

۱- دایره به معادله $a(x^2 + y^2) + b(x + y) = 0$ از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد. شعاع دایره چقدر است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $a\sqrt{2}$ (۳) $\frac{b}{a}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

سراسری <= تجربی <= ۷۴ و آزمایشی سنجش <= تجربی <= ۸۰

۲- تمام خطوطی که با دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ زاویه 90° درجه بسازند از نقطه ثابت A می‌گذرند مختصات A کدامست؟

$(-1, 2)$ (۴) $(2, -1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۲) $(1, -2)$ (۱)

سراسری <= ریاضی <= ۷۶

۳- در صفحه‌ی یک مثلث چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آنها به یک فاصله باشد؟

4 (۴) 3 (۳) 2 (۲) 1 (۱)

سراسری <= تجربی <= ۸۰

۴- دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

(۱) مماس خارجی (۲) مماس داخلی (۳) متقاطع در دو نقطه (۴) یکی خارج دیگری

سراسری <= تجربی <= ۸۰

۵- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۱) مماس داخل (۲) مماس خارج (۳) متقاطع (۴) متداخل

سراسری <= تجربی <= ۸۳

۶- دسته خطوط به معادلات $(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$ قطرهای یک دایره‌اند اگر این دایره از نقطه $(2, 5)$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟

$3\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$ (۳) 5 (۲) 4 (۱)

سراسری <= ریاضی <= ۸۳

۷- طول قطعه‌ی مماسی که از نقطه‌ی $A(4, 1)$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ رسم شود برابر کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴) 5 (۳) 4 (۲) 3 (۱)

سراسری <= ریاضی <= ۸۴

۸- به ازای کدام مقدار a دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۵

سراسری <=> تجربی <= ۸۵

۹- به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخل‌اند؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴) -۲

سراسری <=> ریاضی <= ۸۶

۱۰- دو دایره از نقطه $(1, 2)$ ، گذشته و بر محورهای مختصات مماس‌اند، شعاع این دایره‌ها کدام است؟

- (۱) ۴ و ۱ (۲) ۵ و ۱ (۳) ۴ و ۲ (۴) ۵ و ۲

سراسری <=> ریاضی <= ۸۷

۱۱- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) مماس خارج (۲) مماس داخل (۳) متقاطع (۴) متخارج

سراسری <=> تجربی <= ۸۷

۱۲- هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه $(1, -2)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $3\sqrt{2}$

سراسری <=> تجربی <= ۸۸

۱۳- معادله دایره‌ای که مرکز آن به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y = x + 4$ ، $y = x$ مماس باشد، کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ (۲) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$
(۳) $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ (۴) $x^2 + y^2 + 2x - y = 2$

سراسری <=> ریاضی <= ۸۹

۱۴- به ازای کدام مقدار a ، دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$ مماس خارج یکدیگرند؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

سراسری <=> ریاضی <= ۹۰

hamclasiX

۱۵- شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(0,0)$, $(-2,4)$, $(2,1)$ می‌گذرد کدام است؟

- (۱) $2/5$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $3/5$

سراسری <=> تجربی <= ۹۱

۱۶- شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(0,0)$, $(2,1)$ و $(1,-2)$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

سراسری <=> تجربی <= ۹۳ (سراسری - آزاد)

۱۷- دو دایره گذرا بر نقطه $(-9, 2)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است، شعاع دایره بزرگ‌تر، کدام است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

سراسری <=> ریاضی <= ۹۵

۱۸- به‌ازای کدام مقدار a ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله‌ی $3x + 2y = a$ در نقطه‌ی تلاقی آنها، 90° درجه است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سراسری <=> ریاضی <= ۹۶

۱۹- وتر مشترک دایره‌ی C با دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 4x = 6$ منطبق بر نیمساز ناحیه اول است. اگر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(4, -1)$ بگذرد، معادله‌ی آن کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 - y + 3x = 6$ (۲) $x^2 + y^2 + 2y - x = 6$
 (۳) $x^2 + y^2 - 2y + x = 6$ (۴) $x^2 + y^2 - 3y - x = 6$

سراسری <=> ریاضی <= ۹۸

۲۰- شعاع دایره به مرکز $(2,-1)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $2x + 3y = 14$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $\sqrt{26}$

آزمایشی سنجش <=> دوازدهم <=> سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۲۱- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 + 6y = 0$ نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

- (۱) متخارج (۲) مماس خارج (۳) مماس داخل (۴) متقاطع

آزمایشی سنجش <=> دوازدهم <=> سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۲۲- به ازای کدام مقدار a ، در نقطه تلاقی دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 15$ شعاع‌ها عمود بر هم هستند؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۲۳- دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ ، مماس بر خط $5 = x + 2y$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) ۰ و ۳ (۲) ۴ و ۰ (۳) ۱ و ۳ (۴) ۴ و ۱

آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۲۴- نقطه $A(5, 7)$ بر روی دایره‌ای به مرکز $(2, -2)$ واقع است. معادله خط مماس بر دایره در نقطه A کدام است؟

(۱) $3y + x = 26$ (۲) $3y - x = 16$ (۳) $y + 3x = 22$ (۴) $y - 3x = -8$

آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۲۵- دو خط موازی هم مفروض است. مکان هندسی مرکز تجانس با نسبت تجانس $k \neq \pm 1$ ، به طوری دو خط مجانس هم باشند، کدام است؟

(۱) خط ۴ (۲) خط ۲ (۳) یک خط (۴) یک دایره

آزمایشی سنجش <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۲۶- دو خط موازی d و d' به فاصله‌ی ۷ از یکدیگر مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از d و d' برابر ۳ باشد، کدام است؟

(۱) خطی عمود بر d و d' (۲) دو خط موازی d و d' (۳) دایره‌ای مماس بر d و d' (۴) خطی موازی d و d'

آزمونهای گزینه ۲ <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۲۷- دو خط متقاطع d و d' و دایره‌ی C به مرکز O و شعاع R در صفحه مفروض هستند. حداکثر چند نقطه روی دایره‌ی C وجود دارد که از دو خط d و d' به یک فاصله باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

آزمونهای گزینه ۲ <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۲۸- یک سطح مخروطی با محور l و مولد d مفروض است. فصل مشترک صفحه‌ی P با این سطح مخروطی در حالتی که صفحه‌ی P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند، کدام است؟

(۱) هذلولی (۲) یک خط راست (۳) بیضی (۴) سهمی

آزمونهای گزینه ۲ <= دوازدهم <= سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۲۹- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x = 3$ و $x^2 + y^2 + 4y + 2x = 4$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟
 (۱) متقاطع (۲) متخارج (۳) مماس داخلی (۴) مماس خارجی
 آزمایشی سنجش <=> دوازدهم <=> سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۳۰- نقاط $A(1, 1)$ و $B(-1, 1)$ و $C(2, -1)$ سه رأس مثلثی هستند. شعاع دایره محیطی این مثلث کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{54}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{65}}{4}$

آزمایشی سنجش <=> دوازدهم <=> سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۳۱- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع $2\sqrt{13}$ که بر خط $3y - 2x = 36$ مماس شده و در زیر آن قرار گیرند، کدام است؟

(۱) $3y - 2x = 10$ (۲) $3y - 2x = 62$ (۳) $2y + 3x = 20$ (۴) $2y + 3x = 52$
 آزمایشی سنجش <=> دوازدهم <=> سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۳۲- در صفحه یک مثلث چند نقطه وجود دارد که از هر سه ضلع آن به یک فاصله است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
 آزمایشی سنجش <=> دوازدهم <=> سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۳۳- قطر دایره گذرا بر سه نقطه $(2, 5)$, $(4, 1)$, $(-6, 1)$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

آزمایشی سنجش <=> دوازدهم <=> سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۳۴- از نقطه $A(2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم شده است. این خط مماس محور X ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۱) -۶ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

آزمایشی سنجش <=> دوازدهم <=> سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۳۵- در مثلث $\triangle ABC$, $BC = a$ و طول میانه AM برابر مقدار ثابت m است. مکان هندسی محل تلاقی میانه‌های مثلث $\triangle ABC$ کدام است؟

(۱) دایره به مرکز B و شعاع $\frac{a}{4}$ (۲) پاره خط عمود بر BC به طول m
 (۳) دایره به مرکز M و شعاع $\frac{m}{3}$ (۴) دایره به مرکز M و شعاع $\frac{2m}{3}$

آزمایشی سنجش <=> دهم <=> سال تحصیلی ۹۷-۹۸

۳۶- به ازای کدام مقدار a رابطه $x^2 + y^2 - 2x + 3y = a$ معادله یک دایره است؟

- (۱) $a > \frac{-13}{4}$ (۲) $a > \frac{-5}{2}$ (۳) $a > 0$ (۴) $a > \frac{13}{4}$

آزمایشی سنجش => ریاضی => ۷۹ و آزمایشی سنجش => تجربی => ۷۹ و آزمایشی سنجش => ریاضی => ۸۲

۳۷- نقطه ثابت A رأس مثلثی‌هایی است که اندازه ضلع AC همواره ثابت است مکان هندسی نقطه M پای میانه واقع بر AC کدام است؟

- (۱) دایره (۲) نیمدایره (۳) خط (۴) نیم خط
آزمایشی سنجش => ریاضی => ۸۱

۳۸- شعاع دایره که از سه نقطه $(0, 0)$ ، $(0, 6)$ و $(-8, 0)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۵ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۶

آزمایشی سنجش => تجربی => ۸۱

۳۹- قطر دایره‌ای که از نقاط $(1, 2)$ ، $(1, 8)$ و $(-2, 2)$ می‌گذرد کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲
آزمایشی سنجش => ریاضی => ۸۱

۴۰- به ازای کدام مقدار a شعاع دایره $x^2 + y^2 - x + 3y + a = 0$ برابر $\frac{5}{4}$ است؟

- (۱) $-\frac{15}{4}$ (۲) $-\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{15}{4}$

آزمایشی سنجش => ریاضی => ۸۲ و آزمایشی سنجش => تجربی => ۸۲

۴۱- دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 = 8$ نسبت بهم کدام وضعیت را دارند؟

- (۱) مماس داخل (۲) مماس خارج (۳) متداخل (۴) متقاطع

آزمایشی سنجش => ریاضی => ۸۲

۴۲- در صفحه‌ی یک مثلث چند نقطه می‌توان یافت که از سه میانه‌ی آن به یک فاصله باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

آزمایشی سنجش => ریاضی => ۸۲

۴۳- اگر دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات بر خطی به معادله $3x + 4y = 10$ مماس باشد، بر کدام خط زیر مماس خواهد بود؟

$$4x + 3y = 20 \quad (2)$$

$$4x - 3y = 10 \quad (4)$$

$$3x + 4y = 5 \quad (1)$$

$$3x - 4y = 6 \quad (3)$$

آزمونهای گزینه ۲ <= ریاضی <= ۸۲

۴۴- دایره‌ای بر دو خط $3x - 4y = 10$ ، $4y - 3x = 10$ مماس بوده و مرکز آن بر روی نیمساز ربع اول و سوم واقع است. معادله آن چیست؟

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \quad (2)$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 16 \quad (3)$$

آزمونهای گزینه ۲ <= ریاضی <= ۸۲

۴۵- مقادیر m چه باشد تا دستگاه $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \\ 3x + 4y = m \end{cases}$ فقط و فقط یک دسته جواب داشته باشد؟

$$-4 \text{ و } -26 \quad (4)$$

$$4 \text{ و } -26 \quad (3)$$

$$-4 \text{ و } 26 \quad (2)$$

$$4 \text{ و } 26 \quad (1)$$

آزمونهای گزینه ۲ <= ریاضی <= ۸۲

۱- چون دایره از نقطه (۱, ۱) می‌گذرد پس مختصات آن در معادله دایره صدق می‌کند. داریم:

$$a(1+1) + b(1+1) - 0 = 0 \Rightarrow a - b$$

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

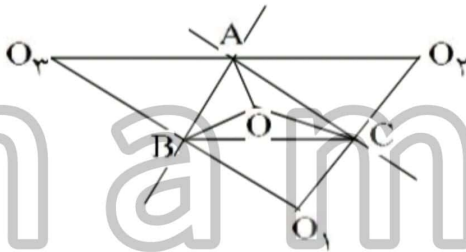
در نتیجه معادله بصورت روبرو درمی‌آید:

$$\text{از روی معادله فوق، } R^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و گزینه ۴ جواب صحیح است.}$$

۲- وقتی خطی با دایره‌ای زاویه 90° می‌سازد، از مرکز دایره می‌گذرد و چون محل هم‌مرسی این خطوط نقطه A است لذا A مرکز دایره است. پس:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 \Rightarrow A(1, -2)$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



۳- نقطه‌ای که از ۳ ضلع مثلث به یک فاصله است محل هم‌مرسی نیم‌سازهای داخلی آن است. نقطه‌ای که از اضلاع یا امتداد آن به یک فاصله است محل هم‌مرسی ۲ نیم‌ساز خارجی با نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی سوم است. بنابراین ۴ نقطه وجود دارد که از اضلاع یا امتداد آنها به یک فاصله است. بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$C_1(x, y): x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \Rightarrow C_1(x, y): (x-2)^2 + (y+4)^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} O_1 = (2, -4) \\ R_1 = 1 \end{cases} \quad -4$$

$$C_2(x, y): x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1 \Rightarrow C_2(x, y): (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} O_2 = (2, -2) \\ R_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{طول خط‌المركزين } O_1O_2 = \sqrt{0^2 + (-2+4)^2} = 2 = R_2 - R_1$$



لذا ۲ دایره مماس داخل می‌باشند بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 18 \Rightarrow O|_{-2} R = 3\sqrt{2}$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(x+1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O'|_{-1} R' = \sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} = |R - R'| \text{ مماس داخل}$$

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای m ، عددگذاری می‌کنیم تا دو خط به دست آید. محل برخورد آن‌ها، مرکز دایره است.

$$\left. \begin{aligned} m^{-2} &\Rightarrow x^{-1} \\ m^{-1} &\Rightarrow y^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مرکز: } C \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow CM = R = 5$$

$$MT = \sqrt{16 + 1 - 8 + 4 + 3} = 4$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

* نکته: اگر معادله دایره $C(x, y) = 0$ باشد و $A(x_0, y_0)$ نقطه‌ای از صفحه آنگاه طول مماس رسم شده بر

$$MT = \sqrt{C(x_0, y_0)}$$

دایره از نقطه A برابر است با:

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x = -3y \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y + a = 0 \Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 2y + a = 0 \\ 10y^2 + 8y + a = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 100 - 40a = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

راه دوم: فاصله مرکز دایره تا خط مساوی شعاع دایره است.

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1, -2), R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - rc}{2} = \frac{\sqrt{4 + 16 - 4a}}{2} = \sqrt{5 - a}$$

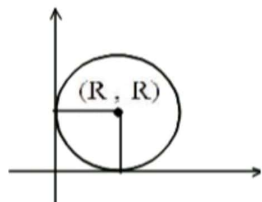
$$OH = R \Rightarrow \frac{|1 - 6|}{\sqrt{1 + 9}} = \sqrt{5 - a} \Rightarrow 25 = 50 - 10a \Rightarrow 10a = 25 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$C: x^2 + (y - 2)^2 = -b + 4$$

$$C': (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \quad o \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ و } o' \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \Rightarrow oo' - \sqrt{2} = |R - R'| - |\sqrt{-b + 4} - \sqrt{2}| \Rightarrow b = -4$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

$$(2 - R)^2 + (1 - R)^2 = R^2 \text{ و از نقطه } (2, 1) \text{ گذشته} \Rightarrow R = 1, 5$$

۱۱- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8 &\Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 18 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4y + 12 = 0 &\Rightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 8 \\ \left. \begin{aligned} O_1 \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \quad O_2 \begin{vmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} \quad r_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad r_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ |O_1 O_2| = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow O_1 O_2 = r_1 + r_2 \text{ مماس خارج} \end{aligned}$$

۱۲- گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. فاصله ی نقطه ی $(-2, 1)$ از خط $x - y - 1 = 0$ برابر شعاع دایره است.

$$r = \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}$$

۱۳- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. مرکز چنین دایره ای روی خط $y - x + 2$ قرار دارد.

$$\begin{aligned} x_O = -1 \Rightarrow y_O = 1 \Rightarrow (-1, 1) \\ \text{فاصله } O \text{ تا خط } y = x \text{ } R = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{معادله دایره: } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

۱۴- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x = 0 &\Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 & \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 17 - a & \\ O \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad O' \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow OO' = \delta = R + R' & \\ \delta = 2 + \sqrt{17 - a} & \\ a = 8 & \end{aligned}$$

۱۵- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. دایره را $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر می گیریم و نقاط داده شده را در دایره صدق می دهیم.

$$(0, 0) \in \text{دایره} \Rightarrow c = 0$$

$$(2, 1) \in \text{دایره} \Rightarrow 4 + 1 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -5$$

$$(-2, 4) \in \text{دایره} \Rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b = 0 \Rightarrow -2a + 4b = -20 \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = -20 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b = -25 \Rightarrow b = -5$$

$$\text{دایره: } x^2 + y^2 - 5y = 0 \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{5}{2}$$

۱۶- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. فرض می کنیم که معادله ی دایره ی مورد نظر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد و سه نقطه ی $A(0, 0)$ ، $B(2, 1)$ و $C(1, -2)$ نقاط روی این دایره می باشند پس مختصات آن ها در دایره صدق می کند:

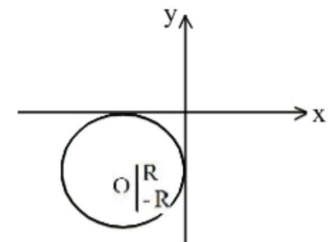
$$\begin{cases} A & \begin{cases} 0 + 0 + 0 + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\ B & \begin{cases} 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \\ 2a + b = -5 \end{cases} \\ C & \begin{cases} 1 + 4 + a - 2b + c = 0 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \xrightarrow{+} 5a = -15 \Rightarrow a = -3, b = 1$$

به این ترتیب معادله ی دایره به صورت $x^2 + y^2 - 3x + y = 0$ است و شعاع این دایره برابر است با:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مرکز چنین دایره ای در ناحیه چهارم قرار دارد و $O(R, -R)$ پس معادله ی دایره به صورت $(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$ می باشد. نقطه $(2, -9)$ در معادله ی این دایره صدق می کند، داریم:

$$\begin{aligned} (2 - R)^2 + (-9 + R)^2 &= R^2 \Rightarrow 4 + R^2 - 4R + 81 + R^2 - 18R = R^2 \\ \Rightarrow R^2 - 22R + 85 &= 0 \Rightarrow (R - 17)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 5 \\ R = 17 \end{cases} \end{aligned}$$



۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در واقع خط $3x + 2y - a = 0$ از مرکز دایره می گذرد زیرا خطوط قائم بر دایره از مرکز آن عبور می کنند.

$$a = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[\text{می دهیم}]{\text{در خط قرار}} 3 - 1 = a \Rightarrow a = 2$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

راه حل اول: نقطه‌ی $(-1, 4)$ فقط در گزینه‌ی ۴ صدق می‌کند پس گزینه‌ی ۴ درست است.

راه حل دوم: ابتدا مختصات نقاط تلاقی خط $y - x$ (نیمساز ناحیه اول) با دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x = 6$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 6 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$\Rightarrow x = 3$ یا $x = -1$

پس نقاط $A(3, 3)$ و $B(-1, -1)$ نقاط تلاقی دایره با خط نیمساز هستند و این نقاط روی دایره‌ی C هم قرار دارد بنابراین دایره‌ی C از نقاط $A(3, 3)$ و $B(-1, -1)$ و $C(-1, 4)$ عبور می‌کند. فرض کنیم معادله‌ی دایره‌ی C به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد داریم:

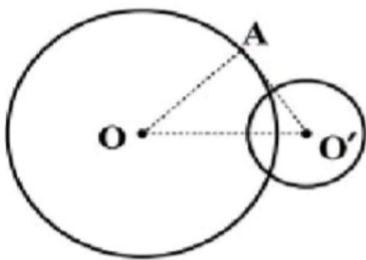
$$\begin{aligned} A \in C &\Rightarrow 9 + 9 + 3a + 3b + c = 0 \\ B \in C &\Rightarrow 1 + 1 - a - b + c = 0 \Rightarrow c = -6, a = -1, b = -3 \\ C \in C &\Rightarrow 1 + 16 - a + 2b + c = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 3y - 6 = 0 \end{aligned}$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
شعاع دایره برابر فاصله مرکز دایره از خط مماس $R = \frac{|2 - 3 - 14|}{\sqrt{2 + 9}} = \sqrt{13}$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 6 & \quad O(1, -2) \\ x^2 + (y + 3)^2 = 9 & \quad O'(0, -3) \end{aligned} \Rightarrow OO' = \sqrt{2}, \sqrt{2} < 3 + \sqrt{6}$$

دو دایره متقاطع‌اند.



۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

شعاع نقطه تلاقی عمود بر هم باشند $O'O^2 = R^2 + R'^2$
مرکز و شعاع هر دایره مشخص شود.

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20, \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 1 + \frac{a^2}{4}$$

$$O(1, -2), O'\left(-\frac{a}{2}, 1\right) \Rightarrow \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 + (-3)^2 = 20 + 1 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = 11$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{شعاع دایره برابر فاصله مرکز از خط مماس } R = \frac{|-2 + 2 - 5|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}$$

است در حالت $y - 0$ خواهیم داشت $(x - 2)^2 + 1 = 5$ در نتیجه ۴, $x - 0$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

شعاع دایره عمود بر خط مماس است. شیب شعاع دایره $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 + 2}{5 - 2} = 3$ شیب خط مماس $-\frac{1}{3}$ است معادله

$$\text{خط مماس } y - 7 = -\frac{1}{3}(x - 5) \Rightarrow 3y + x = 26$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو خط مجانس مستقیم یا معکوس می‌توانند باشند اولی مجانس دومی یا برعکس، در هر حالت مکان خط موازی آن دو خط است. پس ۴ خط متمایز موازی هم.

h a m c l a s s i x

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله r هستند، دو خط موازی d در دو طرف آن و به فاصله r از آن است.

با توجه به اطلاعات مسئله، شکل روبه‌رو قابل رسم است:
با توجه به شکل داریم:

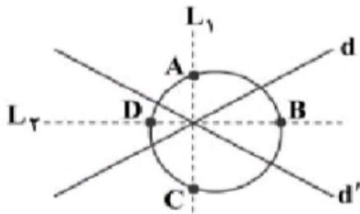
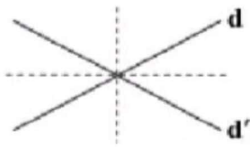


$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

پس این نقاط روی خطهایی قرار دارند که به فاصله‌های ۵ و ۲ از d و d' هستند. یعنی مکان هندسی موردنظر دو خط موازی d و d' است.



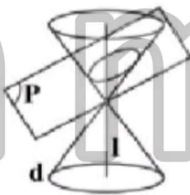
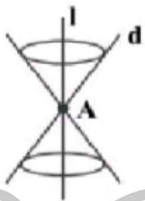
دقت کنید که اگر خطوط موردنظر بین d و d' نباشد، قدر مطلق تفاضل فاصله‌ها برابر ۳ نمی‌شود. به همین دلیل آن‌ها را بین دو خط در نظر گرفتیم.



۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زوایای بین d و d' هستند. این نیمسازها دو خط عمود بر هم هستند.

ابتدا نیمسازهای زوایای بین دو خط متقاطع d و d' (خطوط L_1 و L_2) را رسم می‌کنیم، حداکثر تعداد نقاط برخورد خطوط L_1 و L_2 با دایره C جواب مسئله است. حداکثر تعداد جواب‌ها زمانی ایجاد می‌شود که دایره C هر دو خط L_1 و L_2 را قطع کند، در این صورت ۴ نقطه با ویژگی‌های موردنظر وجود دارد.



۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: دو خط l و d در نقطه A متقاطع‌اند (l و d بر هم عمود نیستند). سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک سطح مخروطی می‌نامیم. خط d را مولد، خط l را محور و نقطه A را رأس مخروطی می‌نامند. با توجه به شکل مقابل، فصل مشترک صفحه P با سطح مخروطی در حالتی که صفحه P بر محور l عمود نباشد و بامولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند، یک بیضی است.

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. معادله استاندارد دایره‌ها نوشته شود.

$$(x-1)^2 + y^2 = 4, (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow R_1 = 2, R_2 = 3$$

$$O(1,0), O'(-1,-2) \Rightarrow OO' = 2\sqrt{2} \text{ فاصله مرکزهای دو دایره}$$

چون $R_2 - R_1 < OO' < R_2 + R_1$ پس دو دایره متقاطع‌اند.

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دایره محیطی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ فرض شود مختصات هر سه نقطه در آن صدق می‌کند.

$$(a+b+c = -2, -a+b+c = -2, 2a-b+c = -5) \Rightarrow a = 0, b = \frac{3}{2}, c = \frac{-7}{2}$$

$$R = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{65}}{4} \text{ معادله دایره:}$$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{|3y - 2x - 36|}{\sqrt{9 + 4}} = 2\sqrt{13} \text{ اگر } M(x, y) \text{ مرکز این دایره باشد}$$

$$3y - 2 - 36 - \pm 26 \Rightarrow 3y - 2x - 62, 10$$

پس مکان مطلوب $3y - 2x - 10$ می‌باشد.

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی هر سه نیمساز داخلی - نقطه تلاقی یک نیمساز داخلی و دو نیمساز زاویه خارجی دیگر که در خارج در ضلع مثلث است. در نتیجه $1 + 3 = 4$ نقطه موجود است.

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

معادله کلی دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است.

$$\begin{cases} 2a + 5b + c + 29 = 0 \\ 4a + b + c + 17 = 0 \\ -6a + b + c + 37 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2, c = -23$$

معادله دایره مطلوب $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ در نتیجه $R = 5, R = 10$

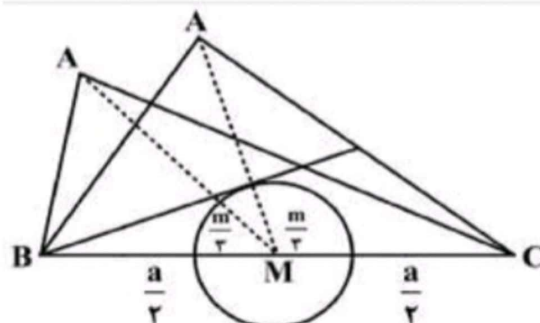
۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مرکز دایره $O(1, 1)$ و نقطه تماس $A(2, 3)$ ، $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ خط مماس عمود بر شعاع AO است.

$$m = \frac{3 - 1}{2 - 1} = 2 \Rightarrow m' = -\frac{1}{2}$$

معادله خط مماس $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ یا $y = -\frac{1}{2}x + 4$ به ازای $y = 0$ مقدار $x = 8$

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۳۶- ابتدا معادله دایره را به شکل استاندارد تبدیل می‌کنیم.

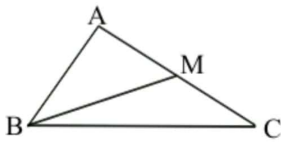
$$x^2 + y^2 - 2x + 3y = a \Rightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - 1 - \frac{9}{4} = a$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = a + 1 + \frac{9}{4} = R^2$$

لازمه اینکه معادله فوق، رابطه یک دایره باشد آنست که مقدار $a + 1 + \frac{9}{4}$ مثبت باشد.

$$a + 1 + \frac{9}{4} = a + \frac{13}{4} > 0 \Rightarrow a > -\frac{13}{4}$$

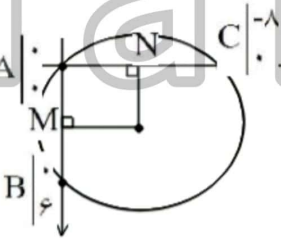
بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.



۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با در نظر گرفتن مثلث ABC داریم: $AM = \frac{1}{3}AC$

بنابراین نقطه‌ی M نیز از نقطه‌ی ثابت A بفاصله‌ی ثابتی است لذا مکان آن دایره‌ای

است به مرکز A و شعاع $\frac{1}{3}AC$



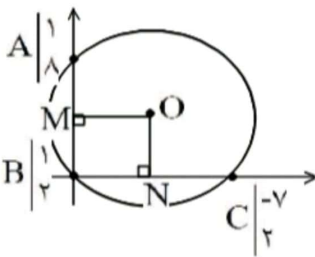
۳۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. M وسط AB است. خط گذرنده از AB: $x = 3$

پس معادله خط عمود از O (مرکز دایره) بر AB و گذرنده از M: $y = 3$

N وسط AC است و معادله‌ی خط گذرنده از AC: $y = 0$

بنابراین خط عمود از O بر AC و گذرنده از N: $x = -4$

بنابراین: شعاع دایره = $OA = 5 \Rightarrow O = (-4, 3)$ مرکز دایره



۳۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌های AB و BC مرکز این دایره است.

$x = 1$: معادله خط AB وسط M و AB

خط عمود بر AB و گذرنده از M: $y = 5 \Rightarrow y_O = 5$

$y = 2$: معادله خط BC وسط N و BC

خط عمود بر BC و گذرنده از N: $x = -3 \Rightarrow x_O = -3$

پس: قطر = $2R = 10 \Rightarrow \text{شعاع دایره} = OA = \sqrt{16 + 9} = 5$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

راهنمایی: شعاع دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ از رابطه $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ بدست می آید.

$$R = \frac{\sqrt{1 + 9 - 4a}}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{10 - 4a} = 5 \Rightarrow 10 - 4a = 25 \Rightarrow a = -\frac{15}{4}$$

۴۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$O \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \rightarrow O' \Rightarrow d = OO' = \sqrt{2}$$

$$O' \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

$$R' = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

از آنجاییکه $d = R' - R$ پس این دو دایره مماس داخل هستند.

۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. میانه های هر مثلث همسرند و نقطه تلاقی آنها از هر سه میانه به فاصله صفر می باشد.

$$\text{طول شعاع} = \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{25}} = 2$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به گزینه ها، گزینه (۴) فاصله اش از مبدأ همان مقدار ۲ می باشد.

۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

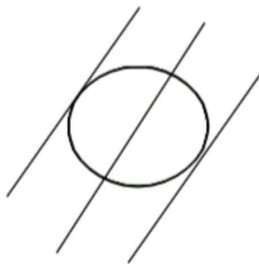
$$3x - 4y - 10$$

$$3x - 4y - 10$$

$$2R = \frac{20}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} \Rightarrow R = 2$$

$$\text{خط وسط: } \begin{cases} 3x - 4y - 10 \\ y - x \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

مرکز دایره (۰, ۰)



۴۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به وضعیت خط و دایره: شرط وجود یک جواب، مماس بودن خط بر دایره است.

$$\Rightarrow \frac{|3 + 8 - m|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|11 - m|}{5} = 3 \Rightarrow \begin{cases} 11 - m = 15 \Rightarrow m = -4 \\ 11 - m = -15 \Rightarrow m = 26 \end{cases}$$

فاصله مرکز از خط = شعاع دایره