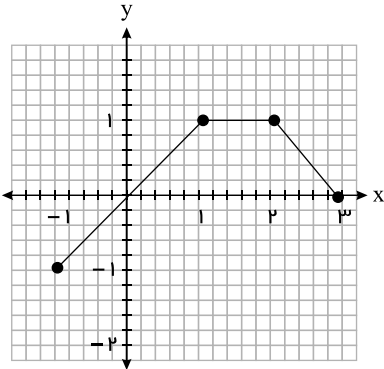




- ۱) با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟
- ۲) نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید.



- ۳) با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.
- ۴) نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.
- ۵) باقی‌مانده تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x + 2)$ یکسان است. مقدار a را بیابید.
- ۶) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف تابع $f(x)$ در بازه شامل a, b صعودی است. اگر $f(a) \geq f(b)$ آنگاه $a \geq b$.

۷) اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^2 + kx^2 - 3$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید.

۸) اگر $(\frac{1}{3})^{2x+1} \leq (\frac{1}{27})$ باشد، حدود x را به دست آورید.

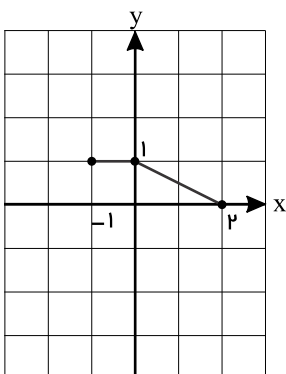
۹) چندجمله‌ای $x^5 + 32$ را بر حسب عامل $x + 2$ تجزیه کنید.

۱۰) ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

۱۱) در چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 2$ برابر -1 و $p(x)$ بر $x - 1$ بخش پذیر باشد.

۱۲) عبارت $\frac{x^5 + 1}{x + 1}$ را ساده کنید.

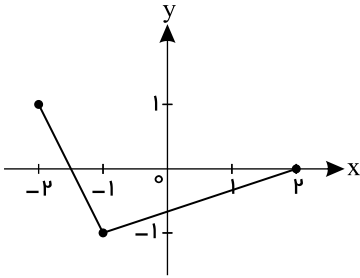
۱۳) نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = f(x - 1) + 2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید.



۱۴ ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 1|$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

۱۵ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ بر $(x + 2)$ و $(x - 1)$ بخش پذیر باشد.

۱۶ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x + 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



۱۷ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & , -2 \leq x < -1 \\ -x - 1 & , -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & , 1 \leq x \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

۱۸ چندجمله‌ای $x^5 + 32$ را بر حسب عامل $(x + 2)$ تجزیه کنید.

۱۹ در $\left(\frac{1}{3}\right)^{10-2x} \leq \left(\frac{1}{81}\right)$ حدود x را به دست آورید.

۲۰ نمودار تابع $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^3$ رسم کنید، سپس اکیداً یکنواپی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود، بررسی کنید.

۲۱ اگر $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{125}$ باشد، حدود x را بیابید.

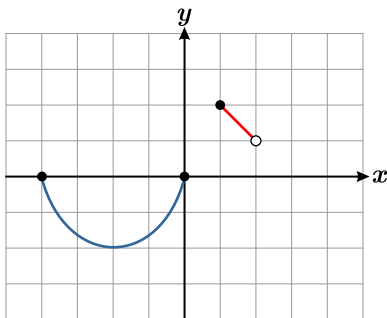
۲۲ اگر چندجمله‌ای $x^2 + ax - 8$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

۲۳ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

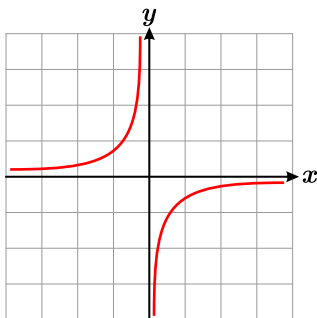
الف اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x - 2}$ برابر است.

۲۴ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $y = f(1 - x) + 1$ را رسم کنید.



۲۵ با توجه به نمودار تابع مقابل، تعیین کنید:



الف تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً یکنوا است.

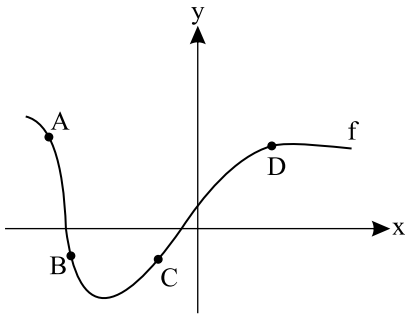
ب آیا تابع در کل دامنه خود اکیداً یکنوا است؟

۲۶ مقادیر a و b را چنان بیابید که عبارت $p(x) = x^3 - ax + b$ بر $(x - 2)$ بخش پذیر باشد و باقیمانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد.

۲۷) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف) تابع $y = -\log_8 x + 1$ در دامنه خود، یک تابع اکیداً یکنوا است.

۲۸) جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.



الف) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

۲۹) جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) اگر تابعی در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله است.

۳۰) درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

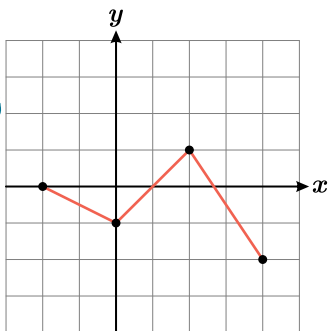
الف) عبارت $x^6 + 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است.

۳۱) الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه $[0, 4]$ رسم کنید.

ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.

۳۲) نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ را رسم کرده و سپس برد

تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

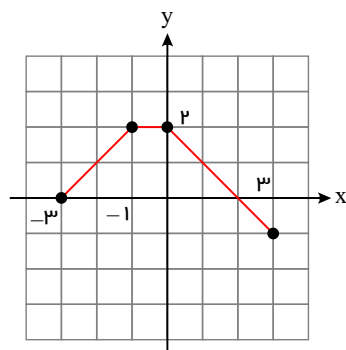


۳۳) ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌های اکیداً صعودی و در چه بازه‌های اکیداً نزولی است.

۳۴) اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = mx^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید.

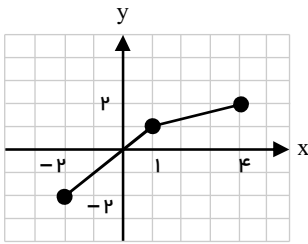
۳۵) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد.

۳۶) نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(2x + 1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۳۷ در چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a, b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.

۳۸ با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۳۹ مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد.

۴۰ نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید.

$$y = \cos 2x - 1$$

۴۱ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف نمودار تابع $y = x^3$ در بازه $[0, 1]$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

ب اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیدا صعودی نیز خواهد بود.

۴۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیدا نزولی نیز می‌باشد.

۴۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف نمودار تابع $y = (x + 2)^2$ را می‌توان با ۲ واحد انتقال نمودار $y = x^2$ به سمت چپ رسم کرد.

ب تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ روی بازه $(-\infty, 3]$ اکیدا صعودی است.

پ اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است.

ت آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه برابری هستند.

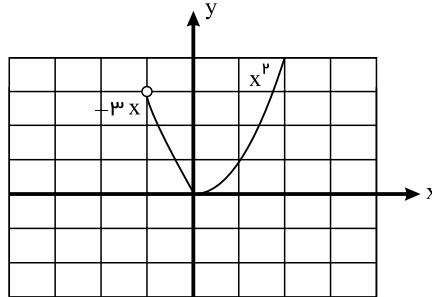
۴۴ در چندجمله‌ای $y = x^3 + ax^2 + x + b$ مقادیر a, b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.

۴۵ چندجمله‌ای $x^5 + 1$ را بر حسب عامل $(x + 1)$ تجزیه کنید.

پاسخ نامہ تشریحی

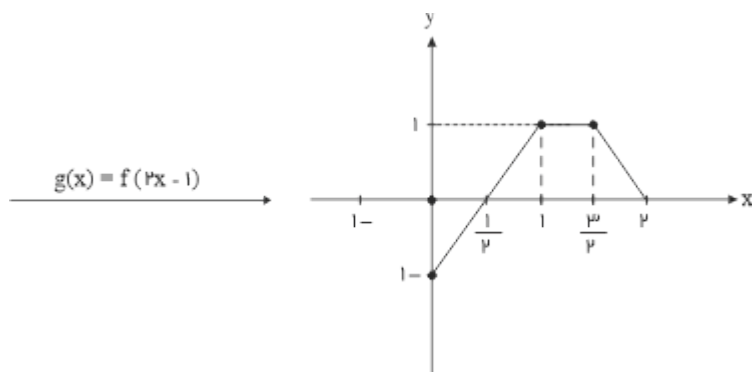
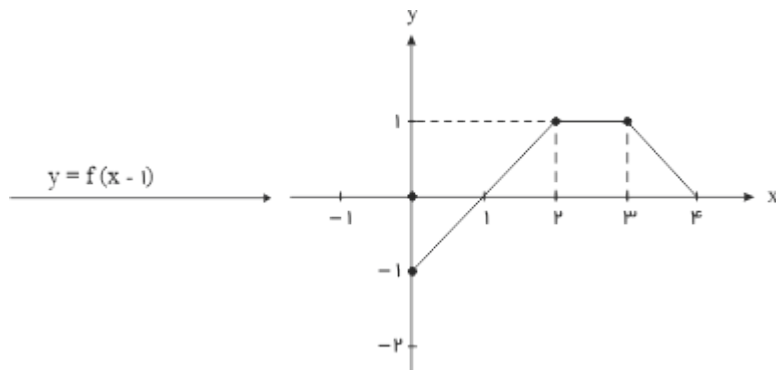
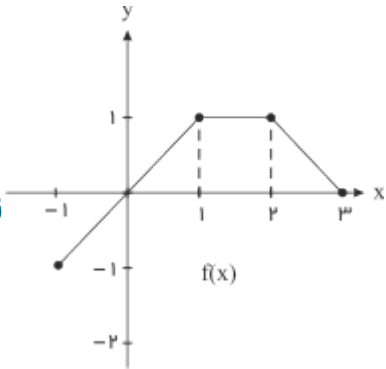
۱

۱ اکیداً نزولی $(-1, 0]$
۲ اکیداً صعودی $[0, +\infty)$



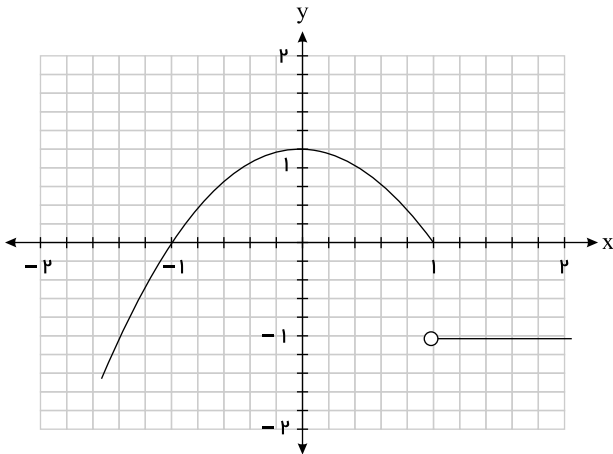
۲

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} g(x) = f(2x-1)$$

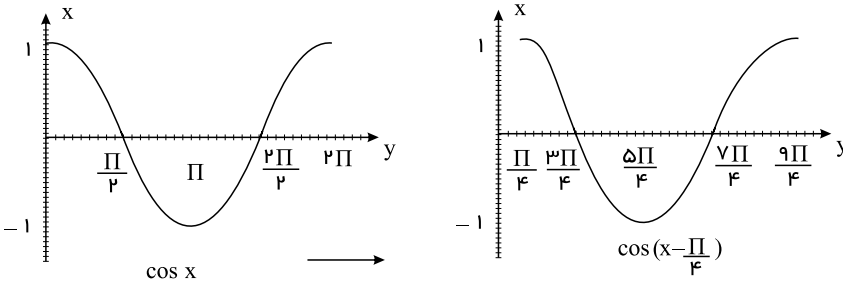


$$D_g = [0, 2], R_g = [-1, 1]$$

۳ با توجه به نمودار در بازه $(1, +\infty) \cup [-\infty, 0]$ صعودی و در بازه $[0, +\infty)$ نزولی است.



۴



۵

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -2a - 7 \\ q(-2) = 11 \end{cases} \Rightarrow a = -9$$

۶

الف درست

۷

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow p(-1) = 2 \Rightarrow (-1)^x + k(-1)^x - 3 = 2 \Rightarrow k = 4$$

۸

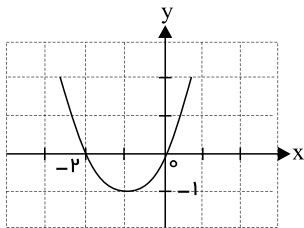
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 2x + 1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$$

۹

$$(x + 2)(x^x - 2x^x + 4x^x - 8x + 16)$$

۱۰ اکیداً صعودی $[-1, +\infty)$

اکیداً نزولی $(-\infty, -1]$

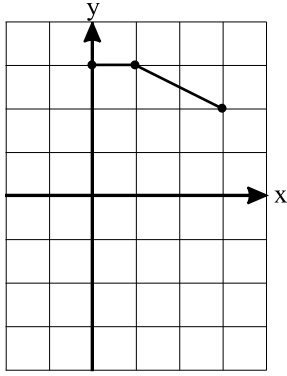


۱۱

$$\begin{cases} p(-2) = -1 \\ p(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 7 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{8}{3}, b = -\frac{11}{3}$$

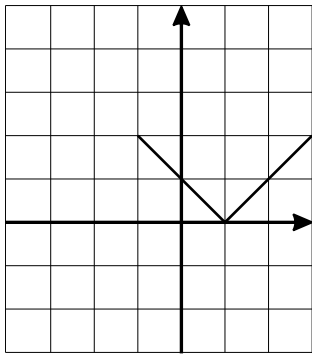
$$\frac{x^0 + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x^x - x^x + x^x - x + 1)}{x + 1} = x^x - x^x + x^x - x + 1$$

۱۲



۱۳

$$D_g = [0, 3]$$

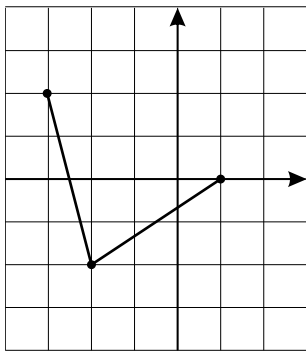


۱۴

اکیداً صعودی $(1, +\infty)$
اکیداً نزولی $(-\infty, 1]$

$$\begin{aligned} -8 + 4a - 2b + 2 &= 0 \Rightarrow 4a - 2b = 6 \Rightarrow a = 0 \\ 1 + a + b + 2 &= 0 \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow b = -3 \end{aligned}$$

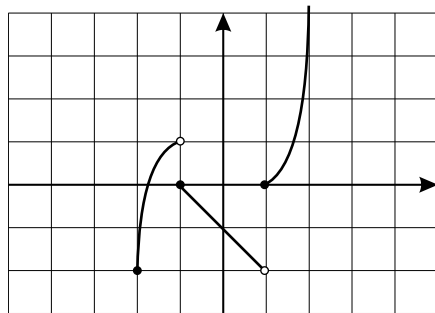
۱۵



۱۶

$$D_f = [-3, 1]$$

$$R_f = [-2, 2]$$



۱۷

صعودی $[-2, -1)$ ، صعودی $[1, +\infty)$ ،
نزولی $(-1, 1)$

$$x^5 + 2^5 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

۱۸

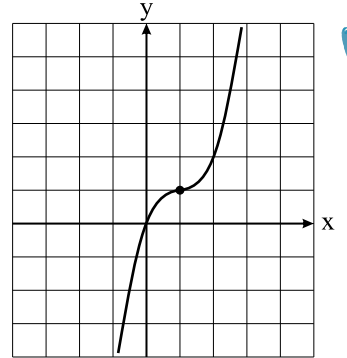
۱۹

$$3^{2x-10} \leq 3^{-4}$$

$$2x - 10 \leq -4 \Rightarrow x \leq 3$$

$$g(x) = x^x - 3x^x + 3x - 1 + 1 = (x-1)^x + 1$$

۲۰



اکیداً یکتوا (اکیداً صعودی)

۲۱

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^x \Rightarrow 2x + 1 \geq x \Rightarrow x \geq 1$$

$$x = a \Rightarrow 2a^x - 8 = 0 \Rightarrow a^x = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

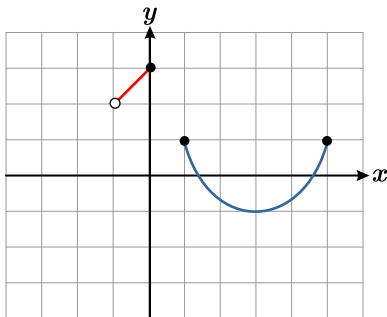
۲۲

۲۳

۲۴

الف

[۲, ۴]



الف

$(-\infty, 0)$ اکیداً یکتوا (اکیداً صعودی) و $(0, +\infty)$ اکیداً یکتوا (اکیداً صعودی).

$$\begin{cases} p(2) = 0 \Rightarrow 8 - 2a + b = 0 \\ p(-1) = 3 \Rightarrow a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -8 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$$

۲۵

ب

خیر- در کل دامنه اکیداً یکتوا نیست.

۲۶

۲۷

الف درست

۲۸

الف انقباض افقی

۲۹

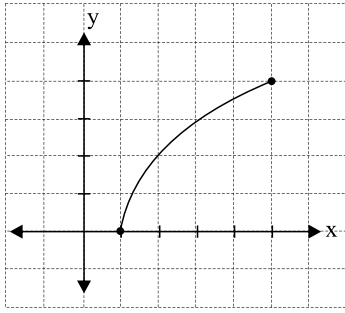
الف ثابت

۳۰

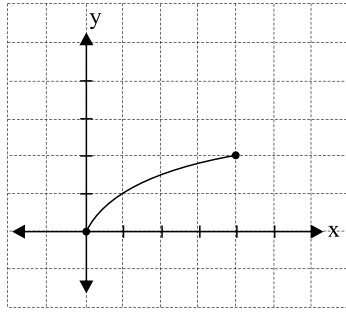
الف نادرست

۳۱

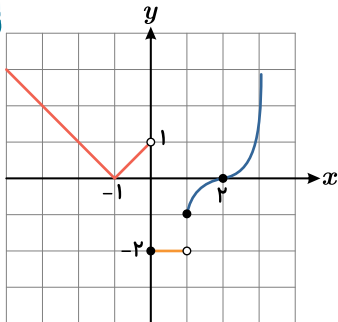
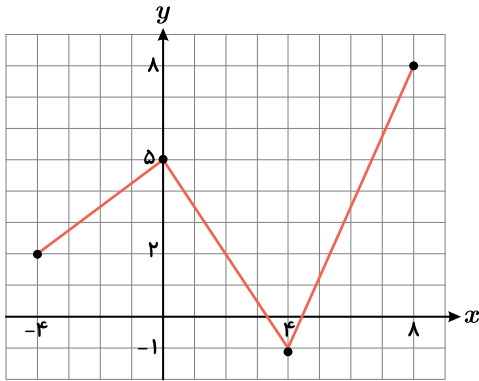
$$R_g = [0, 4] \text{ و } D_g = [1, 5]$$



(ب)



(الف)



۳۲

$$R = [-1, 8]$$

۳۳

اکیداً صعودی $[1, +\infty)$, $(-1, 0)$
 اکیداً نزولی $(-\infty, -1]$

۳۴

$$p(2) = 3 \Rightarrow 12 + 2m + 2m + 1 = 3 \Rightarrow 4m = -10 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

$$f(-2) = -\frac{5}{2}(-2)^2 - (-\frac{5}{2})(-2) + 3 = -12$$

۳۵ می‌دانیم: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ برابر است با: $r(x) = f(-\frac{b}{a})$

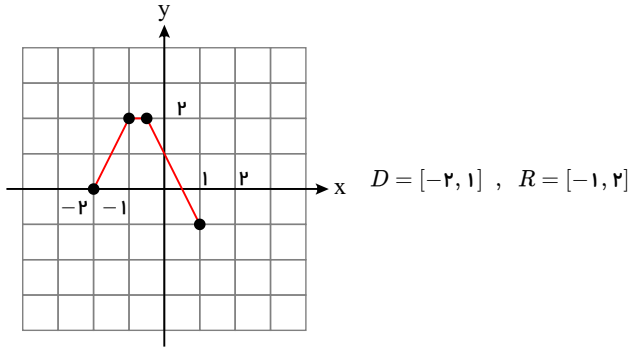
$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2, \quad P(2) = 0 \rightarrow 4a + 2b = -6 \quad (1)$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1, \quad P(-1) = 3 \rightarrow a - b = 6 \quad (2)$$

$$a = 1 \text{ و } b = -5$$

بنابراین از حل معادله (۱) و (۲) داریم:

۳۶



نکتہ: باقی ماندہ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از: $r(x) = f(-\frac{b}{a})$ (۳۷)

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow p(1) = 4 \rightarrow a + b = 3 \quad (1)$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow p(-2) = 0 \rightarrow 4a + b = 8 \quad (2)$$

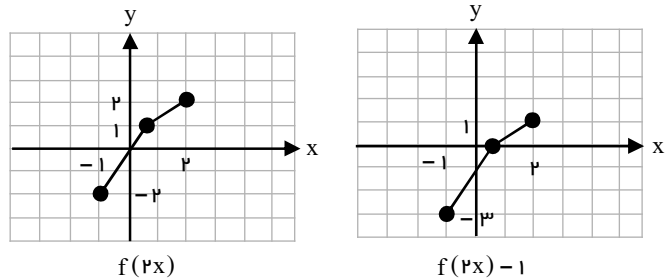
$$a = \frac{5}{3}, \quad b = \frac{4}{3}$$

دامنه: $D_g = [-1, 2]$

برد: $R_g = [-3, 1]$

در نتیجه با حل دستگاه معادله (۱) و (۲) داریم:

با توجه به نمودار دامنه و برد برابر است با: (۳۸)



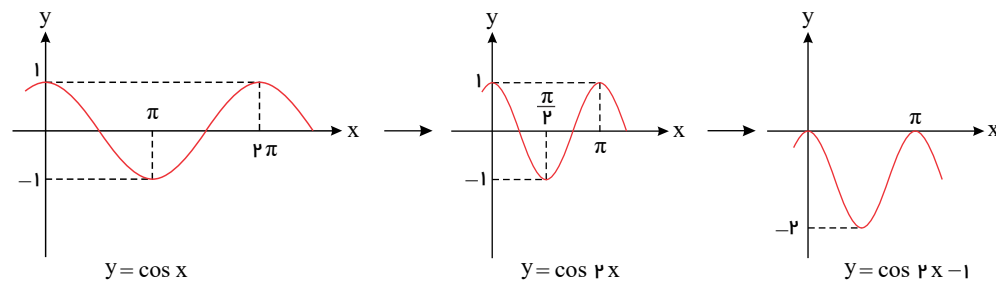
نکتہ: باقی ماندہ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از: $r(x) = f(-\frac{b}{a})$ (۳۹)

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow p(2) = 0 \rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (1)$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow p(-1) = 0 \rightarrow a - b = 0 \quad (2)$$

$$a = -\frac{3}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}$$

از حل رابطه (۱) و (۲) داریم:

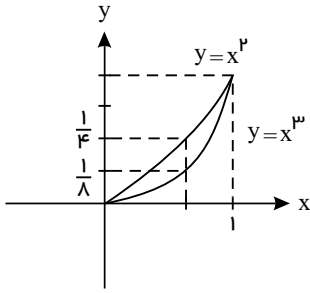


الف

(۴۰)

(۴۱)

درست؛ به نمودار زیر دقت کنید:



ب نادرست؛ برای مثال $f(x) = 5$ در \mathbb{R} صعودی است ولی صعودی اکید نیست.

۴۲

الف نادرست

۴۳

الف درست

ب

$$f'(x) = -2x + 2$$

نادرست. زیرا با توجه به جدول در بازه $(-\infty, 3]$ اکیداً صعودی نیست.

در بازه $(-\infty, 1]$ اکیداً صعودی است.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		\nearrow	\searrow

ب نادرست. زیرا باید مشتق چپ و راست برابر باشند.

ت درست

۴۴ نکته: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از:

$$r(x) = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

با توجه به نکته بالا $y(1) = 4$ است.

$$1 + a + 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{\text{تبع}} -8 + 4a - 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 10 \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} -a + b = -2 \\ 4a + b = 10 \end{cases}$$

$$3a = 8 \rightarrow a = \frac{8}{3}$$

با جای گذاری در رابطه (۱) داریم:

$$a + b = 2 \xrightarrow{a = \frac{8}{3}} b = \frac{-2}{3}$$

۴۵ نکته: می‌دانیم:

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$