهٔ AM برابر $۵\sqrt{۵}$ واحد و BC قاعدهٔ مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A، کدام است؟

۱) ۵
۲) -۲
۳) -۵
۴) -۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۸ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + ۲x = ۱۶$، $۲y - x = ۲$ و $y = ۰$ هستند. اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحهٔ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) ۵
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ شیب نیم‌خطی با نقطهٔ شروع $A(۲, ۴)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم، که نقطهٔ B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-۳, -۱)$ باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۱۸
۳) $۶\sqrt{۱۰}$
۴) $۳\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۰ سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB : y + ۲x = ۷$، $AC : ۴y - ۳x = ۱۷$ و $BC : ۲y - ۷x = -۱۹$ هستند. طول ارتفاع BH کدام است؟

۱) $۴/۴$
۲) ۳
۳) $۲/۵$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۱ طول ارتفاع AH در مثلثی با رأس‌های $A(۱, ۹)$، $B(۳, ۳)$ و $C(۷, ۱۱)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) $\sqrt{۱۰}$
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۲ مثلثی با رأس‌های $A(۱,۵)$، $B(۷,۳)$ و $C(۲,-۲)$، مفروض است. اندازهٔ ارتفاع AH در مثلث ABC، کدام است؟

۱) ۴
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۵
۴) $۴\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۱۳ نقطهٔ $H(۲,۱)$ را روی خط $۳x-y=۵$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با ارتفاع AH را روی خط $۳x-y=۵$ می‌سازیم، به‌طوری‌که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟ (با تغییر)

۱) $(\frac{۷}{۲},\frac{۱}{۲})$
۲) $(\frac{۱۳}{۲},\frac{-۱}{۲})$
۳) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$
۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱۱}{۶})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۴ سهمی $y=-x^۲+۲x+۱$ خط راست گذرا از نقطهٔ $(۱,۰)$ و با عرض از مبدأ -۱ را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ M، کدام مضرب $\sqrt{۲۶}$ است؟

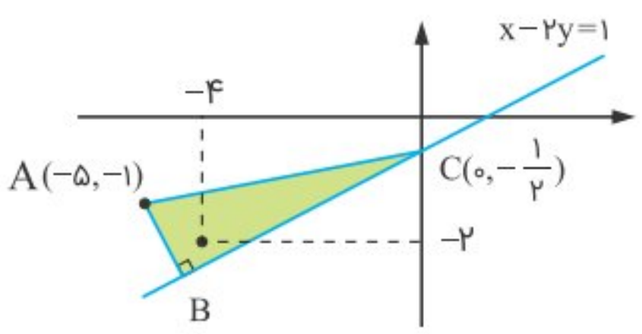
۱) ۲
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

Scanned with CamScanner

۱ گزینه ۲

باتوجه‌به توضیحات سؤال و باتوجه‌به اینکه نقطهٔ $(-۴,-۲)$ درون مثلث قرار دارد، شکل مطلوب، به‌صورت زیر است. همچنین پاره‌خط عمود از نقطهٔ A بر خط $x-۲y=۱$، یکی از اضلاع مثلث است.



معادلهٔ ارتفاع AB را می‌نویسیم:

$$AB: y+۱=-۲(x+۵) \Rightarrow y=-۲x-۱۱$$

$$AC=\sqrt{(۰+۵)^۲+(-\frac{۱}{۲}+۱)^۲}=\sqrt{۲۵+\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۰۱}}{۲}$$

$$AB=\frac{|-۵+۲-۱|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$BC=\sqrt{\frac{۱۰۱}{۴}-\frac{۱۶}{۵}}=\frac{۲۱}{۲\sqrt{۵}}$$

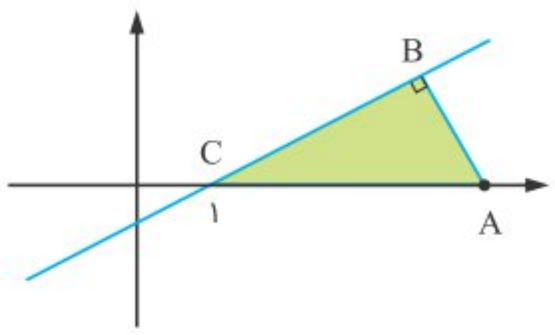
$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{\sqrt{۵}}\times\frac{۲۱}{۲\sqrt{۵}}=\frac{۲۱}{۵}=۴/۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۲ گزینه ۴

اطلاعات مسئله، نشان می‌دهد که مثلث ABC، قائم‌الزاویه است.



$$AB = \frac{|۴ - ۰ - ۱|}{\sqrt{۱ + ۹}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\tan \hat{C} = m_{BC} = \frac{۱}{۳}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow BC = \frac{۹}{\sqrt{۱۰}}$$

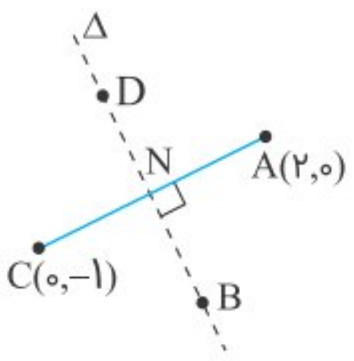
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \times \frac{۹}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۱۳/۵}{۱۰} = ۱/۳۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۳

Scanned with CamScanner

۳ گزینه ۲

معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AC را می نویسیم.



$$N = \frac{A + C}{۲} = (۱, -\frac{۱}{۲})$$

$$m_{AC} = \frac{۰ + ۱}{۲ - ۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \Delta : y + \frac{۱}{۲} = -۲(x - ۱)$$

$$\Rightarrow \Delta : y = \frac{۳}{۲} - ۲x$$

رئوس B و D از مربع موردنظر روی خط Δ قرار دارد. بنابراین B را به‌صورت $B(x, \frac{۳}{۲} - ۲x)$ در نظر می‌گیریم.

$$AB \perp BC \Rightarrow m_{AB}.m_{BC} = -۱$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۳}{۲} - ۲x}{x - ۲} \times \frac{\frac{۵}{۲} - ۲x}{x - ۰} = -۱ \Rightarrow (۲x - \frac{۳}{۲})(۲x - \frac{۵}{۲}) = ۲x - x^۲$$

$$\Rightarrow (۲x)^۲ - ۴(۲x) + \frac{۱۵}{۴} = ۲x - x^۲$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ - ۱۰x + \frac{۱۵}{۴} = ۰ \xrightarrow{\div ۵} x^۲ - ۲x + \frac{۳}{۴} = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۱ - \frac{۳}{۴}} = ۱ \pm \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۲} \\ x_۲ = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

باتوجه‌به گزینه‌ها طول نقطه مطلوب $\frac{۳}{۲}$ است.

$$x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲} - ۳ = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow B(\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲})$$

Scanned with CamScanner

۴ گزینه ۳

$$AB||CD: \frac{۴-۱}{-۱-۳}=\frac{y-y-۳}{x+۱+x}=\frac{-۳}{۲x+۱}\Rightarrow -\frac{۳}{۴}=\frac{-۳}{۲x+۱}$$

$$\Rightarrow ۲x+۱=۴\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$AB\perp BC: \frac{-۳}{۴}\times\frac{y-۱}{\frac{۳}{۲}-۳}=-۱\Rightarrow \frac{۱}{۲}(y-۱)=-۱\Rightarrow y=-۱$$

$$C(\frac{۳}{۲},-۱)\Rightarrow |AB|=۵\,,\ |BC|=\frac{۵}{۲}\Rightarrow \text{محیط}=۲(|AB|+|BC|)=۱۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

$$AB||CD: m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow \frac{y-y+۳}{x+۱+x}=\frac{۰+۳}{-۴-۰}$$

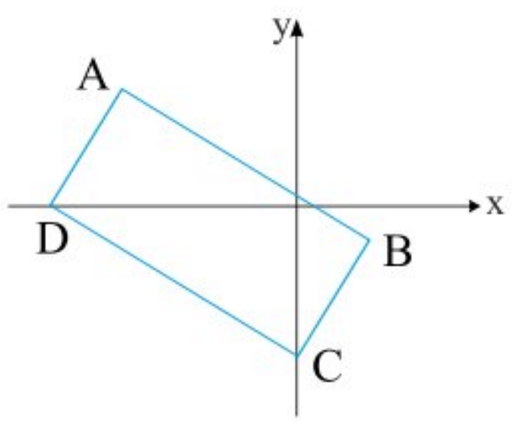
$$\Rightarrow ۲x+۱=-۴\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}$$

$$AD\perp DC: m_{AD}\times m_{DC}=-۱\Rightarrow \frac{y}{x+۴}\times(-\frac{۳}{۴})=-۱\Rightarrow y=۲$$

$$x=-\frac{۵}{۲}, y=۲\Rightarrow A(-\frac{۵}{۲},۲)\,,\ B(\frac{۳}{۲},-۱)$$

$$AB=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵\,,\ BC=\sqrt{۲^۲+(\frac{۳}{۲})^۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\text{مساحت مستطیل}=(AB)(BC)=(۵)(\frac{۵}{۲})=۱۲/۵$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۶ گزینه ۲

نکته: فاصلهٔ دو خط موازی با معادلات $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$y - ax = ۱ \Rightarrow y = ax + ۱$$

$$ay - x = a - ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{a}x - \frac{۱}{a} + ۱$$

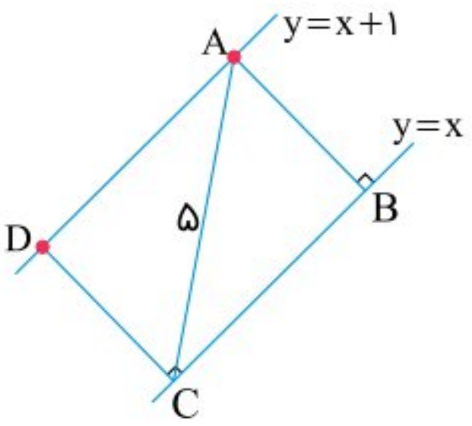
دو ضلع مقابل مستطیل موازی‌اند، بنابراین شیب آن‌ها برابر است.

$$\frac{۱}{a} = a \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

$$a = ۱ \Rightarrow \begin{cases} y = x + ۱ \\ y = x \end{cases}$$

$$a = -۱ \Rightarrow \begin{cases} y = -x + ۱ \\ y = -x + ۲ \end{cases}$$

$a = -۱$ قابل قبول نیست، زیرا نقطه $A(۱, ۲)$ در هیچ کدام از دو ضلع مقابل صدق نمی‌کند. فاصلهٔ دو خط موازی $y = x + ۱$ و $y = x$ برابر عرض مستطیل است.



$$|AB| = \frac{|۱ - ۰|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \ , \ |BC| = \sqrt{۲۵ - \frac{۱}{۲}} = \frac{۷}{\sqrt{۲}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \times \frac{۷}{\sqrt{۲}} = ۳/۵$$

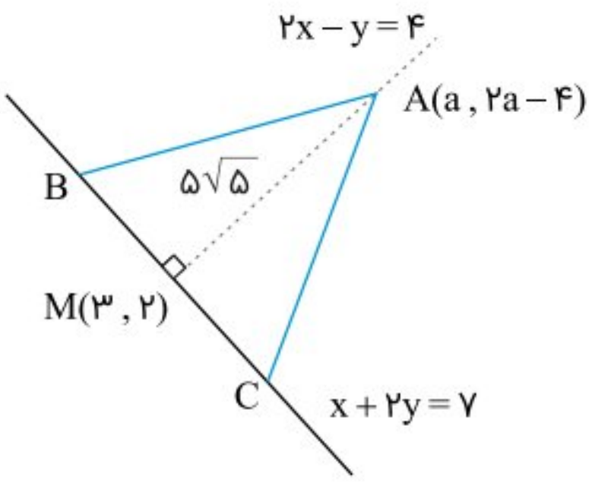
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

Scanned with CamScanner

۷ گزینه ۲

معادلهٔ خط عمود بر BC و گذرا از M را می‌نویسیم:

$$m_{AM} = \frac{-۱}{m_{BC}} = ۲$$
$$AM : y - ۲ = ۲(x - ۳) \Rightarrow y = ۲x - ۴$$

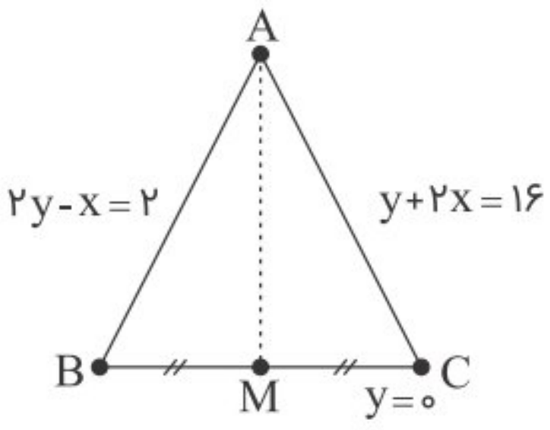


$$|AM| = ۵\sqrt{۵} \Rightarrow AM^{۲} = ۱۲۵$$
$$(a - ۳)^{۲} + (۲a - ۶)^{۲} = ۱۲۵ \Rightarrow ۵(a - ۳)^{۲} = ۱۲۵$$
$$(a - ۳)^{۲} = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} a = ۸ \\ a = -۲ \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

۸ گزینه ۲

مثلث را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:



باید فاصلهٔ نقطهٔ A از نقطهٔ M را به دست آوریم:

از تقاطع دو خط $y + ۲x = ۱۶$ و $۲y - x = ۲$ مختصات نقطهٔ A به دست می‌آید.

$$۲\times \begin{cases} ۲y - x = ۲ \\ y + ۲x = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴y - ۲x = ۴ \\ y + ۲x = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow y = ۴ \ , \ x = ۶ \Rightarrow A(۶, ۴)$$

برای به دست آوردن مختصات نقطهٔ M، ابتدا مختصات نقاط B و C را محاسبه می‌کنیم.

$$۲y - x = ۲ \xrightarrow{y=۰} x = -۲ \Rightarrow B(-۲, ۰)$$

$$y + ۲x = ۱۶ \xrightarrow{y=۰} x = ۸ \Rightarrow C(۸, ۰)$$

سپس مختصات نقطهٔ M را حساب می‌کنیم:

$$M(\frac{x_B + x_C}{۲}, \frac{y_B + y_C}{۲}) \Rightarrow M(۳, ۰)$$

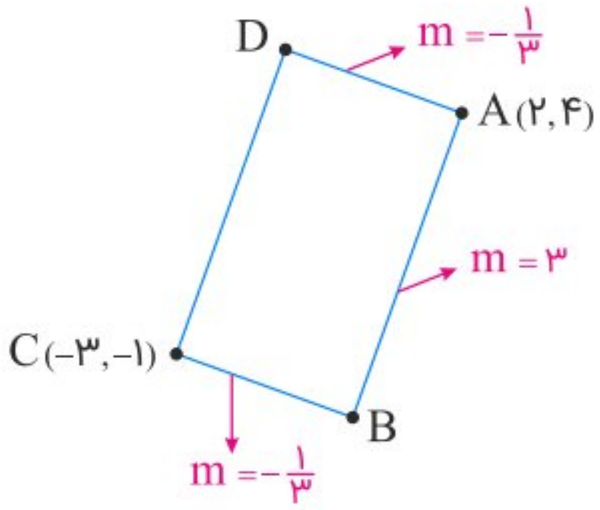
اکنون فاصلهٔ دو نقطهٔ M و A را محاسبه می‌کنیم:

$$AM = \sqrt{(۳ - ۶)^۲ + (۰ - ۴)^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

Scanned with CamScanner

۹ گزینه ۳



نقطهٔ B روی خط $y - ۴ = ۳(x - ۲)$ قرار دارد: $B(a, ۳a - ۲)$

از طرفی شیب BC برابر $-\frac{۱}{۳}$ است:

$$\frac{۳a - ۲ + ۱}{a + ۳} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۹a - ۳ = -a - ۳ \Rightarrow a = ۰$$

$$B(۰, -۲)$$

$$AB = \sqrt{۴ + ۳۶} = \sqrt{۴۰}$$

$$BC = \sqrt{۹ + ۱} = \sqrt{۱۰}$$

محیط : $۲\sqrt{۴۰} + ۲\sqrt{۱۰} = ۶\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۱

$$\begin{cases} AB : y + ۲x = ۷ \\ BC : ۲y - ۷x = -۱۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲y + ۴x = ۱۴ \\ ۲y - ۷x = -۱۹ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} x = ۳ , y = ۱$$

$$\Rightarrow B(۳, ۱)$$

$$\text{فاصلهٔ } B \text{ از } AC = BH = \frac{|۴(۱) - ۳(۳) - ۱۷|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{۲۲}{۵} = ۴/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۱ گزینه ۳

خط گذرنده از C و B را می‌یابیم:

$$B(۳,۳)\ ,\ C(۷,۱۱)$$

$$m = \frac{۱۱-۳}{۷-۳} = ۲$$

$$y = ۲x - ۳ \Rightarrow y - ۲x + ۳ = ۰$$

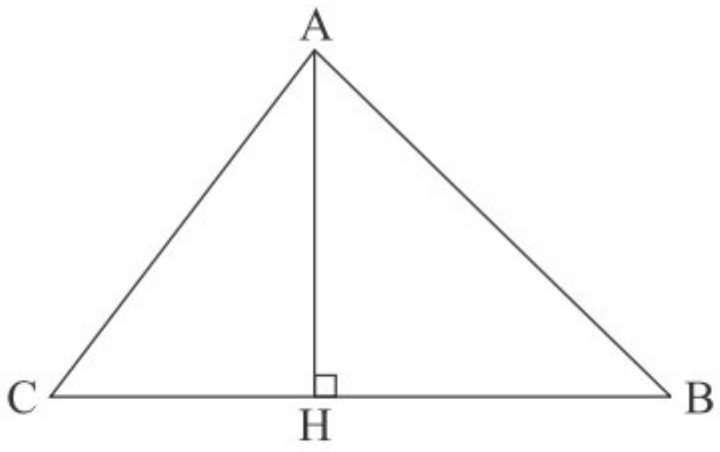
فاصلهٔ A تا این خط را می‌یابیم:

$$AH = \frac{|۹ - ۲ + ۳|}{\sqrt{(-۲)^۲ + ۱^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲ گزینه ۴

برای به دست آوردن ارتفاع AH در مثلث ABC، کافی است که فاصلهٔ رأس A از خط BC را محاسبه کنیم.



ابتدا معادلهٔ خط BC را به دست می‌آوریم:

$$B(۷,۳), C(۲,-۲) \Rightarrow m = \frac{۳+۲}{۷-۲} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y + ۲ = x - ۲ \Rightarrow x - y - ۴ = ۰$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱,۵)$ از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱ - ۵ - ۴|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

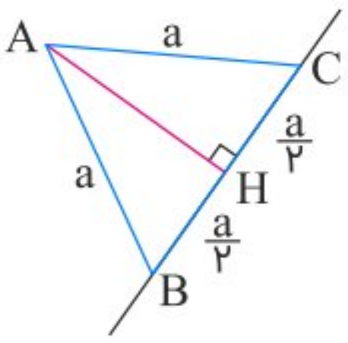
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۳ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

Scanned with CamScanner

۱۳ گزینه ۲



$$\text{محیط} = ۳a = \sqrt{۲۷۰} = ۳\sqrt{۳۰} \Rightarrow a = \sqrt{۳۰}$$

$$AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \sqrt{۳۰} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$$AH : y - ۱ = -\frac{۱}{۳}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{-x}{۳} + \frac{۵}{۳}$$

$$A(b, -\frac{b}{۳} + \frac{۵}{۳}) \quad , \quad H(۲, ۱)$$

$$|AH| = \sqrt{(b-۲)^۲ + (\frac{۲}{۳} - \frac{b}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۱۰}{۹}}|b-۲| = \frac{۳}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow |b-۲| = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b-۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow b = \frac{۱۳}{۲} \\ b-۲ = -\frac{۹}{۲} \Rightarrow b = \frac{-۵}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\frac{۱۳}{۲}, \frac{-۱}{۲}) \quad , \quad A(\frac{-۵}{۲}, \frac{۵}{۶})$$

۱۴ گزینه ۴

معادلهٔ خط موردنظر $y = x - ۱$ است، این خط را با سهمی قطع می‌دهیم:

$$-x^۲ + ۲x + ۱ = x - ۱ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

پس نقاط برخورد $A(-۱, -۲)$ و $B(۲, ۱)$ است، وسط AB را حساب می‌کنیم:

$$M = \frac{A + B}{۲} = (\frac{۱}{۲}, \frac{-۱}{۲})$$

راس سهمی هم $S(۱, ۲)$ است:

$$|SM| = \sqrt{(۱ - \frac{۱}{۲})^۲ + (۲ + \frac{۱}{۲})^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۲۵}{۴}} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۶}$$

Scanned with CamScanner